PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

MODELACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA MEDIADA POR TRACKER EN ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO DE SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

CRISTIAN ANDRES ESPINOZA BENITES

ASESORA:

VERONICA NEIRA FERNÁNDEZ

OCTUBRE, 2020

RESUMEN

Según diversos autores, el uso de tecnologías digitales puede mediar y asistir favorablemente los procesos de Modelación matemática y coinciden además en que no se han agotado las investigaciones en relación a este tema.

El objetivo de la presente investigación es analizar cómo los estudiantes del quinto grado de educación secundaria, cuyas edades fluctúan entre 16 y 17 años, modelan la función cuadrática al resolver una actividad didáctica mediada por Tracker, destacando el trabajo de cuatro de estos en parejas. La actividad didáctica trata de la búsqueda del modelo matemático del movimiento vertical de un objeto que se desliza por un plano inclinado.

Para hacer el análisis del proceso de modelación seguido por los estudiantes, tomamos como referencia el ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß, que tiene las fases de la comprensión, simplificación/estructuración, matematización, resolución matemática, interpretación, validación y comunicación. Para describir el tránsito entre las fases del ciclo de modelación, es necesario trabajar con la herramienta de análisis desarrollada por Gallart, que es una guía de preguntas asociadas al tránsito de fases el ciclo de modelación.

Los resultados obtenidos muestran que, efectivamente, los estudiantes transitan por las siete fases del ciclo de Modelación matemática. Es necesario precisar que, debido al uso de Tracker, algunas fases del ciclo de modelación son menos observables y por tanto más difíciles de describir y esto nos permite reflexionar acerca del rediseño de las actividades que permitan observar con detalle dichas fases.

Palabras clave: Modelación matemática; Tecnologías Digitales; Tracker; Función Cuadrática.

ABSTRACT

According to various authors, the use of digital technologies can mediate and favorably support the processes of Mathematical Modeling and also agree that research on this topic has not been exhausted.

The objective of the present investigation is to analyze how the students of the fifth grade of secondary education, whose ages fluctuate between 16 and 17 years, model the quadratic function when solving a didactic activity mediated by Tracker, highlighting the work of four of these in pairs. The didactic activity deals with the search for the mathematical model of the vertical movement of an object that slides along an inclined plane.

To make the analysis of the modeling process followed by the students, we take as a reference the modeling cycle proposed by Blum and Leiß, which has the phases of understanding, simplification / structuring, mathematization, mathematical resolution, interpretation, validation and communication. To describe the transit between the phases of the modeling cycle, it is necessary to work with the analysis tool developed by Gallart, which is a guide to questions associated with the phase transit of the modeling cycle.

the results obtained show that, indeed, the students go through the seven phases of the Mathematical Modeling cycle. It is necessary to specify that, due to the use of Tracker, some phases of the modeling cycle are less observable and therefore more difficult to describe and this allows us to reflect on the redesign of the activities that allow us to observe these phases in detail.

Keywords: Mathematical Modeling; Digital Technologies; Tracker; Quadratic function.

AGRADECIMIENTOS

Al Rey de reyes, y Señor de señores, Él da la sabiduría y de su boca viene el conocimiento y la inteligencia.

A mis amadas, Erica y Evangeline.

A mis padres, Andrés y Justina, cuyo amor y oraciones me sostienen.

A mis hermanos Johan, Cinthya y Dennis, por su amor y ejemplo.

A mis maestros, María Del Carmen Esteves y Hugo Medina.

A mis amigos Martín Sandoval y David Esteban por su extensa preocupación y ayuda.

A la Dra. Verónica Neira Fernández, por su incansable paciencia y guía en el desarrollo de esta investigación, a la Dra. Jesús Flores y la Mg. Flor Carrillo, quienes con sus comentarios y sugerencias contribuyeron al mejoramiento de esta investigación.

A todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por compartir sus valiosos conocimientos y experiencia.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

INTRODUCCIÓN

El interés creciente de la comunidad científica por estudiar la Modelación matemática en sus diferentes aristas nos permite proponer esta investigación, cuyo objetivo es realizar un análisis del proceso de Modelación matemática de la función cuadrática cuando estudiantes del quinto grado de educación secundaria resuelven una actividad con Tracker.

Este proceso es descrito siguiendo las siete fases del ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß. Dicho proceso de modelación se ve asistido y facilitado con el uso de las tecnologías digitales.

A continuación, presentamos la estructura de la investigación que se compone de cuatro capítulos.

En el primer capítulo, hacemos la revisión de las investigaciones referentes a la Modelación matemática de fenómenos o situaciones que resulten funciones cuadráticas y las investigaciones relacionadas al objeto matemático, además de elementos que justifican nuestra investigación. Esta revisión nos condujo a presentar la pregunta de investigación y los objetivos específicos.

En el segundo capítulo, describimos el objeto matemático, la función cuadrática y hacemos una revisión de las concepciones sobresalientes de la noción de función en distintos períodos de evolución. También describimos el aspecto didáctico la Modelación matemática, donde se hizo una revisión de la enseñanza de las modelación y funciones cuadráticas en la Educación Básica regular, usando como fuente los libros de quinto grado de Educación Secundaria que el Ministerio de Educación de Perú distribuye a nivel nacional.

En el tercer capítulo, mostramos los elementos del marco teórico. Además, describimos la metodología de investigación y las herramientas para los análisis posteriores.

En el cuarto capítulo, presentamos parte experimental y análisis de la investigación. También comprende la descripción de los sujetos de investigación, secuencia de la actividad y los instrumentos utilizados.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación que responderán al objetivo general y objetivos específicos de la investigación, así como las sugerencias consideradas que pueden servir para futuras investigaciones relacionadas con temas afines al presente estudio y referencias de la investigación.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, haremos una descripción de investigaciones que tuvieron como objeto de estudio la Modelación matemática y las funciones cuadráticas por medio de la tecnología, específicamente Tracker. También presentaremos la justificación de nuestra investigación, el marco teórico, la pregunta y objetivos del trabajo realizado y el marco metodológico.

1.1 Investigaciones de referencia

En esta sección, revisamos investigaciones que tengan relación con la función cuadrática y la Modelación matemática con mediación de recursos tecnológicos, con la finalidad de observar estudios recientes en didáctica de la Matemática. En nuestro caso, emplearemos Tracker para la modelación de un fenómeno físico.
Las investigaciones de referencia que se analizan están organizadas por ejes temáticos. Estos son: la función cuadrática, mediación de la tecnología digital en la modelación de la función cuadrática, y la Modelación matemática en estudiantes de nivel secundario.

Investigaciones relacionadas con el estudio de la función cuadrática.
Consideramos, en principio, la investigación de Villarraga (2011), cuyo objetivo es construir una propuesta didáctica que permita el estudio de la función cuadrática y la modelación de situaciones de variación y cambio, utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación, donde la aplicación es en estudiantes de noveno grado de Educación Básica secundaria (15 - 16 años) de la Institución Educativa Distrital Nuevo San Andrés de los Altos y su marco teórico es la teoría de Registros de Representación Semiótica.
La investigación se lleva a cabo con el desarrollo de tres actividades: la Actividad 1 "*Una situación embarazosa*", que es de ambientación y familiarización, pretende involucrar al estudiante en una problemática juvenil actual promoviendo un razonamiento algebraico, por medio de situaciones de variación, formulando un modelo matemático que conducirá a entender el concepto de función.

En la Actividad 2, "*Jugando con parámetros*", se utilizan como instrumentos de mediación el Emulador de la calculadora TI 92 y el Software Cabri para concluir el efecto que causa sobre la gráfica la variación de los valores de los parámetros de una función cuadrática.

Finalmente, en la Actividad 3, "*Uso de herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación para la modelación de la función cuadrática*", se ejecuta Tracker para modelar diferentes situaciones relacionadas con la función cuadrática, haciendo énfasis en la variación e integrando los aspectos estático y dinámico del concepto.

Se concluye que el uso de diferentes representaciones del concepto favorece el aprendizaje de las funciones cuadráticas, ya que cada registro enfatiza en diferentes características del concepto. Si a un concepto matemático solo se accede por medio de una representación, se tendrá una imagen muy limitada de este, ya que entre más representaciones se articulen, el concepto generado será más rico e incluyente.

La tecnología favorece la enseñanza de algunos conceptos porque permiten reducir el tiempo que se dedica al desarrollo destrezas tradicionales para dedicarse más profundamente al avance de conceptos e ideas sobre cómo resolver problemas y los beneficios que provoquen las herramientas tecnológicas dependerán del uso que se haga de ellas, por lo que es preciso su integración en un proyecto docente y en el diseño de la metodología aplicada.

Consideramos también el trabajo realizado por Huapaya (2012), que diseña una propuesta basada en experimentos de enseñanza y que permite a los estudiantes de quinto grado de educación secundaria, cuyas edades oscilan entre 16 y 17 años, transitar entre diversas representaciones al modelar situaciones-problema, donde utiliza el graficador FUNCIONSWIN32 y EXCEL para construir actividades mediadas por EXCEL y FWIN32 y analiza las representaciones que construye y coordina el estudiante.

La metodología usada fue cualitativa, ya que se basa en la realización de experimentos de enseñanza que le permite caracterizar de forma eficiente los procesos de pensamiento desarrollados por estudiantes, apoyados por recursos TIC. El marco teórico elegido para dar sustento a esta investigación es Duval (2004), por medio de su Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS).

Los resultados que se obtienen en la investigación concluyen que la propuesta de experimentos de enseñanza, bajo el soporte de recursos tecnológicos, facilita al estudiante la formación de representaciones y la articulación de registros, pero se debe enfatizar en los aspectos de dependencia y variabilidad.

Concluye también que el uso de EXCEL y el graficador FUNCIONSWIN32 ayuda a los estudiantes en la formación y articulación de las múltiples representaciones de los objetos matemáticos y que las actividades de tratamiento y conversión de esas representaciones pueden influir favorablemente en el aprendizaje de la Matemática y en el ejercicio de la modelación.

Es interesante el hecho que el investigador deje algunas perspectivas, como investigar las prácticas de modelación de los estudiantes con el uso de Softwares, tales como el GeoGebra o Cabri, rediseñar de los experimentos de la investigación, hacer las actividades más dinámicas y añadir actividades con componente variacional. La forma de presentar las funciones cuadráticas, en esta investigación, será tomada y refinada, así como el uso de herramientas tecnológicas serán asumidos para nuestra investigación.

Investigaciones relacionadas con la mediación de la tecnología digital en la enseñanza de la función en enseñanza media.

Tomamos en cuenta la investigación realizada por Molina-Toro (2013), quien desarrolla una propuesta para la modelación asistida por el Software Modellus de la función seno, en la que participan cuatro estudiantes, que tienen como seudónimos Sergio, Esteban, Pablo y Ana, jóvenes del undécimo grado, cuyas edades varían entre 16 a 18 años.

En la investigación, se plantea caracterizar algunos aspectos conceptuales de la función trigonométrica seno que producen los estudiantes cuando abordan su estudio a través de la Modelación matemática y cuyo constructo teórico que la soporta se denomina *Humans-with-Media, desarrollado* por los profesores Borba & Villarreal (2005), que intenta analizar el conocimiento mediado por la tecnología y el papel que juega la experimentación matemática en este proceso. La investigación es de naturaleza cualitativa y el estudio de caso el método elegido.

Los resultados *“muestran cómo se van tejiendo vínculos entre unos objetos en movimiento dentro de una simulación y unas representaciones gráficas desde las cuales subyacen nociones de amplitud, período, dependencia e independencia, propias de la función seno*” (Molina-Toro, 2013), bajo la cual se realizó un modelo para la construcción de la experiencia.

La interfaz del programa Modellus 4 y el uso del Software Camtasia, que capturó en audio y video las conversaciones y expresiones de los estudiantes al interactuar con la simulación, muestran la manera cómo se dio la evolución de esa construcción de conocimiento matemático a lo extenso de la investigación. Destaca el papel de la tecnología para el desarrollo de la parte metodológica del trabajo y para la producción de conocimiento, ya que en este tipo de procesos favorece el proceso de experimentación, desde el cual los estudiantes vinculados exploran, construyen conjeturas y hablan de sus conclusiones con sus compañeros y profesores.

Gómez (2016), en su trabajo, implementa Tracker como herramienta de análisis y de asistencia en la adquisición o afianzamiento del conocimiento, en algunas situaciones de cinemática y dinámica en dos dimensiones, con la aplicación del método de aprendizaje activo.

El autor propone, para su investigación, analizar tres escenarios de tipo experimental: "*Rebotar y rebotar*", "*¿cómo en un columpio?*", y "*montando bici*", entre cinemática y dinámica, donde el estudiante interactúe, observe, estudie y analice, de forma individual y grupal, un evento físico determinado mediante una práctica de laboratorio. Para su implementación, el autor trabaja con 130 estudiantes de décimo grado, cuyas edades están entre 15 a 17 años, de la Institución Educativa Distrital "Liceo Femenino Mercedes Nariño" del turno mañana de la ciudad de Bogotá, localidad Rafael Uribe, Colombia. También selecciona a veinte profesores, diez de ellos estudiantes de la maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia.

Para alcanzar el objetivo de esta investigación, Gómez (2016) analiza los instrumentos de recolección de información, para un diagnóstico inicial, aplicado a estudiantes y profesores y además, para el desarrollo de la investigación, las prácticas del laboratorio con la implementación de Tracker, donde concluye que el escenario físico fortalece el proceso de Modelación matemática desde la experimentación.

Consideramos importante mencionar el hecho de que las investigaciones de Villarraga (2011) y Huapaya (2012) también pueden ser consideradas como investigaciones de referencia relacionadas con mediación de la tecnología digital en la enseñanza de la función cuadrática, dado que hacen uso de tecnologías digitales en el desarrollo de sus investigaciones, no precisamente el aplicativo libre Tracker, pero sí el Modellus, por ejemplo.

Investigaciones relacionadas con la Modelación matemática de funciones.

Una primera investigación considerada es la de Cardona (2016), que analiza cómo la modelación genera traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico en la aproximación a objetos algebraicos. Para ello, describe elementos de traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico a través de la modelación como estrategia didáctica.

Utiliza una metodología cualitativa, donde el estudio de caso se realiza con Emily y Diego (entre 14 – 15 años de edad), estudiantes del noveno grado de Educación Básica Secundaria colombiana.

Debido a que un estudio descriptivo interpreta la traducción entre el lenguaje y algebraico a través de la modelación como estrategia didáctica y en la aproximación a objetos algebraicos, su marco teórico es aporte de Villa-Ochoa (2007) y la Modelación matemática de Godino, Neto, Wilhelm, Aké, Etchegaray y Lasa (2014), de la que toma los niveles de algebrización. Posteriormente, describe algunas características de los niveles de algebrización, además de las fases de generalización algebraica para estudiantes de secundaria y las tres primeras etapas de Modelación matemática de Villa-Ochoa (2007).

Concluye que la modelación propuesta, como estrategia didáctica en su fase inicial de experimentación, evidencia la utilización de técnicas y métodos, donde el estudiante expresa o traduce situaciones matemáticas y cotidianas al lenguaje gráfico. Dice además que, en la fase de la abstracción de la modelación, se explicitan más los elementos de traducción, en la que los estudiantes del estudio logran pasar a un nivel de generalización intermedio entre el contextual y simbólico, produciéndose así la traducción desde el lenguaje natural, pasando por el numérico y gráfico, hasta llegar a la generalización del fenómeno.

Cetina (2015), en su investigación, se propuso caracterizar el proceso de Modelación matemática, a la que denomina proceso de matematización (u organización) de la realidad, desarrollado con 15 estudiantes entre 16 a 18 años de edad del onceavo grado del Colegio de Bachilleres Plantel Dos de Acapulco, en el estado de Guerrero, México, que llevaban la asignatura de *Matemáticas IV*, al modelar situaciones de variación con contextos realistas dentro de la temática de la función cuadrática.

Para ello, primero identifica los modelos y las reflexiones de los estudiantes de bachillerato durante el proceso de matematización; segundo, caracteriza los niveles de comprensión de modelo que logran los estudiantes y; al final, caracteriza las dos formas del proceso de matematización: horizontal y vertical. La investigación es de tipo descriptivo-cualitativo, donde se realizó bajo un estudio de casos para poder organizar y reportar información acerca de la actividad matemática.

Los resultados obtenidos evidencian que el proceso de matematización se desarrolla de forma gradual, desde contextos realistas de las situaciones de variación hasta identificar características y representaciones asociadas a la función cuadrática. También se identifica que la *Situación 1* contribuye en la realización de *Situación 2*. Al presentar escenarios conocidos, surge el interés de los estudiantes por aprender, a través de la modelación, como estrategia didáctica.

La investigación realizada por Briceño (2014) trabaja con estudiantes de inicio del bachillerato, con edades comprendidas entre 12 y 13 años, cuyo marco teórico es la socioepistemología; la metodología escogida es la cualitativa y, para la aplicación de las secuencias, se toma los experimentos de diseño.

Briceño (2014) discute el favorecimiento de aspectos variacionales de la función cuadrática, por medio de la práctica de modelación en fenómenos de variación y cambio. Además, describe cómo los estudiantes resignifican el concepto de la función en general y la cuadrática en particular.

Al final, concluye que cada uno de los aspectos variacionales analizados aportaron para resignificar el concepto de función cuadrática, a partir de la práctica de modelación, y que el desarrollo de las secuencias favorece los cuatro aspectos variacionales, los cuales son una introducción al conocimiento de función cuadrática enlazada con la práctica de modelación, estableciendo así relaciones, generando inquietudes sobre el conocimiento y eligiendo las herramientas para adquirir conocimiento.

En el mismo interés, Vargas (2011), en su investigación, desarrolla una propuesta para la modelación de fenómenos físicos, cuya solución sea un modelo cuadrático, por medio de experimentación directa, y también la mediación de simuladores.

La propuesta es pensada para estudiantes del noveno grado, cuyas edades fluctúan entre 14 y 15 años de edad, de la Institución Educativa El Bosque del municipio de Soacha, en la que utiliza una metodología cualitativa y la Modelación matemática de Villa-Ochoa (2007) proporciona el marco teórico que sustenta la investigación.

Concluye diciendo que las actividades propuestas en las unidades didácticas ayudan en la comprensión significativa del concepto de función cuadrática, su comportamiento, la construcción de su representación gráfica, la descripción y modelación de algunas aplicaciones originadas en la Física.

También destaca que el uso de simulaciones propuestas facilita a los estudiantes la construcción y asimilación de los conceptos, especialmente en la actividad de variación de los parámetros de una función cuadrática, logrando que el estudiante, manipulando un Software, evalúe los cambios que transforman la representación gráfica de una función.

Vargas (2011) termina sugiriendo la implementación de la propuesta didáctica para comparar los resultados y dificultades que puedan presentarse, que los resultados de la implementación permitan mejorar, reestructurar o redefinir los componentes didácticos y metodológicos de la propuesta didáctica. Nuestra investigación hará una revisión de cada una de las unidades propuestas y tomará de ellas las características que más aporten en la dirección de nuestro objeto de estudio.

En su tesis, Gallart (2016) propone estudiar el papel que la modelización o matematización, desde la perspectiva de la EMR, según Gravemeijer (2007) (citado en Gallart, 2016) y Carreira & Baioa (2011) (citado en Gallart, 2016), puede desempeñar en el desarrollo de la competencia matemática y en la resolución de problemas reales. Con esa intensión, diseña una secuencia de tareas de modelización que se soportan en tres perspectivas diferentes y analiza las metodologías requeridas para implementar una actividad que se basa en la resolución de tareas de modelización en grupos pequeños de trabajo, en particular, con estudiantes de tercero de secundaria (14-15 años).

Propone herramientas de investigación con las cuales hace un doble análisis de la producción de los estudiantes: de su proceso de resolución, tomando como referencia el ciclo de modelización; y de su modelo final, a partir de la terna conceptos-procedimientos-lenguajes. También analiza los diferentes roles asumidos por el profesor al interactuar con sus estudiantes en dos momentos: durante el debate con los estudiantes de un mismo grupo, mientras trabajan en el aula (intragupo), y durante el debate entre estudiantes de distintos grupos, mientras exponen públicamente sus trabajos (intergrupo).

Luego, por medio del análisis estadístico de las respuestas a un test de competencias, analiza si el trabajo, basado en tareas de modelización, repercute positivamente en el desarrollo de las competencias necesarias para resolver problemas reales.

Concluye diciendo que las tareas de modelización posibilitan el desarrollo integrado de todas las competencias matemáticas con la competencia en *Modelizar,* como competencia sumativa que soporta a las demás, ya que requieren, para su resolución, de todas las acciones asociadas a las transiciones del ciclo de modelización.

Es necesario precisar que la investigación asume definición de modelizar: "*significa comprender un problema realista, establecer un modelo del problema y encontrar una solución trabajando matemáticamente sobre el modelo*" Maaß (2010, p. 287) (citado en Gallart, 2016)

1.2 El Aplicativo Tracker

Tracker es un aplicativo libre que permite realizar análisis de video y está construido sobre una plataforma Java Open Physics (OSP), disponible para Linux, Windows y Mac, que permite el análisis de movimientos (cinemática) y algunas otras situaciones reales en una o dos dimensiones, mediante la generación de modelos matemáticos, estadísticas y gráficos de diferentes variables.

A continuación, en la Figura 1, presentamos la ventana inicial de Tracker, en la que se puede observar el área de trabajo compuesta de cuatro sub áreas:

- **a.** Barra de menú principal.
- **b.** Solapas de exploración y atajos.
- **c.** Visualización de la computadora.
- **d.** Área de pre-visualización.

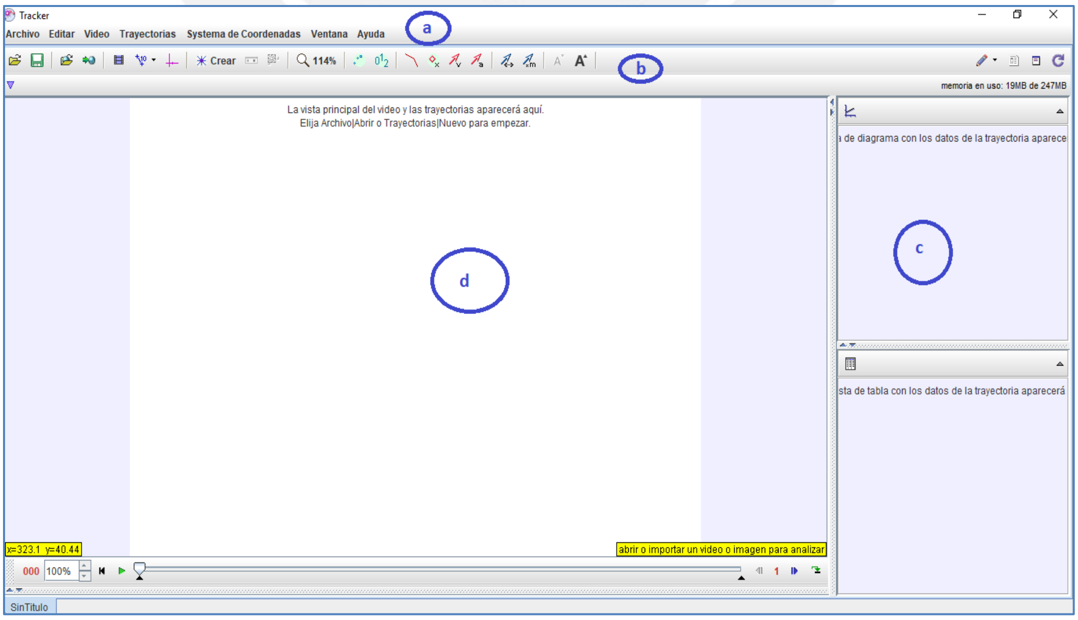


Figura 1: Interface de Usuario Tracker
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

En la barra de menú, Figura 2, encontramos **Archivo** que al desplegar contiene las herramientas de Abrir un archivo de video, Archivos Recientes, Cerrar pestañas, Grabar, Importar, Exportar, Imprimir y Salir.

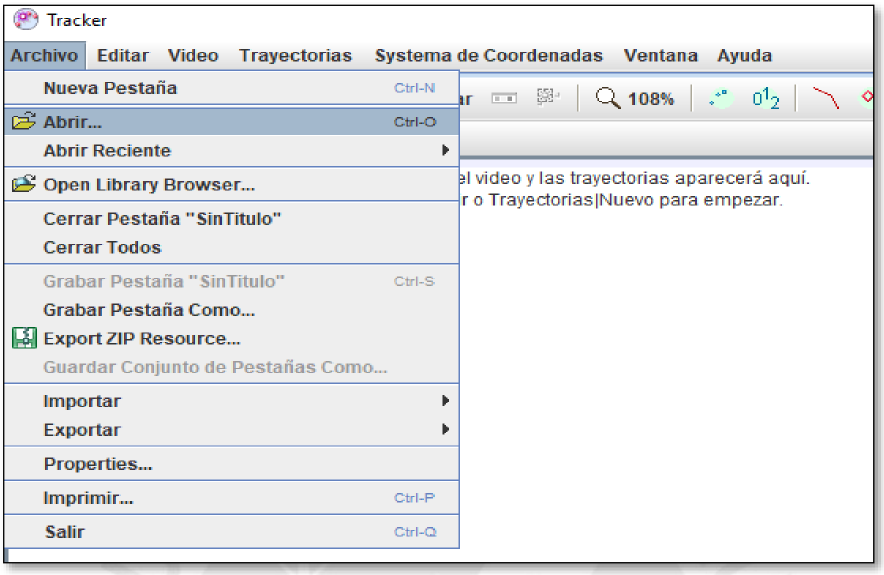


Figura 2: Barra de menú Tracker, Archivo
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

En la Barra de menú, Figura 3, también encontramos **Editar**, que permite copiar imágenes, datos, objetos, deshacer y rehacer el trabajo realizado, además de la posibilidad de elegir el idioma, preferencias, configuración, visualización, ejecución, entre otros.

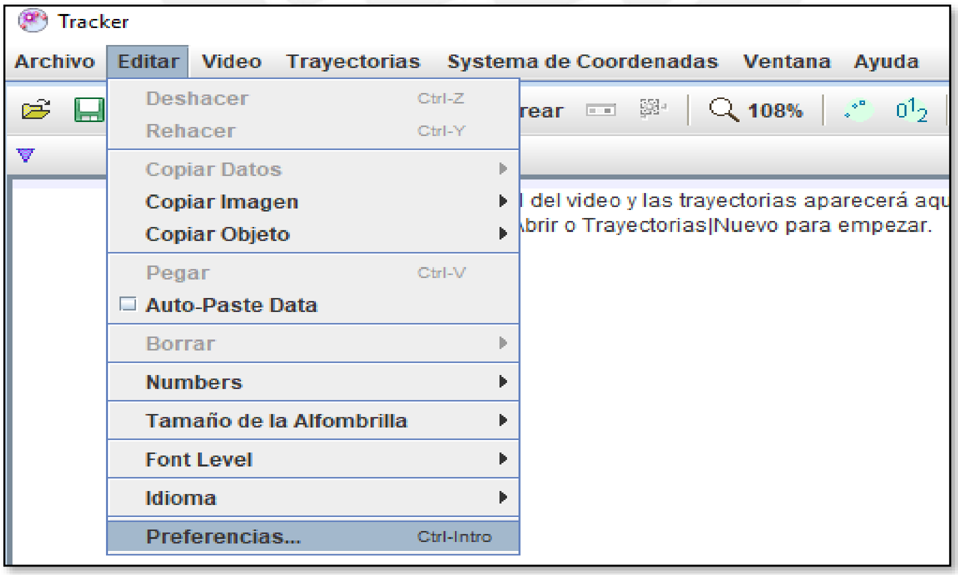


Figura 3: Barra de menú Tracker, Editar
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

La herramienta **Video** (ver Figura 4) permite importar un video y pegar imágenes en él. También es posible captura una foto del video que se está analizando.

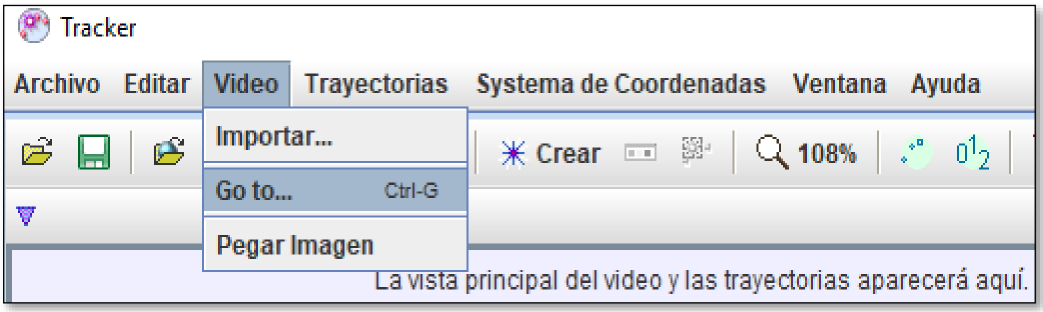


Figura 4: Barra de menú Tracker, Video
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

La herramienta **Trayectorias** (Figura 5) permite trazar trayectorias desde una masa puntual, centro de masa, vectores, suma de vectores y modelar analíticamente partículas.

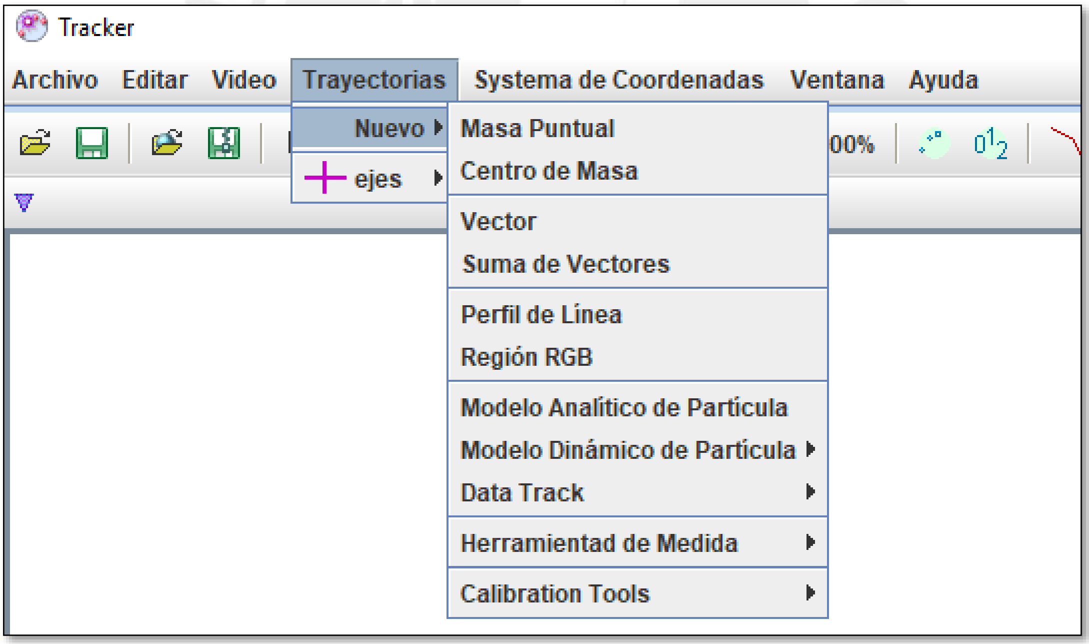


Figura 5: Barra de menú Tracker, Trayectorias
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

En la Figura 6, la herramienta **Sistema de coordenadas** permite dar unidades a un ángulo determinado, mantener el origen, ángulo y escala fija y nos determina un marco de referencia.

