

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES



**Comparación Bayesiana de modelos de Descomposición de
Tendencia- Ciclo: Aplicación empírica para países de América
Latina y del G7**

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
BACHILLER EN CIENCIAS SOCIALES CON MENCIÓN EN
ECONOMIA**

AUTORES

Díaz González, Joaquín
Palermo Llanco, Khertd Victor

ASESOR

Rodríguez Briones, Gabriel Hender

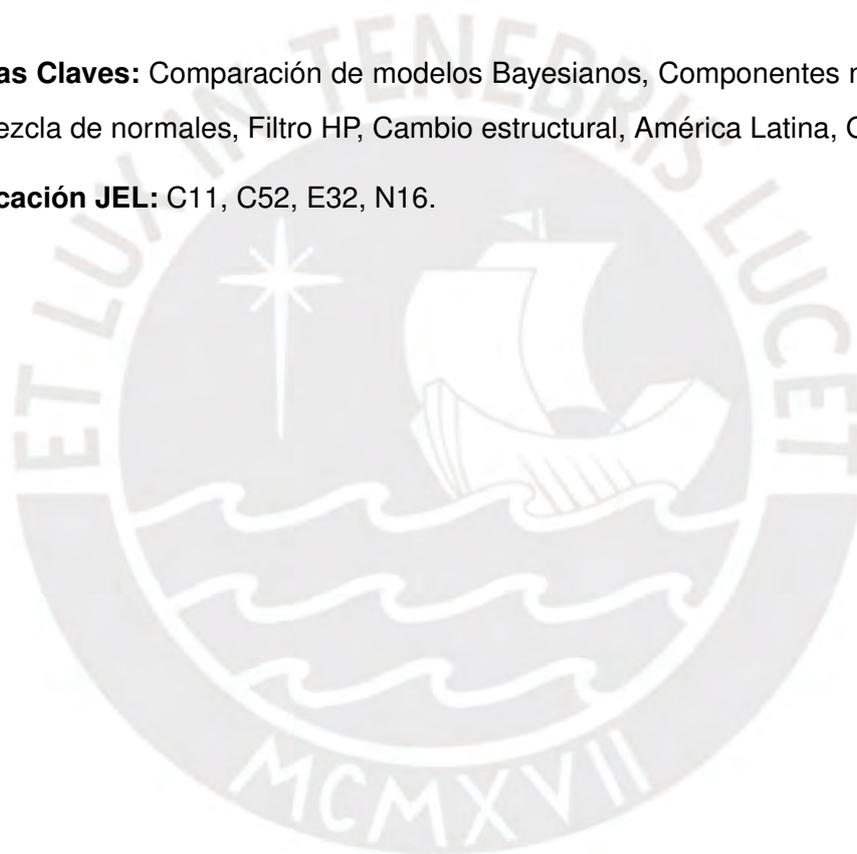
2020

Resumen

Este trabajo realiza una comparación de diferentes modelos de descomposición de tendencia-ciclo del producto, utilizando la metodología propuesta por Grant y Chan (2017) para dos grupos de países: América latina y el G7. Los resultados indican que existe una preferencia por el modelo de componentes no observados que incluyen 1 o 2 quiebres. Asimismo, se hace una comparación con los modelos propuestos por Perron y Wada (2009, 2016) y con el filtro HP. La preferencia por un modelo u otro depende del país bajo análisis. Además, los resultados también indican que los choques permanentes son más importantes que los transitorios en la mayoría de países.

Palabras Claves: Comparación de modelos Bayesianos, Componentes no observados, Mezcla de normales, Filtro HP, Cambio estructural, América Latina, G7.

Clasificación JEL: C11, C52, E32, N16.

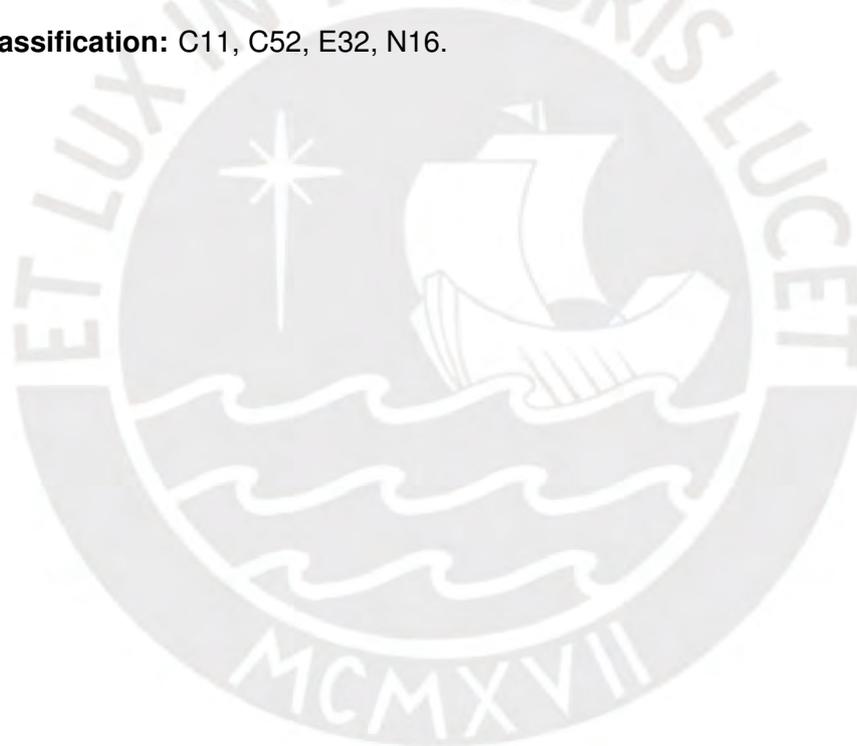


Abstract

This work makes a comparison of different models of trend-product cycle decomposition, using the methodology proposed by Grant and Chan (2017) for two groups of countries: Latin America and the G7. The results indicate that there is a preference for the unobserved component model that includes 1 or 2 breaks. Likewise, a comparison is made with the models proposed by Perron and Wada (2009, 2016) and with the HP filter. The preference for one model or another depends on the country under analysis. In addition, the results also indicate that permanent shocks are more important than transitory ones in most countries.

Key Words: Bayesian Model Comparison, Unobserved Components, Mixture of normals, HP Filter, Structural change, Latin America, G7.

JEL Classification: C11, C52, E32, N16.



Índice

1	Introducción	5
2	Revisión de literatura	7
3	Metodología	14
3.1	Los Modelos	14
3.2	Muestreo de Gibbs	16
3.2.1	Estimación de Modelo UCUR	16
3.3	Comparación de Modelos	19
4	Resultados	20
4.1	Resultado de comparación de modelos	20
4.2	Estimaciones Tendencia-Ciclo y Descomposición de la Varianza	22
4.3	Quiebres en el Crecimiento de la Tendencia del Producto	26
5	Conclusiones	28
6	Referencias	29
7	Tablas	35
7.1	Tabla 1	35
7.2	Tabla 2	37
7.3	Tabla 3	39
7.4	Tabla 4	40
7.5	Tabla 5	41
7.6	Tabla 6	43
7.7	Tabla 7	45
7.8	Tabla 8	47
8	Figuras	49
8.1	Figura 1	49

8.2	Figura 2	50
8.3	Figura 3	51
8.4	Figura 4	52
8.5	Figura 5	53
8.6	Figura 6	54
8.7	Figura 7	55
8.8	Figura 8	56
8.9	Figura 9	57
8.10	Figura 10	58
8.11	Figura 11	59
8.12	Figura 12	60
8.13	Figura 13	61
8.14	Figura 14	63
A	Anexo: Detalles de la Estimación	65
A.1	Estimación del Modelo UCUR	65
A.2	Estimación de Modelo UCUR $-t_0$	67
A.3	Estimación Modelo DT $-t_0$	68
B	Anexo: Evaluación integrada de verosimilitud	70
B.1	Modelo UCUR	70
B.2	Modelo UCUR $-t_0$	71
B.3	Modelo DT $-t_0$	72

1 Introducción

El ciclo económico hace referencia a la fluctuación inherente de la actividad económica en torno a una tendencia de crecimiento de largo plazo. Las investigaciones sobre la medición de los ciclos económicos han sido durante mucho tiempo una herramienta necesaria en el campo de la macroeconomía, tanto en estudios teóricos como, sobre todo, en aplicaciones empíricas. La necesidad de un enfoque cuantitativo para la medición del ciclo económico surge debido a las implicancias encontradas en torno al componente cíclico de la serie, en la mayoría de modelos macroeconómicos. Para superar estos problemas, es necesario separar la tendencia y el ciclo. Sin embargo, existen diferencias entre los resultados de los múltiples modelos de descomposición. En ese sentido, resulta importante llevar a cabo un ejercicio de comparación de modelos de manera que se pueda seleccionar el mejor modelo de descomposición del producto para los países de América Latina y del G7.

La importancia de la descomposición de una variable radica en poder distinguir las fuerzas que causan el crecimiento de largo plazo y aquellas que causan fluctuaciones temporales como es el caso de las recesiones. Para comparar los diferentes modelos de descomposición de tendencia-ciclo del producto, utilizamos una comparación de modelos por medio del factor de Bayes (BF) realizada por Grant y Chan (2017), la cual es una forma sencilla de comparar modelos usando probabilidades marginales. Asimismo, los autores desarrollan una nueva técnica mediante el método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Esta nueva técnica se basa en la matriz dispersa y en algoritmos de banda para los modelos de espacio estado, que resultan ser más eficientes que los algoritmos basados en el filtro de Kalman. Además, se lleva a cabo una comparación de las estimaciones del ciclo con el filtro propuesto por Hodrick y Prescott (1997) y el modelo componentes no observados que incluye una mezcla de normales en los componentes cíclico y tendencial desarrollados por Perrón y Wada (2009, 2016), en las cuales se puede manejar cambios repentinos de nivel y pendiente en la función de tendencia, así como valores atípicos.

El texto se estructura de la siguiente manera: en la segunda sección se realiza una revisión cronológica de la literatura. En la sección 3 se presenta la metodología, basada

en la descomposición tendencia-ciclo propuesta por Grant y Chan (2017). La sección 4 presenta y discute los resultados. Finalmente, la sección 5 presenta las conclusiones de la investigación.



2 Revisión de literatura

Beveridge y Nelson (1981) introdujeron un procedimiento de descomposición general de series de tiempo no estacionarias con una tendencia estocástica. Mediante el uso de un modelo ARIMA encuentran que, las contracciones y expansiones medidas de las series de tiempo tienen una duración más o menos equivalente a la cronología de la Oficina Nacional de Investigación Económica (NBER) y, en menor medida, con la cronología de Zarnowitz y Boschan (1975), caracterizadas por ciclos expansivos más largos y períodos de recesión más cortos.

La correlación negativa entre las innovaciones del componente cíclico y tendencial es una característica importante de la descomposición del modelo ARIMA. Siguiendo este marco, Watson (1986) estudió las series anuales estadounidenses del PNB, el ingreso disponible y el consumo de bienes no duraderos mediante un modelo ARMA en primeras diferencias y un modelo de componentes no observados (UC). El autor encuentra que, aunque es muy difícil diferenciar los modelos por razones estadísticas, el comportamiento implícito a corto plazo es muy similar; sin embargo, en el largo plazo en el modelo UC las innovaciones de la serie del PNB tienen un impacto mucho menor que en el modelo ARIMA. Por su parte, Clark (1987) mantiene la suposición de perturbaciones no correlacionadas, pero considera la pendiente de la tendencia como una marcha aleatoria, mientras que el componente cíclico se modela como un proceso AR(2). Teniendo en cuenta estas especificaciones, concluye que la actividad económica de los Estados Unidos depende de igual medida de las innovaciones de los componentes cíclico y tendencial.

Stock y Watson (1988) llevan a cabo un resumen de los principales hallazgos en los procesos de descomposición del producto, tanto en los procedimientos que utilizan el modelo ARIMA como el modelo UC. Una diferencia entre ambos procedimientos es que, a causa de la presencia de una tendencia estocástica, las perturbaciones reales son más importantes en el primero que en el segundo. Además, la correlación perfecta en el modelo ARIMA hace que se le atribuya una mayor importancia a los cambios en la tendencia. Mientras que, en el caso de no correlación, se da mayor importancia al componente cíclico. Los autores concluyen que la formulación de una tendencia estocás-

tica parece proporcionar una buena aproximación del comportamiento a largo plazo de muchas variables agregadas para los EE.UU., ya que constituyen una parte cuantitativamente grande del comportamiento del producto.

La evidencia empírica sugiere que las perturbaciones negativas tienen una corta duración y tienen un efecto más duradero en el nivel del producto. Friedman (1964) llamó a esta peculiaridad empírica el efecto plucking. La duración de una recesión se correlaciona con la duración de la siguiente expansión, pero no viceversa; por lo tanto, existe una asimetría entre las perturbaciones positivas y negativas. De la misma forma, Neftçi (1984) encuentra que la tasa de desempleo de los Estados Unidos evidencia una dependencia de la duración o un comportamiento asimétrico en varias fases del ciclo económico. Diebold, et al. (1993) y Sichel (1991) también encuentran evidencia de la dependencia de la duración en las series de tiempo del PNB de los Estados Unidos, Gran Bretaña y Francia.

Kim y Nelson (1999) utilizan un modelo UC que incorpora características del modelo plucking encontrado en Friedman (1964). Para este modelo, el componente cíclico se presenta como un AR(2), con perturbaciones compuestas de choques simétricos y asimétricos. En el caso del PBI, la hipótesis de que la tendencia estocástica proporciona un límite superior al producto establecido no puede ser rechazada. Los autores concluyen que la producción es impulsada por choques permanentes durante períodos normales y por perturbaciones transitorias en períodos de recesión o crecimiento.

Con respecto a los resultados conflictivos del comportamiento del componente cíclico entre los modelos ARIMA y UC, Morley, et al. (2003) logran conciliar estas diferencias al demostrar que ambos modelos son teóricamente equivalentes. Su trabajo demuestra que la diferencia en resultado se debe a una restricción impuesta en el modelo UC. En el caso de que esta restricción se relaje, ambos enfoques conducen a resultados muy similares. Como resultado, se tiene que por un lado, ambos métodos de descomposición implican que los choques reales o permanentes son importantes mientras que por otro lado, existen diferencias entre el comportamiento del ciclo. El ciclo del modelo UC0, que sigue la especificación de Clark (1987), tiene ciclos de gran amplitud y de gran persistencia mientras que los modelos ARIMA y UC-ARMA(2,0), denotado como UCUR, son de menor amplitud y persistencia comparados con el UC0.

Otro tipo de literatura son los filtros estadísticos. Uno de los más conocidos es el filtro propuesto por Hodrick y Prescott (1997) que se puede clasificar como un filtro high-pass, ya que elimina los ciclos de baja frecuencia. Sin embargo, una de sus desventajas es que puede generar ciclo espúreos (Harvey y Jaeger, 1993). Baxter y King (1999) y Christiano y Fitzgerald (2003) también desarrollan un conjunto de filtros aproximados. Estos se pueden clasificar como filtros de band-pass, ya que eliminan los componentes de alta y baja frecuencia. Sin embargo, una de sus principales desventajas es que no aíslan completamente el ciclo (Murray, 2003).

Canova (1998) realiza un balance en la aplicación de diferentes filtros a un conjunto de series de tiempo trimestrales de los Estados Unidos. Supone que todos los procedimientos de filtrado son solo aproximaciones que aíslan los componentes tendenciales y cíclicos de una serie. En sus hechos estilizados, encuentra que el consumo es menos volátil que la producción y que, para siete de los doce modelos utilizados, la productividad es menos volátil que el PNB. Cuando utiliza el salario real, en lugar de la productividad, su variabilidad relativa excede la del PNB en nueve de los doce casos.

En literatura para los países de el G7, Flaig (2002) utiliza el modelo UC para descomponer el PBI de Alemania desde 1960 al 2001. Sus resultados indican que se puede identificar 2 ciclos con un periodo de 4 y 8 años, respectivamente. Por su parte, Proietti (2006) ilustra los problemas de interpretación que surgen de descomposición en tendencia- ciclo con perturbaciones correlacionadas. Para ello, utiliza el modelo UC y ARIMA para modelar el PBI de EE.UU. e Italia, con ello concluyen que la correlación negativa implica que las observaciones futuras lleven la información para evaluar la postura cíclica.

Guérin et al. (2011) estiman la brecha del producto de la zona del Euro mediante 9 modelos que incluyen modelos lineales, no lineales, univariados y bivariados. Luego, construyen medidas promediadas por el modelo de la brecha del producto para hacer frente a la incertidumbre de los modelos y la inestabilidad de los parámetros. Busetti y Caivano (2013) y Alqaralleh (2019) adaptan un modelo UC para identificar los ciclos económicos de los países de el G7 y encuentra que la persistencia, duración y amplitud de los ciclos extraídos varía con el tiempo y de un país a otro. Además, Busetti y Caivano (2013) incluyen una perspectiva bayesiana y encuentran que esta ayuda a formular

declaraciones probabilísticas sobre el desarrollo del ciclo económico.

Asimismo, Melolinna y Tóth (2019) utilizan un conjunto de modelos univariados y bivariados que permiten correlacionar los choques de los componentes cíclico y tendencial para estudiar la productividad de Reino Unido. Además, utilizan técnicas de muestreo Bayesianas para las estimaciones

Mohr (2005) propone un enfoque intermedio generalizado del filtro HP para descomponer el PBI de países como Alemania, Francia e Italia. En consecuencia, el filtro resultante de tendencia-ciclo tiene mejores propiedades de fin de muestra que el filtro HP, debido a que la prociclicidad de las estimaciones al final de la muestra desaparece. Blagrove et al. (2015) extienden el filtro multivariado utilizado por Benes et al. (2010) para la estimación del PBI potencial de 16 países, las cuales incluyen a los países de el G7, con excepción de EE.UU. y Reino Unido.

liboshi (2011) descompone las series de PBI real y la tasa de desempleo de Japón de 1955 hasta el año 2000 utilizando el enfoque de Morley et al. (2003). Los resultados mostraron que no es posible obtener una descomposición única incluso utilizando el mismo modelo de componente no observable y que el resultado de la descomposición depende en gran medida de la relación de las variaciones de ambos choques de tendencia y ciclo, así como la correlación de ambos choques mostrada por Morley et al. (2003).

En la literatura de América Latina, Gallego y Johnson (2001) realizan un ejercicio de comparación de metodologías de descomposición de tendencia ciclo para estimar el producto tendencial, las tasas de crecimiento implícitas y la brecha de producto chileno. Asimismo, Chumacero y Gallego (2002), evalúan la confiabilidad de métodos alternativos de tendencia aplicados al Índice de Actividad Mensual de Chile (IMACEC). Encuentran que sus estimaciones del componente cíclico tiene un comportamiento volátil. A su vez, los filtros utilizados son poco robustos e inestables en estimaciones al final de la muestra.

Ellery et al. (2002), Araújo et al. (2008) y Sabioni et al. (2017) sugieren un nuevo método que promedia una variedad de filtros HP. Los autores brindan información acerca del ciclo económico de Brasil y crean un conjunto de hechos que están relacionados con las fechas de recesión y expansión del Comité de Citas de Ciclos Económicos (CODACE). Sus resultados muestran que el ciclo económico es asimétrico en el sentido de que tiene

expansiones más duraderas que las recesiones. Además, encuentran que la tendencia de largo plazo de Brasil es similar a la de EE.UU.

Trajtenberg (2004) utiliza técnicas de descomposición, tanto determinísticas como estocásticas, a distintas series macroeconómicas de Argentina y concluye que el uso de uno u otro modelo depende de la variable que se desea analizar. Además, Krysa y Lanteri (2018) estiman el PBI potencial de Argentina para el periodo comprendido entre 1993Q1 y 2018Q1. Utilizan el filtro HP y el filtro de Baxter y King (1999). Los resultados de los distintos métodos muestran cierta robustez entre sí.

Faal (2005), utiliza un modelo UC para descomponer el PBI mexicano y encuentra ciclos estacionarios, tanto para el modelo restringido como irrestringido. Del mismo modo, Catalán y Romero (2018) estiman el ciclo y el PBI potencial de México mediante filtros univariados, los cuales indican que la economía Mexicana ha experimentado seis ciclos durante el periodo de tiempo estimado.

