

Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado



Índices de gérmenes de foliaciones holomorfas en el plano

Tesis para optar el grado académico de
Magíster en Matemáticas

Autor

CAVERO CHUQUIVIGUEL, JORGE EDINSON

Asesor

NECIOSUP PUICAN, HERNÁN

Lima - Perú

Abril - 2021

ÍNDICES DE GÉRMENES DE FOLIACIONES HOLOMORFAS EN EL PLANO

Cavero Chuquiviguel, Jorge Edinson

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Beltrán Cortéz, Andres William (PUCP)
(Presidente del jurado)

Dr. Neciosup Puican, Hernán (PUCP)
<https://orcid.org/0000-0002-7591-0346>
(Asesor)

Dr. Fernández Pérez, Arturo Ulises (UFMG)
(Tercer miembro)

Lima - Perú
Marzo - 2021

¹ Versión final con las correcciones del jurado

Resumen

ÍNDICES DE GÉRMENES DE FOLIACIONES HOLOMORFAS EN EL PLANO

Cavero Chuquiviguel, Jorge Edinson

2021

Asesor: Dr. Neciosup Puican, Hernán

Título obtenido: Magíster en Matemáticas

Un germen de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ con singularidad aislada se dirá que es de segundo tipo si no presenta sillan-nodos tangentes en su reducción de singularidades. Entendiendo por singularidad de tipo silla-nodo tangente como aquel cuya separatriz débil está contenida en el divisor excepcional. La finalidad de este trabajo es exhibir un criterio que nos permita caracterizar cuándo un germen de foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ es de segundo tipo. Para tal fin, estudiamos la teoría de índices para foliaciones holomorfas singulares sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. También caracterizamos las foliaciones de tipo curva generalizada, vía el índice de exceso polar. Cabe señalar que el presente trabajo es motivado por el trabajo debido a Arturo Fernández y Rogério Mol, ([FPM17]). Además de los trabajos expuestos por Marco Brunella ([BRU97]), Liliana Puchuri ([PM05]), Yohann Genzmer y Rogério Mol ([GM18]).

Palabras clave: Foliaciones holomorfas, foliaciones tipo curva generalizada, foliaciones de segundo tipo.

Abstract

A germ of singular holomorphic foliation at $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ with an isolated singularity will be said of second type if it does not present tangent saddle-nodes in its reduction of singularities. Understanding by singularity of tangent saddle-node type as whose weak separatrix is contained in the exceptional divisor. The purpose of this work is to show a criterion that allows us to characterize when a germ of holomorphic foliation at $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ is of second type. That is the reason why we study the theory of indices of singular holomorphic foliations at $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. We also characterize generalized curve foliations, via the polar excess index. It should be noted that this work is motivated by the paper due to Arturo Fernández and Rogério Mol ([FPM17]), Marco Brunella ([BRU97]), Liliana Puchuri ([PM05]), Yohann Genzmer and Rogério Mol ([GM18]).

Key words and phrases. Holomorphic foliations, generalized curve type foliations, second type foliations.



Este trabajo se lo dedico primeramente a Dios por ser mi fortaleza y mi libertador, a mis padres por haberme instruido desde mi infancia en el camino intelectual, a mi esposa y a mis hijas por estar siempre conmigo y ser mi mayor motivo.

Índice general

Introducción	1
1 Preliminares	3
1.1 Definiciones básicas	3
1.2 Foliaciones holomorfas	5
1.3 Espacio proyectivo complejo de dimensión uno, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$	20
1.3.1 Explosión con centro en el origen de \mathbb{C}^2	21
1.4 Foliaciones sobre superficies	23
1.5 Divisor equilibrado de separatrices	39
2 Índices de foliaciones holomorfas	57
2.1 Índice de Baum-Bott	57
2.2 Índice de Camacho-Sad	64
2.3 Índice de Gomez-Mont-Seade-Verjovsky	78
2.4 Índice de variación	84
2.5 Índice de exceso polar	97
2.6 Segundo índice de variación	119
3 Resultado principal.	126
Conclusiones	135
Bibliografía	136

Índice de figuras

1.1	El divisor $\mathcal{D} = \bigcup D_i$	33
1.2	Foliación de segundo tipo	41
1.3	Foliación de tipo curva generalizada	41
1.4	Foliación dicrítica: $w = ydx - xdy$	45
1.5	Foliación no dicrítica: $w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy$	47
1.6	Foliación dicrítica: $w = -ydx + 2xdy$	48
1.7	Foliación dicrítica: $\tilde{w}_2 = -yds + sdy$	49
1.8	Foliación dicrítica: $w = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy$	51
1.9	Foliación regular: $\tilde{w}_1(x, t) = -t^3dx - (2xt^2 + t - 1)dt$	52
1.10	Foliación dicrítica: $w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy$	54
1.11	Foliación regular: $\tilde{w}_1(x, t) = dx - 2tdt$	55
1.12	Foliación no-dicrítica: $\hat{w}_2(n, t) = (n - 2t)dt + tdn$	56

Agradecimiento

En primer lugar agradezco a Dios por estar a mi lado en todo momento, por perdonar mis errores, por bendecirme en esta vida, por darme la virtud de la perseverancia que se refleja en la culminación de este trabajo, por ser apoyo y fortaleza en momentos de dificultad y de debilidad; en segundo lugar agradecer a mis padres que fueron los que me encaminaron en la educación, también agradecer a mi esposa y a mis hijas por su apoyo incondicional en el inicio y culminación de este trabajo.

A mi asesor de tesis, el *Dr. Hernán Neciosup Puican*, por sus conocimientos para llevar a cabo este trabajo, y por su paciencia para esperar a que este pudiera llegar a su fin. Además, por proponer este tema de tesis que surgió como parte del proyecto de investigación "Geometría local y global de singularidades de foliaciones" DGI 2020-1-0057 del cuál es el investigador principal.

A los excelentes profesores Arturo Fernández Pérez y Andrés Beltrán Cortéz por sus observaciones que me encaminaron a la culminación de este trabajo de tesis.

Introducción

La caracterización de gérmenes de foliaciones holomorfas singulares sobre el plano, es un tema de mucho interés por muchos matemáticos, en especial por aquellos especialistas en el área de Geometría y Dinámica Compleja. Actualmente existe una caracterización parcial de aquellas foliaciones no-dicriticas de tipo curva generalizada y las de segundo tipo, vía la reducción de singularidades, el poligono de Newton, y la teoría de índices. En este trabajo vamos a dar una caracterización de foliaciones dicriticas o no, vía la teoría de índices, con énfasis en los índices de exceso polar y el índice de variación, todo ello será desarrollado siguiendo el enfoque dado por Arturo Fernández y Rogério Mol, ver [FPM17].

Un germen de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ con singularidad aislada se dirá que es de segundo tipo si no presenta sillan-nodos tangentes en su reducción de singularidades, es decir, si su separatriz débil no está contenida en el divisor excepcional, ver [FPM17] y [MS04]. Por otro lado, un germen de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ con singularidad aislada se dirá que es tipo curva generalizada si no hay sillan-nodos en su reducción de singularidades, ver [S84] y [FPM17].

Determinar una caracterización de foliaciones de segundo tipo o tipo curva generalizada no es tarea sencilla, Arturo Fernández y Rogério Mol en [FPM17] dan algunos criterios para determinar cuándo un germen de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ es de segundo tipo o es de tipo curva generalizada. Por otro lado, Yohann Genzmer y Rogério Mol dan un enfoque para determinar cuándo un germen de foliación es de tipo curva generalizada, ver [GM18].

El objetivo de este trabajo de tesis es caracterizar las foliaciones holomorfas singulares sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ de segundo tipo:

Teorema I. Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ y \mathcal{B} un divisor

equilibrado de separatrices. Entonces \mathcal{F} es de segundo tipo si y solo si

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}).$$

El presente trabajo de tesis consta de 3 capítulos, los cuales se describen como sigue. El primer capítulo, está dedicado al desarrollo de los preliminares necesarios para el desarrollo de nuestro objetivo. Iniciamos definiendo el anillo de series de potencias formales en dos indeterminadas, curvas analíticas complejas, variedades holomorfas, el fibrado tangente y el espacio proyectivo de dimensión uno, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Definimos también lo que es una foliación holomorfa y enunciamos algunas de sus propiedades que tendrán un rol importante a lo largo del desarrollo de este trabajo. Definimos y describimos las singularidades reducidas, explosión dicrítica y no dicrítica, componentes dicríticas y no dicríticas, foliación dicrítica y no dicrítica, divisor de separatrices, ecuación equilibrada de separatrices, foliaciones de tipo curva generalizada, foliación de segundo tipo, exceso de tangencia de una foliación, divisor equilibrado de separatrices, siendo este último una pieza clave en el resultado principal del presente trabajo. A lo largo de este capítulo y de todo el trabajo se procura dar muchos ejemplos para una mayor comprensión de todos estos objetos que involucran el resultado principal de este trabajo.

El capítulo 2, está dedicado a describir los diferentes tipos de índices para foliaciones holomorfas, tales como el *índice de Baum-Bott*, *Camacho-Sad*, *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky*, el *índice de variación* y el *segundo índice de variación*. Enunciamos y demostramos algunas propiedades principales de estos índices siguiendo el enfoque dado por Arturo Fernández, Rogério Mol, Marco Brunella y Yohann Genzmer, [BRU97], [FPM17], [GM18]. Algunos de estos índices son calculados respecto a curvas analíticas invariantes por la foliación, sin embargo es posible extenderlos para curvas formales invariantes por la foliación. Definimos también el índice de exceso polar (ver [GM18]), el cual permite caracterizar las foliaciones de tipo curva generalizada.

Finalmente el capítulo 3, está dedicado a la prueba del resultado principal de esta tesis, teorema I; una de las claves para la prueba de este resultado es encontrar una relación entre el segundo índice de variación total, $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, y el índice de Baum-Bott $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, para foliaciones reducidas o no (ver lema 3.0.3).

Jorge Edinson Cavero Chuquiviguel
Lima, Perú.
2021

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos los conceptos y propiedades básicas de la teoría local de foliaciones holomorfas en \mathbb{C}^2 , muchos de estos se enuncian sin demostración y con una buena referencia, cabe señalar que estos han sido estudiados con detalle durante los cursos de especialidad en la maestría: Introducción a la dinámica compleja, tópicos de Geometría, dinámica compleja 1 y 2. Además, muchas de estas propiedades fueron alcanzados durante los seminarios I y II. Nos preocupamos en dar ejemplos y situaciones que apuntan al objetivo de este trabajo.

1.1 Definiciones básicas

En esta sección definiremos el anillo de serie de potencias formales en dos variables con coeficientes en \mathbb{C} , el cual denotaremos por $\mathbb{C}[[x, y]]$. También definimos el subanillo de $\mathbb{C}[[x, y]]$ formado por las series de potencias convergentes, denotado por $\mathbb{C}\{x, y\}$. Además, definimos función analítica y curva analítica compleja. Estas definiciones serán de gran utilidad en el desarrollo del presente trabajo.

Denotemos por $\mathbb{C}[[x, y]]$, al conjunto cuyos elementos son sumas formales

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, y),$$

donde f_k es un polinomio homogéneo de grado k en las variables x, y .

Observación 1.1.1. Notar que la suma y el producto por un escalar en $\mathbb{C}[[x, y]]$,

se definen respectivamente por

$$f + g = \sum_{k=0}^{\infty} f_k + g_k,$$

$$\alpha \cdot f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot f_k,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Observe que $\mathbb{C}[[x, y]]$ con estas operaciones es un anillo conmutativo con unidad, conocido como el anillo de series de potencias formales en las variables x, y con coeficientes en \mathbb{C} . Denotaremos por $\mathbb{C}\{x, y\}$ al subanillo de $\mathbb{C}[[x, y]]$, cuyos elementos son series de potencias que convergen en un entorno de $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$.

Sabemos que toda serie de potencias convergente se escribe como suma de polinomios homogéneos, esto es $f(x, y) = \sum_k f_k(x, y)$, donde $f_k(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado k .

Se denomina *forma inicial* de f a la componente homogénea de menor grado de f . El orden de f en el origen $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$, denotado por $\text{ord}_{\mathbf{0}}(f)$, se define como el grado de su *forma inicial*. Por convención, cuando $f(x, y)$ es idénticamente nula, ponemos $\text{ord}(f) = \infty$.

Definición 1.1.2. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un abierto. Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica u holomorfa en $\mathbf{p} \in U$, si coincide en un entorno de \mathbf{p} con una serie de potencias convergente. Diremos que f es analítica en U si lo es todo punto de U .

Sean U y V entornos de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$; funciones holomorfas. Si $\mathbf{p} \in U \cap V$, diremos que $f \sim g$ si y solo si existe un entorno W de \mathbf{p} con $W \subset U \cap V$ y $f|_W = g|_W$.

Notar que “ \sim ” es una relación de equivalencia y cada clase de equivalencia es un germen de función holomorfa en un entorno de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$.

De aquí y en todo el presente trabajo denotaremos por $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, al conjunto de gérmenes de funciones holomorfas en un entorno de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$.

Observación 1.1.3. Notar que la suma y el producto por un escalar en $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, se definen respectivamente por:

$$f + g = f|_W + g|_W.$$

$$\alpha \cdot f = \alpha f|_W,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. Notar que $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, con las operaciones anteriormente es un anillo conmutativo, conocido como el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un entorno de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$. Además, si U es un entorno reducido de \mathbf{p} , es decir, si el propio punto \mathbf{p} no pertenece a U , se dirá que $\mathcal{O}^*(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, es el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un entorno reducido de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$.

- Denotaremos por $\hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, al conjunto de gérmenes de funciones holomorfas formales en un entorno de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$.

Definición 1.1.4. Dada una función f definida en un entorno de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$, definimos el conjunto de ceros de f como el conjunto

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, \mathbf{p}) : f(x, y) = 0\}.$$

Si $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, \mathcal{C}_f es llamado curva analítica compleja. Cuando $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$, \mathcal{C}_f es llamado curva formal compleja. Denotaremos por $(\mathcal{C}_f, \mathbf{p})$ al germen de curva analítica (respectivamente formal) compleja definida por $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ (respectivamente $f \in \hat{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$).

Observación 1.1.5. Si $(\mathcal{C}_f, \mathbf{p})$ es un germen de curva, la condición de ser analítica o formal lo debe satisfacer un representante.

Definición 1.1.6. Dada f una función compleja definida en un entorno de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ y sea \mathcal{C}_f la curva analítica o formal definida por f en \mathbf{p} . Definimos la multiplicidad de la curva \mathcal{C}_f en \mathbf{p} , denotado por $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{C}_f)$ como el orden de f en \mathbf{p} .

1.2 Foliaciones holomorfas

En esta sección, presentamos las definiciones de variedad holomorfa, campo de vectores tangentes, foliación holomorfa singular y no singular; y principales propiedades con la finalidad de demostrar que toda foliación holomorfa singular de dimensión uno es inducida localmente por un campo de vectores holomorfo y toda foliación holomorfa de codimensión 1 es inducida localmente por una 1-forma holomorfa integrable. Estos dos resultados son objetos centrales en el presente trabajo.

Definición 1.2.1. Una variedad holomorfa de dimensión n es un par (M, \mathcal{A}) , donde M es un espacio topológico de Hausdorff con base enumerable y $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es una colección de homeomorfismos

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i),$$

donde U_i es un abierto de M y $\varphi_i(U_i)$ es abierto de \mathbb{C}^n , que satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

(b) Dada $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ son tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sobre cada $U_i \cap U_j$ tenemos

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

es un biholomorfismo.

Sean (M, \mathcal{A}) una variedad compleja de dimensión n y $p \in M$, consideremos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$ y denotemos por $z = (z_1, \dots, z_n)$ las coordenadas complejas de $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$. El *espacio tangente holomorfo* de M en el punto p , al cual denotaremos por $T_p(M)$, es por definición, el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por $\frac{\partial}{\partial z_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}(p)$.

A partir de ahora denotaremos por M a la variedad compleja (M, \mathcal{A}) de dimensión compleja $n \geq 2$.

Definición 1.2.2. Una foliación holomorfa no singular de dimensión k (o codimensión $n - k$) en M , donde $1 \leq k \leq n - 1$, es dada por el par $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ tal que

a) M posee una cobertura de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

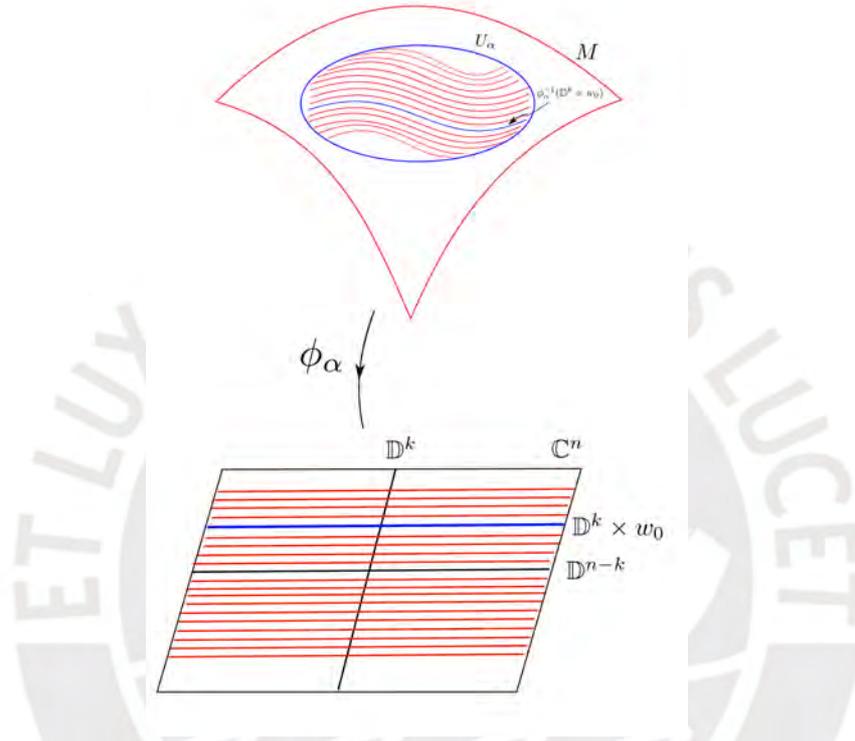
b) Para cada $\alpha \in I$, se tiene un biholomorfismo $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, donde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ es el disco unitario en el origen.

c) Siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) &\rightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (z, w) &\rightarrow \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(z, w) = (\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned}$$

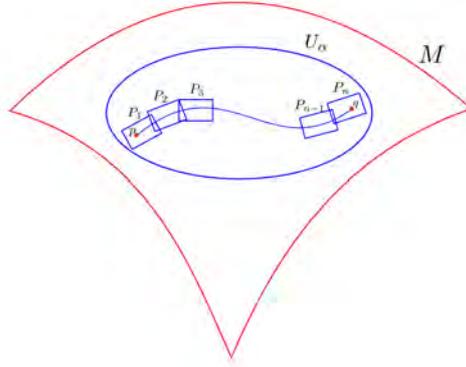
donde $\phi_{\alpha\beta}(z, w) = (\varphi_1(z, w), \varphi_2(w))$.

Cada abierto U_α es llamado **abierto trivializador** de la foliación. Por el item b), U_α es descompuesto en variedades de dimensión k de la forma $\phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times w_0)$, donde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$ son llamadas **placas**. Por el item c), las placas se sobreponen en las intersecciones de abiertos trivializadores de la siguiente forma: si $P_\alpha \subset U_\alpha$ y $P_\beta \subset U_\beta$ son placas, $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$ o bien $P_\alpha \cap U_\beta = P_\alpha \cap P_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.



En M definimos la siguiente relación de equivalencia: $p \sim q$ si y solo si existen placas P_1, \dots, P_n con $p \in P_1$ y $q \in P_n$ tales que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, para $i = 1, \dots, n-1$. La clase de equivalencia de $p \in M$ por esta relación de equivalencia es llamada **hoja** pasando por p . Cada hoja con la topología generada por los abiertos de sus placas, posee una estructura de variedad compleja de dimensión k inmersa en M . Así una foliación proporciona, una descomposición de la variedad en subvariedades inmersas de dimensión k , dos a dos disjuntas.

Diremos que dos foliaciones son iguales si todas sus hojas coinciden.



Observación 1.2.3. Una foliación holomorfa no singular de dimensión k (o codimensión $n - k$) en M , donde $1 \leq k \leq n - 1$, también puede ser dada por el siguiente conjunto de informaciones:

- Una cobertura de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M .
- Para cada $\alpha \in I$, una inmersión holomorfa $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$.
- Siempre $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se tiene una aplicación holomorfa

$$\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n - k, \mathbb{C}),$$

donde $\psi_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = \psi_{\alpha\beta}\psi_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$.

Definición 1.2.4. Sea M una variedad holomorfa de dimensión n . Un campo de vectores tangentes en M es una aplicación $Z : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M$ que a cada $p \in M$ le asocia un vector $Z(p) \in T_p M$.

Observación 1.2.5. Para poder hablar de campos de vectores tangentes holomorfos, es necesario dotar al conjunto de llegada $\bigcup_{p \in M} T_p M$ de una estructura de variedad holomorfa compleja. Para esto, en primer lugar observe que $a \in \bigcup_{p \in M} T_p M$ si solo si existe $p \in M$ y existe un $v \in T_p M$ tal que $a = v$. Luego, todo elemento $a \in \bigcup_{p \in M} T_p M$ es en realidad un par ordenado (p, v) en donde geoméricamente p es el punto de aplicación y v es la parte vectorial de a . Se acostumbra a denotar $a = (p, a)$. Esto motiva a considerar el siguiente conjunto:

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$$

Observación 1.2.6. El conjunto $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$, tiene una estructura de variedad compleja de dimensión $2n$. En efecto, vamos a dotar a TM de una estructura de variedad. Sea \mathcal{A} un atlas de M . Dada una carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, podemos definir el conjunto

$$\tilde{U} = \{(p, v) : p \in U, v \in T_p M\}$$

Por otro lado, como $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$ es un biholomorfismo se tiene que $\varphi'(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo lineal. Luego podemos definir

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n} \\ \text{como } \tilde{\varphi}(p, v) &= (\varphi(p), \varphi'(p)v). \end{aligned}$$

Afirmación: El conjunto $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ es un atlas de dimensión $2n$. En efecto, en primer lugar se probará que $\tilde{\varphi}$ es biyectiva:

Note que si $(p, v), (q, w) \in \tilde{U}$ son tales que $\tilde{\varphi}(p, v) = \tilde{\varphi}(q, w)$ entonces $(\varphi(p), \varphi'(p)v) = (\varphi(q), \varphi'(q)w)$, como φ y φ' son biyectivas esto implica que $(p, v) = (q, w)$. Luego $\tilde{\varphi}$ es inyectiva. Por otro lado, como φ y $\varphi'(p)$ son sobreyectivas entonces $\tilde{\varphi}$ es sobreyectiva. Luego, $\tilde{\mathcal{A}}$ es una familia de biyecciones. En segundo lugar, probaremos que $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ es un abierto de \mathbb{C}^{2n} : observe que si $(p, v) \in \tilde{U}$ entonces $\tilde{\varphi}(p, v) \in \varphi(U) \times \mathbb{C}^n$. Luego $\tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subseteq \varphi(U) \times \mathbb{C}^n$. Recíprocamente, si $(z, w) \in \varphi(U) \times \mathbb{C}^n$ entonces existe $p \in M$ tal que $\varphi(p) = z$ y existe $v \in T_p M$ tal que $\varphi'(p)v = w$. Se sigue que $(p, v) \in \tilde{U}$ es tal que $\tilde{\varphi}(p, v) = (z, w)$ y por tanto $\varphi(U) \times \mathbb{C}^n \subseteq \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Concluimos que $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ es un abierto de \mathbb{C}^{2n} . Mas aún, la inversa $\tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{U}$ es dado por

$$\tilde{\varphi}^{-1}(z, w) = (\varphi^{-1}(z), (\varphi^{-1})'(z)(w)).$$

Por otro lado, es claro que $TM = \bigcup_{p \in M} \tilde{U}$.

Finalmente, tomemos $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}), (\tilde{V}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\mathcal{A}}$ tales que $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Esto implica que $U \cap V \neq \emptyset$, además se tiene que $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{C}^n$ y $\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{C}^n$, de esta manera $\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ y $\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ son abiertos de \mathbb{C}^{2n} , y si $(z, w) \in \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z, w) &= \tilde{\psi}(\varphi^{-1}(z), (\varphi^{-1})'(z)(w)) \\ &= (\psi(\varphi^{-1}(z)), \psi'(\varphi^{-1}(z))(\varphi^{-1})'(z)(w)) \\ &= ((\psi \circ \varphi^{-1})(z), (\psi \circ \varphi^{-1})'(z)(w)). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ es un biholomorfismo. Por lo tanto, \mathcal{A} es un atlas de dimensión $2n$. Además, TM es un espacio topológico de Hausdorff con base enumerable, ver [BT09].

La variedad holomorfa de dimensión $2n$, (TM, \mathcal{A}) es llamado fibrado tangente de (M, \mathcal{A}) . Con la introducción del fibrado tangente, podemos considerar todo campo de vectores tangentes, como un mapeo $Z : M \rightarrow TM$ dado por $Z(p) = (p, Z(p))$. Veamos la expresión de Z en coordenadas locales. Sea $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, dado $p \in U$ se tiene que $Z(p) = (p, Z(p)) \in \tilde{U}$. Dado $z \in \varphi(U)$, tenemos

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi} \circ Z \circ \varphi^{-1})(z) &= \tilde{\varphi}(Z(\varphi^{-1}(z))) \\ &= \tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(z), Z(\varphi^{-1}(z))) \\ &= (z, \varphi'(\varphi^{-1}(z))Z(\varphi^{-1}(z))). \end{aligned}$$

Se sigue que Z es un mapeo holomorfo si y solo si el mapeo $(\varphi'.Z) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}^n$ definido por $[(\varphi'.Z) \circ \varphi^{-1}](z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z))Z(\varphi^{-1}(z))$, es holomorfo para toda $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Esto motiva a dar la siguiente definición.

Definición 1.2.7. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $p \in U$, si coincide en un entorno de p con una serie de potencias convergente. Diremos que f es holomorfa en U si lo es todo punto de U .

Definición 1.2.8. Sea M variedad holomorfa de dimensión n . Sea \mathcal{A} un atlas de M . Dada una carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Diremos que f es holomorfa en U si su representación local en coordenadas de f , esto es $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $\varphi(U)$. Denotaremos por $\mathcal{O}(M)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en un abierto U de M .

Definición 1.2.9. Sean M y N variedades holomorfas de dimensión n . Diremos que f es un biholomorfismo si y sólo si f es biyectiva, holomorfa y su inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ también es holomorfa. Denotaremos por $Bihol(M, N)$ al conjunto de todos los biholomorfismos de M en N .

Definición 1.2.10. Sean M y N variedades holomorfas de dimensión n , $F \in Bihol(M, N)$ y $Z : N \rightarrow TN$ un campo de vectores. El pull-back de Z bajo F es el campo de vectores $F^*(Z) : M \rightarrow TM$ definido por

$$F^*(Z)(p) = [((F^{-1})'.Z) \circ F](p) = (F^{-1})'(F(p))Z(F(p)).$$

Observación 1.2.11.

1. Sea $p \in M$, como $(F^{-1})'(F(p)) : T_{F(p)}N \rightarrow T_pM$ es una transformación lineal y $Z(F(p)) \in T_{F(p)}N$, entonces $F^*(Z)(p) = (F^{-1})'(F(p)).Z(F(p))$, para todo $p \in M$.
2. Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de todos los campos holomorfos tangentes a M .
3. De las definiciones anteriores se sigue que si M y N son variedades analíticas complejas de dimensión n , $F \in \text{Bihol}(M, N)$ y $Z \in \mathcal{X}(N)$, entonces $F^*(Z) \in \mathcal{X}(M)$.

A continuación presentaremos unas propiedades, las cuales se prueban usando la definición 1.2.10, ver [BT09].

Proposición 1.2.12. *Sean M y N variedades holomorfas de dimensión n y $F \in \text{Bihol}(M, N)$. Se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $F^*(Z + Y) = F^*(Z) + F^*(Y)$, para todo $Z, Y \in \mathcal{X}(N)$.
2. $F^*(aZ) = aF^*(Z)$, para todo $Z \in \mathcal{X}(N)$ y para todo $a \in \mathbb{C}$.
3. $F^*(fZ) = (f \circ F)F^*(Z)$, para todo $Z \in \mathcal{X}(N)$ y para toda $f \in \mathcal{O}(N)$.

Demostración. Ver [BT09]. □

Proposición 1.2.13. *Sean M, N y P variedades holomorfas de dimensión n , $F \in \text{Bihol}(M, N)$ y $G \in \text{Bihol}(N, P)$. Se cumple:*

$$(G \circ F)^*(Z) = F^*(G^*(Z)), \quad \text{para todo } Z \in \mathcal{X}(P).$$

Demostración. Ver [BT09]. □

Observación 1.2.14. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto con coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$, para $j \in \{1, \dots, n\}$ definimos $\frac{\partial}{\partial z_j} : U \rightarrow TU = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n}$ como $\frac{\partial}{\partial z_j}(p) = (p, e_j)$. Es claro que $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}$ forman una colección de campos vectoriales, linealmente independientes en cada $p \in U$ a la cual llamamos base. La razón de este nombre se debe a que cualquier campo de vectores sobre U puede escribirse como combinación lineal de ellos. En efecto, sea $Z \in \mathcal{X}(U)$ dado

$p \in U$ tenemos que $Z(p) \in \mathbb{C}^n$, luego existen números complejos $a_1(p), \dots, a_n(p)$ tales que

$$Z(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p)(e_j) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial z_j}(p) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}(p).$$

De esta manera, a cada campo Z le asociamos n funciones $a_1, \dots, a_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ llamados funciones coordenadas, tales que $Z = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \approx (a_1, \dots, a_n)$. Como $Z \in \mathcal{X}(U)$, se sigue que a_1, \dots, a_n son funciones holomorfas en U .

Proposición 1.2.15. Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos, $F \in \text{Bihol}(U, V)$. Si $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_n} \right\}$ son las bases para los campos de vectores en U y V respectivamente, entonces

$$F^* \left(\frac{\partial}{\partial w_j} \right) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial w_j} \circ F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n,$$

donde $F^{-1} = (f_1, \dots, f_m)$.

Demostración. Ver [BT09]. □

Sean (M, \mathcal{A}) una variedad holomorfa de dimensión n y $Z \in \mathcal{X}(M)$. Dado $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, denotaremos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n^\alpha} \right\}$ a la base de $\mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, tenemos que $(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) \in \mathcal{X}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, luego existen a_1, \dots, a_n son funciones holomorfas en $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ tales que $(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$, entonces

$$Z = (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \right) = \sum_{j=1}^n (a_j \circ \varphi_\alpha) (\varphi_\alpha)^* \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}.$$

Si denotamos $Z_j^\alpha = (\varphi_\alpha)^* \left(\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \right)$ y por $a_j^\alpha = a_j \circ \varphi_\alpha$ (funciones holomorfas en U_α) se tiene que:

$$Z = \sum_{j=1}^n a_j^\alpha Z_j^\alpha$$

De esta manera $\{Z_1^\alpha, \dots, Z_n^\alpha\}$ es una base de $\mathcal{X}(U_\alpha)$, llamado **referencial móvil** de Z en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Sea $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ tal que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, denotemos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_n^\beta} \right\}$ la base de $\mathcal{X}(\varphi_\beta(U_\beta))$ y $Z_j^\beta = (\varphi_\beta)^* \frac{\partial}{\partial z_j^\beta} \in \mathcal{X}(U_\beta)$, tenemos que

$\{Z_1^\beta, \dots, Z_n^\beta\}$ en $U_{\alpha\beta}$. Como $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \text{Bihol}(\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}), \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}))$ y denotando $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = (f_1, \dots, f_n)$, por la proposición 1.2.15, se tiene

$$(\varphi_\alpha^{-1})^*(Z_j^\beta) = (\varphi_\alpha^{-1})^*\left(\varphi_\beta^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\beta}\right)\right) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\beta}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$$

luego

$$\begin{aligned} Z_j^\beta &= (\varphi_\alpha)^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}\right). \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ \varphi_\beta\right) (\varphi_\alpha)^*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}\right). \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j^\beta} \circ \varphi_\beta\right) Z_i^\alpha. \end{aligned}$$

Sea M una variedad compleja de dimensión n y $Z \in \mathcal{X}(M)$. Decimos que $p \in M$ es un punto singular de Z si y solo si $Z(p) = 0 = (p, 0)$, caso contrario diremos que p es un punto regular de Z . Denotaremos por $\text{Sing}(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares de Z .

Teorema 1.2.16. (Teorema del flujo tubular). *Sean M una variedad compleja de dimensión n y $Z \in \mathcal{X}(M)$. Si $p \in M$ punto regular de Z entonces existe $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ con $p \in U_\alpha$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \Delta^1 \times \Delta^{n-1}$ (donde Δ^k denota un polidisco abierto en \mathbb{C}^k) y $\varphi_\alpha^*\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = Z$ en U_α (donde $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ son las coordenadas de $\varphi_\alpha(U_\alpha)$).*

Demostración. Ver [BT09]. □

Ejemplo 1.2.17. Sea M una variedad compleja y Z un campo de vectores tangentes holomorfos en M tal que $Z(p) \neq 0$, para todo $p \in M$. Demostraremos que el campo Z induce una foliación sobre M . En efecto, por el teorema 1.2.16 tenemos que dado $p \in M$, existe $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ con $p \in U_\alpha$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \Delta^1 \times \Delta^{n-1}$ y $\varphi_\alpha^*\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = Z$ en U_α (donde $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ son las coordenadas de $\varphi_\alpha(U_\alpha)$). Si se considera la familia $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es fácil ver que satisface las dos primeras condiciones de la definición 1.2.2 (con $k = 1$). En cuanto a la tercera condición, sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}'$ tales que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Denotando por $w = (w_1, w')$ a las coordenadas de $\varphi_\beta(U_\beta)$, de la definición de \mathcal{A}' y propiedades del pull-back se tiene,

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\right) = \frac{\partial}{\partial z_1} \text{ en } \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}).$$

Por otro lado, los cambios de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ lo podemos escribir de la forma

$$(\alpha_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(z_1, z'') = (f_1(z_1, z''), \dots, f_n(z_1, z'')).$$

Utilizando la proposición 1.2.15 se tiene

$$(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^n (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial w_i}.$$

Esto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial w_1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = 0, \text{ para todo } i \geq 2.$$

De esta manera f_1, \dots, f_n no depende de z_1 y la tercera condición de la definición 1.2.2 está satisfecha.

Observación 1.2.18. Una foliación regular de dimensión 1 es inducida localmente por campos de vectores no singulares.

En efecto: Para cada abierto trivializador U_α , tomemos el campo $v_\alpha = (\phi_\alpha)^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)$ donde $(z_1, (z_2, \dots, z_n)) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$. Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, para cada $p \in U_{\alpha\beta}$, por lo visto anteriormente existe $f_{\alpha\beta}(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta$, donde $f_{\alpha\beta}$ es una función holomorfa. Por lo tanto, el siguiente conjunto de datos:

- a) Una cobertura de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M ,
- b) para cada $\alpha \in I$, existe un campo de vectores holomorfo no singular v_α en U_α ,
- c) siempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, existe una función holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\text{tal que } v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}},$$

definen una foliación holomorfa regular de dimensión 1 en M .

A continuación daremos algunas definiciones, y presentaremos el teorema de *Levi* que nos permitirán probar que toda foliación holomorfa regular de dimensión 1 está inducida localmente por un campo de vectores holomorfo.

Definición 1.2.19. Sea X un subconjunto de la variedad compleja M . Diremos que X es un subconjunto analítico de M , si para cada $x \in M$ existen una vecindad abierta $U \subset M$ de x y una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$, tales que $X \cap U = f^{-1}(0)$, p puede depender de x .

Proposición 1.2.20. Sea A un conjunto analítico con dominio D , (D es un dominio de A , si es abierto y conexo), $A \neq D$ entonces $D-A$ es conexo.

Demostración. Ver [GH78]. □

Teorema 1.2.21. ([GH78]). Sea f una función meromorfa definida fuera de una variedad analítica de codimensión mayor o igual a 2 en una variedad compleja M . Entonces f se extiende a una función meromorfa en M .

Demostración. Ver [NS11]. □

Teorema 1.2.22. ([AV11]). Sean M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$, D un dominio en M y K un subconjunto compacto de D tal que $D-K$ es conexo. Entonces toda función holomorfa $f : D-K \rightarrow \mathbb{C}$ posee una única extensión holomorfa $f^* : D \rightarrow \mathbb{C}$.

Demostración. Ver [NS11]. □

Definición 1.2.23. Una foliación holomorfa singular \mathcal{F} , de dimensión k (o codimensión $n-k$), donde $1 \leq k \leq n-1$, en una variedad compleja M , es una foliación no singular de dimensión k en $M-S$, donde S es un conjunto analítico en M de codimensión mayor o igual a 2.

El conjunto S de la definición 1.2.23 será minimal en el siguiente sentido: no existe subconjunto analítico propio $S'' \subset S$ tal que una foliación regular en $M-S$ se extienda a $M-S''$. En esas condiciones S es llamado el **conjunto singular** de la foliación \mathcal{F} y es denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Los elementos de $Sing(\mathcal{F})$ son llamados **puntos singulares o singularidades**, en cuanto los elementos de $M-Sing(\mathcal{F})$ son llamados **puntos regulares**. Las hojas de \mathcal{F} son, por definición, las hojas de la foliación regular $\mathcal{F}|_{M-Sing(\mathcal{F})}$. Dos foliaciones singulares \mathcal{F} y \mathcal{F}' son iguales si:

i. $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$

ii. Las foliaciones regulares $\mathcal{F}|_{M-Sing(\mathcal{F})}$ y $\mathcal{F}'|_{M-Sing(\mathcal{F}'})$ son iguales.

A partir de ahora, usaremos el término de foliación para designar foliación holomorfa singular.