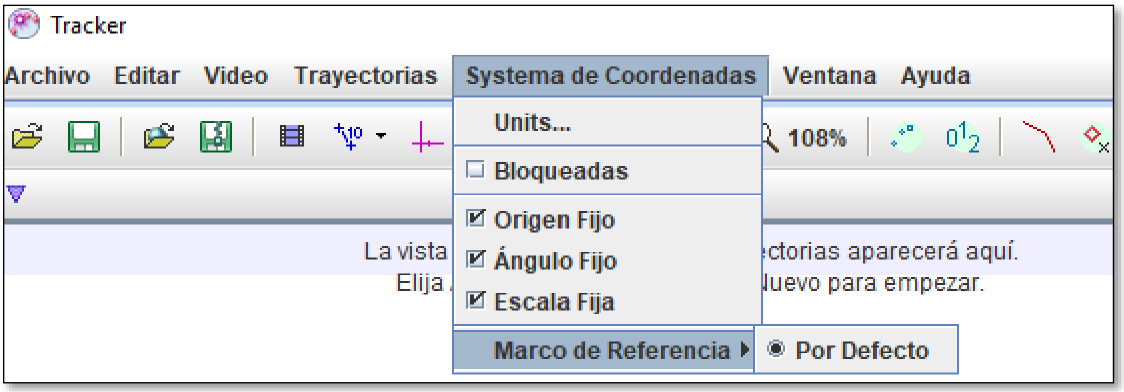


Figura 6: Barra de menú Tracker, Sistema de Coordenadas
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

En la Figura 7, la herramienta **Ventana,** permite elegir cómo se quiere ver la hoja de trabajo.

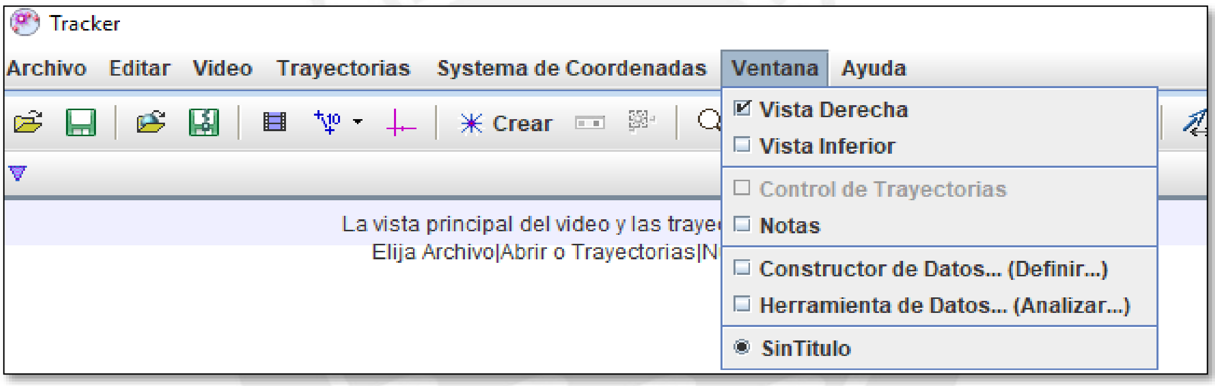


Figura 7: Barra de menú Tracker, Ventana
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

En la Figura 8, la herramienta **Ayuda,** ofrece apoyo en todo lo relacionado con el programa.

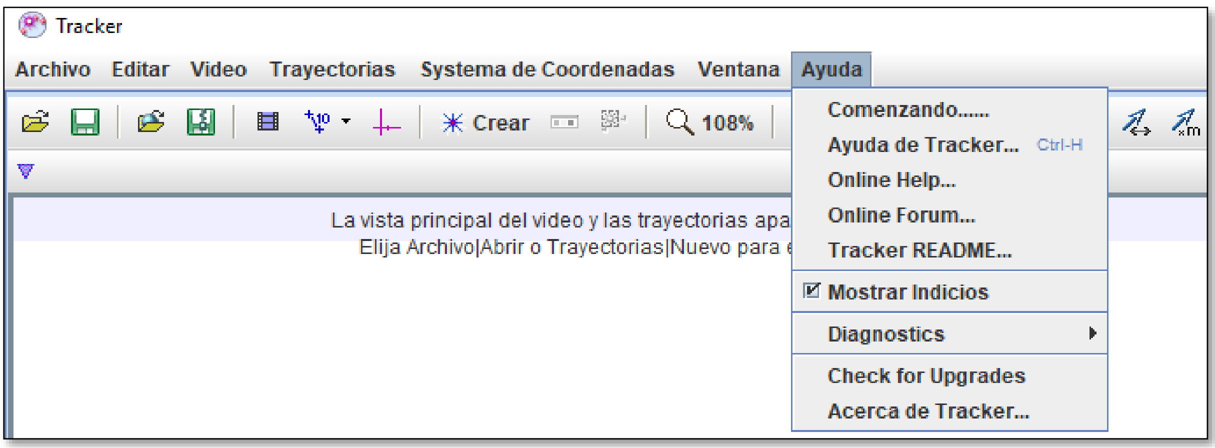


Figura 8: Barra de menú Tracker, Ayuda
Fuente: Captura de imagen realizada por el autor

Entre sus características de rastreo incluye:

- Seguimiento manual y automático de objetos con superposiciones y datos de posición, velocidad y aceleración.
- Centro de pistas de masas.
- Vectores gráficos interactivos y sumas vectoriales.

Entre sus características de modelado:

- Crea modelos cinemáticos y dinámicos de partículas de masa puntual y sistemas de dos cuerpos.
- Los modelos externos animan y superponen datos multipunto de programas de modelado separados, como hojas de cálculo y simulaciones Java sencillas.
- Las superposiciones de modelos se sincronizan automáticamente y se escalan al video para una comparación visual directa con el mundo real.

Características de generación y análisis de datos:

- Escala, origen e inclinación del sistema de coordenadas fijo o variable en el tiempo.
- Opciones múltiples de calibración: cinta, barra, puntos de calibración y origen.
- Cambio de centro de masa y otros marcos de referencia.
- Los datos incluyen unidades (en el SI por defecto, unidades de longitud y masa configurables).
- Los transportadores y las cintas métricas proporcionan mediciones de distancia y ángulo.
- La herramienta de ajuste circular ajusta círculos a tres o más puntos, pasos o pistas.
- Es posible definir variables personalizadas para el trazado y el análisis.
- Agregar columnas de texto editables para comentarios o datos ingresados manualmente.
- La herramienta de análisis de datos incluye un ajuste de curvas automático y manual.
- Exportar datos sin formato a un archivo de texto delimitado o al portapapeles.
- Visualizar los valores medidos utilizando formatos de números personalizados.

El aplicativo Tracker permite la creación de un modelo matemático cinemático o dinámico que describe el fenómeno que se quiere estudiar. Este modelo matemático puede compararse con los datos reales del fenómeno o situación y además se puede comprobar la validez de algunas leyes físicas (Gómez, 2016).

Para descargar e instalar la última versión del Tracker, es necesario ir a la página de Internet: https://physlets.org/tracker/ y descargar la versión correspondiente al sistema operativo que se quiera usar y previamente se debe tener instalado Java y Quicktime.

Para una familiarización con el manejo de Tracker, en los anexos, se deja la guía de la *Actividad Cero*, que fue pensada para generar familiaridad con el Software. Además, para un mejor entendimiento de su uso, en la sección de anexos, se presenta una guía breve de Tracker

1.3 Justificación

Los aportes de las investigaciones de Vargas (2011), Huapaya (2012) y Villarraga (2012) nos indican que una de las misiones encomendadas, para futuras investigaciones, es la de diseñar actividades didácticas en las cuales los estudiantes puedan utilizar la Modelación matemática de fenómenos variados para aprender el concepto función cuadrática, exigiendo además que el concepto esté ligado a aspectos de la vida cotidiana. También ponen en evidencia un interés importante de la comunidad de investigadores por el estudio de las funciones cuadráticas y el uso de las tecnologías digitales como herramientas de ayuda al proceso de enseñanza-aprendizaje.

La Modelación matemática es importante en el aula de clases, ya que permite a los estudiantes la estructuración y validación de modelos matemáticos que, a decir de Villa-Ochoa (2007, p. 67), es "*un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan describir, explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación*"; siendo entonces importante y de cuidado la elección de fenómenos objeto de estudio para los estudiantes, dado que el objetivo es que centren allí sus intereses y generen discusiones en torno de la situación que se les presenta.

La modelación en el aula de clases no solo consiste en elaborar escenarios donde los estudiantes encuentren una expresión matemática que describa un fenómeno real; según Burkhardt (2006) (citado en Molina-Toro, 2013), reducir el sentido de la modelación al hallazgo de una serie de términos matemáticos es limitar las posibilidades que, en dicho proceso, los estudiantes experimentan. También se omite una serie de situaciones en las cuales el estudiante conjetura y reflexiona alrededor de la situación que se le plantea.

Según Trigueros (2009) (citado en Molina-Toro, 2013), en el proceso de modelación, se construye un conocimiento matemático a partir de la interacción y reflexión del contexto-estudiante, en el cual el profesor ya no asume un papel protagónico y cede al estudiante la responsabilidad de tomar decisiones para construir una serie de significados de la situación que estudia. Los contextos que posibilitan llevar a cabo el proceso de modelación en el aula emergen en el discurso docente-estudiante-conocimiento y otros de los diferentes significados que afloran en ese diálogo, desde el cual se espera que el estudiante tome un papel protagónico y el cual tome su atención (Molina-Toro, 2013).

Las tecnologías digitales buscan una relación más cercana entre los estudiantes y la Matemática. Es así que se integra a nuestra investigación el aplicativo libre Tracker, con la idea de aportar al proceso de modelación a partir de un fenómeno físico; una situación problema, las tecnologías digitales cumplen la función motivación, fomenta la participación de los estudiantes y media el aprendizaje del mundo real; la función innovación, direccionada al diseño didáctico y la renovación de estrategias de aprendizaje; la función relación estudiante con el conocimiento y una función global, que promueve el trabajo en equipo y mayor esfuerzo en el desarrollo de actividades por parte de los estudiantes (Molina-Toro, 2013).

Esta investigación incide en evidenciar el proceso cíclico de Modelación matemática, permitiendo la construcción de lo cuadrático, el cual direcciona una nueva estrategia constructora de conocimiento matemático desde una situación problemática o un fenómeno físico, para nuestro caso, mediada por las tecnologías digitales.

A continuación, presentaremos la pregunta y objetivos de nuestra investigación.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

¿Cómo estudiantes del quinto grado de Educación Secundaria modelan la función cuadrática al resolver una actividad didáctica mediada por Tracker?

OBJETIVO GENERAL

Analizar cómo estudiantes del quinto grado de Educación Secundaria modelan la función cuadrática al resolver una actividad didáctica mediada por Tracker.

Para el logro del objetivo general, se formulan los siguientes objetivos específicos:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las fases del proceso de Modelación matemática en las acciones que los estudiantes realizan al resolver una actividad matemática.
- Caracterizar las acciones de los estudiantes cuando realizan el tránsito por las fases del proceso de Modelación matemática de Blum al resolver una actividad didáctica mediada por Tracker

Para el logro de los objetivos planteados, comenzaremos por hacer una revisión del objeto matemático, funciones cuadráticas

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En este capítulo, haremos un estudio de la función cuadrática, donde se define desde su forma canónica, se listan sus propiedades, y desde el nivel didáctico, en el que se evidencia la forma de presentar la función cuadrática en la Educación Básica peruana desde el estudio del libro oficial del Ministerio de Educación de quinto grado de Educación Secundaria.

2.1 Aspectos matemáticos e históricos de la función cuadrática

El análisis histórico hecho por Ruiz Higueras (1998) (citado en Lávaque, Méndez, & Villarroel, 2006) identifica y organiza las concepciones sobresalientes de la noción de función en distintos períodos de evolución:

La función como variación

Los babilonios lograron una intuitiva noción del concepto de función, tratando de encontrar regularidades en las tabulaciones de fenómenos naturales para luego procurar aritmetizar y generalizar sus observaciones. Pudieron establecer relaciones organizadas entre variaciones de las causas y los efectos: los fenómenos observados fueron el calor, la luz, la distancia, la velocidad, entre otros, y además observaron que podían cambiar continuamente entre ciertos límites establecidos (Lávaque et al., 2006).

También construyeron tablas de cálculo, donde se presenta una relación general por la que se relacionan en dependencia elementos de dos conjuntos; sin embargo, "existe una distancia muy grande entre instinto de funcionalidad y la noción de función" (Ruiz Higueras 1998, citado en Lávaque et al., 2006).

La función como proporción

A pesar que las ideas de cambio y de cantidad variable estaban presentes en el pensamiento griego, consideraban el cambio y el movimiento como externos a las Matemáticas. La consecuencia de considerar los entes matemáticos como estáticos condujo a los matemáticos de esa época a expresarse en términos de incógnitas e indeterminadas en lugar de variables. "*Esto conduce a las proporciones y ecuaciones y no a las funciones"* (Ruiz Higueras, 1998, citado en Lávaque et al., 2006).

La búsqueda de proporcionalidad era la relación que se privilegiaba entre magnitudes variables y la variabilidad de las magnitudes físicas, las cuales eran consideradas diferentes a las Matemáticas.

Debido al significado geométrico que tenían las magnitudes variables para los griegos, sólo establecían proporciones homogéneas, comparaban magnitudes de la misma naturaleza, longitudes con longitudes, áreas con áreas y volúmenes con volúmenes.

"La homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza pudo ser un obstáculo al desarrollo de la noción de función, puesto que impedía encontrar de forma significativa dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional" (René de Cotret 1985, citado en Lávaque et al., 2006).

Las nociones menos alentadoras y positivas en la evolución del concepto de función han sido *"la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud*" (René de Cotret, 1985 citado en Lávaque et al., 2006).

La función como gráfica

En la Edad Media, se intenta explicar cuantitativa y racionalmente los fenómenos naturales por medio de procesos de abstracción, los cuales se vieron estorbados debido a la disociación entre número y magnitud.

Los principales focos de desarrollo fueron las escuelas de Oxford y París. Nicolás Oresme, como el principal representante de la escuela francesa en el siglo XIV, utiliza el grafismo para representar los cambios y así podía describirlos y compararlos.

Utilizó segmentos para representar la intensidad de una característica determinada de una magnitud continua que depende de otra magnitud continua. Las gráficas representaban las relaciones desde lo cualitativo antes que lo cuantitativo, dado a que los gráficos se consideraban como modelos geométricos de las relaciones y no necesariamente necesitaban representar con fidelidad esas relaciones.

Oresme hizo el trazo de un segmento horizontal y en él marcó puntos que representaban los sucesivos instantes a periodos iguales y para cada tiempo traza un segmento perpendicular, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. La dependencia se representaba globalmente en la Figura 9, predominando la concepción de función como gráfica (Lávaque et al., 2006).

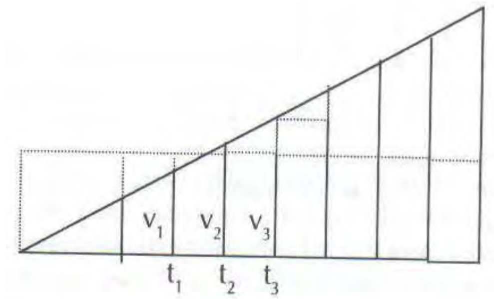


Figura 9: Gráfico Explicativo Diferencia entre Velocidades de Oresme.

Fuente: Rendón-Mesa (2009)

Se observan los principios de la noción de función, en el que "*Oresme ha tallado el árbol del bosque que permitiría más tarde a Descartes y a Galileo confeccionar la rueda*" (René de Cotret, 1985, citado en Lávaque et al., 2006).

Durante los siglos XV y XVI, se lograron aportes sobresalientes al concepto de función, así como también se ponen los cimientos de la simbología algebraica que permitiera una manipulación práctica y eficiente al diferenciar entre "variable" de una función e "incógnita" de una ecuación.

La función como curva

A principios del siglo XVII, Fermat y Descartes descubrieron la representación analítica al acoplar los problemas de dos ramas de la Matemática: la Geometría y el Álgebra. Surgió la idea que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que es posible determinar los valores de una de las variables que corresponden a los valores dados de la otra variable.

La función como curva permite el segundo retraso en la evolución de la noción de función, cuando se asocia la gráfica con la trayectoria de puntos en movimiento y no con conjuntos de puntos que satisfacen condiciones en una relación de dependencia (Lávaque et al., 2006).

La función como expresión analítica

Esta concepción nació en el siglo XVII y Euler y Lagrange lo continuaron en el siglo XVIII. Se creía que las únicas funciones para estudiar eran las que podían ser descritas a través de expresiones algebraicas. Se sostiene todavía la idea de asignar la variación a las “cantidades”. Se origina la idea de función no continua.

Leibnitz, por primera vez, usó el término *función* para decir un término general que representa las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, esto condujo al uso de la palabra en el sentido de una expresión analítica.

En el siglo XVIII, Bernoulli y Euler consideraron la noción de función como una expresión analítica, en la que el primero propone la letra f para la característica de una función, escribiendo $\ll f\ x \gg$ y posteriormente, en el siglo XVIII, Euler escribe como $f(x)$, reemplazando el término cantidad por el de expresión analítica: Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea de esta cantidad y de números o cantidades constantes.

El punto de vista que predominó fue el aspecto puramente formal más que de la relación entre variables. Se entiende que una función es una combinación de operaciones dada por una expresión analítica (Ruiz Higueras, 1998, citado en Lávaque et al., 2006).

La función como correspondencia arbitraria: aplicación

Esta concepción apareció en el siglo XVIII con los últimos trabajos de Euler sobre “funciones arbitrarias” y continuó en el siglo XIX con los trabajos de Fourier, Cauchy, Dedekind y otros sobre números reales.

A partir del problema de la cuerda vibrante de Euler, emergió la noción de correspondencia general: se dice que “una cantidad es función de otra u otras”, aunque no se conozca por qué operaciones atravesar para llegar de una a la otra. Posteriormente, Euler consideró funciones más generales que las funciones analíticas, tomando en cuenta funciones arbitrarias, especiales, no derivables y con picos, a las que denomina discontinuas o mixtas: las funciones arbitrarias en las cuales si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x, no importa de qué forma, son funciones de x.

El término *función* se corresponde con la expresión $f(x)$ y posteriormente será representada como

$$f : X \to Y \quad \text{o} \quad x \to f(x)$$

Los ejes cartesianos se siguen usando y aparece una nueva representación: los diagramas de Venn.

La función como terna

Al final del siglo XIX e inicios del siglo XX, se denominó *función* a la terna $f{:}\,(A, B, G)$, donde $A,\ B,\ G$ son conjuntos con las siguientes condiciones: $G \subset A \times B,\ x \in A$, y $y \in B \ / \ (x, y) \in G$ (Lávaque et al., 2006).

Por otra parte, Mesa y Villa-Ochoa (2008) subrayan qué elementos, como el estudio de las ecuaciones, cónicas, cinemática y las funciones, fueron históricamente estableciendo la noción de función cuadrática. Estos elementos son necesarios considerar cuando se trabaja en una propuesta didáctica del concepto de función cuadrática.

Los autores apuntan que el concepto de función cuadrática estuvo históricamente vinculado a la modelación de fenómenos de variación y cambio. El análisis histórico realizado por estos investigadores muestra lo “cuadrático” como una sinergia entre la Geometría euclidiana, las cónicas y la Geometría analítica, teniendo como objeto de estudio el movimiento. Según los investigadores, es de valor rescatar parte de esta sinergia en el aula de clase, de modo que se presente una concepción de lo cuadrático desde diversas interpretaciones y contextos.

Finalmente, Hitt (2002, p.75) (citado en Huapaya, 2012), presenta, en resumen, las definiciones más típicas que se han presentado en los libros de texto en el siglo XX:

- Función en términos de variable:
  Una función es una variable relacionada dependientemente con otra variable, tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera.
- Función en términos de conjunto de parejas ordenadas:

Una función es un conjunto de pares ordenados, jamás dos de las cuales tienen la misma primera componente.

- Función en términos de regla de correspondencia:
  Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada x de cierto subconjunto D del conjunto A un elemento único $f(x)$ de B.
- Función en ambiente Logo:
  Una función es un procedimiento P que tiene la propiedad que cualesquiera dos apelaciones a P con las mismas entradas producen las mismas salidas.

2.2 Aspectos del tema a investigar en los libros matemáticos

Para el desarrollo del contenido del objeto de estudio de nuestra investigación, utilizaremos la visión del libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000). Los autores definen la función como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) : ax^2 + bx + c$$

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} / \, a \neq 0$$

En esta definición, a "a" se le denomina término cuadrático, "b" es el término lineal y a "c" término independiente y su gráfica correspondería a una parábola.

Existen relaciones entre los conceptos de función cuadrática y el trinomio de segundo grado, que es una expresión formal del tipo $ax^2 + bx + c$, con $\mathbb{R}$ siendo $a \neq 0$. El término formal significa que la letra x es un símbolo, además x^2 una forma de escribir $x.x$.

A cada trinomio $ax^2 + bx + c$ le corresponde la función cuadrática definida por $f(x) : ax^2 + bx + c$, que significa que la correspondencia trinomio función cuadrática, que es biunívoca y por definición de función cuadrática, es sobreyectiva. Los autores, además, exhiben cómo expresar la función cuadrática en su forma canónica y las propiedades que se deducen: puntos máximos, mínimos y el vértice de la parábola.

La forma canónica del trinomio

Realizando tratamientos en el registro algebraico, consideramos el siguiente trinomio:

$$f(x) : ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

Los dos primeros sumandos dentro del corchete son los mismos que del desarrollo del cuadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Completando el cuadrado, podemos escribir:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Esta forma de escribir se denomina *forma canónica*, que conduce a la fórmula que da las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si $a \neq 0$, encontramos las siguientes equivalencias.

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (2)$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

$$\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

Es paso de la línea (2) a la línea (3) sólo tiene sentido cuando el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es positiva o cero. Es decir, $b^2 - 4ac \geq 0$. Si fuera que $\Delta < 0$, significa que la ecuación no tiene solución real, debido a que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ no puede ser negativo.

De la línea (4) se concluye que, si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Tiene dos raíces reales distintas.

$$\alpha = \left(-b - \sqrt{\Delta}\right) / 2a$$

$$\beta = \left(-b + \sqrt{\Delta}\right)/2a$$

Con $\alpha < \beta$; cuya suma es $-b\ /\ a$ y cuyo producto es:

$$\frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

La media aritmética de las raíces es $-b\ /\ 2a$. De esto se concluye que las raíces α y β equidistan del punto $-b\ /\ 2a$. Si el caso fuera que $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única raíz, a la que se denomina *raíz doble*, igual a $-b\ /\ 2a$.

Si $a > 0$, la forma canónica

$$f(x) : ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Dentro de los corchetes, se observa una suma. El primer término depende de x y es siempre positivo o cero y el segundo término es constante. El menor valor de la suma se da cuando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Es decir, cuando $x = -b\ /\ 2a$. En este punto, $f(x)$ tiene su valor mínimo. Cuando $a > 0$, el menor valor asumido por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{es} \quad f(-b/2a) = c - (b^2\ /\ 4a)$$

Si $a < 0$, el valor de $f(-b/2a)$ es el mayor de los números $f(x)$, para cualquier $\mathbb{R}$.

Cuando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ no tiene un valor máximo, es una función ilimitada superiormente. Por analogía, cuando $a < 0$, $f(x)$, no tiene un valor mínimo es ilimitada inferiormente.

Dada una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, ¿para qué valores $x \neq x'$ se tiene que $f(x) = f(x')$?

Observando la forma canónica, vemos que:

$$f(x) = f(x') \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Como partimos asumiendo que $x \neq x'$, esto nos da que:

$$-\left(x + \frac{b}{2a}\right) = x' + \frac{b}{2a}$$

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{-b}{2a}$$

La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ asume el mismo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$, si y solo si, los puntos x y x' son equidistantes de $-b/2a$

2.3 La función cuadrática en el libro de quinto grado de Secundaria.

En esta sección de nuestra investigación, presentaremos la información referida al tratamiento de la función cuadrática en el libro quinto Grado de Educación Secundaria de la Editorial Santillana (Santillana, 2016). Este libro es distribuido por el Ministerio de Educación para ser usado como referente para el profesor y para el estudiante.

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016), la competencia a trabajar es actuar y pensar matemáticamente en situaciones de Regularidad, equivalencia y cambio, en la que se busca que el estudiante logre las siguientes capacidades. Cada capacidad se exhibe por sus indicadores

Matematizar situaciones

- Reconocer la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver un problema.
- Evaluar si los datos y condiciones que se establecieron ayudaron a resolver el problema.

Comunicar y representar ideas matemáticas

- Reconocer las funciones cuadráticas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas.
- Describir la dilatación y contracción gráfica de una función cuadrática.

Elaborar y usar estrategias

- Emplear procedimientos y estrategias, recursos gráficos y otros al resolver problemas relacionados con funciones cuadráticas.
- Diseñar y ejecutar un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas.

Razonar y argumentar generando ideas matemáticas

- Generalizar, utilizando el razonamiento inductivo, una regla para determinar las coordenadas de los vértices de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = a(x-p)^2 + q,\ \forall\, a \neq 0$

Además, nuestro trabajo considera el nuevo Programa curricular de Educación Secundaria, que establece la competencia: resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, queriendo alcanzar las siguientes capacidades en los estudiantes. Observe la Tabla 1. Cada capacidad se hará evidente por sus desempeños.

Tabla 1.

Capacidades y Desempeños para la Función Cuadrática

CAPACIDADES	**DESEMPEÑOS**
Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o de variación entre magnitudes y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o graficas (modelos) que incluyen funciones cuadráticas con coeficientes racionales.
Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico su comprensión sobre las intersecciones con los ejes de una función cuadrática.

Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas para determinar términos desconocidos y solucionar funciones cuadráticas usando propiedades de las igualdades.

Nota: Ministerio de Educación del Perú (2016, p. 153)

Tal como se puede apreciar, el libro introduce el concepto de función, contextualizando:

> *Las funciones cuadráticas son ampliamente usadas en la ciencia, los negocios y la Ingeniería. La parábola, por ejemplo, trayectorias de chorros de agua en una fuente, el rebote de una pelota, entre otros. También puede ayudar a predecir de la vida real a través de las diferentes formas algebraicas de escribirlas* (Santillana, 2016).

"Una función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes $a,\ b\ y\ c$ son números reales y $a \neq 0$. La representación gráfica de una función cuadrática es una curva denominada parábola, la cual se puede abrir hacia arriba o hacia abajo" (Santillana, 2016).

En la Figura 10, la representación gráfica de una función cuadrática abierta hacia arriba o hacia abajo presenta un tramo creciente y otro decreciente. Tienen un vértice, que es el punto donde la función alcanza su valor máximo o mínimo y son continuas, porque no presentan cortes en su trazo.

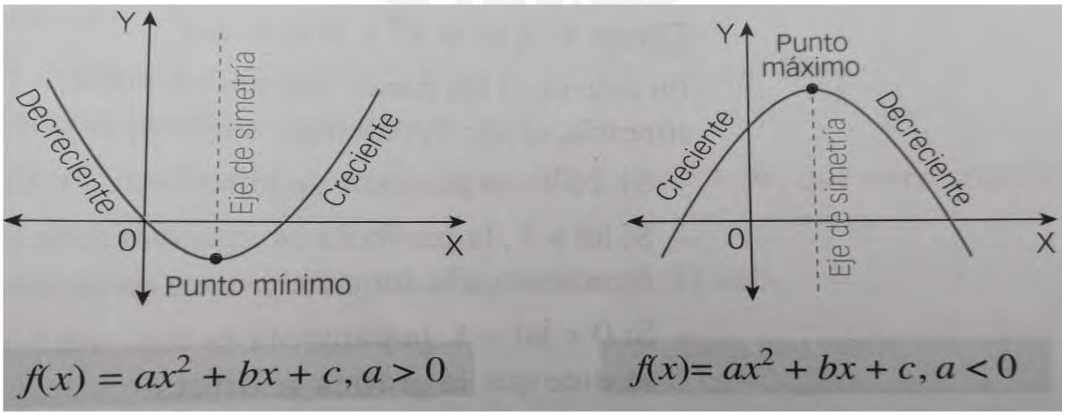


Figura 10: Gráfico de una Función Cuadrática.
Fuente: Santillana (2016)

Además, define el vértice como uno de los elementos principales de la representación gráfica de una función cuadrática, ya que permite identificar su mínimo (si se abre hacia amiba) o su máximo (si se abre abajo).

Las coordenadas del vértice V, $f(x) = ax^2 + bx + c$ se representan con (h, k) y se determinan mediante las expresiones

$$h = \frac{-b}{2a} \quad \text{y} \quad k = \frac{-b^2+4ac}{4a^2}$$

A continuación, el texto hace un análisis de la traslación y contracción de la representación gráfica de una función cuadrática. Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar de la forma $f(x) = a(x-p)^2 + q$. La gráfica de la función es una traslación de la gráfica de $f(x) = ax^2$ desplazada p unidades horizontalmente a la derecha o izquierda y q unidades verticalmente hacia arriba o abajo.