Por su parte, Seminario et al. (2007) utiliza modelos no lineales para estimar el PBI potencial peruano. Para este análisis, los autores utilizaron un conjunto de métodos como el filtro de Hodrick y Prescott (1997), el filtro de Baxter y King (1999), una metodología de método pico propuesta por el NBER siguiendo el trabajo de Ochoa y Lladó (2003), el método de Marfán y Artiagoitia (1989) y un método sectorial para obtener la producción potencial del período indicado de 1950 a 2007. Castillo et al. (2007) utilizan la metodología de Baxter y King (1999) y sus resultados muestran que hubo tres ciclos económicos completos entre 1979 y 2005. Además, encontraron un comportamiento más estable en el ciclo y tendencia en la década de 1990, en comparación con la década de 1980.

En Rodríguez (2010a) se identifica la brecha del producto del PBI peruano utilizando la definición teórica de la brecha dentro de una curva de Phillips, incluyendo la especificación de Basistha y Nelson (2007) bajo el marco Nuevo Keynesiano. Rodríguez (2010a) utiliza un modelo UC bivariado para el período 1980-2005. Los resultados indican una pendiente muy plana para la curva de Phillips pero con una brecha de producción grande y persistente. Asimismo, Rodríguez (2010b) sigue a Dómenech y Gómez (2006) y utiliza un modelo UC para extraer el componente cíclico del producto, la tasa de inflación subyacente y la tasa de desempleo estructural o NAIRU de 1980 a 2007. Los resultados

sugieren que solo la tasa de inflación contiene información útil para estimar la brecha del producto.

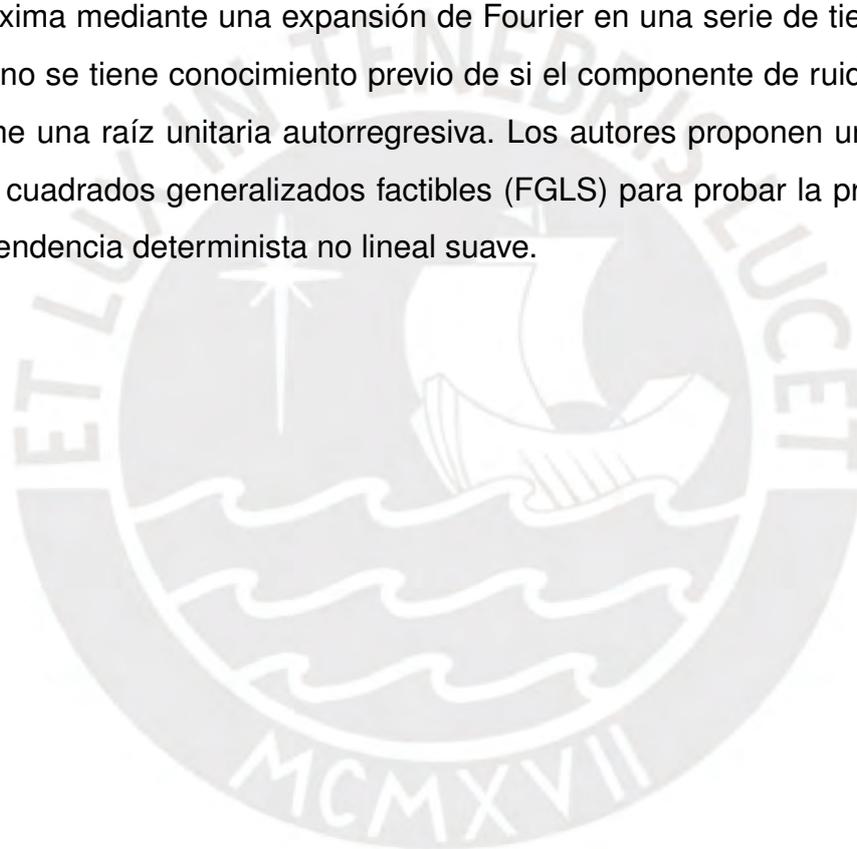
Wada y Perron (2006) y Perron y Wada (2009, 2016) utilizan un nuevo procedimiento que supera los problemas de identificación de los modelos UC y ARIMA al tiempo que permite cambios en la tendencia y la simetría en el componente cíclico. El procedimiento permite capturar cambios en el comportamiento de la serie temporal, captura las no linealidades de la serie e identifica las probabilidades de estar en un régimen de varianza alta o baja sin la necesidad del supuesto de transición de Markov. De acuerdo con estas especificaciones, Guillén y Rodríguez (2014) descomponen el PBI peruano. Estos autores estimaron 7 modelos univariados, con diferentes configuraciones. De este análisis, obtienen que el mejor modelo es el UC que incluye mezcla de normales en las perturbaciones del ciclo y de la tendencia. Además, los autores encuentran que, en todos los modelos, los ciclos a corto plazo son elementos importantes para explicar las fluctuaciones de producción.

En literatura bayesiana, Morley y Piger (2012) llevan a cabo una comparación de modelos utilizando criterios de información y el promedio mediante una aproximación asintótica al BF. Por su parte Luo y Startz (2014) compara los modelos de Morley et al. (2003) con o sin quiebre y un modelo con una fecha de quiebre desconocida, utilizando métodos bayesianos. Sus resultados muestran que el mejor modelo es el de Morley et al. (2003) con un quiebre en el primer trimestre del 2016 para los Estados Unidos.

Recientemente, Grant y Chan (2017) proponen en un ejercicio formal de comparación bayesiana de modelos motivado por los distintos resultados entre los modelos de descomposición del producto. Comparan los modelos UC de Clark (1987) y Morley et al. (2003) y los modelos de tendencia deterministas. Asimismo, Grant y Chan (2017), siguiendo a Perron y Wada (2009), permiten la posibilidad de uno o dos quiebres en la tendencia para todos los modelos a comparar. Grant y Chan (2017) Desarrollan una nueva técnica de estimación bayesiana utilizando el método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Una característica clave de este enfoque es que se basa en los algoritmos de banda y matriz dispersa en los modelos de espacio estado desarrollados por Chan y Jeliazkov (2009), McCausland, et al. (2011) y Chan (2013). Con estas especificacio-

nes, los autores concluyen que el mejor modelo es el de componentes no observados correlacionados con un quiebre en tendencia en el año 2007 para los Estados Unidos.

En vista del amplio conjunto de modelos comparados en Grant y Chan (2017), es conveniente aplicar su metodología para comparar modelos de descomposición del PBI de países de América Latina y del G7. Asimismo, para profundizar el ejercicio de comparación se incluyen los modelos de mezcla de normales de Perron y Wada (2009, 2016) y el filtro HP. A esto se le suma un ejercicio de robustez que sigue el procedimiento de expansión de Fourier adoptado por Perron et. al (2017). En este trabajo, los autores proponen una prueba para identificar la presencia de una tendencia determinística no lineal, que se aproxima mediante una expansión de Fourier en una serie de tiempo univariada para la que no se tiene conocimiento previo de si el componente de ruido es estacionario o contiene una raíz unitaria autorregresiva. Los autores proponen un procedimiento de Mínimos cuadrados generalizados factibles (FGLS) para probar la presencia de una función de tendencia determinista no lineal suave.



3 Metodología

3.1 Los Modelos

Para modelar las economías Latinoamericanas y del G7, seguimos el enfoque adoptado por Grant y Chan (2017). El enfoque de estos autores consiste en realizar una comparación Bayesiana de los modelos de descomposición tendencia-ciclo propuestos por Clark (1987) y Morley, et al. (2003).

Esta descomposición se construye promediando los valores de los parámetros con respecto a la distribución posterior conjunta de los parámetros y, por lo tanto, el procedimiento no depende de un conjunto específico de parámetros. Grant y Chan (2017) consideran un proceso de descomposición del ciclo de tendencia para la producción agregada de la siguiente forma:

$$y_t = \tau_t + c_t, \quad (1)$$

$$\tau_t = \mu_t + \tau_{t-1} + u_t^\tau, \quad (2)$$

$$c_t = \phi_1 c_t + \dots + \phi_p c_{t-p} + u_t^c, \quad (3)$$

donde y_t es el logaritmo del PBI real, τ_t indica la tendencia de la serie y c_t es el componente cíclico de la serie. El componente de tendencia no estacionario τ_t se modela como una marcha aleatoria con deriva, mientras que el componente cíclico c_t se modela como un proceso $AR(p)$ de media cero. Además, en este modelo la condición inicial τ_0 puede ser modelada como un parámetro a ser calculado mientras que por simplicidad se asuma $c_{1-p} = \dots = c_0 = 0$. Siguiendo a Morley, et al. (2003), Grant y Chan (2017) establecen $p = 2$ y además asumen que las distribuciones u_t^τ and u_t^c son conjuntamente Normales:

$$\begin{pmatrix} u_t^c \\ u_t^\tau \end{pmatrix} \sim N \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_c^2 & \rho \sigma_c \sigma_\tau \\ \rho \sigma_c \sigma_\tau & \sigma_\tau^2 \end{pmatrix} \right),$$

donde el modelo permite una correlación distinta de cero entre las perturbaciones u_t^τ y

u_t^c , por lo tanto, abarca el modelo de Clark (1987) como un caso especial cuando $\rho = 0$; este caso particular se denota como UC0. El modelo (1) – (3) se denota como UCUR.

Perron y Wada (2009, 2016) señalan que la descomposición indicada en el modelo anterior puede ser sensible a cómo se modela el componente tendencial. Los autores mostraron que cuando se permite un cambio estructural, las estimaciones del componente cíclico se hacen más grandes y más persistentes. Por lo tanto, Grant y Chan (2017), consideran una especificación en la cual se modela un cambio en tendencia, esto se hace acorde a los hallazgos de Perron y Wada (2009, 2016) quienes evidencian la relevancia empírica de permitir la existencia de quiebres en los modelos de descomposición de tendencia ciclo al margen de la especificación particular que se utilice. De este modo que la ecuación (2) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\tau_t = \mu_1 1(t < t_0) + \mu_2 1(t \geq t_0) + \tau_{t-1} + u_t^\tau, \quad (4)$$

donde por medio de la función indicatriz se determina que la tendencia estocástica τ_t tendrá una tasa de crecimiento de μ_1 antes del quiebre en t_0 y una tasa de crecimiento de μ_2 después del quiebre. En el ejercicio Bayesiano de comparación de modelos, los autores fechan el punto de cambio estructural comparando modelos con diferentes t_0 . Grant y Chan (2017) denotan el modelo UCUR con quiebre en t_0 como UCUR- t_0 .

Por último, los autores consideran un conjunto de modelos con tendencia determinística siguiendo los hallazgos de Perron y Wada (2009). Sin embargo, en el trabajo de Perron y Wada (2009) los autores encuentran que la estimación de la variancia de la innovación de la tendencia, σ_τ^2 , se aproxima a 0, lo cual se encuentra fuera del rango de parámetros que podría tener la variancia, debido a que la variancia debería ser positiva. Para evitar este problema, se considera la siguiente tendencia determinística:

$$\tau_t = \mu_1 1(t < t_0) + \mu_2 1(t \geq t_0) + \tau_{t-1}. \quad (5)$$

El modelo con la especificación anterior es denotado como DT- t_0 y como DT cuando se considera el modelo sin quiebre.

3.2 Muestreo de Gibbs

Para estimar los modelos mencionados anteriormente, los autores esbozan un procedimiento de estimación bayesiano utilizando el método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

3.2.1 Estimación de Modelo UCUR

Para el modelo UCUR dado en (1) – (3) los autores suponen parámetros prior no informativos para los parámetros $\phi = (\phi_1, \phi_2)'$, σ_c^2 , σ_τ^2 , ρ , μ_1 y τ_0 del modelo. Asimismo, los autores asumen priors estándar independientes para ϕ , μ_1 y τ_0 : $\phi \sim N(\phi_0, \mathbf{V}_\phi)1(\phi \in \mathbf{R})$, $\mu_1 \sim N(\mu_0, V_\mu)$, $\tau_0 \sim N(\tau_{00}, V_\tau)$, donde \mathbf{R} es la región estacionaria. Asimismo, se asumen varianzas prior relativamente grandes: $\mathbf{V}_\phi = \mathbf{I}_2$, $V_\mu = 1$ y $V_\tau = 100$. Para obtener las medias prior de cada país se realizó una serie de procedimientos. Primero, el τ_{00} se obtuvo a partir del logaritmo natural del primer valor de la serie del PBI de cada país multiplicado por 100. Segundo, el μ_0 se obtuvo a partir de la tasa de crecimiento trimestral anualizada de cada país. Por último, para obtener los priors de ϕ_0 se extrajo el ciclo de la serie del PBI de cada país por medio del filtro Baxter and King y se extrajeron los coeficientes del ciclo modelado como un AR(2).

Este modelo considera una distribución prior uniforme en $(-1, 1)$ para ρ , y priors uniformes en $(0, 3)$ para σ_c^2 y σ_τ^2 . Por conveniencia se denota el vector columna $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$, y de manera similar se denota $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{c} , \mathbf{u}^c y \mathbf{u}^τ . Los muestreos posterior pueden luego obtenerse mediante un muestreo secuencial de una serie de densidades: $p(\boldsymbol{\tau}|\mathbf{y}, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0)$; $p(\phi|\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0)$; $p(\sigma_c^2|\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \phi, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0)$; $p(\sigma_\tau^2|\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \phi, \sigma_c^2, \rho, \mu_1, \tau_0)$; $p(\rho|\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \mu_1, \tau_0)$; $p(\tau_0|\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \mu_1, \rho)$.

Para proceder a la estimación Bayesiana el sistema (1) – (3) es reescrito en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \boldsymbol{\tau} + \mathbf{c}, \\ \mathbf{H}_\phi \mathbf{c} &= \mathbf{u}^c, \\ \mathbf{H} \boldsymbol{\tau} &= \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{u}^\tau,\end{aligned}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = (\mu_1 + \tau_0, \mu_1, \dots, \mu_1)'$ y

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\phi_2 & -\phi_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta que ambos \mathbf{H} y \mathbf{H}_ϕ son matrices cuadradas con determinante igual a la unidad, estas son invertibles. Por lo tanto, dado ϕ , σ_c^2 , σ_τ^2 , ρ y τ_0 tenemos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_c^2 (\mathbf{H}'_\phi \mathbf{H}_\phi)^{-1} & \rho \sigma_c \sigma_\tau (\mathbf{H}' \mathbf{H}_\phi)^{-1} \\ \rho \sigma_c \sigma_\tau (\mathbf{H}'_\phi \mathbf{H})^{-1} & \sigma_\tau^2 (\mathbf{H}' \mathbf{H})^{-1} \end{pmatrix} \right),$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$.

Una vez establecido lo anterior se procede a obtener los muestreos posterior. Tomando en cuenta las propiedades de la distribución Gaussiana, se tiene que la distribución marginal de $\boldsymbol{\tau}$ (incondicional en \mathbf{c}) es de la siguiente forma:

$$(\boldsymbol{\tau} | \sigma_\tau^2, \mu_1, \tau_0) \sim N(\boldsymbol{\alpha}, \sigma_\tau^2 (\mathbf{H}' \mathbf{H})^{-1}),$$

mientras que la distribución condicional de \mathbf{y} dado τ y los demás parámetros esta dada por:

$$(\mathbf{y}|\tau, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) \sim N(\mathbf{H}_\phi^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{H}_\phi^{-1}\mathbf{B}\tau, (1-\rho^2)\sigma_c^2(\mathbf{H}'_\phi\mathbf{H}_\phi)^{-1}),$$

donde,

$$\mathbf{a} = -\frac{\rho\sigma_c}{\sigma_\tau}\mathbf{H}\alpha, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}_\phi + \frac{\rho\sigma_c}{\sigma_\tau}\mathbf{H}.$$

Por lo tanto, la densidad prior de τ esta dada por:

$$p(\tau|\sigma_\tau^2, \mu_1, \tau_0) = (2\pi\sigma_\tau^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\tau^2}(\tau-\alpha)'\mathbf{H}'\mathbf{H}(\tau-\alpha)}, \quad (6)$$

mientras que la verosimilitud condicional esta dada por:

$$p(\mathbf{y}|\tau, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) = (2\pi\sigma_c^2(1-\rho^2))^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_c^2}(\mathbf{H}_\phi\mathbf{y}-\mathbf{a}-\mathbf{B}\tau)'(\mathbf{H}_\phi\mathbf{y}-\mathbf{a}-\mathbf{B}\tau)}. \quad (7)$$

Por lo tanto, por medio de una regresión lineal estandar se obtiene lo siguiente:

$$(\tau|\sigma_\tau^2, \mu_1, \tau_0) \sim N(\hat{\tau}, \mathbf{K}_\tau^{-1}),$$

donde,

$$\mathbf{K}_\tau = \frac{1}{\sigma_\tau^2}\mathbf{H}'\mathbf{H} + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2}\mathbf{B}'\mathbf{B}, \quad \hat{\tau} = \mathbf{K}_\tau^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_\tau^2}\mathbf{H}'\mathbf{H}\alpha + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2}\mathbf{B}'(\mathbf{H}_\phi\mathbf{y} - \mathbf{a}) \right).$$

Tomando en cuenta que \mathbf{H} , \mathbf{H}_ϕ y \mathbf{B} son matrices banda, \mathbf{K}_τ también es una matriz banda. Del mismo modo se puede proceder para obtener los muestreos posterior del resto de parámetros del sistema. Estos procedimientos se encuentran en el Apendice A.

3.3 Comparación de Modelos

Grant y Chan (2017) llevan a cabo un ejercicio de comparación de modelos a través de un método bayesiano que utiliza una verosimilitud marginal. Cada modelo está definido como $\{M_1, \dots, M_K\}$. Si sabemos que la verosimilitud marginal del modelo M_i es mayor que el modelo M_j , entonces se puede concluir que el modelo M_i es el mejor de los dos. Para evidenciar este resultado se utiliza una relación de probabilidad posterior entre ambos modelos. El razonamiento detrás de esto se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\mathbb{P}(M_i|\mathbf{y})}{\mathbb{P}(M_j|\mathbf{y})} = \frac{\mathbb{P}(M_i)}{\mathbb{P}(M_j)} \times \frac{p(\mathbf{y}|M_i)}{p(\mathbf{y}|M_j)}, \quad (8)$$

donde $\mathbb{P}(M_i)/\mathbb{P}(M_j)$ es la razón de posibilidades y la razón de las probabilidades marginales $p(\mathbf{y}|M_i)/p(\mathbf{y}|M_j)$ es el BF. El objetivo del BF es cuantificar el soporte de un modelo sobre otro, independientemente de si estos modelos son correctos o no.

Grant y Chan (2017) describen un método de muestreo con el objetivo de calcular la probabilidad marginal de los diversos modelos UC. Para ello, presentan una versión mejorada del método clásico de entropía cruzada presentada por Chan y Kroese (2012), quienes encuentran que la densidad de muestreo se puede obtener utilizando el método MCMC. Digamos que el punto de referencia para obtener una densidad de importancia adecuada es $g(\cdot)$, entonces ello se utiliza para construir el siguiente estimador de muestreo:

$$\widehat{p(\mathbf{y})} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{p(\mathbf{y}|\theta^{(r)})p(\theta^{(r)})}{g(\theta^{(r)})}, \quad (9)$$

donde $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(R)}$ son los muestreos de la densidad de muestreo $g(\theta)$.

Para mayor detalle, se remite al lector al Apéndice B, en el cual se derivan las expresiones analíticas para las verosimilitudes integradas bajo los modelos UC.

4 Resultados

En esta sección se comparan los resultados de las estimaciones de los distintos modelos UC, presentados en la Sección 3. Para ello, se utiliza series trimestrales del PBI real de Argentina, Brasil, México, Chile y Perú y de los países que conforman el G7. Todas estas series fueron transformadas mediante logaritmos y multiplicadas por 100.

4.1 Resultado de comparación de modelos

Al igual que en Grant y Chan (2017), cada conjunto de resultados se basa en 100,000 muestreos posteriores luego de un período de quemado de 10,000 muestreos. Asimismo, para calcular cada valor de verosimilitud marginal se utilizan 50,000 muestreos de importancia.

En primer lugar, se lleva a cabo un ejercicio de comparación de modelos teniendo en cuenta un quiebre en el crecimiento del PBI. Para ello, se utilizan el modelo $DT-t_0$ y el modelo $UCUR-t_0$. Para cada clase de modelo se toma en cuenta 8 posibles fechas de quiebres. Es importante mencionar que para la selección de los posibles quiebres se realizaron dos tests. Primero, el test de cambio estructural de Perron y Yabu (2009), dicho test es robusto a si la serie es $I(1)$ o $I(0)$. Segundo, un test de raíz unitaria de multiplicador de Lagrange de 2 quiebres endógenos, propuesto por Lee y Strazicich (2003). En ambos casos se pone particular atención a las fechas de quiebre encontradas por dichos tests, con un grado de significancia de 1%, 5% y 10%.