Proposición 1.2.24. *Toda foliación de dimensión 1 es inducida localmente por un campo de vectores holomorfo.*

Demostración. Como el problema es local, se puede considerar en un polidisco $P \subset \mathbb{C}^n$. Sea \mathcal{F} una foliación en P . $\mathcal{F}|_{P - \text{Sing}(\mathcal{F})}$ es una foliación no singular, por la observación 1.2.18 existe un cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $P - \text{Sing}(\mathcal{F})$ y campos de vectores v_α induciendo $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$, satisfaciendo $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ siempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, donde $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una función holomorfa. Sea $v_\alpha = (v_1^{(\alpha)}, \dots, v_n^{(\alpha)})$, como $P - \text{Sing}(\mathcal{F})$ es convexo, suponemos que $v_n^{(\alpha)} \neq 0$ para todo $\alpha \in I$. Para cada $\alpha \in I$,

$$g_1^{(\alpha)} = \frac{v_1^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}}, \dots, g_{n-1}^{(\alpha)} = \frac{v_{n-1}^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}},$$

son funciones meromorfas en U_α . Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, como $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ tenemos

$$v_i^{(\alpha)} = f_{\alpha\beta}v_i^{(\beta)}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Luego,

$$g_i^{(\alpha)} = \frac{v_i^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}} = \frac{f_{\alpha\beta}v_i^{(\beta)}}{f_{\alpha\beta}v_n^{(\alpha)}} = \frac{v_i^{(\beta)}}{v_n^{(\beta)}} = g_i^{(\beta)}.$$

Así,

$$g_i^{(\alpha)} = g_i^{(\beta)}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (1.1)$$

Las definiciones locales de (1.1) son compatibles y definen funciones meromorfas g_1, \dots, g_n en $P - \text{Sing}(\mathcal{F})$. Suponga que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ tiene codimensión por lo menos 2, entonces por el teorema 1.2.21 permite extender g_1, \dots, g_{n-1} a funciones meromorfas en P , denotadas por g_1, \dots, g_{n-1} . Sea h el *m.c.m.* de sus denominadores (en un polidisco una función meromorfa es el cociente de 2 funciones holomorfas). El campo $v = (hg_1, \dots, hg_{n-1}, h)$ es holomorfo en P , su conjunto singular está contenido en $\text{Sing}(\mathcal{F})$ e induce \mathcal{F} (por el ejemplo 1.2.17) en $M - \text{Sing}(\mathcal{F})$. Por lo tanto, \mathcal{F} es una foliación de dimensión 1 inducida localmente por v . \square

Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión 1 en una variedad compleja M de dimensión n . Sean $U_\alpha, U_\beta \subset M$ abiertos con $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, por la proposición

(1.2.24) \mathcal{F} está inducida por campos vectoriales holomorfos v_α y v_β , en U_α y U_β respectivamente. Luego, por la observación 1.2.18 se tiene que existe una función holomorfa $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} - \text{Sing}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ que satisface $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ en $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Al usar el teorema 1.2.22 extendemos $f_{\alpha\beta}$ a una función holomorfa $g_{\alpha\beta}$ en $U_{\alpha\beta}$. Esta función no se anula. De hecho, su conjunto de ceros es diferente del vacío y es una variedad holomorfa de codimensión 1 contenida en el conjunto analítico de codimensión por lo menos 2, $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Finalmente tenemos que $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ ya que esta relación se satisface en $U_{\alpha\beta} - \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Definición 1.2.25. Una foliación holomorfa de dimensión 1 en M , también puede ser dada por el siguiente conjunto de informaciones:

- Un cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M .
- Para cada $\alpha \in I$, un campo de vectores holomorfo no singular v_α en U_α , cuyo conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2.
- Existen funciones holomorfas

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

tal que $v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$, siempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

Definición 1.2.26. Sea M una variedad holomorfa compleja de dimensión n . Una forma de grado 1 o una 1-forma en M es una aplicación

$$w : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} (T_p M)^*,$$

que a cada $p \in M$ le asocia una aplicación lineal $w(p) \in (T_p M)^*$, donde $(T_p M)^*$ es el dual de $(T_p M)$ y $w(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{C}$.

Observación 1.2.27. Para poder hablar de 1- formas holomorfas, es necesario dotar al conjunto de llegada $\bigcup_{p \in M} (T_p M)^*$ de una estructura de variedad holomorfa compleja. Note que en primer lugar que $a \in \bigcup_{p \in M} (T_p M)^*$ si y solo si existen un

$p \in M$ y $L_p \in (T_p M)^*$, donde geoméricamente p es el punto de aplicación y L_p es una aplicación lineal definida en $T_p M$. Se acostumbra a denotar a $a = (a, p)$. Esto motiva a considerar el siguiente conjunto:

$$(TM)^* = \{(p, w_p) : p \in M, w_p \in (T_p M)^*\}.$$

Observación 1.2.28. El conjunto $(TM)^*$ tiene una estructura de variedad holomorfa compleja de dimensión $2n$, ver [BT09].

Observación 1.2.29. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto con coordenadas $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ definimos $dx_j : U \rightarrow T_p U^* = (\mathbb{C}^n)^*$ como $dx_j(p) = (p, dx_j(p))$. Es claro que $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$ forma una colección de 1-formas linealmente independientes en cada $p \in U$ a la cual llamamos base. La razón de este nombre se debe a que cualquier 1-forma sobre U puede escribirse como combinación lineal de ellos. En efecto, sea w una 1-forma holomorfa y dado $p \in U$ tenemos que $w(p) \in (\mathbb{C}^n)^*$, luego existen números complejos $a_1(p), \dots, a_n(p)$ tales que

$$w(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) dx_j(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) dx_j(p) = \sum_{j=1}^n a_j dx_j(p)$$

De esta manera, a cada 1-forma w le asociamos n funciones $a_1, \dots, a_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ llamados funciones coordenadas, tales que $w = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$. Como w es una 1-forma holomorfa, se sigue que a_1, \dots, a_n son funciones holomorfas en U .

Definición 1.2.30. Sea M una variedad compleja de dimensión n y w una 1-forma holomorfa en $U, U \subset M$ abierto. Decimos que $p \in M$ es un punto singular de w si y solo si $w(p) = 0 = (p, 0)$, caso contrario diremos que p es un punto regular de w . Denotaremos al conjunto singular de w por $Sing(w)$,

$$Sing(w) = \{p \in U : w(p) = 0\}.$$

Observación 1.2.31. Consideremos $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, se dice w es una 1-forma holomorfa en U si se puede escribir como:

$$w(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) dx_j(p),$$

donde $a_j(p)$ son funciones holomorfas en U para cada $j = 1, \dots, n$. Notar que $w(p) = 0$ si y solo si $a_j(p) = 0$, para $j = 1, \dots, n$. Luego, el conjunto de todos los puntos singulares de w está dado por

$$Sing(w) = \{p \in U : a_j(p) = 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Además, el núcleo de $w(p)$, está dado por:

$$Ker(w(p)) = \{p \in U : \sum_{j=1}^n a_j(p) dx_j(p) = 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Definición 1.2.32. Sea M una variedad holomorfa de dimensión n , $U \subset M$ un subconjunto abierto y w una 1-forma holomorfa en U tal que $Sing(w)$ tiene codimensión mayor o igual que 2. Diremos que w es una 1-forma holomorfa integrable si existe una foliación \mathcal{F} no singular de codimensión 1 en $U - Sing(w)$ tales que:

$$T_p(\mathcal{F}) = Ker(w(p));$$

para todo $p \in U - Sing(w)$.

Teorema 1.2.33. (Frobenius). Una 1-forma w es integrable si y solo si el producto exterior $w \wedge dw = 0$.

Demostración. Ver [CN85]. □

Observación 1.2.34. Notemos que como consecuencia de este teorema toda 1-forma define una foliación en una variedad de dimensión 2.

Observación 1.2.35. Notar que si M es una variedad compleja de dimensión 2, entonces se cumple que $w \wedge dw = 0$. Luego, por el teorema 1.2.33 se tiene que w es integrable. En consecuencia, por la definición 1.2.32 tenemos que existe una foliación \mathcal{F} no singular de codimensión 1 en $U - Sing(w)$. Recíprocamente, siguiendo los mismos pasos que se hizo para campos vectoriales, se muestra que toda foliación holomorfa de codimensión 1 es inducida localmente por una 1-forma holomorfa integrable.

Sea $U_1, U_2 \subset M$ abiertos con $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, w_1 y w_2 1-formas holomorfas en U_1 y U_2 , respectivamente ambas integrables y con conjunto singular de codimensión por lo menos 2. Supongamos que existe una foliación \mathcal{F} de codimensión 1 en $U_1 \cup U_2$ tal que $\mathcal{F}|_{U_1}$ y $\mathcal{F}|_{U_2}$ son inducidas por w_1 y w_2 , respectivamente. Observe que si $p \in (U_1 \cap U_2) - (Sing(w_1) \cup Sing(w_2))$, entonces existe $g(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $w_1(p) = g(p)w_2(p)$. La función $g : (U_1 \cap U_2) - (Sing(w_1) \cup Sing(w_2)) \rightarrow \mathbb{C}^*$ así definida es holomorfa. Por el teorema 1.2.22, extendemos g a una función holomorfa $g : (U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $w_1(p) = g(p)w_2(p)$ en $U_1 \cap U_2$.

Definición 1.2.36. Una foliación holomorfa singular de codimensión 1 en M , es dada por la siguiente información :

- (i) Una cobertura de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M .
- (ii) Para cada $\alpha \in I$, existe una 1-forma integrable w_α no idénticamente nula en U_α , cuyo conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2.

- (iii) Existe funciones holomorfas $f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$ tales que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $w_\alpha = f_{\alpha\beta} w_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$.

Para cada forma w_α consideramos el conjunto singular, dada por

$$\text{Sing}(w_\alpha) = \{p \in U_\alpha : w_\alpha(p) = 0\} =: S_\alpha.$$

Es claro que S_α es un subconjunto analítico de U_α . De (iii) se sigue que

$$S_\alpha \cap U_\alpha \cap U_\beta = S_\beta \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

Así, la unión de los S_α definen un subconjunto analítico S de M el cual lo denotaremos por $\text{Sing}(\mathcal{F})$ y será llamado el conjunto singular de \mathcal{F} .

1.3 Espacio proyectivo complejo de dimensión uno, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

En esta sección, definiremos el espacio proyectivo complejo de dimensión 1, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Consideremos la relación de equivalencia “ \sim ” en $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ definido por

$$(x, y) \sim (\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } \bar{x} = \lambda x \wedge \bar{y} = \lambda y, \quad (1.2)$$

donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Definición 1.3.1. El espacio cociente de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ por \sim , donde “ \sim ” es la relación de equivalencia (1.2), se llama espacio proyectivo complejo de dimensión 1 o línea proyectiva denotada por $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. La clase de equivalencia de un punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ será denotada por $[x : y]$.

Observación 1.3.2. Notemos que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es obtenido de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ por identificación de puntos (x, y) y (\bar{x}, \bar{y}) como en (1.2), sobre una misma recta compleja. Denotemos por $\pi : \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, la proyección canónica de este cociente.

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es interpretado como el espacio de rectas que pasan por el origen de \mathbb{C}^2 .

Observación 1.3.3. El espacio $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es una variedad compleja de dimensión 1, con atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i = 0, 1\}$, donde $U_0 = \{[x : t] : x \neq 0\}$, $U_1 = \{[s : y] : y \neq 0\}$ y los homeomorfismos

$$\begin{aligned} \phi_0 & : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^* \\ [x : t] & \rightarrow \phi_0([x : t]) = \frac{t}{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 &: U_1 \rightarrow \mathbb{C}^* \\ [s : y] &\rightarrow \phi_1([s : y]) = \frac{s}{y},\end{aligned}$$

cuyas inversas continuas están dadas por

$$\begin{aligned}\phi_0^{-1} &: \mathbb{C}^* \rightarrow U_0 \\ t &\rightarrow \phi_0^{-1}(t) = [x : xt]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1} &: \mathbb{C}^* \rightarrow U_1 \\ s &\rightarrow \phi_1^{-1}(s) = [sy : y].\end{aligned}$$

Observamos que $\phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$ y $\phi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$, además, se tiene que

$$(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(t) = \phi_1(\phi_0^{-1}(t)) = \phi_1([x : xt]) = \frac{1}{t}$$

y

$$(\phi_0 \circ \phi_1^{-1})(s) = \phi_0(\phi_1^{-1}(s)) = \phi_0([sy : y]) = \frac{1}{s}.$$

De esta manera, $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ y $\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ son holomorfas. Por tanto $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ es un atlas sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ y por tanto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ resulta una variedad compleja de dimensión 1.

Proposición 1.3.4. $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es una variedad compacta y simplemente conexa.

Demostración. Ver [GH78]. □

1.3.1 Explosión con centro en el origen de \mathbb{C}^2 .

A continuación, describiremos la definición de explosión centrado en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Para ello, procedemos de la siguiente manera.

Una explosión centrado en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ consiste en reemplazar el origen $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ por el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, dejando a los otros puntos invariantes en un sentido biholomorfo. Empezamos considerando la función:

$$\begin{aligned}\pi_0 &: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, t) &\rightarrow \pi(x, t) = (x, tx) = (x, y),\end{aligned}$$

en estas coordenadas tenemos las siguientes propiedades

- $\pi_0^{-1}(0, 0) = \{(0, t) : t \in \mathbb{C}\}$,
- $\pi_0(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \cup \{(0, 0)\}$, y
- $\pi_0 : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ es un biholomorfismo con inversa.

$$\begin{aligned} \pi_0^{-1} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (x, y) &\rightarrow \pi_0^{-1}(x, y) = (x, \frac{y}{x}). \end{aligned}$$

Notamos que $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es reemplazado por la recta $\{x = 0\}$. No obstante, no podemos cubrir la recta $\{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$. Para cubrir tal recta considere la función π_1 en las coordenadas (s, y) dada por $\pi_1(s, y) = (sy, y)$; en este caso $x = sy$ e $y = y$. En las coordenadas (s, y) se tiene propiedades similares a las dadas por las coordenadas (x, t) .

Cuando se trabaja en las coordenadas (s, y) no cubrimos la recta $\{y = 0\}$. Para cubrir todo \mathbb{C}^2 necesitamos pegar el plano xt con el plano sy , identificando así la recta $\{x = 0\}$ con la recta $\{y = 0\}$ para ello, procedemos de la siguiente manera: Definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 &:= \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_0 : y = \phi_0([p])x\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \\ \tilde{U}_1 &:= \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1 : x = \phi_1([p])y\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \end{aligned}$$

y (U_i, ϕ_i) , $i = 0, 1$ son las parametrizaciones de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, además al considerar las funciones

- $\tilde{\varphi}_0 : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_0(x, y, [p]) = (x, \phi_0([p]))$,
- $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_1(x, y, [p]) = (\phi_1([p]), y)$,
- $\tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_0$ donde $\tilde{\varphi}_0^{-1}(x, t) = (x, tx, \phi_0^{-1}(t))$,
- $\tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_1$ donde $\tilde{\varphi}_1^{-1}(s, y) = (sy, y, \phi_1^{-1}(s))$.

Llamemos, $\tilde{\mathbb{C}}_0^2 = \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1$. Observemos que

$$\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1 = \mathbb{C}^2 \times (U_0 \cap U_1), \tilde{\varphi}_0(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \text{ y } \tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C},$$

además,

$$(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1})(x, t) = \tilde{\varphi}_1(x, tx, \phi_0^{-1}(t)) = (\phi_1(\phi_0^{-1}(t)), tx) = \left(\frac{1}{t}, tx\right)$$

y

$$(\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1})(s, y) = \tilde{\varphi}_0(sy, y, \phi_1^{-1}(s)) = (sy, \phi_0(\phi_1^{-1}(s))) = (sy, \frac{1}{s}).$$

De esta manera $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ y $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ son holomorfas. Por lo tanto $\{(\tilde{U}_0, \tilde{\varphi}_0), (\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1)\}$ es un atlas sobre $\tilde{\mathbb{C}}^2$ y por lo tanto $\tilde{\mathbb{C}}^2$ resulta una variedad compleja de dimensión 2. Denotemos por $\pi = \pi_0 \cup \pi_1$ **una explosión con centro en el origen** $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. El conjunto $\pi^{-1}(\mathbf{0}) = \pi_0^{-1} \cup \pi_1^{-1} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es llamado **divisor excepcional de π** .

1.4 Foliaciones sobre superficies

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular de dimensión 1 en una superficie compleja M (variedad compleja de dimensión 2). Como \mathcal{F} tiene al mismo tiempo, dimensión y codimensión 1, es inducido localmente por un campo vectorial holomorfo así como por 1– forma holomorfa. Si \mathcal{F} es definida en una vecindad U de $p \in M$ por un campo \mathcal{X} , entonces en coordenadas afines (x, y)

$$\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (1.3)$$

o equivalentemente por una 1– forma holomorfa

$$w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy = 0 \quad (1.4)$$

donde $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ son relativamente primos y \mathcal{X} es el campo tangente asociado a w en el sentido de que $\mathcal{X}(w) \equiv 0$. Note que $Sing(w) = Sing(\mathcal{X})$. A partir de ahora y en todo el presente trabajo, si \mathcal{F} es una foliación sobre (\mathbb{C}^2, p) , entonces \mathcal{F} es inducida por \mathcal{X} como en (1.3) o por $w = 0$ como en (1.4) y el conjunto $Sing(\mathcal{F})$ denota todos los puntos singulares de la foliación \mathcal{F} .

Definición 1.4.1. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por una 1– forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y suponga que \mathbf{p} es la única singularidad de \mathcal{F} , la multiplicidad de la foliación \mathcal{F} en \mathbf{p} , denotada por $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, es definida por $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \min\{ord(P), ord(Q)\}$.

Ejemplo 1.4.2. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1–forma

$$w = ydx - xdy,$$

note que $(0, 0)$ es la única singularidad de la foliación \mathcal{F} , con multiplicidad $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \min\{ord(-x), ord(-y)\} = 1$

Ejemplo 1.4.3. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1-forma

$$w = (x - y)dx + x^2dy,$$

note que $(0,0)$ es la única singularidad de la foliación \mathcal{F} , con multiplicidad $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \min\{\text{ord}(x^2), \text{ord}(y - x)\} = 1$.

Definición 1.4.4. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por una 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Decimos que la curva analítica o formal \mathcal{C}_f es invariante por \mathcal{F} si

$$w \wedge df = f \cdot \eta, \quad (1.5)$$

donde η es una 2-forma (es decir, $\eta = zdx \wedge dy$, con $z \in \mathbb{C}\{x, y\}$).

Definición 1.4.5. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por una 1-forma holomorfa $w = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, $\mathbf{p} = (0,0)$ es la única singularidad de \mathcal{F} y sea \mathcal{C}_f la curva analítica o formal compleja definida por f en \mathbf{p} . Una separatriz pasando por \mathbf{p} es la curva \mathcal{C}_f invariante por \mathcal{F} que contiene \mathbf{p} , es decir, $\mathcal{C}_f - \text{Sing}(\mathcal{F})$ es localmente una unión de hojas de \mathcal{F} .

Definición 1.4.6. Una separatriz débil pasando por $\mathbf{p} = (0,0)$ es la curva formal $\mathcal{C}_f = \{f(x, y) = 0, f \in \mathbb{C}\llbracket x, y \rrbracket\}$ invariante por \mathcal{F} que contiene \mathbf{p} .

Además, una separatriz analítica (fuerte) pasando por $\mathbf{p} = (0,0)$ es la curva analítica $\mathcal{C}_f = \{f(x, y) = 0, f \in \mathbb{C}\{x, y\}\}$ invariante por \mathcal{F} que contiene \mathbf{p} .

Denotaremos al conjunto de todas las separatrices de \mathcal{F} pasando por \mathbf{p} por $\text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$.

Definición 1.4.7. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset \mathbb{C}^2$, vecindad de $\mathbf{p} = (0,0) \in \mathbb{C}^2$, definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Se define una rama local de separatriz $B \subset \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ como el conjunto $B = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$, donde B es determinada por los ceros de una función f irreducible.

Si $f \in \mathbb{C}\llbracket x, y \rrbracket$, se dirá que B es una rama local formal. Además, se dirá que B es una rama local analítica si $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

Ejemplo 1.4.8. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = -ydx + 2xdy.$$

Note que $Sing(\mathcal{F}) = \{(0,0)\}$, además $\nu_0(\mathcal{F}) = \min\{ord(2x), ord(y)\} = 1$. Por otro lado, \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 : \{f = y = 0\}$, $B_2 : \{g = x = 0\}$ y $B_c = \{h = y^2 - xc = 0\}$ con $c \in \mathbb{C}^*$, en efecto, para $B_1 : \{f = y = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dy$. Luego,

$$w \wedge df = (-ydx + 2xdy) \wedge dy = -ydx \wedge dy = f.\eta,$$

donde $\eta = -dx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $B_2 : \{g = x = 0\}$ diferenciando g se tiene $dg = dx$. Luego,

$$w \wedge dg = (-ydx + 2xdy) \wedge dx = -2xdx \wedge dy = g.\eta,$$

donde $\eta = -2dx \wedge dy$.

Por otro lado, $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_2 es una separatriz analítica.

Finalmente, para $B_c = \{h = y^2 - xc = 0\}$ diferenciando h se tiene $dh = -cdx + 2ydy$. Luego,

$$w \wedge dh = (-ydx + 2xdy) \wedge (-cdx + 2ydy) = -2(y^2 - xc)dx \wedge dy = h.\eta,$$

donde $\eta = -2dx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_c es una separatriz analítica.

Ejemplo 1.4.9. Sea \mathcal{F} la foliación de *Riccati* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy.$$

Note que $Sing(\mathcal{F}) = \{(0,0)\}$, además $\nu_0(\mathcal{F}) = \min\{ord(x^2), ord(-y^2 - xy - x^2)\} = 2$. Las únicas separatrices de \mathcal{F} son $B_1 : \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{g = x + y = 0\}$, en efecto, para $B_1 : \{f = x = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dx$. Luego,

$$w \wedge df = ((y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy) \wedge dx = -x^2dx \wedge dy = f.\eta,$$

donde $\eta = -x dx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $B_2 : \{g = x + y = 0\}$ diferenciando g se tiene $dg = dx + dy$. Luego,

$$w \wedge dg = ((y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy) \wedge (dx + dy) = (x + y)ydx \wedge dy = g.\eta,$$

donde $\eta = ydx \wedge dy$.

Por otro lado, $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_2 es una separatriz analítica.

Ejemplo 1.4.10. Sea \mathcal{F} la foliación de *Suzuki's* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy.$$

Observe que $Sing(\mathcal{F}) = \{(0, 0)\}$, además $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \min\{ord(-(2xy^2 + xy - x^2)), ord(-(y^3 + y^2 - xy))\} = 2$. Por otro lado, \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{v = y = 0\}$, $S_c : \{h = y^2 + y - x \ln(\frac{cy}{x}) = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ con $c \in \mathbb{C}$, en efecto, para $B_1 : \{f = x = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dx$. Luego,

$$w \wedge df = ((y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy) \wedge dx = x(2y^2 + y - x)dx \wedge dy = f \cdot \eta,$$

donde $\eta = (2y^2 + y - x)dx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $B_2 = \{v = y = 0\}$ diferenciando v se tiene $dv = dy$. Luego,

$$\begin{aligned} w \wedge dv &= ((y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy) \wedge dy \\ &= y(y^2 + y - x)dx \wedge dy = v \cdot \eta, \end{aligned}$$

donde $\eta = (y^2 + y - x)dx \wedge dy$.

Por otro lado, $v \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_2 es una separatriz analítica.

Finalmente, para $S_c : \{h = y^2 + y - x \ln(\frac{cy}{x}) = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ diferenciando h se tiene $dh = (2y + 1 - \frac{x}{y})dy - (\ln(\frac{cy}{x}) - 1)dx$. Luego,

$$\begin{aligned} w \wedge dh &= ((y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy) \wedge ((2y + 1 - \frac{x}{y})dy - \ln(\frac{cy}{x}) - 1)dx \\ &= (y^2 + y - x \ln(\frac{cy}{x}))(2y^2 + y - x)dx \wedge dy = h \cdot \eta, \end{aligned}$$

donde $\eta = (2y^2 + y - x)dx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto S_c es una separatriz analítica.

Ejemplo 1.4.11. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy.$$

Note que $Sing(\mathcal{F}) = \{(0, 0)\}$, además $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \min\{ord(-2xy), ord(-2y^2 - x^3)\} = 2$. Por otro lado, \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $S_c = \{h = y^2 - x^3 - cx^2 = 0\}$ con $c \in \mathbb{C}$, en efecto, para $B_1 : \{f = x = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dx$. Luego,

$$w \wedge df = ((2y^2 + x^3)dx - 2xydy) \wedge dx = 2xydx \wedge dy = f \cdot \eta,$$

donde $\eta = 2ydx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $S_c = \{h = y^2 - x^3 - cx^2 = 0\}$ diferenciando h se tiene $dh = 2ydy - 3x^2dx - 2cxdx$. Luego,

$$\begin{aligned} w \wedge dh &= ((2y^2 + x^3)dx - 2xydy) \wedge (2ydy - 3x^2dx - 2cxdx) \\ &= 4y(y^2 - x^3 - cx^2)dx \wedge dy = h.\eta, \end{aligned}$$

donde $\eta = 4ydx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto S_c es una separatriz analítica.

Definición 1.4.12. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, inducida por $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Se define el núcleo de la 1- forma $w(\mathbf{p})$ como

$$Ker(w(\mathbf{p})) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y)x + Q(x, y)y = 0\}.$$

Observaciones

- De la definición 1.4.12, si \mathbf{p} es una singularidad de \mathcal{F} entonces el $Ker(w(\mathbf{p})) = \mathbb{C}^2$. Caso contrario, si \mathbf{p} no es una singularidad entonces, $Ker(w(\mathbf{p}))$ es una recta compleja.
- Si $h \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, entonces $Ker(w') = Ker(h.w')$.
- Si P y Q tienen parte común en cada componente homogénea, es decir, $mcd(P, Q) \neq 1$. Luego, $P(x, y) = h(x, y)P'(x, y)$ y $Q(x, y) = h(x, y)Q'(x, y)$, donde $mcd(P', Q') = 1$. Si $w = h(x, y)[-Q'(x, y)dx + P'(x, y)dy]$, al hacer $w' = -Q'(x, y)dx + P'(x, y)dy$, se tiene que $w = h.w'$, $h^* \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$.

Notamos que P' y Q' son primos relativos, entonces $Sing(\mathcal{F}')$ es un conjunto aislado.

De las observaciones anteriores, se tiene que si P y Q tienen parte común en cada componente homogénea, entonces existe $h \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ tal que $X = h.Y$, donde Y es un campo vectorial holomorfo.

Esto implica que la foliación generada por el campo vectorial X es analíticamente equivalente a la foliación generada por Y . Esto significa que la foliación definida por una 1- forma holomorfa $w = -Qdx + Pdy$ donde P y Q no son primos relativos, es la misma foliación que genera la 1- forma holomorfa $w' = -Q'dx +$

$P'dy$ donde P' y Q' son primos relativos.

Por lo tanto, podemos suponer que $\text{mcd}(P, Q) = 1$, es decir, P y Q no tienen factores comunes más que puntos.

Definición 1.4.13. Sean M una superficie compleja y \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset M$, vecindad de $\mathbf{p} \in M$, definida por la 1- forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Sea B la separatriz débil pasando por \mathbf{p} y $\mathbf{p} = (0, 0)$ una singularidad de \mathcal{F} , podemos asumir que $\{y = 0\}$ es el cono tangente de B . Considere una parametrización de *Puiseux* φ de B en p , entonces el índice de tangencia de \mathcal{F} en \mathbf{p} con respecto a B por $\text{Ind}_{\mathbf{p}}^w(\mathcal{F}) = \text{ord}_{t=0}P(\varphi(t))$.

Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por una 1- forma holomorfa $w = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ o por su campo vectorial tangente asociado a $w : \mathcal{X} = (P(x, y), Q(x, y))$, donde $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$; y suponga que $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es la única singularidad de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = 1$. Entonces en las coordenadas (x, y) centrada en $(0, 0)$:

$$\mathcal{X}(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} P_j(x, y) \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, y) \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde, P_i y Q_i son polinomios homogéneos de grado i .

La parte lineal $L\mathcal{X}$, del campo vectorial \mathcal{X} , está dada por:

$$L\mathcal{X}(x, y) = (P_{10}x + P_{01}y) \frac{\partial}{\partial x} + (Q_{10}x + Q_{01}y) \frac{\partial}{\partial y},$$

con la matriz asociada

$$\begin{bmatrix} P_{10} & P_{01} \\ Q_{10} & Q_{01} \end{bmatrix}.$$

Denotemos por J_w la matriz Jacobiana de \mathcal{X} en (x, y) , definida por

$$J_w(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Observe que al reemplazar en la singularidad $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, se tiene

$$J_w(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial x} & \frac{\partial P(0, 0)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(0, 0)}{\partial x} & \frac{\partial Q(0, 0)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{10} & P_{01} \\ Q_{10} & Q_{01} \end{bmatrix}.$$

Definición 1.4.14. Diremos que $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$, es una singularidad reducida o simple para \mathcal{F} si la parte lineal $L\mathcal{X}(\mathbf{p})$ del campo vectorial holomorfo $\mathcal{X}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es no nulo y tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ satisfaciendo una de las siguientes propiedades:

- (i) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$. A este tipo de singularidad se le conoce como singularidad hiperbólica.
- (ii) $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$. A esta singularidad se le conoce como singularidad silla-nodo.

En el caso (i), existen coordenadas analíticas en (x, y) en las que \mathcal{F} es inducida por la ecuación:

$$w = x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx, \quad (1.6)$$

donde $a, b \in \mathbb{C}^*\{x, y\}$, así $Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ está formado por dos ramas analíticas transversales dadas por: $\{x = 0\}$ y $\{y = 0\}$. En el caso (ii), existe un cambio formal de coordenadas, tal que

$$w = -y(1 + \lambda x^k)dx + x^{k+1}dy, \quad (1.7)$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ son invariantes formales de la 1- forma w (es decir, el coeficiente y el exponente del polinomio $Q(x, y)$ son determinados por el $(k+1)$ -jet de w en el origen), (ver ([MR82])). La curva $\{x = 0\}$ es una separatriz analítica, llamada separatriz fuerte, mientras $\{y(x) = 0\}$ con $y \in \mathbb{C}[[x, y]]$, es llamada separatriz débil. El entero $k+1$ es llamado índice de tangencia de \mathcal{F} con respecto a la separatriz débil.

Ejemplo 1.4.15. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = (x - y)dx + x^2dy,$$

note que $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es la única singularidad reducida de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = 1$, puesto que la matriz jacobiana en $(0, 0)$ asociada al campo $\mathcal{X} = (x^2, y - x)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Esto implica que, $(0, 0)$ es una singularidad del tipo silla-nodo. Por otro lado, note que las únicas separatrices de \mathcal{F} son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{h = y = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j\}$, en efecto, para $B_1 : \{f = x = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dx$. Luego,

$$w \wedge df = ((x-y)dx + x^2dy) \wedge dx = x^2dx \wedge dy = f \cdot \eta,$$

donde $\eta = xdx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $B_2 = \{h = y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j = 0\}$ diferenciando h se tiene

$$dh = dy - \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)! x^{j-1}. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} w \wedge dh &= ((x-y)dx + x^2dy) \wedge (dy - \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)! x^{j-1}) \\ &= -(y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j) dx \wedge dy = h \cdot \eta, \end{aligned}$$

donde $\eta = -dx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\llbracket x, y \rrbracket$ y por lo tanto B_2 es una separatriz débil.

Como B_2 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* dada por $\varphi(t) = (t, \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! t^j)$. Esto implica que el índice de tangencia de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ con respecto a B_2 es $Ind_{\mathbf{0}}^w(\mathcal{F}) = ord_{t=0}(t^2) = 2$.

Ejemplo 1.4.16. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1-forma

$$w = x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx,$$

donde $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ y $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $a(\mathbf{0}) = 0$, $b(\mathbf{0}) = 0$. Note que $(0, 0)$ es una singularidad reducida de tipo hiperbólico de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \min\{ord(x(\lambda_1 + a(x, y))), ord(y(\lambda_2 + b(x, y)))\} = 1$, puesto que su matriz jacobiana en $(0, 0)$ asociada al campo $\tilde{\mathcal{X}} = (x(\lambda_1 + a(x, y)), y(\lambda_2 + b(x, y)))$ tangente a w , está dada por

$$J_w(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

con valores propios λ_1 y λ_2 y cociente $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$. Por otro lado, las únicas separatrices analíticas de \mathcal{F} son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{h = y = 0\}$, en efecto, para $B_1 : \{f = x = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dx$. Luego,

$$w \wedge df = (x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx) \wedge dx = -x(\lambda_1 + a(x, y))dx \wedge dy = f \cdot \eta,$$

donde $\eta = -(\lambda_1 + a(x, y))dx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $B_2 : \{h = y = 0\}$ diferenciando h se tiene $dh = dy$. Luego,

$$w \wedge dh = (x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx) \wedge dy = -y(\lambda_2 + b(x, y))dx \wedge dy = h \cdot \eta,$$

donde $\eta = -(\lambda_2 + b(x, y))dx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_2 es una separatriz analítica.

Ejemplo 1.4.17. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = -y(1 + \lambda x^k)dx + x^{k+1}dy,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Note que $p = (0, 0)$ es una singularidad reducida de tipo silla-nodo de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \min\{\text{ord}(x^k), \text{ord}(y + \lambda y x^k)\} = 1$, puesto que la matriz jacobiana en $(0, 0)$ asociada al campo $\mathcal{X} = (x^{k+1}, y + \lambda y x^k)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Por otro lado, observe que las únicas separatrices son $B_1 : \{f = x = 0\}$ y $B_2 : \{h = y(x) = 0\}$, en efecto, para $B_1 : \{f = x = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dx$. Luego,

$$w \wedge df = (-y(1 + \lambda x^k)dx + x^{k+1}dy) \wedge dx = -x^{k+1}dx \wedge dy = f \cdot \eta,$$

donde $\eta = -x^k dx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $B_2 : \{h = y = 0\}$ diferenciando h se tiene $dh = dy$. Luego,

$$w \wedge dh = (-y(1 + \lambda x^k)dx + x^{k+1}dy) \wedge dy = -y(1 + \lambda x^k)dx \wedge dy = h \cdot \eta,$$

donde $\eta = -(1 + \lambda x^k)dx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_2 es una separatriz débil.

Ejemplo 1.4.18. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1 forma

$$w = ydx - xdy.$$

Note que $Sing(\mathcal{F}) = \{(0,0)\}$, además $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = 1$. Por otro lado, las únicas separatrices de \mathcal{F} son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{h = y = 0\}$, las cuales son separatrices analíticas, *en efecto*, para $B_1 : \{f = x = 0\}$ diferenciando f se tiene $df = dx$. Luego,

$$w \wedge df = (ydx - xdy) \wedge dx = xdx \wedge dy = f \cdot \eta,$$

donde $\eta = xdx \wedge dy$.

Por otro lado, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_1 es una separatriz analítica.

Analogamente, para $B_2 : \{h = y = 0\}$ diferenciando h se tiene $dh = dy$. Luego,

$$w \wedge dh = (ydx - xdy) \wedge dy = ydx \wedge dy = h \cdot \eta,$$

donde $\eta = dx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_2 es una separatriz analítica.

Finalmente, para $B_c = \{a = y - cx = 0\}$ diferenciando a se tiene $da = -cdx + dy$.

Luego,

$$w \wedge da = (ydx - xdy) \wedge (-cdx + dy) = (y - xc)dx \wedge dy = a \cdot \eta,$$

donde $\eta = dx \wedge dy$.

Por otro lado, $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y por lo tanto B_c es una separatriz analítica.

Definición 1.4.19. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, $\mathbf{p} = (0, 0)$ la única singularidad de \mathcal{F} y sea $\pi : (\tilde{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una composición de mapas de explosión. Definimos el divisor excepcional \mathcal{D} como la unión finita de componentes que son líneas proyectivas incrustadas, con cruzamientos normales.

La propiedad de cruzamientos normales de la familia $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ quiere decir, que para cada punto $q \in \pi^{-1}(\mathbf{p})$, existe un sistema local de coordenadas de \tilde{X} en un entorno de p tal que las variedades de la familia $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ que contengan a p son subespacios lineales en posición general (es decir, las funciones que aparecen dentro de las ecuaciones locales de las variedades de la familia que contienen a p forman un sistema local de coordenadas o pueden ser completadas para formar tal sistema). Así, tenemos $\pi^{-1}(\mathbf{p}) = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ (descomposición

de componentes irreducibles de $\pi^{-1}(\mathbf{p})$.

El divisor $\mathcal{D} := \pi^{-1}(\mathbf{p}) = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ de \tilde{X} es llamado el *divisor excepcional*.

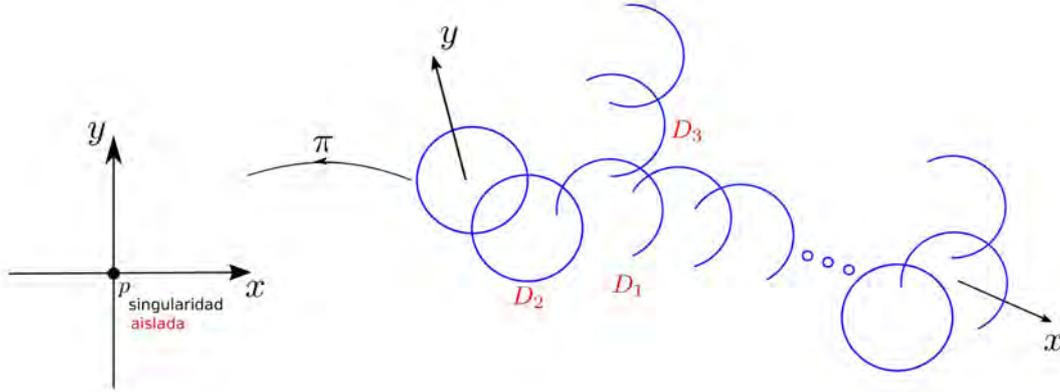


Figura 1.1: El divisor $\mathcal{D} = \bigcup D_i$.

Definición 1.4.20. Sea \mathcal{F} un germe de foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. Diremos que \mathcal{F} es reducida si \mathbf{p} es un singularidad simple.

Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa definida por una 1-forma $w = 0$, denotamos por $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ la transformada estricta de \mathcal{F} . $\tilde{\mathcal{F}}$ es el germe de foliación holomorfa en (\tilde{X}, \mathcal{D}) determinada localmente por la 1-forma $\pi^* w = 0$.

Observación 1.4.21. Para un análisis uniforme, incluimos la posibilidad de que π sea el mapa de identidad, en este caso establecemos, $\tilde{X} = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{D} = \{\mathbf{p}\}$ y $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

Con respecto al divisor \mathcal{D} , donde \mathcal{D} es como la definición 1.4.19, la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ en un punto $q \in \mathcal{D}$ puede ser:

- i) Regular, si hay coordenadas analíticas locales (x, y) en q tales que $\mathcal{D} \subset \{xy = 0\}$ y $\tilde{\mathcal{F}} : dx = 0$.
- ii) Singular, si no es regular.
- iii) Reducida, si q es una singularidad simple para $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{D} \subset \text{Sep}_p(\tilde{\mathcal{F}})$.

Para simplificar, empleamos la terminología \mathcal{D} - regulares, \mathcal{D} - singulares y \mathcal{D} - reducida, respectivamente. Cuando $\mathcal{D} = \{\mathbf{p}\}$, estas nociones coinciden con

los conceptos ordinarios de punto regular, punto singular y singularidad reducida (ver [FPM17]).