Caso 1: $f(x) = x^2$ y $f(x) = ax^2$, donde $b = 0$ y $c = 0$

En este caso, tienen como vértice el punto $(0,0)$ y, como eje de simetría, el eje Y. Además, se cumple que:

- Si $a > 0$, la gráfica abre hacia arriba.
- Si $|a| > 0$, la gráfica es más estrecha (se contrae) que la gráfica que representa a la función $f(x) = x^2$, donde a es igual a 1.
- Si $0 < |a| < 1$, la gráfica es más ancha que la gráfica de la función $f(x) = x^2$. En este caso, se dice que la gráfica se dilata.

Caso 2: $f(x) = ax^2 + c$, donde $b = 0$

La gráfica de la función $f(x) = x^2 + c$ se obtiene trasladando c unidades la gráfica de $f(x) = ax^2 +$. Si $c > 0$, la traslación es hacia arriba. En cambio, si $c < 0$, la traslación es hacia abajo.

En este caso, el eje de simetría es Y y las coordenadas del vértice son $(0, c)$

Caso 3: $f(x) = ax^2 + bx$, donde $c = 0$

En este caso, las coordenadas del vértice (h, k) se pueden hallar por medio de las expresiones $h = -\frac{b}{2a}$, $k = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$. El eje de simetría es una recta paralela al eje Y, cuya expresión algebraica es $x = -\frac{b}{2a}$

Caso 4: $f(x) = ax^2 + bx + c$

En este caso, la gráfica de la función se obtiene trasladando c unidades la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx$. Cuando $c > 0$, la traslación es hacia arriba y cuando $c < 0$, la traslación es hacia abajo.

Caso 5 $f(x) = ax^2 + p; f(x) = a(x-p)^2 + p,\ f(x) = a(x-p)^2 + q$ Las gráficas de $f(x) = ax^2$ son las más elementales. A partir de estas, se obtienen otras por traslación.

- Las de tipo $f(x) = ax^2 + p$ se obtienen trasladando verticalmente p unidades la gráfica de $f(x) = ax^2$. Si $p > 0$, la traslación vertical es hacia arriba; si $p < 0$, la traslación vertical es hacia abajo.
- Las de tipo $f(x) = a(x-p)^2 + p$ se obtienen trasladando la gráfica de $f(x) = ax^2$ hacia el vértice opuesto de un cuadrado de lado p.
- Las de tipo $f(x) = a(x-p)^2 + q$ se obtienen trasladando verticalmente q unidades y horizontalmente p unidades la gráfica de $f(x) = ax^2$. El sentido de las traslaciones verticales y horizontales depende del signo de q y p, respectivamente.

Relación entre los elementos de una función cuadrática

Al analizar una función cuadrática, es necesario indicar las coordenadas del vértice, el dominio, el rango, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, el valor máximo o mínimo, los puntos de corte con los ejes, entre otros (Santillana, 2016).

- Las coordenadas del vértice V de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ se representan por (h, k).
- El dominio es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- El rango es el intervalo $[\ k\ ; +\infty\ [$ si la gráfica abre hacia arriba o $]-\infty\ ,\ k\ ]$, si la gráfica se abre hacia abajo

- La recta paralela al eje Y, que pasa por el vértice, se llama eje de simetría
- Para determinar el intercepto de la gráfica con en el eje Y, se reemplaza $x = 0$ en la expresión $y = ax^2 + bx + c$ y para hallar los interceptos con el eje X se reemplaza $y = 0$.

2.4 La Modelación matemática en libros de quinto grado de Secundaria.

En esta sección, presentaremos tres ejemplos sobre Modelación matemática de la función cuadrática en textos usados por los docentes y estudiantes de quinto de secundaria del colegio en el cual se desarrolla la investigación.

Mostraremos textos usados por docentes y estudiantes de quinto año de secundaria de un colegio estatal.

El libro *Rutas del Aprendizaje Versión 2015 ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes?* VII Ciclo, Área Curricular Matemática, propone orientaciones pedagógicas y didácticas para una enseñanza efectiva de las competencias de cada área curricular. Estas se concretizan en los textos guía que son entregados a los estudiantes (MINEDU, 2015).

Entre las orientaciones propuestas, está la que denominan *Aprendizaje basado en problemas de Modelación matemática.* (ver Figura 11)

En los últimos años, las investigaciones en didáctica de la matemática dan cuenta de que uno de los temas que ha concitado la atención es el diseño de actividades matemáticas basado en la modelización de situaciones reales y de las ciencias, transformándose en "una vía prometedora tanto para enfrentar las dificultades y deficiencias como para elevar la calidad de los aprendizajes matemáticos" (Aravena 2002: 66). En diferentes países y condiciones, su inclusión en el currículo ha permitido desarrollar capacidades de tipo cognitivas, metacognitivas y de formación transversal que ayudan a comprender el rol de la matemática en una sociedad moderna (Niss 1993; Keitel 1993; Abrantes 1994; William & Ahmed 1997; Alsina 1998; Blomhoj 2000; Aravena 2001; Gómez 2002).

Figura 11: Recorte, Aprendizaje Basado en Problemas de Modelación Matemática.
Fuente: MINEDU (2015)

Según MINEDU (2015), esta estrategia consiste en proporcionar a los estudiantes un problema relacionado a una situación en contextos diversos, para luego desarrollar un modelo matemático; posibilita el debate entre los estudiantes cuando expresan sus puntos de vista matemático respecto de la situación; y permite un planteamiento de equipo, estar seguros y tener un sentido funcional de los conocimientos matemáticos al resolver el problema.

Se identifica la Modelación matemática como un proceso que tiene cinco fases, las que se pueden observar en la Figura 12:

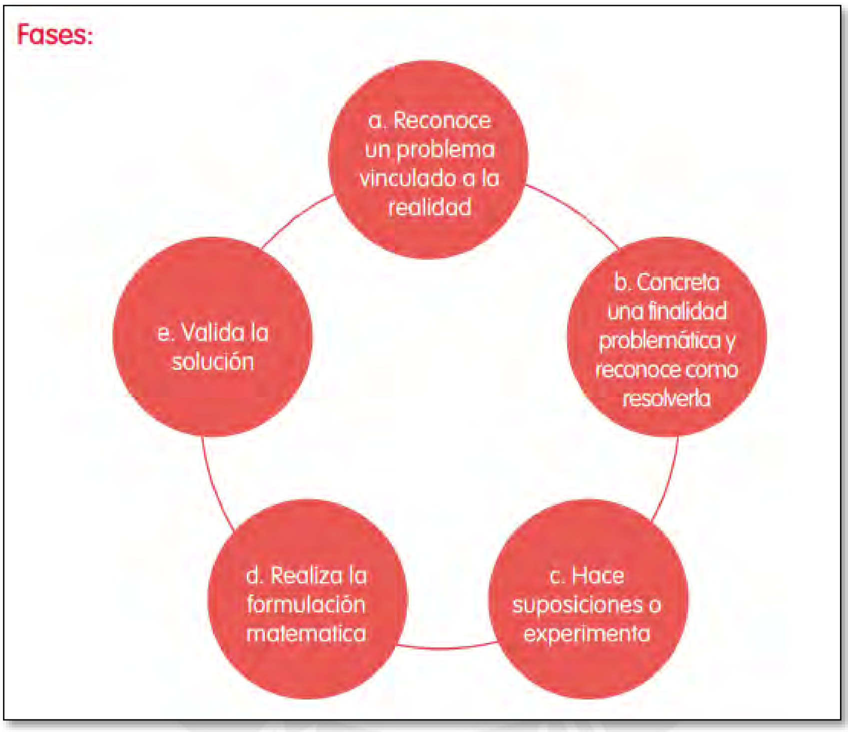


Figura 12: Recorte, Fases de la Modelación Matemática.
Fuente: MINEDU (2015)

a. **Reconocer un problema muy vinculado a la realidad.** El estudiante debe reconocer un problema planteado por el profesor o por un equipo de estudiantes; debe ser general y estar libre de muchos datos. En etapas posteriores, el estudiante examinará y recogerá solo las que necesite. De ser posible, este tipo de problemas deben ir asociados a imágenes o a materiales concretos de referencia para vincularlos sus contextos. Se recomienda plantear los siguientes tipos de problemas:
   - Situación de problemas realistas

- Problemas de traducción compleja de varias etapas

b. **Concretar una finalidad problemática y reconocer cómo resolverla.** Los estudiantes identifican los datos y relaciones presentes en la situación planteada. Los mismos pueden hacer una lista de los términos, expresiones o datos que encuentran en la situación, encuentran y generan preguntas que permitan incluir aquellos datos relevantes que no hayan sido considerados. Además, el trabajo en equipo permite:
    - Elaborar la lista de términos, expresiones y datos
    - Considerar o eliminar la información de la lista desarrollada
    - Establecer relaciones en la información, a fin de reconocer la resolución del problema.

c. **Hacer suposiciones o experimentar.** Consiste en plantear cómo varían los datos en relación a las condiciones que intervienen y luego tratar de simplificar o modificar la lista. En esta etapa, se observa la necesidad de obtener información para constituir las condiciones esenciales del problema. Esta información puede ser obtenida de actividades de simulación y experimentación que permitan establecer datos y relaciones entre ellas.

d. **Realizar la formulación matemática**. De los supuestos planteados por los estudiantes, expresan relaciones matemáticas elaboradas en modelos. Si este modelo no coincide con el previsto por el profesor, puede intervenir y orientar el proceso o esperar hasta el final para compararlo con el realizado por los estudiantes.

e. **Validación de la solución.** Los modelos, junto con los supuestos que se asignan a ellos, deben ser confrontados con datos y la realidad. Los grupos de trabajo comparan sus soluciones o modelos y estos pueden ser aceptados o no. Este es un paso que ayuda a los estudiantes a darse cuenta que las soluciones a los problemas están limitadas por el contexto. Algunos factores relacionados con el problema inicial pueden causar rechazo o aceptación de modelos. Ante el rechazo, la solución es volver a los datos iniciales del experimento y reanudar el proceso (MINEDU, 2015).

Es evidente que, en los textos entregados a los estudiantes, estas fases de la modelación se tratan de cumplir. Nuestra investigación observa los ejemplos propuestos en razón del ciclo de modelación de Blum y Leiß.

En el cuaderno de trabajo del texto escolar *Matemática 5* (Santillana, 2016), hemos entrado dos ejemplos de Modelación matemática de funciones cuadráticas, de los cuales mostramos el segundo ejemplo. Pretendemos describir, o al menos intentar, el tránsito por las fases del ciclo de modelación de Blum and Leiß.

La situación que plantea se encuentra entre las páginas 182 y 183

Desde la ventana de su departamento, Matías lanza verticalmente hacia arriba una pelota, de manera que esta cae en el otro lado de la calle donde vive. Se sabe que la altura h (en metros) a la que se encuentra la pelota según transcurre el tiempo t (en segundos) queda definida por la función $h(t) = -5t^2 + 10t + 28$. ¿Para qué valores de t es válida la función $h(t)$? ¿A qué altura se encuentra la ventana desde donde Matías lanzó la pelota? ¿Qué valor de t permite calcular esta altura? ¿Cuál es su máxima altura? 	Con este texto, el libro formula la situación o el fenómeno a modelar. Presenta una tarea de tipo enunciado realista. La imagen que acompaña no corresponde a la situación presentada.

Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad *¿Qué forma describe la trayectoria de un objeto que es lanzado hacia arriba? ¿Qué tiempo estimas que se demora un objeto desde que lo lanzas hacia arriba hasta que cae al piso? ¿Cuántas variables identificas en el problema? ¿Cuáles son y en qué unidades están dadas?*
Con estas preguntas, se pretende que los estudiantes realicen parte de la primera fase del ciclo de modelación, que es *Comprender,* aunque líneas abajo será mucho más explícito.

CONCRETAR UNA FINALIDAD PROBLEMÁTICA Y RECONOCER CÓMO RESOLVERLA

1. ¿De qué trata la situación? ¿Has experimentado alguna situación similar?

2. ¿De qué datos dispones? ¿Identificas algún dato que te indique que el problema se relaciona con una función?

3. ¿Qué debes resolver en este problema?

4. ¿Te ayudará relacionar la función que modela el problema con una tabla o con un sistema de ejes cartesianos? ¿Será una forma de resolver la situación? ¿Conoces alguna otra forma?

En esta parte, el texto pretende hacer que los estudiantes transiten por las dos primeras fases del ciclo de modelación, como lo son la *Comprensión* y *simplificación,* en la que los estudiantes identifican las variables relevantes de la realidad, concretando y seleccionando los aspectos más relevantes de la realidad

Modelación matemática

HACER SUPOSICIONES O EXPERIMENTAR

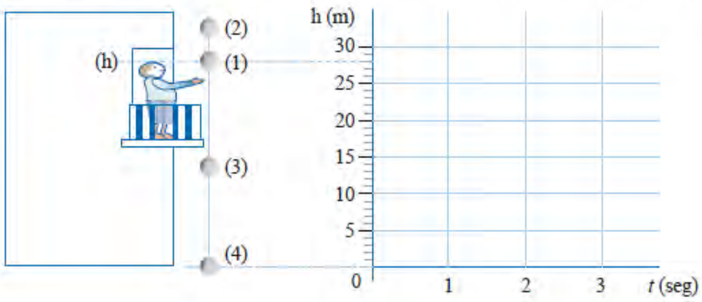
5. Si en la expresión h(t) reemplazas t por algún número, ¿qué obtienes? ¿Entre qué valores podría fluctuar t?

6. Anota en la tabla algunos valores de t e interpreta los valores de h(t) .

t									
h(t)									

No se observa con detalle la fase de la *Matematización*, ya que los estudiantes relacionan los elementos que forman parte del modelo real con los objetos matemáticos y se sirve de diferentes tipos de representaciones.

El ítem 6 podría ser considerada como la fase de *Trabajo matemático*, en la que los estudiantes deben resolver el modelo matemático utilizando los procedimientos matemáticos.

REALIZAR LA FORMULACIÓN MATEMÁTICA 7. Explica cómo se relacionan los datos de la tabla anterior. Si reemplazas *t* por cero, ¿qué significa el valor h(*t*)? 8. ¿Cuál es el mayor valor h(*t*) obtenido? ¿Será el mayor posible? ¿Cómo podrías saberlo? ¿Qué representa dicho valor máximo?	Esta sección podría ser considerada como la fase de *Interpretación.* Los estudiantes deberían obtener el modelo.
VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN 9. Interpreta y completa esta gráfica. ¿Cómo compruebas en ella tus respuestas? 	Esta sección podría también ser considerada en la fase de *Interpretación,* pero a su vez está presente la fase de *Validación*, que es, por cierto, muy esencial.

Metacognición  Respondo estas preguntas para identificar mi mejor forma de aprender. 1. ¿Me resultó ventajoso relacionar la expresión algebraica, la tabla y la gráfica? ¿Por qué? 2. ¿Me fue difícil comprender algo? ¿Qué? 	Esta sección puede ser enmarcada en la fase de *Validación,* en la que los estudiantes expresan argumentos y razonamientos dados que sustenten y justifiquen este proceso y la validez de la solución generada.

Coevaluación Resuelve en tu cuaderno. Luego, intercámbialo con un compañero(a) y revisa sus soluciones. 1. ¿Qué significa la expresión h(t) en el contexto del problema? 2. Si el problema no estuviera contextualizado, ¿cómo sería la gráfica de h(t)? Realízala en una hoja.	Aunque no es estrictamente la fase última, se podría considerar como la fase de la *Comunicación,* donde los estudiantes comparten sus respuestas e intercambian ideas. Esta debería darse a toda la clase.

El tránsito por algunas fases del ciclo de modelación es tenue, ya que apenas se puede apreciar, e incluso se podría decir que no se puede observar la fase 4, que es la fase de *matematización,* y esto se debe esencialmente al diseño y estructura de la actividad. Además, el tiempo previsto para actividad de aprendizaje es entre 70 a 80 minutos, un factor que cuenta también, ya que la mayor parte del trabajo es individual.

En el Cuaderno de trabajo del libro *Resolvamos problemas 5* (MINEDU, 2017), analizamos brevemente un primer caso en el que se propone la solución a la situación y se pide a los estudiantes describir el procedimiento y las estrategias utilizadas para encontrar el modelo matemático.

La *Situación A* se presenta en la página 110 del libro.

Situación A

Un experto en anfibios realizó observaciones del salto de una rana y las registró en una tabla. De esta manera, luego de analizar los resultados, se dio cuenta de que se trataba de una modelación matemática referida a una función cuadrática. La siguiente tabla muestra la altura de la rana en cinco instantes distintos.

***t* (s)**	0	0,5	1	1,5	2
***h* (m)**	0	0,75	1	0,75	0

a) Escribe una función cuadrática para modelar la situación que planteó el experto en anfibios.
b) ¿Cómo determinas algebraicamente la mayor altura que alcanza la rana y en qué tiempo lo hace?
c) ¿Cuánto demora la rana en volver a tocar el suelo? ¿De qué modo algebraico lo podrías determinar?

Plantea una situación que se enmarca dentro de una tarea de tipo realista, ya que se vale de un enunciado y una tabla. Solicita el modelo matemático, aunque inmediatamente menciona que es una función cuadrática. El tránsito por la primera fase, *Comprender,* sería inmediata, dado que le pide el modelo cuadrático.

Resolución a) Como se trata de una función cuadrática, es de la forma $h = h(t) = at^2 + bt + c$, en donde h es la altura y t el tiempo. Con los datos de la tabla: $0 = a(0)^2 + b(0) + c$, entonces $c = 0$ Similarmente: $1 = a(1)^2 + b(1) + c$, queda $1 = a + b$. $0 = a(2)^2 + b(2) + c$, queda $0 = 4a + 2b = 2a + b$ Resolviendo: $b = 2$ y $a = -1$ La función es: $h(t) = -t^2 + 2t$
No se observa la fase 2 de *simplificación,* ni la fase 3 de la *matematización*, pero pasa a la fase 4 de *Trabajo matemático* del ciclo de modelación, donde los estudiantes deben resolver el modelo matemático utilizando los procedimientos matemáticos. Se consigue el modelo matemático. Aquí el autor hace el trabajo matemático, mientras que los estudiantes observan.

b) Como $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo y tiene un máximo valor en el vértice. Hallamos su vértice, donde $b = 2$ y $a = -1$: $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$ Reemplazamos $h = 1$ en la función para hallar t. $1 = -t^2 + 2t \rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$. Resolviendo tenemos que $t = 1$
En esta parte, se podría considerar la fase 5 de *Validación,* ya que determina el tiempo que toma la rana alcanzar la altura máxima. Verifica teóricamente el modelo.

c) Para encontrar el tiempo que demora en volver a tocar el suelo, se considera que el punto de partida es cero. $0 = -t^2 + 2t \rightarrow 0 = t(-t + 2)$. Resolviendo: $t = 0$; $t = 2$. Tomamos el valor 2 porque el cero corresponde al punto de inicio de la rana antes de saltar.
En esta parte, se podría considerar como el paso por la fase 6 de *Validación,* ya que determina el tiempo en que la rana regresa al suelo después del salto. Verifica teóricamente el modelo. Recordemos que todo el trabajo lo realiza el autor.

1. Describe el procedimiento para determinar la expresión algebraica de una función cuadrática.

2. ¿Qué estrategias se han utilizado en las tres situaciones planteadas?

Esta sección podría ser considerada como los argumentos quede deberían esgrimirse para la fase 4 de *Trabajo matemático.* La *pregunta 2* se podría considerar como el tránsito por la fase de *Interpretación*. El desarrollo de toda la actividad podría considerarse como el paso por la última fase, la *Comunicación.*

Es evidente que no se planea realizar la modelación de un fenómeno, lo que en realidad se busca es determinar una ecuación que satisfaga las condiciones establecidas.

La segunda situación que mostramos tiene la misma característica que la anterior, salvo la diferencia que advierte la existencia de un error y el estudiante debe encontrar dicho error.

La *Situación C* se presenta en la página 112 del libro.

Situación C

Para motivar a Pablo, que gusta del fútbol, su maestro le plantea el siguiente problema: Un jugador se encuentra a 8 m del arco. El arquero, que es capaz de saltar hasta los 2,5 m de altura, está a 4 m del arco. Para realizar el lanzamiento, el jugador puede escoger entre dos trayectorias:

I. $y = 0{,}4x - 0{,}05x^2$

II. $y = 1{,}6x - 0{,}2x^2$.

¿Cuál de los dos modelos presentados será el más adecuado para meter gol? ¿Por qué?

Se solicita a los estudiantes contrastar dos modelos ya elaborados. Daríamos el salto hasta las fases finales del ciclo de modelación.

Resolución

(Encuentra el error)

Ambas funciones tienen como gráfica una parábola que se abre hacia abajo. Entonces, hallando las coordenadas de los vértices, determinaremos la altura máxima que alcanza cada modelo de trayectoria.

- Para $y = 0{,}4x - 0{,}05x^2$; $a = -0{,}05$ y $b = 0{,}4$ la fórmula que aplicaremos es:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0{,}4}{2(-0{,}05)} = 4$$

- Para $y = 1{,}6x - 0{,}2x^2$; $a = -0{,}2$ y $b = 1{,}6$ la fórmula que aplicaremos es:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}6}{2(-0{,}2)} = \frac{1{,}6}{0{,}4} = 4$$

Respuesta: Da lo mismo aplicar cualquiera porque se obtiene el mismo resultado.

Podríamos decir que, en esta parte del texto, los estudiantes estarían transitando por la fase 5 de *Interpretación* y fase 6 de *Validación* del ciclo de modelación. Evidentemente, la validación seria teórica, pero tampoco se hace completamente.

1. ¿Qué significan la abscisa y la ordenada del vértice?

2. Si tu procedimiento es correcto, busca otra forma de solución. Si no lo es, corrígelo.

Esta sección podría ser considerada como los argumentos que deberían esgrimirse para la fase 4 de *Trabajo matemático.* La *pregunta 2* se podría considerar como el tránsito por la fase de *Interpretación*.

Se busca determinar qué “modelo” satisface una situación condicionada, pero al final se termina encontrando los vértices de las funciones sin más interpretación ni validación.

A continuación, presentaremos los elementos de nuestro marco teórico, la Modelación matemática junto con la metodología y los procedimientos a seguir.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, expondremos la Modelación matemática como marco teórico, además de la metodología y los procedimientos a seguir en nuestra investigación.

3.1 Marco Teórico

Algunas Concepciones de la Modelación matemática

En principio, hacemos una breve revisión en relación a las concepciones de la Modelación matemática. Las diferentes concepciones de Modelación matemática generan producciones teóricas y prácticas, sean de los matemáticos, de los didactas de la Matemática, de los modeladores matemáticos o de historiadores de la Matemática.

Villa-Ochoa, Yepes, y Sanchez-Cardona (2017), dicen que la Modelación matemática puede constituirse en un ambiente para fomentar una participación dinámica de los estudiantes en actividades requeridas para el aprendizaje de un discurso matemático escolar (Parra-Zapata, Villa-Ochoa, 2016, citado en Villa-Ochoa et al., 2017). A su vez, motiva el estudio de las Matemáticas y la construcción de una imagen apropiada de la materia en relación con su participación en la sociedad y la cultura. Además del conocimiento matemático, también auspicia la producción de conocimientos de los contextos en los cuales se realiza la actividad de modelación.

El término Modelación matemática es asociada con el establecimiento de relaciones entre las Matemáticas y el mundo extra-matemático (Blum, 2007, citado en Villa-Ochoa et al., 2017), la modelación también es vista como un proceso que busca la obtención y validación de modelos matemáticos que tienen su origen en un dominio extramatemático.

La Modelación matemática es considerada como un ambiente de aprendizaje articulada con el estudio, la problematización y la investigación de situaciones problemas, que no son matemáticos, por medio de las Matemáticas, que también ayudan a comprender, de manera crítica, situaciones del contexto inmediato por medio de las Matemáticas y posibilita el representar, analizar, modelar y tomar decisiones respecto al fenómeno o situación que se le atribuye (Araujo, 2012, citado en Villa-ochoa et al. 2017).

La Modelación matemática puede considerarse una actividad escolar con dos características esenciales, ya que la actividad debe ser un problema y no un ejercicio, por el hecho de que la actividad tiene que extraerse de contextos habituales para los estudiantes o de otras ciencias, lo que se denomina la *interdisciplinariedad.* "*Los estudiantes se deben involucrar en situaciones auténticas de la cultura y la sociedad a la que pertenecen y reconocer las prácticas, usos y roles auténticos que las comunidades hacen de las Matemáticas y de la modelación"* (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 224).

Biembengut y Hein consideran que el modelaje matemático es el proceso involucrado en la construcción de un modelo, que hace posible conjugar las Matemáticas con la realidad circundante (Biembengut y Hein, 1997, citado en Medina, 2011). El proceso se desarrolla en tres etapas y cada una en sub etapas respectivamente:

1. Interacción con el asunto
    a) Reconocimiento de la situación problema o fenómeno
    b) Familiarización con la situación que va a ser investigada y modelada
2. Construcción matemática
    a) Formulación del problema, generación de hipótesis
    b) Resolución del problema en términos del modelo
3. Modelo matemático
    a) Interpretación de la solución y su posterior convalidación.

En la primera etapa (interacción con el asunto), se plantea la situación o fenómeno a analizar y se hace una investigación sobre la misma; en la segunda etapa (construcción matemática), se formula la situación teniendo un enfoque matemático, la cual se denomina *traducción de la situación real a lo abstracto*. Es en este espacio en que se construye el modelo que servirá para representar la situación planteada antes, ya que los estudiantes deben realizar las siguientes acciones:

- Clasifica las informaciones (relevantes y no relevantes) identificando los hechos intervinientes
- Decide acerca de factores a ser conseguidos, planteando hipótesis
- Generaliza y selecciona las variables que son relevantes
- Selecciona símbolos idóneos para las variables

- Describe las relaciones que se establecen, en términos matemáticos (Biembengut y Hein, 1997, citado en Medina, 2011)

Posterior a la construcción del modelo matemático, en la tercera etapa (modelo matemático), los estudiantes comprueban y validan el modelo. Es importante tener en consideración a la persona que guía este proceso, denominado *modelador*, que debe ser experto en la construcción de modelos, quien, con experiencia, elije el tema a tratar, la situación que se desea modelar y los tiempos requeridos para la realización del proceso.

Biembengut y Hein (2004) dicen que la Modelación matemática es una estrategia de enseñanza y para eso el profesor debe realizar el proceso de modelación en dos partes: primero, aproximando los contenidos matemáticos partiendo de modelos matemáticos que pueden aplicarse a variadas áreas del conocimiento y, en segundo lugar, dirigiendo a los estudiantes para que, con autonomía, realicen el proceso de modelación, que consta de la siguiente secuencia de pasos: justificación de proceso, elección del tema, formulación del problema, desarrollo de contenido programático, ejemplos análogos - fijación de conceptos, formulación de un modelo matemático y evaluación y convalidación de los resultados (Biembengut y Hein, 2004, citado en Medina, 2011). Este proceso puede visualizarse en la Figura 13.

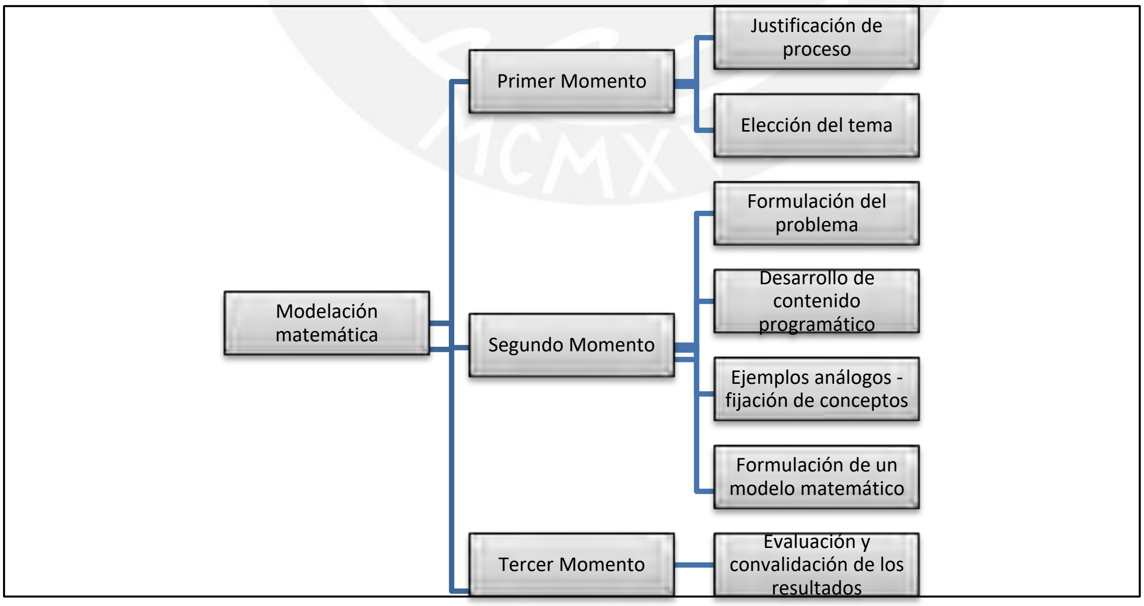


Figura 13: Proceso de Modelación Matemática en el Aula según Biembengut y Hein (1997)
Fuente: Medina (2011)

Brevemente, describimos las acciones que el profesor y los estudiantes deben desarrollar en las fases de la Modelación matemática.

1. Justificación de proceso: el profesor explica a sus estudiantes los contenidos matemáticos requeridos para el análisis del problema a ser resuelto.
2. Elección del tema: el profesor, junto con sus estudiantes, hace una lista de temas cotidianos que estén relacionados a los contenidos a aprender. En esta fase, es muy importante la función mediadora y guía del profesor para que sus estudiantes puedan lograr el aprendizaje que se espera.
3. Formulación del problema: el profesor formula una situación en la que sus estudiantes necesiten desarrollar un contenido matemático específico.
4. Desarrollo de contenido programático: el profesor, por medio de preguntas sobre el tema elegido, guía a sus estudiantes al estudio del contenido que desea que aprendan.
5. Ejemplos análogos - fijación de conceptos: el profesor hace una muestra de ejemplos análogos, en las que pone en evidencia que los contenidos a aprender se usan en diversas y variadas áreas de las actividades del ser humano.
6. Formulación de un modelo matemático: el profesor, luego de explicar la relevancia de los contenidos y conceptualizándolos para su comprensión, a continuación, propone a sus estudiantes la construcción de un modelo matemático que pueda resolver la problemática suscitada.
7. Evaluación y convalidación de los resultados: posterior a la construcción del modelo, el profesor muestra la importancia de validar el modelo, evaluar el resultado y aplicarlo a situaciones similares a la situación modelada.