Al comparar el $UCUR-t_0$ y el $DT-t_0$ para cada fecha de quiebre se puede concluir que en la mayoría de los países, tanto los del G7 como de América Latina, el $UCUR-t_0$ supera uniformemente al $DT-t_0$. Los resultados de la comparación de modelos para los países G7 se encuentra en la Tabla 1. Bajo la comparación de modelos de todos los países el $UCUR-t_0$ tiene un mayor logaritmo de verosimilitud marginal que el $DT-t_0$. Asimismo, salvo Estados Unidos y Reino Unido, no existe discrepancia en la elección de fecha de quiebre entre modelos. Se observa que en algunos países la preferencia por el modelo $UCUR-t_0$, medida por medio del BF, es bastante superior con respecto al modelo $DT-t_0$. Los países en donde se encuentra una mayor preferencia por el UCUR

son EE.UU., donde el UCUR-73 supera 96,25 veces al DT-07, Francia donde el UCUR-73 es 116,05 veces mejor que el DT-74, Italia en donde el UCUR-74 es $1,9 \times 10^3$ veces mejor que el DT-74; y Japón, donde el UCUR-73 es $1,4 \times 10^5$ veces mejor que el DT-73. Mientras que Canada, Reino Unido y Alemania la preferencia por el UCUR- t_0 es menor en magnitud.

Los resultados de la comparación de modelos para los países latinoamericanos se encuentran en la Tabla 2. En este caso, al igual que para los países de el G7, el UCUR- t_0 tiene un mayor logaritmo de verosimilitud marginal que el DT- t_0 para todos los países. Asimismo, no existe discrepancia en cuanto a la preferencia de la fecha de quiebre en ambos modelos para Brasil, México y Perú, pero si existe discrepancia para Chile y Argentina que tienen por mejores modelos al DT-15 y UCUR-98, y al DT-12 y UCUR-01, respectivamente. El país en donde se encuentra una preferencia más marcada por el modelo UCUR- t_0 es Perú debido a que, según el BF, el UCUR-92 es 3×2^8 veces mejor que el DT-92, mientras que en Argentina, México, Chile, y Brasil el BF a favor del UCUR- t_0 es bastante menor en magnitud.

En segundo lugar, se incluye un modelo UCUR con dos quiebres y un modelo que permite una correlación igual cero entre los choques permanentes y transitorios (UC0), la cual sigue la especificación de Clark (1987). Los resultados de los países del G7 se encuentran en la Tabla 3. Para EE.UU., Canadá, Reino Unido y Japón el mejor modelo del ejercicio de comparación es el UCUR- t_0 , cabe mencionar que se considera a Japón dentro de este grupo debido a que sus parámetros son significativos en comparación con el modelo UCUR- (t_0, t_1) a pesar que el modelo de dos quiebres tenga un mejor logaritmo de verosimilitud. Los parametros y su significancia se presentará en las siguientes tablas. Para Italia y Francia es necesario un quiebre adicional, mientras que para Alemania el modelo UCUR sin quiebres es preferido a los demás por la significancia de sus parámetros en comparación a los UCUR con quiebres. Los resultados de los países latinoamericanos se encuentran en la Tabla 4. Para Argentina, México y Perú predomina el UCUR con un solo quiebre, mientras que para Chile el mejor modelo es el UCUR con dos quiebres. Cabe mencionar que para Brasil el mejor modelo es el UCUR sin quiebres debido a la significancia de sus parámetros. Como se menciono anteriormente, los

parametros y su significancia se presentará en las siguientes tablas. Para ninguno de los grupos de países predomina el modelo UC0 de Clark (1987), los resultados son en cambio contundentes a favor de los modelos UCUR- t_0 y UCUR- (t_0, t_1) . Por ejemplo, el mejor modelo para EE.UU., el UCUR-73, es aproximadamente 498,7 veces mejor que el UC0, mientras que el mejor modelo para Perú, el UCUR-(92), es 502,2 veces mejor que el UC0. Esto es consistente con lo encontrado en Morley et al. (2003) y Chan y Grant (2017).

El ejercicio de comparación bayesiana parece indicar que resulta de gran importancia permitir una correlación distinta de cero entre las innovaciones de ciclo y tendencia del producto. Además, al momento de modelar las series del PBI real es probable que exista al menos uno o dos quiebres en la tendencia dependiendo del país que se analiza. Asimismo, al igual que es importante verificar los valores de la verosimilitud marginal se debe revisar la significancia de sus parámetros para determinar que se está seleccionado el mejor modelo.

4.2 Estimaciones Tendencia-Ciclo y Descomposición de la Varianza

Las estimaciones de la tendencia y ciclo de las series se hicieron para el mejor modelo de cada país y se encuentran en las Figuras 1 a 12. Los resultados indican que las estimaciones del ciclo para los países de el G7 son mucho menores en magnitud y menos persistentes, comparados a los países de América Latina. Asimismo, los ciclos recesivos observados coinciden principalmente con los periodos de recesión (barras amarillas). Además, los parámetros autorregresivos, que se encuentran en la Tabla 5, suman, por ejemplo, para el UCUR-73 de EE.UU. 0.6 lo que indicaría un leve grado de persistencia de los choques de corto plazo. Este mismo efecto se puede observar en los demás países de el G7 y en la mayoría de países latinoamericanos, que se encuentran en la Tabla 6, con excepción de Argentina y Perú cuya suma de parámetros autorregresivos del UCUR-01 y UCUR-92 son 0,96 y 0,94, respectivamente, lo cual sugiere un alto grado de persistencia de los choques de corto plazo.

Las estimaciones de la tendencia para los países de el G7 se comportan de manera suave, excepto en algunos periodos que podrían estar relacionados con hechos impor-

tantes del contexto local o internacional tales como: la crisis del petróleo en 1973, la crisis de la deuda de inicios de los 80 y la crisis financiera. La descomposición muestra, para todos los países del G7, una disminución de la tasa de crecimiento de la tendencia a medida que avanzan los años. A pesar de que en su mayoría las fluctuaciones del ciclo sean más profundas se puede ver que en algunos episodios de recesión, la tendencia alcanza valores inferiores al ciclo. Esto puede verse por ejemplo en el Reino Unido como en Japón durante la crisis financiera en donde la tasa de crecimiento de la tendencia se encuentra en valores negativos mientras que el ciclo no o apenas muestra valores negativos.

Las estimaciones del ρ para los países del G7, presentados en la Tabla 5, son negativos y grandes en magnitud. Esto podría indicar que los choques que afectan a la tendencia no son los mismos choques que afectan al ciclo. Con respecto a las densidades posteriores del ρ de los países de el G7, que se encuentran en la Figura 13, se observa que son cercanos a -1 . Del mismo modo, las densidades para todos los países muestran poca masa cercana a cero, lo que implica una relevancia empírica de permitir una correlación distinta de cero entre los choques permanentes y transitorios.

Las estimaciones de los choques permanentes y transitorios para los países de el G7 se encuentran en la Tabla 5. Bajo los modelos UCUR, UCUR $-t_0$ y UCUR $-(t_0, t_1)$, las estimaciones del σ_c^2 y σ_τ^2 parecen indicar que los choques permanentes son más importantes que los choques transitorios. En la Figura 14 se presentan los gráficos de las densidades posteriores de la razón de las varianzas σ_c^2/σ_τ^2 para los mejores modelos de los países del G7. La mayor parte de la masa de dichas densidades están en regiones que son más grandes que la unidad. Asimismo, las probabilidades posteriores $\mathbb{P}(\sigma_c^2 > \sigma_\tau^2 | \mathbf{y})$ oscilan entre entre 0,77 y 1 para los mejores modelos. Estos resultados indican que, los choques reales son más importantes para explicar la variación del producto.

Las estimaciones de la tendencia para países de América Latina como Perú y Argentina, que han experimentado crisis importantes, parecen ser más volátiles durante los primeros años de sus muestras, mientras que países con menores episodios de crisis, tales como Chile, México y Brasil muestran una tendencia relativamente suave. Los periodos de cambio en la tendencia están marcados por el contexto internacional como la

crisis de la deuda, la crisis asiática y la crisis financiera, como también por el contexto local como la crisis de hiperinflación en Perú, la crisis del tequila en México, la crisis del 2001 en Argentina, etc. Como también se presenta en los países de el G7, a pesar de que en su mayoría las fluctuaciones del ciclo son más profundas se puede ver que en algunos periodos de la muestra, la tendencia alcanza valores inferiores al ciclo. Esto puede verse por ejemplo en Brasil durante la crisis del 2014 en donde la tasa de crecimiento de la tendencia logró alcanzar valores negativos mientras que el ciclo no. Asimismo, al igual que en los países de el G7, los países latinoamericanos muestran una caída en la tasa de crecimiento tendencial durante la crisis financiera, aunque esta no es tan profunda.

Asimismo, las estimaciones del ρ , encontrados en la Tabla 6, para estos países muestran resultados distintos. Para Perú y Argentina los valores son positivos y relativamente pequeños en magnitud, mientras que para Chile, Brasil y México los valores son negativos y relativamente grandes en magnitud para el primero y pequeños en magnitud para el segundo y tercero. Con respecto a las estimaciones de las densidades posteriores del ρ , que se encuentran en la Figura 13, se observa que para Perú y Argentina son cercanas a 1. Además, ambas densidades muestran poca masa cerca a cero. Por su parte, para Brasil, Chile y México las estimaciones son cercanas a -1 y del mismo modo las densidades muestran poca masa cercana a cero. Esto podría indicar que para Brasil, Chile y Mexico los choques que afectan a la tendencia no son los mismos choques que afectan al ciclo y por otro lado se da el resultado contrario en Argentina y Perú, en tanto al tener un ρ mayor a 0, ambos choques, tanto los de tendencia y de ciclo, afectan a la tendencia y el ciclo.

Para los países latinoamericanos los resultados de las estimaciones del σ_c^2 y σ_t^2 que se encuentran en la Tabla 6 sugieren que, para Brasil, México y Chile, bajo los tres modelos, los choques permanentes son mucho más importantes que los choques transitorios, mientras que para Perú y Argentina ocurre lo contrario. Asimismo, en la Figura 14 se presentan los gráficos de las densidades posteriores de la relación de las varianzas σ_c^2/σ_t^2 para los mejores modelos. La mayor parte de la masa de dicha densidades está en regiones que son más grandes que la unidad para Brasil, Chile y Mexico lo que indicaría y además las probabilidades posteriores, $\mathbb{P}(\sigma_t^2 > \sigma_c^2 | \mathbf{y})$ para México, Chile y Brasil son de

0,78, 0,65 y 0,96, respectivamente, esto indicaría que los choques reales son importantes para explicar la variación del producto. Sin embargo, para Perú y Argentina el ratio de varianzas σ_c^2/σ_τ^2 muestra que gran parte de la masa se encuentra antes de la unidad, asimismo las probabilidades posteriores tienen valores de 0,42 y 0,38. Estos resultados indicarían que los choques reales no son importantes para explicar la variación del producto.

El análisis anterior se complementa mediante las estimaciones de ciclo bajo el filtro HP y bajo el modelo UC que incluye mezcla de normales (UCMN) propuesto por Perron y Wada (2009, 2016). Para este modelo no se imponen restricciones que condicionan la importancia relativa de los choques a corto y largo plazo, debido a que ambos son igual de importantes. Los resultados de la estimación y comparación se encuentran en las Figuras 1 a 12.

En primer lugar, los resultados parecen indicar que por lo general Perron y Wada (2016) y el filtro HP encuentran ciclos mucho menos volátiles y con variaciones más profundas que los modelos UCUR propuestos por Grant y Chan (2017). Esto resalta la sensibilidad de las estimaciones del ciclo a la especificación del modelo. Además, en la mayoría de los países existe una similitud en el patrón general que sigue el ciclo bajo los modelos. No obstante, en ciertos periodos en los que se encuentra una mayor variación en el ciclo, ambos modelos difieren en la profundidad de la variación. Por ejemplo, para el caso de EE.UU. a mediados de 1980 el modelo UCUR-73 muestra una caída del ciclo hasta -2 puntos, mientras que el filtro HP y el UCMN muestran caídas hasta -5 y -8 puntos, respectivamente. Este mismo resultado se evidencia durante la crisis financiera, en la cual el UCUR-73 tuvo una caída que no llega a niveles negativos en comparación con los otros dos modelos. Estas mismas observaciones se muestran en los demás países de el G7.

Para el caso de Argentina se puede ver que el modelo UCUR-01 muestra fluctuaciones más pronunciadas que el modelo UCMN y el filtro HP tanto positiva como negativamente. Para el caso de Brasil se muestra un comportamiento similar en el modelo UCMN y el filtro HP mientras que el modelo UCUR muestra un comportamiento menos variante. Para el caso de Chile y México, se ve que el modelo UCUR y el UCMN muestran

un comportamiento similar mientras que el filtro HP muestra variaciones más profundas. Para el caso Peruano se ve que al comienzo de la serie el modelo UCUR-92 muestra fluctuaciones mucho más profundas que las otras dos especificaciones. Mientras que a medida que avanzan los años el comportamiento de las series se van pareciendo más.

En segundo lugar, los resultados de los tres modelos una vez contrastados con las fechas de recesión (barras amarillas) no muestran una clara preferencia por un modelo en específico. Por un lado, en algunos países como EE.UU. y Alemania a principios de los 80 y Francia a principios de la década de 1990 el UCMN y el filtro HP calzan con las barras de recesión mejor que el UCUR, mientras que en otros países como Italia y Japón el modelo UCUR calza mejor con las barras de recesión que los otros dos enfoques.

4.3 Quiebres en el Crecimiento de la Tendencia del Producto

Las tasas de crecimiento del producto de tendencia de los 4 modelos univariados para los países de el G7 se encuentran en la Tabla 7. En cada fila se reporta la tasa de crecimiento para un periodo en específico. Para EE.UU. bajo el modelo UCUR-73 la tasa de crecimiento anualizado desde 1960Q1 hasta 1973Q1 es de 4,08% ($1,02\% \times 4$). Como se muestra en la tabla, existe una diferencia sustancial entre el siguiente periodo debido a que el crecimiento anualizado de 1973Q2 hasta 2019Q4 es de 2,6% ($0,65\% \times 4$). Tasas similares se observan para Canadá, Reino Unido y Japón. Para el caso de Alemania bajo el modelo UCUR-(73,91) las tasas de crecimiento anualizadas son de 4,36% ($1,09\% \times 4$), 2,56% ($0,64\% \times 4$) y 1,32% ($0,33\% \times 4$) para los periodos que van desde 1960Q1 hasta 1973Q3, 1973Q4 hasta 1991Q1 y 1991Q2 hasta 2019Q4, respectivamente. Resultados similares se observan para Italia y Francia.

Las tasas de crecimiento del producto de tendencia para los países Latinoamericanos se encuentran en la Tabla 8. Para el caso de Argentina bajo el UCUR-01 la tasa de crecimiento anualizada para el periodo comprendido entre 1993Q1 y 2000Q4 es de 5% ($1,25\% \times 4$), mientras que para el periodo comprendido entre 2001Q1 y 2019Q4 es de 1,96% ($0,49 \times 4$). Tasas de crecimientos similares se obtienen para México y Chile; sin embargo, para el caso de Perú se obtiene una tasa de crecimiento anualizada negativa entre 1980Q1 y 1992Q2 con un valor de $-0,12\%$ ($0,03\% \times 4$). En el caso de Brasil, bajo el

modelo UCUR, solo se tiene una tasa de crecimiento para todo el periodo la cual es de 2,92% ($0,73\% \times 4$).



5 Conclusiones

A lo largo del tiempo en la economía de cada país se han producido, con diferente magnitud y duración, una serie de recesiones y expansiones que depende del contexto internacional y local, y que generan cierta dinámica en el producto. Hasta ahora se han utilizado una serie de modelos para estimar los componentes cíclico y tendencial del PBI para los distintos países; sin embargo, no existe una preferencia clara por un modelo u otro. En ese sentido, siguiendo a Grant y Chan (2017) hemos llevado a cabo un ejercicio de comparación bayesiana de modelos que descomponen las series del PBI real en sus componentes cíclico y tendencial para los países del G7 y de América Latina. En primer lugar, se encontró que los resultados divergen según el país, pero en general es de mucha importancia empírica permitir una correlación distinta de cero entre los componentes cíclico y tendencial. En segundo lugar, de acuerdo con el BF los modelos de componentes no observados correlacionados tienen mejor verosimilitud marginal que los modelos de tendencia determinística, ya sea que este tenga o no quiebres en el componente tendencial. En tercer lugar, con la implementación de los modelos UCMN de Perron y Wada (2009, 2016) y el filtro HP se encuentran ciclos menos ruidosos y con variaciones más profundas dependiendo del país que se tenga bajo análisis. En cuarto lugar, las estimaciones mantienen ciertas regularidades en relación con el comportamiento de la tendencia. Países como Perú y Argentina, los cuales experimentaron una serie de crisis en los primeros años de la muestra, bajo todos los modelos estimados, tienen periodos de alta volatilidad en la tendencia y evidencian ciclos de mayor amplitud, en contraste a los periodos posteriores. Además, para estos países, en comparación con los demás, los choques de corto plazo son más persistentes que los choques de largo plazo para explicar las fluctuaciones del producto. En quinto lugar, se encuentra que los choques que afectan a la tendencia no son los mismos que afectan al ciclo, a diferencia de Perú y Argentina. Finalmente, la presente investigación se puede extender en diversas direcciones. Primero, se pueden utilizar otros indicadores económicos como el consumo y la inflación para llevar a cabo el mismo análisis. Segundo, se puede extender el trabajo a un nivel multivariado que incluye, por ejemplo, la curva de Phillips.

6 Referencias

- [1] Alqaralleh, H. (2019), "Measuring business cycles: Empirical evidence based on an unobserved component approach," *Cogent Economics and Finance* **7**, 1-10.
- [2] Araujo, E., L. Carpena and A. Cunha (2008), "Brazilian Business Cycles and Growth from 1850 to 2000," *Estudos Econômicos (São Paulo)* **38(30)**, 558-581.
- [3] Basitha, A. and C. R. Nelson (2007), "New measures of the output gap based on the forward-looking new Keynesian Phillips curve," *Journal of Monetary Economics* **54**, 498-511.
- [4] Baxter, M. and R. G. King (1999), "Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filter for Economic Time Series," *The Review of Economics and Statistics* **79**, 551-563.
- [5] Benes, J., K. Clinton, R. Garcia-Saltos, M. Johnson, D. Laxton, P. Manchev and T. Matheson (2010), "Estimating Potential Output with a Multivariate Filter," International Monetary Fund, Working Paper 10/285.
- [6] Beveridge, S. and C. R. Nelson (1981), "A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the 'Business Cycle'," *Journal of Monetary Economics* **7**, 151-174.
- [7] Blagrove, P., R. Garcia-Saltos, D. Laxton and F. Zhang (2015), "A Simple Multivariate Filter for Estimating Potential Output," International Monetary Fund, Working Paper 15/79.
- [8] Buseti, F. and M. Caivano (2013), "The trend-cycle decomposition of output and the Phillips curve: Bayesian estimates for Italy," *Banca D'Italia Eurosystem*, Working Paper No. 941.
- [9] Canova, F. (1998), "Detrending and Business Cycle Facts," *Journal of Monetary Economics* **4**, 475-512.

- [10] Castillo, P., C. Montoro and V. Tuesta (2006), "Hechos Estilizados de la Economía Peruana," *Journal of Economics* **102**, 857-880.
- [11] Catalán, H. and U. Romero (2018), "PIB potencial y el ciclo de la economía mexicana: un enfoque de filtros univariados," *Economía Informa* **409**, 24-48.
- [12] Chan, J. C. C. (2013), "Moving average stochastic volatility models with application to inflation forecast," *Journal of Econometrics* **176**, 162-172.
- [13] Chan, J. C. C. (2017), "Notes on Bayesian Macroeconometrics," Manuscript *Economics Discipline Group*.
- [14] Chan, J. C. C. and A. L. Grant (2016a), "Fast Computation of the deviance information criterion for latent variable models," *Computational Statistics and Data Analysis* **100**, 847-859.
- [15] Chan, J. C. C. and A. L. Grant (2016b), "Reconciling Output Gaps: Unobserved Components Model and Hodrick-Prescott Filter," Centre for Applied Macroeconomic Analysis, Working Paper 44/2016.
- [16] Chan, J. C. C. and I. Jeliazkov (2009), "Efficient simulation and integrated likelihood estimation in state space models," *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation* **1(1-2)**, 102-120.
- [17] Chan, J. C. C. and D. P. Kroese (2012), "Improved cross-entropy method for estimation," *Statistics and Computing* **22(5)**, 1031-1040.
- [18] Christiano, L. J. and T. J. Fitzgerald (2003), "The band pass filter," *International Economic Review* **44(2)**, 435-465.
- [19] Chumacero, R.A. and F. Gallego (2002), "Trend and Cycle in Real-Time," *Estudios de Economía* **29(2)**, 211-229.
- [20] Clark, P. K. (1987), "The Cyclical Component of U.S. Economic Activity," *The Quarterly Journal of Economics* **102** 797-8.