Definición 1.4.22. Sea \mathcal{D} el divisor excepcional como la unión finita de componentes que son líneas proyectivas incrustadas, con cruzamientos normales, y $\mathbf{p} = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad de \mathcal{F} . Diremos que \mathcal{D} es el divisor de desingularización de \mathcal{F} y $\pi : (\tilde{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ es una reducción de singularidades o desingularización para \mathcal{F} si todos los puntos $q \in \mathcal{D}$ son \mathcal{D} -regulares o \mathcal{D} -reducidas.

Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por una 1- forma holomorfa $w = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, donde $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y suponga que $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad no reducida de \mathcal{F} con $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = m; m \geq 1$. Entonces

$$w(x, y) = \sum_{j=m}^{\infty} [-Q_j(x, y)dx + P_j(x, y)dy],$$

donde $P_m(x, y) \not\equiv 0$ o $Q_m(x, y) \not\equiv 0$. Se define el cono tangente de la foliación \mathcal{F} como el polinomio $C_{m+1}(x, y) = -xQ_m(x, y) + yP_m(x, y)$. Observe que, al hacer una explosión con centro en la singularidad $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$, en las coordenadas (x, t) de $\tilde{U}_1 = \{(x, t), x \neq 0\}$, obtenemos

$$\pi^*w(x, t) = \sum_{j=m}^{\infty} x^j [(-Q_j(1, t) + tP_j(1, t))dx + xP_j(1, t)dt]. \quad (1.8)$$

El transformado estricto del cono tangente a \mathcal{F} es

$$C_{m+1}(1, t) = -Q_m(1, t) + tP_m(1, t).$$

De lo anterior se sigue la siguiente definición.

Definición 1.4.23. Sea π una explosión con centro en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$. Diremos que π es una explosión dicrítica de \mathcal{F} si $C_{m+1}(x, y) \equiv 0$; caso contrario π será una explosión no-dicrítica de \mathcal{F} .

Suponga que $\mathbf{0}$ es una singularidad de \mathcal{F} , entonces se dirá que $\mathbf{0}$ es una singularidad dicrítica de \mathcal{F} cuando π es una explosión dicrítica de \mathcal{F} , y se dirá que $\mathbf{0}$ es una singularidad no dicrítica de \mathcal{F} , cuando π es una explosión no dicrítica de \mathcal{F} .

Suponga que $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad dicrítica de \mathcal{F} , entonces el transformado estricto del cono tangente es $-Q_m(1, t) + tP_m(1, t) \equiv 0$. Utilizando la ecuación (1.8),

$$\pi^*w(x, t) = x^{m+1}[(-Q_{m+1}(1, t) + tP_{m+1}(1, t) + xA_1(x, t))dx + (P_m(1, t) + xB_1(x, t))dt].$$

Luego, al multiplicar la última igualdad por $\frac{1}{x^{m+1}}$, se tiene una 1- forma holomorfa dado por

$$\tilde{w}_1(x, t) = (-Q_{m+1}(1, t) + tP_{m+1}(1, t) + xA_1(x, t))dx + (P_m(1, t) + xB_1(x, t))dt, \quad (1.9)$$

donde A_1 y B_1 son funciones holomorfas en p . Note que $\tilde{w}_1 = 0$ define la foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ en las coordenadas (x, t) . Del mismo modo, en las coordenadas (s, y) de $\tilde{U}_2 = \{(s, y) / y \neq 0\}$ tenemos

$$\tilde{w}_2 = (-Q_m(s, 1) - yA_2(s, y))ds + (-sQ_{m+1}(s, 1) + P_{m+1}(s, 1) + yB_2(s, y))dy. \quad (1.10)$$

Observe que, $\tilde{w}_2 = 0$ define la foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ en las coordenadas (s, y) . Además, $\tilde{w}_1 = t^{m+1}\tilde{w}_2$ en $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$. Por consiguiente, las 1- formas (1.9) y (1.10) definen la foliación $\pi^*\mathcal{F}$

Observación 1.4.24. En el divisor $\pi^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, se verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ no es invariante por $\pi^*\mathcal{F}$. Además, los puntos $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, donde $P_m(1, t) \neq 0$, son puntos regulares de $\tilde{w}_1(x, t)$.
2. Las singularidades de la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ corresponden, en las coordenadas (x, t) , a las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} P_m(1, t) = 0, \\ -Q_{m+1}(1, t) + tP_{m+1}(1, t) = 0. \end{cases}$$

y en las coordenadas (s, y) por el sistema

$$\begin{cases} Q_m(s, 1) = 0, \\ -sQ_{m+1}(s, 1) + P_{m+1}(s, 1) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto de singularidades $\pi^*\mathcal{F}$ es finito.

3. Las soluciones de $\pi^*\mathcal{F}$ son transversales a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, con excepción de los que pasan por los puntos correspondientes a las raíces de $P_m(1, t) = 0$ y posiblemente el que pasa por $(x, t) = (0, 0)$.

Si $Q_m(0, 1) \neq 0$, entonces la hoja que pasa por $(s, y) = (0, 0)$ es también transversal a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Suponga ahora que $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad no dicrítica de \mathcal{F} , entonces el transformado estricto del cono tangente es $-Q_m(1, t) + tP_m(1, t) \neq 0$. Utilizando la ecuación (1.8),

$$\pi^*w(x, t) = x^m[(-Q_m(1, t) + tP_m(1, t) + xA_1(x, t))dx + x(P_m(1, t) + xB_1(x, t))dt].$$

Luego, al multiplicar la última igualdad por $\frac{1}{x^m}$, se tiene una 1- forma holomorfa dada por

$$\tilde{w}_1(x, t) = (-Q_m(1, t) + tP_m(1, t) + xA_1(x, t))dx + x(P_m(1, t) + xB_1(x, t))dt, \quad (1.11)$$

donde A_1 y B_1 son funciones holomorfas en p . Note que $\tilde{w}_1 = 0$ define la foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ en las coordenadas (x, t) . Del mismo modo, en las coordenadas (s, y) de $\tilde{U}_2 = \{(s, y) / y \neq 0\}$ tenemos

$$\tilde{w}_2 = -y(Q_m(s, 1) + yA_2(s, y))ds + (-sQ_m(s, 1) + P_m(s, 1) + yB_2(s, y))dy. \quad (1.12)$$

Observe que, $\tilde{w}_2 = 0$ define la foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ en las coordenadas (s, y) . Además, $\tilde{w}_1 = t^m\tilde{w}_2$ en $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$. Por consiguiente, las 1- formas (1.11) y (1.12) definen la foliación $\pi^*\mathcal{F}$.

Observación 1.4.25. En el divisor $\pi^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, se verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.
2. Las singularidades de la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ corresponden, en las coordenadas (x, t) a las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} P_m(1, t) = 0, \\ -Q_m(1, t) + tP_m(1, t) = 0. \end{cases}$$

Y en las coordenadas (s, y) por el sistema

$$\begin{cases} Q_m(s, 1) = 0, \\ -sQ_m(s, 1) + P_m(s, 1) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto de singularidades $\pi^*\mathcal{F}$ es finito.

Definición 1.4.26. Sea \mathcal{F} un germen de foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. Definimos el conjunto de puntos infinitamente cercanos a \mathcal{F} en \mathbf{p} , denotado por $\mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, como el conjunto que se define de forma recursiva a lo largo de la reducción de singularidades de \mathcal{F} .

Sea $\pi : (\tilde{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una sucesión de explosiones, el cual es un paso intermedio en el proceso de reducción, y un punto $q \in \mathcal{D}$,

- i) Si q es una singularidad simple de $\tilde{\mathcal{F}}$, entonces $\mathcal{I}_q(\tilde{\mathcal{F}}) = \{q\}$.
- ii) Si q es una singularidad no reducida de $\tilde{\mathcal{F}}$, entonces haciendo una explosión $\sigma : (\hat{X}, \hat{\mathcal{D}}) \rightarrow (\tilde{X}, \mathcal{D})$ en q , donde $\hat{\mathcal{D}} = \sigma^{-1}(\mathcal{D}) = \sigma^*(\mathcal{D}) \cup D$ es la unión de la transformada estricta $\sigma^*(\mathcal{D}) = \overline{\sigma^{-1}(\mathcal{D} - \{q\})}$ y de $D = \sigma^{-1}(q)$. Si q_1, \dots, q_l son todos los puntos $\hat{\mathcal{D}}$ -singulares de $\hat{\mathcal{F}} = \sigma^*\tilde{\mathcal{F}}$ en D , entonces

$$\mathcal{I}_q(\tilde{\mathcal{F}}) = \{q\} \cup \mathcal{I}_{q_1}(\hat{\mathcal{F}}) \cup \dots \cup \mathcal{I}_{q_l}(\hat{\mathcal{F}}).$$

Por otro lado, sea $\pi : (\tilde{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una reducción de singularidades de \mathcal{F} , una componente $D \subset \mathcal{D}$ puede ser:

- No-dicrítica, si D es $\tilde{\mathcal{F}}$ -invariante. En este caso, D contiene un número finito de singularidades simples. Cada singularidad no esquina lleva una separatriz transversal en D , cuya proyección por π es una curva en $Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$.
- Dicrítica, si D no es $\tilde{\mathcal{F}}$ -invariante. Las definiciones 1.4.14 y 1.4.19 aseguran que D puede interceptarse solo con componentes no dicríticas y que $\tilde{\mathcal{F}}$ es genericamente transversal a D . La imagen de una hoja local de $\tilde{\mathcal{F}}$ en cada punto no esquina de D pertenece a $Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$.

Denotamos por $Sep_{\mathbf{p}}(D) \subset Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, el conjunto de separatrices cuyas transformadas estrictas por π intersecta la componente $D \subset \mathcal{D}$. Si $B \in Sep_{\mathbf{p}}(D)$ con D no-dicrítico, se dice que B es aislado. De lo contrario, se dice que es una separatriz dicrítica. Esto genera la descomposición

$$Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = Iso_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) \cup Dic_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}),$$

donde el conjunto $Iso_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ es finito y contiene todas las separatrices puramente formales. Este conjunto se subdivide en dos clases:

- Separatrices débiles: surgen de las separatrices débiles de las sillas-nodos.

- Separatrices fuertes: correspondientes a las separatrices fuertes de las sillanodos y separatrices de las singularidades de tipo hiperbólica.

Por otro lado, si $Dic_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, entonces $Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ es un conjunto infinito de separatrices analíticas.

Definición 1.4.27. Se dice que una foliación \mathcal{F} es dicrítica si $Dic_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ es diferente del vacío. De lo contrario, \mathcal{F} es un germen de foliación no-dicrítica.

Ejemplo 1.4.28. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (x^5 + 4y^2)dx - 2xydy.$$

Note que $p = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} , con multiplicidad $\nu_0(\mathcal{F}) = 2$, pues la matriz jacobiana en p asociada al campo $\mathcal{X} = (-2xy, -x^5 - 4y^2)$ tangente a w está dada por

$$J_w(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con valor propio $\lambda = 0$ de multiplicidad 2. Realizando una explosión π en p y como el cono tangente de w es $C_3(x, y) \neq 0$, luego π es una explosión no dicrítica de \mathcal{F} .

En el abierto $U_0 = \{[x : t] / x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) , con $t = \frac{y}{x}$, tenemos

$$\pi^*w(x, t) = w(x, xt) = (x^5 + 4x^2t^2)dx - 2x^2t(xdt + tdx),$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi^*w(x, t)}{x^2} = (x^3 + 2t^2)dx - 2xtdt$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ sobre U_0 , la cual tiene a $p_1 = (0, 0)$ como única singularidad no reducida de $\tilde{\mathcal{F}}$, pues la matriz jacobiana en p_1 asociada al campo tangente $\tilde{\mathcal{X}} = (-2xt, -x^3 - 2t^2)$ a \tilde{w}_1 está dada por

$$J_{\tilde{w}_1}(p_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con valor propio $\lambda = 0$ de multiplicidad 2. Entonces, $\mathcal{I}_{(0,0)}(\mathcal{F}) = \{(0, 0)\} \cup \mathcal{I}_{(0,0)}(\tilde{\mathcal{F}})$.

En el abierto $U_1 = \{[s : y] : y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) , con $s = \frac{x}{y}$, se tiene

$$w(sy, y) = (s^5y^5 + 4y^2)(sdy + yds) - 2sy^2dy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi^* w(s, y)}{y^2} = (s^5 y^4 + 4y)ds + (s^6 y^3 + 2s)dy$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ sobre U_1 , la cual tiene a $p_2 = (0, 0)$ como única singularidad reducida de tipo hiperbólica de $\tilde{\mathcal{F}}$, pues la matriz jacobiana en p_2 asociada al campo $\tilde{\mathcal{X}} = (s^6 y^3 + 2s, -s^5 y^4 + 4y)$ tangente a \tilde{w}_2 está dada por

$$J_{\tilde{w}_2}(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 4$. El cociente $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}^+$, esto implica que p_2 es una singularidad reducida de tipo hiperbólico. Por lo tanto, $\mathcal{I}_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}) = \{p_2\}$.

1.5 Divisor equilibrado de separatrices

Un objeto útil para el objetivo de esta tesis es la ecuación equilibrada de separatrices, la cual vamos a precisar en esta sección (ver definición 1.5.8). Este objeto de carácter geométrico está formado por un número finito de separatrices, que en el caso no dicrítico coincide con el conjunto de separatrices de la foliación (ver [FPM17]). El divisor equilibrado de separatrices proporciona un control de la multiplicidad algebraica de la foliación (ver la proposición 1.5.11). Finalmente en esta sección definiremos las foliaciones de segundo tipo, foliaciones de tipo curva generalizada y el exceso de tangencia de una foliación.

Supongamos que se tiene un proceso fijo de reducción $\pi : (\tilde{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ para la foliación \mathcal{F} . Dada una componente dicrítica $D \subset \mathcal{D}$, definimos la valencia de D denotamos por $Val(D)$, al número de componentes no dicríticas de \mathcal{D} que se interceptan con D .

Definición 1.5.1. Sea (B, \mathbf{p}) es un germen de curva invariante por la foliación \mathcal{F} definida por $f(x, y) = 0$ en \mathbf{p} ; $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Definimos la multiplicidad algebraica de B en \mathbf{p} como $\nu_{\mathbf{p}}(B) = ord(f)$.

Definición 1.5.2. Un divisor de separatrices para un germen de foliación \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ es una suma formal

$$\mathcal{B} = \sum_{B \in Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} a_B \cdot B,$$

donde los coeficientes $a_B \in \mathbb{Z}$ son cero, excepto por un número finito de $B \in \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$. Denotamos por $\text{Div}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ al conjunto de todos estos divisores. $\text{Div}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ tiene estructura de grupo, con la suma canónica. Diremos que

- $\mathcal{B} \geq 0$ un divisor efectivo, cuyos coeficientes son todos no negativos.
- Existe una única descomposición $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_\infty$, donde $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_\infty \geq 0$ son los divisores de cero y polos de \mathcal{B} , respectivamente.
- La multiplicidad algebraica de \mathcal{B} se define por:

$$\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}) = \sum_{B \in \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} a_B \cdot \nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Dada una ecuación meromorfa formal $\hat{F} = 0$ cuyas componentes irreducibles definen separatrices B_i con multiplicidades ν_i , asociamos el divisor $(\hat{F}) = \sum_i \nu_i B_i$. Una curva de separatrices C , asociada a una ecuación reducida $\hat{F} = 0$, se identifica con el divisor $C = (\hat{F})$. Tal divisor es efectivo y es llamado reducido si todos los coeficientes son 0 ó 1. En general, $\mathcal{B} \in \text{Div}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ es reducido si tanto \mathcal{B}_0 como \mathcal{B}_∞ son divisores efectivos reducidos. El divisor \mathcal{B} se dice que es adaptado a la curva de separatrices C si satisface $\mathcal{B}_0 - C \geq 0$. Finalmente, el número de intersección habitual para curvas formales en C se extiende canónicamente de forma habitual a divisores de curvas.

Ahora, consideremos un germen de foliación \mathcal{F} sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ y π una explosión con centro en \mathbf{p} y $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ su transformada estricta. Una singularidad silla-nodo $q \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ es una **silla-nodo tangente** si su separatriz débil está contenido en el divisor excepcional \mathcal{D} .

Dada una componente $D \subset \mathcal{D}$ denotamos por $\rho(D)$ a su multiplicidad, $\rho(D)$ coincide con la multiplicidad algebraica de una curva γ en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ cuya transformación estricta $\pi^* \gamma$ se intersepta con D transversalmente fuera de una esquina de D .

Definición 1.5.3. Sea \mathcal{F} un germen de foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. Considere $\pi : (\tilde{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ la reducción de singularidades de \mathcal{F} . Se dice que la foliación \mathcal{F} es de segundo tipo si la transformada estricta $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ no admite singularidades de tipo silla-nodo tangente.

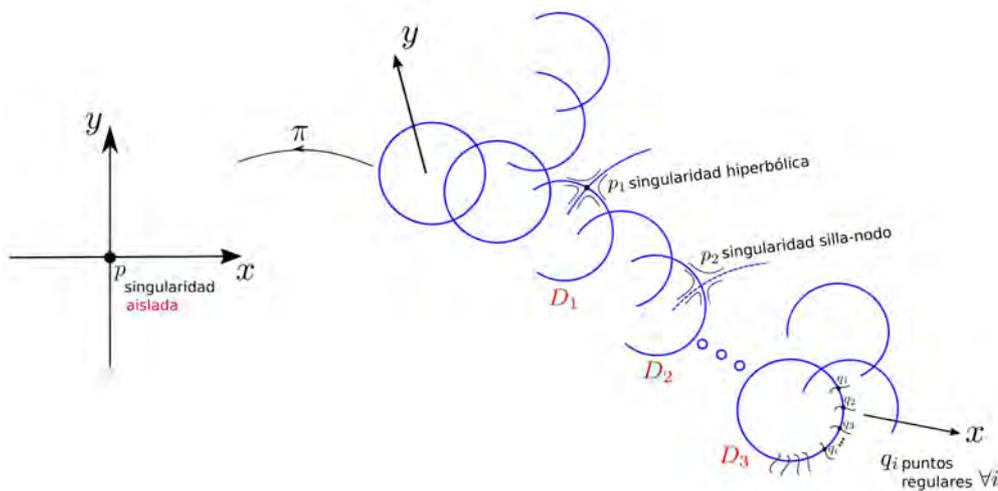


Figura 1.2: Foliación de segundo tipo

Definición 1.5.4. Sea \mathcal{F} un germe de foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. Considere $\pi : (\tilde{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ la reducción de singularidades de \mathcal{F} . Se dice que la foliación \mathcal{F} es de tipo curva generalizada si la transformada estricta $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ no admite singularidades de tipo silla-nodo.

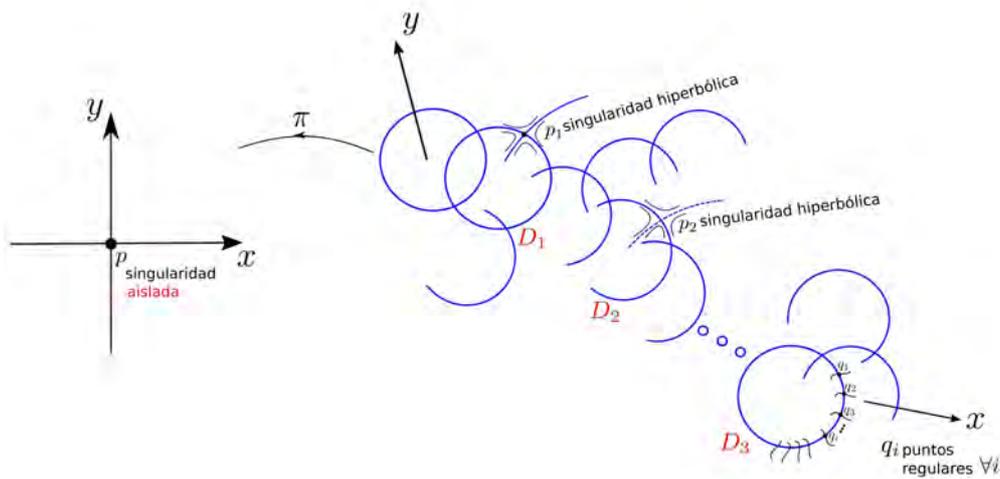


Figura 1.3: Foliación de tipo curva generalizada

A continuación, se dará un invariante que mide la existencia de silla-nodo tangente en la reducción de singularidades de la foliación.

Definición 1.5.5. Sea \mathbf{p} una singularidad silla-nodo tangente de la foliación \mathcal{F} , definimos el exceso de tangencia de \mathcal{F} en \mathbf{p} como

$$\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \sum_{q \in SN(\mathcal{F})} \rho(D_q)(Ind_q^w(\tilde{\mathcal{F}}) - 1), \quad (1.13)$$

donde $SN(\mathcal{F})$ es el conjunto de sillanodos tangentes al divisor de reducción \mathcal{D} . En la fórmula (1.13), si $q \in SN(\mathcal{F})$, denotamos por D_q la componente de \mathcal{D} que contiene a la separatriz débil y por $Ind_q^w(\tilde{\mathcal{F}}) > 1$, índice de la separatriz débil de $\tilde{\mathcal{F}}$ en q , que llamaremos en adelante índice débil de $\tilde{\mathcal{F}}$ en q . Además, $\rho(D_q)$ es la multiplicidad de la componente D_q .

Note que, $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$ cuando \mathbf{p} es una singularidad hiperbólica o silla nodo de tipo no tangente. De la definición 1.5.5 se tiene $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) \geq 0$, además $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow SN(\mathcal{F}) = \emptyset$. Esto implica que: $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}$ es de segundo tipo.

Definición 1.5.6. Un sistema completo de separatrices para una foliación \mathcal{F} está dado por la unión de dos gérmenes de curvas $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\infty$, donde

- \mathcal{B}_0 es la unión de separatrices aisladas y $2 - Val(D)$ separatrices de $Sep_{\mathbf{p}}(D)$, donde D es una componente dicrítica con valencia menor que 2.
- \mathcal{B}_∞ es la unión de $Val(D) - 2$ separatrices de $Sep_{\mathbf{p}}(D)$ de cada componente dicrítica D con valencia mayor que 2.

Definición 1.5.7. Una ecuación equilibrada de separatrices es un germen de función meromorfa cuyos ceros y polos son \mathcal{B}_0 y \mathcal{B}_∞ respectivamente.

Definición 1.5.8. Una ecuación equilibrada de separatrices para un germen de foliación singular \mathcal{F} sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ es una función meromorfa formal \hat{F} cuyo divisor tiene la forma

$$\mathcal{B} = \sum_{B \in Iso_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} B + \sum_{B \in Dic_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} a_B \cdot B,$$

donde los coeficientes $a_B \in \mathbb{Z}$ son distintos de cero excepto por un número finito $B \in Dic_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ y para cada componente dicrítica $D \subset \mathcal{D}$ se cumple

$$\sum_{B \in Sep_{\mathbf{p}}(D)} a_B = 2 - Val(D).$$

Definición 1.5.9. Sea \mathcal{F} un germen de foliación singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathfrak{p})$ no-dicrítica. Una ecuación equilibrada de \mathcal{F} es cualquier ecuación del conjunto de separatrices de \mathcal{F} .

Definición 1.5.10. Diremos que un divisor equilibrado B es primitivo si para cada componente dicrítica $D \in \mathcal{D}$ y cada $B \in \text{Sep}_{\mathfrak{p}}(D)$ tenemos $a_B = -1, 0$ ó 1 .

Una ecuación equilibrada de separatrices es una función holomorfa formal \hat{F} cuyo divisor asociado es un divisor equilibrado. Una ecuación equilibrada es reducida, primitiva o adaptada a una curva C si lo mismo es cierto para el divisor subyacente.

El exceso de tangencia mide el grado en que un divisor equilibrado de separatrices calcula la multiplicidad algebraica, como se expresa en el siguiente resultado

Proposición 1.5.11. Sea \mathcal{F} un germen de foliación singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathfrak{p})$, con \mathcal{B} como divisor equilibrado de separatrices. Denote por $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F})$ y $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{B})$ sus multiplicidades algebraicas. Entonces

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{B}) - 1 + \tau_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}).$$

Además, $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{B}) - 1 \Leftrightarrow \mathcal{F}$ es foliación de segundo tipo.

Demostración. Ver [GEN07]. □

A continuación, presentamos ejemplos de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, con la finalidad de comprender las definiciones presentadas en las secciones (1.4) y (1.5). Esto nos permitirá tener una idea clara y objetiva para el siguiente capítulo.

Ejemplo 1.5.12. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = ydx - xdy.$$

Note que $(0,0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} , con multiplicidad $\nu_0(\mathcal{F}) = 1$, pues su matriz jacobiana en $(0,0)$ asociada al campo $\tilde{\mathcal{X}} = (-x, -y)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyo valor propio es $\lambda = -1$ con multiplicidad 2. Realizando una explosión π en

$(0,0)$. Como el cono tangente de w es $C_2(x,y) \equiv 0$, entonces π es una explosión dicrítica de \mathcal{F} .

En el abierto $U_0 = \{[x:t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x,t) , con $t = \frac{y}{x}$, tenemos

$$\pi^*w(x,t) = \pi_0^*w(x,t) = w(x,xt) = xtdx - x(xdt + tdx),$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_1(x,t) = \frac{\pi^*w(x,t)}{x^2} = -dt$ define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_0^*\mathcal{F}$ en U_0 , la cual es regular y transversal al divisor excepcional $\pi_0^{-1}(\mathbf{0}) = \{x = 0\}$.

Analogamente, en el abierto $U_1 = \{[s:y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s,y) , con $s = \frac{x}{y}$ se tiene:

$$\pi^*w(s,y) = \pi_1^*w(s,y) = w(sy,y) = y(sdy + yds) - sydy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s,y) = \frac{\pi^*w(s,y)}{y^2} = ds$ define $\tilde{\mathcal{F}}$ en U_1 , la cual es regular y transversal al divisor excepcional $\pi_1^{-1}(\mathbf{0}) = \{y = 0\}$. Por otro lado, note que la foliación \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 : \{x = 0\}$, $B_2 : \{y = 0\}$ y $S_c : \{y - cx = 0; c \in \mathbb{C}^*\}$, (ver ejemplo 1.4.18). Además, observe que las transformadas estrictas de B_1 y B_2 son $\tilde{B}_1 : \{s = 0\}$ y $\tilde{B}_2 : \{t = 0\}$ en U_1 y U_0 respectivamente, y note que la transformada estricta de S_c es $\tilde{S}_c : \{sc - 1 = 0\}$ en U_1 (ver figura 1.4).

Por otro lado, notemos que el divisor excepcional $D = \pi^{-1}(\mathbf{0}) = \pi_0^{-1} \cup \pi_1^{-1}(\mathbf{0})$ es una componente dicrítica con $Val(D) = 0$. Luego, $\mathcal{B}_0 = S_1 \cup B_2$. Esto implica que, una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = (y-x) \cdot y = 0$, cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = S_1 + B_2$.

Por lo tanto, la foliación holomorfa no reducida \mathcal{F} es dicrítica de tipo curva generalizada.

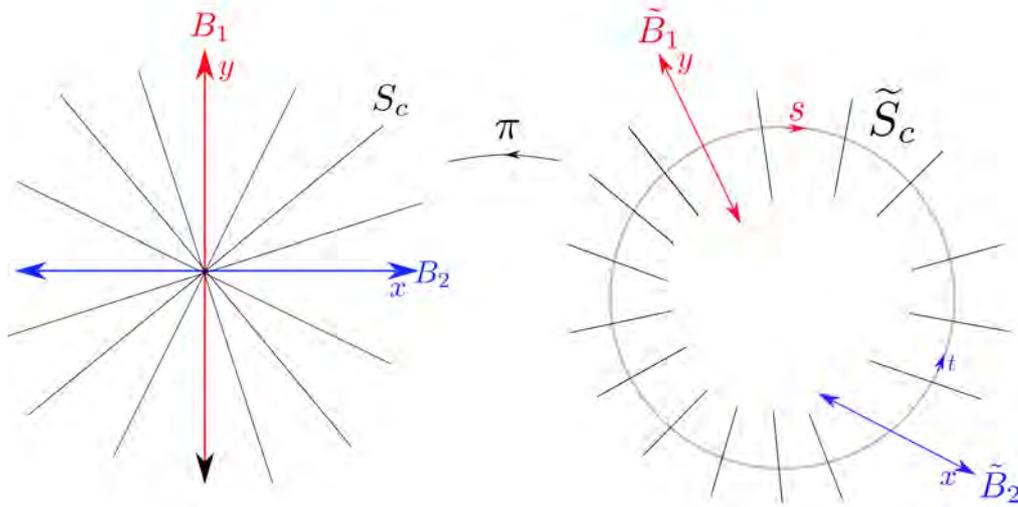


Figura 1.4: Foliación dicrítica: $w = ydx - xdy$

Ejemplo 1.5.13. Sea \mathcal{F} la foliación de *Riccati* inducida por la 1-forma

$$w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} , con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2$, pues la matriz jacobiana en \mathbf{p} asociada al campo $\tilde{\mathcal{X}} = (x^2, -y^2 - xy - x^2)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con valor propio $\lambda = 0$ de multiplicidad 2. Realizando una explosión π en $\mathbf{p} = (0, 0)$ y como el cono tangente de w es $C_3(x, y) \neq 0$, entonces π es una explosión no dicrítica de \mathcal{F} .

En el abierto $U_0 = \{[x : t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) , con $t = \frac{y}{x}$ se tiene

$$\pi^*w(x, t) = \pi_0^*w(x, t) = w(x, xt) = (x^2t^2 + x^2t + x^2)dx + x^2(xdt + tdx),$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi^*w(x, t)}{x^2} = (t + 1)^2dx + xdt$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_0^*\mathcal{F}$ en U_0 con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\tilde{\mathcal{F}}) = \min\{\text{ord}(x), \text{ord}(-(t + 1)^2)\} = 1$, la cual tiene a $p_1 = (0, -1)$ como única singularidad reducida de tipo silla nodo. Además, $\tilde{\mathcal{F}}$ no es transversal al divisor excepcional $\pi_0^{-1}(\mathbf{0}) = D =$

$\{x = 0\}$.

Analogamente, en el abierto $U_1 = \{[s : y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) , con $s = \frac{x}{y}$, tenemos

$$\pi^*w(x, t) = \pi_1^*w(s, y) = w(sy, y) = (y^2 + sy^2 + s^2y^2)(sdy + yds) + s^2y^2dy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi^*w(s, y)}{y^2} = (y + sy + s^2y)ds + (s + 2s^2 + s^3)dy$

define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^*\mathcal{F}$ en U_1 , la cual tiene a $p_2 = (-1, 0)$ como singularidad reducida de tipo silla nodo tangente con $Ind_{p_2}^w(\tilde{\mathcal{F}}) = 2$ (índice débil) y a $p_3 = (0, 0)$ como singularidad reducida de tipo hiperbólica. Además, las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$ no son transversales al divisor excepcional $\pi_1^{-1}(\mathbf{0}) = D = \{y = 0\}$.

De otro lado, note que la foliación \mathcal{F} tiene dos separatrices las cuales son $B_1 : \{h = x + y = 0\}$ y $B_2 : \{f = x = 0\}$ (ver ejemplo 1.4.9), cuyas transformadas estrictas por π son las separatrices aisladas de $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{B}_1 : \{t + 1 = 0\}$ en U_0 y $\tilde{B}_2 : \{s = 0\}$ en U_1 , (ver figura 1.5).

Por otro lado, notemos que el divisor excepcional $D = \pi^{-1}(\mathbf{0}) = \pi_0^{-1} \cup \pi_1^{-1}(\mathbf{0})$ es una componente no-dicrítica, puesto que D contiene un número finito de singularidades simples y por cada singularidad lleva una separatriz transversal en D , cuya proyección por π es una curva en $Sep_p(\mathcal{F})$, (ver figura 1.5). Luego, $\mathcal{B}_0 = B_1 \cup B_2$. Esto implica que, una ecuación equilibrada de separatrices es $\hat{F} = x(x + y)$, cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = B_1 + B_2$. Además, $\nu_p(B_1) = \rho(D_{p_2})$, $\nu_p(B_2) = \rho(D_{p_3})$ pues \tilde{B}_1 y \tilde{B}_2 intersectan a D transversalmente fuera de una esquina de D y como $\nu_p(B_1) = ord(x + y) = 1$, $\nu_p(B_2) = ord(x) = 1$ y p_2 es una silla-nodo tangente, entonces $\tau_p(\mathcal{F}) = \sum_{q \in SN(\mathcal{F})} \rho(D_q)(Ind_q^w(\tilde{\mathcal{F}}) - 1) = \rho(D_{p_2})(Ind_{p_2}^w(\tilde{\mathcal{F}}) - 1) = 1(2 - 1) = 1$.

Por lo tanto, la foliación \mathcal{F} de *Riccati* es una foliación no dicrítica ya que tiene un número finito de separatrices y no es de 2do tipo pues $\tau_p(\mathcal{F}) = 1$.

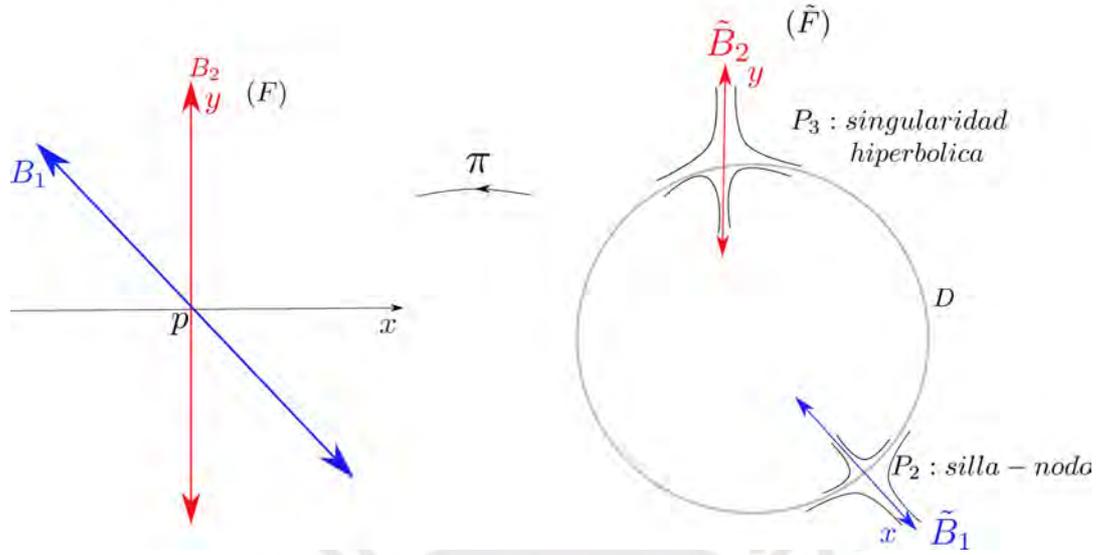


Figura 1.5: Foliación no dicrítica: $w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy$

Ejemplo 1.5.14. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por

$$w = -ydx + 2xdy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad no reducida de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 1$, puesto que la matriz jacobiana en \mathbf{p} asociada al campo $\mathcal{X} = (2x, y)$ tangente a w , está dada por:

$$J_w(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Realizando una explosión π_1 en $\mathbf{p} = (0, 0)$ y como el cono tangente de w es $C_2(x, y) \neq 0$, π_1 es una explosión no-dicrítica de \mathcal{F} .

En el abierto $U_0 = \{[x : t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) con $t = \frac{y}{x}$, se tiene

$$\pi_1^*w(x, t) = w(x, xt) = -xtdx + 2x(xdt + tdx),$$

y por lo tanto $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi_1^*w(x, t)}{x} = tdx + 2xdt$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^*\mathcal{F}$ en U_0 , la cual tiene a $p_1 = (0, 0)$ como única singularidad reducida de tipo hiperbólica y no es transversal a $D = \{x = 0\}$, (ver figura 1.6).

En el abierto $U_1 = \{[s : y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) con $s = \frac{x}{y}$ se tiene

$$\pi_1^*w(s, y) = w(sy, y) = -y(sdy + yds) + 2sydy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi_1^* w(s, y)}{y} = -yds + sdy$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_1 , la cual tiene a $p_2 = (0, 0)$ como única singularidad no reducida. Como el cono tangente de \tilde{w}_2 es $\tilde{C}_2(s, y) \equiv 0$, entonces $\tilde{\mathcal{F}}$ es dicrítica y la foliación \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 : \{x = 0\}$, $B_2 : \{y = 0\}$ y $S_c : \{y^2 c - x = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ (ver ejemplo 1.4.8), cuyas transformadas estrictas de B_1 y S_c por π_1 son las separatrices $\tilde{B}_1 : \{s = 0\}$ y $\tilde{S}_c : \{cy - s = 0\}$ en U_1 y la transformada estricta de B_2 por π_1 es la separatriz $\tilde{B}_2 : \{t = 0\}$ en U_0 . Además, las soluciones de $\tilde{w}_2(s, y) = 0$ pasan por $p_2 = (0, 0) \in D$, (ver figura 1.6).

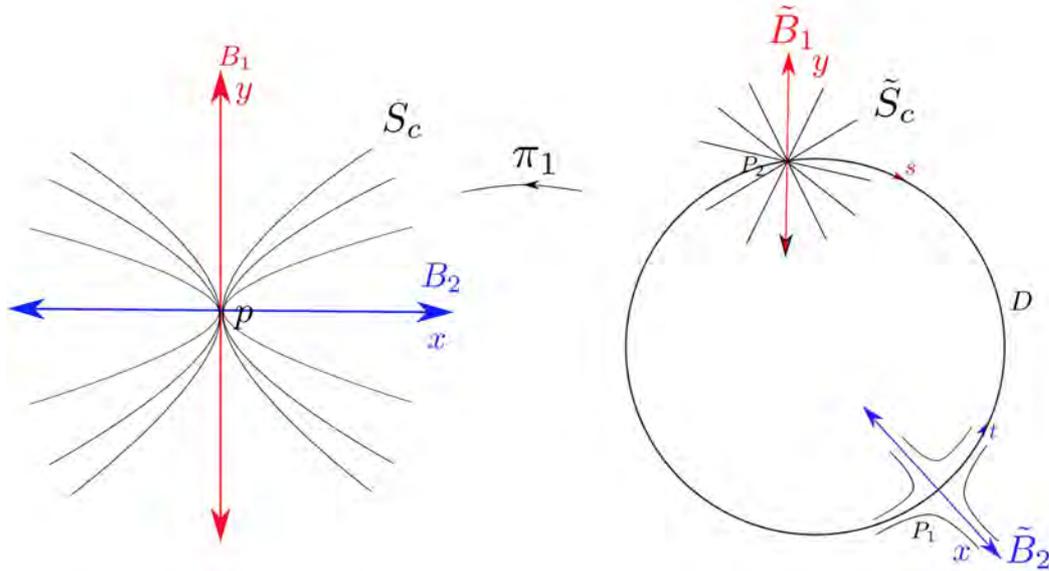


Figura 1.6: Foliación dicrítica: $w = -ydx + 2xdy$

Realizando una explosión π_2 en $p_2 = (0, 0)$. Como el cono tangente de \tilde{w}_2 es $\tilde{C}_2(s, y) \equiv 0$, entonces π_2 es una explosión dicrítica de $\tilde{\mathcal{F}}$, con divisor $\pi_2^{-1}(\mathbf{0}) = \tilde{D}$. En el abierto $V_0 = \{[s : m]/s \neq 0\}$ de coordenadas (s, m) , con $m = \frac{y}{s}$ tenemos

$$\pi_2^* w(s, m) = \tilde{w}_2(s, sm) = -smds + s(sdm + mds),$$

y por lo tanto, $\hat{w}_1(s, m) = \frac{\pi_2^* w(s, m)}{s^2} = dm$ define una foliación holomorfa $\hat{\mathcal{F}}$ en V_0 , la cual es regular y transversal a $\tilde{D} = \{s = 0\}$.