Modelación matemática

Todo inicia de una situación en el mundo real o el mundo fuera de las Matemáticas. Casi siempre la situación tiene que ser simplificada, estructurada y hecha más precisa por el estudiante o modelador, lo que conduce a un modelo real de la situación.

El modelo real no es simplemente una imagen simplificada, pero verdadera de alguna parte de una realidad objetiva y preexistente. El paso de la situación al modelo también crea una realidad, que depende de las intenciones e intereses del estudiante o modelador (Blum, 1993).

Entonces, si es posible, el modelo real se matematiza y se traduce a las Matemáticas, lo que resulta en un modelo matemático de la situación original. En ocasiones, se pueden construir diferentes modelos de la misma situación.

El proceso de resolución de problemas continúa con la elección de métodos adecuados dentro de las Matemáticas, del cual se obtienen algunos resultados matemáticos. Estos tienen que regresar y ser traducidos al mundo real y ser interpretados en relación con la situación inicial. Al hacerlo, el estudiante o modelador valida también el modelo matemático.

Si se producen discrepancias, lo que sucede frecuentemente en la realidad, ya que hay muchas trampas potenciales, según Murthy, Page & Rodin (1990) (citados en Blum, 1993), entonces todo (o en parte) el ciclo tiene que comenzar de nuevo.

A veces, en las Matemáticas escolares especialmente, la situación presentada es solo un disfraz artificial de algún problema matemático. Luego, el proceso de construcción del modelo consiste en quitar el disfraz del problema verbal y el proceso de resolución del problema se detiene es de solo un ciclo. Estos problemas artificiales pueden tener valor didáctico.

El término *modelado matemático* puede significar el proceso de construcción de modelos, que lleva de una situación real a un modelo matemático o todo el proceso de resolución de problemas aplicado o cualquier forma de conectar el mundo real con las Matemáticas (Blum y Niss, 1991, citados en Blum, 1993).

La Modelación matemática, entendida de manera sencilla, es un proceso de traducción entre el mundo real y las Matemáticas, y que se da en ambas direcciones y que puede ser usada para la práctica del investigador y docente como una herramienta didáctica, metodológica o como marco teórico y fuente de construcción de conocimiento matemático, ya que es un proceso que conecta elementos de naturaleza “no matemática” con el conocimiento matemático (Borromeo-Ferri, 2010, citados en Huincahue, 2017).

El ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007) (citado en Gallar, 2016) es utilizado como referencia en numerosos trabajos y presenta una secuenciación más fina de las fases iniciales, que no se da en otros ciclos de modelación, como los provenientes del campo de la resolución de problemas verbales o los utilizados como guía para los estudiantes en la resolución de tareas de modelización. Por ello, hemos escogido este ciclo como referencia en nuestra investigación.

El ciclo de Blum y Leiß está compuesto por siete etapas de transición entre las fases que lo conforman (Situación Real – Modelo de Situación - Modelo Real - Modelo Matemático - Solución Matemática - Solución Real), que se identifican con verbos de acción que facilitan su reconocimiento (Comprensión – Simplificación/estructuración – Matematización – Resolución matemática – Interpretación – Validación – Comunicación). Su estructura se muestra en la Figura 14.

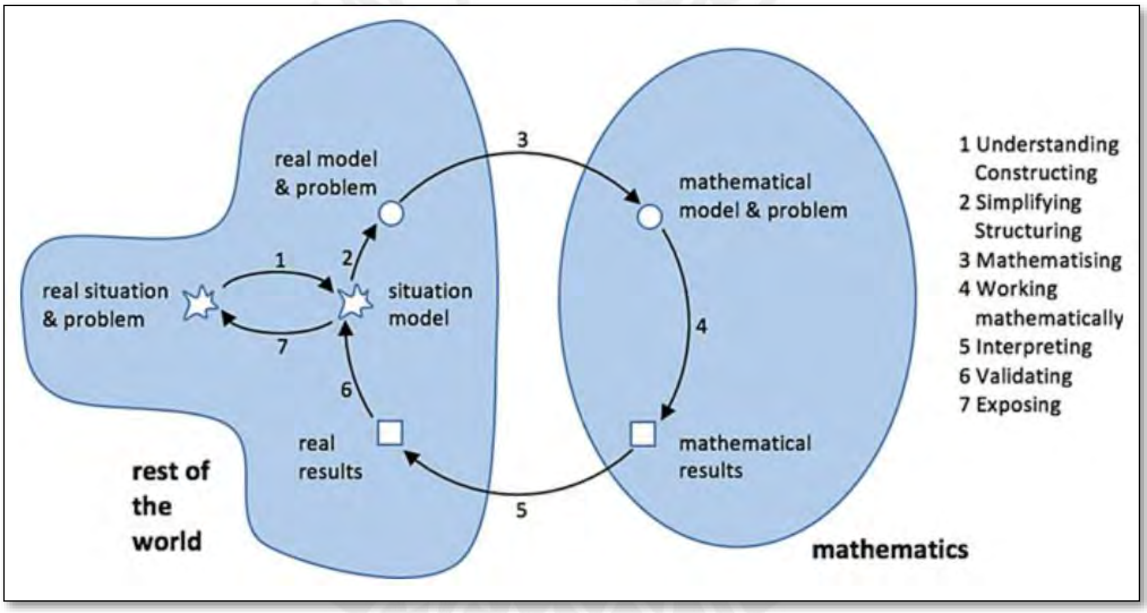


Figura 14: Ciclo de Modelación de Blum and Leiß (2007)
Fuente: Greefrath & Vorhölter (2016)

A continuación, detallaremos cada una de las fases y transiciones de este ciclo, ayudándonos de las reflexiones que diversos autores han hecho al respecto.

Fases del proceso cíclico de la modelación

Situación Real (Real Situation)

La Situación Real muestra la situación de partida o la situación inicial. Puede presentarse mediante un texto escrito (enunciado verbal), una tabla, una ilustración u otro.

Modelo de Situación (Situation Model)

Cada estudiante genera una representación mental (imagen) de la situación real de partida. Esta imagen mental está condicionada por el punto de vista personal del estudiante y depende, según señala Leiß (2010) (citado en Gallart, 2016), del conocimiento previo que posee sobre el contexto en que se ubica la tarea, las creencias y actitud hacia las Matemáticas y el contexto mismo, su motivación, su competencia lectora (entendida como su competencia para para extraer información de gráficos, ilustraciones o fotografías, símbolos y no solo comprender texto), su competencia matemática, y las características particulares de la tarea (estructura semántica y matemática, contexto, formato, entre otros). Esta imagen mental permitirá la formulación de un problema, formulado por el estudiante y que se convertirá en su Modelo de Situación.

Modelo Real (Real Model)

El Modelo Real es construido por cada estudiante desde su propia imagen mental de la situación y lo componen aquellos elementos de la realidad que son relevantes en la resolución del problema planteado.

Modelo Matemático (Mathematical Model)

El Modelo Matemático lo componen los objetos matemáticos requeridos para la resolución del problema formulado dentro del contexto de las Matemáticas. Puede ser un modelo algebraico, probabilístico, geométrico, entre otros. Este Modelo Matemático, según Blum y Niss (1991) (citado por Gallart, 2016), posee tres elementos fundamentales:

- Conjunto de objetos matemáticos
- Relaciones y reglas matemáticas que gobiernan estos objetos matemáticos
- Correspondencia entre los objetos matemáticos, las relaciones y reglas, y los elementos del problema real.

Lesh y Harel (2003) (citado por Gallart, 2016) indican que los modelos matemáticos son sistemas conceptuales que pueden expresarse a través de representaciones interrelacionadas (símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos, diagramas, esquemas o metáforas fundadas en la propia experiencia del estudiante), en los que se cuentan los conceptos requeridos para explicar o describir los objetos, relaciones, acciones, patrones y regularidades implicados en la problemática y los procedimientos que son usados para producir los constructos, manipulaciones o predicciones en su resolución.

Solución Matemática (Mathematical Results)

A partir de la resolución del Modelo Matemático, se obtiene el resultado del problema en términos matemáticos, que puede ser un número, una ecuación o fórmula, una gráfica, un intervalo u otro, y será la Solución Matemática del problema.

Solución Real (Real Results)

La Solución Matemática resultante tiene que ser interpretada en relación a la situación real inicial, consiguiéndose así la Solución Real que luego tiene que ser validada y comunicada.

Un resumen interesante es presentado por Huincahue, Borromeo-ferri, & Mena-lorca (2018), destacando que el proceso cíclico de la modelación se inicia con una situación real, que puede ser representada por una imagen, texto o ambos. Luego, el estudiante entiende la tarea para crear una representación mental de la situación, para focalizar y filtrar la información de la situación real de manera consciente o no y en concordancia con sus preferencias de pensamiento.

Posteriormente, se produce una transición que simplifica e idealiza el problema para arribar a un modelo real, este es un proceso más consciente e interno del estudiante y, dependiendo del problema, es incluido o no en el conocimiento extramatemático. Luego de esto, existe un proceso de matematización influenciado por el conocimiento extramatemático para la consecución de un modelo matemático, circunstancia en el que los argumentos y afirmaciones provienen sobre todo de una conceptuación matemática. Al final, se obtienen resultados matemáticos e interpretación en la situación de la tarea y obtención de resultados reales, siendo validados en la representación mental de la situación o en el modelo real.

Transición entre las fases del ciclo de la modelación

Cuando el estudiante se enfrenta a una Situación Real, realiza primero una transición de "*reflexión y comprensión*" que lo lleve a la formación de una imagen cognitiva personal de la Situación Real y a la "*formulación*" de un problema, lo que será su Modelo de Situación.

A continuación, se produce un proceso de "*simplificación*" y "*estructuración*" que permite al estudiante identificar y seleccionar los elementos de la realidad requeridos para la resolución del problema, que conformarán el Modelo Real. En esta transición, es importante el conocimiento extra-matemático que posea el estudiante de la situación, ya que en las fases iniciales es necesario que este trabaje con información que no es estrictamente matemática, tomando su experiencia en la realidad en que se ubica la tarea.

Según Cabbassut (2009) (citado en Gallart, 2016), las decisiones que se puedan tomar en este proceso son influidas por argumentos matemáticos y no-matemáticos.

Posteriormente, se da la transición desde el mundo real al mundo de las Matemáticas. Acá, el estudiante establece una correspondencia entre los elementos seleccionados del mundo real y los objetos matemáticos que compondrán el Modelo Matemático, "*codificando*" la realidad mediante el lenguaje y las representaciones matemáticas adecuadas.

Después, el modelo matemático formulado debe resolverse a través de las estrategias heurísticas, los conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos pertinentes hasta arribar a la Solución Matemática y otra vez se regresa al mundo real, "*decodificando*" e "*interpretando*" la Solución Matemática en el contexto real en que se ubica el problema, lo que conduce a una Solución Real (Gallart, 2016).

Lo que sigue a la solución es un proceso de "*validación*" y "*reflexión*", en especial el proceso de resolución y la posibilidad de "*generalización*" a situaciones similares, así como la consideración y evaluación de otras vías de resolución.

Si la solución no se ajusta del todo a la situación, es necesario *"revisar"* el modelo planteado e iniciar, en un nuevo ciclo, todo el proceso (o al menos en parte). En cada nueva repetición del ciclo, es posible mejorar el modelo, añadiendo sub-problemas nuevos que tomen aspectos que no fueron considerados hasta el momento, así como señala Zawojewski (2010) (citado por Gallart, 2016), se obtiene una comprensión más profunda sobre sus restricciones, limitaciones y beneficios con relación a otros modelos.

Si la solución es considerada adecuada, se "*comunica*", se expone el proceso de resolución del problema y se describe la solución obtenida con argumentos matemáticos, formales o no y necesarios. Es importante tener en cuenta que la solución de un problema de modelación no es única. Así, durante esta fase de comunicación, al observar diferentes modelos en resoluciones distintas, se presenta la oportunidad de comparar, contrastar y debatir otras opciones.

Para analizar el comportamiento de los estudiantes, Borromeo (2006) (citado por Sol, Giménez, & Rosich, 2016), desarrolló el constructor de ruta de modelación para referirse al itinerario seguido por los estudiantes cuando transitan a través de las diferentes fases del ciclo de modelación y que se muestran en su expresión verbal, así como en otras representaciones externas. Esta ruta se puede representar de forma simbólica o gráficamente, ya que esto nos permitirá analizar para así comprender el proceso de modelación que han seguido. (ver Tabla 2)

Tabla 2.

Ciclos de modelación y acciones hipotéticas observables

Fases de Blum & Leiß	**Acciones hipotéticas observables**
1 y 2	1. Reconocer un problema social abordable matemáticamente 2. Concretar una finalidad problemática y reconocer medios para resolverla
3	3. Identificar objetos y relaciones relevantes 4. Seleccionar variables. Decidir valores 5. Reconocer los ámbitos matemáticos del modelo

	6. Explicitar relaciones entre objetos reales y contenidos matemáticos 7. Controlar la coherencia en el conjunto de relaciones matemáticas establecidas
4	8. Explicitar la relación entre variables usando lenguaje matemático 9. Formular hipótesis matemáticas 10. Formulación de problemas y subproblemas 11. Resolución de problemas
5	12. Encontrar e interpretar la solución matemática
6	13. Reconocer el significado y alcance de soluciones y conclusiones en la situación real. Explicitan el modelo 14. Validar el modelo 15. Modificar el modelo si es necesario
7	16. Comunicar el proceso y resultados cuando el modelo sea válido

*Nota***.** Adaptación del autor, fuente original: Sol, Giménez, & Rosich (2016, p. 332)

Además de lo descrito anteriormente, precisamos detallar el procedimiento realizado por Gallart (2016) para observar y analizar las acciones de los estudiantes cuando estén transitando por las fases del ciclo de modelación. Ver Tabla 3.

Tabla 3.

Análisis del proceso de modelación - original

Pregunta	**Acción**	**Ciclo Blum y Leiß**
¿Se formula un problema que pueda dar respuesta, total o parcial, a la situación original propuesta?	*Comprender* la situación en la que se enmarca la tarea, tomando decisiones, elaborando hipótesis y supuestos que lleven al planteamiento de un problema o subproblemas	**1**
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y	*Simplificar y seleccionar* los elementos y relaciones relevantes, identificando las matemáticas que subyacen en la realidad.	**2**

los elementos del modelo matemático?		
¿Se usan representaciones?	*Utilizar* representaciones (gráficos, dibujos, esquemas…) para codificar la realidad en términos matemáticos e interpretar los resultados obtenidos.	**3 y 5**
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	*Utilizar* el lenguaje formal y simbólico para codificar la realidad en términos matemáticos, resolver matemáticamente el problema e interpretar los resultados obtenidos.	**3, 4 y 5**
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	*Trabaja*r con las herramientas y procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema planteado.	**4**
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	*Validar* las soluciones matemáticas en la realidad, reflexionando sobre el modelo utilizado y llegando a conclusiones razonadas.	**6**
¿Se comunica de forma oral y escrita el proceso de resolución de forma que resulte comprensible por parte del resto de compañeros?	*Debatir y comunicar*, tanto dentro como fuera del grupo, todo el proceso de modelización seguido y los resultados obtenidos.	**7**

Nota: Gallart (2016, p. 79)

Gallart (2016) hace una descripción detalla de cada pregunta. La primera pregunta se relaciona con la comprensión que el estudiante tiene de la situación planteada en el enunciado o gráfico o ambos, que le conducirá a formularse un problema, que no necesariamente tiene que ser matemático, ya que se refiere a la formulación de un problema o sub-problemas que permitan a los estudiantes la resolución total o parcial de la tarea propuesta. La selección de estos elementos está estrechamente relacionada con la comprensión del estudiante de la situación inicial (su imagen o representación mental de la situación) y su conocimiento matemático, aspectos que le permitirán identificar las Matemáticas subyacentes a esta realidad.

Una vez formulado un problema, el estudiante tiene que estructurar y simplificar la situación real para resolverla, concretando y seleccionando los aspectos más relevantes de la realidad. A esta parte del proceso de modelación se refiere la segunda pregunta.

La tercera y cuarta pregunta se dan en relación con el proceso de matematización, donde el estudiante traslada los elementos de la realidad que ha seleccionado al mundo de las Matemáticas, ya que utiliza distintos tipos de representaciones y lenguajes.

La quinta pregunta se refiere al trabajo matemático exclusivamente, el cual posibilitará al estudiante obtener una solución matemática de su modelo. Dicha solución se sustenta de argumentos que soporten y justifiquen la adecuación de la solución y su validez y las conclusiones que se derivan, aspectos que son tratados en la sexta pregunta. Finalmente, cuando se ha alcanzado una respuesta satisfactoria, debe ser comunicada al resto de compañeros para que pueda ser contrastada y debatida.

Estas herramientas, refiriéndonos a la Tabla 2, ciclos de modelación y acciones hipotéticas de observables realizado por Sol (2016) y la Tabla 3, el Análisis del proceso de modelación hecho por Gallart (2016), luego de una adaptación, nos permitirá describir y analizar el proceso de modelación realizado por los estudiantes, obteniendo una reconstrucción racional y secuenciada de su resolución. Los comentarios originales se muestran entrecomillados y en cursiva y además se incluyen dibujos, gráficas, tablas y cálculos extraídos en su formato original.

Algunas Perspectivas de la Modelación matemática

La Modelación matemática, al ser una actividad que conecta la realidad con la Matemática, existe cierto margen de lo que se considera como Modelación, ya que dependerá de los objetivos que proponga el profesor, los que pueden tener como centro el proceso de desarrollo, el resultado, interpretación, validación, asignación de hipótesis, barreras cognitivas, entre otros (Huincahue, 2017).

Las diferentes características que se pueden dar en una tarea direccionan hacia una categorización. Las perspectivas surgen como un proceso natural de clasificación teórica, que procuran establecer una categoría que toma en cuenta algunas características en relación a la percepción de la realidad, desarrollo de los procesos, objetivos de las tareas y evolución de líneas de investigadores.

En la evolución de la Modelación matemática en educación, han aparecido diferentes perspectivas, donde cada una delinea sus objetivos para la Matemática, la realidad y la educación: Realista, Contextual, Educacional, Socio-critica, Epistemológica y Cognitiva (Kaiser & Sriraman, 2006).

Perspectiva Realista

Las tareas de Modelación matemática son un problema aplicado el cual debe resolverse incidiendo en situaciones de la vida real y en los enfoques interdisciplinarios, ya que no representa su interés el desarrollo de la teoría matemática. Lo más importante es el problema auténtico, ya que se propone el desarrollo de las competencias de modelación, en la que los estudiantes resuelven las tareas con el uso del análisis de problemas matemáticos y la tecnología.

Huincahue (2017) precisa que es relevante estudiar en profundidad procesos de Modelación matemática en las diversas profesiones y áreas de aplicaciones de modelos matemáticos. El aprendizaje se logra a través del modelo de situaciones de la vida real.

Perspectiva Epistemológica

Esta perspectiva está enfocada en el desarrollo teórico de la situación formulada, ya que existe un objetivo teórico ligado a la tarea de Modelación matemática, que ya tiene una situación desde la realidad que se requiere modelar, donde lo importante de la situación es lo epistemológico, que trasciende a la tarea. La situación depende de teorías relacionadas con la Didáctica de la Matemática o de otras áreas de las ciencias.

La perspectiva epistemológica tiene elementos a considerar: el entendimiento y la descripción de la naturaleza de las actividades matemáticas y la reflexión producida por la Modelación matemática; las que, casi siempre, tienen un funcionamiento y forma según la epistemología del estudiante que modela.

Se evidencia la polaridad entre las perspectivas epistemológica y realista, se contraponen y sus diferencias son evidentes en relación al objetivo de la tarea. Es así que surgen tareas de otro tipo, donde el objetivo no es precisamente alguno de estos extremos (Huincahue, 2017).

Perspectiva Educacional

Se considera a la Modelación matemática como una competencia específica, buscando integrar modelos y la modelación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

> En esta perspectiva, se consideran, por ejemplo, las rutas para organizar actividades de Modelación matemática en diferentes tipos de currículos matemáticos, problemas relacionados con la implementación de modelación en la cultura de la institución y prácticas de enseñanza y problemas relacionados con la evaluación de actividades de modelación de los estudiantes, pero posee como objetivo general la Educación Matemática (Huincahue, 2017, p. 61).

Se ponen en prioridad las estructuras de los procesos de aprendizaje y de los conceptos. A continuación, esbozamos tres argumentos para la enseñanza de la Modelación matemática como un elemento integrado en la Matemática y en la educación:

1. La Modelación matemática propicia la comunicación entre las Matemáticas y las experiencias cotidianas de los estudiantes, desarrollando un soporte cognitivo, motivando y dando a la Matemática un significado de disciplina que nos acerca a un entendimiento de la vida real.
2. Desarrollar Modelación matemática requiere competencias, tales como creatividad, análisis y crítica a los modelos matemáticos.
3. Los modelos y el resultado de los mismos se utilizan en la toma de decisiones, lo que afecta el funcionamiento y desarrollo de las

sociedades. Esta característica es compartida con la perspectiva socio-crítica.

La autenticidad y conexión con la realidad no garantizan que se den reflexiones críticas y relevantes en los estudiantes; sin embargo, características como la motivación que propicia la tarea ayudan a sostener una reflexión en relación a la actividad de modelar y la reflexión.

Perspectiva Socio-Crítica

El estudiante, al ser confrontado a resolver una situación de modelación, decide en razón de sus valores, ética, moral y principios (una filosofía de vida) aceptados socialmente.

> Tales modelos describen rasgos de pobreza, desigualdad, corrupción y protección de la naturaleza, estos en un micro y macro nivel, y todos ellos son una fuente para la construcción de modelos matemáticos con el fin de poder emitir juicios de valor según el estudiante como persona perteneciente a una sociedad (Huincahue, 2017, p. 62).

En esta perspectiva, se pone en relieve el rol de las Matemáticas en la sociedad y la necesidad de un pensamiento crítico de la función de las Matemáticas en la sociedad, sobre el papel de la naturaleza de los modelos matemáticos y la tarea que cumple la Modelación matemática en sociedad.

La perspectiva Socio-Crítica presenta tres focos de investigación, los cuales se pueden presentar juntos o por separado.

1. El proceso de modelación o un subproceso específico.
2. Las aplicaciones más recientes de un modelo matemático.
3. Los procesos sociales donde la Modelación matemática y los modelos son usados para el análisis y crítica fenómenos sociales.

Perspectiva Contextual

Tiene como objetivo el desarrollo y diseño de tareas (situaciones problema) para modelar actividades, el cual posee seis principios guías:

1. Principio de realidad. La situación elegida es próxima a la realidad de los estudiantes que modelan.

2. Principio de la construcción del modelo. La situación crea en los estudiantes la necesidad de producir una construcción matemática significativa.
3. Principio de autoevaluación. La situación permite a los estudiantes evaluar los modelos creados por ellos mismos.
4. Principio de la construcción de documentación. La situación hace que el estudiante comunique sus pensamientos en tanto resuelve un problema.
5. Principio de generalización de construcción. La situación permite la generalización del modelo construido.
6. Principio de simplicidad. La situación necesita ser simple.

El foco de esta perspectiva en el diseño didáctico de estimular actividades de modelación (Lesh y Doerr, 2003, citado por Huincahue, 2017) con situaciones estructuradas para soportar el aprendizaje de los estudiantes. Denota en sus fundamentos: 1) Los sistemas conceptuales son construcciones humanas. Es decir, su naturaleza es esencialmente social; 2) Los significados de tales construcciones son representados en lenguaje escrito, verbal, kinestésico, diagramas y hasta metáforas; 3) Es necesario integrar conocimientos o disciplinas que tenga el estudiante para que logre articular su propio conocimiento; 4) Las experiencias de los estudiantes son dinámicas, ya que es necesario que el estudiante se sienta en capacidad de mantener dicho dinamismo.

Perspectiva Cognitiva

Se considera como una meta-perspectiva, ya que se enfoca en objetivos científicos y pretende comprender las funciones cognitivas que son activadas en una situación de modelación para un estudiante. Normalmente, se analiza a los estudiantes cuando realizan actividades de Modelación matemática, después son entrevistados con el objetivo de reconstruir las rutas individuales de pensamiento. Busca descubrir barreras cognitivas en el proceso de modelación y reconstruir todo el proceso cognitivo del estudiante mientras modela.

La investigación de Camarena-Gallardo (2013) es un ejemplo de investigación en esta perspectiva. Su objetivo es conocer la percepción de los estudiantes de la competencia de Modelación matemática como importante en la Ingeniería.

Tiene los siguientes elementos cognitivos: concepciones matemáticas para el proceso de matematización; capacidades cognitivas generales para la Ingeniería; resalta diferencias en los procesos de Modelación matemática, elementos cognitivos específicos, relacionados a modelos y problemas propios de la Ingeniería.

La investigación que presentamos no necesaria y estrictamente se enmarca en una perspectiva. Al ser un problema auténtico e interdisciplinario, proponer el desarrollo de competencias de modelación y que los estudiantes resuelven las tareas con el uso de la tecnología, se podría decir que estamos en la perspectiva realista de la modelación; sin embargo, existen características que no se comparten, ya que la modelación realizada no tiene el rigor que tendría en una actividad profesional y además que el objetivo final es el establecer un modelo funcional que sirva en la realidad, ya que normalmente no es relevante el trabajo matemático implicado.

El hecho de considerar a la Modelación matemática como una actividad que procura integrar modelos y la modelación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, además de fomentar el diálogo entre las Matemáticas y las experiencias de la vida cotidiana de los estudiantes pondría nuestra investigación dentro de la perspectiva educacional, pero no comparte la característica que el modelo y el resultado de los modelos se utilicen para la toma de decisiones, que influye en funcionamiento y forma de las sociedades.

También podemos decir que la investigación comparte características de la perspectiva contextual de la modelación, porque se han desarrollado y diseñado tareas o situaciones (problema) para modelar actividades. La situación formulada es cercana a la realidad de los estudiantes, ya que crea en ellos la necesidad de producir una construcción matemática, permite evaluar los modelos creados por ellos mismos y hace que el estudiante comunique sus pensamientos en tanto resuelve un problema. Una característica no compartida es el hecho que la situación permite la generalización del modelo construido.

Tareas de Modelación matemática.

La clasificación considera las formas como se presentan las tareas y los enunciados con los que se presentan las tareas y el contexto que se involucra para reconocer la referencia que se hace de la realidad.

La clasificación está compuesta por cuatro categorías: enunciados verbales, construcción de representaciones, modelación a través de proyectos y uso y análisis de modelos. También existen subcategorías, obsérvese en la Figura 15.

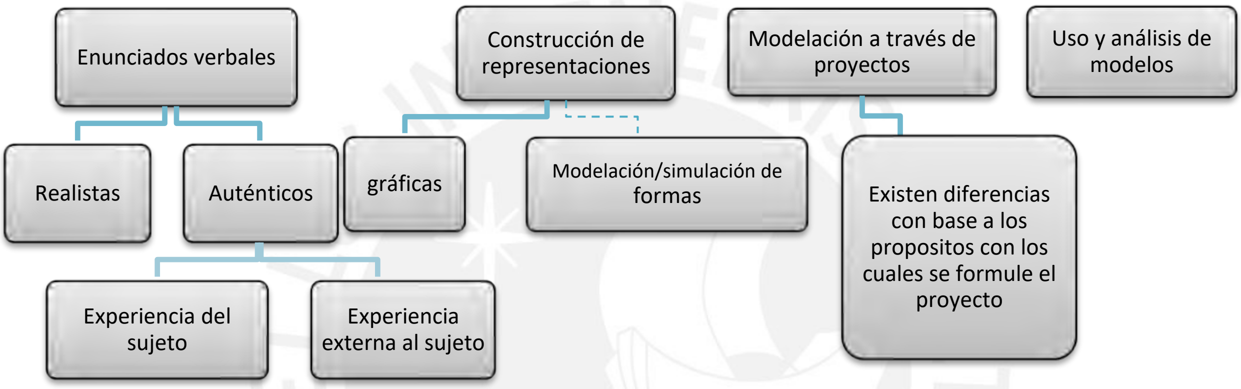


Figura 15: Categorías y Subcategorías de una Clasificación Alternativa de Tareas de Modelación. *Fuente*: Tomado de Villa-Ochoa (2017)

En nuestra investigación, se desarrollarán tareas, según esta clasificación, en la categoría de enunciados verbales auténticos, dado que las tareas propuestas en la actividad están en relación directa con la experiencia del estudiante. Las características se exponen en el titulo referido a los enunciados verbales auténticos líneas abajo.

Enunciados Verbales (Word Problems)

Los problemas verbales son textos en los que se describe una situación que es relativamente cercana o familiar a los estudiantes y formula una pregunta cuantitativa que es posible resolver con la ayuda de las Matemáticas.

Términos o expresiones como "*auténtico*", "*vida real*" y "*situado*" se utilizan para mostrar diferentes grados de diferenciación de las presentaciones de problemas que se basan completamente en símbolos matemáticos. La expresión “*vida real*" puede describir problemas verbales en los que las Matemáticas se presentan en una oración simple que proporciona información mínima del contexto real (poco auténtico), mientras que términos como "*auténtico*" y "*situado"* tienden a usarse para transmitir una relación más fuerte con la experiencia del sujeto en un contexto particular matemático (Beswick, 2011 citado por Villa-Ochoa et al., 2017).

A continuación, se presentan categorías amplias y disjuntas de tareas de modelación que se estructuran como enunciados verbales

a. Enunciados Verbales Realistas

Los enunciados verbales realistas pueden albergar o traer a memoria aspectos realistas o imaginados, sin vincular necesariamente contextos próximos a la experiencia cotidiana del estudiante.

Un ejemplo de tarea realista puede leerse en Huapaya (2012), donde el autor sugiere una tarea en un contexto de negocios, alquiler o renta de habitaciones en un hotel, en la que se le pide a los estudiantes que evoquen un negocio de esa naturaleza. Partiendo de una función enunciada verbalmente, el estudiante construye una tabla de valores, donde además se le solicita la elaboración de una gráfica y que escriba la fórmula, el registro algebraico, apoyándose en el Software graficador o por la hoja de cálculo, Para el autor, esta tarea es útil para dar solución a un problema de optimización.

Este tipo de enunciados implica dos sistemas, uno matemático y el otro el imaginado. Los modelos matemáticos se muestran en representación de las condiciones del enunciado para responder a las preguntas planteadas (Lesh, Caylor, 2007, citado por Villa-Ochoa et al., 2017).