- [21] Diebold, F. X., D. Rudebusch and D. Sichel (1993), "Further Evidence on Business-Cycle Duration Dependence," *Business Cycles, Indicators and Forecasting*, 255-284.
- [22] Doménech, R. and V. Gómez (2006), "Estimating potential output, core inflation, and the NAIRU as latent variables," *Journal of Business and Economic Statistics* **24(3)**, 354-356.
- [23] Ellery, R., V. Gomez and A. Sachsida (2002), "Business Cycle Fluctuations in Brazil," *Revista Brasileira de Economia* **56(2)**, 270-308
- [24] Faal, E. (2005), "GDP Growth, Potential Output, and Output Gaps in Mexico," International Monetary Fund, Working Paper 05/93
- [25] Friedman, M. (1964), "Monetary Studies of the National Bureau," *The National Bureau Enters Its 45th Annual Report*, 7-25.
- [26] Flaiga, G. (2002), "Unobserved Components Models For Quarterly German GDP," Ifo Institute for Economic Research, Working Paper 03/02.
- [27] Gallego, F. and C.A. Johnson (2001), "Teorías y métodos de medición del producto de tendencia: una aplicación al caso de Chile," *Economía Chilena* **4(2)**, 27-58.
- [28] Grant, A. L. and J. C. C. Chan (2017), "A Bayesian Model Comparison for Trend-Cycle Decomposition of Output," *Journal of Money, Credit and Banking* **49(2-3)**, 525-552.
- [29] Guérin, P., L. Maurin and M. Mohr (2011), "Trend-Cycle Decomposition of Output and Euro Area Inflation Forecasts: a Real-Time approach based on Model Combination," European Central Bank Eurosystem, Working Paper No. 1384.
- [30] Guillén, A. and G. Rodríguez (2014), "Trend-Cycle Decomposition for Peruvian GDP: Application of an Alternative Method," *Latin American Economic Review* **23(1)**, 1-44.
- [31] Harvey, A. C. and A. Jaeger (1993), "Detrending, Stylized Facts and the Business Cycle," *Journal of Applied Econometrics* **8**, 231-241.

- [32] Hodrick, R. and E. Prescott (1997), "Postwar US Business Cycles: An Empirical Investigation," *Journal of Money, Credit and Banking* **29**, 1-16.
- [33] Iiboshi, H. (2011), "Decomposition of Trend and Cycle; An Application to Real GDP and Unemployment Rate in Japan," *Economic and Social Research Institute, Discussion Paper Series* 261.
- [34] Kim, C. J. and C. R. Nelson (1999), "Friedman's Plucking Model of Business Fluctuations: Tests and Estimates of Permanent and Transitory Components," *Journal of Money, Credit, and Banking* **31**, 317-334.
- [35] Koop, G. (2003) "Bayesian Econometrics," West Sussex: Wiley.
- [36] Kroese, D. P. and J. C. C. Chan (2014), "Statistical Modeling and Computation," New York, NY: Springer.
- [37] Krysa, A. and L. Lanteri (2018), "Estimación del producto potencial y de la brecha del producto, para Argentina: aproximaciones a partir de un filtro multivariado y del método de la función de producción," Banco Central de la República Argentina, Documento de Trabajo 2018-80.
- [38] Lee, J. and M.C. Strazicich (2003), "Minimum Lagrange Multiple Unit Root Test With Two Structural Breaks," *Review of Economics and Statistics* **85(4)**, 1082-1089
- [39] Luo, S. and R. Startz (2014), "Is it one break or ongoing permanent shocks that explains U.S. real GDP?" *Journal of Monetary Economics* **66**, 155-163.
- [40] Marfán, M. and P. Ariagoitia (1989), "Estimación del PGB potencial: Chile 1960-1988," Colección de Estudios Cieplan, Diciembre.
- [41] McCausland, W. J., S. Miller and D. Pelletier (2011), "Simulation smoothing for state-space models: A computational efficiency analysis," *Computational Statistics and Data Analysis* **55**, 199-212.
- [42] Melolinna, M. and M. Tóth (2019), "Trend and cycle shocks in Bayesian unobserved components model for UK productivity," Bank of England, Working Paper No. 826.

- [43] Mohr, M. (2005), "A trend-cycle(-season) filter," European Central Bank, Working Paper No. 499.
- [44] Morley, J. C., C. R. Nelson and E. Zivot (2003), "Why Are the Beveridge-Nelson and Unobserved-Components Decompositions of GDP So Different?," *The Review of Economics and Statistics* **85**, 235-243.
- [45] Morely, J. C., and J. Piger (2012), "The Assymmetric Bussiness Cycle," *The Review of Economics and Statistics* **94(1)**, 208-221.
- [46] Murray, C. J. (2003), "Cylical Properties of Baxter-King Filtered Time Series," *The Review of Economics and Statistics* **85**, 472-476.
- [47] Neftçi, S. N. (1984), "Are Economic Time Series Asymmetric Over the Business Cycles?," *Journal of Political Economy* **92 (2)**, 307-328.
- [48] Ochoa, E. M., and J. E. Lladó (2003) "Modelos de indicadores líderes de actividad económica para el Perú" *Revista Estudios Económicos* **10**.
- [49] Perron, P., S. Mototsugu and T. Yabu (2017), "Testing for Flexible Nonlinear Trends with an Integrated or Stationary Noise Component," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **79(5)**, 822 - 850.
- [50] Perron, P. and T. Wada (2009), "Let's Take a Break: Trends and Cycles in US Real GDP," *Journal of Monetary Economics* **56**, 749-765.
- [51] Perron, P. and T. Wada (2016), "Measuring Business Cycles with Structural Breaks and Outliers: Applications to International Data," *Research in Economics* **70(2)**, 281-303.
- [52] Perron, P. and T. Yabu (2009), "Testing for Shifts in Trend With an Integrated or Stationary Noise Component," *Journal of Business & Economic Statistics* **27(3)**, 37-41.
- [53] Proiretti, T. (2007), "Trend-Cycle Decompositions with Correlated Components," *Econometric Reviews* **25(1)**, 61-84.

- [54] Rodríguez, G. (2010a), "Using forward-looking Phillips Curve to estimate the Output Gap in Peru," *Review of Applied Economics* **6(1-2)**, 85-97.
- [55] Rodríguez, G. (2010b), "Estimating output gap, core inflation, and the NAIRU for Peru, 1979-2007" *Applied Econometrics and International Development* **10**, 149-160.
- [56] Sabioni, L., M. Chauvet and J. Eustáquio de Lima (2017), "Trend-Cycle Decomposition of the Brazilian GDP: New Facts for the period between 1947 and 2012," *Annals of the 45th National Economic Meeting (ANPEC)*.
- [57] Seminario, B., M. Rodríguez and J. Zuloeta (2007), "Métodos Alternativos para la Estimación del PBI Potencial 1950-2007," *Documento de Discusión 07/20 UP*.
- [58] Sichel, D. (1991), "Business Cycle Duration Dependence: A Parametric Approach," *The Review of Economics and Statistics* **73(2)**, 254-260.
- [59] Stock, J. H. and M. W. Watson (1988), "Variable Trends in Economic Time Series," *Journal of Economic Perspectives* **2**, 147-174.
- [60] Trajtenberg, L.A. (2004), "Modelización de Ciclos y Tendencias en Series de tiempo Macroeconómicas Argentina: 1980-2000," Tesis de Licenciatura Universidad de Buenos Aires.
- [61] Wada, T. and P. Perron (2006), "An Alternative Trend-Cycle Decomposition using a State Space Model with Mixtures of Normals: Specifications and Applications to International Data," Boston University, Working Paper 2005-44.
- [62] Watson, M. W. (1986), "Univariate Detrending Methods with Stochastic Trends," *Journal of Monetary Economics* **18**, 49-75.
- [63] Zarnowitz, V. and C. Boschan (1975), "Cyclical Indicators: An Evaluation and New Leading Indexes," *Business Conditions Digest* (**November**), 5-19.

7 Tablas

7.1 Tabla 1

Log Marginal Likelihood of the UCUR- t_0 and DT- t_0 Models

High Income Countries							
United States							
DT-72	DT-73	DT-74	DT-75	DT-07	DT-08	DT-09	DT-10
-291,533 (0.01)	-290,023 (0.01)	-291,279 (0.01)	-292,632 (0.01)	-289,902 (0.01)	-290,309 (0.01)	-292,821 (0.01)	-292,817 (0.01)
UCUR-72	UCUR-73	UCUR-74	UCUR-75	UCUR-07	UCUR-08	UCUR-09	UCUR-10
-286,490 (0.09)	-285,335 (0.06)	-286,540 (0.04)	-286,997 (0.08)	-285,355 (0.07)	-285,429 (0.06)	-286,801 (0.09)	-286,767 (0.06)
Canada							
DT-77	DT-78	DT-79	DT-80	DT-07	DT-08	DT-09	DT-10
-285,239 (0.01)	-284,773 (0.01)	-284,939 (0.01)	-286,754 (0.01)	-293,291 (0.01)	-293,240 (0.01)	-296,438 (0.01)	-296,275 (0.01)
UCUR-77	UCUR-78	UCUR-79	UCUR-80	UCUR-07	UCUR-08	UCUR-09	UCUR-10
-284,509 (0.05)	-283,792 (0.09)	-283,817 (0.08)	-285,470 (0.05)	-287,083 (0.04)	-286,644 (0.10)	-289,067 (0.05)	-288,631 (0.05)
United Kingdom							
DT-73	DT-74	DT-75	DT-76	DT-07	DT-08	DT-09	DT-10
-272,512 (0.01)	-271,923 (0.01)	-273,694 (0.01)	-274,121 (0.01)	-271,188 (0.01)	-270,942 (0.01)	-272,360 (0.00)	-273,136 (0.01)
UCUR-73	UCUR-74	UCUR-75	UCUR-76	UCUR-07	UCUR-08	UCUR-09	UCUR-10
-267,588 (0.05)	-266,855 (0.06)	-268,261 (0.05)	-268,694 (0.08)	-267,756 (0.05)	-267,310 (0.05)	-268,466 (0.05)	-268,466 (0.04)
Germany							
DT-72	DT-73	DT-74	DT-75	DT-89	DT-90	DT-91	DT-92
-365,487 (0.01)	-364,870 (0.01)	-365,731 (0.01)	-367,744 (0.01)	-369,203 (0.01)	-368,468 (0.01)	-366,662 (0.01)	-366,893 (0.01)
UCUR-72	UCUR-73	UCUR-74	UCUR-75	UCUR-89	UCUR-90	UCUR-91	UCUR-92
-362,298 (0.05)	-361,915 (0.04)	-362,705 (0.05)	-364,515 (0.04)	-365,146 (0.06)	-364,594 (0.03)	-362,799 (0.06)	-362,847 (0.08)

(continúa)

Log Marginal Likelihood of the UCUR- t_0 and DT- t_0 Models (Continues)

France							
DT-73	DT-74	DT-75	DT-76	DT-07	DT-08	DT-09	DT-10
- 146,161	-146,701	-150,507	-148,647	-147,925	-148,073	-149,784	-149,784
(0.00)	(0.01)	(0.02)	(0.01)	(0.01)	(0.00)	(0.01)	(0.01)
UCUR-73	UCUR-74	UCUR-75	UCUR-76	UCUR-07	UCUR-08	UCUR-09	UCUR-10
- 141,407	-141,710	-145,881	-144,230	-144,923	-144,634	-145,699	-146,597
(0.05)	(0.15)	(0.19)	(0.05)	(0.04)	(0.03)	(0.09)	(0.05)
Italy							
DT-73	DT-74	DT-75	DT-76	DT-07	DT-08	DT-09	DT-10
-326,694	- 325,056	-328,979	-326,227	-335,094	-337,125	-339,231	-346,000
(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.05)
UCUR-73	UCUR-74	UCUR-75	UCUR-76	UCUR-07	UCUR-08	UCUR-09	UCUR-10
-318,877	- 317,501	-321,136	-319,549	-319,549	-323,430	-324,469	-325,321
(0.02)	(0.07)	(0.06)	(0.03)	(0.03)	(0.04)	(0.08)	(0.09)
Japan							
DT-70	DT-71	DT-72	DT-73	DT-91	DT-92	DT-93	DT-94
-1418,477	-1417,654	-1418,823	- 1412,927	-1421,193	-1423,098	-1426,814	-1427,628
(0.11)	(0.09)	(0.13)	(0.15)	(0.11)	(0.10)	(0.21)	(0.10)
UCUR-70	UCUR-71	UCUR-72	UCUR-73	UCUR-91	UCUR-92	UCUR-93	UCUR-94
-1405,721	-1406,019	-1407,280	- 1403,314	-1410,218	-1411,513	-1414,871	-1414,823
(0.12)	(0.07)	(0.23)	(0.09)	(0.10)	(0.15)	(0.19)	(0.29)

Note: Numerical standard errors are in parentheses. The value of the best model is bolded.

Fuente: Elaboración Propia.

7.2 Tabla 2

Log Marginal Likelihood of the UCUR- t_0 and DT- t_0 Models

Latin American Countries							
Argentina							
DT-01	DT-02	DT-03	DT-04	DT-09	DT-10	DT-11	DT-12
-688,922 (0.10)	-689,463 (0.12)	-689,534 (0.18)	-689,648 (0.08)	-688,179 (0.24)	-688,077 (0.28)	-687,348 (0.08)	-687,156 (0.10)
UCUR-01	UCUR-02	UCUR-03	UCUR-04	UCUR-09	UCUR-10	UCUR-11	UCUR-12
-682,886 (0.27)	-683,498 (0.39)	-684,245 (0.18)	-684,142 (0.22)	-683,510 (0.22)	-683,096 (0.23)	-683,425 (0.23)	-683,038 (0.10)
Brazil							
DT-07	DT-08	DT-09	DT-10	DT-13	DT-14	DT-15	DT-16
-163,186 (0.01)	-162,475 (0.01)	-162,071 (0.01)	-161,771 (0.01)	-158,838 (0.01)	-159,818 (0.01)	-161,311 (0.05)	-162,545 (0.01)
UCUR-07	UCUR-08	UCUR-09	UCUR-10	UCUR-13	UCUR-14	UCUR-15	UCUR-16
-160,301 (0.08)	-160,098 (0.08)	-159,668 (0.19)	-159,367 (0.08)	-157,003 (0.04)	-157,986 (0.11)	-159,109 (0.20)	-159,979 (0.08)
Chile							
DT-97	DT-98	DT-99	DT-00	DT-15	DT-16	DT-17	DT-18
-161,809 (0.01)	-160,554 (0.01)	-162,976 (0.01)	-162,300 (0.02)	-158,932 (0.01)	-159,385 (0.01)	-159,864 (0.01)	-160,801 (0.01)
UCUR-97	UCUR-98	UCUR-99	UCUR-00	UCUR-15	UCUR-16	UCUR-17	UCUR-18
-159,571 (0.11)	-158,369 (0.09)	-160,904 (0.11)	-160,248 (0.19)	-159,043 (0.09)	-159,057 (0.13)	-159,057 (0.10)	-159,716 (0.07)
Mexico							
DT-82	DT-83	DT-84	DT-85	DT-95	DT-96	DT-97	DT-98
-274,385 (0.01)	-274,467 (0.02)	-274,650 (0.01)	-274,862 (0.01)	-275,631 (0.01)	-275,648 (0.01)	-275,649 (0.01)	-275,619 (0.01)
UCUR-82	UCUR-83	UCUR-84	UCUR-85	UCUR-95	UCUR-96	UCUR-97	UCUR-98
-273,428 (0.11)	-274,254 (0.08)	-274,094 (0.15)	-274,469 (0.11)	-274,701 (0.06)	-274,642 (0.10)	-274,757 (0.09)	-274,557 (0.07)

(continúa)

Log Marginal Likelihood of the UCUR- t_0 and DT- t_0 Models (Continues)

Peru							
DT-82	DT-83	DT-84	DT-85	DT-89	DT-90	DT-91	DT-92
-736,846	-735,985	-736,410	-737,187	-732,745	-732,724	-730,831	-729,038
(0.17)	(0.29)	(0.19)	(0.17)	(0.25)	(0.16)	(0.21)	(0.21)
UCUR-82	UCUR-83	UCUR-84	UCUR-85	UCUR-89	UCUR-90	UCUR-91	UCUR-92
-698,602	-698,867	-699,025	-699,026	-699,100	-699,013	-698,788	-698,004
(0.08)	(0.10)	(0.15)	(0.22)	(0.13)	(0.09)	(0.06)	(0.17)

Note: Numerical standard errors are in parentheses. The value of the best model is bolded.

Fuente: Elaboración Propia.



7.3 Tabla 3

Log Marginal Likelihood of Competing Models

High Income Countries					
United States					
DT	DT-07	UC0	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,07)
-293,414 (0.00)	-289,902 (0.01)	-291,547 (0.02)	-285,489 (0.11)	-285,335 (0.06)	-286,078 (0.15)
Canada					
DT	DT-78	UC0	UCUR	UCUR-78	UCUR-(78,07)
-297,944 (0.00)	-284,773 (0.01)	-299,137 (0.04)	-287,838 (0.11)	-283,792 (0.09)	-284,329 (0.07)
United Kingdom					
DT	DT-08	UC0	UCUR	UCUR-74	UCUR-(74,08)
-272,622 (0.01)	-270,942 (0.01)	-270,755 (0.02)	-267,253 (0.10)	-266,855 (0.06)	-267,226 (0.06)
Germany					
DT	DT-73	UC0	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,91)
-375,065 (0.01)	-364,870 (0.01)	-368,996 (0.02)	-366,202 (0.10)	-361,915 (0.04)	-361,911 (0.06)
France					
DT	DT-73	UC0	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,08)
-153,750 (0.00)	-146,161 (0.00)	-155,412 (0.01)	-145,709 (0.05)	-141,407 (0.05)	-140,024 (0.32)
Italy					
DT	DT-74	UC0	UCUR	UCUR-74	UCUR-(74,07)
-346,263 (0.00)	-325,056 (0.01)	-346,000 (0.05)	-326,644 (0.13)	-317,501 (0.07)	-314,996 (0.06)
Japan					
DT	DT-73	UC0	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,91)
-1456,300 (0.12)	-1412,927 (0.15)	-1447,715 (0.06)	-1436,000 (0.36)	-1403,314 (0.09)	-1396,058 (0.04)

Note: Numerical standard errors are in parentheses. The value of the best model is bolded

Fuente: Elaboración Propia.

7.4 Tabla 4

Log Marginal Likelihood of Competing Models

Latin American Countries					
Argentina					
DT	DT-12	UC0	UCUR	UCUR-01	UCUR-(01,12)
-688,930 (0.08)	-687,156 (0.10)	-685,412 (0.08)	-684,212 (0.20)	-682,886 (0.27)	-683,215 (0.19)
Brazil					
DT	DT-13	UC0	UCUR	UCUR-13	UCUR-(09,13)
-162,399 (0.01)	-158,838 (0.01)	-162,479 (0.04)	-159,427 (0.05)	-157,003 (0.04)	-157,814 (0.08)
Chile					
DT	DT-15	UC0	UCUR	UCUR-98	UCUR-(98,15)
-162,532 (0.01)	-158,932 (0.01)	-163,238 (0.02)	-160,331 (0.07)	-158,369 (0.09)	-157,875 (0.08)
Mexico					
DT	DT-82	UC0	UCUR	UCUR-82	UCUR-(82,97)
-273,253 (0.01)	-274,385 (0.01)	-274,212 (0.02)	-275,220 (0.07)	-273,428 (0.11)	-274,804 (0.09)
Peru					
DT	DT-92	UC0	UCUR	UCUR-92	UCUR-(83,92)
-736,563 (0.24)	-729,038 (0.21)	-702,598 (0.13)	-698,972 (0.09)	-698,004 (0.17)	-698,833 (0.18)

Note: Numerical standard errors are in parentheses. The value of the best model is bolded

Fuente: Elaboración Propia.