Análogamente, en el abierto $V_1 = \{[n : y] : y \neq 0\}$ de coordenadas (n, y) , con

$n = \frac{s}{y}$ se tiene:

$$\pi_2^* w(n, y) = \tilde{w}_2(ny, y) = -y(ndy + ydn) + nydy,$$

y por lo tanto, $\hat{w}_2(n, y) = \frac{\pi_2^* w(n, y)}{y^2} = -dn$ define una foliación holomorfa $\widehat{\mathcal{F}}$ sobre V_1 , la cual es regular y transversal a $\bar{D} = \{y = 0\}$.

Notemos que la componente \bar{D} es dicrítica con $Val(\bar{D}) = 1$, además la transformada estricta de la separatriz \tilde{B}_1 por π_2 es $\widehat{B}_1 = \{n = 0\}$ en V_1 (ver figura 1.7). Luego, $\mathcal{B}_0 = S_1 \cup B_2$. Esto implica que, una ecuación equilibrada de separatrices es $\widehat{F} = (y^2 - x) \cdot y = 0$, cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = S_1 + B_2$.

Por lo tanto, \mathcal{F} es una foliación no reducida dicrítica de tipo curva generalizada.

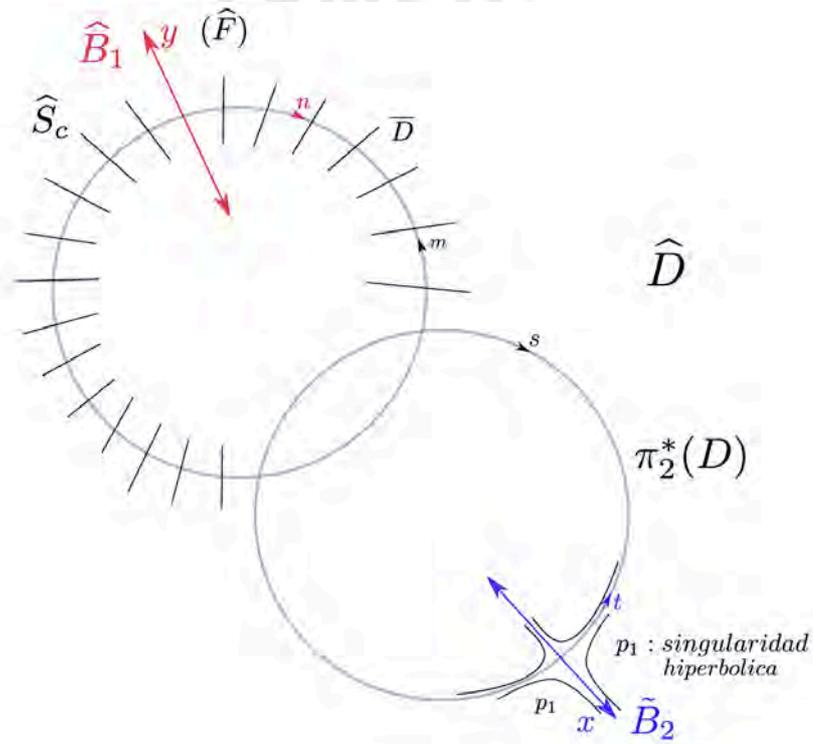


Figura 1.7: Foliación dicrítica: $\tilde{w}_2 = -yds + sdy$

Ejemplo 1.5.15. Sea \mathcal{F} la foliación de Suzuki's inducida por la 1-forma

$$w = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad no reducida de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2$, puesto que la matriz jacobiana en \mathbf{p} asociada al campo $\mathcal{X} =$

$(-2xy^2 - xy + x^2, -y^3 - y^2 + xy)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con valor propio $\lambda = 0$ de multiplicidad 2. Realizando una explosión π_1 en $\mathbf{p} = (0, 0)$ y como el cono tangente de w es $C_3(x, y) \equiv 0$, π_1 es una explosión dicrítica de \mathcal{F} .

En el abierto $U_0 = \{[x : t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) con $t = \frac{y}{x}$, se tiene

$$\pi_1^*w(x, t) = w(x, xt) = (x^3t^3 + x^2t^2 - x^2t)dx - (2x^3t^2 + x^2t - x^2)(xdt + tdx),$$

y por lo tanto $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi_1^*w(x, t)}{x^3} = -t^3dx - (2xt^2 + t - 1)dt$ define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^*\mathcal{F}$ en U_0 , la cual es regular y transversal al divisor $D = \{x = 0\}$, a excepción de la hoja $x = \frac{\ln(t) - t + 1}{t^2}$ que pasa por $q = (0, 1)$ la cual es tangente al divisor D . (ver figura 1.8).

En el abierto $U_1 = \{[s : y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) con $s = \frac{x}{y}$ se tiene

$$\pi_1^*w(s, y) = w(sy, y) = (y^3 + y^2 - sy^2)(sdy + yds) - (2sy^3 + sy^2 - s^2y^2)dy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi_1^*w(s, y)}{y^3} = (y + 1 - s)ds - sdy$ define una foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^*\mathcal{F}$ en U_1 , la cual es regular y transversal al divisor $D = \{y = 0\}$, a excepción de la hoja $y = -1 - s \ln(s) + cs$ que pasa por $q = (1, 0)$ la cual es tangente al divisor D . (ver figura 1.8). Además, tiene a $p_1 = (0, -1)$ como única singularidad no reducida. Como el cono tangente $C_3(x, y) \equiv 0$, entonces \mathcal{F} es dicrítica y la foliación \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 : \{x = 0\}$, $B_2 : \{y = 0\}$ y $S_c : \{y^2 + y - x \ln(\frac{cy}{x}) = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ (ver ejemplo 1.4.10), cuyas transformadas estrictas de B_1 y S_c por π_1 son las separatrices $\tilde{B}_1 : \{s = 0\}$ y $\tilde{S}_c : \{y + 1 - s \ln(\frac{c}{s}) = 0\}$ en U_1 y la transformada estricta de B_2 por π_1 es la separatriz $\tilde{B}_2 : \{t = 0\}$ en U_0 .

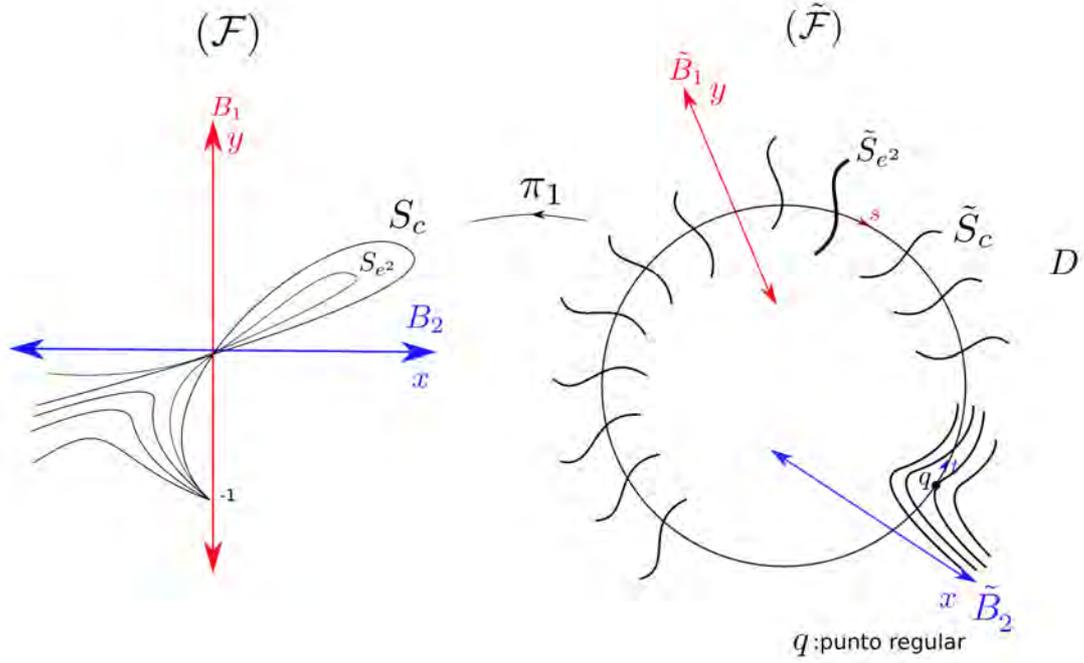


Figura 1.8: Foliación dicrítica: $w = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy$

Realizando una explosión π_2 en $q = (0, 1)$. Como el cono tangente $\tilde{C}_2(x, t) \neq 0$, entonces π_2 es una explosión no-dicrítica de $\tilde{\mathcal{F}}$, con divisor $\pi_2^{-1}(\mathbf{0}) = \bar{D}$.

En el abierto $V_0 = \{[x : m]/x \neq 0\}$, de coordenadas (x, m) , con $m = \frac{t}{x}$ se tiene

$$\pi_2^* \tilde{w}_1(x, m) = \tilde{w}_1(x, xm) = -x^3 m^3 dx - (2x^3 m^2 + xm - 1)(x dm + m dx),$$

y por lo tanto $\hat{w}_1(x, m) = \pi_2^* \tilde{w}_1(x, m) = (-3x^3 m^3 - xm^2 + m)dx + (x - x^2 m - 2x^4 m^2)dm$ define una foliación holomorfa $\hat{\mathcal{F}} = \pi_2^* \tilde{\mathcal{F}}$ sobre V_0 , la cual tiene a $q_1 = (0, 0)$ como única singularidad reducida de tipo hiperbólica y no es transversal a $\bar{D} = \{x = 0\}$, (ver figura 1.9).

Analogamente, en el abierto $V_1 = \{[n : t]/t \neq 0\}$ de coordenadas (n, t) , con $n = \frac{x}{t}$ se tiene

$$\pi_2^* \tilde{w}_1(n, t) = \tilde{w}_1(nt, t) = -t^3 (ndt + tdn) - (2nt^3 + t - 1)dt,$$

y por lo tanto, $\hat{w}_2(n, t) = \pi_2^* \tilde{w}_1(n, t) = -t^4 dn + (1 - t - 3t^3 n)dt$ define una foliación $\hat{\mathcal{F}} = \pi_2^* \tilde{\mathcal{F}}$ sobre V_1 , la cual es regular y transversal al divisor $\bar{D} = \{n = 0\}$.

Note que la componente \bar{D} es no-dicrítica, pues tiene un número finito de singularidades simples y por cada singularidad no esquina lleva una separatriz transversal en \bar{D} , cuya proyección por $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ es una curva en $Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, (ver figura 1.9). Además, note que la transformada estricta de la separatriz $\tilde{B}_2 : \{t = 0\}$ por π_2 es la separatriz $\hat{B}_2 = \{m = 0\}$. Luego, $\mathcal{B} = S_{e^2} \cup B_2$. Esto implica que, una ecuación equilibrada de separatrices es $\hat{F} = y(y^2 + y - x \ln(\frac{e^2 y}{x})) = 0$, cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = S_{e^2} + B_2$.

Por lo tanto, \mathcal{F} es una foliación no reducida dicrítica de tipo curva generalizada.

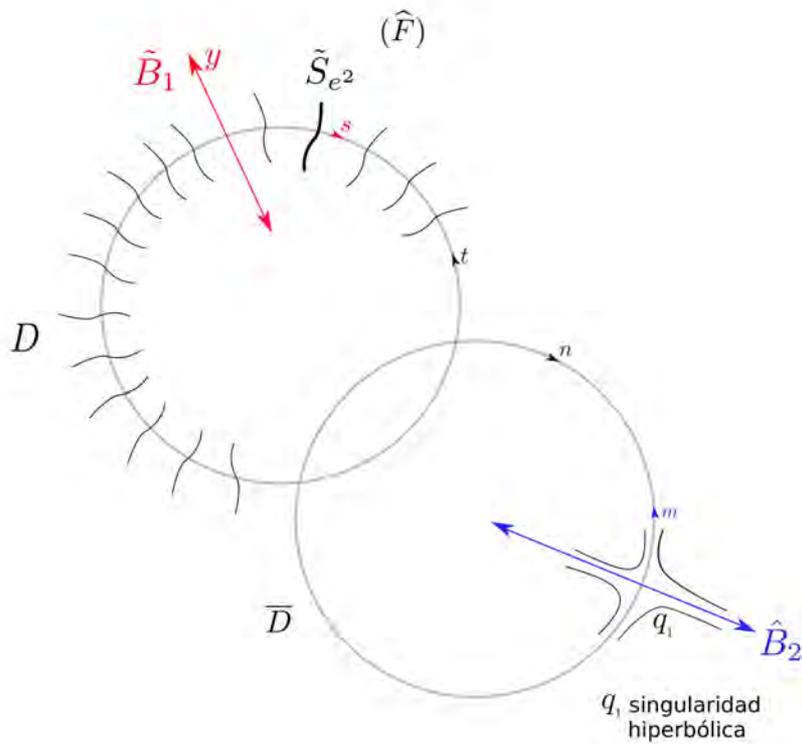


Figura 1.9: Foliación regular: $\tilde{w}_1(x, t) = -t^3 dx - (2xt^2 + t - 1)dt$

Ejemplo 1.5.16. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} , con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2$, pues la matriz jacobiana en \mathbf{p} asociada al campo $\mathcal{X} = (-2xy, -2y^2 -$

x^3) tangente a w está dada por

$$J_w(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con valor propio $\lambda = 0$ de multiplicidad 2. Realizando una explosión π_1 en $\mathbf{p} = (0, 0)$ y como el cono tangente $C_3(x, y) \equiv 0$, entonces π_1 es una explosión dicrítica de \mathcal{F} .

En el abierto $U_0 = \{[x : t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) , con $t = \frac{y}{x}$ se tiene

$$\pi_1^* w(x, t) = w(x, xt) = (2x^2 t^2 + x^3) dx - 2x^2 t (tdx + xdt),$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi_1^* w(x, t)}{x^3} = dx - 2tdt$ define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_0 , la cual es regular y transversal a $D = \{x = 0\}$, a excepción de la hoja $x = t^2$ que pasa por $q = (0, 0)$ la cual es tangente al divisor D , (ver figura 1.10).

De forma analoga, en el abierto $U_1 = \{[s : y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) , con $s = \frac{x}{y}$ se tiene:

$$\pi_1^* w(s, y) = w(s, y) = (2y^2 + s^3 y^3)(sdy + yds) - 2sy^2 dy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi_1^* w(s, y)}{y^3} = (2 + s^3 y) ds + s^4 dy$, define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_1 , la cual es regular y transversal a $D = \{y = 0\}$.

Notemos que \mathcal{F} es dicrítica y la foliación \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 : \{x = 0\}$ y $S_c = \{y^2 = x^3 + x^2 c; c \in \mathbb{C}\}$ (ver ejemplo 1.4.11), cuyas transformadas estrictas de B_1 y S_c por π_1 es la separatriz $\tilde{B}_1 : \{s = 0\}$ en U_1 y $\tilde{S}_c : \{t^2 - c = x\}$ en U_0 , (ver figura 1.8).

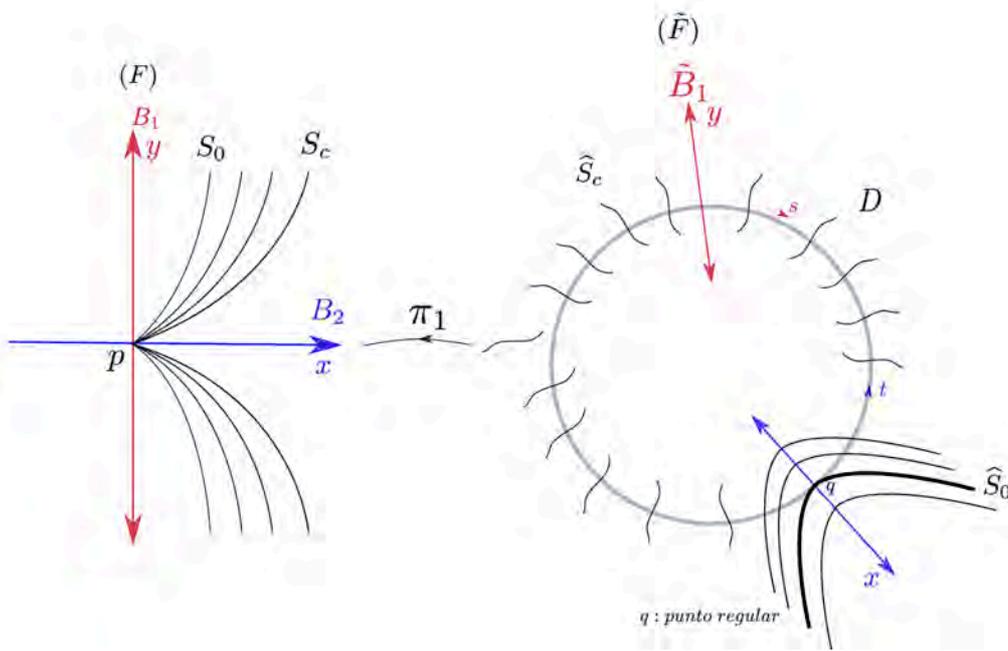


Figura 1.10: Foliación dicrítica: $w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy$

Realizando una explosión π_2 en $q = (0, 0)$ y como el cono tangente $\tilde{C}_2(x, t) \neq 0$ entonces π_2 es una explosión no-dicrítica de $\tilde{\mathcal{F}}$, con divisor $\pi_2^{-1}(\mathbf{0}) = \bar{D}$.

En el abierto $V_0 = \{[x : m]/x \neq 0\}$, de coordenadas (x, m) , con $m = \frac{t}{x}$ se tiene

$$\pi_2^* \tilde{w}_1(x, m) = \tilde{w}_1(x, xm) = dx - 2xm(xdm + mdx),$$

y por lo tanto $\hat{w}_1(x, m) = \pi_2^* \tilde{w}_1(x, m) = (1 - 2xm^2)dx - 2x^2mdm$ define una foliación $\hat{\mathcal{F}} = \pi_2^* \tilde{\mathcal{F}}$ sobre V_0 , la cual es regular y no es transversal a $\bar{D} = \{x = 0\}$. Análogamente, en el abierto $V_1 = \{[n : t]/t \neq 0\}$ de coordenadas (n, t) , con $n = \frac{x}{t}$ se tiene

$$\pi_2^* \tilde{w}_1(n, t) = \tilde{w}_1(nt, t) = ndt + tdn - 2tdt,$$

y por lo tanto, $\hat{w}_2(n, t) = \pi_2^* \tilde{w}_1(n, t) = (n - 2t)dt + tdn$ define una foliación holomorfa $\hat{\mathcal{F}} = \pi_2^* \tilde{\mathcal{F}}$ sobre V_1 , la cual tiene a $p_2 = (0, 0)$ como única singularidad reducida de $\hat{\mathcal{F}}$ de tipo hiperbólica que se encuentran en una esquina y no es transversal a $\bar{D} = \{n = 0\}$ (ver figura 1.11).

También note que la transformada estricta de la curva $\tilde{S}_0 : \{t^2 = x\}$ por π_2 es la separatriz $\hat{S}_0 = \{(n, t)/f(n, t) = t - n = 0\}$ en V_1 y $\nu_0(\hat{\mathcal{F}}) = 1$. (ver figura 1.11)

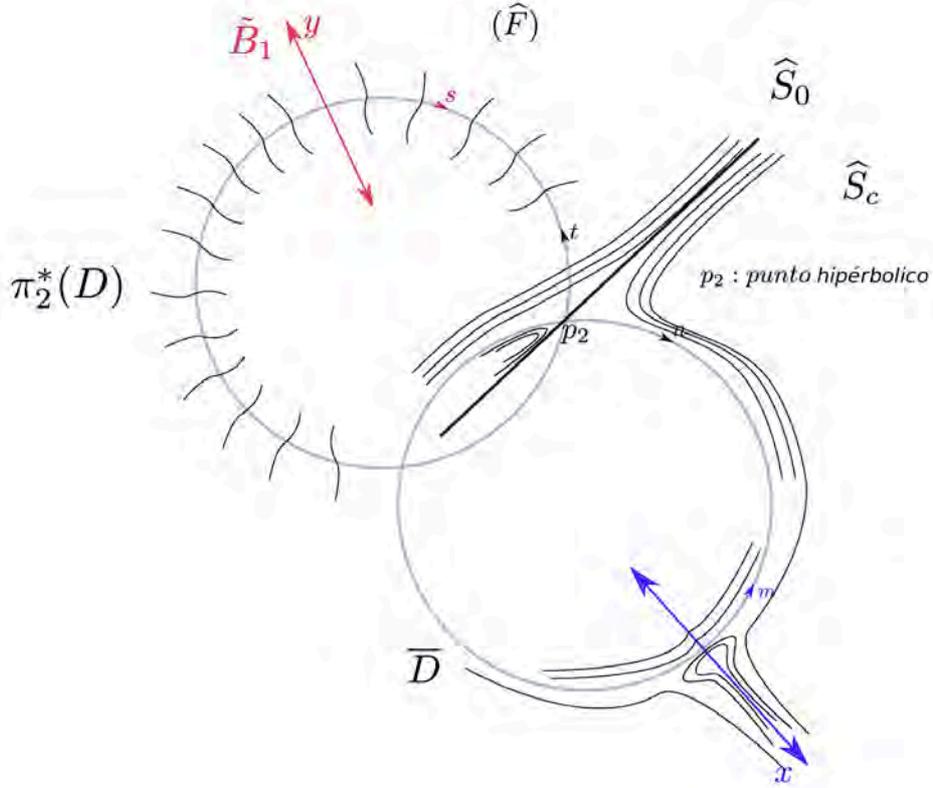


Figura 1.11: Foliación regular: $\tilde{w}_1(x, t) = dx - 2tdt$

Realizando una explosión π_3 en $p_2 = (0, 0)$ y como $\hat{C}_2(n, t) \not\equiv 0$ entonces π_3 es una explosión no-dicrítica de $\tilde{\mathcal{F}}$, con divisor $\pi_3^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{D}$.

En el abierto $B_0 = \{[n : u]/n \neq 0\}$, de coordenadas (n, u) , con $u = \frac{t}{n}$ se tiene

$$\pi_3^* \hat{w}_2(n, u) = \hat{w}_2(n, nu) = nudn + (n - 2nu)(ndu + udn),$$

y por lo tanto, $\bar{w}_2(n, u) = \frac{\pi_3^* \hat{w}_2(n, u)}{n} = (2u - 2u^2)dn + (n - 2nu)du$ define una foliación holomorfa $\overline{\mathcal{F}} = \pi_3^* \hat{\mathcal{F}}$ sobre B_0 , la cual tiene a $p_3 = (0, 0)$ como singularidad reducida de $\overline{\mathcal{F}}$ de tipo hiperbólica que se encuentra en una esquina y a $p_4 = (0, 1)$ como singularidad de tipo hiperbólica de $\overline{\mathcal{F}}$. Además, las hojas de $\overline{\mathcal{F}}$ no son transversales a $\mathbf{D} = \{(n, u)/n = 0\}$.

En el abierto $B_1 = \{[v : t]/t \neq 0\}$, de coordenadas (v, t) , con $v = \frac{n}{t}$ se tiene

$$\pi_3^* \hat{w}_2(v, t) = \hat{w}_2(vt, t) = t(vdt + tdv) + (vt - 2t)dt,$$

y por lo tanto, $\bar{w}_2(v, t) = \frac{\pi_3^* \hat{w}_2(v, t)}{t} = tdv + (2v - 2)dt$, define una foliación holomorfa $\overline{\mathcal{F}} = \pi_3^* \hat{\mathcal{F}}$ sobre B_1 , la cual tiene en $(1, 0)$ una singularidad reducida

de $\overline{\mathcal{F}}$ de tipo hiperbólica y no es transversal a $\mathbf{D} = \{(v, t)/t = 0\}$.
 Note que la componente \mathbf{D} es no-dicrítica, pues tiene un número finito de singularidades simples y por cada singularidad no esquina lleva una separatriz transversal en \mathbf{D} , cuya proyección por $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$ es una curva en $Sep_p(\mathcal{F})$, (ver figura 1.12). Además, note que la transformada estricta de la separatriz $\widehat{S}_0 = \{(n, t)/f(n, t) = t - n = 0\}$ por π_3 es la separatriz $\overline{S}_0 = \{(v, t)/f(v, t) = v - 1 = 0\}$ en B_1 . Luego, $\mathcal{B}_0 = S_0 \cup B_1$. Esto implica que, una ecuación equilibrada de separatrices es $\widehat{F} = x(y^2 - x^3) = 0$, cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = S_0 + B_1$. Por lo tanto, \mathcal{F} es una foliación no reducida dicrítica de tipo curva generalizada.

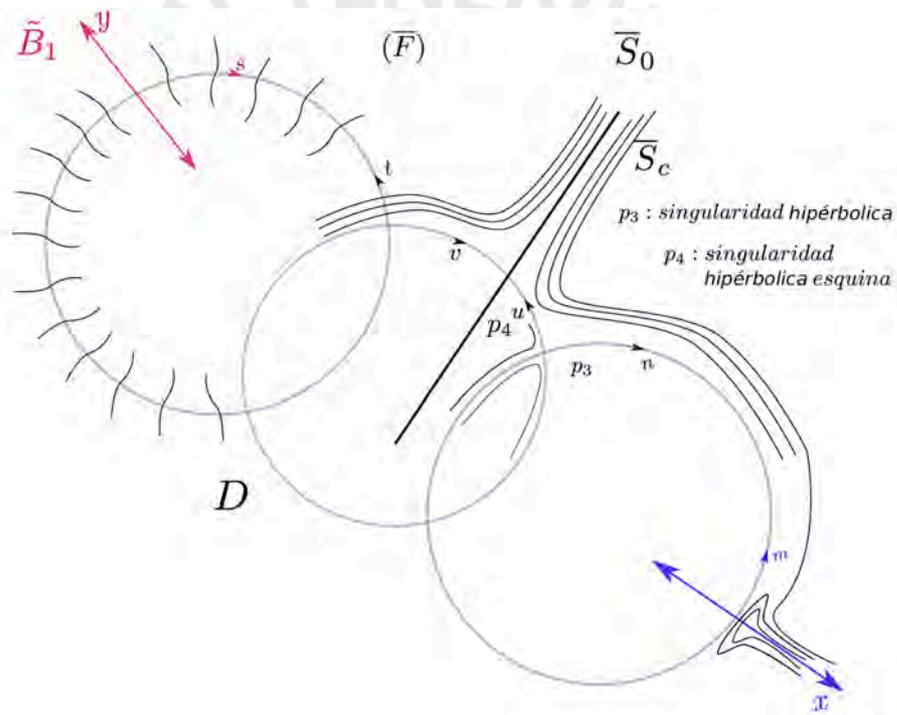


Figura 1.12: Foliación no-dicrítica: $\widehat{w}_2(n, t) = (n - 2t)dt + tdn$

Capítulo 2

Índices de foliaciones holomorfas

En este capítulo desarrollaremos la teoría de índices sobre foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ y algunas relaciones que existen entre ellos; con la finalidad de presentar un criterio que permita caracterizar los gérmenes de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ de segundo tipo. Además, daremos algunas propiedades principales de estos índices asociado a cierto tipos de foliaciones singulares en el plano complejo, siguiendo el enfoque dado por Marco Brunella, Arturo Fernández & Rogério Mol ([BRU97], [FPM17]), Yohann Genzmer & Rogério Mol y Liliana Puchuri, ([GM18], [PM05]).

Algunos de estos índices se calculan con respecto a curvas analíticas invariantes por la foliación; describiremos cómo es que estos se pueden extender para curvas formales invariantes. Un resultado interesante que enunciamos y demostramos en este capítulo, es que el índice de exceso polar permite caracterizar las foliaciones de tipo curva generalizada.

2.1 Índice de Baum-Bott

En esta sección, definiremos el índice de Baum-Bott para foliaciones holomorfas en torno de sus puntos singulares, ver [BRU97]. El resultado principal de esta sección será el teorema 2.1.7, el cual es objeto principal a la hora de demostrar el teorema 3.0.4 en el capítulo 3.

Definición 2.1.1. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular de dimensión 1 sobre

una superficie regular compleja M , \mathcal{F} es inducida localmente en torno de U $\mathbf{p} \in M$, por un campo vectorial holomorfo $\mathcal{X} = (P(x, y), Q(x, y))$ o por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, definimos el índice de *Baum-Bott* en $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ como el residuo

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \text{Res}_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{(tr J_w(\mathbf{p}))^2}{P \cdot Q} dx \wedge dy \right\}, \quad (2.1)$$

donde $tr J_w(\mathbf{p})$ es la traza de $J_w(\mathbf{p})$, ver [BRU97].

Notemos que si $\mathbf{p} \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$. Además, si \mathbf{p} es una singularidad reducida de \mathcal{F} , entonces se define el índice de *Baum-Bott* como

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \frac{(tr J_w(\mathbf{p}))^2}{\det J_w(\mathbf{p})} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2, & \text{si } \mathbf{p} \text{ es hipérbolico} \\ 2k + 2 + \lambda, & \text{si } \mathbf{p} \text{ es una silla nodo,} \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $tr J_w(\mathbf{p})$, $\det J_w(\mathbf{p})$ son la traza y el determinante de $J_w(\mathbf{p})$, respectivamente; λ_1, λ_2 son los autovalores de $J_w(\mathbf{p})$ y $k + 1$ es el índice de tangencia de \mathcal{F} con respecto a la separatriz débil, ver [BRU97] y [FPM17].

Ejemplo 2.1.2. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1-forma

$$w = ydx - xdy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \{\text{ord}(-x), \text{ord}(-y)\} = 1$, puesto que su matriz jacobiana en \mathbf{p} asociada al campo $\mathcal{X} = (-x, -y)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

con valor propio $\lambda = -1$ de multiplicidad 2. Además, observe que $tr J_w(\mathbf{p}) = -2$ y $P(x, y) = -x$, $Q(x, y) = -y$, sustituyendo en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \text{Res}_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{(tr J_w(\mathbf{p}))^2}{P \cdot Q} dx \wedge dy \right\}$ se tiene que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 4$.

Ejemplo 2.1.3. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1-forma

$$w = -ydx + 2xdy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \{\text{ord}(2x), \text{ord}(y)\} = 1$, puesto que su matriz jacobiana en \mathbf{p} asociada al campo $\mathcal{X} = (2x, y)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Además, note que $\text{tr} J_w(\mathbf{p}) = 3$ y $P(x, y) = 2x$, $Q(x, y) = y$, reemplazando en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \text{Res}_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{(\text{tr} J_w(\mathbf{p}))^2}{P \cdot Q} dx \wedge dy \right\}$ se tiene que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \frac{9}{2}$.

Ejemplo 2.1.4. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por

$$w = (x - y)dx + x^2 dy.$$

Observe que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad reducida de tipo silla-nodo de \mathcal{F} , con multiplicidad $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \{\text{ord}(x^2), \text{ord}(y - x)\} = 1$, pues la matriz jacobiana en \mathbf{p} asociado al campo $\mathcal{X} = (x^2, y - x)$ tangente a w , está dada por

$$J_w(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Note que $k = 1$, en efecto, por el ejemplo (1.4.15) se tiene que $B_2 = \left\{ y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j = 0 \right\}$, es la separatriz débil pasando por \mathbf{p} y el índice de tangencia de \mathcal{F} en \mathbf{p} con respecto a B_2 es $\text{Ind}_{\mathbf{p}}^w(\mathcal{F}) = 2$ y como $\text{Ind}_{\mathbf{p}}^w(\mathcal{F}) = k + 1$, esto implica que $k = 1$. Además, $\lambda = 0$ luego reemplazando en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2k + 2 + \lambda$ se tiene que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 4$.

Sea \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset \mathbb{C}^2$, vecindad de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$, definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y \mathbf{p} una singularidad aislada de \mathcal{F} . Diferenciando w tenemos

$$dw = (Q_y(x, y) + P_x(x, y))dx \wedge dy.$$

Note que existe una 1-forma holomorfa β sobre $U - \{\mathbf{p}\}$, tal que $dw = \beta \wedge w$, donde β es como

$$\beta = (Q_y + P_x) \frac{(\bar{P}dx + \bar{Q}dy)}{|P|^2 + |Q|^2}, \quad (2.3)$$

ver [PM05]. Los detalles de esta factorización lo veremos en la demostración del lema (2.4.1).

Lema 2.1.5. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa sobre una superficie compleja M , inducida por una 1-forma holomorfa w . Sea $\mathbf{p} \in M$ una singularidad aislada de \mathcal{F} . Si w en torno de \mathbf{p} está dado por $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, donde $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$, entonces

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{S_r^3} \beta \wedge d\beta,$$

donde β es como en (2.3), S_r^3 es la 3-esfera con centro p y radio $0 < r < \rho$, donde $0 < \rho < 1$.

Demostración. Ver [PM05]. □

El siguiente resultado nos dice que si M es una superficie compacta y \mathcal{F} es una foliación sobre $U \subset M$, vecindad de $\mathbf{p} \in M$, definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, entonces la suma de índices de *Baum Bott* en puntos singulares es igual $c_1^2(N_{\mathcal{F}})$, donde $N_{\mathcal{F}}$ es el fibrado normal de \mathcal{F} (que se puede definir incluso en presencia de singularidades).

Teorema 2.1.6. *Sean M una superficie compacta y \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset M$, vecindad de $\mathbf{p} \in M$, definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, donde $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Entonces,*

$$\sum_{\mathbf{p} \in \text{sing}(\mathcal{F})} BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = c_1^2(N_{\mathcal{F}}).$$

Demostración. Ver [PM05]. □

En el teorema (2.1.6) se tiene que la suma de índices de *Baum-Bott* en los puntos singulares es $c_1^2(N_{\mathcal{F}})$ sobre una variedad compacta. Existe una generalización de este índice en el caso que M no es compacta. Para ello consideremos un dominio relativamente compacto Y tal que δY es regular con $\delta Y \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$, donde δY es la frontera de Y . Supongamos que $N_{\mathcal{F}}$ es holomórficamente trivial en una vecindad de δY . Esto implica que existe una 1-forma holomorfa β definida en una vecindad de δY , tal que $dw = \beta \wedge d\beta$.

Así, definimos:

$$BB(\mathcal{F}, \delta Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta Y} \beta \wedge d\beta.$$

Con las notaciones dadas anteriormente tenemos el siguiente resultado, análogo al teorema 2.1.6, ver [BRU97] y [PM05].

Teorema 2.1.7. *Sea M una superficie compleja y \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset M$, vecindad de $\mathbf{p} \in M$, definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, donde $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Entonces,*

$$BB(\mathcal{F}, \delta Y) = \sum_{\mathbf{p} \in \text{sing}(\mathcal{F}) \cap Y} BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - c_1^2(N_{\mathcal{F}}).$$

Demostración. Ver [PM05]. □

Observación 2.1.8. Si $M = \mathbb{C}^2$ y suponga que \mathbf{p} es una singularidad de \mathcal{F} . Realizando una explosión σ en \mathbf{p} , $\sigma : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, si q_1, q_2, \dots, q_l son puntos D -singulares de $\tilde{\mathcal{F}}$, entonces el teorema 2.1.7 viene dado por

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^l BB_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + c_1^2(N_{\tilde{\mathcal{F}}})$$

Esto significa que

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^l BB_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + \nu_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) & \text{si } \sigma \text{ es no-dicrítica,} \\ \sum_{j=1}^l BB_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)^2 & \text{si } \sigma \text{ es dicrítica.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ejemplo 2.1.9. Sea \mathcal{F} la foliación del ejemplo 1.5.12, tras una explosión en $(0, 0)$ se tiene únicamente puntos regulares. En el abierto $U_0 = \{[x : t] / x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) , con $t = \frac{y}{x}$, tenemos

$$\pi^*w(x, t) = \pi_0^*w(x, t) = w(x, xt) = xtdx - x(xdt + tdx),$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi^*w(x, t)}{x^2} = -dt$ define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_0^*\mathcal{F}$ en U_0 , la cual es regular y transversal al divisor excepcional $\pi_0^{-1}(\mathbf{0}) = \{x = 0\}$.

Analogamente, en el abierto $U_1 = \{[s : y] / y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) , con $s = \frac{x}{y}$ se tiene

$$\pi^*w(s, y) = \pi_1^*w(x, t) = w(sy, y) = y(sdy + yds) - sydy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi^*w(s, y)}{y^2} = ds$ define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^*\mathcal{F}$ en U_1 , la cual es regular y transversal al divisor excepcional $\pi_1^{-1}(\mathbf{0}) = \{y = 0\}$.

Por último, como $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 1$ y la explosión es dicrítica en $\mathbf{p} = (0, 0)$, entonces reemplazando en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)^2$ se tiene que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 4$

Ejemplo 2.1.10. Sea \mathcal{F} la foliación del ejemplo 1.5.13, tras realizar una explosión en $\mathbf{p} = (0, 0)$ obtenemos dos singularidades. En el abierto $U_1 = \{[s : y] / y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) , con $s = \frac{x}{y}$, tenemos $\tilde{w}_2(s, y) = (y + sy + s^2y)ds + (s + 2s^2 + s^3)dy$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^*\mathcal{F}$ en U_1 , la cual tiene a $p_2 = (-1, 0)$ como singularidad reducida de tipo silla nodo tangente, pues la matriz jacobiana en p_2 asociado al campo tangente a \tilde{w}_2 , $\tilde{\mathcal{X}}(s, y) = (s + 2s^2 + s^3, -y - sy - s^2y)$, está dada por

$$J_{\tilde{w}_2}(p_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y el índice de tangencia de $\tilde{\mathcal{F}}$ con respecto a su separatriz débil es $Ind_{p_2}^w(\tilde{\mathcal{F}}) = 2$ (índice débil), *en efecto*, haciendo $u = s + 1$ y $v = y$, entonces $\tilde{w}_2(u, v) = v(1 - u + u^2)du + (u^3 - u^2)dv$. Luego, calculando $Ind_{p_2}^w(\tilde{\mathcal{F}}) = ord_{p_2} P(s, 0) = ord_{p_2} s(s + 1)^2 = ord_{(0,0)}(u^3 - u^2) = 2$ y como $Ind_{p_2}^w(\tilde{\mathcal{F}}) = k + 1 = 2$, entonces $k = 1$. Además, $\lambda = 0$. Por lo tanto, reemplazando en $BB_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}) = 2k + 2 + \lambda$ se tiene que $BB_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}) = 4$.