La noción de realidad o contexto en tareas de enunciados verbales reales es una construcción imaginada por parte del estudiante que las resuelve. Se limita la complejidad que se presenta en un contexto particular cuando se da en la experiencia cotidiana o en la experiencia profesional de los estudiantes.

La simplificación de la complejidad permite que este tipo de tareas se pueda utilizar en el aula para adecuarse a prácticas, cuyo objetivo sea ilustrar potenciales "*aplicaciones*" de las Matemáticas. Son los profesores los que diseñan y formulan tareas de este tipo; el papel de los estudiantes es resolver la tarea propuesta; sin embargo, estas tareas pueden generar ambientes que fomenten la participación dinámica de los estudiantes al abrir espacios de discusión sobre los usos y contextos evocados en la tarea, además de su participación en el cuestionamiento de la idealización del fenómeno y en las restricciones de las condiciones del contexto "*real*" que se aislaron o simplificaron (Villa-Ochoa et al., 2017).

Las tareas de tipo enunciados verbales realistas implican la comprensión de los elementos determinantes del enunciado/problema, la construcción de un modelo matemático partiendo de estos elementos y las relaciones que surgen del enunciado, el manipular modelos matemáticos para obtener resultados matemáticos, interpretar los resultados de un cálculo, evaluar si el resultado matemático tiene una interpretación razonable y apropiada y, finalmente, comunicar la solución del problema original regresando al mundo real (Villa-Ochoa et al., 2017)

Este tipo de tareas de modelación que requieren abordar las ideas sobreentendidas a un concepto se considera una guía relevante para observar y comprender las formas de cómo piensan los estudiantes. Estas tareas están direccionadas a la enseñanza o evaluación de un contenido temático y, en esa medida, se elaboran tareas que ilustran o traigan a memoria un contenido y sus propiedades (Sahin, Yenmez y Erbas, 2015, citado por Villa-Ochoa et al., 2017).

Es tradicional y frecuente que los enunciados verbales estén estereotipos y que, en lugar de generar una conexión con la experiencia cotidiana de los estudiantes, "disfraza" un contenido matemático por medio de un manto de palabras. A pesar que las tareas de modelación, como enunciados verbales, pueden provenir y tener un contexto ficticio, guardan una relación con la realidad cercana de los estudiantes, ya que la información está contenida para que ellos resuelvan los cuestionamientos o problemas.

Villa-Ochoa (2015) propone que estas tareas son uno de los principales recursos y, en ocasiones, el único que utilizan algunos profesores para mostrar las conexiones que existen entre las Matemáticas y la "realidad". Es típico que los enunciados verbales, en ocasiones, sean reducidos a problemas rutinarios presentados en enunciados y se justifica su uso en la necesidad de desarrollar la habilidad para generar traducciones entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico-matemático.

b. Problemas auténticos

Ante la pérdida de sentido y por las limitaciones que representan los enunciados verbales estereotipados, Bonotto (2007) (citada en Villa-Ochoa et al., 2017) argumenta la necesidad de proponer enunciados que involucren relaciones más fuertes entre las Matemáticas y el conocimiento extraescolar (auténticos).

La autora plantea (i) cambiar el tipo de actividad que busca crear interacción entre el mundo real y las Matemáticas hacia situaciones problemáticas más originales, auténticas, menos estereotipadas, (ii) modificar las concepciones de los estudiantes, sus creencias y actitudes hacia las Matemáticas (también de los profesores) y (iii) el cambio de cultura escolar por medio de la creación de nuevas normas socio-matemáticas.

Los problemas auténticos presentados como enunciados verbales son textos que incluyen de las características de la autenticidad: autenticidad de contexto, de actividad o proceso y de impacto y autenticidad de personal y de valor (Villa-Ochoa et al., 2017).

La forma en que se construye y se valida el modelo puede diferir de acuerdo con el tipo de problema que se formule y los alcances que se delimiten para dicho proceso. Este proceso puede darse en diferentes direcciones y matices, siempre en dependencia de las características de autenticidad e interés de los estudiantes.

Los enunciados auténticos proveen condiciones para que los estudiantes tomen parte activa en la producción de representaciones matemáticas de situaciones en contexto y obtengan una visión panorámica de las relaciones entre las Matemáticas y su experiencia cotidiana.

Este tipo de tareas se pueden adecuar a planes de estudio orientados al desarrollo de contenidos y con limitaciones de tiempo y espacio, como lo son los planes de estudios escolares. Las tareas auténticas de enunciados verbales en la literatura especializada han incidido principalmente en la autenticidad de contexto, que se origine o evoque una situación similar a la que ocurre en la actividad o proceso, que refleje las acciones o actividades tal como se dan en la realidad. Debido a que estas tareas normalmente se formulan por medio de enunciados cortos, no es posible recrear todos los aspectos de la autenticidad: autenticidad de impacto, autenticidad personal y autenticidad de valor (Villa-Ochoa et al., 2017).

La actividad que planteamos en la investigación se enmarca dentro de este tipo de tareas.

Construcción de Representaciones

La construcción de representaciones es una actividad que es parte de la mayoría de las visiones sobre modelación. También esta actividad se puede dar con mayor o menor intensidad en razón de los propósitos de la clase y de la visión que tenga el profesor sobre las Matemáticas y su enseñanza. Se reconocen dos tipos de tareas que se enfocan en la modelación como producción de representaciones.

a. Representaciones gráficas.

La construcción de representaciones gráficas de un fenómeno o una situación, en el contexto de las Matemáticas, puede ser considerada como una forma de hacer modelación. En este tipo de tareas, la modelación realiza traducciones entre dos ámbitos al interior de las Matemáticas. Los estudiantes identifican cantidades variables y constantes, fijan la atención en las que consideren relevantes y construyen otras representaciones que modelen la relación entre estas cantidades.

Para Arcavi (2008) (citado en Villa-Ochoa et al., 2017), esta actividad se enfoca en estudiar un fenómeno matemático a través del uso de medios matemáticos distintos de los del propio fenómeno. Bajo una perspectiva de la modelación como proceso, el estudio de fenómenos de un dominio extramatemático, por medio de un dominio matemático, este tipo de tareas no serían considerados como tareas de Modelación matemática. Estas situaciones son valoradas por el uso y desarrollo de habilidades para construir representaciones e interpretar resultados.

En este tipo de tareas, los estudiantes no solo manipulan representaciones, sino que también realizan razonamientos, conjeturas y otras acciones. Para Arcavi (2008) (citado en Villa-Ochoa et al., 2017), este tipo de tareas posibilita la observación de los cambios de área de las figuras, ya que permite familiarizarse con las variables y formular hipótesis de los resultados esperados.

Este tipo de tareas destaca acciones y habilidades que pueden ser usadas también en otras formas de modelar, ya que se evidencia claramente limitaciones en relación con la ausencia de un contexto extramatemático (Villa-Ochoa et al., 2017).

b. Modelación/simulación de formas.

Tareas que se enfocan en la reproducción de cierto tipo de comportamientos y formas a partir del uso de dispositivos electrónicos.

Según Villa-Ochoa (2017), la modelación por medio las formas ha sido vista desde dos usos; el primero, se relaciona con la construcción de modelos matemáticos geométricos que representan la forma objetos; el segundo, se relaciona con el análisis geométrico de modelos ya estructurados, usar modelos matemáticos geométricos para estudiar otros con características parecidas.

¿Cómo simular el movimiento de un objeto con un Software de Geometría dinámica? Los fenómenos representados con un Software se pueden asociar a lo que se denomina *Modelación computacional*. En este tipo de modelación, se establecen mecanismos que hacen posible explicar propiedades físicas de los objetos, como el cambio de posición de las partículas, tal es el caso del aplicativo libre, Tracker.

Estas tareas promueven el desarrollo de habilidades propias del razonamiento matemático (establecer relaciones y conjeturas, resolver problemas) y otros subprocesos de las Matemáticas, como analizar y construir. Este tipo de tareas promueve el desarrollo de habilidades matemáticas, pero cuando se agota la modelación, solo en este tipo de tareas, se pueden generar imágenes estereotipadas del rol funcional de las Matemáticas, de los usos y contribuciones que las Matemáticas tienen en la sociedad y la cultura (Villa-Ochoa et al., 2017).

Modelación a través de proyectos

Los proyectos representan una tarea abierta que permite desarrollar procesos de indagación y resolución de problemas. Algunos de sus objetivos son, por ejemplo, proyectos como medio para enseñar un contenido en particular o para fomentar el desarrollo de capacidades de los estudiantes, para determinar relaciones entre las Matemáticas y otras disciplinas y para el desarrollo de reflexiones y visiones críticas sobre el rol de las Matemáticas en la sociedad (Fernández, 2017, citado en Villa-Ochoa et al., 2017).

El desarrollo de proyectos es una simulación de parte de la actividad que desarrollan los profesionales en Matemática aplicada, que trabajan en colaboración con profesionales de otras disciplinas para resolver situaciones de preocupación en un fenómeno y una comunidad. En el desarrollo de proyectos, se evidencia la noción de modelación como una interacción entre dos dominios, que las condiciones del contexto o fenómeno a estudiar y los conocimientos matemáticos y de otras disciplinas que surgen como respuesta a los problemas planteados.

Los proyectos pueden ser un medio para la enseñanza de un contenido y que enfocan su atención en aspectos cognitivos y metacognitivos: elementos conceptuales, procedimentales, autorreguladores y de comunicación. Así, la modelación puede considerarse con la noción de ciclo de modelación en la cual se describen subprocesos que guían las acciones de los estudiantes.

Por otro lado, la modelación puede tener como objetivo desarrollar reflexiones críticas y sociopolíticas sobre las situaciones de la sociedad o para generar articulaciones entre diferentes áreas o disciplinas (Rendon-Mesa, 2016, citado en Villa-Ochoa et al., 2017).

La modelación a través de proyectos, según Aravena, Caamaño & Giménez (2008) (citado en Villa-Ochoa et al., 2017), plantea situaciones en las que los estudiantes organizan e interpretan información y datos; describen relaciones matemáticas, resuelven problemas con múltiples soluciones, identifican la aplicabilidad de conceptos y procesos matemáticos, analizan e interpretan problemas por medio de las Matemáticas; comprenden ideas nuevas, ayudan a desarrollar la creatividad del estudiante, flexibilidad, imaginación, capacidad de riesgo, autonomía en la toma de decisiones, capacidad de síntesis y coherencia en la organización del pensamiento reflexivo frente a situaciones nuevas.

En los proyectos de modelación, se pueden reconocer también características del aprendizaje, como por ejemplo la autenticidad de contexto de proceso/actividades; sin embargo, no siempre el proyecto logra un empoderamiento de los estudiantes para la consecución del proyecto cuando el problema es elegido por el profesor, debido a que el problema elegido no necesariamente responde a sus necesidades personales o de la comunidad a la que pertenece. Así, la autenticidad personal y de valor no siempre es logrado en los proyectos cuyo tema es elegido por el profesor (Villa-Ochoa et al., 2017).

El esfuerzo por alcanzar el propósito del proyecto, tal como destaca Rendón-Mesa (2016), puede no considerar otros conocimientos y aprendizajes que pueden ser relevantes en la formación de los estudiantes, tanto en el ámbito matemático, en otras ciencias y en el mismo contexto. Pueden reducirse a procesos esquemáticos y lineales en busca de la meta propuesta.

El desarrollo de proyectos puede sobrepasar aquellos planes de estudio con características poco flexibles, dado que requieren de espacios y tiempos amplios para la recolección de datos, confrontación con expertos, toma decisiones, entre otras. A veces, cuando los temas se eligen teniendo en cuenta los intereses de los estudiantes, el contenido matemático emerge de acuerdo con los fenómenos objeto de estudio y el problema delimitado, dicho aspecto reta a los profesores respecto a la manera en que deben orientar y apoyar el desarrollo del proyecto de sus estudiantes. Además, exige que los profesores participen en ambientes que requieren de conocimientos más allá del matemático, ya que debe ser parte de un trabajo interdisciplinario con otros profesores y profesionales. En las Matemáticas escolares, especialmente en la Modelación matemática, pocas veces se utilizan contextos que valoren la producción de conocimientos de las disciplinas que intervienen (Villa-Ochoa, 2015) .

Uso y análisis de modelos.

Existe una relación entre la modelación y las comprensiones sobre el modelo matemático, ya que cualquier comprensión sobre la naturaleza de los modelos tendrá sus respectivas implicaciones sobre cómo se concibe la modelación dentro de la Educación Matemática.

> La explicitación de la dialéctica Modelo y Modelación, de acuerdo con una finalidad apoyada en las concepciones hegemónicas y que se signa en el modelo, dado que la actividad de producción de modelos (Modelación) está orientada por una finalidad que le permite su constitución, que está regida por principios y paradigmas (Modelo), que a su vez orienta y posibilita las condiciones para que se dé dicha práctica productora (Modelación) (Mesa, 2013, p. 11) .

Las tareas que implican el uso y análisis de modelos, proporcionan una experiencia para estudiar las Matemáticas partiendo de modelos ya elaborados y también incorporan variadas acciones que forman parte de la Modelación matemática, como por ejemplo, el trabajo matemático, la confrontación del modelo con datos del contexto personal del estudiante, la proyección de la forma en que fue construido y la identificación de las limitaciones de los modelos y formulación de hipótesis sobre la posibilidad de ampliaciones o extensiones del mismo.

Las tareas de uso y análisis de modelos, según Villa-Ochoa (2017), pueden generar experiencias auténticas que permitan a los estudiantes conocer y cuestionar sus usos en diferentes prácticas cotidianas, sociales y profesionales. El reconocimiento de esos usos en la clase de Matemática puede también ayudar a la formación matemática y social de los estudiantes.

Otras acciones que se pueden observar en tareas de análisis de modelos son: el estudio de un fenómeno, estudio de las hipótesis consideradas para la elaboración del modelo, comprensión de los aspectos que el modelo muestra sobre el fenómeno y análisis de las limitaciones del modelo. Este tipo de tareas exige que los profesores y estudiantes participen en ambientes interdisciplinarios

Modelación y Tecnologías Digitales

La Modelación matemática no se desarrolla de forma automática, ya que siempre está condicionada por factores asociados con los sujetos, ambientes, objetos y medios que intervienen en el proceso de aprendizaje.

Para Burkhardt (2006) (citado en Molina-Toro-Toro, Villa-Ochoa & Suárez-Téllez, 2018), existe una seria necesidad de usar las tecnología, especialmente las digitales para la modelación, debido a que proporcionan un apoyo importante al establecimiento de estructuras de análisis, la variación producida por tipos diferentes de datos y la disposición de variadas rutas de comprobación de los resultados. Existe un interés creciente por el desarrollo de investigaciones que incluyan la Modelación matemática y tecnologías digitales en los procesos formativos en Matemáticas (Borba y Villarreal, 2005, citados en Villa-Ochoa & Gonzalez, 2018).

Las posibilidades para realizar actividades de modelación en la Enseñanza de las Matemáticas han cambiado en los últimos años, esto se debe, esencialmente, a la existencia de variadas tecnologías digitales. Una computadora o una calculadora gráfica equipada resultan ser herramientas útiles para apoyar a profesores y estudiantes.

Henn (2007) (citado en, Greefrath, 2016) propuso implementar el uso de tecnologías digitales, por ejemplo, computadoras con Software de Álgebra, porque esto permitiría la introducción de aplicaciones y la modelación en la enseñanza cotidiana.

Actualmente, las tecnologías digitales se utilizan, con mayor énfasis, para reducir el esfuerzo de cálculo y mejorar la graficación-visualización de una situación. También pueden realizar diversas tareas en aplicaciones de enseñanza y modelado.

Una ocasión importante para su uso es en la experimentación y exploración (Hischer 2002, citado en Greefrath & Vorhölter, 2016). Por ejemplo, una situación real se puede trasladar a un modelo geométrico o se puede experimentar dentro de este modelo mediante un Software de Geometría dinámica o un análisis en una hoja de cálculo. Las predicciones sobre la población de ciertas especies animales, en diferentes condiciones ambientales, son posibles de hacer a través de una simulación. Las simulaciones de Matemáticas realizadas por computadora pueden formar parte de un ciclo de modelado en el que un modelo numérico que se desarrolló, a partir del modelo matemático, se prueba y valida comparándolo con los resultados de la medición (Sonar 2001, citado en Greefrath, 2016).

Un uso típico de las tecnologías digitales es el cálculo o estimación de soluciones numéricas o algebraicas (Hischer 2002, citado en Greefrath & Vorhölter, 2016). Con estas herramientas, los estudiantes pueden realizar estimaciones dentro de un tiempo razonable. También se pueden utilizar las computadoras para hacer cálculos que permitan encontrar representaciones algebraicas a partir de la información proporcionada.

Además, las tecnologías digitales posibilitan una visualización de una materia o contenido que se enseña en la escuela. Las tecnologías digitales también desempeñan un papel de mucha utilidad en el control y la verificación de procesos en modelos funcionales discretos (Barzel, 2005, citado en Greefrath, 2016).

Las diferentes potencialidades y capacidades de una computadora se pueden utilizar en la Educación matemática para varios estadios en el ciclo de modelado. Podrían, por ejemplo, ayudar en los procesos de control, que normalmente suelen ser el último paso del ciclo de modelado. También ayudarían en cálculos que se realizan por medio del modelo matemático generado en el análisis, que típicamente se representa mediante una función.

El ciclo de modelado de Blum y Leiß es modificado cuando se usan las tecnologías digitales durante el proceso de modelado. Las tecnologías digitales se pueden aplicar de forma útil en cada paso del ciclo de modelado.

Según Greefrath & Vorhölter (2016), si los pasos en el cálculo con tecnología se analizan con mayor detenimiento y precisión, trabajar en el modelado de problemas con tecnología implica dos procesos de traducción: primero, la pregunta del modelo debe ser entendida, simplificada y traducida al lenguaje de las Matemáticas, pero la herramienta digital solo se puede utilizar después de que los términos matemáticos se hayan traducido al lenguaje que la computadora puede procesar. Los resultados calculados por la computadora deben ser traducidos nuevamente en lenguaje matemático. Finalmente, el problema original se resuelve cuando los resultados matemáticos se aplican a la situación real. Ver Figura 16.

Estos procesos de traducción se pueden representar en un ciclo de modelado extendido (Figura 17), que además del resto del mundo y las Matemáticas, también incluye tecnología. Los estudios actuales; sin embargo, muestran que la actividad de modelado real, que incluye una computadora, puede describirse mejor mediante la vista integrada (Greefrath & Vorhölter, 2016).

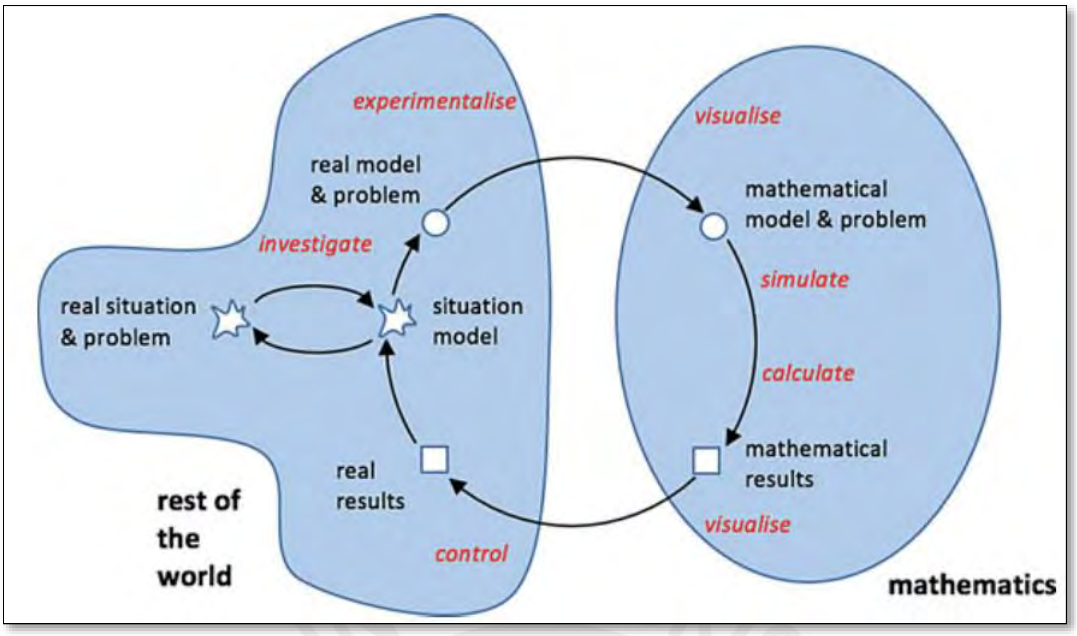


Figura 16: Posible uso de Tecnologías Digitales para el Modelado (Greefrath 2011, p. 303)

Fuente: Greefrath & Vorhölter (2016)

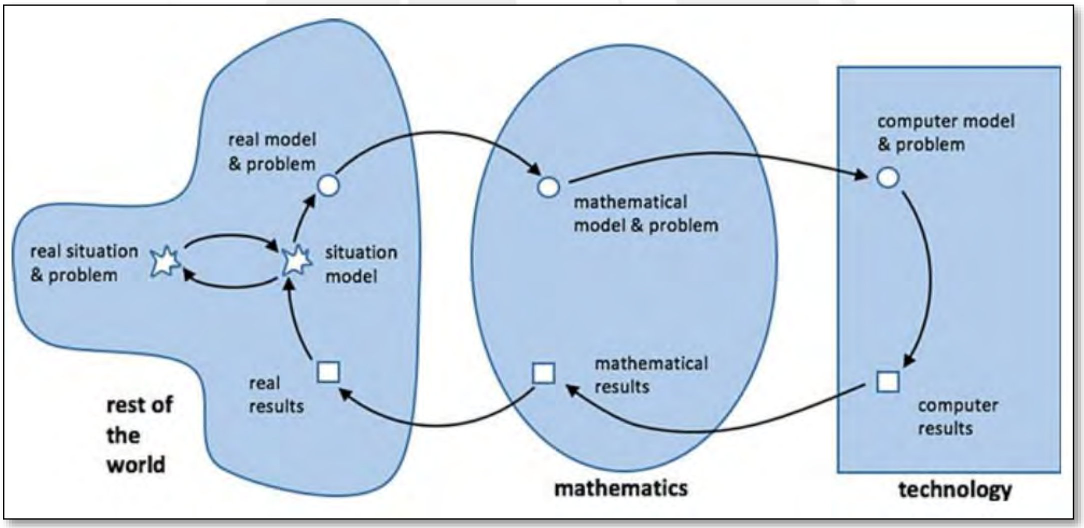


Figura 17: Ciclo de Modelado Extendido (Greefrath 2011, p. 302*)*

Fuente: Greefrath & Vorhölter (2016)

El conocimiento sobre las posibilidades de modelar la enseñanza y los límites de trabajar con tecnologías digitales en la Enseñanza de las Matemáticas es insuficiente, ya que se han realizado muchos estudios de casos, pero estudios de implementación a gran escala son escasos. Existen preguntas de investigación abiertas y pueden encontrarse en los trabajos de Niss (2007) (citado en Greefrath, 2016). Por ejemplo, ¿Cómo deben usarse las tecnologías digitales en diferentes grados para respaldar y sostener los procesos de modelado? ¿Cuál es el efecto de las tecnologías digitales en el espectro de problemas de modelado en los que se trabajará? ¿Cómo está influenciada la cultura de la enseñanza por la existencia de tecnologías digitales? ¿Cuándo y cuánto las herramientas digitales mejoran o dificultan las oportunidades de aprendizaje en el proceso de modelado?

Se requiere investigaciones empíricas adicionales para aclarar las preguntas formuladas anteriormente y otras especialmente considerando el ciclo de modelado extendido y los procesos de traducción necesarios. Los estudios de caso de Greefrath (2011) (citado en Greefrath, 2016) y Geiger (2011) (citado en Greefrath, 2016) señalan que las herramientas digitales podrían ser útiles para cada paso del proceso de modelado. Esto es particularmente cierto para interpretar y validar.

La Modelación matemática y las Competencias Matemáticas

Las Matemáticas están presentes en todas las áreas del quehacer humano, razón por la cual tenemos la necesidad de adquirir los conocimientos matemáticos necesarios que permitan desarrollarnos en nuestro entorno. Ante esto, los estudiantes deben ser capaces de utilizar las Matemáticas en variados contextos y situaciones futuras de su formación profesional.

La educación busca desarrollar habilidades de pensamiento con el fin de conferirle un valor funcional al conocimiento matemático, de tal forma que pueda ser aplicarlo en diferentes situaciones y contextos. Así, para desarrollar la competencia matemática, se deben desarrollar otras capacidades (OCDE, 2006), las cuales son:

- Pensamiento y razonamiento. Manejan el alcance y los límites de los conceptos matemáticos.
- Argumentación. Crean y expresan demostraciones matemáticas.
- Comunicación. Expresan de diversas formas un contenido matemático, interpretan las afirmaciones orales o escritas expresadas por otras personas sobre esos mismos contenidos matemáticos.
- Construcción de modelos. Trabajan con modelos matemáticos; validan un modelo; supervisan y controlan el proceso de elaboración de modelos matemáticos.

- Planteamiento y solución de problemas. Plantean problemas matemáticos, además resuelven diversos tipos de problemas matemáticos de distintas formas.
- Representación. Descodifican, codifican, traducen, interpretan y distinguen las variadas formas de representación de objetos y situaciones matemáticas.
- Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico. Descodifican e interpretan el lenguaje formal y simbólico; usan expresiones y afirmaciones que contengan símbolos y fórmulas; utilizan variables, resuelven ecuaciones y realizan cálculos.
- Empleo de material y herramientas de apoyo. Emplean materiales y herramientas de apoyo que contribuyen a la realización de la actividad matemática. (OCDE, 2006).

El objetivo es que el estudiante sea un ciudadano competente ante las necesidades del mundo actual y de los requerimientos de su futuro profesional, procurando el crecimiento de todas las capacidades cognitivas que favorezca el desarrollo integral de todas las capacidades necesarias que le permitan estructurar y utilizar eficientemente sus aprendizajes adquiridos.

La mejor forma de lograr que el estudiante haga funcional sus aprendizajes matemáticos es por medio de la aplicación de éstos en su vida diaria (OCDE, 2006). Por ese motivo, uno de los objetivos de la Enseñanza de las Matemáticas es que los estudiantes puedan expresar, a través de las Matemáticas, situaciones reales que les permita comprender la naturaleza de esta ciencia, lo cual se puede dar con la construcción de modelos matemáticos.

3.2 Metodología y Procedimientos

En este parte del capítulo, presentaremos el diseño metodológico para la realización de la investigación; las etapas y técnicas para la recolección, análisis de datos y validación de resultados, dado que nuestro objetivo es analizar la Modelación matemática mediada por las tecnologías digitales cuando estudiantes del quinto grado de Educación Secundaria modelan el movimiento vertical de un objeto que se desliza por un plano inclinado, mediante la función cuadrática.

Nuestra investigación es de naturaleza cualitativa. Según Hernández, Fernández y Baptista (2010), una investigación cualitativa posibilita analizar y describir situaciones, eventos, interacciones y conductas observadas de los sujetos en estudio. Por otro lado, Martínez (2006) dice que la investigación cualitativa se fundamenta en la construcción de una teoría partiendo de una serie de observaciones o proposiciones tomadas de la realidad, el objeto de estudio.

Desde hace algunos años, se han realizado diversos trabajos de investigación con metodologías cualitativas (Gómez, 1998; Planchart, 2002; Villa-Ochoa, 2011; Huapaya, 2012; Borja, 2015; Molina-Toro, 2013) en los que se observa la producción de datos descriptivos en relación con las palabras, sean de formas oral o escrita, de las personas involucradas en la investigación y las conductas observables.

Según Aravena (2006) (citado en, Molina-Toro, 2013), una característica en la investigación cualitativa es la visión individual que las personas que participan del estudio hacen de las acciones, experiencias y circunstancias que rodean el contexto en el que están inmersos. En ese sentido, dado que la pregunta de investigación indaga sobre el proceso de modelación de la función cuadrática que siguen los estudiantes en el aula, esta investigación se realizará desde un enfoque cualitativo. Así, es posible centrar la observación en la forma cómo los estudiantes modelan el movimiento vertical de un objeto que se desliza por un plano inclinado.

En esa misma línea de pensamiento, Creswell (2010) menciona que una investigación cualitativa es un medio para explorar y entender las razones que una persona o grupo de personas atribuyen a un problema o fenómeno. El investigador relaciona el significado de un fenómeno partiendo del punto de vista de los estudiantes, por medio de un proceso inductivo y como instrumento para la recolección de datos.

Creswell (2010) propone las siguientes características de una investigación cualitativa:

- El ambiente natural es el espacio donde se puede recolectar los datos y donde los estudiantes van a participar en el problema. Esta información es recolectada por medio de un contacto directo entre el investigador y los estudiantes. Esta es una característica importante de la investigación cualitativa.

- Los investigadores cualitativos son la herramienta para la recolección de datos y se realizan por medio de documentos, observación, entrevistas u otros medios que permitan obtener los datos.
- Los investigadores cualitativos no dependen de una sola fuente, ya que recurren a distintas fuentes de datos, como documentos, observaciones y entrevistas.
- La investigación cualitativa es interpretativa, ya que los investigadores mencionan lo que ven, oyen y entienden. Además, dichas interpretaciones no pueden estar alejadas de sus orígenes, contexto o alcances anteriores.

A continuación, consideramos cada una de las etapas o fases donde se describe los pasos que se ejecutaron para el logro del objetivo de esta investigación en las tareas planteadas.

Etapa exploratoria

Esta etapa se desarrolla en los capítulos I y II de la investigación y constó de las siguientes acciones

- Se identificó el problema a investigar por medio de investigaciones relacionadas con la Modelación matemática de la función cuadrática, prefiriendo aquellas que se ocupan de fenómenos físicos con tecnologías digitales.
- Luego de identificar el problema de investigación, se revisó el Currículo Nacional de la Educación Básica (MINEDU, 2016), en la que se llegó a determinar que el tema de las funciones cuadráticas se desarrolla en el ciclo VI y VII de Educación Básica Regular, se detallaron las capacidades y competencias por grados y niveles.
- Se hizo una breve revisión de los aspectos históricos y matemáticos de la función cuadrática. Además de ello, se presentó la forma en que el libro *Matemática 5* (Santillana, 2016) desarrolla el tema de las funciones cuadráticas
- Se planteó el problema de investigación de donde se originan nuestros objetivos propuestos.
- Se realizó la revisión de artículos científicos de investigación, tesis de maestría, tesis doctorales referentes a las funciones cuadráticas y la Modelación matemática, que es nuestro marco teórico.