7.5 Tabla 5

Estimated Posterior Means

High Income Countries								
	United States				Canada			
	DT-07	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,07)	DT-77	UCUR	UCUR-78	UCUR-(78,07)
ϕ_1	1,29 (0.06)	0,79 (0.22)	0,76 (0.24)	1,12 (0.45)	1,39 (0.06)	0,58 (0.14)	0,72 (0.37)	0,70 (0.35)
ϕ_2	-0,31 (0.06)	-0,18 (0.16)	-0,16 (0.17)	-0,37 (0.45)	-0,40 (0.06)	0,03 (0.11)	-0,12 (0.20)	-0,10 (0.19)
σ_c^2	0,58 (0.05)	0,95 (0.57)	0,84 (0.52)	0,56 (0.50)	0,65 (0.06)	1,11 (0.54)	0,94 (0.61)	0,94 (0.62)
σ_τ^2	—	1,79 (0.49)	1,67 (0.50)	1,04 (0.56)	—	2,10 (0.47)	1,40 (0.57)	1,45 (0.58)
ρ	—	-0,89 (0.08)	-0,88 (0.09)	-0,53 (0.53)	—	-0,92 (0.04)	-0,82 (0.25)	-0,84 (0.18)
$\mathbb{P}(\sigma_\tau^2 > \sigma_c^2 \mathbf{y})$	—	0,95	0,97	0,94	—	0,95	0,77	0,89
United Kingdom								
	United Kingdom				Germany			
	DT-08	UCUR	UCUR-74	UCUR-(74,08)	DT-73	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,91)
ϕ_1	1,15 (0.07)	0,84 (0.32)	0,86 (0.32)	0,85 (0.33)	1,01 (0.07)	0,78 (0.35)	0,77 (0.48)	0,83 (0.44)
ϕ_2	-0,18 (0.07)	-0,20 (0.25)	-0,22 (0.2)	-0,20 (0.26)	-0,06 (0.07)	-0,09 (0.32)	-0,18 (0.30)	-0,18 (0.29)
σ_c^2	0,77 (0.08)	0,85 (0.66)	0,86 (0.67)	0,88 (0.56)	1,10 (0.10)	0,71 (0.62)	0,56 (0.62)	0,52 (0.59)
σ_τ^2	—	1,79 (0.57)	1,76 (0.55)	1,70 (0.56)	—	1,97 (0.62)	1,34 (0.51)	1,25 (0.51)
ρ	—	-0,81 (0.20)	-0,83 (0.16)	-0,82 (0.16)	—	-0,73 (0.16)	-0,48 (0.35)	-0,44 (0.48)
$\mathbb{P}(\sigma_\tau^2 > \sigma_c^2 \mathbf{y})$	—	0,95	0,92	0,94	—	0,96	0,88	0,87

(continúa)

Estimated Posterior Means (Continues)

	France				Italy			
	DT-73	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,08)	DT-74	UCUR	UCUR-74	UCUR-(74,07)
ϕ_1	1,44 (0.07)	0,75 (0.11)	0,95 (0.24)	1,02 (0.32)	1,29 (0.06)	0,78 (0.18)	0,83 (0.26)	0,98 (0.33)
ϕ_2	-0,46 (0.07)	-0,06 (0.10)	-0,26 (0.18)	-0,34 (0.22)	-0,31 (0.06)	-0,22 (0.15)	-0,34 (0.18)	-0,46 (0.18)
σ_c^2	0,22 (0.02)	0,96 (0.53)	0,67 (0.43)	0,44 (0.32)	0,78 (0.07)	1,26 (0.55)	0,82 (0.54)	0,56 (0.40)
σ_τ^2	—	1,37 (0.53)	0,91 (0.40)	0,63 (0.33)	—	2,48 (0.35)	1,77 (0.44)	1,31 (0.43)
ρ	—	-0,95 (0.02)	-0,94 (0.04)	-0,85 (0.26)	—	-0,91 (0.03)	-0,87 (0.06)	-0,77 (0.21)
$\mathbb{P}(\sigma_\tau^2 > \sigma_c^2 \mathbf{y})$	—	0,95	0,92	0,88	—	0,98	0,97	0,96

Japan				
	DT-73	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,91)
ϕ_1	1,09 (0.06)	0,84 (0.18)	0,87 (0.26)	0,88 (0.34)
ϕ_2	-0,10 (0.06)	-0,36 (0.19)	-0,31 (0.26)	-0,25 (0.31)
σ_c^2	1,15 (0.05)	0,24 (0.16)	0,24 (0.23)	0,22 (0.25)
σ_τ^2	—	1,94 (0.05)	1,70 (0.21)	1,26 (0.37)
ρ	—	-0,80 (0.10)	-0,66 (0.18)	-0,33 (0.41)
$\mathbb{P}(\sigma_\tau^2 > \sigma_c^2 \mathbf{y})$	—	1,00	1,00	0,97

Note: Numerical standard errors are in parentheses.

Fuente: Elaboración Propia.

7.6 Tabla 6

Estimated Posterior Means

Latin American Countries								
	Argentina				Brazil			
	DT-12	UCUR	UCUR-01	UCUR-(01,12)	DT-13	UCUR	UCUR-13	UCUR-(09,13)
ϕ_1	1,44 (0.08)	1,54 (0.13)	1,54 (0.13)	1,53 (0.13)	1,10 (0.11)	0,60 (0.38)	0,71 (0.43)	0,70 (0.41)
ϕ_2	-0,48 (0.08)	-0,58 (0.13)	-0,58 (0.13)	-0,56 (0.13)	-0,10 (0.11)	-0,02 (0.29)	-0,13 (0.31)	-0,14 (0.29)
σ_c^2	2,85 (0.14)	2,08 (0.61)	2,13 (0.58)	2,09 (0.61)	1,33 (0.20)	0,91 (0.60)	0,74 (0.58)	0,79 (0.59)
σ_τ^2	—	1,69 (0.79)	1,75 (0.76)	1,80 (0.76)	—	2,69 (0.92)	1,82 (0.88)	1,81 (0.80)
ρ	—	0,59 (0.30)	0,62 (0.29)	0,60 (0.29)	—	-0,77 (0.19)	-0,55 (0.36)	-0,56 (0.35)
$\mathbb{P}(\sigma_\tau^2 > \sigma_c^2 \mathbf{y})$	—	0,38	0,38	0,38	—	0,96	0,86	0,84
	Chile				Mexico			
	DT-15	UCUR	UCUR-98	UCUR-(98,15)	DT-82	UCUR	UCUR-82	UCUR-(82,97)
ϕ_1	1,29 (0.11)	0,64 (0.49)	0,69 (0.50)	0,73 (0.52)	1,28 (0.08)	0,93 (0.45)	0,94 (0.46)	0,88 (0.45)
ϕ_2	-0,38 (0.11)	-0,20 (0.27)	-0,23 (0.27)	-0,25 (0.27)	-0,34 (0.08)	-0,41 (0.15)	-0,44 (0.15)	-0,40 (0.15)
σ_c^2	1,16 (0.17)	1,10 (0.76)	1,17 (0.80)	1,15 (0.81)	1,57 (0.18)	1,31 (0.72)	1,29 (0.73)	1,32 (0.74)
σ_τ^2	—	2,03 (0.66)	1,87 (0.67)	1,69 (0.70)	—	1,89 (1.10)	2,10 (0.94)	2,16 (0.95)
ρ	—	-0,77 (0.24)	-0,76 (0.25)	-0,72 (0.31)	—	-0,58 (0.41)	-0,66 (0.30)	-0,66 (0.32)
$\mathbb{P}(\sigma_\tau^2 > \sigma_c^2 \mathbf{y})$	—	0,83	0,73	0,65	—	0,68	0,78	0,83

(continúa)

Estimated Posterior Means (Continues)

	Peru			
	DT-92	UCUR	UCUR-92	UCUR-(83,92)
ϕ_1	1,32 (0.05)	1,40 (0.11)	1,39 (0.11)	1,41 (0.11)
ϕ_2	-0,39 (0.05)	-0,45 (0.11)	-0,45 (0.11)	-0,45 (0.11)
σ_c^2	2,97 (0.03)	2,49 (0.40)	2,44 (0.42)	2,51 (0.38)
σ_τ^2	—	2,37 (0.47)	2,25 (0.51)	2,38 (0.47)
ρ	—	0,77 (0.17)	0,74 (0.19)	0,77 (0.17)
$\mathbb{P}(\sigma_\tau^2 > \sigma_c^2 \mathbf{y})$	—	0,44	0,42	0,39

Note: Numerical standard errors are in parentheses.

Fuente: Elaboración Propia.



7.7 Table 7

Estimated Trend Output Growth Rates

High Income Countries		United States			Canada				
		DT-07	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,07)	DT-78	UCUR	UCUR-78	UCUR-(78,07)
μ : 1960Q1 – 2019Q4	–	0,73 (0.09)	–	–	μ : 1961Q1 – 2019Q4	–	0,78 (0.09)	–	–
μ : 1960Q1 – 1973Q1	–	–	1,02 (0.17)	1,00 (0.14)	μ : 1961Q1 – 1978Q3	1,25 (0.06)	–	1,23 (0.14)	1,23 (0.14)
μ : 1960Q1 – 2007Q2	0,83 (0.02)	–	–	–	μ : 1978Q4 – 2008Q3	–	–	–	0,68 (0.11)
μ : 1973Q2 – 2007Q2	–	–	–	0,73 (0.09)	μ : 1978Q4 – 2019Q4	0,59 (0.04)	–	0,59 (0.09)	–
μ : 1973Q2 – 2019Q4	–	–	0,65 (0.09)	–	μ : 2008Q4 – 2019Q4	–	–	–	0,37 (0.18)
μ : 2007Q3 – 2019Q4	0,38 (0.11)	–	–	0,43 (0.15)					
United Kingdom		Germany							
		DT-08	UCUR	UCUR-74	UCUR-(74,08)	DT-73	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,91)
μ : 1970Q1 – 2019Q4	–	0,57 (0.09)	–	–	μ : 1960Q1 – 2019Q4	–	0,60 (0.09)	–	–
μ : 1970Q1 – 1973Q4	–	–	1,07 (0.29)	1,08 (0.28)	μ : 1960Q1 – 1973Q3	1,14 (0.08)	–	1,09 (0.15)	1,09 (0.15)
μ : 1974Q1 – 2007Q4	0,62 (0.02)	–	–	–	μ : 1973Q4 – 1991Q1	–	–	–	0,64 (0.13)
μ : 1974Q1 – 2007Q4	–	–	–	0,60 (0.11)	μ : 1973Q4 – 2019Q4	0,45 (0.04)	–	0,45 (0.08)	–
μ : 1974Q1 – 2019Q4	–	–	0,51 (0.10)	–	μ : 1991Q2 – 2019Q4	–	–	–	0,33 (0.10)
μ : 2008Q1 – 2019Q4	0,31 (0.10)	–	–	0,27 (0.18)					

(continúa)

Estimated Trend Output Growth Rates (Continues)

		France				Italy			
		DT-73	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,08)	DT-74	UCUR	UCUR-74	UCUR-(74,07)
μ : 1970Q1 – 2019Q4	–	0,54	–	–	–	μ : 1960Q1 – 2019Q4	–	0,58	–
		(0.08)						(0.10)	
μ : 1970Q1 – 1973Q1	1,39	–	1,25	–	1,26	μ : 1960Q1 – 1974Q3	1,43	–	1,31
	(0.19)		(0.19)		(0.18)		(0.10)		(0.15)
μ : 1973Q2 – 2007Q4	–	–	–	–	0,56	μ : 1974Q4 – 2006Q4	–	–	0,51
					(0.07)				(0.10)
μ : 1973Q2 – 2019Q4	0,49	–	0,47	–	–	μ : 1974Q4 – 2019Q4	0,35	–	–
	(0.02)		(0.07)				(0.05)		(0.10)
μ : 2008Q1 – 2019Q4	–	–	–	–	0,23	μ : 2007Q1 – 2019Q4	–	–	–0,07
					(0.11)				(0.16)
		Japan							
		DT-73	UCUR	UCUR-73	UCUR-(73,91)				
μ : 1960Q1 – 2019Q4	–	0,93	–	–	–				
		(0.09)							
μ : 1960Q1 – 1972Q4	2,50	–	2,33	–	2,33				
	(0.12)		(0.18)		(0.16)				
μ : 1973Q1 – 1991Q3	–	–	–	–	1,02				
					(0.13)				
μ : 1973Q1 – 2019Q4	0,55	–	0,54	–	–				
	(0.05)		(0.09)						
μ : 1991Q4 – 2019Q4	–	–	–	–	0,21				
					(0.11)				

Note: Numerical standard errors are in parentheses.

Fuente: Elaboración Propia.

7.8 **Tabla 8**

Estimated Trend Output Growth Rates

Latin American Countries		Argentina			Brasil		
	DT-12	UCUR UCUR-01	UCUR-(01,12)	DT-13	UCUR UCUR-13	UCUR-(10,13)	
μ : 1993Q1 – 2019Q4	–	0,73 (0.17)	–	μ : 1996Q1 – 2019Q4	–	0,56 (0.16)	–
μ : 1993Q1 – 2000Q4	–	1,25 (0.42)	1,13 (0.42)	μ : 1996Q1 – 2009Q4	–	–	0,76 (0.18)
μ : 1993Q1 – 2012Q1	0,85 (0.10)	–	–	μ : 1996Q1 – 2013Q2	0,76 (0.06)	–	–
μ : 2001Q1 – 2012Q1	–	–	0,81 (0.37)	μ : 2010Q1 – 2013Q4	–	–	0,89 (0.33)
μ : 2001Q1 – 2019Q4	–	0,49 (0.24)	–	μ : 2013Q3 – 2019Q4	–0,02 (0.19)	–0,05 (0.25)	–0,05 (0.25)
μ : 2012Q2 – 2019Q4	–0,01 (0.32)	–	0,12 (0.42)				
Chile		Mexico					
	DT-15	UCUR UCUR-98	UCUR-(98,15)	DT-82	UCUR UCUR-82	UCUR-(82,97)	
μ : 1995Q1 – 2019Q4	–	0,90 (0.14)	–	μ : 1980Q1 – 2019Q4	–	0,58 (0.11)	–
μ : 1995Q1 – 1997Q4	–	1,73 (0.36)	1,70 (0.35)	μ : 1980Q1 – 1982Q2	0,70 (0.34)	–	1,01 (0.44)
μ : 1995Q1 – 2014Q4	1,06 (0.04)	–	–	μ : 1982Q3 – 1997Q1	–	–	0,56 (0.18)
μ : 1998Q1 – 2014Q4	–	–	0,92 (0.16)	μ : 1982Q3 – 2019Q4	0,58 (0.04)	–	–
μ : 1998Q1 – 2019Q4	–	0,76 (0.15)	–	μ : 1997Q2 – 2019Q4	–	–	0,52 (0.16)
μ : 2015Q1 – 2019Q4	0,22 (0.21)	–	0,30 (0.29)				

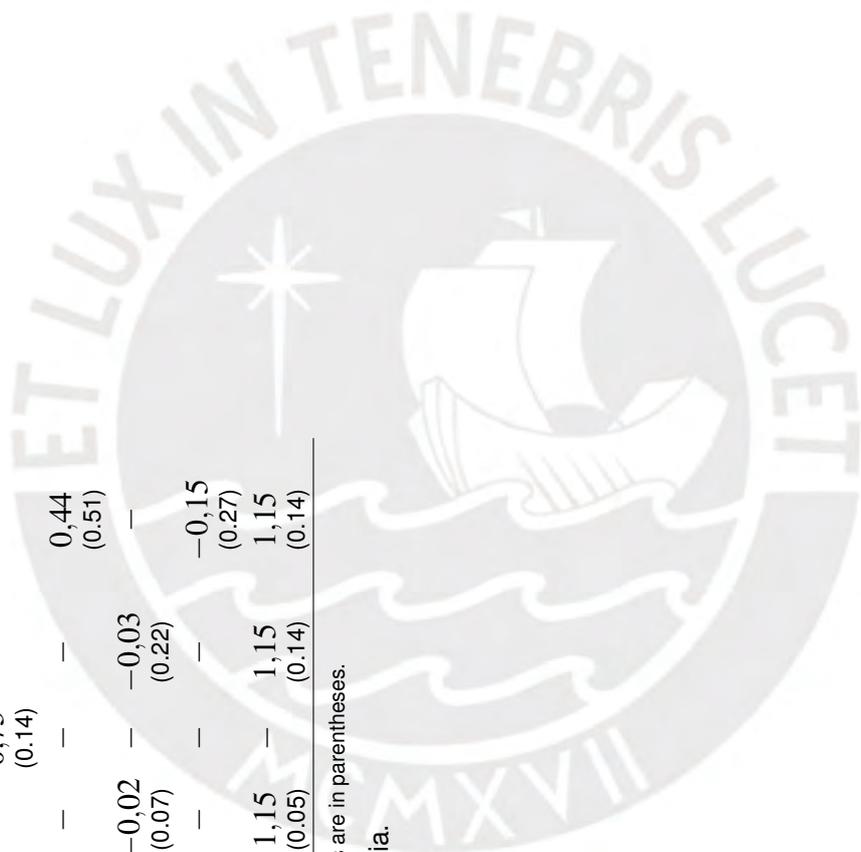
(continúa)

Estimated Trend Output Growth Rates (Continues)

Peru				
	DT-92	UCUR	UCUR-92	UCUR-(83,92)
μ : 1980Q1 – 2019Q4	–	0,75	–	–
		(0.14)		
μ : 1980Q1 – 1982Q4	–	–	–	0,44
				(0.51)
μ : 1980Q1 – 1992Q2	–0,02	–	–0,03	–
	(0.07)		(0.22)	
μ : 1983Q1 – 1992Q2	–	–	–	–0,15
				(0.27)
μ : 1992Q3 – 2019Q4	1,15	–	1,15	1,15
	(0.05)		(0.14)	(0.14)

Note: Numerical standard errors are in parentheses.

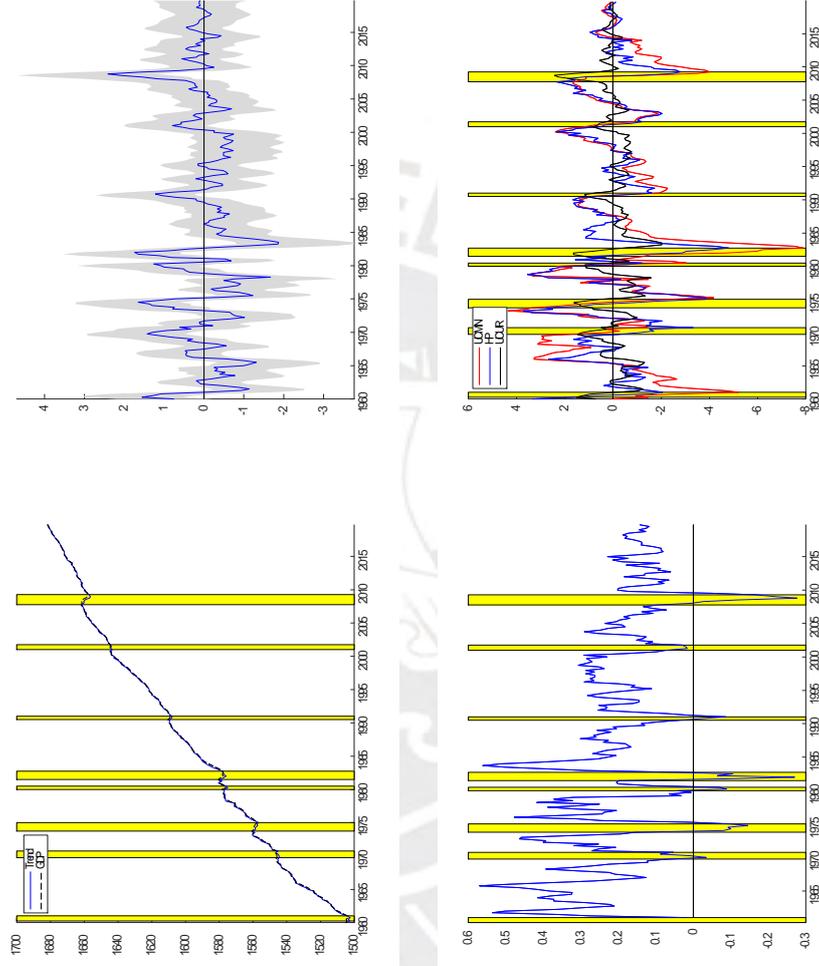
Fuente: Elaboración Propia.