También, $\tilde{\mathcal{F}}$ en U_1 , tiene a $p_3 = (0, 0)$ como singularidad reducida de tipo hiperbólica, pues la matriz jacobiana en p_3 asociado al campo tangente a \tilde{w}_2 , $\tilde{\mathcal{X}}(s, y) = (s + 2s^2 + s^3, -y - sy - s^2y)$, está dada por

$$J_{\tilde{w}_2}(p_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto, reemplazando en $BB_{p_3}(\tilde{\mathcal{F}}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2$ se tiene que $BB_{p_3}(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$.

Finalmente, como $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2$ y la explosión es no-dicrítica en $\mathbf{p} = (0, 0)$, entonces reemplazando en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = BB_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}) + BB_{p_3}(\tilde{\mathcal{F}}) + \nu_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F})$, tenemos que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 8$.

Ejemplo 2.1.11. Sea \mathcal{F} la foliación del ejemplo 1.5.14, tras realizar una explosión en $\mathbf{p} = (0, 0)$, obtenemos dos singularidades. En el abierto $U_0 = \{[x : t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) con $t = \frac{y}{x}$, se tiene que $\tilde{w}_1(x, t) = tdx + 2xdt$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_0 , la cual tiene a $p_1 = (0, 0)$ como única singularidad reducida de tipo hiperbólica de $\tilde{\mathcal{F}}$, pues la matriz jacobiana en p_1 asociado al campo tangente a \tilde{w}_1 , $\tilde{\mathcal{X}}(x, t) = (2x, -t)$, está dada por

$$J_{\tilde{w}_1}(p_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Entonces, reemplazando en $BB_{p_1}(\tilde{\mathcal{F}}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2$, se tiene que $BB_{p_1}(\tilde{\mathcal{F}}) = -\frac{1}{2}$.

En el abierto $U_1 = \{[s : y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) con $s = \frac{x}{y}$ se tiene que $\tilde{w}_2(s, y) = -yds + sdy$ define una foliación holomorfa $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_1 , la cual tiene a $p_2 = (0, 0)$ como única singularidad no reducida de $\tilde{\mathcal{F}}$, pues la matriz

acobiana en p_2 asociado al campo tangente a \tilde{w}_2 , $\tilde{\mathcal{X}}(s, y) = (s, y)$, está dada por

$$J_{\tilde{w}_2}(p_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con valor propio $\lambda = 1$ de multiplicidad 2. Además, note que $\text{tr}(J_{\tilde{w}_2}(p_2))=2$ y $P(s, y) = s$, $Q(s, y) = y$. Por lo tanto, reemplazando en $BB_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}) = \text{Res}_{p_2} \left\{ \frac{(\text{tr} J_{\tilde{w}_2}(p_2))^2}{P \cdot Q} ds \wedge dy \right\}$ se tiene que $BB_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}) = 4$.

Finalmente, como $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 1$ y la explosión es no-dicrítica en $\mathbf{p} = (0, 0)$, entonces reemplazando en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = BB_{p_1}(\tilde{\mathcal{F}}) + BB_{p_2}(\tilde{\mathcal{F}}) + \nu_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F})$, se tiene que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \frac{9}{2}$.

Ejemplo 2.1.12. Sea \mathcal{F} la foliación del ejemplo 1.5.15, tras una explosión en $(0, 0)$ se tiene únicamente puntos regulares. En el abierto $U_0 = \{[x : t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) , con $t = \frac{y}{x}$, tenemos

$$\pi_1^* w(x, t) = w(x, xt) = (x^3 t^3 + x^2 t^2 - x^2 t) dx - (2x^3 t^2 + x^2 t - x^2)(x dt + t dx),$$

y por lo tanto $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi_1^* w(x, t)}{x^3} = -t^3 dx - (2xt^2 + t - 1) dt$ define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_0 , la cual es regular y transversal al divisor $D = \{x = 0\}$.

Analogamente, en el abierto $U_1 = \{[s : y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) , con $s = \frac{x}{y}$ se tiene

$$\pi_1^* w(s, y) = w(sy, y) = (y^3 + y^2 - sy^2)(s dy + y ds) - (2sy^3 + sy^2 - s^2 y^2) dy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi_1^* w(s, y)}{y^3} = (y + 1 - s) ds - s dy$ define una foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_1 , la cual es regular y transversal al divisor $D = \{y = 0\}$.

Por último, como $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2$ y la explosión es dicrítica en $\mathbf{p} = (0, 0)$, entonces reemplazando en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)^2$ se tiene que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 9$.

Ejemplo 2.1.13. Sea la foliación del ejemplo 1.5.16, tras realizar una explosión en $\mathbf{p} = (0, 0)$, obtenemos solo puntos regulares. En el abierto $U_0 = \{[x : t]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, t) , con $t = \frac{y}{x}$ se tiene

$$\pi_1^* w(x, t) = w(x, xt) = (2x^2 t^2 + x^3) dx - 2x^2 t(t dx + x dt),$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_1(x, t) = \frac{\pi_1^* w(x, t)}{x^3} = dx - 2t dt$ define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_0 , la cual es regular y transversal al divisor excepcional $\pi_1^{-1}(\mathbf{p}) = D = \{x = 0\}$.

De forma analoga, en el abierto $U_1 = \{[s : y]/y \neq 0\}$ de coordenadas (s, y) , con $s = \frac{x}{y}$ se tiene:

$$\pi_1^* w(s, y) = w(s, y) = (2y^2 + s^3 y^3)(sdy + yds) - 2sy^2 dy,$$

y por lo tanto, $\tilde{w}_2(s, y) = \frac{\pi_1^* w(s, y)}{y^3} = (2 + s^3 y)ds + s^4 dy$, define $\tilde{\mathcal{F}} = \pi_1^* \mathcal{F}$ en U_1 , la cual es regular y transversal al divisor excepcional $\pi_1^{-1}(\mathbf{p}) = D = \{y = 0\}$. Por último, como $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2$ y la explosión es dicrítica en $\mathbf{p} = (0, 0)$, entonces, reemplazando en $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)^2$, se tiene que $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 9$.

2.2 Índice de Camacho-Sad

En esta sección, definimos el índice de *Camacho-Sad* para curvas analíticas invariantes, [BRU97], [PM05] y [FPM17] y se extenderán para curvas invariantes formales, [FPM17]. El objetivo de esta sección es enunciar y demostrar el teorema del índice de *Camacho-Sad*, teorema 2.2.20, [PM05], [KS97].

Empezamos enunciando el siguiente resultado de descomposición dado a continuación.

Lema 2.2.1. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular inducida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y \mathcal{C} una curva analítica invariante definida por los ceros de una función reducida $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, entonces existen gérmenes de funciones g y $k \in \mathbb{C}\{x, y\}$, no idénticamente nulos sobre \mathcal{C} , con k y f primos relativos y un germen de 1-forma holomorfa η tal que*

$$gw = kdf + f.\eta, \quad (2.5)$$

Demostración. Como \mathcal{C} es una curva analítica invariante por \mathcal{F} , entonces se cumple que

$$w \wedge df = f.gdx \wedge dy, \quad (2.6)$$

para alguna función $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Por hipótesis, se tiene que la foliación \mathcal{F} está inducida por la 1-forma $w = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, donde $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ son primos relativos. Luego, de (2.6) se tiene

$$(-Qdx + Pdy) \wedge (f_x dx + f_y dy) = f.gdx \wedge dy,$$

$$\Rightarrow -Qf_y - Pf_x = f.g. \quad (2.7)$$

Supongamos que $f_y \neq 0$, entonces multiplicando f_y por la 1-forma w , y luego usando (2.7) se consigue

$$f_y w = Pdf + f.gdx$$

Haciendo $g = f_y$, $k = P$ y $\eta = gdx$, obtenemos la descomposición $gw = kdf + f.\eta$, como en (2.5).

Resta probar que f y k son primos relativos. *En efecto*, supongamos que f y k no son primos relativos, entonces tienen un factor en común, esto es, existe una función holomorfa no constante u de grado estrictamente menor que el de f tal que $u|f$, es decir $f = u.k$. Luego, como $f = 0$ en \mathcal{C} , esto implica que $k = 0$ en \mathcal{C} , lo cual es una contradicción. Así, f y k son primos relativos. Con esto se consigue la prueba. \square

Definición 2.2.2. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, inducida por $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Suponga que \mathbf{p} es una singularidad de \mathcal{F} y \mathcal{C} una curva analítica invariante para \mathcal{F} en \mathbf{p} , definida por la función reducida $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Se define el índice de *Camacho-Sad* con respecto a la curva \mathcal{C} en \mathbf{p} , como

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}} \frac{\eta}{k}, \quad (2.8)$$

donde η y k son como en la ecuación (2.5), la integral está sobre $\partial \mathcal{C} = \mathcal{C} \cap S_\epsilon^3$ y $S_\epsilon^3 = \partial B^4$, donde B^4 es una bola pequeña centrada en $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$.

Observación 2.2.3. Note que la integral en (2.8) está bien definida puesto que f y k son primos relativos.

Teorema 2.2.4. (*Teorema de Camacho-Sad*). Si $\mathcal{X} = (P(x, y), Q(x, y))$ es un campo vectorial holomorfo en un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$, donde U es una vecindad de \mathbf{p} y \mathbf{p} una singularidad de \mathcal{X} , entonces siempre existe una separatriz de \mathcal{X} por \mathbf{p} .

Demostración. Ver [CS82]. \square

Sea \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset \mathbb{C}^2$, vecindad de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Si $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, entonces por teorema 1.4.5 existe $S = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$ es separatriz de w pasando por \mathbf{p} . Sea B una rama de S (ver definición 1.4.7) a continuación definimos el índice de *Camacho-Sad* de B en \mathbf{p} .

Definición 2.2.5. El índice de *Camacho-Sad* de la foliación \mathcal{F} con respecto a la rama local B de S en \mathbf{p} , se define como el residuo

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\eta}{k}, \quad (2.9)$$

donde η y k son como en la ecuación (2.5) y γ es la imagen mediante φ de la circunferencia $re^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 < r < \epsilon$, donde $0 < \epsilon < 1$, y $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow B$ es una parametrización de *Puiseux* de B .

Observación 2.2.6. El *Lema 2.2.1*, también se verifica para la rama local B de S .

Lema 2.2.7. Sean $B_1 = \{f_1 = 0\}$, $B_2 = \{f_2 = 0\}$ son separatrices de \mathcal{F} en \mathbf{p} , sin componentes en común y $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}}$ es el número de intersección entre estas separatrices. Entonces

$$(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \cap S_{\epsilon}^3} \frac{df_1}{f_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_1 \cap S_{\epsilon}^3} \frac{df_2}{f_2}.$$

Demostración. Ver [PM05]. □

Proposición 2.2.8. Sean B_1, B_2 son separatrices de \mathcal{F} en \mathbf{p} , sin componentes en común y $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$. Entonces

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) + 2(B_1, B_2)_{\mathbf{p}}. \quad (2.10)$$

Donde, $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}}$ es el número de intersección entre estas separatrices con $\{f_1 = 0\}$ y $\{f_2 = 0\}$ ecuaciones reducidas de B_1 y B_2 , respectivamente.

Demostración. Por el lema 2.2.1, para la separatriz B_1 , tenemos que existen $g_1, k_1 \in \mathbb{C}\{x, y\}$, no idénticamente nulos sobre B_1 y un germen de 1- forma holomorfa η_1 , tal que

$$g_1 w = k_1 df_1 + f_1 \eta_1. \quad (2.11)$$

Análogamente, para B_2 tenemos que la 1- forma w se puede descomponer

$$g_2 w = k_2 df_2 + f_2 \eta_2, \quad (2.12)$$

siendo $g_2, k_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$, no idénticamente nulos sobre B_2 y η_2 un germen de 1- forma holomorfa.

Multiplicando a la ecuación (2.11) por f_2k_2 y a la ecuación (2.12) por f_1k_1 , tenemos

$$f_2k_2g_1w = f_2k_2k_1df_1 + f_2k_2f_1\eta_1, \quad (2.13)$$

$$f_1k_1g_2w = f_1k_1k_2df_2 + f_1k_1f_2\eta_2, \quad (2.14)$$

respectivamente. Ahora sumando la ecuación (2.13) con (2.14), se tiene

$$(f_1k_1g_2 + f_2k_2g_1)w = k_1k_2(f_1df_2 + f_2df_1) + f_1f_2(k_1\eta_2 + k_2\eta_1).$$

Haciendo, $g = f_1k_1g_2 + f_2k_2g_1$, $k = k_1k_2$, $f = f_1f_2$ y $\eta = k_1\eta_2 + k_2\eta_1$, tenemos

$$gw = kdf + f\eta.$$

Afirmación: $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$ es una curva invariante definida por $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, además f y k son primos relativos, donde $f = f_1f_2$ y $k = k_1k_2$.

En efecto, Para $f = f_1f_2$, diferenciando f se tiene $df = f_1df_2 + f_2df_1$. Luego,

$$\begin{aligned} w \wedge df &= w \wedge (f_1df_2 + f_2df_1) = f_1w \wedge df_2 + f_2w \wedge df_1 \\ &= f_1f_2\eta_2 + f_2f_1\eta_1 = f_1f_2(\eta_1 + \eta_2) = f\bar{\eta}. \end{aligned}$$

Resta probar que f y k son primos relativos. *En efecto,* supongamos que f y k no son primos relativos, entonces tienen un factor en común, esto es, existe una función holomorfa no constante u de grado estrictamente menor que el de f tal que $u|f$, es decir $f = u.k$. Luego, como $f_1 = 0$ en B_1 , esto implica que $f = 0$ en \mathcal{B} . Entonces $k = 0$ y por lo tanto $k_1 = 0$, lo cual es una contradicción. Así, f y k son primos relativos.

Se sabe que $\partial\mathcal{B} = \partial(B_1 \cup B_2) = (B_1 \cup B_2) \cap S_\epsilon^3 = (B_1 \cap S_\epsilon^3) \cup (B_2 \cap S_\epsilon^3)$, y de la definición 2.2.2, tenemos

$$\begin{aligned} CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{B}} \frac{\eta}{k} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{B}} \frac{k_1\eta_2 + k_2\eta_1}{k_1k_2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\eta_2}{k_2} + \frac{\eta_1}{k_1} \right) \\ &= CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) + -\frac{1}{2\pi i} \int_{B_1 \cap S_\epsilon^3} \frac{\eta_2}{k_2} + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + -\frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \cap S_\epsilon^3} \frac{\eta_1}{k_1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dividiendo por f_1k_1 a la ecuación (2.11), tenemos

$$\frac{\eta_1}{k_1} = \frac{g_1w}{f_1k_1} - \frac{df_1}{f_1}. \quad (2.16)$$

Como $w|_{B_2} = 0$, integrando la ecuación (2.16) sobre $(B_2 \cap S_\epsilon^3)$, se tiene

$$\int_{B_2 \cap S_\epsilon^3} \frac{\eta_1}{k_1} = \int_{B_2 \cap S_\epsilon^3} \frac{g_1 w}{f_1 k_1} - \int_{B_2 \cap S_\epsilon^3} \frac{df_1}{f_1} = - \int_{B_2 \cap S_\epsilon^3} \frac{df_1}{f_1}, \quad (2.17)$$

Analogamente, dividiendo por $f_2 k_2$ a la ecuación (2.12), se tiene

$$\frac{\eta_2}{k_2} = \frac{g_2 w}{f_2 k_2} - \frac{df_2}{f_2}. \quad (2.18)$$

Como $w|_{B_1} = 0$, integrando la ecuación (2.18) sobre $(B_1 \cap S_\epsilon^3)$, se tiene

$$\int_{B_1 \cap S_\epsilon^3} \frac{\eta_2}{k_2} = \int_{B_1 \cap S_\epsilon^3} \frac{g_2 w}{f_2 k_2} - \int_{B_1 \cap S_\epsilon^3} \frac{df_2}{f_2} = - \int_{B_1 \cap S_\epsilon^3} \frac{df_2}{f_2}, \quad (2.19)$$

Por lo tanto, reemplazando las ecuaciones (2.17) y (2.19) en (2.15); y usando el lema 2.2.7, obtenemos la proposición 2.2.8. \square

Observación 2.2.9. El *Lema 2.2.1*, también se verifica para curva formal invariante por \mathcal{F} .

Por otro lado, si B es una separatriz analítica, la ecuación (2.9) coincide con la ecuación (2.8). Por lo tanto, el índice de *Camacho-Sad* puede definirse para una curva reducible de separatrices que contienen algunas ramas formales (correspondientes a las separatrices débiles), aplicando la ecuación (2.10).

Lema 2.2.10. *El índice de Camacho-Sad definido en (2.9), depende solo de la separatriz S y de la foliación \mathcal{F} .*

Demostración. Ver [PM05]. \square

Ejemplo 2.2.11. Sea \mathcal{F} la foliación de *Riccati* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2 dy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad de \mathcal{F} . Por otro lado, las únicas separatrices de \mathcal{F} son $B_1 = \{h = x + y = 0\}$ y $B_2 = \{f = x = 0\}$ (ver ejemplo 1.4.9).

Por el lema 2.2.1, para la separatriz B_1 , tenemos que existen $g = 1$, $k = x^2$ y un germen de 1-forma holomorfa $\eta = ydx$, tal que $gw = kdf + f \cdot \eta$. Por otro lado,

una parametrización de *Puiseux* para B_1 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, -e^{i\theta})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{ydx}{x^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{i\theta} i e^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i d\theta = 1.$$

Analogamente, para $B_2 = \{f = x = 0\}$ tenemos que la 1- forma w se puede escribir como

$$w(x, y) = (y^2 + xy + x^2)df + fxdy,$$

siendo $g = 1$, $k = y^2 + xy + x^2$ y la 1- forma holomorfa $\eta = xdy$.

Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (0, e^{i\theta})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{xdy}{y^2 + xy + x^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{0ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = 0.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, usando la proposición 2.2.8, se tiene $CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 3$.

Ejemplo 2.2.12. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = (x - y)dx + x^2dy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad reducida de tipo silla-nodo de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.4.15). Por otro lado, las únicas separatrices son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{h = y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j = 0\}$, donde B_1 es una separatriz analítica y B_2 es una separatriz formal.

Por el lema 2.2.1, para la separatriz B_1 , tenemos que existen, $g = 1$, $k = x - y$, y un germen de 1- forma holomorfa $\eta = xdy$, tal que $gw = kdf + f\eta$. Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para B_1 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (0, e^{i\theta})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{xdy}{x - y} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{0ie^{i\theta} d\theta}{-e^{i\theta}} = 0.$$

Analogamente, para $B_2 = \{h = y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j = 0\}$ tenemos que la 1- forma w se puede escribir como

$$w(x, y) = x^2 dh + h(-dx),$$

siendo $g = 1$, $k = x^2$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -dx$. Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! e^{i\theta j})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-dx}{x^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} ie^{-i\theta} d\theta = 0.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, usando la proposición 2.2.8, se tiene que $CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 2$.

Ejemplo 2.2.13. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy.$$

Note que $Sing(\mathcal{F}) = \{(0, 0)\}$. Además, observe que la foliación \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $S_c = \{h = y^2 - x^3 - cx^2 = 0\}$ (ver ejemplo 1.4.11).

Por el lema 2.2.1, para la separatriz B_1 , tenemos que existen, $g = 1$, $k = 2y^2 + x^3$, y un germen de 1- forma holomorfa $\eta = -2ydy$, tal que $gw = kdf + f.\eta$. Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para B_1 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (0, e^{i\theta})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-2ydy}{2y^2 + x^3} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-2e^{i\theta} ie^{i\theta} d\theta}{2e^{2i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1.$$

Analogamente, para $S_0 = \{h = y^2 - x^3 = 0\}$ tenemos que la 1- forma w se puede escribir como

$$w(x, y) = -xdh + h(2dx),$$

siendo $g = 1$, $k = -x$ y la 1- forma holomorfa $\eta = 2dx$. Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para S_0 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{2i\theta}, e^{3i\theta})$.

Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_0(\mathcal{F}, S_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2dx}{-x} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{2i\theta} 2id\theta}{-e^{2i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} 4id\theta = 4.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup S_0$, como $(B_1, S_0)_0 = 1$, usando la proposición 2.2.8, se tiene que $CS_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 7$.

Ejemplo 2.2.14. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = -ydx + 2xdy.$$

Note que $Sing(\mathcal{F}) = \{(0, 0)\}$. Además, observe que la foliación \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{r = y = 0\}$, $S_c = \{h = cy^2 - x = 0\}$, donde B_1 , B_2 y S_c son separatrices analíticas (ver ejemplo 1.4.8).

Por el lema 2.2.1, para la separatriz S_1 , tenemos que existen, $g = 1$, $k = y$, y un germen de 1- forma holomorfa $\eta = -2dy$, tal que $gw = kdh + h.\eta$. Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para S_1 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{2i\theta}, e^{i\theta})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_0(\mathcal{F}, S_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-2dy}{y} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-2ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} 2id\theta = 2.$$

Analogamente, para $B_2 = \{r = y = 0\}$ tenemos que la 1- forma w se puede escribir como

$$w(x, y) = 2xdr + r(-dx),$$

siendo $g = 1$, $k = 2x$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -dx$. Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 0)$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_0(\mathcal{F}, B_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-dx}{2x} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} id\theta}{2e^{i\theta}} = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = S_1 \cup B_2$, como $(S_1, B_2)_0 = 1$, entonces reemplazando en $CS_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = CS_0(\mathcal{F}, S_1) + CS_0(\mathcal{F}, B_2) + 2(S_1, B_2)_0$, tenemos $CS_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{9}{2}$.

Ejemplo 2.2.15. Sea \mathcal{F} la foliación de *Suzuki's* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy.$$

Observe que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad de \mathcal{F} . Por otro lado, \mathcal{F} tiene infinitas separatrices, las cuales son $B_1 = \{f = x = 0\}$, $B_2 = \{v = y = 0\}$, $S_c : \{h = y^2 + y - x \ln(\frac{cy}{x}) = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ con $c \in \mathbb{C}$ (ver ejemplo 1.4.10).

Por el lema 2.2.1, para la separatriz B_2 , tenemos que existen $g = 1$, $k = -(2xy^2 + xy - x^2)$ y un germen de 1-forma holomorfa $\eta = (y^2 + y - x)dx$, tal que $gw = kdf + f\eta$. Por otro lado, una parametrización de *Puisseux* para B_2 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 0)$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(y^2 + y - x)dx}{-2xy^2 - xy + x^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-ie^{2i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i d\theta = 1.$$

Análogamente, para $S_{e^2} : \{h = y^2 + y - x \ln(\frac{e^2 y}{x}) = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ tenemos que la 1-forma w se puede escribir como

$$w(x, y) = (-xy)dh + hydx,$$

siendo $g = 1$, $k = -xy$ y la 1-forma holomorfa $\eta = ydx$.

Reemplazando en la ecuación (2.8) de la definición 2.2.2, e integrando sobre $\partial S_{e^2} = S_{e^2} \cap S_{\epsilon}^3$ tenemos

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S_{e^2}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{e^2}} \frac{ydx}{-xy} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{e^2}} \frac{dx}{x} = 2.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = S_{e^2} \cup B_2$, como $(S_{e^2}, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, usando la proposición 2.2.8, se tiene $CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 5$.

Ejemplo 2.2.16. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ y $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $a(\mathbf{0}) = 0$, $b(\mathbf{0}) = 0$. Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad hiperbólica de \mathcal{F} . Además, observe que las únicas separatrices son $B_1 : \{f = x = 0\}$ y $B_2 : \{h = y = 0\}$, donde B_1 y B_2

son separatrices analíticas (ver ejemplo 1.4.16).

Por el lema 2.2.1, para la separatriz B_1 , tenemos que existen, $g = 1$, $k = -y(\lambda_2 + b(x, y))$, y un germen de 1- forma holomorfa $\eta = (\lambda_1 + a(x, y))dy$, tal que $gw = kdh + h\eta$. Por otro lado, una parametrización de *Puisseux* para B_1 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (0, e^{i\theta})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda_1 dy}{-y\lambda_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1 i e^{i\theta} d\theta}{\lambda_2 e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1 i d\theta}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Analogamente, para $B_2 = \{h = y = 0\}$ tenemos que la 1- forma w se puede escribir como

$$w(x, y) = x(\lambda_1 + a(x, y))dh + h(-(\lambda_2 + b(x, y))dx),$$

siendo $g = 1$, $k = x(\lambda_1 + a(x, y))$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -(\lambda_2 + b(x, y))dx$. Por otro lado, una parametrización de *Puisseux* para B_2 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 0)$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-\lambda_2 dx}{x\lambda_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_2 i e^{i\theta} d\theta}{\lambda_1 e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_2 i d\theta}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, usando la proposición 2.2.8, se tiene que $CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2$.

Ejemplo 2.2.17. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = -y(1 + \lambda x^v)dx + x^{v+1}dy,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in \mathbb{Z}_{>0}$. Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad silla-nodo de \mathcal{F} . Además, observe que las únicas separatrices son $B_1 : \{f = x = 0\}$ y $B_2 : \{h = y = 0\}$, donde B_1 y B_2 son separatrices analíticas (ver ejemplo 1.4.17). Por el lema 2.2.1, para la separatriz B_1 , tenemos que existen, $g = 1$, $k = y(1 + \lambda x^v)$, y un germen de 1- forma holomorfa $\eta = x^v dy$, tal que $gw = kdh + h\eta$. Por otro lado, una parametrización de *Puisseux* para B_1 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (0, e^{i\theta})$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando

sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^v dy}{y(1 + \lambda x^v)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{0^v i e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}(1 + \lambda 0^v)} = 0.$$

Analogamente, para $B_2 = \{h = y = 0\}$ tenemos que la 1- forma w se puede escribir como

$$w(x, y) = x^{v+1} dh + h(-(1 + \lambda x^v) dx),$$

siendo $g = 1$, $k = x^{v+1}$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -(1 + \lambda x^v) dx$. Por otro lado, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\varphi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 0)$. Reemplazando en la ecuación (2.9) de la definición 2.2.5, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-(1 + \lambda x^v) dx}{x^{v+1}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-\lambda dx}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda i e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \lambda.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, usando la proposición 2.2.8, se tiene que $CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \lambda + 2$.

Observación 2.2.18. Dada \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset \mathbb{C}^2$, vecindad de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ definida por la 1- forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y) dx + P(x, y) dy$. Notemos que para definir el índice de *Camacho-Sad*, utiliza una rama local de separatriz pasando por un punto singular (ver definición 2.2.5), mientras que el índice de *Baum-Bott* se define solo en un punto singular (ver definición 2.1).

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular de dimensión 1 en una superficie compleja M .

La siguiente observación será de utilidad en la demostración del teorema del índice de *Camacho-Sad*, ver [PM05].

Observación 2.2.19. Dado un cubrimiento localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de una superficie compleja M . Fijado uno de los abiertos U_{i_0} , tenemos que existen sólo finitos $\{U_i\} \in \mathcal{U}$ tal que $U_i \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Sea V_{i_0} un abierto relativamente compacto en U_{i_0} , esto es, \bar{V}_{i_0} es compacto y $\bar{V}_{i_0} \subset U_{i_0}$. Al cambiar U_{i_j} por $\tilde{U}_{i_j} = U_{i_j} - V_{i_0}$, $j = 1, \dots, r$ en \mathcal{U} , aun obtenemos un cubrimiento localmente finito $\tilde{\mathcal{U}}$. Dado una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i \in I}$ subordinada a $\tilde{\mathcal{U}}$ tenemos que

$$\rho_{i_0}|_{\bar{V}_{i_0}} \equiv 1,$$

puesto que $V_{i_0} \cap U_i = \emptyset$, para todo $i \neq i_0$.

Teorema 2.2.20. (Teorema de índice de Camacho-Sad) Sean M una superficie compleja y $S \subset M$ una curva compacta invariante por \mathcal{F} , entonces

$$\sum_{\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathcal{F})} CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S) = S.S. \quad (2.20)$$

Demostración. Suponga que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ y tomemos un cubrimiento localmente finito $U = \{U_i\}$ de la variedad M , tal que si $p_i \notin \text{sing}(\mathcal{F})$, para $i \in I - \{1, \dots, n\}$, entonces la foliación está inducida por $g_i w_i = h_i df_i = 0$, donde g_i, h_i, f_i son funciones holomorfas en U_i .

Por otro lado, si $p_i \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, $\forall i = 1, \dots, n$ entonces por el teorema 2.2.4 existe una separatriz de \mathcal{F} por p_i , digamos $S_i = \{(x, y) \in U_i : f_i(x, y) = 0\}$; $\forall i = 1, \dots, n$. Entonces, por lema 2.2.1 existe una descomposición

$$g_i w_i = k_i df_i + f_i \eta_i, \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad (2.21)$$

donde $g_i, k_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$, con k_i y f_i primos relativos no idénticamente nulos sobre S_i y gérmenes de 1-forma holomorfa η_i .

Ahora, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces por definición 1.2.36 existen funciones holomorfas φ_{ij} en $U_i \cap U_j$ tal que

$$w_j = \varphi_{ji} w_i, \quad (2.22)$$

donde $\{\varphi_{ij}\}$ es el cociclo que define $N_{\mathcal{F}}$, $N_{\mathcal{F}}$ es el fibrado normal a \mathcal{F} , ver [PM05].

Afirmación: Si $S_i = \{f_i(x, y) = 0\}$ y $S_j = \{f_j(x, y) = 0\}$ son separatrices que pasan por $\mathbf{p} \in U_i \cap U_j$, entonces $f_i = f_{ij} f_j$, f_{ij} son funciones holomorfas en $U_i \cap U_j$.

En efecto, si f_j no divide a f_i , entonces existen α, β funciones holomorfas no nulas en $U_i \cap U_j$ tal que

$$f_i = \alpha f_j + \beta,$$

diferenciando esta igualdad

$$df_i = f_j d\alpha + \alpha df_j + d\beta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} w \wedge df_i &= w \wedge (f_j d\alpha + \alpha df_j + d\beta) \\ &= f_j w \wedge d\alpha + \alpha w \wedge df_j + w \wedge d\beta \\ &= \alpha w \wedge df_j + w \wedge d\beta, \quad \text{ya que } f_j = 0 \text{ en } U_i \cap U_j \\ &= \alpha f_j \eta + w \wedge d\beta, \quad \text{pues } S_j = \{f_j = 0\} \text{ es una separatriz de } \mathcal{F} \\ &= (f_i - \beta) \eta + w \wedge d\beta \\ &= f_i \eta - \beta \cdot \eta + w \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Entonces, $w \wedge df_i \neq f_i \cdot \eta$ puesto que β es una función holomorfa no nula en $U_i \cap U_j$. Lo cual es una contradicción puesto que $S_j = \{f_j = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} ($w \wedge df_j = f_j \cdot \eta$, con η una 2-forma). Esto implica que

$$f_i = f_{ij} f_j, \quad (2.23)$$

donde $\alpha = f_{ij}$ define el fibrado lineal $[S]$, ver [PM05]. Esto quiere decir que S_i y S_j describen el mismo conjunto. Luego, definen una curva S invariante por \mathcal{F} . Por otro lado, al tomar $\{\rho_i\}_{i \in I}$, una partición de la unidad subordinada $\{U_i\}_{i \in I}$, tenemos

$$C_1([S])|_{U_i \cap S} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j d(\rho_j d(\log f_{ji})) \quad (2.24)$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j d\rho_j \wedge d(\log f_{ji}), \quad (2.25)$$

donde $C_1([S])$ es la clase de Chern, ver [PM05] y [KS97]. Diferenciando la ecuación (2.21), se tiene

$$dg_i \wedge w_i + g_i dw_i = dk_i \wedge df_i + df_i \wedge \eta_i + f_i d\eta_i. \quad (2.26)$$

Restringiendo (2.21) y (2.26) a $U_i \cap S$, obtenemos

$$g_i w_i = k_i df_i \quad (2.27)$$

$$dg_i \wedge w_i + g_i dw_i = dk_i \wedge df_i + df_i \wedge \eta_i. \quad (2.28)$$

Reemplazando (2.27) en (2.28), tenemos que

$$dg_i \wedge w_i + g_i dw_i = (dk_i - \eta_i) \wedge \frac{g_i}{k_i} w_i.$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned} dw_i &= \left(\frac{dk_i}{k_i} - \frac{dg_i}{g_i} - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_i \\ &= \left(d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_i. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$dw_j = \left(d\left(\log \frac{k_j}{g_j}\right) - \frac{\eta_j}{k_j} \right) \wedge w_j, \quad \text{en } U_j \cap S \quad (2.29)$$

Por otro lado, diferenciando (2.23), tenemos

$$df_i = df_{ij} \cdot f_j + f_{ij} df_j, \quad (2.30)$$

y restringiendo (2.30) a $(U_i \cap U_j) \cap S$, se tiene

$$df_i = f_{ij} df_j. \quad (2.31)$$

De (2.27) y (2.31), y por la condición de cociclo ($f_i = f_{ij} f_j$), se obtiene

$$g_i w_i = k_i df_i = k_i \frac{df_j}{f_{ji}}. \quad (2.32)$$

Al reemplazar (2.31), para el índice j , en (2.32), se consigue

$$g_i w_i = \frac{k_i g_j w_j}{f_{ji} k_j} = \frac{k_i g_j}{k_j f_{ji}} \varphi_{ji} w_i.$$

Luego,

$$\frac{k_j}{g_j} = \frac{k_i}{g_i} f_{ij} \varphi_{ji}. \quad (2.33)$$

Así, diferenciando (2.22) y reemplazando (2.29) se obtiene

$$\begin{aligned} dw_j &= \varphi_{ji} \wedge w_i + \varphi_{ji} dw_i \\ &= d\varphi_{ji} \wedge w_i + \varphi_{ji} \left(d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_i \\ &= d\varphi_{ji} \wedge \varphi_{ij} w_j + \left(d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_j. \end{aligned}$$

Entonces,

$$dw_j = \left[d(\log(\varphi_{ji})) + d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right] \wedge w_j. \quad (2.34)$$

De (2.29) y (2.33), se consigue en $U_i \cap U_j$,

$$d(\log \varphi_{ji}) = \frac{\eta_i}{k_i} - \frac{\eta_j}{k_j} + d\left(\log \frac{k_j}{g_j}\right) - d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right). \quad (2.35)$$

Si en (2.33) tomamos logaritmo y luego diferenciamos, resulta

$$d(\log(f_{ij})) = d\left(\log \left(\frac{k_j}{g_j}\right)\right) - d\left(\log \left(\frac{k_i}{g_i}\right)\right) - d(\log \varphi_{ji}).$$

De esto resulta,

$$d(\log(f_{ij})) = \frac{\eta_j}{k_j} - \frac{\eta_i}{k_i}. \quad (2.36)$$

Así, en (2.25) para cada $k = 1, \dots, n$; tenemos

$$C_1([S])|_{U_{ik} \cap S} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j d\varphi_j \wedge d(\log f_{jik}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j d\varphi_j \wedge \left(\frac{\eta_j}{k_j} - \frac{\eta_i}{k_{ik}} \right).$$

Note que si $U_{ik} \cap U_j \neq \emptyset$, $n_j = 0$. Por esta razón se tiene que para todo $i \in I - \{1, \dots, k\}$:

$$C_1([S])|_{S - (U_1 \cup \dots \cup U_{ik})} = 0.$$

Así, tenemos localizado el problema

$$\int_S C_1([S]) = \sum_{j=1}^k \int_{U_{ij} \cap S} C_1([S])|_{U_{ij} \cap S}.$$

Por la observación 2.2.19, podemos tomar abiertos $V_k \subset U_{ij}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, tal que $\varphi_{ik}|_{\bar{V}_k} \equiv 1$. Así,

$$\begin{aligned} \int_{U_{ik} \cap S} C_1([S]) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{U_{ik} \cap S} d\varphi_{ik} \wedge \frac{\eta_{ik}}{k_{ik}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{(U_{ik} - V_k) \cap S} d\varphi_{ik} \wedge \frac{\eta_{ik}}{k_{ik}} \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{(U_{ik} - V_k) \cap S} d\left(\varphi_{ik} \frac{\eta_i}{k_{ik}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\partial V_k \cap S} \varphi_i \frac{\eta_i}{k_i} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_k \cap S} \frac{\eta_{ik}}{k_{ik}} \\ &= CS_{p_k}(\mathcal{F}, S). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} CS_p(\mathcal{F}, S) = S.S.$$

□

2.3 Índice de Gomez-Mont-Seade-Verjovsky

En esta sección, utilizaremos la descomposición (2.5) del lema 2.2.1 con el objetivo de definir el índice de *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* con respecto a una curva \mathcal{C} invariante por la foliación \mathcal{F} , ver [BRU97], [PM05] y [FPM17]. Luego

describiremos como es que éste índice se puede extender para curvas formales invariantes, ver [FPM17].

Definición 2.3.1. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, inducida por $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Sea \mathbf{p} una singularidad de \mathcal{F} y \mathcal{C} una curva analítica invariante por \mathcal{F} en \mathbf{p} , definida por la función reducida $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Se define el índice de *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* con respecto a la curva \mathcal{C} en \mathbf{p} , está dado por

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}} \frac{g}{k} d\left(\frac{k}{g}\right), \quad (2.37)$$

donde g y k son como en la ecuación (2.5), $\partial \mathcal{C} = \mathcal{C} \cap S_{\epsilon}^3$ y $S_{\epsilon}^3 = \partial B^4$, donde B^4 es una bola pequeña centrada en \mathbf{p} , ver [FPM17].

Observación 2.3.2. Note que la integral en (2.37) está bien definida puesto que f y k son primos relativos, ver [PM05].

Observación 2.3.3. Sea $Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ el conjunto de separatrices de \mathcal{F} pasando por \mathbf{p} y $B \subset Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ una rama formal. La extensión de la definición 2.3.1 a una rama local formal B de $Sep_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ (ver definición 1.4.7), se hace de la misma forma como se hizo en la sección (2.2), donde $B = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} determinada por los ceros de una función f irreducible, $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$, ver [FPM17].

Definición 2.3.4. El índice de *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* de la foliación \mathcal{F} con respecto a la rama local B de S en \mathbf{p} , es por definición el residuo:

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g}{k} d\left(\frac{k}{g}\right), \quad (2.38)$$

donde g y k son como en la ecuación (2.5) y γ es la imagen mediante φ de la circunferencia $re^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 < r < \epsilon$, donde $0 < \epsilon < 1$, y $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow B$ es una parametrización de *Puiseux* para B , ver [FPM17].

Observación 2.3.5. Si B es una rama de separatriz analítica, la ecuación (2.38) coincide con la ecuación (2.37). El índice de *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* puede definirse para una curva reducible de separatrices que contienen algunas ramas formales (correspondientes a las separatrices débiles), ver [FPM17].