- Se hizo una breve revisión de la Modelación matemática de la función cuadrática tanto en el cuaderno de trabajo del libro *Matemática 5* (Santillana, 2016), como del cuaderno de trabajo de libro *Resolvamos problemas 5* (MINEDU, 2017), para observar los ejemplos en relación a nuestro marco teórico.

Etapa de planificación

Esta etapa se desarrolla en el capítulo III de la investigación y evidenció las siguientes acciones.

- Se desarrollaron elementos de la Modelación matemática, desde una breve revisión de algunas concepciones de la modelación, la modelación como marco teórico de la investigación, el ciclo de modelación, la transición en el ciclo de modelación, las tareas de la modelación y la modelación con tecnologías digitales.
- Se diseñaron y elaboraron las actividades que serían aplicadas en la investigación, la *Actividad 0* y la *Actividad I* servirían para establecer condiciones mínimas para la aplicación de la *Actividad II*, esta actividad será la que permitirá el análisis del tránsito de los estudiantes por las fases del ciclo de modelación de Blum and Leiß
- Después de elegir el marco teórico para nuestra investigación, se eligió también las herramientas de análisis para observar el tránsito por fases del ciclo de modelación de Blum and Leiß. Consideramos el trabajo realizado por Sol, Giménez, & Rosich (2016) y el material elaborado para el análisis del proceso de modelación hecho por Gallart (2016) y, en la parte final, de esta sección se presenta una tabla con el procedimiento para observar y analizar las acciones de los estudiantes cuando estén transitando por las fases del ciclo de modelación.
- Se seleccionó la estrategia a seguir en la investigación. Nuestra investigación es de tipo cualitativo, porque analizamos la Modelación matemática de funciones cuadráticas.
- Se realizó una entrevista con el profesor de Matemática de quinto grado de secundaria de la Institución Educativa Pública, esto en razón que el investigador no es profesor de los estudiantes que participaron de la investigación. Para la selección de los estudiantes participantes, se le solicitó

una lista de cuatro estudiantes, en parejas o duplas y también se solicitó la opinión del profesor tutor.

- Se pidió permiso a la dirección de la Institución Educativa Pública para poder realizar la investigación y a su vez disponer del tiempo de los estudiantes, de los ambientes del aula de innovación pedagógica AIP y el laboratorio de ciencias.

Etapa de aplicación.

Esta etapa se desarrolla en el capítulo IV de la investigación y se dieron las siguientes acciones.

- Se ejecutaron las sesiones de las actividades propuestas en la investigación, donde las *Actividades cero* y *I* no son parte del análisis de la investigación.
- Se realizó la sesión de la *Actividad II*, donde al inicio los estudiantes grabaron un video del movimiento de un objeto que se desliza por un plano inclinado en el laboratorio del colegio. Posteriormente, se dirigen al aula de innovación pedagógica AIP donde realizaron propiamente la secuencia de modelación con el uso de Tracker.
- Se realizó la grabación del trabajo de Modelación matemática del fenómeno realizado por los estudiantes en parejas o duplas en las computadoras con el Software Camtasia.
- Se tomó el registro fotográfico y de video de los estudiantes realizando la *Actividad II*, además se tomó el registro escrito y gráfico del desarrollo de la *Actividad II*.

Etapa de análisis de la información

Esta etapa se desarrolla en el capítulo V de la investigación y se observaron las siguientes acciones.

- Después de finalizada la recogida de la información del desarrollo de la *Actividad II,* se inicia el proceso de análisis.
- El proceso de análisis se realizó considerando la Tabla 4, que permite observar y analizar las acciones de los estudiantes cuando transitan por las fases del ciclo de modelación. Esta tabla es una adecuación personal, tomando en cuenta las propuestas realizadas por Sol, Giménez, & Rosich (2016) y el

material elaborado para el análisis del proceso de modelación hecho por Gallart (2016).

- El análisis se realizó mediante preguntas, donde cada fase es asociada a una pregunta y a su vez a acciones hipotéticas observables.

Etapa de elaboración del informe

- Se elaboró la redacción y corrección de la investigación.
- Se redactó las consideraciones finales de la investigación.

Además de lo descrito anteriormente, precisamos detallar en amplitud el procedimiento para observar y analizar las acciones de los estudiantes cuando estén transitando por las fases del ciclo de modelación.

En base a estas acciones, hemos tomado el diseño de una serie de preguntas que Gallart (2016) desarrolla en su tesis, las cuales, adecuándolas para nuestra investigación, nos permitirán analizar el proceso de modelación seguido por los grupos de estudiantes. Estas preguntas y su relación con las acciones requeridas para transitar por el ciclo de modelación se muestran en laTabla 4.

En la primera columna, se plantean las preguntas que nos ayudarán a enfocar nuestro análisis en las acciones y procesos clave que, teóricamente, se deben dar para transitar entre las distintas fases del ciclo de Blum y Leiß. En la segunda, se da una descripción de la acción o acciones (en cursiva) a las que la pregunta hace referencia. Estas fueron adicionadas convenientemente con las acciones que propone Sol (2016). Cabe destacar que no todas las acciones descritas deben observarse para precisar que el estudiante transita por determinada fase del ciclo de modelación. En la tercera columna, relacionamos la acción o acciones con la transición correspondiente del ciclo, según la numeración original utilizada en la Figura 14

Tabla 4.

Análisis del proceso de modelación – adaptación

Pregunta	**Acciones hipotéticas observables**	**Ciclo Blum y Leiß**
¿Se enuncia un problema que plantea	*Comprender* la situación en la que se enmarca la tarea, tomando decisiones, elaborando hipótesis y	**1**

una respuesta, total o parcial, a la situación original propuesta?	supuestos que lleven al planteamiento de un problema o subproblemas *Reconocer* que el problema es abordable matemáticamente.	
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los elementos del modelo matemático?	*Simplificar y seleccionar* los elementos y relaciones relevantes, identificando las Matemáticas que se ocultan en la realidad. *Concretar* objetivos en relación a la situación y reconocer medios para resolverla.	**2**
¿Se usan representaciones? ¿Se utiliza el lenguaje matemático?	*Identificar* objetos y relaciones relevantes *Seleccionar* variables. *Explicitar* relaciones entre objetos reales y contenidos matemáticos *Utilizar* representaciones (gráficos, dibujos, esquemas…) para codificar la realidad en términos matemáticos. *Utilizar* el lenguaje formal y simbólico para codificar la realidad en términos matemáticos.	**3**
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	*Explicitar* la relación entre variables usando lenguaje matemático. *Formular* hipótesis matemáticas *Formulación* de problemas y subproblemas *Trabajar* con las herramientas y procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema planteado. *Utilizar* el lenguaje formal y simbólico resolver matemáticamente el problema.	**4**
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	*Encontrar e interpretar* la solución matemática	

¿Se usan representaciones?	*Utilizar* representaciones (gráficos, dibujos, esquemas…) para interpretar los resultados obtenidos. *Utilizar* el lenguaje formal y simbólico para interpretar los resultados obtenidos.	**5**
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	*Validar* las soluciones matemáticas en la realidad, reflexionando sobre el modelo utilizado y llegando a conclusiones razonadas. *Reconocer* el significado y alcance de soluciones y conclusiones en la situación real. Explicitan el modelo. *Modificar* el modelo si es necesario.	**6**
¿Se comunica de forma oral y escrita el proceso de resolución de forma que resulte comprensible por parte del resto de compañeros?	*Debatir y comunicar*, dentro y fuera del grupo, todo el proceso de modelización seguido y los resultados obtenidos.	**7**

Nota. Adaptación personal

Seguidamente, se presenta el capítulo IV en donde describiremos la parte experimental y análisis de la investigación.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL

A continuación, mostraremos la estructura de la actividad didáctica mediada por Tracker.

4.1. Descripción de los sujetos de la investigación

La investigación se realiza con cuatro estudiantes de Educación Básica Regular, que actualmente están cursando el quinto grado de Educación Secundaria, cuyas edades oscilan entre 16 y 17 años, en una Institución Educativa Pública, ubicada en el distrito de San Martín de Porres, provincia de Lima.

Con los cuatro estudiantes, organizados en dos parejas, utilizaremos los seudónimos de Fernando y Ericka, etiquetados como Grupo 1, Samara y Willy, etiquetados como Grupo 2. Para referirnos a los cuatro estudiantes que participaron en el desarrollo de la propuesta de modelación, se consideró conveniente la formación de duplas de trabajo para que los estudiantes pudieran interactuar e hicieran las conjeturas requeridas en la modelación.

Los estudiantes participantes tienen conocimientos previos sobre las nociones del objeto matemático función cuadrática. Para el nivel VII en que se encuentran, según el Diseño Curricular Nacional 2016 (DCN), en la competencia Resuelve Problemas de Regularidad, equivalencia y cambio, diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial.

En tercer grado de secundaria, se estudia funciones cuadráticas $\left(f(x) = x^2,\ f(x) = ax^2 + c,\ \forall\ a \neq 0\right)$ con coeficientes enteros, también se interpreta el significado del comportamiento gráfico de una función cuadrática al variar sus interceptos, sus valores máximos y mínimos, el eje de simetría, vértice y orientación; en el contexto de la situación, usando lenguaje algebraico y conectando representaciones gráficas, tabulares y simbólicas.

En cuarto grado de secundaria, se estudian funciones cuadráticas $\left(f(x) = ax^2 + bx + c,\ \forall\ a \neq 0\ \ y\ a \in \mathbb{Q}\right)$, además se interpreta el significado del dominio y rango de una función cuadrática, la relación entre la variación de sus coeficientes y su representación gráfica; en el contexto de las situaciones, usando lenguaje algebraico y haciendo uso de representaciones gráficas, tabulares y simbólicas.

A pesar de lo mencionado en el párrafo anterior, en nuestra investigación se desarrollaron dos actividades previas para establecer o fijar nociones básicas y esenciales de las funciones y función cuadrática y el uso de Tracker.

Hacemos mención que, para elegir a los estudiantes participantes de la investigación, se tomó la sugerencia del profesor del curso de Matemática del quinto grado, que propuso participaran aquellos que tuvieran un desempeño en el curso sobre el promedio de los estudiantes del aula. El profesor tutor del aula validó la elección debido a que conoce a los estudiantes desde grados anteriores.

Asimismo, se contó con la ayuda del profesor encargado del Aula de Innovación Pedagógica, que se encargó de instalar Tracker y Camtasia en las computadoras del laboratorio de cómputo que se usarían en la actividad. Además, dispuso los horarios para las ocasiones en la que se realizaría la actividad.

4.2. Descripción de la Actividad

A continuación, en la Figura 18 mostramos la estructura de la propuesta, que consta de tres etapas a los que denominamos convenientemente *Actividad Cero, Actividad I* y *Actividad II*. Se trabaja con cuatro estudiantes, en dos grupos de dos estudiantes cada uno, del quinto grado de Educación Secundaria pertenecientes a una Institución Educativa Pública del distrito de San Martín de Porres.

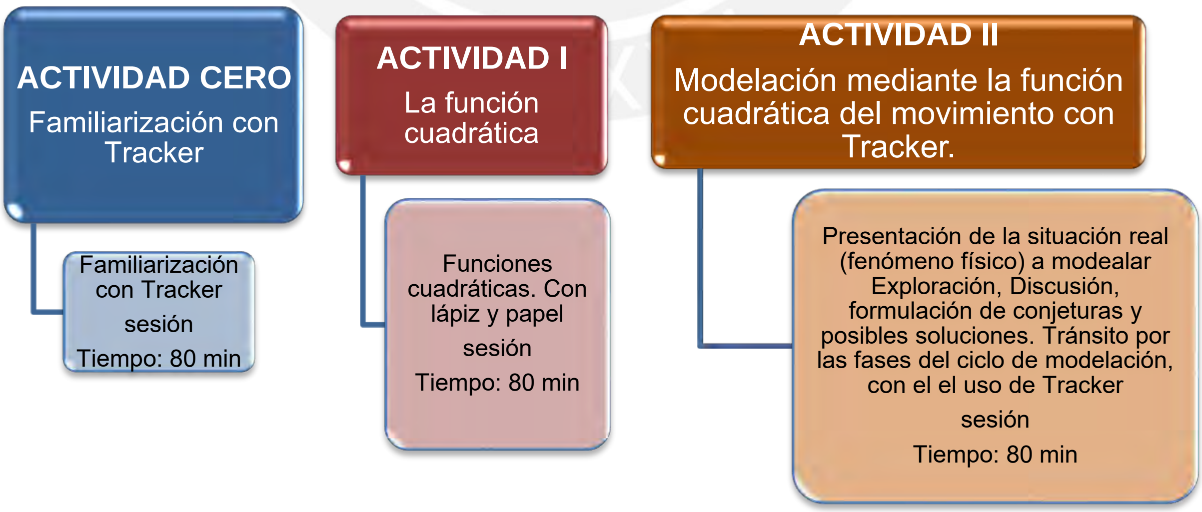


Figura 18: Propuesta de Actividades en Tres Etapas

Fuente: Creación personal

Para nuestro trabajo, sólo analizaremos la Actividad II, ya que las actividades previas sólo fueron de exploración.

Se utilizará la tecnología digital Tracker, ya que muy pocos estudiantes conocen el uso de este aplicativo y es por ello que consideramos necesario planificar y llevar a cabo una sesión preliminar que tendrá por objetivo, familiarizar al estudiante con esta tecnología digital (Actividad Cero).

Antes del inicio de esta investigación, los estudiantes habían trabajado el concepto de función lineal (pendiente de la recta, dominio y rango, entre otros.), función cuadrática, su representación gráfica (cálculo de las coordenadas del vértice y su representación gráfica).

En la Actividad I, se repasa cuestiones elementales de las funciones (regla de correspondencia, gráfico, dominio y rango) y también un repaso de funciones cuadráticas (gráfica, determinación de vértice, entre otros).

Nuestra actividad central de análisis, la Actividad II, será la única a ser analizada, ya que las otras dos se desarrollan solamente para establecer condiciones mínimas homogéneas entre los estudiantes, requeridos para la aplicación de la Actividad II.

Además de la computadora, los estudiantes dispondrán de lápiz y papel para registrar sus respuestas, que también les servirá para que hagan los cálculos auxiliares necesarios a efectos de comprobación, verificación de ciertas conjeturas y gráfica del fenómeno y de sus variables. Se realizarán las coordinaciones (con el personal administrativo, con el profesor encargado del Aula de Innovación Pedagógica y con el profesor del curso de Matemática) para contar con la logística requerida, como computadoras y Softwares instalados, así como también usaremos el Software Camtasia y otros materiales para las Actividades propuestas.
Seguidamente describimos los recursos, instrumentos y herramientas digitales a usar en nuestra investigación, diciendo que hemos elegido estos porque están al alcance, debido a la accesibilidad de los estudiantes, así como de los profesores de una Institución Educativa Pública del distrito de San Martín de Porres en la que desarrollamos la investigación.

En capítulo siguiente, procederemos a realizar el análisis de la investigación.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

5.1 Análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la actividad

Este capítulo integra el análisis de los datos recogidos por medio de la observación, grabaciones de video, reportes de los estudiantes y las preguntas guía de las actividades, que fueron los instrumentos que se aplicaron para recopilar los datos dentro del campo de estudio. Los mismos que fueron analizados, lo que permitió contrastar la diversa información recabada en el estudio realizado en el campo de trabajo para después analizarla, interpretarla y obtener conclusiones del estudio realizado.

Como se indicó anteriormente, para este trabajo invitamos a participar a cuatro estudiantes del quinto grado de Educación Secundaria, teniendo en consideración la sugerencia del profesor del curso de Matemática y el tutor de aula.

A continuación, hacemos una descripción amplia de la Actividad II para el desarrollo de su análisis.

Actividad II: Modelación con Tracker

Al resolver la *Actividad II: Modelación con Tracker*, los estudiantes realizan una serie de acciones observables que permite determinar su tránsito por cada fase del ciclo de modelación. Finalmente, estos los conducirán a la construcción de un modelo que irán revisando y refinando hasta encontrar una respuesta adecuada al problema real formulado. Uno de los objetivos de nuestra investigación es precisamente observar y caracterizar este proceso. Para ello, como ya se mencionó, tomaremos como referencia el ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß (2007).

Precisamos un listado de acciones relacionadas con las transiciones del ciclo: comprensión, simplificación/estructuración, matematización, resolución matemática, interpretación, validación y comunicación. Nos valemos también de la Tabla 4 para establecer el análisis del proceso de modelación. Estas acciones realizadas por los estudiantes, asistidos por Tracker, nos pueden ayudar a identificar los procesos que se producen durante la resolución de la actividad.

Fase 1. Comprensión

Durante esta transición, los estudiantes deben construir una imagen mental propia de la situación real que se les presenta. Esto los conducirá a la formulación de un problema, ya que ellos deben entender y enfocarse en la situación propuesta en la actividad didáctica.

En estos casos, los estudiantes deben formular un problema partiendo de la situación propuesta después de un proceso de reflexión sobre el contexto en que se sitúa, su propia experiencia e interés en este contexto y sus conocimientos en Matemáticas (Gallart, Ferrando, & García-Raffi, 2015).

La primera pregunta de la Tabla 4, se refiere a la formulación de un problema o sub-problemas que permitan a los estudiantes la resolución total o parcial de la actividad propuesta. La selección de estos elementos está estrechamente relacionada con la comprensión del estudiante de la situación inicial (su imagen o representación mental de la situación) y su conocimiento matemático, aspectos que le permitirán identificar las Matemáticas subyacentes a esta realidad.

Desde un inicio, los estudiantes de ambos grupos (Grupo 1 y Grupo 2) sabían de la necesidad de tener un video con el movimiento de un objeto, además de la posibilidad de que ellos mismos podrían grabarlo, esto a partir de la *Actividad Cero: Familiarización con Tracker*.

Después de dar lectura a la actividad propuesta, los estudiantes de ambos grupos procedieron a entender la situación en el contexto de la actividad y reconocer si el problema es abordable matemáticamente.

Determinen el modelo matemático que caracteriza al movimiento vertical de un objeto que se desliza por un plano inclinado.

La tarea que se presenta en la actividad, según Villa-Ochoa (2017), es un enunciado verbal auténtico de la experiencia personal de los estudiantes.

A continuación, describimos las respuestas dadas por los grupos y luego las analizamos.

Respuestas:

Grupo 1 (Fernando y Ericka**)**

Ambos estudiantes coincidieron en decir que la tarea de la actividad era determinar "*la fórmula*" (para referirse al modelo matemático) del movimiento cuando un objeto desciende por un plano inclinado, pero que este debería ser hecho "*con el programa*" (Tracker).

Pensaron grabar el video del movimiento de un objeto que desliza por un plano inclinado, observaron espacios y locaciones en el colegio. Mencionaron "*una pelota por la rampa de discapacitados*", después de solicitar una pelota al profesor de Educación Física y, luego de varios ensayos comentaron, "*la pelota debe estar bien inflada*".

Grupo 2 (Samara y Willy**)**

El grupo respondió que la tarea de la actividad era determinar "*el modelo*" (para referirse al modelo matemático) y dijeron "*como en la clase anterior*" (en referencia a la Actividad Cero: Familiarización con Tracker).

Pensaron grabar el video del movimiento de un objeto que desliza por un plano inclinado, en el que escogieron "*una banca del colegio para que sea el plano inclinado*", después de buscar (y por mucho rato) un objeto que se deslizara por la banca y, tras varios ensayos, concluyeron "*la banca tiene que ser bien plana".*

En ocasiones, las tareas están explícitamente establecidas en el propio enunciado, como la situación en nuestro caso "la Modelación matemática del movimiento vertical de un objeto que se desliza en un plano inclinado".

Análisis para la Fase 1

¿*Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta*?
Grupo 1 (Fernando y Ericka**)** Se logra verificar que los estudiantes lograron transitar por la fase 1 del ciclo de modelación, debido a que respondieron satisfactoriamente la pregunta al decir que la tarea consiste en encontrar "*la fórmula*" para el movimiento, en clara referencia al modelo matemático del movimiento. Otra verificación del tránsito por la fase 1 del ciclo es cuando plantearon la solución a una primera cuestión, la de grabar el video del movimiento. Buscaron locaciones dentro del colegio y se agenciaron de objetos que les

pudieron ser útiles. El grupo eligió la rampa de discapacitados y una pelota para deslizar. **Grupo 2 (**Samara y Willy**)** Se constata que los estudiantes de este grupo transitaron por fase 1 del ciclo de modelación, al mencionar que la tarea solicitada es determinar *"el modelo"* (en referencia al modelo matemático), además del comentario "*como en la clase anterior"*, en alusión la Actividad Cero: Familiarización con Tracker, donde los estudiantes vieron un video en el que se consigue el modelo de un objeto en caída libre. Verificamos el tránsito por la fase 1 del ciclo cuando plantearon la solución a una primera cuestión, la de grabar el video del movimiento, buscaron locaciones dentro del colegio, se agenciaron de objetos que les pudieron ser útiles. El grupo eligió una banca del patio del colegio y un retaso de madera, como objeto para deslizar.

Creemos que la comprensión del problema se pudo dar de manera inmediata, debido a que se formula directamente en el enunciado, que suele suceder cuando los enunciados son cortos. Este argumento verifica el tránsito por la primera fase del ciclo de modelación.

La segunda pregunta se refiere a cómo los estudiantes simplifican la realidad y seleccionan los elementos requeridos para resolver el problema planteado.

Fase 2. Simplificación

Los estudiantes deben identificar las variables relevantes de la realidad que les ayuden a plantearse cuestiones propias de la Matemática, para así obtener un modelo real, que será su modelo.

En esta transición, se distinguen dos tipos de tareas: aquellas en las que, durante este proceso de simplificación, los estudiantes deben separar la información innecesaria de la que es esencial, partiendo de su experiencia y conocimiento matemático, y aquellas en las que se dan de forma explícita, que son claramente identificables, y donde tan solo se debe escoger un subgrupo de ellas (Gallart et al., 2015), como ocurre en la actividad propuesta en nuestra investigación.

Una vez formulado un problema, los estudiantes tienen que estructurar y simplificar la situación real para resolverla, concretando y seleccionando los aspectos más relevantes de la realidad.

Luego de elegir una locación y los objetos para el video, los estudiantes hicieron ensayos del movimiento, encontrándose con algunas limitaciones.

Los estudiantes del Grupo 1 se encontraron con que la pelota, al descender la rampa de discapacitados, no siempre rueda por el mismo lugar. Además de ello, cayeron en cuenta que la actividad dice que el objeto tiene que deslizarse.

Los estudiantes del Grupo 2 encontraron que las superficies de las bancas no eran homogéneas y también eran rugosas (diferentes coeficientes de fricción). Además de ello, no pudieron encontrar un objeto ideal que se deslizara.

Después de observar sus inconvenientes, el profesor les recomendó realizar las grabaciones del experimento en el laboratorio del colegio, donde se cuenta con unos kits de experimentos de Física, una rampa metálica y carritos con muy poca fricción en las ruedas.

Ambos grupos hicieron varias grabaciones que, a continuación, mostramos en la Figura 19 de recortes de los videos que hicieron (solo una parte, se hicieron más).

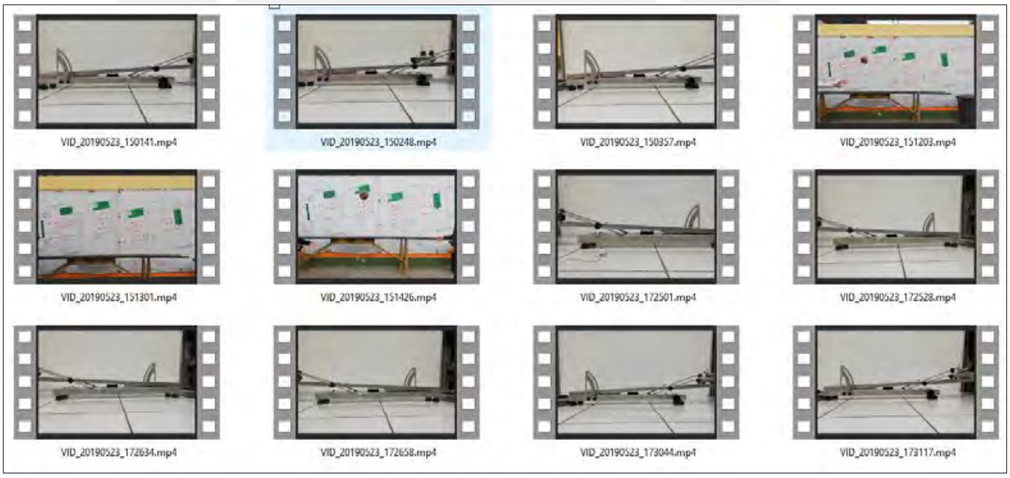


Figura 19: Fotografía de las Grabaciones del Movimiento.

Grupo 1

Determinan que se necesita de un "*objeto que resbale por un plano inclinado*", dicho objeto debe ser rastreable por Tracker. También eligen colocar una bola sobre el carrito, que sirvió para ser el marcador de posición al realizar la grabación del movimiento. Ver Figura 20.

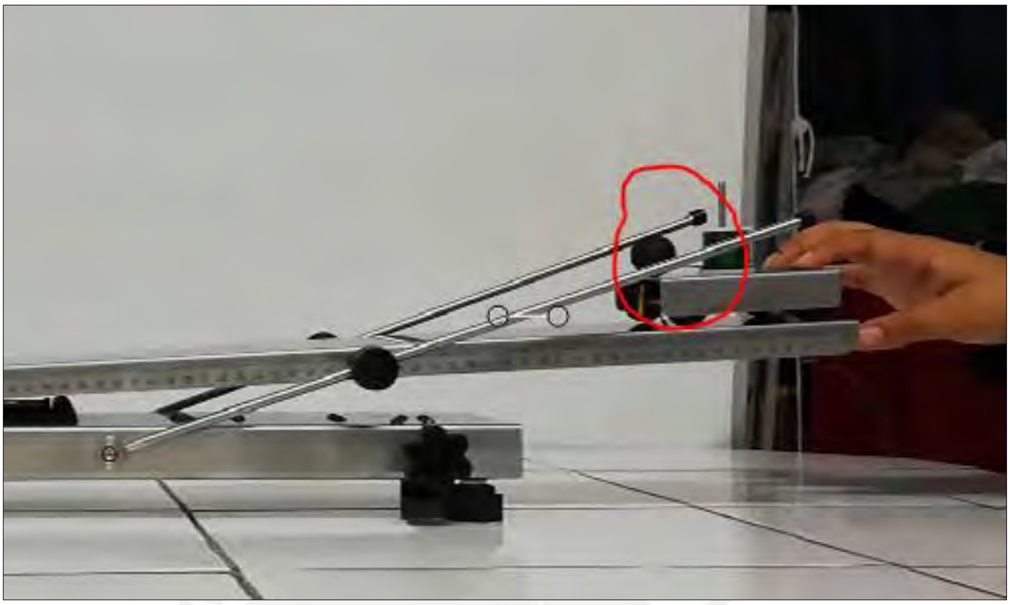


Figura 20: Fotografía Ubicación del Objeto Rastreable por Tracker

Establecen que la trayectoria del objeto es solo una sección del plano inclinado. Dijeron *"solo es una parte",* para referirse al segmento generado por el rastreo de Tracker en una porción del plano inclinado.

Observaron que la duración del movimiento a analizar es de apenas unos segundos y que también que es necesario que la cámara de video no se mueva, por lo que improvisaron un soporte para que la cámara (del celular) no se mueva. Esta acción benefició a los dos grupos, ya que ambos colaboraron en la construcción del soporte improvisado.

Grupo 2

Determinan que lo importante es tener un "*objeto que se pueda rastrear"* con Tracker. Coinciden en colocar la bola sobre carrito, explicaron esta acción porque "*el carrito es muy grande para rastrear*".

Proponen poner la pizarra acrílica, como fondo para la grabación, para que pueda observarse mejor el movimiento del objeto. "*Se verá mejor", "se mejora el contraste".*

Asocian el objeto que se moverá a un punto, en el rastreo, "*se debe marcar el mismo punto del objeto*" y determinaron que sería mucho más sencillo "rastrear" un punto en la bola que el carrito.

Análisis para la Fase 2

¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Grupo 1 En efecto, el grupo logró transitar por la segunda fase del ciclo de modelación ya que lograron simplificar la situación con el objetivo de resolverla cuando dicen que se necesita un "*objeto que resbale por un plano inclinado".* Luego de su experiencia con la pelota que rodaba y no se deslizaba, determinaron que es estrictamente necesario un plano inclinado y un objeto que deslice. También establecieron una correspondencia entre el movimiento real de la bola y la trayectoria generada por Tracker (secuencia de marcadores de posición). **Grupo 2** Se pude decir que los estudiantes de este grupo transitaron por la fase 2 del ciclo de modelación, porque simplificaron la situación. Después de su experiencia con las bancas del colegio, determinaron que lo importante era tener una superficie no áspera y que tampoco tenga irregularidades. Esto podría cambiar el modelo. Hicieron corresponder el objeto que se mueve a un punto y también establecieron que era más fácil "rastrear" un punto de la bola que un punto en el carrito de laboratorio.

Asocian el objeto que se moverá a un punto, característica de los objetos adimensionales, en el rastreo "*se debe marcar el mismo punto del objeto*".

Fase 3. Matematización

Durante esta transición, los estudiantes relacionan los elementos que forman parte del modelo real con los objetos matemáticos requeridos para construir lo que será el modelo matemático. Pueden servirse de diferentes tipos de representaciones (diagramas, gráficos, esquemas, dibujos, entre otros) que, aunado al uso del lenguaje matemático, les apoye en esta transición.

Según Greefrath & Vorhölter (2016), las tecnologías digitales pueden realizar una variedad de tareas en el modelado, ya que en esta transición dan la posibilidad de experimentar y observar. Una situación real puede ser transferida a un modelo geométrico o se puede experimentar dentro de este modelo mediante un Software, en nuestro caso es el Tracker.

Es necesario precisar que el uso de la tecnología digital estuvo asistiendo en todo momento al proceso de transición, no solo la cámara digital para grabar el movimiento, sino que también en esta fase se dio cuando los estudiantes volvieron a ver videos en el portal YouTube, relacionados al uso de Tracker, para generar el modelo de algún objeto en movimiento, lo hicieron varias en varias ocasiones e inclusive el mismo video.