8 Figuras

8.1 Figura 1

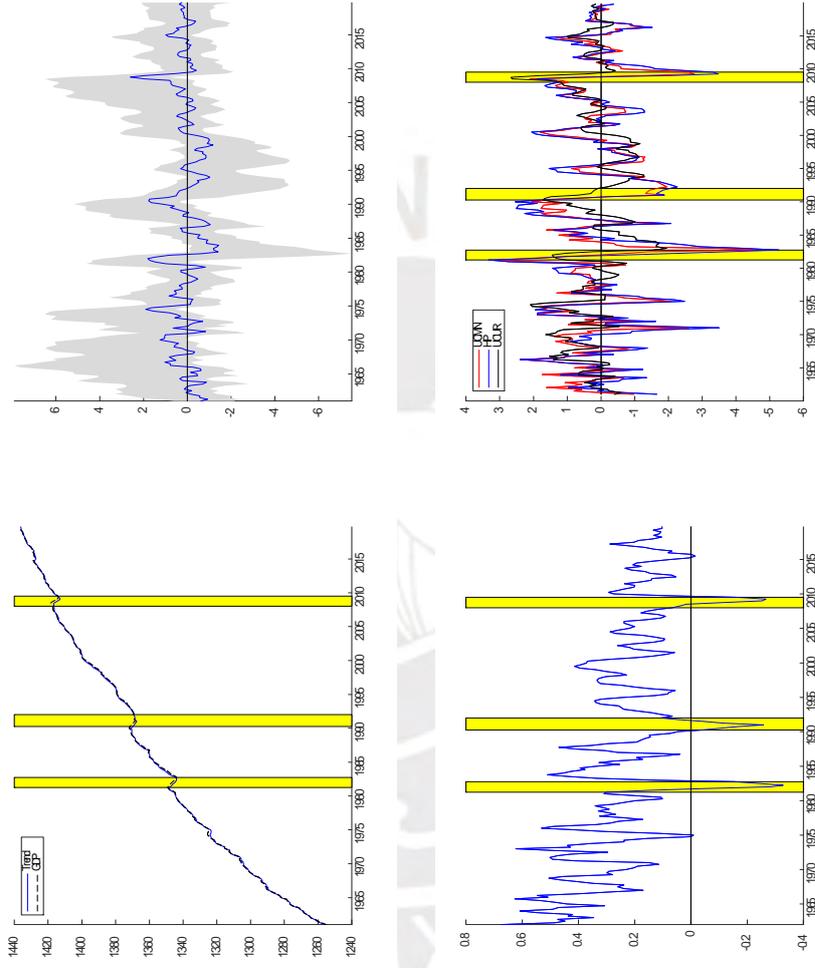
United States: Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR-73. Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR-73 (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-73.



Fuente: Elaboración propia.

8.2 Figura 2

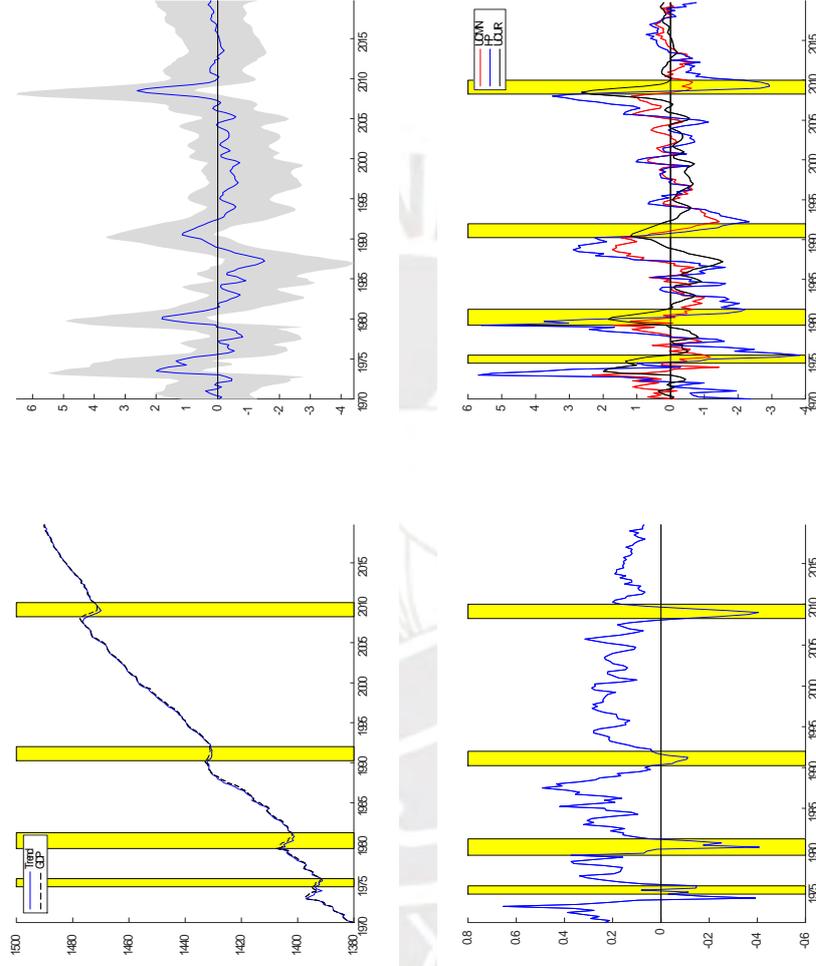
Canada: Estimates of Trend and Cycle (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR-78. Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR-78 (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-78.



Fuente: Elaboración propia.

8.3 Figura 3

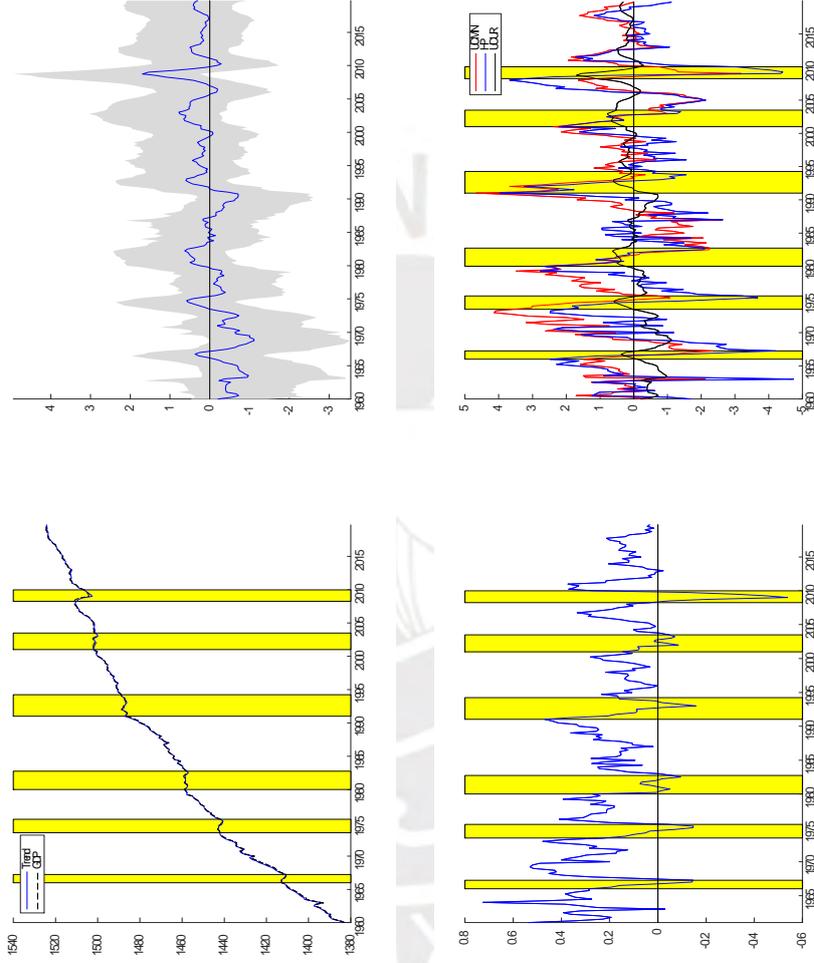
United Kingdom: Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR-74. Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR-74 (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-74.



Fuente: Elaboración propia.

8.4 Figura 4

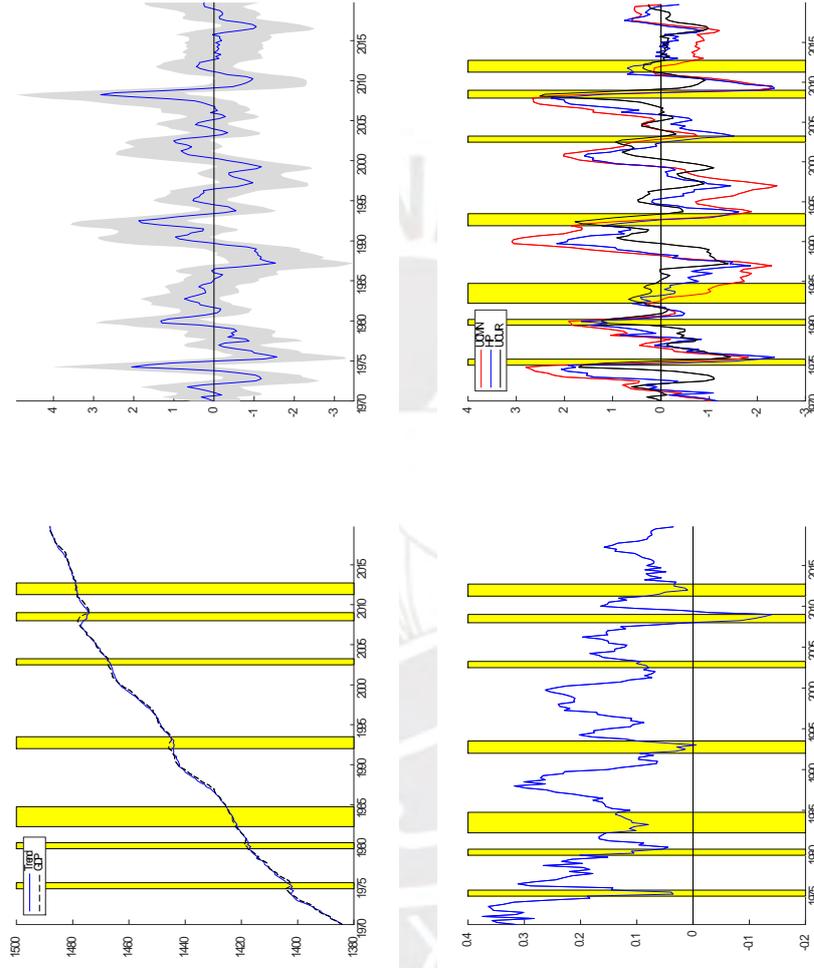
Germany: Estimates of Trend and Cycle (Top Left Panel) and Cycle under UCUR. Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR.



Fuente: Elaboración propia.

8.5 Figura 5

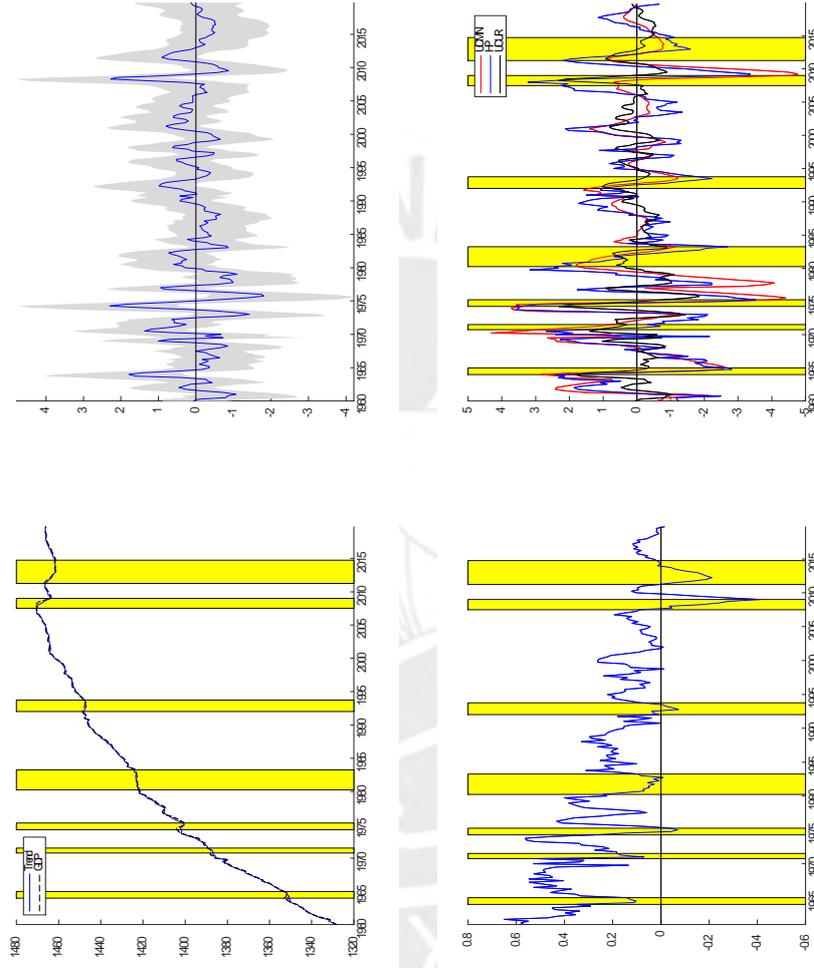
France: Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCMN Model, HP Filter and UCUR-(74,08) (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-(74,08).



Fuente: Elaboración propia.

8.6 Figura 6

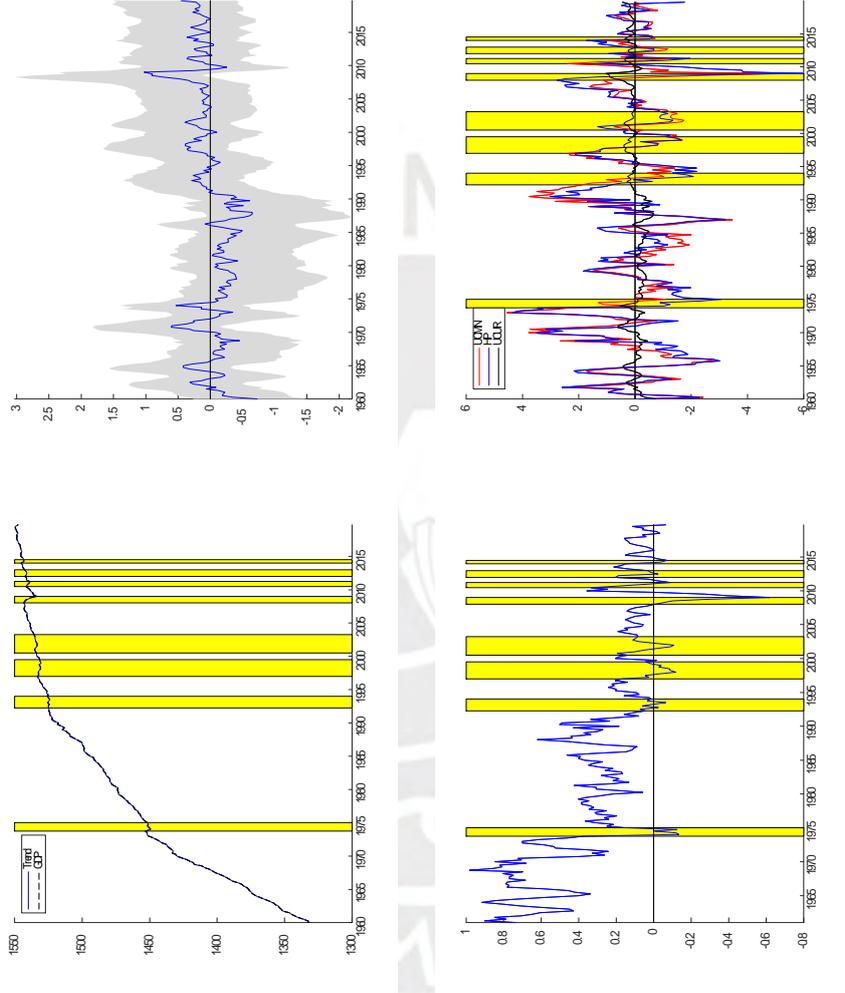
Italy: Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR-(74,07). Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR-(74,07) (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-(74,07).



Fuente: Elaboración Propia.

8.7 Figura 7

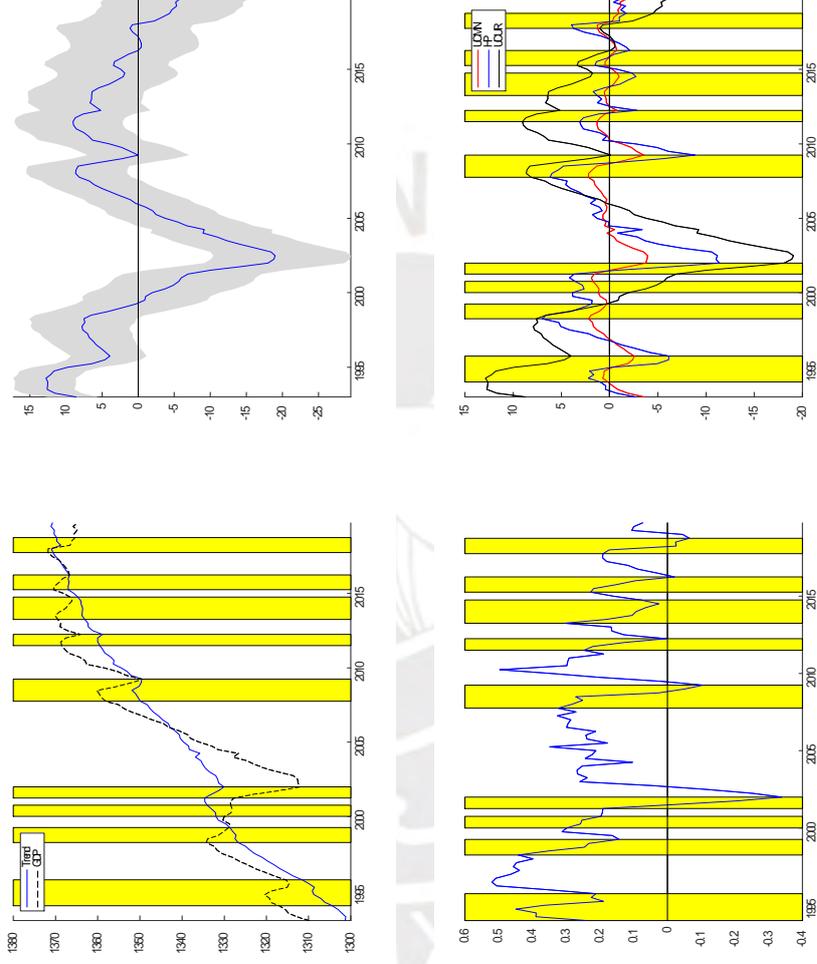
Japan: Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR-73. Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR-73 (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-73.



Fuente: Elaboración propia.

8.8 Figura 8

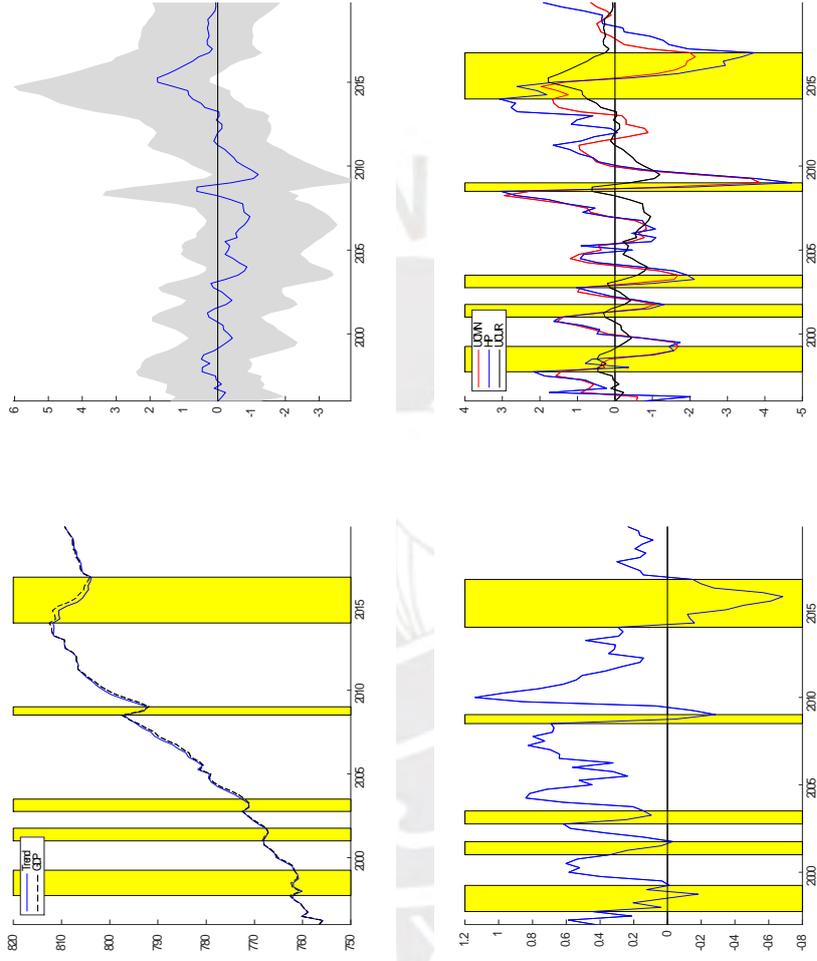
Argentina: Estimates of Trend and Cycle (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCMN Model, HP Filter and UCUR-01 (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-01.