Lema 2.3.6. *El índice de Gomez-Mont-Seade-Verjovsky definido, no depende de la ecuación local de la foliación \mathcal{F} ni de descomposición.*

Demostración. Ver [PM05]. □

Proposición 2.3.7. Sean B_1, B_2 son separatrices de \mathcal{F} en \mathfrak{p} , sin componentes en común y $\mathcal{B}=B_1 \cup B_2$. Entonces

$$GSV_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = GSV_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}, B_1) + GSV_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}, B_2) - 2(B_1, B_2)_{\mathfrak{p}}. \quad (2.39)$$

Donde, $(B_1, B_2)_{\mathfrak{p}}$ es el número de intersección entre estas separatrices con $\{f_1 = 0\}$ y $\{f_2 = 0\}$ ecuaciones reducidas de B_1 y B_2 , respectivamente.

Demostración. La demostración de esta proposición se realizará más adelante (ver observación 2.4.12). □

Ejemplo 2.3.8. Sea \mathcal{F} la foliación de Riccati sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado en el ejemplo 2.2.11. Como la curva $B_1 : \{h = x + y = 0\}$ es invariante por \mathcal{F} , existen $k = x^2, g = 1$ y la 1-forma holomorfa $\eta = ydx$ tal que $w(x, y) = x^2dh + h ydx$. Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}, B_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2xdx}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\theta} i e^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{2id\theta}{2\pi i} = 2.$$

Analogamente, como la curva $B_2 : \{f = x = 0\}$ es invariante por \mathcal{F} , existen $k = y^2 + xy + x^2, g = 1$ y la 1-forma holomorfa $\eta = xdy$ tal que

$$w(x, y) = (y^2 + xy + x^2)df + fxdy.$$

Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(y^2 + xy + x^2)}{y^2 + xy + x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2ydy}{y^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\theta} i e^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = 2.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B}=B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathfrak{p}} = 1$, utilizando la ecuación (2.39) de la proposición 2.3.7, se tiene $GSV_{\mathfrak{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 2$.

Ejemplo 2.3.9. Considere la foliación \mathcal{F} sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado en el ejemplo 2.2.12. Como $B_1 = \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1, k = x - y$ y la 1-forma holomorfa $\eta = xdy$ tal que $w(x, y) = (x - y)df + f(xdy)$. Reemplazando en

la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1.$$

Analogamente, como $B_2 = \{h = y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = x^2$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -dx$ tal que

$$w(x, y) = x^2 dh + h(-dx).$$

Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2xdx}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\theta} ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} = 2.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, utilizando la ecuación (2.39) de la proposición 2.3.7, se tiene que $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 1$.

Ejemplo 2.3.10. Sea la foliación \mathcal{F} sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado en el ejemplo 2.2.13. Como $B_1 = \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = 2y^2 + x^3$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -2ydy$ tal que $w(x, y) = (2y^2 + x^3)df + f(-2ydy)$. Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(2y^2 + x^3)}{2y^2 + x^3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{4ydy}{2y^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{4e^{i\theta} ie^{i\theta} d\theta}{2e^{2i\theta}} = 2.$$

Analogamente, como $S_0 = \{h = y^2 - x^3 = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = -x$ y la 1- forma holomorfa $\eta = 2dx$ tal que $w(x, y) = -xdh + h(2dx)$. Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, S_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(-x)}{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{2i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} 2id\theta = 2.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup S_0$, como $(B_1, S_0)_{\mathbf{0}} = 1$, utilizando la ecuación (2.39) de la proposición 2.3.7, se tiene $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 2$.

Ejemplo 2.3.11. Sea \mathcal{F} la foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado en el ejemplo 2.2.14. Como $S_1 : \{h = y^2 - x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = y$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -2dy$ tal que $w(x, y) = ydh + h(-2dy)$. Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, S_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1.$$

Similarmente, como $B_2 : \{r = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = 2x$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -dx$ tal que $w(x, y) = 2xdr + r(-dx)$. Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(2x)}{2x} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} id\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = S_1 \cup B_2$, como $(S_1, B_2)_{\mathbf{0}} = 1$, utilizando la ecuación (2.39) de la proposición 2.3.7, se tiene que $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$.

Ejemplo 2.3.12. Sea \mathcal{F} la foliación de *Suzuki's* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado en el ejemplo 2.2.15. Como $B_2 : \{v = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = -2xy^2 - xy + x^2$ y la 1- forma holomorfa $\eta = (y^2 + y - x)dx$ tal que

$$w(x, y) = (-2xy^2 - xy + x^2)df + f(y^2 + y - x)dx.$$

Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(-2xy^2 - xy + x^2)}{-2xy^2 - xy + x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2xdx}{x^2} = \frac{2}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{2i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = 2.$$

Analogamente, como $S_{e^2} : \{h = y^2 + y - x \ln(\frac{e^2 y}{x}) = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = -xy$ y la 1- forma holomorfa $\eta = ydx$ tal que

$$w(x, y) = -xydh + hydx.$$

Reemplazando en la ecuación (2.37) de la definición 2.3.1, e integrando sobre $\partial S_{\epsilon^2} = S_{\epsilon^2} \cap S_{\epsilon}^3$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S_{\epsilon^2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{\epsilon^2}} \frac{d(-xy)}{-xy} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{\epsilon^2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_{\epsilon^2}} \frac{dy}{y} = 2 + 2 = 4.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = S_{\epsilon^2} \cup B_2$, como $(S_{\epsilon^2}, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, utilizando la ecuación (2.39) de la proposición 2.3.7, se tiene que $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 4$.

Ejemplo 2.3.13. Sea \mathcal{F} la foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado en el ejemplo 2.2.16. Como $B_1 : \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = -y(\lambda_2 + b(x, y))$ y la 1- forma holomorfa $\eta = (\lambda_1 + a(x, y))dy$ tal que

$$w(x, y) = -y(\lambda_2 + b(x, y))df + f(\lambda_1 + a(x, y))dy.$$

Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-\lambda_2 dy}{-y\lambda_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1.$$

Analogamente, como $B_2 : \{h = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = x(\lambda_1 + a(x, y))$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -(\lambda_2 + b(x, y))dx$ tal que

$$w(x, y) = x(\lambda_1 + a(x, y))dh + h(-(\lambda_2 + b(x, y))dx).$$

Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda_1 dx}{x\lambda_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, utilizando la ecuación (2.39) de la proposición 2.3.7, se tiene que $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$.

Ejemplo 2.3.14. Sea \mathcal{F} la foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado en el ejemplo 2.2.17. Como $B_1 : \{f = x = 0\}$, es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = y(1 + \lambda x^v)$ y la 1- forma holomorfa $\eta = x^v dy$ tal que $w(x, y) = y(1 + \lambda x^v)df + f(x^v dy)$.

Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\theta = 1.$$

Similarmente, como $B_2 : \{h = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , existen $g = 1$, $k = x^{v+1}$ y la 1- forma holomorfa $\eta = -(1 + \lambda x^v)dx$ tal que

$$w(x, y) = x^{v+1}dh + h(-(1 + \lambda x^v)dx).$$

Reemplazando en la ecuación (2.38) de la definición 2.3.4, e integrando sobre $\gamma = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(x^{v+1})}{x^{v+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(v+1)x^v dx}{x^{v+1}} = \frac{v+1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = v+1.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, como $(B_1, B_2)_{\mathbf{p}} = 1$, utilizando la ecuación (2.39) de la proposición 2.3.7, se tiene que $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = v$.

2.4 Índice de variación

En esta sección, definimos el índice de variación para curvas analíticas invariantes, ver [FPM17] y [PM05], y describimos una estrategia de cómo es que éste índice se puede extender para curvas invariantes formales, tal estrategia no es la misma que se utilizó para los índices $CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B)$ y $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B)$, ver [FPM17]. Finalmente, se presentará y demostrará dos resultados importantes que será pieza clave en el capítulo 3, ver [PM05] y [KS97].

Lema 2.4.1. *Sea \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset \mathbb{C}^2$, vecindad de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ definida por la 1- forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Suponga que \mathbf{p} es una singularidad aislada de \mathcal{F} y*

$$\alpha = \alpha_1 dx \wedge d\bar{x} + \alpha_2 dy \wedge d\bar{y} + \alpha_3 d\bar{x} \wedge d\bar{y} + \alpha_4 dx \wedge d\bar{y} + \alpha_5 d\bar{x} \wedge dy + \alpha_6 dx \wedge dy$$

una 2- forma diferenciable tal que $w \wedge \alpha = 0$, entonces existe una 1- forma diferenciable β fuera de \mathbf{p} , tal que

$$\alpha = \beta \wedge w.$$

Demostración. Tenemos que $w \wedge \alpha = 0$ y

$$w \wedge \alpha = (-Q\alpha_2 - P\alpha_4)dx \wedge dy \wedge d\bar{y} + (-Q\alpha_5 + P\alpha_1)dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \\ - Q\beta_3 dx \wedge d\bar{x} \wedge d\bar{y} + P\alpha_3 dy \wedge d\bar{x} \wedge d\bar{y}.$$

Entonces,

$$-Q\alpha_2 = P\alpha_4, \quad P\alpha_1 = Q\alpha_5. \quad (2.40)$$

$$P\alpha_3 = Q\alpha_3 = 0. \quad (2.41)$$

Notemos que de (2.41) se tiene que $\alpha_3 = 0$ en $U - \{\mathbf{p}\}$, puesto que $P \neq 0$ y $Q \neq 0$ en $U - \{\mathbf{p}\}$.

Si definimos $\beta = \beta_1 dx + \beta_2 d\bar{x} + \beta_3 d\bar{y} + \beta_4 dy$ una 1-forma holomorfa en $U - \{\mathbf{p}\}$, donde

$$\beta_1 = \frac{\bar{P}\alpha_6}{|Q|^2 + |P|^2}, \beta_2 = \frac{\alpha_1\bar{Q} + \alpha_5\bar{P}}{|Q|^2 + |P|^2}, \beta_3 = \frac{\alpha_6\bar{Q}}{|Q|^2 + |P|^2} \quad y \quad \beta_4 = \frac{-\alpha_2\bar{P} + \alpha_4\bar{Q}}{|Q|^2 + |P|^2}.$$

Observe que

$$\beta \wedge w = (P\beta_1 + Q\beta_3)dx \wedge dy + Q\beta_2 dx \wedge d\bar{x} + P\beta_2 d\bar{x} \wedge dy + Q\beta_4 dx \wedge d\bar{y} - P\beta_4 dy \wedge d\bar{y}. \quad (2.42)$$

Reemplazando $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ en (2.42) y utilizando (2.40), tenemos

$$\beta \wedge w = \left(P \left(\frac{\bar{P}\alpha_6}{|Q|^2 + |P|^2} \right) + Q \left(\frac{\alpha_6\bar{Q}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) \right) dx \wedge dy + Q \left(\frac{\alpha_1\bar{Q} + \alpha_5\bar{P}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) dx \wedge d\bar{x} \\ + P \left(\frac{\alpha_1\bar{Q} + \alpha_5\bar{P}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) d\bar{x} \wedge dy + Q \left(\frac{-\alpha_2\bar{P} + \alpha_4\bar{Q}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) dx \wedge d\bar{y} - P \left(\frac{-\alpha_2\bar{P} + \alpha_4\bar{Q}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) dy \wedge d\bar{y}. \\ = \left(\frac{(|Q|^2 + |P|^2)\alpha_6}{|Q|^2 + |P|^2} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\alpha_1(|Q|^2 + |P|^2)}{|Q|^2 + |P|^2} \right) dx \wedge d\bar{x} \\ + \left(\frac{\alpha_5(|Q|^2 + |P|^2)}{|Q|^2 + |P|^2} \right) d\bar{x} \wedge dy + \left(\frac{\alpha_4(|P|^2 + |Q|^2)}{|Q|^2 + |P|^2} \right) dx \wedge d\bar{y} \\ + \left(\frac{\alpha_2(|P|^2 + |Q|^2)}{|Q|^2 + |P|^2} \right) dy \wedge d\bar{y}. \\ = \alpha_1 dx \wedge d\bar{x} + \alpha_2 dy \wedge d\bar{y} + \alpha_3 d\bar{x} \wedge d\bar{y} + \alpha_4 dx \wedge d\bar{y} + \alpha_5 d\bar{x} \wedge dy + \alpha_6 dx \wedge dy \\ = \alpha.$$

Por lo tanto, existe una 1-forma diferenciable β en $U - \{\mathbf{p}\}$, tal que

$$\alpha = \beta \wedge w.$$

□

Lema 2.4.2. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $U \subset \mathbb{C}^2$, vecindad de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Suponga que \mathbf{p} es una singularidad aislada de \mathcal{F} y sea $\beta = \beta_1 dx + \beta_2 d\bar{x} + \beta_3 d\bar{y} + \beta_4 dy$ una 1-forma holomorfa tal que $w \wedge \beta = 0$, entonces existe una función diferenciable g fuera de \mathbf{p} , tal que

$$\beta = gw.$$

Demostración. Tenemos $w \wedge \beta = 0$ y

$$w \wedge \beta = -Q\beta_2 dx \wedge d\bar{x} - Q\beta_3 dx \wedge d\bar{y} + (-Q\beta_4 - P\beta_1) dx \wedge dy + Pdy \wedge \beta_2 d\bar{x} + P\beta_3 dy \wedge d\bar{y}.$$

Entonces,

$$-Q\beta_2 = -Q\beta_3 = P\beta_2 = P\beta_3 = 0. \quad (2.43)$$

$$-Q\beta_4 = P\beta_1. \quad (2.44)$$

Note que $P \neq 0$ y $Q \neq 0$ en $U - \{\mathbf{p}\}$, pues $Sing(\mathcal{F}) = \{\mathbf{p}\}$. Luego, de (2.43) tenemos $\beta_2 = \beta_3 = 0$ en $U - \{\mathbf{p}\}$, como β_2 y β_3 son continuas entonces $\beta_2 = \beta_3 = 0$ en U .

Esto implica que,

$$\beta = \beta_1 dx + \beta_4 dy.$$

Si definimos

$$g = \frac{-\beta_1 \bar{Q} + \beta_4 \bar{P}}{|Q|^2 + |P|^2}.$$

Utilizando (2.44) se tiene

$$\begin{aligned} gw &= \left(\frac{-\beta_1 \bar{Q} + \beta_4 \bar{P}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) \left(\frac{\beta_1}{\beta_4} P dx + P dy \right) = \left(\frac{-\beta_1 \bar{Q} + \beta_4 \bar{P}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) \frac{P}{\beta_4} (\beta_1 dx + \beta_4 dy). \\ &= \left(\frac{-\beta_1 P \bar{Q} + \beta_4 P \bar{P}}{\beta_4 (|Q|^2 + |P|^2)} \right) (\beta_1 dx + \beta_4 dy) = \left(\frac{\beta_4 Q \bar{Q} + \beta_4 P \bar{P}}{|Q|^2 + |P|^2} \right) \frac{1}{\beta_4} (\beta_1 dx + \beta_4 dy). \\ &= (\beta_1 dx + \beta_4 dy) = \beta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una función diferenciable g en $U - \{\mathbf{p}\}$, tal que

$$\beta = gw.$$

□

Consideremos la foliación holomorfa \mathcal{F} sobre $U \subset \mathbb{C}^2$, vecindad de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ definida por la 1-forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Suponga que \mathbf{p} una singularidad aislada de \mathcal{F} . Diferenciando w , se tiene

$$dw = (Q_y + P_x)dx \wedge dy. \quad (2.45)$$

Como $w \wedge dw = 0$, entonces por el lema 2.4.1, existe una 1-forma diferenciable β en $U - \{\mathbf{p}\}$, tal que

$$dw = \beta \wedge w,$$

donde

$$\beta = \frac{(Q_y + P_x)}{|P|^2 + |Q|^2}(\bar{P}dx + \bar{Q}dy). \quad (2.46)$$

Note que cada punto $q \in U - \{\mathbf{p}\}$ es regular para la foliación \mathcal{F} y existe una 1-forma holomorfa β en q tal que $dw = \beta \wedge w$. Además, sea $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función holomorfa tal que $\rho|_{U-V} = 1$, donde $\mathbf{p} \in V_1 \subset V \subset U$. Entonces, $\rho \cdot \beta$ donde β es como en (2.46), es una 1-forma holomorfa en U , tal que $dw = \beta \wedge w$, fuera de una vecindad de \mathbf{p} . Si β' es otra 1-forma holomorfa tal que $dw = \beta' \wedge w$ entonces β y β' coinciden sobre las hojas de la foliación \mathcal{F} , puesto que

$$(\beta - \beta') \wedge w = 0,$$

Entonces, por el lema 2.4.2, existe una función diferenciable g definida fuera de una vecindad de \mathbf{p} tal que $\beta - \beta' = gw$, esto es $\beta = \beta'$ en \mathcal{C} .

Donde, \mathcal{C} es una curva invariante por \mathcal{F} definida por la función reducida $f = 0$. De lo anterior se sigue la siguiente definición.

Definición 2.4.3. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, inducida por $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, \mathbf{p} una singularidad de \mathcal{F} y sea \mathcal{C} una curva analítica invariante por \mathcal{F} en \mathbf{p} , definida por la función reducida $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Se define el índice de *Variación* con respecto a la curva \mathcal{C} en \mathbf{p} , como

$$Var_p(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}} \beta. \quad (2.47)$$

Donde β es como (2.46), $\partial \mathcal{C} = \mathcal{C} \cap S_\epsilon^3$ y $S_\epsilon^3 = \partial B^4$, donde B^4 es una bola pequeña centrada en $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$.

Observación 2.4.4. Note que si $\mathbf{p} \notin \text{sing}(\mathcal{F})$, entonces $Var_p(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = 0$ (ver [PM05]).

Observación 2.4.5. El índice $Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ no depende de la foliación \mathcal{F} , es decir de w , de f que define \mathcal{C} y de ϵ , ver [PM05].

Proposición 2.4.6. Sea $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ curvas invariantes de \mathcal{F} en \mathbf{p} , sin componentes en común y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Entonces

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_1) + Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_2). \quad (2.48)$$

Donde, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son curvas invariantes con $\{f = 0\}$ y $\{h = 0\}$ ecuaciones reducidas de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , respectivamente.

Demostración. Se sabe que $\partial\mathcal{C} = \partial(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \cap S_\epsilon^3 = (\mathcal{C}_1 \cap S_\epsilon^3) \cup (\mathcal{C}_2 \cap S_\epsilon^3)$ y de la definición 2.4.3, se tiene

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{C}} \beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C}_1 \cap S_\epsilon^3) \cup (\mathcal{C}_2 \cap S_\epsilon^3)} \beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C}_1 \cap S_\epsilon^3)} \beta + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathcal{C}_2 \cap S_\epsilon^3)} \beta$$

Por lo tanto, $Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_1) + Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_2)$. \square

Proposición 2.4.7. Si \mathcal{C} es cualquier curva invariante de \mathcal{F} en \mathbf{p} , entonces

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}). \quad (2.49)$$

Demostración. Como \mathcal{C} es una curva invariante de \mathcal{F} en \mathbf{p} , entonces por el lema 2.2.1, existen k, g funciones holomorfas en una vecindad de p no nulos sobre \mathcal{C} , con k y f primos relativos, y un germen de 1-forma holomorfa η tal que

$$gw = kdf + f\eta.$$

Luego,

$$w = \frac{k}{g}df + f\frac{\eta}{g}.$$

Diferenciando,

$$dw = d\left(\frac{k}{g}\right) \wedge df + df \wedge \frac{\eta}{g} + fd\left(\frac{\eta}{g}\right).$$

Note que, en los puntos de $\partial\mathcal{C}$,

$$w = \frac{k}{g}df, \quad (2.50)$$

$$dw = d\left(\frac{k}{g}\right) \wedge df + df \wedge \frac{\eta}{g}. \quad (2.51)$$

Al reemplazar (2.50) en (2.51), se tiene

$$dw = \left(\frac{g}{k} - \frac{\eta}{k} \right) \wedge w, \text{ en } \partial\mathcal{C}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{C}} \left(\frac{g}{k} - \frac{\eta}{k} \right) \\ &= \text{GSV}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) + \text{CS}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

□

Observación 2.4.8. Note que cuando se trata de definir $\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B)$ para una rama formal de separatriz B , la estrategia seguida para los índices *Camacho-Sad* y *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* no es adecuada ya que la 1-forma β no define un objeto formal en $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$. Sin embargo, conociendo $\text{CS}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \text{CS}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\eta}{k}$ y $\text{GSV}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g}{k} d\left(\frac{k}{g}\right)$ para una rama formal B (correspondiente a la separatriz débil), podemos adoptar la ecuación $\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \text{GSV}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) + \text{CS}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ de la proposición 2.4.7 como definición para $\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B)$ y usar la ecuación $\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_1) + \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}_2)$ de la proposición 2.4.6 para calcular $\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ para una multi-ramificada curva invariante \mathcal{C} , ver [FPM17].

Observación 2.4.9. La proposición 2.4.7, también se verifica para una separatriz B de \mathcal{F} en \mathbf{p} , esto es

$$\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \text{GSV}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) + \text{CS}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B).$$

Observación 2.4.10. La proposición 2.4.6, también se verifica para $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, donde B_1, B_2 son separatrices de \mathcal{F} en p , sin componentes en común, esto es

$$\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2).$$

Observación 2.4.11. Podemos definir el índice de *variación* en \mathbf{p} , para un divisor de separatrices

$$\mathcal{B} = \sum_{B \in \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} a_B \cdot B,$$

como

$$\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \sum_{B \in \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} a_B \cdot \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B).$$

Observación 2.4.12. Notemos que una demostración de la proposición 2.3.7, es utilizando la proposición 2.2.8 y la observación 2.4.10, esto es,

$$CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) + 2(B_1 \cdot B_2)_{\mathbf{p}}, \quad (2.52)$$

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2). \quad (2.53)$$

Restando las ecuaciones (2.53)-(2.52) y utilizando la proposición 2.4.7, tenemos

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) - 2(B_1, B_2)_{\mathbf{p}}.$$

Proposición 2.4.13. Sea $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ un divisor de separatrices de \mathcal{F} , donde B_1, B_2 son separatrices de la foliación \mathcal{F} en \mathbf{p} , sin componentes en común. Entonces

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}). \quad (2.54)$$

Demostración. Por la proposición 2.4.7, para B_1 y B_2 , respectivamente, tenemos

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1), \quad (2.55)$$

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2). \quad (2.56)$$

Sumando las ecuaciones (2.55) y (2.56). Luego, utilizando la observación 2.4.11, se tiene

$$Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) + CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2).$$

Por lo tanto, por la proposición 2.2.8 y 2.3.7, obtenemos la ecuación (2.54). \square

Ejemplo 2.4.14. Sea \mathcal{F} la foliación de *Riccati* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy.$$

Observe que $B_1 = \{h = x + y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces de los ejemplos 2.2.11 y 2.3.8, tenemos que $CS_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = 1$ y $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = 2$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = 3.$$

Analogamente, como $B_2 = \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces de los ejemplos 2.2.11 y 2.3.8, tenemos que $CS_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = 0$ y $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = 2$, respectivamente. Luego utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = 2.$$

Por otro lado, si $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), entonces al usar la observación 2.4.11 tenemos

$$\text{Var}_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 5.$$

Ejemplo 2.4.15. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1-forma

$$w = (x - y)dx + x^2dy.$$

Note que $B_1 = \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces de los ejemplos 2.2.12 y 2.3.9, tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, B_1) = 0$ y $GSV_0(\mathcal{F}, B_1) = 1$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, tenemos

$$\text{Var}_0(\mathcal{F}, B_1) = 1.$$

Analogamente, como $B_2 = \{h = y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.12 y 2.3.9, tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, B_2) = 0$ y $GSV_0(\mathcal{F}, B_2) = 2$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$\text{Var}_0(\mathcal{F}, B_2) = 2.$$

Por otro lado, si $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), entonces utilizando la observación 2.4.11 tenemos

$$\text{Var}_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 3.$$

Ejemplo 2.4.16. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy.$$

Observe que $B_1 : \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.13 y 2.3.10 tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, B_1) = 1$ y $GSV_0(\mathcal{F}, B_1) = 2$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$\text{Var}_0(\mathcal{F}, B_1) = 3.$$

Similarmente, como $S_0 = \{h = y^2 - x^3 = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.13 y 2.3.10 tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, S_0) = 4$ y $GSV_0(\mathcal{F}, S_0) = 2$. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$\text{Var}_0(\mathcal{F}, S_0) = 6.$$

Por otro lado, si $\mathcal{B} = B_1 + S_0$ (divisor de separatrices), entonces usando la observación 2.4.11 tenemos

$$\text{Var}_p(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 9.$$

Ejemplo 2.4.17. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1– forma

$$w = -ydx + 2xdy.$$

Note que $S_1 : \{h = y^2 - x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.14 y 2.3.11 tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, S_1) = 2$ y $GSV_0(\mathcal{F}, S_1) = 1$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_0(\mathcal{F}, S_1) = 3$$

Analogamente, como $B_2 = \{r = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.14 y 2.3.11 tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, B_2) = \frac{1}{2}$ y $GSV_0(\mathcal{F}, B_2) = 1$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_0(\mathcal{F}, B_2) = \frac{3}{2}.$$

Por otro lado, si $\mathcal{B} = S_1 + B_2$ (divisor de separatrices), entonces al usar la observación 2.4.11 tenemos

$$Var_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo 2.4.18. Sea \mathcal{F} la foliación de *Suzuki's* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1– forma

$$w = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy.$$

Observe que $B_2 = \{v = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces de los ejemplos 2.2.15 y 2.3.12, tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, B_2) = 1$ y $GSV_0(\mathcal{F}, B_2) = 2$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, tenemos

$$Var_0(\mathcal{F}, B_1) = 3.$$

Analogamente, como $S_{e_2} : \{h = y^2 + y - x \ln(\frac{cy}{x}) = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces de los ejemplos 2.2.15 y 2.3.12, tenemos que $CS_0(\mathcal{F}, S_{e_2}) = 2$ y $GSV_0(\mathcal{F}, S_{e_2}) = 4$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_0(\mathcal{F}, B_2) = 6.$$

Por otro lado, si $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), entonces utilizando la observación 2.4.11 tenemos

$$Var_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 9.$$

Ejemplo 2.4.19. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx,$$

donde $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ y $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $a(\mathbf{0}) = 0$, $b(\mathbf{0}) = 0$.

Note que $B_1 : \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.16 y 2.3.13, tenemos $CS_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ y $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = 1$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1.$$

Similarmente, como $B_2 : \{h = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.16 y 2.3.13, tenemos $CS_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ y $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = 1$, respectivamente. Luego, usando la ecuación (2.49) de la proposición 2.4.7, se tiene

$$Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 1.$$

Por otro lado, si $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), entonces usando la observación 2.4.11 tenemos

$$Var_p(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2.$$

Ejemplo 2.4.20. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = -y(1 + \lambda x^k)dx + x^{k+1}dy,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Notemos que $B_1 : \{f = x = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.17 y 2.3.14, tenemos que $CS_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = 0$ y $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = 1$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_1) = 1.$$

Analogamente, como $B_2 : \{h = y = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} , entonces por los ejemplos 2.2.17 y 2.3.14, tenemos que $CS_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = \lambda$ y $GSV_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = k + 1$, respectivamente. Luego, utilizando la observación 2.4.9, se tiene

$$Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, B_2) = \lambda + k + 1.$$

Por otro lado, si $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), entonces utilizando la observación 2.4.11 tenemos

$$Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \lambda + k + 2.$$

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular de dimensión 1 en una superficie compleja M . Suponga que \mathbf{p} es una singularidad aislada de \mathcal{F} , S una curva compacta invariante por \mathcal{F} y $C_1(N_{\mathcal{F}}^*)$ es la clase de Chern, donde $N_{\mathcal{F}}^*$ es el fibrado conormal a \mathcal{F} , (ver [PM05]).

La siguiente proposición será de utilidad en la demostración de la proposición 2.6.5 de la sección 2.6.

Proposición 2.4.21. *Sean M una superficie compleja y $S \subset M$ una curva compacta invariante por la foliación \mathcal{F} , entonces*

$$\sum_{\mathbf{p} \in \text{sing}(\mathcal{F}) \cap S} \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S) = -C_1(N_{\mathcal{F}}^*) \cdot S .$$

Demostración. Sea $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ y tomemos un cubrimiento localmente finito $U = \{U_i\}$ de la variedad M , tal que si $p_i \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, para $i \in I - \{1, \dots, n\}$, entonces la foliación está inducida por $g_i w_i = h_i df_i = 0$, donde g_i, h_i, f_i son funciones holomorfas en U_i .

Por otro lado, si $p_i \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, $\forall i = 1, \dots, n$ entonces por el teorema 2.2.4 existe una separatriz de \mathcal{F} por p_i , digamos $S_i = \{(x, y) \in U_i : f_i(x, y) = 0\}$; $\forall i = 1, \dots, n$. Entonces, por lema 2.2.1 existe una descomposición

$$g_i w_i = k_i df_i + f_i \eta_i, \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad (2.57)$$

donde $g_i, k_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$, con k_i y f_i primos relativos no idénticamente nulos sobre S_i y gérmenes de 1-forma holomorfa η_i .

Ahora, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces por definición 1.2.36 existen funciones holomorfas φ_{ij} en $U_i \cap U_j$ tal que

$$w_j = \varphi_{ji} w_i, \quad (2.58)$$

donde $\{\varphi_{ij}\}$ es el cociclo que define $N_{\mathcal{F}}$, $N_{\mathcal{F}}$ es el fibrado normal a \mathcal{F} , ver [PM05]. Por el teorema de índice de Camacho-Sad (2.2.20), tenemos $f_i = f_{ij} f_j$, f_{ij} son funciones holomorfas en $U_i \cap U_j$. Esto quiere decir que S_i y S_j describen el mismo conjunto. Luego, definen una curva S invariante por \mathcal{F} .

Por otro lado, al tomar $\{\rho_i\}_{i \in I}$, una partición de la unidad subordinada $\{U_i\}_{i \in I}$, tenemos

$$C_1([N_{\mathcal{F}}^*])|_{U_{ik} \cap S} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma} d(\rho_{\gamma} d(\log \varphi_{\gamma_i})) \quad (2.59)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma} d\rho_{\gamma} \wedge d(\log \varphi_{\gamma_i}), \quad (2.60)$$

donde $C_1([N_{\mathcal{F}}^*])$ es la clase de Chern, ver [PM05] y [KS97].

Diferenciando la ecuación (2.57), tenemos

$$dg_i \wedge w_i + g_i dw_i = dk_i \wedge df_i + df_i \wedge \eta_i + f_i d\eta_i. \quad (2.61)$$

Restringiendo (2.57) y (2.61) a $U_i \cap S$, obtenemos

$$g_i w_i = k_i df_i \quad (2.62)$$

$$dg_i \wedge w_i + g_i dw_i = dk_i \wedge df_i + df_i \wedge \eta_i. \quad (2.63)$$

Reemplazando (2.62) en (2.63), tenemos

$$dg_i \wedge w_i + g_i dw_i = (dk_i - \eta_i) \wedge \frac{g_i}{k_i} w_i.$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned} dw_i &= \left(\frac{dk_i}{k_i} - \frac{dg_i}{g_i} - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_i \\ &= \left(d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_i. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$dw_j = \left(d\left(\log \frac{k_j}{g_j}\right) - \frac{\eta_j}{k_j} \right) \wedge w_j, \quad \text{en } U_j \cap S \quad (2.64)$$

Por otro lado, diferenciando $f_i = f_{ij} f_j$, tenemos

$$df_i = df_{ij} \cdot f_j + f_{ij} df_j, \quad (2.65)$$

y restringiendo (2.65) a $(U_i \cap U_j) \cap S$, se tiene

$$df_i = f_{ij} df_j. \quad (2.66)$$

De (2.62) y (2.66), y por la condición de cociclo ($f_i = f_{ij} f_j$), se obtiene

$$g_i w_i = k_i df_i = k_i \frac{df_j}{f_{ji}}. \quad (2.67)$$

Reemplazando (2.66), para el índice j , en (2.67), se consigue

$$g_i w_i = \frac{k_i}{f_{ji}} \frac{g_j w_j}{k_j} = \frac{k_i}{k_j} \frac{g_j}{f_{ji}} \varphi_{ji} w_i.$$

Luego,

$$\frac{k_j}{g_j} = \frac{k_i}{g_i} f_{ij} \varphi_{ji}. \quad (2.68)$$

Así, diferenciando (2.58) y reemplazando (2.64) se obtiene

$$\begin{aligned} dw_j &= \varphi_{ji} \wedge w_i + \varphi_{ji} dw_i \\ &= d\varphi_{ji} \wedge w_i + \varphi_{ji} \left(\left(d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_i \right) \\ &= d\varphi_{ji} \wedge \varphi_{ij} w_j + \left(d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right) \wedge w_j. \end{aligned}$$

Entonces,

$$dw_j = \left[d(\log(\varphi_{ji})) + d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i} \right] \wedge w_j. \quad (2.69)$$

De (2.64) y (2.68), se consigue en $U_i \cap U_j$,

$$d(\log \varphi_{ji}) = \frac{\eta_i}{k_i} - \frac{\eta_j}{k_j} + d\left(\log \frac{k_j}{g_j}\right) - d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right). \quad (2.70)$$

Haciendo, $\nu_i = d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right) - \frac{\eta_i}{k_i}$. Luego, reemplazando en $d(\log \varphi_{ji}) = \frac{\eta_i}{k_i} - \frac{\eta_j}{k_j} + d\left(\log \frac{k_j}{g_j}\right) - d\left(\log \frac{k_i}{g_i}\right)$ en $U_i \cap U_j \cap S$, tenemos

$$d(\log \varphi_{ji}) = \nu_j - \nu_i. \quad (2.71)$$

Reemplazando (2.71) en (2.60), se consigue

$$\begin{aligned} C_1([N_{\mathcal{F}}^*])|_{U_{ik} \cap S} &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma} d(\rho_{\gamma}) \wedge (\nu_{\gamma} - \nu_{ik}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} d(\rho_{ik}) \wedge \nu_{ik}. \end{aligned}$$

Puesto que, $\nu_{\gamma} = 0$ en $U_i \cap U_{\gamma} \cap S$.

Por la observación 2.2.19, existe vecindades abiertas relativamente compactas

$V_k \subset U_{ik}$ del punto p_{ik} tal que $\rho_{ik}|_{\bar{V}_k} = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{U_{ik} \cap S} C_1([N_{\mathcal{F}}^*]) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{U_{ik} \cap S} d\rho_{ik} \wedge \nu_{ik} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{V_k \cap S} d\rho_{ik} \wedge \nu_{ik} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{V_k \cap S} d(\rho_{ik} \nu_{ik}) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(V_k \cap S)} \nu_{ik} \\
&= -\text{Var}_{p_k}(\mathcal{F}, S).
\end{aligned}$$

Ahora, como

$$\int_S C_1([N_{\mathcal{F}}^*]) = \sum_{i=1}^n \int_{U_{ik} \cap S} C_1([N_{\mathcal{F}}^*]).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S} \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S) = -C_1(N_{\mathcal{F}}^*).S$$

□

Proposición 2.4.22. Sean M una superficie compleja y $S \subset M$ una curva compacta invariante por la foliación \mathcal{F} , entonces

$$\text{GSV}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S) = -C_1(N_{\mathcal{F}}^*).S - S.S$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición 2.4.21 y el teorema 2.2.20. □

2.5 Índice de exceso polar

En esta sección, definimos el número de intersección polar entre una 1- forma holomorfa w y una separatriz irreducible B . Esto permite definir el índice de exceso polar de la foliación \mathcal{F} , definida por w , respecto a una separatriz B en un punto singular \mathbf{p} , $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B)$, ver [GM18] y [FPM17]. Además, probaremos

resultados relevantes de este índice que serán de gran utilidad en la caracterización de foliaciones de tipo curva generalizada, ver [FPM17] y [GM18].

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, inducida por la 1– forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y \mathbf{p} una singularidad aislada de \mathcal{F} . Para $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, la curva polar de w con respecto a $[a : b]$ es la curva analítica $\mathcal{P}_{[a:b]}^w$ asociada a la ecuación $-aQ + bP = 0$.

Sea B una separatriz irreducible de \mathcal{F} , no contenida en el divisor polar \mathcal{B}_{∞} , que tenga a $\gamma(t)$ como una parametrización de *Puiseux*. Diremos que B es invariante por w si $\gamma^*w = 0$.

De lo anterior se sigue la siguiente definición.

Definición 2.5.1. El número de intersección polar de w y B en \mathbf{p} es el entero

$$(\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} = (\mathcal{P}_{[a:b]}^w, B)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma), \quad (2.72)$$

para $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Observación 2.5.2. El número de intersección polar está bien definido, es independiente tanto de las coordenadas como de la elección de la parametrización de *Puiseux* para B .

A continuación, utilizaremos la ecuación (2.72) para definir el índice de exceso polar.

Definición 2.5.3. Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, inducida por la 1– forma holomorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Sea B una rama de separatriz alrededor de \mathbf{p} y $\hat{F} = 0$ una ecuación equilibrada reducida de separatrices adaptada a B . El índice de exceso polar de \mathcal{F} respecto a B en $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es el entero,

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{\hat{F}}, B)_{\mathbf{p}}. \quad (2.73)$$

Para una curva de separatrices \mathcal{C} , con factores irreducibles B_1, \dots, B_r , definimos el índice de exceso polar de forma aditiva

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^r \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_i) = \sum_{i=1}^r ((\mathcal{P}^w, B_i)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{\hat{F}}, B_i)_{\mathbf{p}}).$$

Observación 2.5.4. La definición 2.5.3 es independiente de la ecuación equilibrada reducida de separatrices $\hat{F} = 0$, esto implica que, para calcular el exceso polar para una curva de multiples ramas, se puede emplear una ecuación equilibrada adaptada simultaneamente a todas sus ramas.

El caracter aditivo del índice de exceso polar nos permite extender su definición a un divisor arbitrario \mathcal{B} en $Div_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, de la siguiente manera.

Definición 2.5.5. Sea $\mathcal{B} = \sum_B a_B \cdot B$ en $Div_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, se define el *índice de exceso polar* de \mathcal{F} con respecto a \mathcal{B} en $\mathbf{p} \in Sing(\mathcal{F})$ como

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \sum_B a_B \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B)$$

Ejemplo 2.5.6. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = -y(\lambda_2 + b(x, y))dx + x(\lambda_1 + a(x, y))dy,$$

donde $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$.

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad reducida de tipo hiperbólico (ver ejemplo 1.4.16). Por otro lado, $B_1 : \{f = x = 0\}$ y $B_2 : \{g = y = 0\}$ son separatrices de \mathcal{F} , entonces una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = x \cdot y = 0$ cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = B_1 + B_2$.