Grupo 1 y Grupo 2

Realizaron el ajuste a la inclinación del plano para el movimiento debido a que observaron que el movimiento era rápido y no se podría hacer el rastreo con facilidad. Al final, después de varios ensayos y conversación entre los grupos, se determinó una medida.

En la Figura 21, se observa la representación geométrica que hicieron los estudiantes de ambos grupos, dentro del Tracker, fue la de un ángulo, el ángulo del plano inclinado, en el que determinaron que la medida del ángulo de inclinación sería 2,5° aproximadamente.

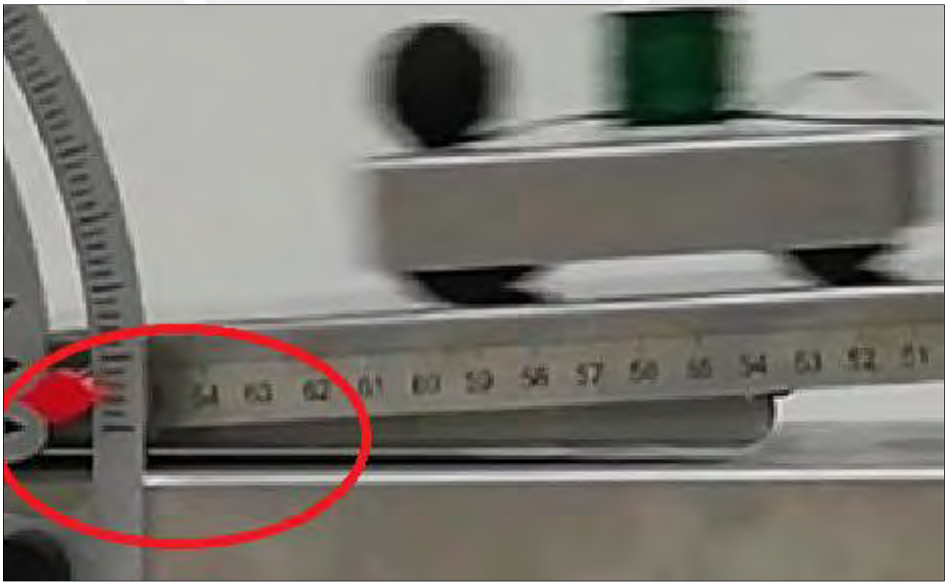


Figura 21: Captura de Imagen de las Representaciones Usadas por los Estudiantes y uso del Lenguaje Matemático.

En el laboratorio de cómputo, ensayaron para luego definir cuestiones como la determinación del eje de coordenadas cartesianas, la ubicación de la masa puntual por medio de un punto, el establecer la vara de calibración por medio de un segmento y escribir la medida del ángulo de inclinación del plano, para poner en proporción las medidas reales y las medidas que usará el Software en la modelación con Tracker (ver Figura 22). Estas acciones fueron comunes debido a que son procedimientos requeridos por el Software, el ángulo aproximado de 2.5° y el segmento de 10 cm debían ser los mismo para que, al final, los modelos fueran comparables. Podían ser diferentes en qué posición se tomaba la medida de los 10 cm en la superficie inclinada, pero decidieron hacerlo en la misma posición (entre las marcas de 40 y 50 cm).

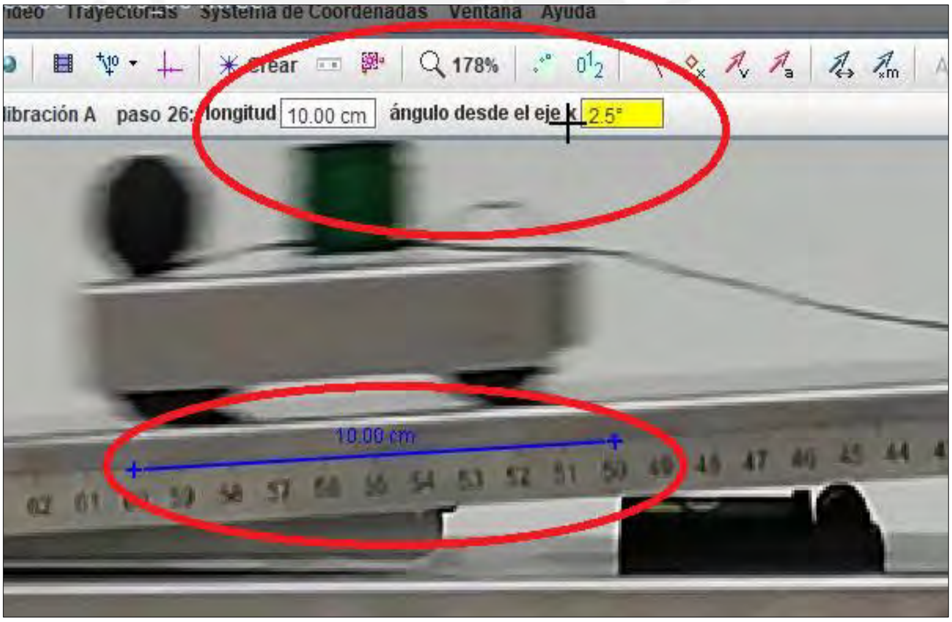


Figura 22: Captura de Imagen de las Representaciones Usadas por los Estudiantes y uso del Lenguaje Matemático

Los estudiantes usaron diferentes representaciones de elementos geométricos, por ejemplo, un segmento de recta, lo que el Software denomina vara de calibración, sabiendo la longitud de un segmento esta se le debe indicar al Tracker. También la representación de un objeto por medio de una masa puntual, un punto en la Geometría.

Análisis para la Fase 3

¿Se usan representaciones?, ¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Grupo 1 y Grupo 2 Se evidencia de las descripciones hechas líneas arriba que ambos grupos transitaron por la tercera fase del ciclo de modelación. El que hayan usado representaciones geométricas, como punto (para determinar la masa puntual del objeto rastreado), segmento de recta, ángulos y medida de ángulos (para poner en proporción las medidas reales con las medidas que pueda procesar Tracker). La única diferencia apreciable entre los grupos fue que el Grupo 2 logró el tránsito por esta fase mucho más rápido que el Grupo 1.

Fase 4 Trabajo matemático

Durante esta transición, los estudiantes deben resolver el modelo matemático utilizando los procedimientos matemáticos adecuados (Gallart et al., 2015). Las tecnologías digitales dan su aporte de manera que se pueden hacer simulaciones con ella, además de abreviar cálculos o procedimientos matemáticos (Greefrath & Vorhölter, 2016).

En nuestra investigación, los estudiantes utilizaron los procedimientos matemáticos del Tracker para resolver su modelo matemático, salvo el ajuste de curva. Los estudiantes también determinaron el intervalo de tiempo en el que será medido y modelado el movimiento, proceso al que se denomina Ajuste de corte. Es decir, los instantes en que se hará el registro de posición del objeto en movimiento.

Grupo 1

Todos los cálculos y procesos matemáticos fueron realizados por el Tracker. Los estudiantes realizaron el ajuste de corte a su video con el objetivo de determinar el intervalo de tiempo donde se modelará el movimiento.

En el caso del Grupo 1, consideran 26 cuadros para ubicar la posición del objeto, con lo que el Software automáticamente mide el tiempo y la posición respecto a los ejes coordenados elegidos, ver Figura 23.

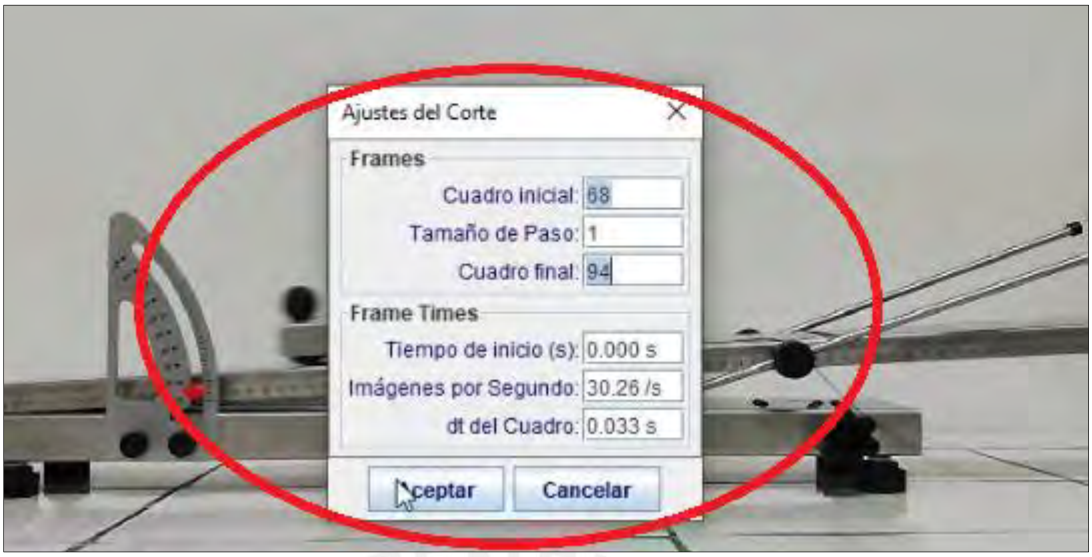


Figura 23: Captura de Imagen del Ajuste de corte que hizo el Grupo 1 (tendrá 26 cuadros en los que podrá registrar la posición del objeto).

Seguidamente, como se observa en la Figura 24 se eligen, el sistema de ejes coordenados, que deben ubicarlo convenientemente en una posición que ellos hayan considerado como inicial para el movimiento, en la que el sistema de coordenadas es el tradicional, vertical ordenadas y horizontal abscisas, aunque se podría cambiar dependiendo del requerimiento.

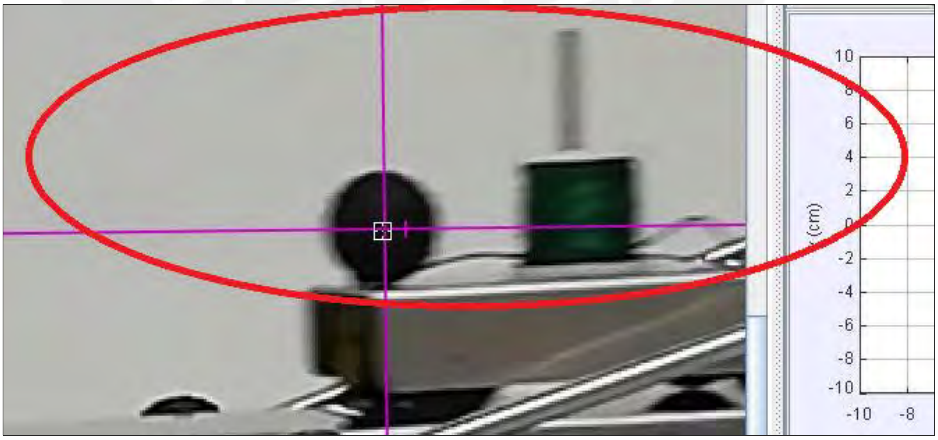


Figura 24: Captura de Imagen de la Elección de Ubicación para el Sistema de ejes Coordenados Grupo 1.

El Tracker ofrece dos opciones para realizar el rastreo de puntos de la trayectoria para el seguimiento de un movimiento. Uno de ellos es el rastreo automático, en la que el mismo Tracker realiza el seguimiento y marcado de trayectoria de forma automática y el rastreo manual de la posición del objeto en movimiento, donde el estudiante, dando clics, marca la posición a intervalos de tiempo establecidos por el Software.

La ubicación o “*rastreo*” de los puntos de la trayectoria del objeto se hizo manualmente. Los estudiantes de este grupo comentaron, “*fue difícil acostumbrarse a marcar cada posición sin equivocarse algún punto*” (ver Figura 25).

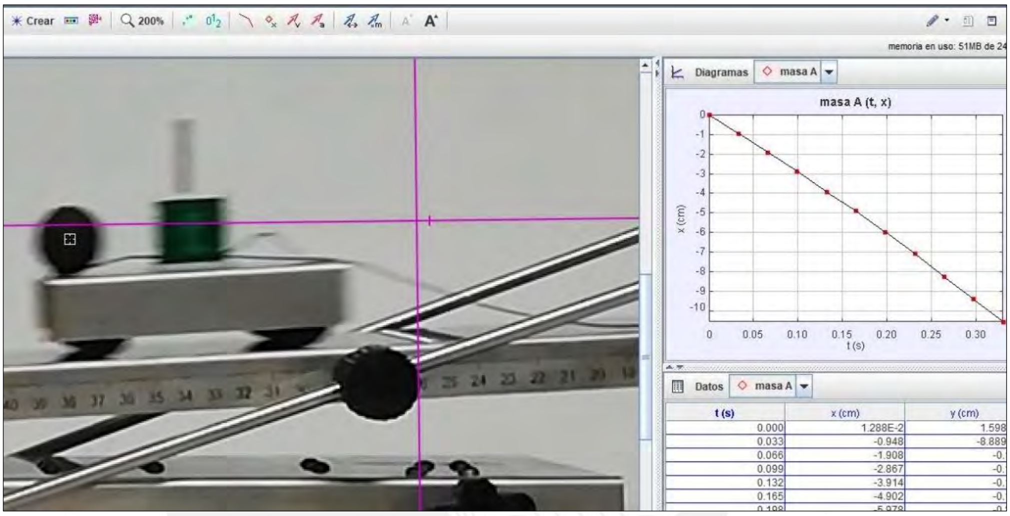


Figura 25: Captura de imagen de inicio del rastreo de trayectoria, Grupo 1.

En tiempo real, Tracker va generando una representación numérica del tiempo trascurrido y las posiciones verticales como horizontal del movimiento (entre otras variables). Obsérvese la parte de color azul (ver Figura 26). Además, una representación gráfica se va generando por defecto, que relaciona el tiempo y la posición horizontal, y que debe cambiarse para elegir la posición vertical, debido al interés de modelar un movimiento con aceleración constante. Obsérvese la parte de color verde (ver Figura 26).

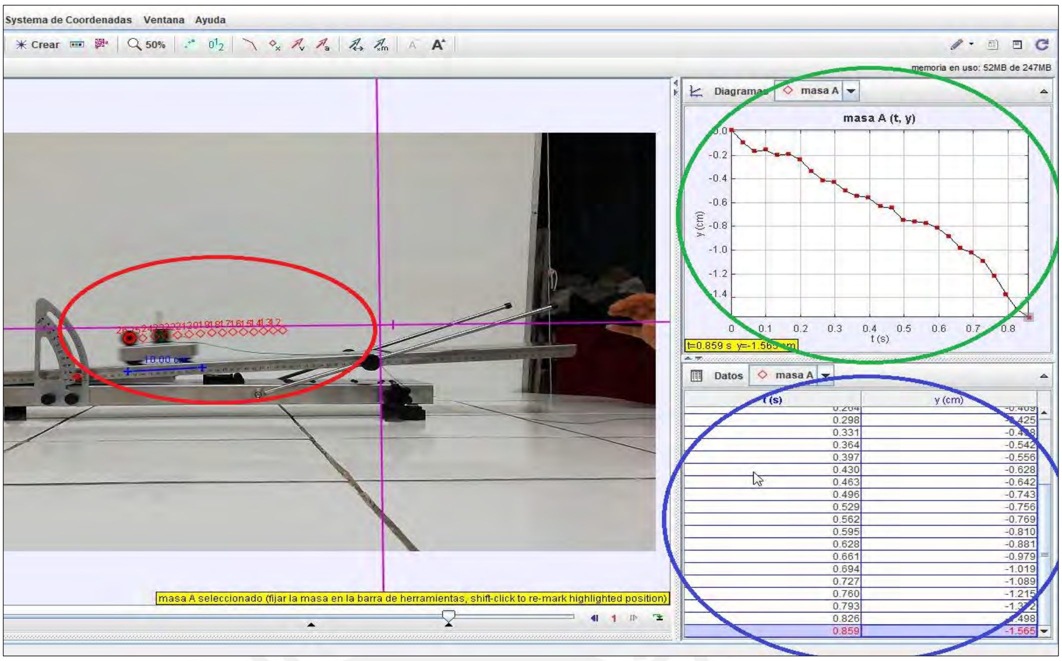
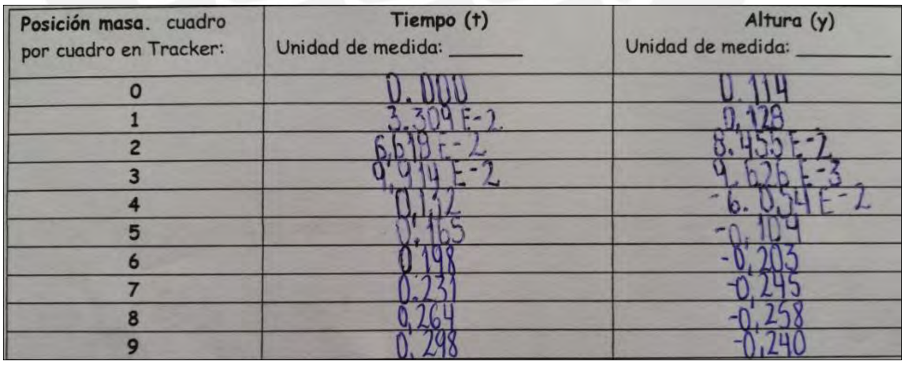


Figura 26: Captura de Imagen al Término del Rastreo de Trayectoria y Representación Numérica y Gráfica, Grupo 1

La representación numérica que se ve en la Figura 27, fue transcrita por los estudiantes en un cuadro del material impreso que les dio, en la que además se les proporcionó una hoja de cuadernillo con la finalidad que escribieran y graficaran los puntos encontrados en la sección anterior.



Posición masa. cuadro por cuadro en Tracker:	Tiempo (t) Unidad de medida: ______	Altura (y) Unidad de medida: ______
0	0.000	0.114
1	3.309 E-2	0.128
2	6.619 E-2	8.455 E-2
3	9.914 E-2	9.626 E-3
4	0.132	-6.054 E-2
5	0.165	-0.104
6	0.198	-0.203
7	0.231	-0.245
8	0.264	-0.258
9	0.298	-0.240

Figura 27: Fotografía de Representación Numérica del Movimiento del Grupo 1

Grupo 2

Todos los cálculos y procesos matemáticos fueron realizados por Tracker.

La medición del tiempo, la ubicación de los puntos de la trayectoria del objeto se hizo manualmente.

Realizaron el ajuste de corte a su video con el objetivo de determinar el intervalo de tiempo donde se modelará el movimiento, en la que consiguen 28 cuadros para ubicar la posición del objeto, donde el Software automáticamente mide el tiempo y la posición respecto a los ejes coordenados elegidos, ver Figura 28.

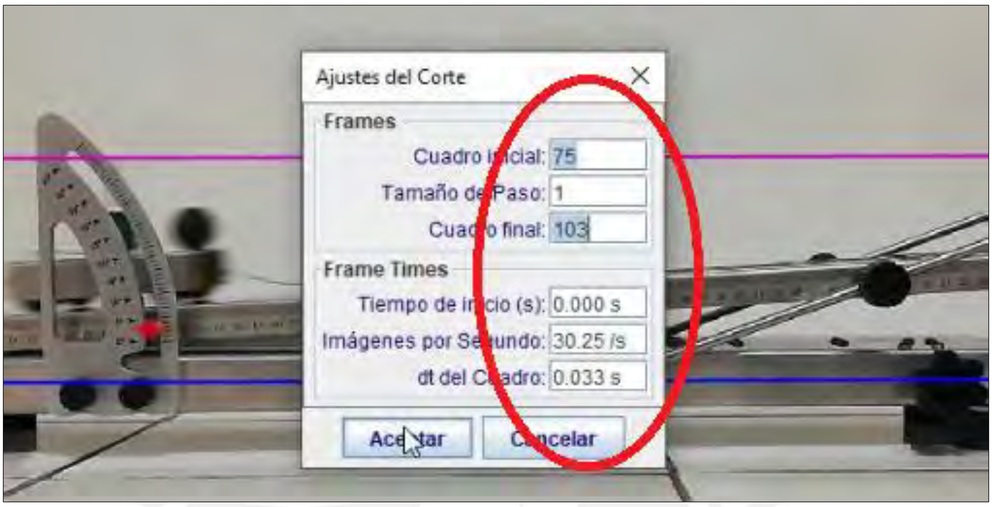


Figura 28: Captura de Imagen del Ajuste de corte que hizo el Grupo 2 (tendrá 28 cuadros en los que podrá registrar la posición del objeto).

A continuación, como se ve en la Figura 29, los estudiantes eligen el sistema de ejes coordenados, que lo ubicaron convenientemente en una posición que ellos han considerado como inicial para el movimiento, donde el sistema de coordenadas es el tradicional, vertical ordenadas y horizontal abscisas, aunque se podría cambiar dependiendo del requerimiento.

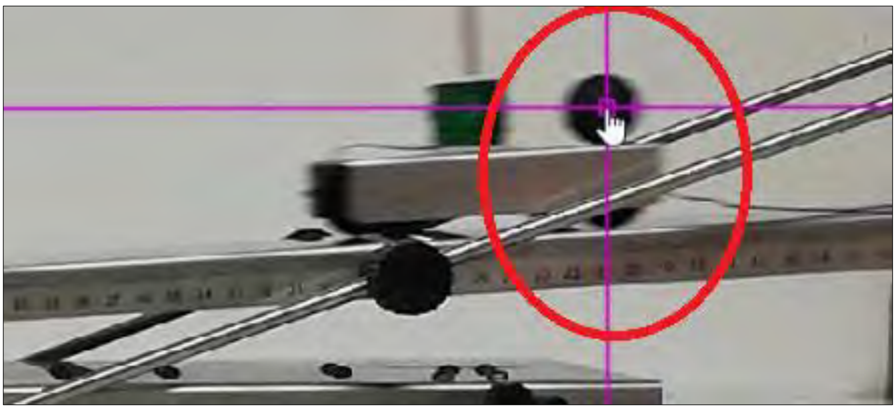


Figura 29: Captura de Imagen de la Elección de Ubicación para el sistema de ejes Coordenados Grupo 2.

Tracker ofrece dos opciones para realizar el rastreo de puntos de la trayectoria para el seguimiento de un movimiento: en el rastreo automático, el mismo Tracker realiza el seguimiento y marcado de trayectoria de forma automática, y el rastreo manual de la posición del objeto en movimiento, donde el estudiante, dando clics, marca la posición a intervalos de tiempo establecidos por Tracker.

La ubicación o "*rastreo*" de los puntos de la trayectoria del objeto se hizo manualmente. Los estudiantes de este grupo dijeron "*sería más fácil si se hiciera en rastreo automático*", ver Figura 30.

Figura 30: Captura de Imagen de Inicio del Rastreo de Trayectoria, Grupo 2.

En tiempo real, Tracker va generando una representación numérica del tiempo trascurrido y las posiciones vertical como horizontal del movimiento. Obsérvese la parte inferior derecha (ver Figura 31). Además, una representación gráfica se va generando por defecto, relaciona el tiempo y la posición horizontal, esta debe cambiarse para elegir la posición vertical, debido al interés de modelar un movimiento con aceleración constante.

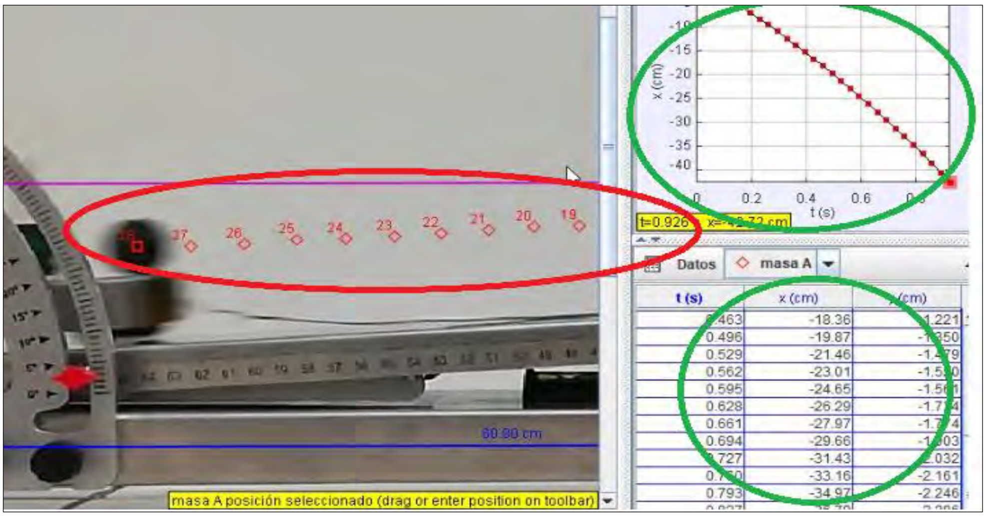
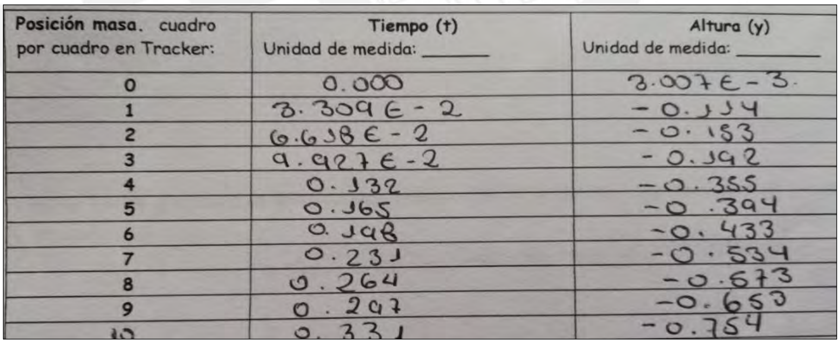


Figura 31: Captura de Imagen al Término del Rastreo de Trayectoria y Representación Numérica y Gráfica, Grupo 2

Los integrantes del Grupo 2 transcribieron la representación numérica en un cuadro del material impreso de la actividad II que tenían y además se les proporcionó una hoja de cuadernillo con la finalidad que, en dicha hoja, graficaran los puntos encontrados en la sección anterior, ver Figura 32.



Posición masa. cuadro por cuadro en Tracker:	Tiempo (t) Unidad de medida: ______	Altura (y) Unidad de medida: ______
0	0.000	3.007E-3
1	3.309E-2	-0.114
2	6.618E-2	-0.153
3	9.927E-2	-0.192
4	0.132	-0.355
5	0.165	-0.394
6	0.198	-0.433
7	0.231	-0.534
8	0.264	-0.573
9	0.297	-0.653
10	0.331	-0.754

Figura 32: Fotografía de Representación Numérica del Movimiento, Grupo 2

Análisis para la Fase 4

¿Se utiliza el lenguaje matemático?, ¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Grupo 1 A pesar que esta fase es difícil de observar en los estudiantes, debido a que todos los procedimientos matemáticos y cálculos fueron realizados por

Tracker, en la que se puede considerar que el Grupo 1 transitó por la fase 4, denominada Trabajo Matemático. También se utiliza el lenguaje matemático, tal como se observa en la descripción del desarrollo del Grupo 1, líneas arriba.

Grupo 2

Consideramos que los estudiantes del Grupo 2 hicieron el tránsito por esta fase, aunque no fueron ellos quienes hicieron los procedimientos matemáticos y los cálculos, ya que estos fueron hechos por Tracker. Destaca también, en favor del paso por esta fase del ciclo de modelación, la utilización del lenguaje matemático cuando los estudiantes transcriben el cuadro de datos, de tiempo y altura.

Fase 5. Interpretación

En esta fase, se precisa necesaria que los estudiantes puedan interpretar la solución matemática obtenida en la situación real, haciendo el camino de regreso desde el mundo de las Matemáticas al mundo real.

La traducción y decodificación de la solución matemática a la realidad se apoyará en el uso y la interpretación correcta de los elementos matemáticos (representaciones, gráficas, ecuaciones...) y el lenguaje matemático representar y usar símbolos y formalismos matemáticos (Gallart et al., 2015).

Los estudiantes deben interpretar los resultados recogidos en la representación numérica en los términos del problema real que ellos mismos plantearon.

Grupo 1

Los estudiantes de ambos grupos hicieron representaciones gráficas, a solicitud del profesor, para mostrar la correspondencia entre el tiempo y la posición vertical del objeto que se desliza. Los estudiantes debían elegir o sospechar a la gráfica de que función corresponde. Además, una representación algebraica para mostrar el modelo obtenido por Tracker. En la Figura 33 se observa la representación gráfica del movimiento del Grupo 1.

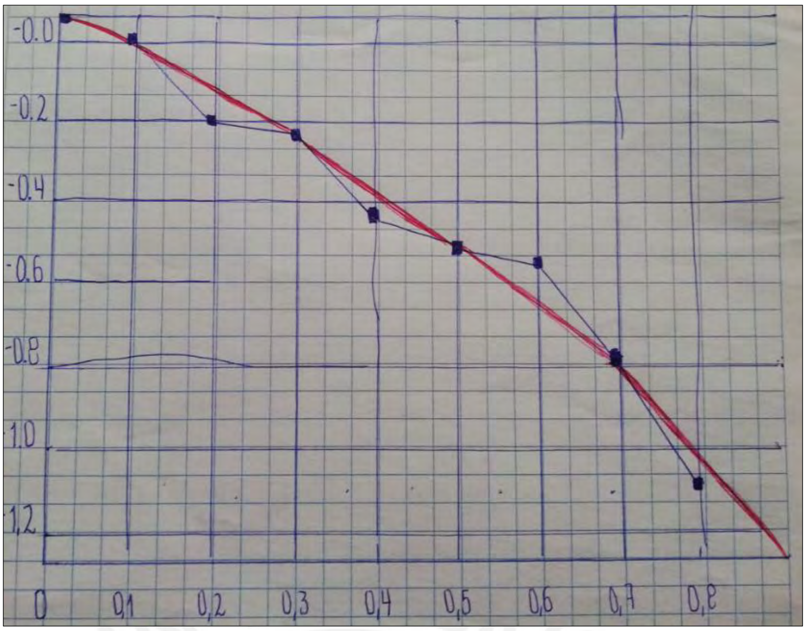


Figura 33: Fotografía de Representación Gráfica del Movimiento, Grupo 1

5. ¿Qué forma presenta la gráfica del movimiento del carrito que se desliza por un plano inclinado, que relaciona el tiempo y la altura?