Fuente: Elaboración propia.

8.9 Figura 9

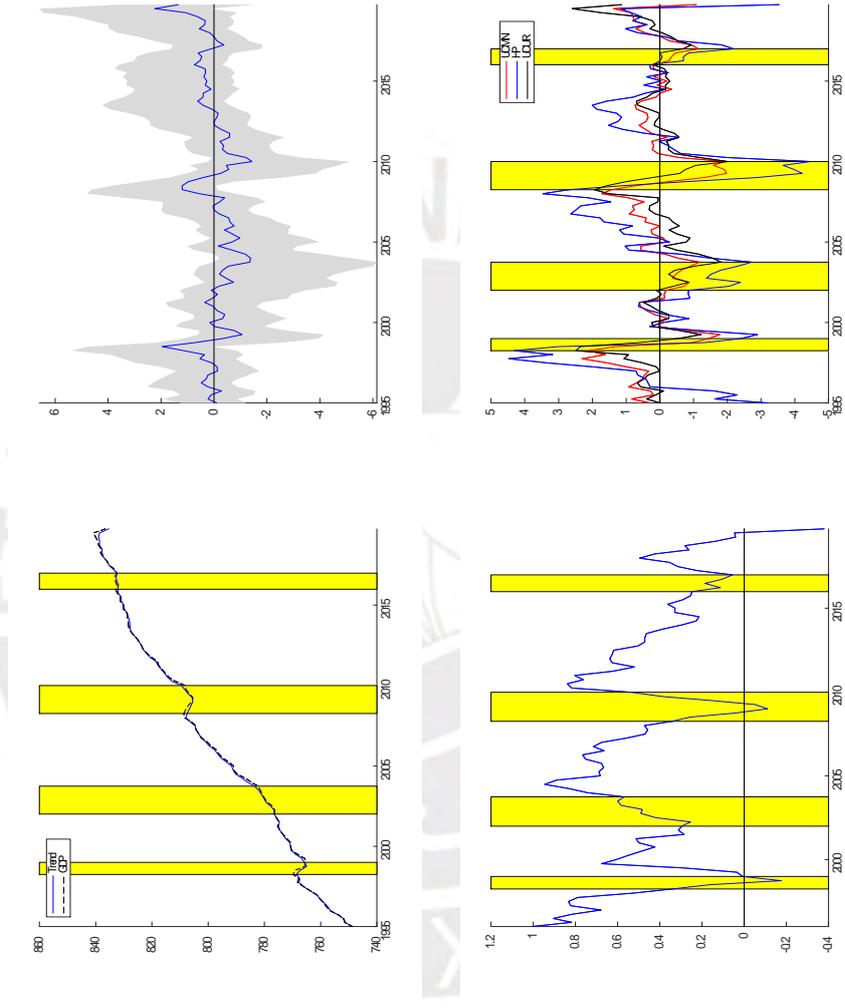
Brasil: Estimates of Trend and Cycle (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR. Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR.



Fuente: Elaboración propia.

8.10 Figura 10

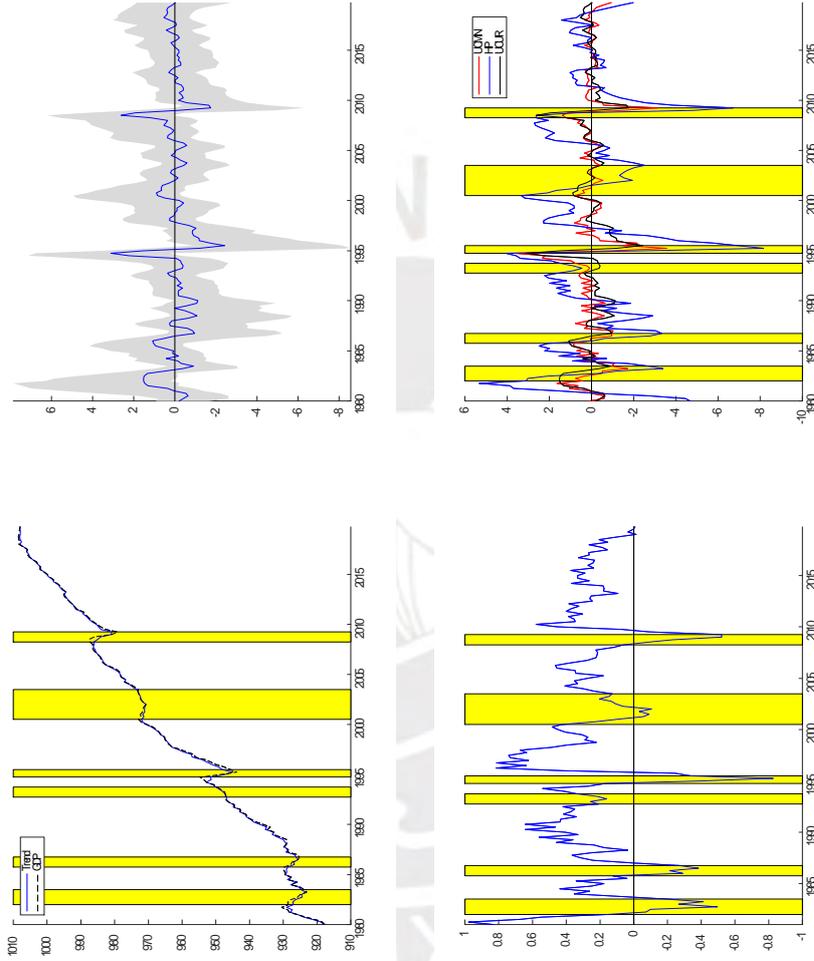
Chile: Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR-(98,15). Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR-(98, 15) (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-(98,15).



Fuente: Elaboración propia.

8.11 Figura 11

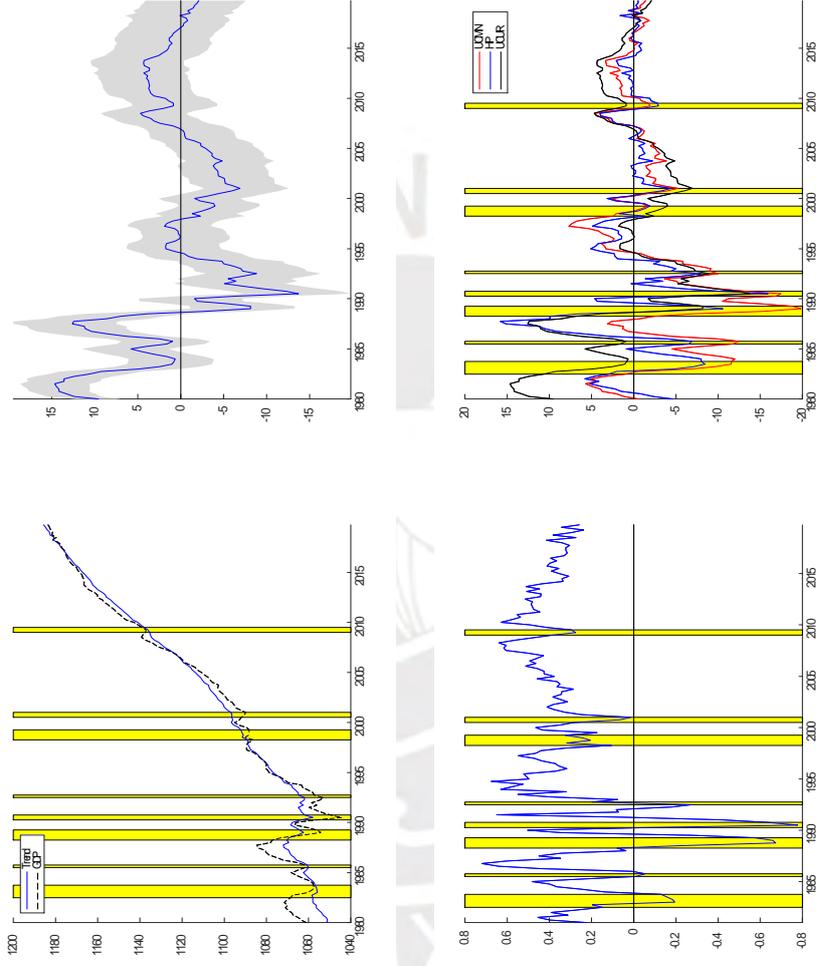
Mexico Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCUR-82. Estimates of Cycle under UCMN Model, HP Filter and UCUR-82 (Bottom Right Panel). Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-82.



Fuente: Elaboración propia.

8.12 Figura 12

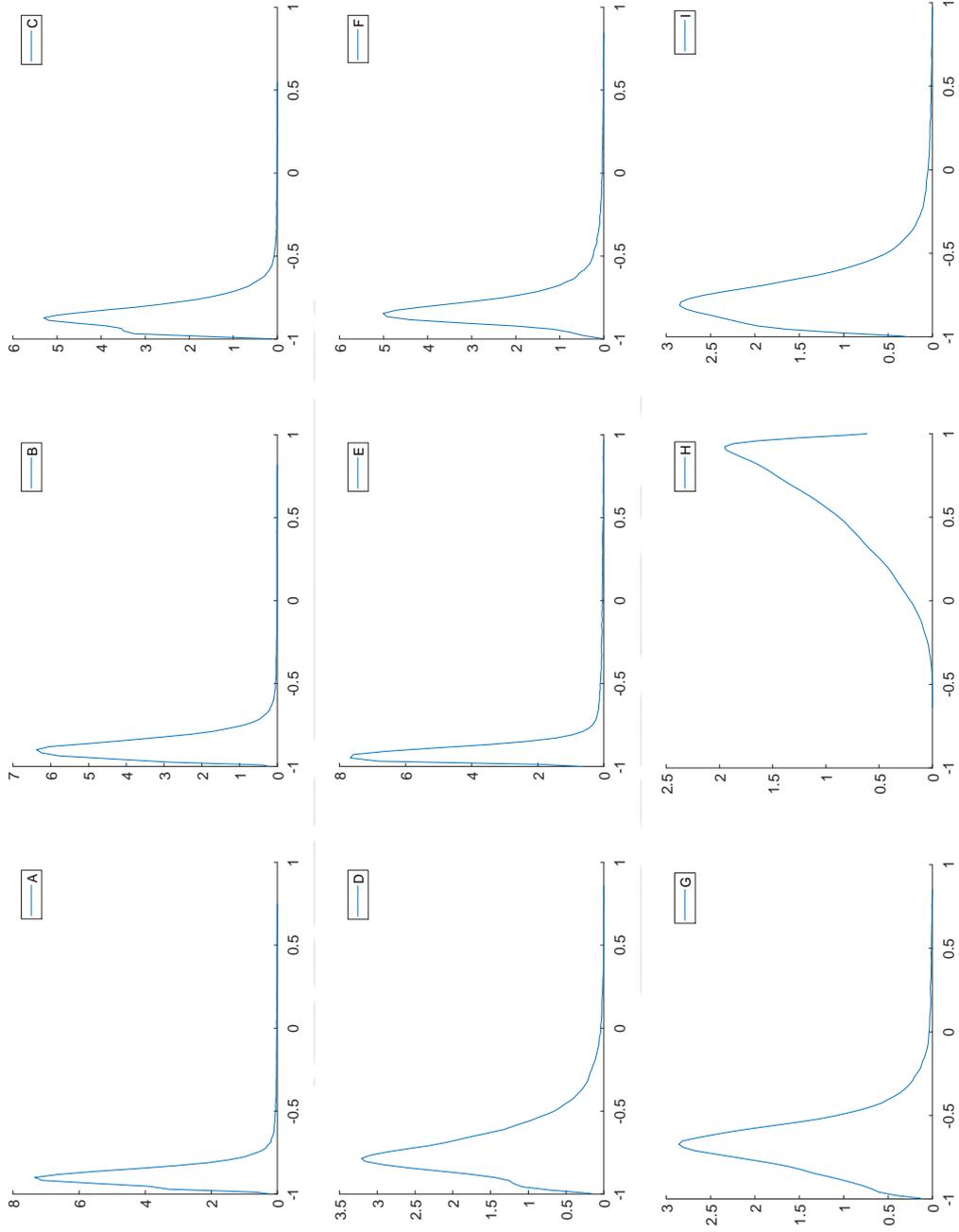
Peru: Estimates of Trend (Top Left Panel) and Cycle (Top Right Panel) under UCMN Model, HP Filter and UCUR-92. Estimates of Trend Output Growth Rates (Bottom Left Panel) under UCUR-92.

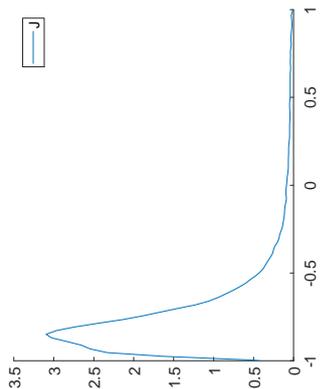
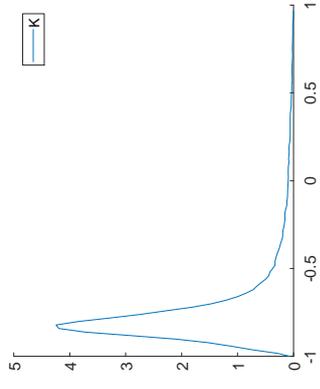
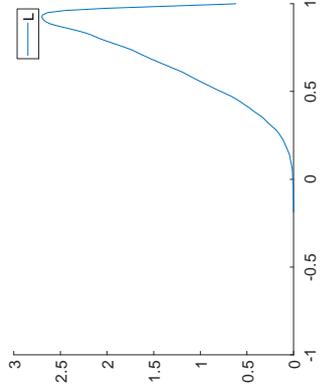


Fuente: Elaboración propia.

8.13 Figura 13

Posterior Densities of ρ . A: United States under UCUR-73. B: Canada under UCUR-78. C: United Kingdom under UCUR-74. D: Germany under UCUR. E: France under UCUR-(74,08). F: Italy under UCUR-(74,07). G: Japan under UCUR-73. H: Argentina under UCUR-01. I: Brazil under UCUR. J: Chile under UCUR-(98,15). K: Mexico under UCUR-82. L: Peru under UCUR-92.



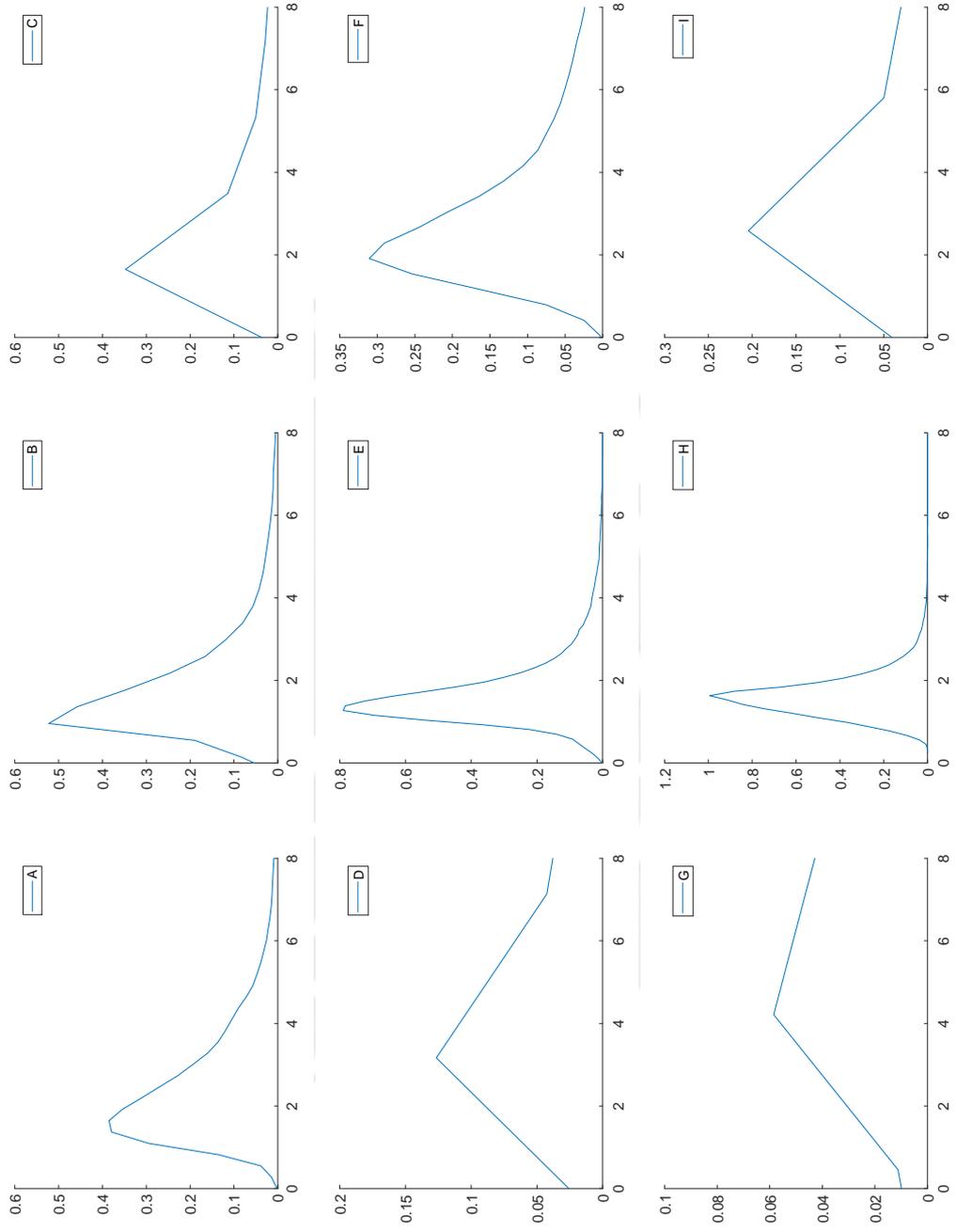


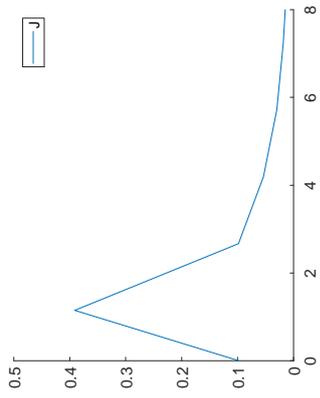
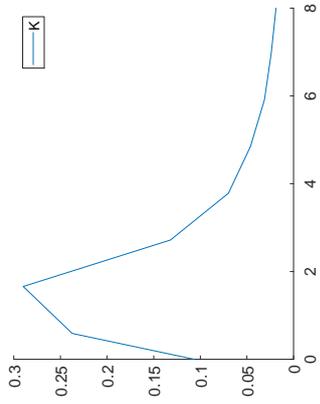
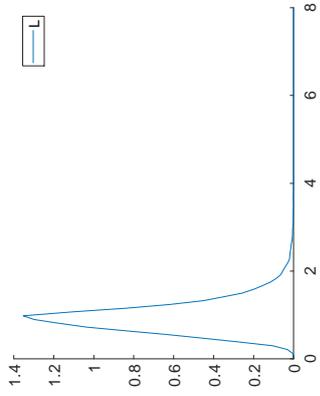
Fuente: Elaboracion propia.



8.14 Figura 14

Posterior Densities of the Variance ratio $\sigma_{\tau}^2/\sigma_{\epsilon}^2$. A: United States under UCUR-73. B: Canada under UCUR-78. C: United Kingdom under UCUR-74. D: Germany under UCUR. E: France under UCUR-(74,08). F: Italy under UCUR-(74,07). G: Japan under UCUR-73. H: Argentina under UCUR-01. I: Brazil under UCUR. J: Chile under UCUR-(98,15). K: Mexico under UCUR-82. L: Peru under UCUR-92.