Como B_1 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* dada por $\gamma(t) = (0, t)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(0, t) = t\lambda_2$ y $P \circ \gamma(t) = P(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} = ord_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = ord_{t=0}(-a(t\lambda_2) + b(0)) = 1.$$

Diferenciando $\hat{F} = x \cdot y$ tenemos $d\hat{F} = -\hat{Q}dx + \hat{P}dy = ydx + xdy$. Esto implica que $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(0, t) = -t$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, se tiene

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = ord_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = ord_{t=0}(-a(-t) + b(0)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = (\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = 1 - 1 = 0$$

Analogamente, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\gamma(t) = (t, 0)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(t, 0) = 0$, $P \circ \gamma(t) = P(t, 0) = t\lambda_1$, $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(t, 0) = 0$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(t, 0) = t$. Sustituyendo en (2.72) tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} = ord_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = ord_{t=0}(-a(0) + b(t\lambda_1)) = 1,$$

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(0) + b(t)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = (\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), usando la definición (2.5.5) tenemos que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$.

Ejemplo 2.5.7. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = -y(1 + \lambda x^k)dx + x^{k+1}dy,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Notemos que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad reducida de tipo silla-nodo (ver ejemplo 1.4.17). Por otro lado, $B_1 : \{f = x = 0\}$ y $B_2 : \{g = y = 0\}$ son separatrices de \mathcal{F} , entonces una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = x \cdot y = 0$ cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = B_1 + B_2$.

Como B_1 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* dada por $\gamma(t) = (0, t)$. Esto implica que $Q \circ \gamma(t) = Q(0, t) = t$ y $P \circ \gamma(t) = P(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(t) + b(0)) = 1.$$

Diferenciando $\hat{F} = x \cdot y$ tenemos $d\hat{F} = -\hat{Q}dx + \hat{P}dy = ydx + xdy$. Esto implica que $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(0, t) = -t$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, se tiene

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-t) + b(0)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = (\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = 1 - 1 = 0.$$

Analogamente, como B_2 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* dada por $\gamma(t) = (t, 0)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(t, 0) = 0$, $P \circ \gamma(t) = P(t, 0) = t^{k+1}$, $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(t, 0) = 0$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(t, 0) = t$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(0) + b(t^{k+1})) = k + 1,$$

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(0) + b(t)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = (\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = k + 1 - 1 = k.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), usando la definición (2.5.5) tenemos que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = k$.

Ejemplo 2.5.8. Sea \mathcal{F} una foliación no singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por la 1-forma

$$w = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy = dx.$$

Notemos que $p \in \mathbb{C}^2$ es un punto regular. Por otro lado, $B_1 : \{x = c; c \in \mathbb{C}^*\}$ y $B_2 : \{x = k; c \in \mathbb{C}^*\}$ son hojas locales de \mathcal{F} , entonces una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = c \cdot k = 0$ cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = B_1 + B_2$. Como B_1 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* $\gamma(t)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(\gamma(t)) = -1$ y $P \circ \gamma(t) = P(\gamma(t)) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-1) + b(0)) = 0.$$

Diferenciando $\hat{F} = c \cdot k$ tenemos $d\hat{F} = -\hat{Q}dx + \hat{P}dy = 0dx + 0dy = 0$. Esto implica que $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(\gamma(t)) = 0$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(\gamma(t)) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, se tiene

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(0) + b(0)) = 0.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = (\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = 1 - 1 = 0.$$

Ejemplo 2.5.9. Sea \mathcal{F} un germen de foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = -ydx + 2xdy$$

Observe que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad no reducida de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.5.14). Por otro lado, $S_c : \{f = y^2c - x = 0, c \in \mathbb{C}^*\}$ y $B_2 : \{g = y = 0\}$ son separatrices de \mathcal{F} , entonces una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = (y^2 - x) \cdot dy = 0$ cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = S_1 + B_2$.

Como S_1 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* dada por $\gamma(t) = (t^2, t)$. Esto implica que $Q \circ \gamma(t) = Q(t^2, t) = t$ y

$P \circ \gamma(t) = P(t^2, t) = 2t^2$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, S_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(t) + b(2t^2)) = 1.$$

Diferenciando $\hat{F} = (y^2 - x) \cdot x$ tenemos $d\hat{F} = -\hat{Q}dx + \hat{P}dy = -ydx + (3y^2 - x)dy$. Esto implica que $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(t^2, t) = t$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(t^2, t) = 2t^2$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, se tiene

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, S_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(t) + b(2t^2)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S_1) = (\mathcal{P}^w, S_1)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, S_1)_{\mathbf{p}} = 1 - 1 = 0.$$

Analogamente, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\gamma(t) = (t, 0)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(t, 0) = 0$, $P \circ \gamma(t) = P(t, 0) = 2t$, $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(t, 0) = 0$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(t, 0) = -t$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(0) + b(2t)) = 1,$$

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(0) + b(-t)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = (\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = 1 - 1 = 0.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = S_1 + B_2$ (divisor de separatrices), usando la definición (2.5.5) se tiene que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$.

Ejemplo 2.5.10. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad no reducida de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.5.16). Por otro lado, $B_1 : \{f = x = 0\}$ y $S_0 : \{g = y^2 - x^3 = 0\}$ son separatrices de \mathcal{F} , entonces una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = x \cdot (y^2 - x^3) = 0$ cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = B_1 + S_0$.

Como B_1 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de

Puiseux para B_1 , dada por $\gamma(t) = (0, t)$. Esto implica que $Q \circ \gamma(t) = Q(0, t) = -2t^2$ y $P \circ \gamma(t) = P(0, t) = 0$. Sustituyendo en (2.72) tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-2t^2) + b(0)) = 2.$$

Diferenciando $\hat{F} = x \cdot (y^2 - x^3)$ tenemos $d\hat{F} = -\hat{Q}dx + \hat{P}dy = (y^2 - 4x^3)dx + 2xydy$. Esto implica que $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(0, t) = -t^2$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, se tiene

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(t^2) + b(0)) = 2.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = (\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = 2 - 2 = 0.$$

Similarmente, una parametrización de *Puiseux* para S_0 , viene dada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(t^2, t^3) = -3t^6$, $P \circ \gamma(t) = P(t^2, t^3) = -2t^5$, $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(t^2, t^3) = 3t^6$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(t^2, t^3) = 2t^5$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-3t^6) + b(-2t^5)) = 5,$$

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(3t^6) + b(2t^5)) = 5.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, S_0) = (\mathcal{P}^w, S_0)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, S_0)_{\mathbf{p}} = 5 - 5 = 0.$$

Por otro lado, $\mathcal{B} = B_1 + S_0$ (divisor de separatrices), usando la definición (2.5.5) tenemos que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$.

Ejemplo 2.5.11. Sea \mathcal{F} la foliación de *Ricatti* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1-forma

$$w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy$$

Observe que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad no reducida de \mathcal{F} . Por otro lado, $B_1 : \{h = x + y = 0\}$ y $B_2 : \{f = x = 0\}$ son separatrices de la foliación \mathcal{F} , entonces una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = x \cdot (x + y) = 0$ cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = B_1 + B_2$.

Como B_1 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* para B_1 , dada por $\gamma(t) = (t, -t)$. Esto implica que $P \circ \gamma(t) = P(t, -t) =$

t^2 y $Q \circ \gamma(t) = Q(t, -t) = -t^2$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_1)_p = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-t^2) + b(t^2)) = 2.$$

Diferenciando $\hat{F} = x \cdot (x+y)$ tenemos $d\hat{F} = -\hat{Q}dx + \hat{P}dy = (2x+y)dx + xdy$. Esto implica que $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(t, -t) = -t$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(t, -t) = t$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, se tiene

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_p = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-t) + b(t)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_p(\mathcal{F}, B_1) = (\mathcal{P}^w, B_1)_p - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_p = 2 - 1 = 1.$$

Similarmente, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\gamma(t) = (0, t)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(0, t) = -t^2$, $P \circ \gamma(t) = P(0, t) = 0$, $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(0, t) = -t$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_2)_p = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-t^2) + b(0)) = 2,$$

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_p = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-t) + b(0)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_p(\mathcal{F}, B_2) = (\mathcal{P}^w, B_2)_p - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_p = 2 - 1 = 1.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), usando la definición (2.5.5) tenemos que $\Delta_p(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 2$.

Ejemplo 2.5.12. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1-forma

$$w = (x - y)dx + x^2dy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es una singularidad reducida de tipo silla-nodo de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.4.15). Por otro lado, $B_1 = \{f = x = 0\}$ y $B_2 = \{h = y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j = 0\}$ son separatrices de \mathcal{F} , entonces una ecuación equilibrada de separatrices para \mathcal{F} es $\hat{F} = x \cdot (y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j) = 0$ cuyo divisor tiene la forma $\mathcal{B} = B_1 + B_2$.

Como B_1 es una separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* dada por $\gamma(t) = (0, t)$. Esto implica que $Q \circ \gamma(t) = Q(0, t) = t$ y $P \circ \gamma(t) = P(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(t) + b(0)) = 1.$$

Diferenciando $\hat{F} = x \cdot (y - \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! x^j) = 0$ tenemos $d\hat{F} = -\hat{Q}dx + \hat{P}dy = (y - \sum_{j=1}^{\infty} (j+1)(j-1)! x^j)dx + xdy$. Esto implica que $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(0, t) = -t$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(0, t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, se tiene

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(-t) + b(0)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_1) = (\mathcal{P}^w, B_1)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_1)_{\mathbf{p}} = 1 - 1 = 0.$$

Similarmente, una parametrización de *Puiseux* para B_2 , viene dada por $\gamma(t) = (t, \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! t^j)$. Esto implica que, $Q \circ \gamma(t) = Q(t, \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! t^j) = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)! t^j$, $P \circ \gamma(t) = P(t, \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! t^j) = t^2$, $\hat{Q} \circ \gamma(t) = \hat{Q}(t, \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! t^j) = \sum_{j=1}^{\infty} (j)! t^j$ y $\hat{P} \circ \gamma(t) = \hat{P}(t, \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)! t^j) = t$. Reemplazando en la ecuación (2.72) de la definición 2.5.1, tenemos

$$(\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-aQ + bP) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(\sum_{j=2}^{\infty} (j-1)! t^j) + b(t^2)) = 2,$$

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}((-a\hat{Q} + b\hat{P}) \circ \gamma) = \text{ord}_{t=0}(-a(\sum_{j=2}^{\infty} (j-1)! t^j) + b(t)) = 1.$$

Reemplazando en la ecuación (2.73) de la definición 2.5.3, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B_2) = (\mathcal{P}^w, B_2)_{\mathbf{p}} - (\mathcal{P}^{d\hat{F}}, B_2)_{\mathbf{p}} = 2 - 1 = 1.$$

Por otro lado, para $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor de separatrices), usando la definición (2.5.5) tenemos que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 1$.

Lema 2.5.13. Sea \mathcal{F} una foliación singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por la 1-forma meromorfa $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y B una rama de separatriz de \mathcal{F} alrededor de \mathbf{p} . Sea $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una explosión en \mathbf{p} . Denotemos por \tilde{B} la transformada estricta de B y sea D el divisor tal que $q = \tilde{B} \cap D$. Entonces

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B})$$

Demostración. En el abierto $U_0 = \{[x : u] / x \neq 0\}$ de coordenadas (x, u) , con $u = \frac{y}{x}$, tenemos

$$\pi^*w = [-Q(x, xu) + uP(x, xu)]dx + xP(x, xu)du.$$

Como B es una separatriz de \mathcal{F} , entonces una parametrización de *Puiseux* es dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $\nu_{\mathbf{p}}(B) = \text{ord}_{t=0}x(t) = n$, y $\text{ord}_{t=0}y(t) > n$. Entonces la parametrización de \tilde{B} está dado por $\tilde{\gamma}(t) = \left(x(t), u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}\right)$.

Para cada $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q &= \text{ord}_{t=0}(a(-Q(x, ux) + uP(u, ux)) + bxP(x, ux) \circ \tilde{\gamma}) \\ (\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q &= \text{ord}_{t=0}(a(-Q \circ \gamma)(t) + u(t)(P \circ \gamma)(t) + bx(t)(P \circ \gamma)(t)) \\ &= \min\{\text{ord}_{t=0}(-Q \circ \gamma)(t) + u(t)(P \circ \gamma)(t), \text{ord}_{t=0}x(t)(P \circ \gamma)(t)\}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Como B es invariante por w , entonces

$$(-Q \circ \gamma)(t)x'(t) + (P \circ \gamma)(t)y'(t) = 0. \quad (2.75)$$

$$\Rightarrow (-Q \circ \gamma)(t) = -(P \circ \gamma)(t) \cdot \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (2.76)$$

Como $\text{ord}_{t=0}x(t) = n$ y $\text{ord}_{t=0}y(t) > n$, entonces $\text{ord}_{t=0}x'(t) = n - 1$ y $\text{ord}_{t=0}y'(t) \geq n$, respectivamente. Esto implica que, $\text{ord}_{t=0}\frac{y'(t)}{x'(t)} \geq 1$.

Luego, $\text{ord}_{t=0}(-Q \circ \gamma)(t) \geq \text{ord}_{t=0} - (P \circ \gamma)(t)$ y por tanto $(\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}(P \circ \gamma)(t)$.

Por otro lado, reemplazando (2.76) en $\text{ord}_{t=0}((-Q \circ \gamma)(t) + u(t)(P \circ \gamma)(t))$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{ord}_{t=0}((-Q \circ \gamma)(t) + u(t)(P \circ \gamma)(t)) &= \text{ord}_{t=0}\left(- (P \circ \gamma)(t) \frac{y'(t)}{x'(t)} + u(t)(P \circ \gamma)(t)\right) \\ &= \text{ord}_{t=0}\left[\frac{(u(t)x'(t) - y'(t))}{x'(t)}(P \circ \gamma)(t)\right] \end{aligned}$$

Como $y'(t) = u'(t) \cdot x(t) + u(t) \cdot x'(t)$, se tiene que

$$\text{ord}_{t=0}((-Q \circ \gamma)(t) + u(t)(P \circ \gamma)(t)) = \text{ord}_{t=0}\left[\frac{-u'(t)x(t)}{x'(t)}(P \circ \gamma)(t)\right]. \quad (2.77)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \text{ord}_{t=0}\left(\frac{u'x}{x'}\right) &= \text{ord}_{t=0}(u') + \text{ord}_{t=0}\left(\frac{x}{x'}\right) \\ &= \text{ord}_{t=0}u' + 1 \\ &= \text{ord}_{t=0}u. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en (2.77), tenemos que

$$\text{ord}_{t=0}((-Q \circ \gamma)(t) + u(t)(P \circ \gamma)(t)) = \text{ord}_{t=0}u(t) + \text{ord}_{t=0}(P \circ \gamma)(t)$$

Entonces, al sustituir en (2.74), se tiene

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q &= \text{mín}\{\text{ord}_{t=0}u(t) + \text{ord}_{t=0}(P \circ \gamma)(t), \text{ord}_{t=0}x(t) + \text{ord}_{t=0}(P \circ \gamma)(t)\} \\ &= \text{mín}\{\text{ord}_{t=0}u(t), \text{ord}_{t=0}x(t)\} + \text{ord}_{t=0}(P \circ \gamma)(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = \nu_q(\tilde{B}) + (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}}$, para cada $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. \square

Proposición 2.5.14. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular no-dicrítica sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por la 1-forma $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y B una rama de separatriz alrededor de \mathbf{p} . Sea $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una explosión en \mathbf{p} . Denotemos por \tilde{B} la transformada estricta de B y sea D el divisor tal que $q = \tilde{B} \cap D$. Entonces*

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}) - \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B)$$

Demostración. En el abierto $U_0 = \{[x : v]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, v) , con $v = \frac{y}{x}$, tenemos

$$\begin{aligned} \pi^*w(x, v) = w(x, xv) &= [-Q(x, xv) + vP(x, xv)]dx + xP(x, xv)dv \\ &= x^{\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})}\{-Q(1, v) + vP(1, v)\}dx + xP(1, v)dv \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\tilde{w}(x, v) = x^{-\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})}\{-Q(x, xv) + vP(x, xv)\}dx + xP(x, xv)dv$ define una foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ en U_0 .

Como B es una rama de separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de Puiseux dada por $\gamma(t) = (t^n, \phi(t))$, donde $\nu_{\mathbf{p}}(B) = n$ y $\text{ord}_{t=0}(\phi(t)) > n$.

Entonces, la parametrización de \tilde{B} está dada por: $\tilde{\gamma}(t) = (t^n, \tilde{\phi}(t) = \frac{\phi(t)}{t^n})$.

Ahora calculamos $(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q$.

Haciendo, $-\tilde{Q}(x, v) = \frac{-Q(x, xv) + vP(x, xv)}{x^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}}$ y $\tilde{P}(x, v) = \frac{xP(x, xv)}{x^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}}$, tenemos

$$\begin{aligned} -\tilde{Q}(\tilde{\gamma}(t)) &= -\tilde{Q}(t^n, \frac{\phi}{t^n}) \\ &= \frac{-Q(t^n, t^n \frac{\phi(t)}{t^n}) + \frac{\phi(t)}{t^n} P(t^n, t^n \frac{\phi(t)}{t^n})}{t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}} \\ &= \frac{[-Q(t^n, \phi(t)) + \frac{\phi(t)}{t^n} P(t^n, \phi(t))]}{t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}}, \\ &= \frac{[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))]}{t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\tilde{\gamma}(t)) &= \frac{t^n P(t^n, t^n \frac{\phi(t)}{t^n})}{t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}} \\ &= \frac{[t^n P(t^n, \phi(t))]}{t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}}, \\ &= \frac{t^n P(\gamma(t))}{t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}}. \end{aligned}$$

Luego, para cada $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q &= \text{ord}_{t=0} \{-a\tilde{Q}(\tilde{\gamma}(t)) + b\tilde{P}(\tilde{\gamma}(t))\} \\ &= \text{ord}_{t=0} \left\{ \frac{a[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))] + bt^n P(t^n, \phi(t))}{t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})}} \right\} \\ &= \text{ord}_{t=0} \{a[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))] + bt^n P(t^n, \phi(t))\} \\ &\quad - \text{ord}_{t=0} t^{\nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})} \\ &= \text{ord}_{t=0} \{a[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))] + bt^n P(t^n, \phi(t)) - \nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})\}. \quad (2.78) \end{aligned}$$

Por otro lado, como B es invariante por w , entonces

$$-Q(\gamma(t))nt^{n-1} + P(\gamma(t))\phi'(t) = 0 \quad (2.79)$$

Reemplazando (2.79) en (2.78), se tiene

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = \text{ord}_{t=0} \left\{ aP(\gamma(t)) \left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n} \right] + bt^n P(\gamma(t)) \right\} - \nu_{\mathbf{P}}(\mathcal{F})$$

$$= \text{ord}_{t=0}P(\gamma(t)) + \text{ord}_{t=0}\left\{a\left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right] + bt^n\right\} - n\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}).$$

Afirmación: $\nu_q(\tilde{B}) = \text{ord}_{t=0}\left\{a\left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right] + bt^n\right\}$ y

$$(\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}P(\gamma(t)).$$

En efecto: Como $\text{ord}_{t=0}(\phi(t)) > n$, entonces $\text{ord}_{t=0}(\phi'(t)) \geq n$. Esto implica que,

$$\text{ord}_{t=0}\left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right] < n. \quad (2.80)$$

Haciendo, $\hat{A}(t) = \left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right]$ y $\hat{B}(t) = t^n$ y usando (2.80), tenemos

$$\begin{aligned} \text{ord}_{t=0}\left\{a\left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right] + bt^n\right\} &= \text{ord}_{t=0}\{a\hat{A} + b\hat{B}\} \\ &= \min\{\text{ord}_{t=0}\hat{A}, \text{ord}_{t=0}\hat{B}\} \\ &= \nu_q(\tilde{B}). \end{aligned}$$

Por otro lado, de (2.79)

$$Q(\gamma(t)) = P(\gamma(t)) \cdot \frac{\phi'(t)}{nt^{n-1}}.$$

Luego,

$$\text{ord}_{t=0}Q(\phi(t)) = \text{ord}_{t=0}P(\gamma(t)) + \text{ord}_{t=0}\frac{\phi'(t)}{nt^{n-1}}.$$

Esto implica que, $\text{ord}_{t=0}Q(\gamma(t)) \geq \text{ord}_{t=0}P(\gamma(t))$ y por lo tanto $(\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} = \text{ord}_{t=0}P(\gamma(t))$.

Así, reemplazando en (2.78) tenemos

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}) - \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B)$$

□

Proposición 2.5.15. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular dicrítica sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por la 1-forma $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y B una rama de separatriz alrededor de \mathbf{p} . Sea $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una explosión dicrítica en \mathbf{p} . Denotemos por \tilde{B} la transformada estricta de B y sea D el divisor tal que $q = \tilde{B} \cap D$. Entonces*

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}) - (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)\nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Demostración. Como π es una explosión dicrítica en \mathbf{p} , entonces en el abierto $U_0 = \{[x : v]/x \neq 0\}$ de coordenadas (x, v) , con $v = \frac{y}{x}$, tenemos

$$\begin{aligned}\pi^*w(x, v) = w(x, xv) &= [-Q(x, xv) + vP(x, xv)]dx + xP(x, xv)dv \\ &= x^{\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1}\{[-Q(1, v) + vP(1, v)]dx + xP(1, v)dv\}\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\tilde{w}(x, v) = x^{-(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}\{[-Q(x, xv) + vP(x, xv)]dx + xP(x, xv)dv\}$ define una foliación $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ en U_0 .

Como B es una rama de separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de *Puiseux* dada por $\gamma(t) = (t^n, \phi(t))$, donde $\nu_{\mathbf{p}}(B) = n$ y $\text{ord}_{t=0}(\phi(t)) > n$. Entonces, la parametrización de \tilde{B} está dada por: $\tilde{\gamma}(t) = (t^n, \tilde{\phi}(t) = \frac{\phi(t)}{t^n})$.

Ahora calculamos $(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q$.

Haciendo, $-\tilde{Q}(x, v) = \frac{-Q(x, xv) + vP(x, xv)}{x^{\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1}}$ y $\tilde{P}(x, v) = \frac{xP(x, xv)}{x^{\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1}}$, tenemos

$$\begin{aligned}-\tilde{Q}(\tilde{\gamma}(t)) &= -\tilde{Q}\left(t^n, \frac{\phi}{t^n}\right) \\ &= \frac{-Q\left(t^n, t^n \frac{\phi(t)}{t^n}\right) + \frac{\phi(t)}{t^n} P\left(t^n, t^n \frac{\phi(t)}{t^n}\right)}{t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}} \\ &= \frac{\left[-Q\left(t^n, \phi(t)\right) + \frac{\phi(t)}{t^n} P\left(t^n, \phi(t)\right)\right]}{t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}}, \\ &= \frac{\left[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))\right]}{t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}}.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\tilde{\gamma}(t)) &= \frac{t^n P\left(t^n, t^n \frac{\phi(t)}{t^n}\right)}{t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}} \\ &= \frac{\left[t^n P\left(t^n, \phi(t)\right)\right]}{t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}}, \\ &= \frac{t^n P(\gamma(t))}{t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}}.\end{aligned}$$

Luego, para cada $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q &= \text{ord}_{t=0}\{-a\tilde{Q}(\tilde{\gamma}(t)) + b\tilde{P}(\tilde{\gamma}(t))\} \\ &= \text{ord}_{t=0}\left\{\frac{a\left[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))\right] + bt^n P\left(t^n, \phi(t)\right)}{t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)}}\right\} \\ &= \text{ord}_{t=0}\{a\left[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))\right] + bt^n P\left(t^n, \phi(t)\right)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ord_{t=0} t^{n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})+1)} \\
& = ord_{t=0} \{a[-Q(\gamma(t)) + \tilde{\phi}(t)P(\gamma(t))] + bt^n P(t^n, \phi(t))\} - n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Por otro lado, como B es invariante por w , entonces

$$-Q(\gamma(t))nt^{n-1} + P(\gamma(t))\phi'(t) = 0 \tag{2.82}$$

Reemplazando (2.82) en (2.81), se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q & = ord_{t=0} \{aP(\gamma(t))\left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right] + bt^n P(\gamma(t))\} - n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1) \\
& = ord_{t=0} P(\gamma(t)) + ord_{t=0} \{a\left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right] + bt^n\} - n(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1).
\end{aligned}$$

Usando la afirmación de la proposición (2.5.14), es decir $\nu_q(\tilde{B}) = ord_{t=0} \{a\left[\frac{-t\phi'(t) + n\phi(t)}{nt^n}\right] + bt^n\}$ y

$$(\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} = ord_{t=0} P(\gamma(t)).$$

Así, reemplazando en (2.81) tenemos

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}) - (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)\nu_{\mathbf{p}}(B)$$

□

Lema 2.5.16. Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, inducida por la 1-forma $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y $\hat{F} = 0$ una ecuación equilibrada de separatrices de \mathcal{F} . Suponga que \mathbf{p} es una singularidad aislada de \mathcal{F} y sea $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una explosión en \mathbf{p} . Entonces, para cada punto $q \in D$, singular de π^*w , el germen en q de la función meromorfa

$$\frac{\hat{F} \circ \pi}{h_q^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}) - \epsilon(D)}},$$

es una ecuación equilibrada para el germen de π^*w en q . Donde, h_q es la ecuación local de D y

$$\epsilon(D) = \begin{cases} 1, & \text{si } D \text{ es no-dicrítico} \\ 0, & \text{si } D \text{ es dicrítico} \end{cases}$$

Demostración. Ver [GM18].

□

Proposición 2.5.17. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por la 1-forma $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Suponga que \mathbf{p} es una singularidad aislada de \mathcal{F} y B una rama de separatriz alrededor de \mathbf{p} . Sea $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una explosión en \mathbf{p} . Denotemos por \tilde{B} la transformada estricta de B y sea D el divisor tal que $q = \tilde{B} \cap D$. Entonces

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \Delta_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{B}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Donde: $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ es el exceso de tangencia definido en la ecuación (1.13), \tilde{B} es la transformada estricta de B y $q \in D$ puede ser una singularidad simple o no de $\pi^* \mathcal{F}$.

En particular,

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) \geq \Delta_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{B}).$$

Además, $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}$ es una foliación de segundo tipo.

Demostración. En el abierto $U_0 = \{[x : u] / x \neq 0\}$ de coordenadas (x, u) , con $u = \frac{y}{x}$ se tiene que $\pi(x, u) = (x, xu)$ y $\pi^{-1}(\mathbf{p}) = D = \{x = 0\}$ es el divisor excepcional. Por otro lado, como B es una rama de separatriz de \mathcal{F} , entonces admite una parametrización de Puiseux dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, donde $\nu_{\mathbf{p}}(B) = \text{ord}_{t=0} x(t)$. Entonces, la parametrización de \tilde{B} está dada por $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), u(t) = \frac{y(t)}{x(t)})$. Denotemos por $\hat{F}_{\mathbf{p}}$ la ecuación equilibrada para \mathcal{F} en p y \hat{F}_q la ecuación equilibrada para $\pi^* \mathcal{F}$ en q .

Por el lema 2.5.16, una ecuación equilibrada para $\pi^* \mathcal{F}$ en q , está dada por

$$\frac{\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi}{x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)}},$$

donde $\epsilon(D) = \begin{cases} 1, & \text{si } D \text{ es no-dicrítico,} \\ 0, & \text{si } D \text{ es dicrítico.} \end{cases}$

Haciendo, $\hat{F}_q = \frac{\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi}{x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)}}$, tenemos $\hat{F}_q|_{\tilde{B}} \equiv 0$, ya que \hat{F}_q es la ecuación equilibrada para $\pi^* \mathcal{F}$ en q . Esto implica que, la relación entre $\hat{F}_{\mathbf{p}}$ y \hat{F}_q está dada por

$$\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi = x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} \cdot \hat{F}_q \quad (2.83)$$

Derivando la ecuación (2.83), se obtiene

$$d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi) = x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} d\hat{F}_q + (\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)) x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D) - 1} \cdot \hat{F}_q dx.$$

Como $\hat{F}_q|_{\tilde{B}} \equiv 0$, entonces

$$d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)|_{\tilde{B}} = x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} d\hat{F}_q. \quad (2.84)$$

Suponga que la 1- forma holomorfa $d\hat{F}_q$ está dada por

$$d\hat{F}_q = A(x, u)dx + B(x, u)du. \quad (2.85)$$

Reemplazando (2.85) en (2.84), tenemos

$$d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)|_{\tilde{B}} = x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} A(x, u)dx + x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} B(x, u)du.$$

Ahora calculamos $(\mathcal{P}^{d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)}, \tilde{B})_q$.

Haciendo, $\bar{A}(x, u) = x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} A(x, u)$ y $\bar{B}(x, u) = x^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} B(x, u)$, tenemos

$$d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)|_{\tilde{B}} = \bar{A}(x, u)dx + \bar{B}(x, u)du.$$

Luego, para cada $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)}, \tilde{B})_q &= \text{ord}_{t=0} \{a\bar{A}(\gamma(\tilde{t})) + b\bar{B}(\gamma(\tilde{t}))\} \\ &= \text{ord}_{t=0} \{a[x(t)^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} A(\gamma(\tilde{t}))] + b[x(t)^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} B(\gamma(\tilde{t}))]\} \\ &= \text{ord}_{t=0} \{x(t)^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} (a[A(\gamma(\tilde{t}))] + b[B(\gamma(\tilde{t}))])\} \\ &= \text{ord}_{t=0} \{x(t)^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)}\} + \text{ord}_{t=0} \{aA(\gamma(\tilde{t})) + bB(\gamma(\tilde{t}))\} \\ &= \text{ord}_{t=0} x(t)^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} + (\mathcal{P}^{d\hat{F}_q}, \tilde{B})_q. \end{aligned}$$

Se tiene

$$(\mathcal{P}^{d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)}, \tilde{B})_q = \text{ord}_{t=0} x(t)^{\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D)} + (\mathcal{P}^{d\hat{F}_q}, \tilde{B})_q. \quad (2.86)$$

Por el lema 2.5.13, para $(\mathcal{P}^{d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)}, \tilde{B})_q$ tenemos

$$(\mathcal{P}^{d(\hat{F}_{\mathbf{p}} \circ \pi)}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}). \quad (2.87)$$

Reemplazando (2.87) en (2.86), se consigue

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}) = (\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D))\nu_{\mathbf{p}}(B) + (\mathcal{P}^{d\hat{F}_q}, \tilde{B})_q.$$

Entonces,

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, B)_{\mathbf{p}} - (\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - \epsilon(D))\nu_{\mathbf{p}}(B) + \nu_q(\tilde{B}). \quad (2.88)$$

Ahora, si \mathcal{F} es no-dicrítica, entonces $\epsilon(D) = 1$. Reemplazando en (2.88), se tiene que

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, B)_{\mathbf{p}} - (\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}) - 1)\nu_{\mathbf{p}}(B) + \nu_q(\tilde{B}). \quad (2.89)$$

Además, por la proposición 2.5.14, tenemos

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}) - \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B). \quad (2.90)$$

Restando (2.90)-(2.89) y usando la definición 2.5.3, se obtiene

$$\Delta_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{B})_q = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) - (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1 - \nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}))\nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Utilizando, la proposición 1.5.11, tenemos

$$\Delta_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{B}) = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) - \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Analogamente, si \mathcal{F} es dicrítica, entonces $\epsilon(D) = 0$. Reemplazando en (2.88), se tiene que

$$(\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^{d\hat{F}_{\mathbf{p}}}, B)_{\mathbf{p}} - (\nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}))\nu_{\mathbf{p}}(B) + \nu_q(\tilde{B}) \quad (2.91)$$

Además, por la proposición 2.5.15, tenemos

$$(\mathcal{P}^{\pi^*w}, \tilde{B})_q = (\mathcal{P}^w, B)_{\mathbf{p}} + \nu_q(\tilde{B}) - (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)\nu_{\mathbf{p}}(B). \quad (2.92)$$

Restando (2.92)-(2.91) y usando la definición 2.5.3, se obtiene

$$\Delta_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{B})_q = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) - (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1 - \nu_{\mathbf{p}}(\hat{F}_{\mathbf{p}}))\nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Utilizando, la proposición 1.5.11, tenemos que

$$\Delta_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{B}) = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) - \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Por las definiciones 1.5.1 y 1.5.5, se tiene que $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) \geq 0$ y $\nu_{\mathbf{p}}(B) \geq 0$, respectivamente. Esto implica que

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) \geq \Delta_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{B}).$$

Además, $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$ si y solo si \mathcal{F} es una foliación de segundo tipo. *En efecto*, si $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$, entonces $SN(\mathcal{F}) = \emptyset$. Esto implica que, \mathcal{F} es una foliación de segundo tipo.

Si \mathcal{F} es una foliación de segundo tipo, entonces por la definición 1.5.3, \mathcal{F} no posee silla-nodo tangente en su proceso de reducción, es decir $SN(\mathcal{F}) = \emptyset$. Esto implica que, $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$. \square

Observación 2.5.18. Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por la 1-forma $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ y B una rama de separatriz alrededor de \mathbf{p} . Sea $\pi_1 : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D^{(1)}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ la explosión en \mathbf{p} , con divisor $D^{(1)} = \pi_1^{-1}(\mathbf{p})$ y suponga que $\mathcal{F}^{(1)}$ es la transformación estricta de \mathcal{F} y $B^{(1)}$ es la transformada estricta de B . Entonces, utilizando la proposición 2.5.17, tenemos

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \Delta_{q_1}(\mathcal{F}^{(1)}, B^{(1)}) + \nu_{\mathbf{p}}(B)\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}), \quad (2.93)$$

donde $q_1 = B^{(1)} \cap D^{(1)}$.

Ahora, suponga que si q_1 es un punto singular de $\mathcal{F}^{(1)}$, entonces realizando una explosión π_2 en q_1 , con divisor $D^{(2)} = \pi_2^{-1}(q_1)$ y utilizando la proposición 2.5.17, tenemos

$$\Delta_{q_1}(\mathcal{F}^{(1)}, B^{(1)}) = \Delta_{q_2}(\mathcal{F}^{(2)}, B^{(2)}) + \nu_{q_1}(B^{(1)})\tau_{q_1}(\mathcal{F}^{(1)}),$$

donde $B^{(2)}$ es la transformada estricta de $B^{(1)}$, $q_2 = B^{(2)} \cap D^{(2)}$ y $\mathcal{F}^{(2)}$ es la transformada estricta de $\mathcal{F}^{(1)}$. Notemos que si q_2 es un punto singular de $\mathcal{F}^{(2)}$, entonces realizando una explosión π_3 en q_2 , con divisor $D^{(3)} = \pi_3^{-1}(q_2)$ y utilizando la proposición 2.5.17, tenemos

$$\Delta_{q_2}(\mathcal{F}^{(2)}, B^{(2)}) = \Delta_{q_3}(\mathcal{F}^{(3)}, B^{(3)}) + \nu_{q_2}(B^{(2)})\tau_{q_2}(\mathcal{F}^{(2)}),$$

donde $B^{(3)}$ es la transformada estricta de $B^{(2)}$, $q_3 = B^{(3)} \cap D^{(3)}$ y $\mathcal{F}^{(3)}$ es la transformada estricta de $\mathcal{F}^{(2)}$.

Por recurrencia, realizando n explosiones en torno de puntos singulares q_i para $i = 1, \dots, n$ cerca de \mathbf{p} , se tiene

$$\Delta_{q_{n-1}}(\mathcal{F}^{(n-1)}, B^{(n-1)}) = \Delta_{q_n}(\mathcal{F}^{(n)}, B^{(n)}) + \nu_{q_{n-1}}(B^{(n-1)})\tau_{q_{n-1}}(\mathcal{F}^{(n-1)}),$$

donde $B^{(n)}$ es la transformada estricta de $B^{(n-1)}$, $q_{n-1} = B^{(n-1)} \cap D^{(n-1)}$ y $\mathcal{F}^{(n)}$ es la transformada estricta de $\mathcal{F}^{(n-1)}$.

De lo anterior, se sigue la siguiente relación

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \Delta_{q_n}(\mathcal{F}^{(n)}, B^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_{q_i}(B^{(i)})\tau_{q_i}(\mathcal{F}^{(i)}) + \nu_{\mathbf{p}}(B)\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}).$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \Delta_{q_n}(\mathcal{F}^{(n)}, B^{(n)}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}).$$

Observación 2.5.19. Note que los cálculos de $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B)$, en los ejemplos 2.5.6 y 2.5.7, se realizan para una separatriz B reducida, obteniendo

1. Si \mathcal{F} es una foliación no singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, entonces $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$.
2. Si \mathbf{p} es una singularidad reducida de tipo hiperbólica de \mathcal{F} , entonces $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$.
3. Si \mathbf{p} es una singularidad reducida de tipo silla-nodo de \mathcal{F} , entonces existen dos posibilidades:
 - a) Si B es una rama de separatriz analítica, entonces $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$.
 - b) Si B es una rama de separatriz formal, entonces $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = k > 0$.

Observación 2.5.20. De la observación 2.5.18, se tiene

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}); & \text{si } B \text{ es separatriz analítica(fuerte)} \\ & \text{o dicrítica,} \\ k + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}); & \text{si } B \text{ es separatriz débil,} \end{cases}$$

donde $k + 1$ es el índice débil asociado a B . Esto implica que, $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) \geq 0$. Además, $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$ si y solo si la foliación \mathcal{F} es de segundo tipo y B es una separatriz dicrítica o aislada asociada a una singularidad del tipo hiperbólica.

Observación 2.5.21. El índice de exceso polar mide la existencia de singularidad del tipo silla nodo en la desingularización de \mathcal{F} . En efecto, por la observación 2.5.20, se tiene que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}})$, si B es una separatriz fuerte o dicrítica.

Ahora, suponga que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$, entonces $\nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$. Esto implica que $\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, ya que $\nu_q(\tilde{B}) > 0$. Entonces, no existen silla-nodo tangente en su proceso de reducción de \mathcal{F} , es decir $SN(\mathcal{F}) = \emptyset$.

Por otro lado, suponga que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) > 0$, entonces $\nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) > 0$, para algún $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$. Esto implica que $\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) > 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, ya que $\nu_q(\tilde{B}) > 0$. Entonces, existe silla-nodo tangente en su reducción de singularidades de \mathcal{F} .

Análogamente, por la observación 2.5.20, se tiene que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = k + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}})$, si B es una separatriz débil.

Ahora, suponga que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$, entonces $k = 0$ y $\nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$. Lo cual es una contradicción con el índice débil $k + 1 > 1$ de la separatriz débil B . Entonces, todas las separatrices son fuertes o dicríticas y por lo tanto, no existen sillanodos en \mathcal{F} .

Por otro lado, suponga que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) > 0$, entonces $k > 0$ y $\nu_q(\tilde{B})\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) > 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$. Esto implica que $\tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) > 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, ya que $\nu_q(\tilde{B}) > 0$. Entonces, existe silla-nodo tangente en su reducción de singularidades de \mathcal{F} .

Proposición 2.5.22. \mathcal{F} es una foliación de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ si y solo si $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$, para cualquier divisor de separatrices \mathcal{B} .