Fuente: Elaboracion propia.



A Anexo: Detalles de la Estimación

A.1 Estimación del Modelo UCUR

Para obtener el muestreo posterior de ϕ , se recuerda que \mathbf{u}^c y τ son conjuntamente normales:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^c \\ \tau \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_c^2 \mathbf{I}_T & \rho \sigma_c \sigma_\tau (\mathbf{H}')^{-1} \\ \rho \sigma_c \sigma_\tau (\mathbf{H})^{-1} & \sigma_\tau^2 (\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} \end{pmatrix} \right). \quad (\text{A1})$$

Por lo tanto, la distribución condicional de \mathbf{u}^c dado τ y los demas parámetros es

$$(\mathbf{u}^c | \tau, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) \sim N \left(\frac{\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} \mathbf{H}(\tau - \alpha), (1 - \rho^2) \sigma_c^2 \mathbf{I}_T \right). \quad (\text{A2})$$

Siguiendo esto, se escribe la ecuación (3) como

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}_\phi \phi + \mathbf{u}^c,$$

donde \mathbf{X}_ϕ es una matriz $T \times 2$ que contiene los valores rezagados de c_t . Por lo tanto, por medio de una regresión lineal estandar se obtiene lo siguiente:

$$(\phi | \mathbf{y}, \tau, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) \sim N(\hat{\phi}, \mathbf{K}_\phi^{-1}) 1(\phi \in \mathbf{R}),$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\phi &= \mathbf{V}_\phi^{-1} + \frac{1}{(1 - \rho^2) \sigma_c^2} \mathbf{X}'_\phi \mathbf{X}_\phi, \\ \hat{\phi} &= \mathbf{K}_\phi^{-1} \left(\mathbf{V}_\phi^{-1} \phi_0 + \frac{1}{(1 - \rho^2) \sigma_c^2} \mathbf{X}'_\phi \left(\mathbf{c} - \frac{\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} \mathbf{H}(\tau - \alpha) \right) \right). \end{aligned}$$

Un muestreo de esta distribución normal truncada puede ser obtenida por medio del metodo de aceptación–rechazo, que por lo tanto, permite seguir obteniendo muestreos de $N(\hat{\phi}, \mathbf{K}_\phi^{-1})$ hasta que $\phi \in \mathbf{R}$.

Para seguir obteniendo los muestreos posteriores de los parámetros restantes se necesita derivar la densidad conjunta de \mathbf{u}^c y \mathbf{u}^τ . Para lograr ello, se recuerda que dado

σ_c^2 , σ_τ^2 y ρ , se puede factorizar (u_t^c, u_t^τ) de la siguiente manera:

$$u_t^c \sim N(0, \sigma_\tau^2), \quad (u_t^c | u_t^\tau) \sim N\left(\frac{\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} u_t^\tau, (1 - \rho^2) \sigma_c^2\right).$$

Por lo tanto, la distribución conjunta de \mathbf{u}^c y \mathbf{u}^τ es dada por

$$\begin{aligned} p(\mathbf{u}^c, \mathbf{u}^\tau | \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho) &\propto (\sigma_\tau^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\tau^2} \sum_{t=1}^T (u_t^\tau)^2} \left((1 - \rho^2) \sigma_c^2 \right)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_c^2} \sum_{t=1}^T (u_t^c - \frac{\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} u_t^\tau)^2}, \\ &= \left((1 - \rho^2) \sigma_c^2 \sigma_\tau^2 \right)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\tau^2} k_3 - \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_c^2} \left(k_1 - \frac{2\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} k_2 + \frac{\rho^2 \sigma_c^2}{\sigma_\tau^2} k_3 \right)}, \end{aligned} \quad A3 \quad (10)$$

donde $k_1 = \sum_{t=1}^T (u_t^c)^2$, $k_2 = \sum_{t=1}^T u_t^c u_t^\tau$ y $k_3 = \sum_{t=1}^T (u_t^\tau)^2$. Siguiendo (10) tenemos que

$$p(\sigma_c^2 | \mathbf{y}, \tau, \phi, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) \propto p(\sigma_c^2) \times (\sigma_c^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_c^2} \left(k_1 - \frac{2\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} k_2 + \frac{\rho^2 \sigma_c^2}{\sigma_\tau^2} k_3 \right)},$$

donde $p(\sigma_c^2)$ es la prior normal truncada especificada anteriormente. De manera similar es posible obtener las densidades condicionales de los parámetros restantes:

$$\begin{aligned} p(\sigma_\tau^2 | \mathbf{y}, \tau, \phi, \sigma_c^2, \rho, \mu_1, \tau_0) &\propto p(\sigma_\tau^2) \times (\sigma_\tau^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\tau^2} k_3 - \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_c^2} \left(k_1 - \frac{2\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} k_2 + \frac{\rho^2 \sigma_c^2}{\sigma_\tau^2} k_3 \right)}, \\ p(\rho | \mathbf{y}, \tau, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \mu_1, \tau_0) &\propto p(\rho) \times (1 - \rho^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_c^2} \left(k_1 - \frac{2\rho \sigma_c}{\sigma_\tau} k_2 + \frac{\rho^2 \sigma_c^2}{\sigma_\tau^2} k_3 \right)}, \end{aligned}$$

donde $p(\sigma_\tau^2)$ y $p(\rho)$ es la prior de σ_τ^2 y ρ , respectivamente.

Por último, para obtener las densidades prior conjuntas de τ_0 y μ_1 , se nota que es posible escribir $\alpha = \tau_0 \mathbf{1}_T + \mu_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{1}_T = \mathbf{X}_\delta \delta$, donde $\mathbf{1}_T$ es un vector columna de unos $T \times 1$, $\mathbf{X}_\delta = (\mathbf{1}_T, \mathbf{H}^{-1} \mathbf{1}_T)$ y $\delta = (\tau_0, \mu_1)'$. Siguiendo la ecuación (A1) tenemos que la distribución condicional τ dado \mathbf{u}^c y el resto de parámetros es

$$(\tau | \mathbf{u}^c, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) \sim N\left(\mathbf{X}_\delta \delta + \frac{\rho \sigma_\tau}{\sigma_c} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{u}^c, (1 - \rho^2) \sigma_\tau^2 (\mathbf{H}' \mathbf{H})^{-1}\right).$$

Por lo tanto, por medio de una regresión lineal estandar se obtiene lo siguiente:

$$(\tau_0, \mu_1 | \mathbf{y}, \tau, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \phi, \tau_0) \sim N(\hat{\delta}, \mathbf{K}_\delta^{-1}),$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\delta &= \mathbf{V}_\delta^{-1} + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_\tau^2} \mathbf{X}'_\delta \mathbf{H}' \mathbf{H} \mathbf{X}_\delta, \\ \hat{\delta} &= \mathbf{K}_\delta^{-1} \left(\mathbf{V}_\delta^{-1} \delta_0 + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_\tau^2} \mathbf{X}'_\delta \mathbf{H}' \mathbf{H} \left(\tau - \frac{\rho\sigma_\tau}{\sigma_c} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{u}^c \right) \right), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{V}_\delta = \text{diag}(V_\tau, V_\mu)$ y $\delta_0 = (\tau_0, \mu_0)'$.

A.2 Estimación de Modelo UCUR $_{-t_0}$

En esta sección se establecen los procedimientos de estimación propuesto por Grant y Chan (2017) para el modelo UCUR que permite un quiebre en tendencia en el tiempo t_0 . En el siguiente modelo se reemplaza la ecuación de tendencia τ del modelo UCUR por la ecuación (4):

$$\tau_t = \mu_1 1(t < t_0) + \mu_2 1(t \geq t_0) + \tau_{t-1} + u_t^\tau.$$

En comparación con el modelo UCUR, el único parámetro adicional es μ_2 . La a prior de este parámetro se asume igual al de μ_1 , el cual es $\mu_2 \sim N(\mu_0, V_\mu)$. Para el resto de parámetros en común entre modelos se asume las mismas distribuciones prior que en el modelo UCUR.

Según Grant y Chan (2017) solo se necesitan de pequeñas modificaciones para ajustar el modelo UCUR a esta nueva extensión. Por ejemplo, si se redefine

$$\tilde{\alpha} = \underbrace{(\mu_1 + \tau_0, \mu_1, \dots, \mu_1)}_{t_0-1}, \underbrace{(\mu_2, \dots, \mu_2)}_{T-t_0+1},$$

y $\alpha = \mathbf{H}^{-1} \tilde{\alpha}$. Si se toma $\mathbf{u}^c = \mathbf{H}\tau - \tilde{\alpha}$ entonces el procedimiento puede ser implementados de la misma manera que en el modelo UCUR. Por último, para obtener los muestreos de τ_0 , μ_1 y μ_2 conjuntamente, tomamos $\alpha = \tau_0 \mathbf{1}_T + \mu_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = \mathbf{X}_\delta$, donde \mathbf{d}_1 es un

vector columna de variables dummy $T \times 1$, donde los primeros $t_0 - 1$ elementos son 1 y el resto son 0, y \mathbf{d}_2 es definido tal que $\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = \mathbf{1}_T$. Notar que \mathbf{X}_δ y δ son redefinidos como $\mathbf{X}_\delta = (\mathbf{1}_T, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{d}_1, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{d}_2)$ and $\delta = (\tau_0, \mu_1, \mu_2)'$. Una vez hechas estas modificaciones, el procedimiento se implementa de igual forma que el modelo anterior.

A.3 Estimación Modelo DT $_{-t_0}$

En esta sección se establecen los procedimientos de estimación propuesto por Grant y Chan (2017) para el modelo con tendencia determinística UCUR. En el siguiente modelo la ecuación de tendencia τ toma la siguiente forma

$$\tau_t = \mu_1 1(t < t_0) + \mu_2 1(t \geq t_0) + \tau_{t-1}.$$

Para este modelo los autores adoptan las mismas distribuciones prior que en el modelo UCUR $_{-t_0}$. El modelo UCUR puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}_\delta \delta + \mathbf{c}, \\ \mathbf{c} &= \mathbf{H}_\phi^{-1} \mathbf{u}^c, \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\mathbf{X}_\delta = (\mathbf{1}_T, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{d}_1, \mathbf{H}^{-1}\mathbf{d}_2)$ y $\delta = (\tau_0, \mu_1, \mu_2)'$.

Los muestreos posterior pueden ser obtenidos mediante un muestre secuencial de $p(\phi | \mathbf{y}, \sigma_c^2, \mu_1, \mu_2, \tau_0)$; $p(\sigma_c^2 | \mathbf{y}, \phi, \mu_1, \mu_2, \tau_0)$; y $p(\tau_0, \mu_1, \mu_2 | \mathbf{y}, \phi, \sigma_c^2)$. Recordar que $(\mathbf{u}^c | \sigma_c^2) \sim N(\mathbf{0}, \sigma_c^2 \mathbf{I}_T)$. Por lo tanto, tenemos

$$(\phi | \mathbf{y}, \sigma_c^2, \mu_1, \mu_2, \tau_0) \sim N(\hat{\phi}, \mathbf{K}_\phi^{-1}) 1(\phi \in \mathbf{R}),$$

donde

$$\mathbf{K}_\phi = \mathbf{V}_\phi^{-1} + \frac{1}{\sigma_c^2} \mathbf{X}'_\phi \mathbf{X}_\phi, \quad \hat{\phi} = \mathbf{K}_\phi^{-1} \left(\mathbf{V}_\phi^{-1} \phi_0 + \frac{1}{\sigma_c^2} \mathbf{X}'_\phi \mathbf{c} \right).$$

Un muestreo de esta distribución normal truncada puede ser obtenida por medio del

metodo de aceptación–rechazo.

Siguiendo lo anterior, la densidad condicional de σ_c^2 esta dada por

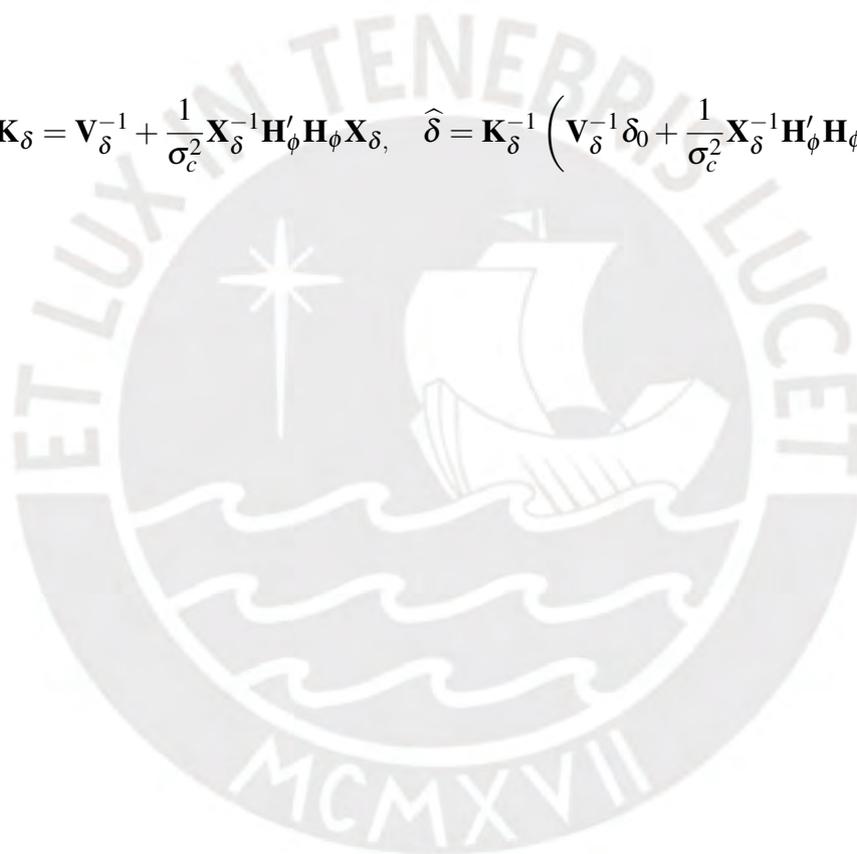
$$p(\sigma_c^2 | \mathbf{y}, \phi, \mu_1, \mu_2, \tau_0) \propto p(\sigma_c^2) \times p(\sigma_c^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_c^2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{u}_t^c)^2},$$

donde \mathbf{u}^c puede ser obtenido usando el Girddy–Gibbs step. Por ultimo siguiendo la ecuación (11) tenemos que

$$(\tau_0, \mu_1, \mu_2 | \mathbf{y}, \sigma_c^2, \phi) \sim N(\hat{\delta}, \mathbf{K}_\delta^{-1}),$$

donde,

$$\mathbf{K}_\delta = \mathbf{V}_\delta^{-1} + \frac{1}{\sigma_c^2} \mathbf{X}_\delta^{-1} \mathbf{H}'_\phi \mathbf{H}_\phi \mathbf{X}_\delta, \quad \hat{\delta} = \mathbf{K}_\delta^{-1} \left(\mathbf{V}_\delta^{-1} \delta_0 + \frac{1}{\sigma_c^2} \mathbf{X}_\delta^{-1} \mathbf{H}'_\phi \mathbf{H}_\phi \mathbf{y} \right).$$



B Anexo: Evaluación integrada de verosimilitud

B.1 Modelo UCUR

Recordemos que la densidad posterior de τ y la probabilidad condicional, bajo el modelo UCUR, están dados por:

$$\begin{aligned}\rho(\tau|\sigma_\tau^2, \mu_1, \tau_0) &= (2\pi\sigma_\tau^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\tau^2}(\tau-\alpha)'H'H(\tau-\alpha)} \\ \rho(\tau|\tau, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) &= (2\pi\sigma_c^2(1-\rho^2))^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_c^2}(H_\phi y - a - B_\tau)'(H_\phi y - a - B_\tau)}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\frac{\rho\sigma_c}{\sigma_\tau}\mathbf{H}\alpha, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H}_\phi + \frac{\rho\sigma_c}{\sigma_\tau}\mathbf{H}.\end{aligned}$$

Siendo $k_4 = (2\pi)^{-T} ((1-\rho^2)\sigma_c^2\sigma_\tau^2)^{-\frac{T}{2}}$, la verosimilitud integrada puede ser derivada de la siguiente manera:

$$(\mathbf{y}|\phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) = \int \rho(\mathbf{y}|\tau, \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \rho, \mu_1, \tau_0) \rho(\tau|\sigma_c^2, \mu_1, \tau_0) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= k_4 \int e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a} - \mathbf{B}_\tau)'(\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a} - \mathbf{B}_\tau)} e^{-\frac{1}{2\sigma_\tau^2}(\tau - \alpha)' \mathbf{H}' \mathbf{H}(\tau - \alpha)} d\tau \\
&= k_4 \int e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2} (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a})' (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a}) - 2\tau' \mathbf{B}' (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a}) + \tau' \mathbf{B}' \mathbf{B} \tau + \frac{1}{\sigma_\tau^2} (\tau' \mathbf{H}' \mathbf{H} \tau - 2\tau' \mathbf{H}' \mathbf{H} \alpha + \alpha' \mathbf{H}' \mathbf{H} \alpha) \right)} d\tau \\
&= k_4 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2} (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a})' (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a}) + \frac{1}{\sigma_\tau^2} \alpha' \mathbf{H}' \mathbf{H} \alpha \right)} \int e^{-\frac{1}{2} (\tau' \mathbf{K}_\tau \tau - 2\tau' \mathbf{d}_\tau)} d\tau \\
&= k_4 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2} (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a})' (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a}) + \frac{1}{\sigma_\tau^2} \alpha' \mathbf{H}' \mathbf{H} \alpha - \mathbf{d}_\tau' \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau \right)} \int e^{-\frac{1}{2} (\tau - \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau)' \mathbf{K}_\tau (\tau - \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau)} d\tau \\
&= k_4 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2} (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a})' (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a}) + \frac{1}{\sigma_\tau^2} \alpha' \mathbf{H}' \mathbf{H} \alpha - \mathbf{d}_\tau' \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau \right)} (2\pi)^{\frac{T}{2}} |\mathbf{K}_\tau|^{-\frac{1}{2}} \\
&= (2\pi (1-\rho^2) \sigma_c^2 \sigma_\tau^2)^{-\frac{T}{2}} |\mathbf{K}_\tau|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2} (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a})' (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a}) + \frac{1}{\sigma_\tau^2} \alpha' \mathbf{H}' \mathbf{H} \alpha - \mathbf{d}_\tau' \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau \right)}
\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{K}_\tau = \frac{1}{\sigma_\tau^2} \mathbf{H}' \mathbf{H} + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2} \mathbf{B}' \mathbf{B}, \quad \mathbf{d}_\tau = \frac{1}{\sigma_\tau^2} \mathbf{H}' \mathbf{H} \alpha + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_c^2} \mathbf{B}' (\mathbf{H}_\phi \mathbf{y} - \mathbf{a}).$$

Como que \mathbf{H} , \mathbf{H}_ϕ y \mathbf{K}_τ son matrices de banda, esta verosimilitud integrada puede ser evaluar rapidamente usando los algoritmos de matriz de banda discutidos en Chan y Grant (2016a)

B.2 Modelo UCUR $_{-t_0}$

Para la extensión del modelo UCUR que permite un quiebre en la tendencia en el tiempo t_0 solo necesitan pequeñas modificaciones. En particular se redefine

$$\tilde{\alpha} = \left(\underbrace{\mu_1 + \tau_0, \mu_1, \dots, \mu_1}_{t_0-1}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{T-t_0+1} \right)',$$

y $\alpha = \mathbf{H}^{-1} \tilde{\alpha}$. Una vez hecho esto se tiene que la verosimilitud integrada de esta generalización sera exactamente igual a la del modelo UCUR.

B.3 Modelo DT $-t_0$

Para el modelo de tendencia determinística, se recuerda que de (11) se tiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_\delta \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}_\phi^{-1} \mathbf{u}^c,$$

donde se tiene $\mathbf{u}^c \sim N(\mathbf{0}, \sigma_c^2 \mathbf{I}_T)$, $\mathbf{X}_\phi = (\mathbf{1}_T, \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}_1, \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}_2)$ y $\boldsymbol{\delta} = (\tau_0, \mu_1, \mu_2)'$. Por lo tanto, la verosimilitud esta dada por

$$\rho(\mathbf{y} | \phi, \sigma_c^2, \sigma_\tau^2, \mu_1, \mu_2, \tau_0) = (2\pi\sigma_c^2)^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_c^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}_\delta \boldsymbol{\delta})' \mathbf{H}'_\phi \mathbf{H}_\phi (\mathbf{y} - \mathbf{X}_\delta \boldsymbol{\delta})}.$$