Demostración. Suponga que \mathcal{F} es una foliación de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, entonces \mathcal{F} posee en su reducción de singularidades puntos regulares o singularidades de tipo hiperbólica y todas sus separatrices son dicríticas o analíticas. Luego, por la observación 2.5.20, se tiene $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$, para cada $B \in \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, y por lo tanto, utilizando la definición la definición 2.5.5 tenemos que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$, para cualquier divisor de separatrices y en particular para un divisor equilibrado.

Ahora suponga que \mathcal{D} es el divisor de la desingularización de \mathcal{F} , entonces existe al menos una separatriz aislada que es transversal a cada componente no-dicrítica $\bar{D} \subset \mathcal{D}$, (ver [MOL02]). Esto implica que, el número de separatrices aisladas es por lo menos $1 + \sum_D (\text{Val}(D) - 1)$, donde la suma está sobre todas las componentes dicríticas $D \subset \mathcal{D}$. En efecto, suponga que $D \subset \mathcal{D}$ es una componente dicrítica. Haciendo $\text{Val}(D) = n$, n es un número natural.

Para $n = 1$, D intersecta a una componente no-dicrítica y existe al menos una separatriz aislada que es transversal a una componente no-dicrítica. Observe que podemos escribir $1 = 1 + n - 1 = 1 + \text{Val}(D) - 1$

Para $n = k$, D intersecta a k componentes no-dicríticas y existe por lo menos k separatrices aisladas que son transversales a cada componente no-dicrítica. Note que podemos escribir $k = 1 + n - 1 = 1 + \text{Val}(D) - 1$

Para $n = k + 1$, probar que existen al menos $k + 1$ separatrices aisladas que son transversales a cada componente no-dicrítica. En efecto, Tenemos $k = 1 + \text{Val}(D) - 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow k + 1 &= 1 + \text{Val}(D) - 1 + 1, \\ &= 1 + k + 1 - 1, \\ &= 1 + n - 1, \\ &= 1 + \text{Val}(D) - 1. \end{aligned}$$

Esto implica que, existen por lo menos $k + 1$ separatrices aisladas que son transversales a cada componente no-dicrítica.

Tomando la suma sobre todas las componentes dicríticas $D \subset \mathcal{D}$, tenemos que el número de separatrices aisladas es por lo menos $1 + \sum_D (Val(D) - 1)$.

Sea \mathcal{B} un divisor equilibrado primitivo y $D \subset \mathcal{D}$ una componente dicrítica de $Val(D) > 2$. Por la definición 1.5.6, el divisor polar \mathcal{B}_∞ contiene $Val(D) - 2$ separatrices de $Sep_{\mathbf{p}}(D)$. Notemos que D aparece en el proceso de desingularización como un componente de valencia 0, 1 o 2. Note que las $(Val(D) - 2)$ separatrices son transversales a la componente no invariante D y su intersección es una singularidad no esquina. Esto implica que se explotarán $(Val(D) - 2)$ puntos de D en los pasos posteriores del proceso de reducción.

Entonces, en cada separatriz dicrítica B en \mathcal{B}_∞ , podemos asociar de manera inyectiva una separatriz aislada \tilde{B} . De la observación 2.5.20, se tiene que

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \tilde{B}) \geq \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B). \quad (2.94)$$

Denotando por, $\tilde{\mathcal{B}}_0$ el divisor obtenido al sumar las \tilde{B} . Esto implica que

$$\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{B}}_0 - \mathcal{B}_\infty) \geq 0.$$

Ahora, descomponiendo $\mathcal{B}_0 = \hat{\mathcal{B}}_0 + \tilde{\mathcal{B}}_0$ como una suma de divisores efectivos, donde $\hat{\mathcal{B}}_0$ es no-trivial. Entonces

$$0 = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_0) - \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_\infty) = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{B}}_0) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{B}}_0 - \mathcal{B}_\infty).$$

Como $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{B}}_0) \geq 0$ y $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{B}}_0 - \mathcal{B}_\infty) \geq 0$, entonces $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \hat{\mathcal{B}}_0) = 0$. Esto implica que, $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) = 0$ para cada separatriz B en $\hat{\mathcal{B}}_0$. Luego, utilizando la ecuación de la observación 2.5.20, se tiene que \mathcal{F} es de segundo tipo y que cada separatriz aislada B en $\hat{\mathcal{B}}_0$ es una separatriz fuerte. En cuanto a las separatrices en $\tilde{\mathcal{B}}_0$ note que la desigualdad (2.94) es una igualdad cuando \tilde{B} es una separatriz fuerte.

Entonces, \mathcal{F} es una foliación de segundo tipo que solo tiene separatrices fuertes y por lo tanto, \mathcal{F} es una foliación de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. \square

Teorema 2.5.23. *Sea \mathcal{F} un germen de foliación singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$. Sea C una curva de separatrices y \mathcal{B} un divisor equilibrado adaptado a C . Entonces*

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, C) = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, C) + (C, B_0 - C)_{\mathbf{p}} - (C, B_\infty)_{\mathbf{p}}$$

En particular, cuando \mathcal{F} es no-dicrítica y C es el conjunto completo de separatrices, entonces

$$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, C) = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, C).$$

Ver [GM18].

A continuación, definimos el invariante $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$, a partir del índice de variación y el índice de exceso polar. Este invariante será de gran utilidad en la caracterización de foliaciones de segundo tipo, ver [FPM17] y será pieza clave en el capítulo 3.

2.6 Segundo índice de variación

En esta sección, definimos el segundo índice de variación $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ de una foliación \mathcal{F} sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ a lo largo de su separatriz \mathcal{C} . Además, describimos su comportamiento bajo una explosión el cual es descrito en el lema 2.6.4 y la proposición 2.6.5. Estos resultados serán pieza clave en el capítulo 3.

Definición 2.6.1. Sea \mathcal{F} la foliación holomorfa sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por una 1-forma $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$, con $Sing(\mathcal{F}) = \{\mathbf{p}\}$ y \mathcal{C} una curva de separatriz de \mathcal{F} . Definimos el segundo índice de variación de \mathcal{F} en \mathbf{p} a lo largo de \mathcal{C} como

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C}).$$

Donde, $Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ y $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ son el índice de variación y el índice de exceso polar, respectivamente.

Observación 2.6.2. Los índices de variación y de exceso polar satisfacen la propiedad aditiva en las separatrices, ver la definición 2.5.5 y la observación 2.4.11. De la definición 2.6.1 la propiedad aditiva es heredada por el *segundo índice de variación*. Por lo tanto, podemos definirlo para un divisor de separatrices \mathcal{B} , en particular para un divisor de separatrices equilibrado. Así, para \mathcal{B} un divisor equilibrado de separatrices, se define el segundo índice de variación total como

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}). \quad (2.95)$$

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ inducida por una 1-forma $w(x, y) = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$. Si $\mathbf{p} \in Sing(\mathcal{F})$, entonces por teorema 2.2.4 existe $S = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$ es separatriz de w pasando por \mathbf{p} . Ahora, suponga que $\nu_{\mathbf{p}}(S) = m$, entonces f puede ser escrito como

$$f = \sum_{j=m}^{\infty} f_j(x, y),$$

donde f_j es un polinomio homogéneo de grado j .

Realizando una explosión $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, en el punto \mathbf{p} , se tiene

$$\pi^* f(x, t) = \tilde{f}(x, xt) = x^m \sum_{j=m}^{\infty} f_j(1, t), \text{ en coordenadas } (x, t) \quad (2.96)$$

$$\pi^* f(s, y) = \tilde{f}(sy, y) = y^m \sum_{j=m}^{\infty} f_j(s, 1), \text{ en coordenadas } (s, y), \quad (2.97)$$

esto es, $\pi^{-1}(S) = D \cup \pi^*(S)$ donde: $D = \pi^{-1}(\mathbf{p})$ y $\pi^*(S) = \overline{\pi^{-1}(S - \{\mathbf{p}\})}$ es llamada la transformada estricta de S . A partir de aquí, denotaremos por $\tilde{S} = \pi^*(S)$. Observe que \tilde{S} no siempre es una separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$, pues la explosión π en \mathbf{p} puede ser dicrítica (ver ejemplo 1.5.16, de la sección 1.5).

Denotemos por $M = \nu_p(\mathcal{F}) + 1$ o $M = \nu_p(\mathcal{F})$ en caso π sea una explosión dicrítica o no dicrítica, respectivamente. Entonces, por la ecuación (2.96)

$$\begin{aligned} \pi^* w &= x^M \tilde{w}, \\ \pi^* f &= x^m \tilde{f}. \end{aligned}$$

Por el lema 2.2.1, para la separatriz S , tenemos que existen g y $k \in \mathbb{C}[[x, y]]$ no idénticamente nulos sobre S y un germen de 1- forma holomorfa η , tal que

$$gw = kdf + f\eta. \quad (2.98)$$

Ahora, supongamos que π es una explosión no-dicrítica y \tilde{S} es una separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$. El Pull back de la descomposición de la ecuación (2.98), está dado por

$$\begin{aligned} (g \circ \pi)\pi^* w &= (k \circ \pi)\pi^* df + (f \circ \pi)\pi^* \eta \\ \Rightarrow (g \circ \pi)x^M \tilde{w} &= (k \circ \pi)mx^{m-1} \tilde{f} dx + (k \circ \pi)x^m d\tilde{f} + x^m \tilde{f} \pi^* \eta. \end{aligned}$$

Haciendo, $g_0 = (g \circ \pi)x^M$, $k_0 = (k \circ \pi)x^m$ y $\eta_0 = (k \circ \pi)mx^{m-1} dx + x^m \pi^* \eta$, podemos escribir

$$g_0 \tilde{w} = k_0 d\tilde{f} + \tilde{f} \eta_0.$$

Luego, al calcular los índices de *Camacho-Sad* y *Gomez Mont Seade-Verjovsky*, para la separatriz \tilde{S} tenemos

$$\begin{aligned} CS_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{S}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} \frac{\eta_0}{k_0}, \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} \frac{(k \circ \pi)mx^{m-1} dx + x^m \pi^* \eta}{(k \circ \pi)x^m}, \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} m \frac{dx}{x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} \frac{\pi^* \eta}{\pi^* k}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow CS_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{S}) = -m^2 + CS_p(\mathcal{F}, S) \quad (2.99)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} GSV_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{S}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} \left(\frac{g_0}{k_0} \right) d\left(\frac{k_0}{g_0} \right), \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} \frac{(g \circ \pi)x^M}{(k \circ \pi)x^m} d\left(\frac{(k \circ \pi)x^m}{(g \circ \pi)x^M} \right), \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} \frac{(g \circ \pi)}{(k \circ \pi)} x^{M-m} \left(d\left(\frac{(k \circ \pi)}{(g \circ \pi)} \right) x^{m-M} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k \circ \pi}{g \circ \pi} \right) (m-M)x^{m-M-1} dx \right), \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} \frac{(g \circ \pi)}{(k \circ \pi)} d\left(\frac{k \circ \pi}{g \circ \pi} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}} (m-M) \frac{dx}{x}, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{g}{k} d\left(\frac{k}{g} \right) + m(m-M). \\ &\Rightarrow GSV_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{S}) = GSV_p(\mathcal{F}, S) + m^2 - mM. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Sumando (2.99) y (2.100) resulta

$$Var_q(\pi^* \mathcal{F}, \tilde{S}) = Var_p(\mathcal{F}, S) - \nu_p(\mathcal{F})\nu_p(S). \quad (2.101)$$

A continuación describimos el comportamiento del segundo índice de variación $\xi_p(\mathcal{F}, B)$ bajo una explosión $\sigma : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ en \mathbf{p} . Denotaremos por $\sigma^* \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$ y $\sigma^* B = \tilde{B}$, la transformada estricta de la foliación \mathcal{F} y de una rama de separatriz $B \in Sep_p(\mathcal{F})$, respectivamente.

De lo anterior, se sigue la siguiente definición.

Definición 2.6.3. Un divisor de separatrices $\mathcal{B} = \sum_B a_B B$, se dice que es de orden $q \in D$ si $\tilde{B} \cap D = q$, cuando $a_B \neq 0$. Si \mathcal{B} es un divisor de separatrices de orden q , la transformación estricta de \mathcal{B} se define como $\tilde{\mathcal{B}} = \sum_B a_B \tilde{B}$, donde $\tilde{\mathcal{B}}$ es un divisor de separatrices para $\tilde{\mathcal{F}}$ en $q \in D$.

Lema 2.6.4. Sea $\sigma : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una explosión en $p \in \mathbb{C}^2$ y si $q = \tilde{B} \cap D$, entonces

$$\xi_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{B}) = \xi_p(\mathcal{F}, B) - (m_p(\mathcal{F}) + \tau_p(\mathcal{F}))\nu_p(B),$$

donde $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ es el exceso de tangencia de \mathcal{F} en \mathbf{p} , $\nu_{\mathbf{p}}(B)$ es la multiplicidad algebraica de B en \mathbf{p} y

$$m_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}), & \text{si } \sigma \text{ es no-dicrítica} \\ \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1, & \text{si } \sigma \text{ es dicrítica.} \end{cases}$$

Además, si \mathcal{B} es un divisor de separatrices de orden $q \in D$, entonces

$$\xi_{\mathbf{p}}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) - (m_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}))\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}). \quad (2.102)$$

Demostración. Sea una rama $B \subset \text{Sep}_{\mathbf{p}}\mathcal{F}$, entonces utilizando la proposición 2.5.17, se tiene

$$\Delta_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{B}) = \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) - \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B). \quad (2.103)$$

Además, por la ecuación (2.101) tenemos

$$\text{Var}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{B}) = \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) - m_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})\nu_{\mathbf{p}}(B). \quad (2.104)$$

Sumando (2.103) y (2.104), obtenemos

$$\xi_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{B}) = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, B) - (m_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}))\nu_{\mathbf{p}}(B). \quad \square$$

Ahora, examinamos la segunda variación total. Tenemos $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$, donde \mathcal{B} es un divisor equilibrado de separatrices. Suponga que los puntos D -singulares de $\tilde{\mathcal{F}}$ son q_1, q_2, \dots, q_l . Para calcular el total ξ en estos puntos, necesitamos relacionar la transformada estricta de \mathcal{B} con divisores equilibrados en los puntos $q_j, j = 1, \dots, l$. Denotando por $S(q_j) \subset \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ el subconjunto de todas las separatrices de orden $q_j \in D$ y descomponiendo

$$\mathcal{B} = \sum_{B \in \text{Sep}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} a_B \cdot B = \sum_{j=1}^l \sum_{B \in S(q_j)} a_B \cdot B = \sum_{j=1}^l \mathcal{B}_j,$$

donde $\mathcal{B}_j = \sum_{B \in S(q_j)} a_B \cdot B$. Denotando por $\tilde{\mathcal{B}}_j$ la transformada estricta de \mathcal{B}_j .

- σ es una explosión no-dicrítica, lo que significa que el divisor excepcional es $\tilde{\mathcal{F}}$ -invariante. Entonces $\tilde{\mathcal{B}}_j + D$ es un divisor equilibrado para $\tilde{\mathcal{F}}$ en q_j , donde D denota el germen del divisor excepcional en q_j .
- σ es una explosión dicrítica, tal que el divisor excepcional no es $\tilde{\mathcal{F}}$ -invariante. Entonces $\tilde{\mathcal{B}}_j$ es un divisor equilibrado para $\tilde{\mathcal{F}}$ en q_j .

Proposición 2.6.5. Sea $\sigma : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ una explosión en $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$. Suponga que q_1, q_2, \dots, q_l son los puntos D -singulares de $\tilde{\mathcal{F}}$. Entonces:

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\mathcal{F}) + \nu_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) - \tau_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) & \text{si } \sigma \text{ es no-dicrítica} \\ \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\mathcal{F}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)^2 - \tau_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) & \text{si } \sigma \text{ es dicrítica} \end{cases}$$

Demostración. Dividimos la prueba en dos partes.

Parte 1. El caso no-dicrítico. El índice total ξ en cada q_j , $j = 1, \dots, l$ es

$$\xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) = \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{B}_j + D) = \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{B}_j) + \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D), \quad (2.105)$$

ya que ξ es aditivo. Al calcular $\xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D)$, utilizando la definición 2.6.1, se tiene

$$\sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = \sum_{j=1}^l \text{Var}_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) + \sum_{j=1}^l \Delta_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D). \quad (2.106)$$

Por la proposición 2.4.21, tenemos

$$\sum_{j=1}^l \text{Var}_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = (C_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}))D = (-\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})D).D = \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}). \quad (2.107)$$

Como σ es una explosión no-dicrítica, entonces $\tilde{B}_j + D$ es un divisor equilibrado de separatrices en $q_j \in D$, $\forall j = 1, \dots, l$. Luego, al usar el teorema 2.5.23, se tiene

$$\sum_{j=1}^l \Delta_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = \sum_{j=1}^l \text{GSV}_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) - \sum_{j=1}^l (D, \tilde{B}_j)_{q_j} \quad (2.108)$$

Ahora, usamos la proposición 2.4.22 para calcular la suma de los índices *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* a lo largo de D

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \text{GSV}_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) &= C_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}).D - D.D, \\ &= (-\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}).D).D + 1, \\ &= \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1. \end{aligned}$$

Ya que $\sum_{j=1}^l (D, \tilde{B}_j)_{q_j} = \sum_{j=1}^l \nu_{\mathbf{p}}(\tilde{B}_j) = \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B})$, y por la proposición 1.5.11, reemplazando en (2.108), tenemos

$$\sum_{j=1}^l \Delta_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1 - \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}) = \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}). \quad (2.109)$$

Reemplazando (2.107) y (2.109) en (2.106), se obtiene

$$\sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, D) = \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}). \quad (2.110)$$

Luego, sustituyendo (2.110) en (2.105), se tiene

$$\sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) = \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{B}}_j) + \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}). \quad (2.111)$$

Ahora, utilizando el lema 2.6.4, obtenemos

$$\sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{B}}_j) = \sum_{j=1}^l \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j) - (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})) \sum_{j=1}^l \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}_j), \quad (2.112)$$

$$= \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})) \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}). \quad (2.113)$$

De las ecuaciones (2.111) y (2.112), se tiene

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}))(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}) - 1), \\ &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}))(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})), \\ &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + \nu_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) - \tau_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Parte 2. Caso dicrítico. Ahora $\tilde{\mathcal{B}}_j$ es un divisor equilibrado de separatrices para $\tilde{\mathcal{F}}$ en q_j . Entonces del lema 2.6.4 y la proposición 1.5.11, se tiene

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_j), \\ &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{B}}_j) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1 + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})) \sum_{j=1}^l \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}_j), \\ &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1 + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})) \nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{B}), \\ &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\mathcal{F}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1 + \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}))(\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1 - \tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})), \\ &= \sum_{j=1}^l \xi_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)^2 - \tau_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

□



Capítulo 3

Resultado principal.

Estamos interesados en el estudio local de las foliaciones holomorfas en torno a sus singularidades. En un espacio ambiente de dimensión dos, los tipos más sencillos de singularidades son aquellos definidos por un campo lineal. Por otro lado, a las foliaciones sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ sin parte lineal se les puede aplicar un proceso de reducción de singularidades hasta obtener singularidades simples definidos por campos lineales. En este capítulo describiremos la relación entre el segundo índice de variación total $(\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}))$ y el índice de Baum-Bott $(BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}))$ para foliaciones reducidas o no. El objetivo es caracterizar los gérmenes de foliaciones holomorfas sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ de segundo tipo. Finalmente enunciamos y demostramos el resultado principal del trabajo, teorema 3.0.7.

Observación 3.0.1. Toda foliación reducida es no dicrítica. *En efecto*, suponga que \mathcal{F} es un germen de foliación reducida sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, entonces por la definición 1.4.20, se tiene que \mathbf{p} es una singularidad simple.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathbf{p} = (0, 0)$.

Supongamos que \mathbf{p} es una singularidad de tipo hiperbólica, existen coordenadas analíticas en (x, y) en las que \mathcal{F} es inducida por la 1-forma

$$w = x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx,$$

donde $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $a(\mathbf{0}) = 0$, $b(\mathbf{0}) = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$. Además, observe que las únicas separatrices son $B_1 : \{x = 0\}$ y $B_2 : \{y = 0\}$, (ver ejemplo 1.4.16) y por lo tanto, \mathcal{F} es no-dicrítica.

Ahora, si \mathbf{p} es una singularidad tipo silla-nodo, existen coordenadas (x, y) en las que la foliación \mathcal{F} es inducida por la 1-forma

$$w = -y(1 + \lambda x^v)dx + x^{v+1}dy,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in \mathbb{Z}_{>0}$. Observe que las únicas separatrices son $B_1 : \{x = 0\}$ y $B_2 : \{y(x) = 0\}$, (ver ejemplo 1.4.17) y por lo tanto, \mathcal{F} es no-dicrítica.

Observación 3.0.2. Para \mathcal{F} una foliación holomorfa no reducida sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, se tiene la siguiente descomposición

$$\sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q^2(\mathcal{F}) = \tau_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) + \sum_{j=1}^l \left(\sum_{q \in \mathcal{I}_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}})} \tau_q^2(\tilde{\mathcal{F}}) \right).$$

Lema 3.0.3. Sea \mathcal{F} un germen de foliación reducida sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ y \mathcal{B} un divisor equilibrado de separatrices, entonces

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$$

Demostración. Si \mathcal{F} es reducida entonces por la observación 3.0.1, tenemos que \mathcal{F} es no-dicrítica. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathbf{p} = (0, 0)$.

Por otro lado, sea $\mathcal{B} = B_1 + B_2$ (divisor equilibrado de separatrices), como \mathcal{F} es no-dicrítica, entonces por el teorema 2.5.23, se tiene que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$. Por la observación 2.6.2, tenemos

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}). \quad (3.1)$$

Si \mathbf{p} es una singularidad hiperbólica, de los ejemplos 2.3.13 y 2.4.19, tenemos

$GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$ y $Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2$, respectivamente. Sustituyendo

en (3.1), se tiene $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2$. Por otro lado, por definición 2.1.1

(ecuación 2.2) tenemos $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2$. Por lo tanto,

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}).$$

Ahora, si \mathbf{p} es una singularidad tipo silla-nodo, de los ejemplos 2.3.14 y 2.4.20 tenemos $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = v$ y $Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = v + 2 + \lambda$, respectivamente. Sustituyendo en la ecuación (3.1), se tiene $\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 2v + 2 + \lambda$. Por otro

lado, por definición 2.1.1 (ecuación 2.2), se tiene $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 2v + 2 + \lambda$. Por lo tanto,

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}).$$

□

A continuación presentamos la versión del teorema 3.0.3 en el caso de que \mathcal{F} es no reducida.

Teorema 3.0.4. *Sea \mathcal{F} un germen de foliación singular en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ y \mathcal{B} un divisor equilibrado de separatrices, entonces*

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2,$$

donde la suma está sobre todos los puntos infinitamente cercanos de \mathcal{F} en \mathbf{p} .

Demostración. Tras una explosión en \mathbf{p} , $\sigma : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathcal{F}^2, \mathbf{p})$, de la observación 2.1.8, se tiene

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^l BB_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + \nu_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) & \text{si } \sigma \text{ es no-dicrítica,} \\ \sum_{j=1}^l BB_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) + (\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) + 1)^2 & \text{si } \sigma \text{ es dicrítica.} \end{cases}$$

Definamos

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) - \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2. \quad (3.2)$$

Si \mathcal{F} es reducida, entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \{\mathbf{p}\}$ y $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$. Reemplazando en la ecuación (3.2) tenemos

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}).$$

Por el lema 3.0.3, se tiene que $\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$. Obteniendo el teorema 3.0.3.

Ahora, si \mathcal{F} es no-reducida, entonces por la observación 3.0.2, tenemos

$$\sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q^2(\mathcal{F}) = \tau_{\mathbf{p}}^2(\mathcal{F}) + \sum_{j=1}^l \left(\sum_{q \in \mathcal{I}_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}})} \tau_q^2(\tilde{\mathcal{F}}) \right). \quad (3.3)$$

Si σ es no dicrítica. Por la proposición 2.6.5 y ecuación (3.3), se tiene

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^l \mathcal{V}_{p_j}(\tilde{\mathcal{F}}).$$

Finalmente, por inducción resulta

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0.$$

Si σ es dicrítica. Por la proposición 2.6.5 y ecuación (3.3), se tiene

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^l \mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\tilde{\mathcal{F}}).$$

Finalmente, por inducción resulta

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0.$$

Por lo tanto, en cualquier situación se tiene

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2.$$

□

A continuación presentamos algunas consecuencias del teorema 3.0.4.

Corolario 3.0.5. *Si \mathcal{F} un germen de foliación singular no dicrítica sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, entonces*

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + 2GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2.$$

Donde, \mathcal{B} es el conjunto de todas las separatrices que pasan por \mathbf{p} .

Demostración. Como \mathcal{F} es no-dicrítica, entonces por el teorema 2.5.23, tenemos $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$, para cualquier divisor equilibrado de separatrices \mathcal{B} . Por la observación 2.6.2, tenemos

$$\xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}). \quad (3.4)$$

Como \mathcal{F} es una foliación singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, entonces por el teorema 3.0.4, se tiene

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2. \quad (3.5)$$

Reemplazando (3.4) en (3.5), tenemos

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2. \quad (3.6)$$

Por la proposición 2.4.13 (ecuación (2.54)), se tiene

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + 2GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2.$$

□

Corolario 3.0.6. *Si \mathcal{F} un germen de foliación singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ y \mathcal{B} un divisor equilibrado de separatrices, entonces*

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \in \mathbb{Z}.$$

Este entero es no-negativo cuando \mathcal{F} es no-dicrítica.

Demostración. Como \mathcal{F} es una foliación singular sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$, entonces por el teorema 3.0.4, se tiene

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \xi_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2. \quad (3.7)$$

Por la observación 2.6.2, se tiene

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = Var_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2. \quad (3.8)$$

Por la proposición 2.4.13, tenemos

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2.$$

Ahora, por la definición 2.5.3 y el teorema 2.5.23, tenemos que $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ y $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ son enteros. Además, por la definición 1.5.5 se tiene $\tau_q(\mathcal{F})$ es un entero no negativo, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$.

Por lo tanto,

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \in \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, cuando \mathcal{F} es no-dicrítica, entonces por el corolario 3.0.5, tenemos $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$, para cualquier divisor equilibrado de separatrices \mathcal{B} y

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 2GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F})^2.$$

De la definición 1.5.5 se tiene $\tau_q(\mathcal{F})$ es un entero no negativo, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$. Por otro lado, dado que ambos $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ y $GSV_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ son enteros, y $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \geq 0$ cuando \mathcal{F} es no-dicrítica (ver ejemplos 2.5.6 y 2.5.7), obtenemos $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) - CS_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \in \mathbb{Z}^+$. □

El siguiente resultado caracteriza las foliaciones de segundo tipo.

Teorema 3.0.7. *Sea \mathcal{F} un germen de foliación holomorfa sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{p})$ y \mathcal{B} un divisor equilibrado de separatrices. Entonces \mathcal{F} es de segundo tipo si y solo si*

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}), \quad (3.9)$$

donde $BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$ es el índice de Baum-Bott, $\text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ y $\Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ son los índices de variación total y exceso polar, respectivamente.

Demostración. Suponga que \mathcal{F} es de segundo tipo en \mathbf{p} , entonces \mathcal{F} también es de segundo tipo en los puntos infinitamente cercanos a \mathbf{p} , luego no presenta sillan-nodos de tipo tangente.

Esto implica que, $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$. Entonces, utilizando el teorema 3.0.4, se tiene

$$BB_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = \text{Var}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$$

Recíprocamente, reemplazando (3.9) en la ecuación del teorema 3.0.4, se tiene

$$\sum_{q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})} \tau_q(\mathcal{F}) = 0.$$

Ahora, como $\tau_q(\mathcal{F}) \geq 0$, para todo $q \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}(\mathcal{F})$, $\tau_{\mathbf{p}}(\mathcal{F}) = 0$.

Por lo tanto, la foliación \mathcal{F} es de segundo tipo. \square

Ejemplo 3.0.8. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por la 1-forma

$$w = x(\lambda_1 + a(x, y))dy - y(\lambda_2 + b(x, y))dx,$$

donde $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ y $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $a(\mathbf{0}) = 0$, $b(\mathbf{0}) = 0$. Note que $(0, 0)$ es la única singularidad de tipo hiperbólico de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.4.16). Por la definición 2.1.1, se tiene

$$BB_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}.$$

Tenemos que el índice de exceso polar de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $\Delta_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$, donde \mathcal{B} es un divisor equilibrado de separatrices (ver ejemplo 2.5.6). Entonces, por la proposición 2.5.22, se tiene que \mathcal{F} es una foliación de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$.

Además, tenemos que el *índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2$ (ver ejemplo 2.4.19).

Ahora, calculando el *segundo índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$, tenemos

$$\xi_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2 + 0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2.$$

Note que $\xi_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_{\mathbf{0}}(\mathcal{F})$. Por lo tanto, por el teorema 3.0.7 tenemos que \mathcal{F} es una foliación de 2^{do} tipo.

Ejemplo 3.0.9. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por

$$w = -ydx + 2xdy.$$

Observe que $(0, 0)$ es una singularidad no reducida de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.5.14).

Tenemos que el índice de *Baum-Bott* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $BB_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = \frac{9}{2}$ (ver ejemplo 2.1.3). Además, se tiene que el *índice de exceso polar* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $\Delta_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$, donde \mathcal{B} es un divisor equilibrado de separatrices (ver ejemplo 2.5.9). Entonces, por la proposición 2.5.22, tenemos que \mathcal{F} es una foliación de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$.

Por otro lado, tenemos que el *índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{9}{2}$ (2.4.17).

Ahora, calculando el *segundo índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$, tenemos

$$\xi_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}.$$

Observe que $\xi_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_{\mathbf{0}}(\mathcal{F})$. Por lo tanto, por el teorema 3.0.7, tenemos que \mathcal{F} es una foliación de 2^{do} tipo.

Ejemplo 3.0.10. Sea \mathcal{F} una foliación en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1- forma

$$w = (2y^2 + x^3)dx - 2xydy.$$

Note que $p = (0, 0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.5.16).

Tenemos que los índices de *Baum-Bott* y *variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ son $BB_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = 9$ y $Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 9$, respectivamente. (Ver ejemplos 2.1.13 y 2.4.16). Donde \mathcal{B} es un divisor equilibrado de separatrices.

Además, tenemos que el *índice de exceso polar* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $\Delta_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$ (ver ejemplo 2.5.10). Entonces, por la proposición 2.5.22, tenemos que \mathcal{F} es una

foliación de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$.

Ahora, calculando el *segundo índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$, tenemos

$$\xi_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \text{Var}_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 9 + 0 = 9.$$

Notemos que $\xi_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_0(\mathcal{F})$. Por lo tanto, por el teorema 3.0.7, tenemos que \mathcal{F} es una foliación de 2^{do} tipo.

Ejemplo 3.0.11. Sea \mathcal{F} la foliación de *Riccati* inducida por la 1– forma

$$w = (y^2 + xy + x^2)dx + x^2dy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.5.13). Tenemos que los índices de *Baum-Bott* y *variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ son $BB_0(\mathcal{F}) = 8$ y $\text{Var}_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 5$, respectivamente. (Ver ejemplos 2.1.10 y 2.4.14). Donde \mathcal{B} es un divisor equilibrado de separatrices.

Además, tenemos que el *índice de exceso polar* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $\Delta_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 2$ (ver ejemplo 2.5.11). Entonces, por la proposición 2.5.22, tenemos que \mathcal{F} es una foliación que no es de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$.

Ahora, calculando el *segundo índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$, tenemos

$$\xi_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \text{Var}_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 5 + 2 = 7.$$

Observemos que $\xi_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \neq BB_0(\mathcal{F})$. Por lo tanto, por el teorema 3.0.7, tenemos que \mathcal{F} es una foliación que no es de 2^{do} tipo.

Ejemplo 3.0.12. Sea \mathcal{F} la foliación de *Suzuki's* en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ inducida por la 1– forma

$$w = (y^3 + y^2 - xy)dx - (2xy^2 + xy - x^2)dy.$$

Note que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad no reducida de \mathcal{F} (ver ejemplo 1.5.15). Tenemos que los índices de *Baum-Bott* y *variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ son $BB_0(\mathcal{F}) = 9$ y $\text{Var}_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 9$, respectivamente. (Ver ejemplos 2.1.12 y 2.4.18). Donde \mathcal{B} es un divisor equilibrado de separatrices.

Tenemos que \mathcal{F} es una foliación dicrítica de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ (ver ejemplo 1.5.15). Entonces, por la proposición 2.5.22, se tiene que el *índice de exceso polar* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $\Delta_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 0$.

Ahora, calculando el *segundo índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$, tenemos

$$\xi_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \text{Var}_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 9 + 0 = 9.$$

Notemos que $\xi_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_0(\mathcal{F})$. Por lo tanto, por el teorema 3.0.7, tenemos que \mathcal{F} es una foliación de 2^{do} tipo.

Ejemplo 3.0.13. Sea \mathcal{F} una foliación sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, inducida por

$$w = (x - y)dx + x^2dy.$$

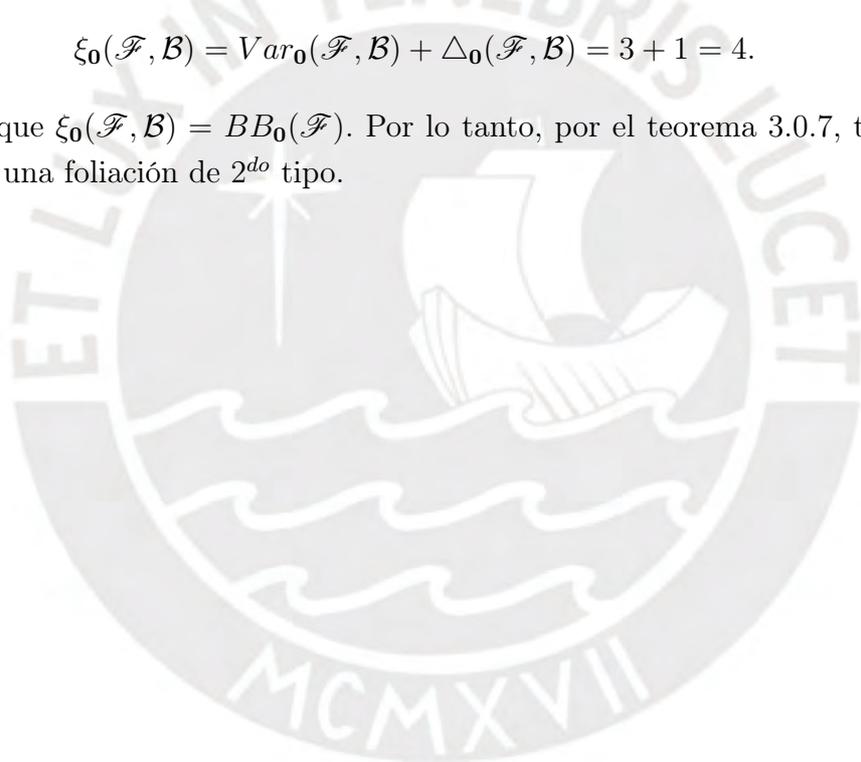
Observe que $\mathbf{p} = (0, 0)$ es la única singularidad de tipo silla-nodo de \mathcal{F} (ver ejemplo 2.1.4). Tenemos que los índices de *Baum-Bott* y *variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ son $BB_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = 4$ y $Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 3$, respectivamente. (Ver ejemplos 2.1.4 y 2.4.15). Donde \mathcal{B} es un divisor equilibrado de separatrices.

Además, tenemos que el *índice de exceso polar* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$ es $\Delta_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 1$ (ver ejemplo 2.5.12). Entonces, por la proposición 2.5.22, tenemos que \mathcal{F} es una foliación que no es de tipo curva generalizada sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$.

Ahora, calculando el *segundo índice de variación* de \mathcal{F} en $\mathbf{0}$, tenemos

$$\xi_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = Var_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) + \Delta_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = 3 + 1 = 4.$$

Notemos que $\xi_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = BB_{\mathbf{0}}(\mathcal{F})$. Por lo tanto, por el teorema 3.0.7, tenemos que \mathcal{F} es una foliación de 2^{do} tipo.



Conclusiones

- Se han establecido condiciones necesarias y suficientes para la caracterización de gérmenes de foliaciones holomorfas singulares sobre el plano, vía la teoría de índices:
 - Se ha encontrado una expresión que relaciona el *segundo índice de variación* con el *índice de Baum-Bott*. Esta relación caracteriza a las foliaciones de segundo tipo, teorema 3.0.7.
 - El índice de exceso polar caracteriza a las foliaciones de tipo curva generalizada (índice de exceso polar nulo).

Bibliografía

- [AV11] E. ARIZA and C. VANEGAS, *Teorema de extensión para funciones multi-monogénicas en álgebras parametrizadas.*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana **XVIII** (2011), 5.
- [BRU97] M. BRUNELLA, *Some remarks on indices of holomorphic vector fields*, Publicacions Matemàtiques **41** (1997).
- [BT09] R. BENAZIC TOMÉ, *Algunas observaciones sobre el concepto de foliación analítica*, Pesquimat **12(2)** (2009).
- [CN85] C. CAMACHO and A. LINS NETO, *Geometric theory of foliations*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman. MR 824240, 1985.
- [CS82] C. CAMACHO and P. SAD, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), 579–595.
- [FPM17] ARTURO FERNÁNDEZ-PÉREZ and ROGÉRIO MOL, *Residue-type indices and holomorphic foliations*, Annali Scuola Normale Superiore - Classe Di Scienze (2017).
- [GEN07] YOHANN GENZMER, *Rigidity for dicritical germ of foliation in \mathbb{C}^2* , IMRN. International Mathematics Research Notices **2007** (2007).
- [GH78] PHILLIP GRIFFITHS and JOSEPH HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics MR 507725, Wiley-Interscience [John Wiley and Sons], New York, 1978.
- [GM18] Y. GENZMER and R. MOL, *Local polar invariants and the Poincaré problem in the dicritical case*, J. Math. Soc. Japan **70** (2018), 1419–1451.

- [KS97] B. KHANEDANI and T. SUWA, *First variation of holomorphic forms and some applications*, Hokkaido Math.J. **26** (1997), 323–335.
- [MOL02] R. MOL, *Meromorphic first integrals: some extension results*, Tohoku Math.J. (2) **54** (2002), 85–104.
- [MR82] J. MARTINET and J.-P. RAMIS, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math **55** (1982), 63–164.
- [MS04] J. MATTÉI and É. SALEM, *Modules formels locaux de feuilletages holomorphes*, Dynamical Systems (2004).
- [NS11] A. LINS NETO and B. SCÁRDUA, *Introdução à teoria das folheações algébricas complexas*, IMPA (2011).
- [PM05] L. PUCHURI MEDINA, *Índices de singularidades de foliaciones holomorfas sobre superficies complejas*.
- [S84] C. CAMACHO, A. LINS NETO and P. SAD, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. Differential Geometry **20** (1984), no. 1, 143–174. MR 772129.