En el ítem 5 de la Actividad II, estas fueron sus respuestas: El Grupo 1 respondió "*una porción de una parábola*" (ver Figura 34)

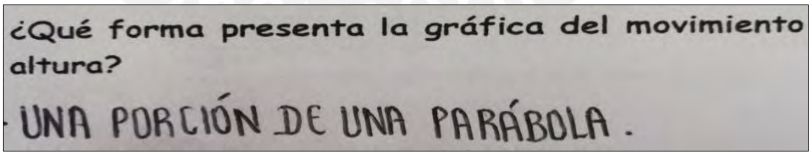

¿Qué forma presenta la gráfica del movimiento
altura?
UNA PORCIÓN DE UNA PARÁBOLA.

Figura 34: Fotografía, Respuesta ítem 5 de la Actividad II, Grupo 1

Los estudiantes realizan el análisis para la modelación del movimiento, por medio de Tracker, a partir de las representaciones numéricas y gráficas. La Figura 35 muestra la captura de imagen del análisis que realiza Tracker posterior al rastreo de trayectoria del Grupo 1.

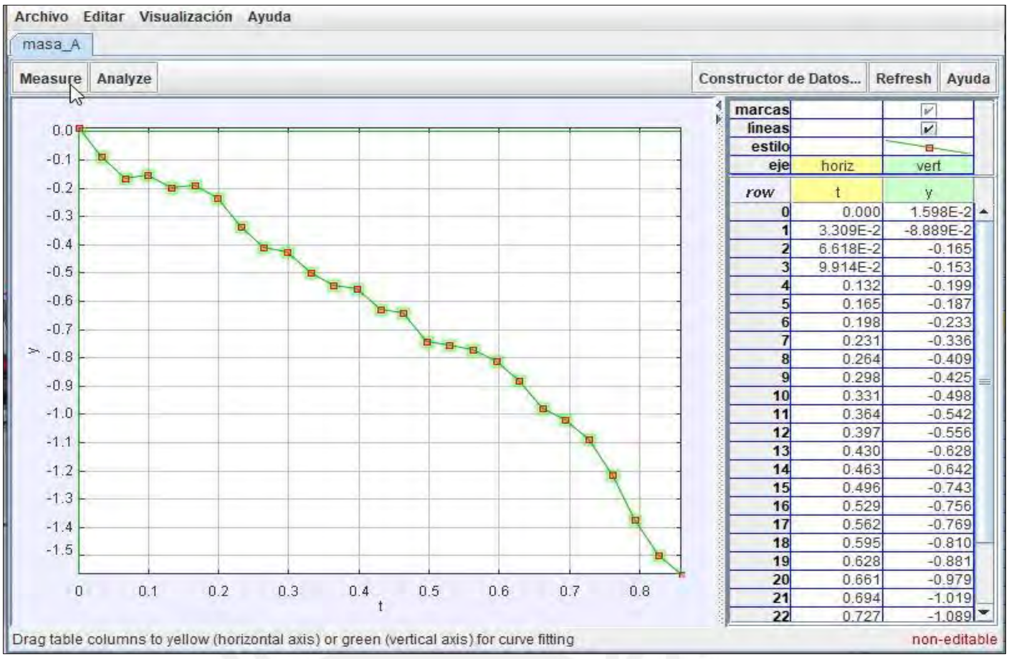


Figura 35: Captura de Imagen del Análisis que Realiza Tracker Posterior al Rastreo de Trayectoria, Grupo 1

Los estudiantes realizaron el ajuste manual de la curva a una función cuadrática con Tracker, donde los parámetros se ajustan a la vista, procurando que contenga la mayor cantidad de puntos (ver Figura 36). Ellos dijeron "*debe pasar por la mayor cantidad de puntos*", "*nos resultó difícil hacer el ajuste del modelo*".

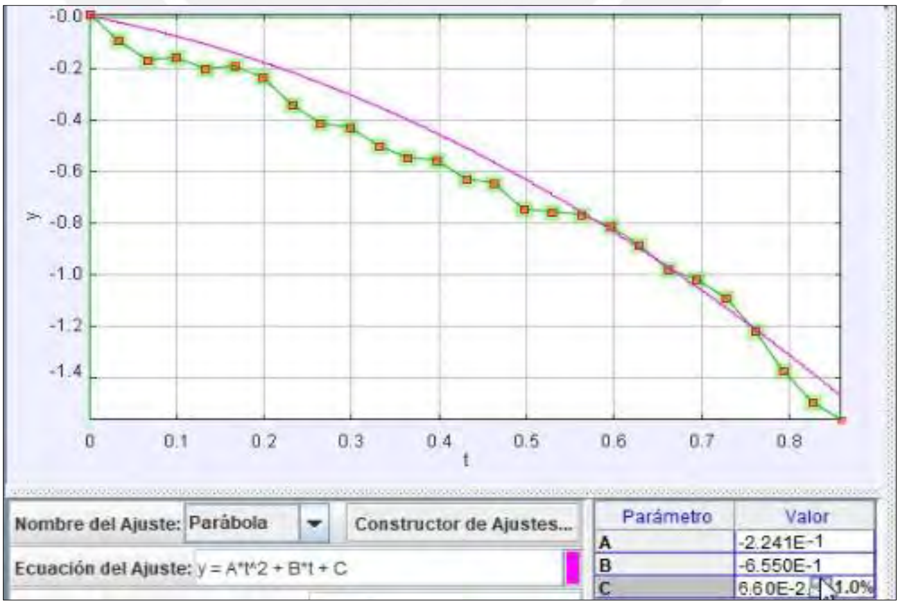
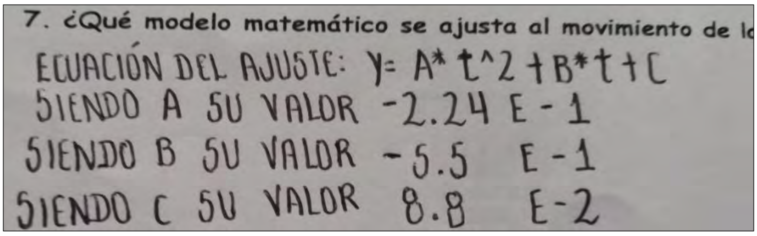


Figura 36: Captura de Imagen Ajuste y Modelo Matemático Cuadrático por Tracker. Grupo 1

A continuación, los estudiantes procedieron a realizar la selección del ajuste, la ecuación del ajuste es $A * t^2 + B * t + C$ y debieron encontrar los parámetros A, B y C. En la Figura 37 se observa los resultados siguientes.


7. ¿Qué modelo matemático se ajusta al movimiento de lo

ECUACIÓN DEL AJUSTE: y= A* t^2 +B*t+C

SIENDO A SU VALOR -2.24 E-1

SIENDO B SU VALOR -5.5 E-1

SIENDO C SU VALOR 8.8 E-2

Figura 37: Fotografía, Respuesta ítem 7 de la Actividad II, Grupo 1

Grupo 2

Los estudiantes del Grupo 2 realizan el análisis para la modelación del movimiento, por medio de Tracker, a partir de las representaciones numéricas y gráficas, ver Figura 38.

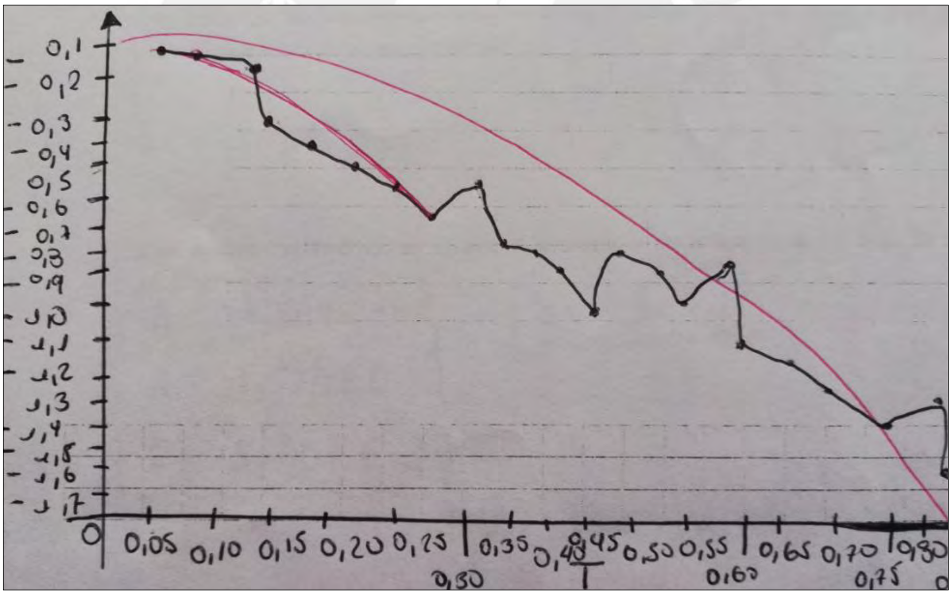


Figura 38: Fotografía de Representación Gráfica del Movimiento, Grupo 2

En el ítem 5 de la Actividad I, esta fue la respuesta del Grupo 2, ver Figura 39.

5. ¿Qué forma presenta la gráfica del movimiento del carrito que se desliza por un plano inclinado, que relaciona el tiempo y la altura?

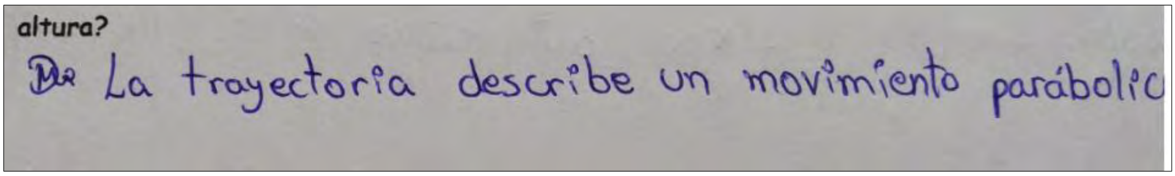


Figura 39: Fotografía, Respuesta ítem 5 de la Actividad II, Grupo 2

Esta información fue verificada y contrastada con la versión obtenida por Tracker. A continuación, mostramos ambos resultados. La Figura 40, presenta el trabajo del Grupo 2

row	t	y
eje	horiz	vert
0	0.000	3.007E-3
1	3.309E-2	-0.114
2	6.618E-2	-0.153
3	9.927E-2	-0.192
4	0.132	-0.355
5	0.165	-0.394
6	0.198	-0.433
7	0.231	-0.534
8	0.264	-0.573
9	0.297	-0.653
10	0.331	-0.754
11	0.364	-0.771
12	0.397	-0.872
13	0.430	-0.890
14	0.463	-0.928
15	0.496	-1.007
16	0.529	-1.066
17	0.562	-1.021
18	0.595	-1.162
19	0.628	-1.221
20	0.661	-1.258
21	0.694	-1.275
22	0.727	-1.333
23	0.760	-1.517
24	0.793	-1.658
25	0.826	-1.820
26	0.859	-1.941
27	0.892	-2.082
28	0.926	-2.036
29	0.959	-2.031
30	0.992	-2.109

Figura 40: Captura de Imagen del Análisis que Realiza Tracker Posterior al Rastreo de Trayectoria, grupo 2

A continuación, los estudiantes procedieron a realizar la selección del ajuste, la ecuación del ajuste es $A * t^2 + B * t + C$ y debieron encontrar los parámetros A, B y C. Estos fueron los resultados se pueden ver en la Figura 41.

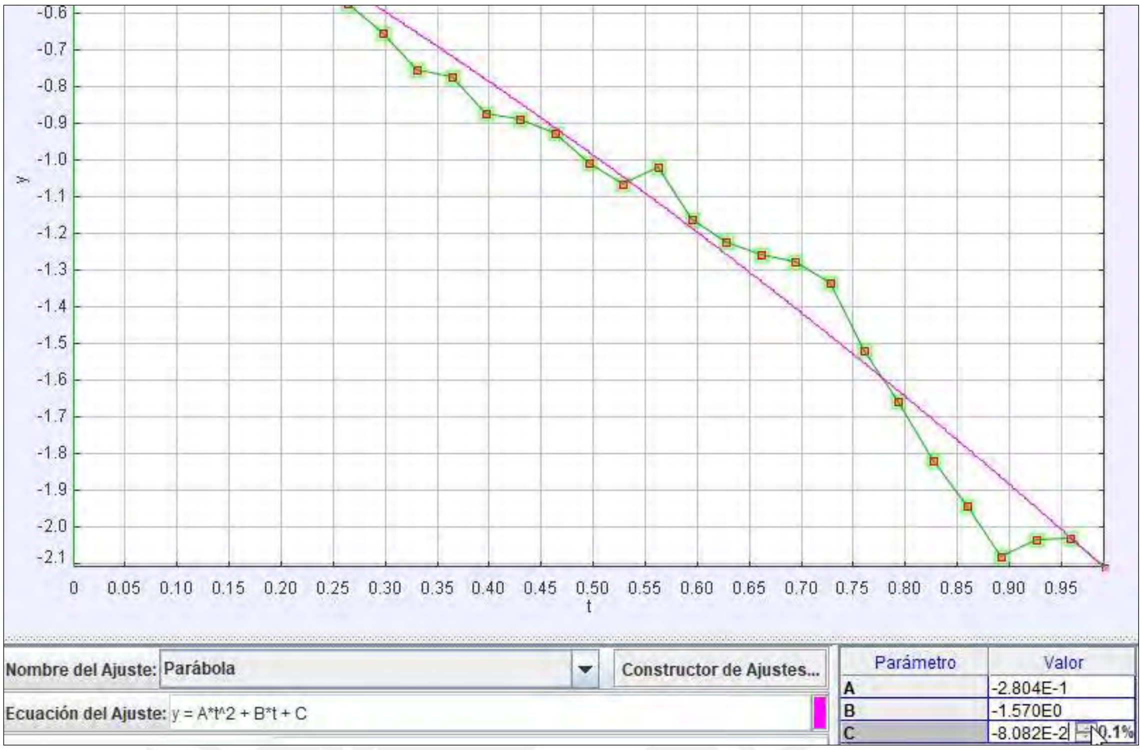


Figura 41: Captura de Imagen, Ajuste y Determinación de Modelo Matemático Cuadrático por Tracker. Grupo 2

A continuación, los estudiantes procedieron a realizar la selección del ajuste, la ecuación del ajuste es $A * t^2 + B * t + C$ y debieron encontrar los parámetros A, B y C. Estos fueron los resultados

Los estudiantes escribieron el modelo matemático que Tracker consiguió y los ajustes en los parámetros fueron realizados manualmente por los estudiantes, ver la respuesta del Grupo 2 en la Figura 42.

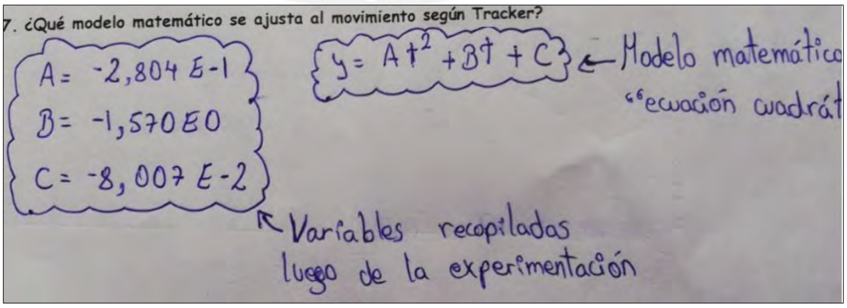


Figura 42: Fotografía, Respuesta ítem 7 de la Actividad II, Grupo *2*

La interpretación del modelo en la realidad es limitada en una experiencia como la que tuvieron los estudiantes, debido esencialmente a que el regreso

del modelo a realidad requiere de instrumentos más sensibles de medición. Se sugiere, por ejemplo, el uso de laboratorios con interfase digital, para medir el desplazamiento, velocidad y aceleración del objeto en movimiento.
El profesor compartió con los estudiantes el valor teórico del parámetro A, en el modelo conseguido por Tracker. Se les mencionó que dicho valor es equivalente a la mitad de la aceleración con que el objeto desciende por el plano inclinado, $A \approx -0{,}21$ (los valores obtenido por los grupos 1 y 2 $A = -0{,}224$ y $A = -0{,}28$ respectivamente), siendo la aceleración de descenso $a \approx -0{,}42 m/s^2$.

Análisis para la Fase 5

¿Se usan representaciones?, ¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Grupo 1 y Grupo 2 Se verifica el tránsito de los estudiantes por la fase de la Interpretación por las descripciones realizadas líneas anteriores, ya que los estudiantes de ambos grupos usaron representaciones y lenguaje matemático. La interpretación del modelo conseguido en la realidad no la hicieron los estudiantes, ya que el profesor, utilizando recursos teóricos de Física para el movimiento en dos dimensiones con aceleración constante, realizó los cálculos para determinar el valor teórico del parámetro $A \approx -0{,}21$. Este valor es cercano a los obtenidos por los estudiantes, $A = -0{,}224$ y $A = -0{,}28$, grupos 1 y 2 respectivamente. Los estudiantes asintieron en que los valores son cercanos y esto permite decir que el modelo obtenido por los estudiantes se aproxima a la realidad, por lo menos teóricamente.

Fase 6. Validación

Para validar el modelo matemático encontrado, se debe pensar de manera crítica sobre el proceso de resolución seguido, los argumentos y razonamientos dados que sustenten y justifiquen este proceso y la validez de la solución generada.
En esta transición, hemos observado que los estudiantes utilizan criterios y argumentos que no son matemáticos necesariamente. En algunas tareas, la validación representa la ejecución directa de la solución en la realidad y en

otras tareas esto no es posible y, en consecuencia, se acepta la solución o no dependiendo de su viabilidad y/o su grado de aproximación a la realidad (Gallart et al., 2015), como es el caso de nuestra investigación.

El modelo matemático conseguido por nuestros estudiantes, con ayuda de la tecnología digital del Software Tracker, parece razonable, teniendo en cuenta la aceleración para un objeto que se desliza por un plano inclinado de poca pendiente, un ángulo de 2,5° a 2,7° aproximadamente.

El profesor indicó el valor teórico del parámetro A, en comparación al parámetro conseguido por Tracker, $A \approx -0{,}21$ (los valores obtenidos por los grupos 1 y 2 $A = -0{,}224$ y $A = -0{,}28$ respectivamente) siendo la aceleración de descenso $a \approx -0{,}42 m/s^2$.

No fue posible hacer más contrastes con el modelo físico, debido a que los estudiantes recién están empezando a estudiar movimientos con aceleración constante, lo que se denomina MRUV, debiendo estudiar el movimiento en dos dimensiones con aceleración constante en sesiones posteriores.

Los estudiantes de ambos grupos coincidieron en señalar que el modelo matemático pudo ser más exacto si se hacía el rastreo automático del movimiento por Tracker.

Los estudiantes también coincidieron en que la cámara para grabar los videos del movimiento debería ser mejor, una cámara de alta velocidad, como la que observaron en un video de YouTube.

Grupo 1

Los estudiantes de este grupo dijeron que la elección de la inclinación de la superficie (de 2,5° a 2,7°) del plano fue debido a que el movimiento era "*más lento y se podía hacer mejor el rastreo del carrito".* Dicen *"pudo ser menor"*.

Grupo 2

Justifican la elección de la inclinación del plano (2,5° a 2,7°) debido a que el movimiento era "*más lento para poder grabar mejor el video"*. Además, dicen que pudo ser menor.

Reflexionan sobre ubicar el sistema de coordenadas, que pudo mejorar, ya que el ángulo debió ser cero, y se observa que es 0,2°.

Justifican la elección de la bolita sobre el móvil, ya que era "*para tener un objeto diferente que contraste con el fondo (*pusieron la pizarra acrílica*) para poder rastrear*"

Samara dice "*el video tenía una calidad que no cumplía con la expectativa para Tracker*"

Análisis para la Fase 6

¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Grupo 1 La justificación que hace el Grupo 1 respecto a la elección de la inclinación (de 2,5° a 2,7°) del plano, sugiriendo incluso que podría ser menor y la reflexión sobre el hecho que se hayan equivocado en fijar las coordenadas en 0,2 °. Todo lo anterior permite aseverar que los estudiantes del Grupo 1 transitaron satisfactoriamente por esta fase 6 del ciclo de modelación. También debe considerarse la aproximación teórica de los parámetros realizados por el profesor para comparar los parámetros obtenidos por los estudiantes, lo que evidencia que los estudiantes han pasado por esta fase del ciclo de modelación. **Grupo 2** El tránsito del Grupo 2 por la fase 6 del ciclo de modelación se justifica porque los estudiantes justificaron elección de la inclinación del plano (2,5° a 2,7°). Reflexionan sobre la ubicar el sistema de coordenadas, que pudo mejorar, ya que el ángulo debió ser cero y se observa en el video que es 0,2°. Reflexionan también sobre la elección de la bolita sobre el móvil, que era "*para tener un objeto diferente que contraste con el fondo (*pusieron la pizarra acrílica*) para poder rastrear*" Samara cuestiona y dice "*el video tenía una calidad que no cumplía con la expectativa para Tracker*" También debe considerarse la aproximación teórica de los parámetros realizados por el profesor para comparar los parámetros obtenidos por los

estudiantes. Esto evidencia que los estudiantes han pasado por esta fase del ciclo de modelación.

Fase 7. Comunicación

Cada grupo compartió su resultado de forma verbal en una conversación entre los dos grupos. Durante esta conversación, se hicieron preguntas y hubo un intercambio ideas respecto a las estrategias seguidas en la resolución de la modelación.

Esta fase del proceso de modelación no se dio en toda su amplitud, debido a limitaciones de tiempo y espacio.

Análisis para la Fase 7

¿Se comunica de forma oral y escrita el proceso de resolución?
Grupo 1 El tránsito de los estudiantes por esta fase se dio (con limitación). Los resultados fueron comunicados al profesor y sus compañeros del Grupo 2. Se puso en evidencia cuando preguntaron *“¿cuánto les salió cada valor?*”, haciendo referencia al valor de cada parámetro de la función cuadrática del modelo. Este grupo asumió que su modelo matemático, indicado en los parámetros de la función cuadrática, era el que mejor se aproximaba a la realidad. **Grupo 2** El tránsito de los estudiantes por esta fase se dio con cierta limitación, pero se dio. Los resultados fueron comunicados al profesor y sus compañeros del Grupo 2. Se evidencia cuando responden la pregunta del Grupo 1 y a su vez comentan “*es que debemos haber fijado mal el eje de coordenadas*” o “*no hicimos bien el rastreo*”.

Después de analizar cada uno de las siete fases del ciclo de modelación, podemos decir que los estudiantes de ambos grupos lograron transitar por cada una de las siete fases de los ciclos de la modelación Blum and Leiß.

CONCLUSIONES

De los antecedentes de investigación revisados, con respecto a la problemática de la Modelación matemática de situaciones o fenómenos con la mediación de tecnologías digitales, es un hecho que depende esencialmente del diseño de actividades. Pensamos que, si se presentan actividades bien planificadas y realizadas, es posible que los estudiantes logren la consecución del modelo matemático y a su vez permita a los investigadores la observación del tránsito por las fases del ciclo de modelación por parte de los estudiantes.

A continuación, presentamos los aspectos que encontramos importantes en la tesis, como el marco teórico, la metodología de investigación utilizada, respuesta a la pregunta de investigación, los principales resultados de la parte experimental y nuevos alcances para futuras investigaciones.

Con respecto al marco teórico, consideramos de utilidad e importancia utilizar aspectos de la Modelación matemática y el tránsito por las fases del ciclo de modelación de Blum & Leiß (2007). Además, tomamos en cuenta los tipos de tareas dentro de la Modelación matemática, trabajo realizado por (Villa-Ochoa et al., 2017). Consideramos también los trabajos de Sol, Giménez, & Rosich (2016) y Gallart (2016) quienes, por separado, diseñaron instrumentos para observar el tránsito por cada fase del ciclo de modelación, con preguntas y acciones observables para cada fase.

También consideramos pertinente realizar nuestra investigación, a nivel secundario, porque tenemos acceso a este grupo de estudiantes y, además, en nuestro país, hay pocas investigaciones acerca del uso de Tracker como mediador en el proceso de Modelación matemática, que es casi nula a nivel secundario, en nuestra revisión no hemos podido encontrar ninguna.

Con respecto a la metodología cualitativa usada en la investigación, resultó adecuada para planificar la actividad didáctica y fue de valor para realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes participantes de la investigación.

La actividad didáctica planteada en la experimentación fue diseñada para observar y analizar el tránsito de los estudiantes por las diferentes fases del ciclo de modelación, con la mediación del aplicativo Tracker. En ese sentido, en la actividad, se solicitó a los estudiantes que realizaran la Modelación matemática mediante la función cuadrática del movimiento vertical de un objeto que se desliza por un plano inclinado.

En cuanto a los resultados de la investigación:

Con respecto a la pregunta de investigación: *¿Cómo estudiantes del quinto grado de Educación Secundaria modelan la función cuadrática al resolver una actividad didáctica mediada por Tracker?*, esta fue respondida, ya que se muestran evidencias en las cuales se pueden observar cómo los estudiantes, apoyados por las tecnologías digitales, para el caso el aplicativo Tracker, realizan la Modelación matemática mediante la función cuadrática de la situación planteada en la actividad didáctica.

Se logró alcanzar el objetivo general, porque se pudo analizar, en el desarrollo de la actividad, la Modelación matemática mediante la función cuadrada del objeto que se desliza por un plano inclinado realizado por los estudiantes.

Con respecto a los objetivos específicos que permitieron alcanzar el objetivo general:

- Identificar las fases del proceso de Modelación matemática en las acciones que los estudiantes realizan al resolver una actividad matemática.
- Caracterizar las acciones de los estudiantes cuando realizan el tránsito por las fases del proceso de Modelación matemática de Blum al resolver una actividad didáctica mediada por Tracker

Se pudo identificar y caracterizar las acciones propias del tránsito de los estudiantes por cada fase del ciclo de modelación cuando los estudiantes resolvían la actividad propuesta con la mediación de Tracker

El trabajo realizado con el Software Tracker-5.0.7 y la interacción de los estudiantes con sus compañeros y con el investigador fueron un elemento central que permitió encontrar evidencia de cómo estas dos parejas de estudiantes consiguen la Modelación matemática de un objeto deslizándose en un plano inclinado, encontrando como modelo una función cuadrática.

Las grabaciones por medio del Software Camtasia 9 y las exteriorizaciones hechas por los estudiantes permitieron determinar momentos del proceso de modelación, que se centra en el tránsito de los ciclos de modelación y la obtención de un modelo matemático cuadrático.

Con respecto a los alcances en investigaciones futuras, nuestras recomendaciones son:

Consideramos que, a pesar de la inclusión de varios aspectos y variables en esta investigación, no se han considerado algunas otras cuestiones relacionadas con la Modelación matemática y el uso eficiente y mediacional de las tecnologías digitales. Ante esto, mencionamos algunos aspectos sobre los que proponemos se debiera seguir investigando:

- Investigar las prácticas de modelación de los estudiantes y profesores en formación, haciendo uso de tecnologías digitales, especialmente con el uso de Tracker, que es todavía de menor difusión.
- Profundizar las investigaciones relacionadas al diseño de actividades de Modelación matemática en sus diferentes perspectivas, especialmente en la que la modelación es considerada una metodología, ya que hay todavía muchos aspectos a explorar.
- Es un trabajo pendiente el rediseño de la actividad de modelación utilizada en nuestra investigación. Por ejemplo, mejorar de manera que se puedan observar con mayor detalle las transiciones entre cada fase del ciclo de modelación de Blum and Leiß.
- Investigar la adaptación de las actividades de Modelación matemática al Diseño Curricular Nacional en sus diferentes niveles.

REFERENCIAS

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Nature*, *186*(4730), 13. https://doi.org/10.1038/1861017b0

Borba, M., & Villarreal, M. E. (2005). Modeling and Media in Action, (January), 0–2. https://doi.org/10.1007/0-387-24264-3

Briceño, S. O. A. (2014). *Una secuencia de modelación para la introducción significativa de la función cuadrática*. Instituto Politécnico Nacional.

Camarena Gallardo, P. (2013). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *1*(10), 183–193.

Cardona, T. E. (2016). *La modelación como generadora de traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico en la aproximación a objetos algebraicos con estudiantes de noveno grado de Educación Básica Secundaria*. Universidad de Medelín.

Cetina, M. G. (2015). *Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato*. Universidad Autónoma de Guerrero.

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa*. *Artmed*. Retrieved from http://ir.obihiro.ac.jp/dspace/handle/10322/3933

Gallart, P. C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial*. Universitat Politècnica de València.

Gallart, P. C., Ferrando, I., & García-Raffi, L. M. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *88*(1), 93–103.

Gómez, F. H. B. (2016). *Implementación del programa Tracker como herramienta de análisis en algunas situaciones de cinemática y dinámica en dos dimensiones, aplicando el método de aprendizaje activo*. Universidad Nacional de Colombia.

Greefrath, G. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling Approaches and Developments from*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experientos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Huincahue, A. J. (2017). *Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría Socioepistemológica Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Huincahue, A. J., Borromeo-ferri, R., & Mena-lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática, *1*, 99–115.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Lávaque, J., Méndez, N. G., & Villarroel, Y. H. (2006). Concepciones de los alumnos de la noción de Función. *Japanese Society of Biofeedback Research*, *19*. https://doi.org/10.20595/jjbf.19.0_3

Martínez, C. C. P. (2006). El método de estudio de caso Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & Gestión*, 165–193.

Mesa, Y. (2013). El Modelo Matemático Como Noción, Concepto Y Categoría. Reflexiones Desde La Filosofía Al Campo De La Modelación En Educación Matemática. *Journal of Chemical Information and Modeling*. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Mesa, Y., & Villa-Ochoa, J. A. (2008). Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto función cuadrática. *Academia. Edu*, 1–6. Retrieved from http://www.academia.edu/905917/Reflexión_Histórica_epistemológica_y_didáctica_del_concepto_de_función_cuadrática

MINEDU. (2015). Rutas del Aprendizaje Versión 2015 ¿ Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes ? VI Ciclo, Área Curricular Matemática. *Secretaria MINEDU*. Retrieved from http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/secundaria.php#

MINEDU. (2016). *Curriúlo Nacional de la Educación Básica 2016*. Lima Perú.

MINEDU. (2017). *Resolvamos problemas 5, cuaderno de trabajo*. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Ministerio de Educación del Perú. (2016). Educación Básica Regular: Programa curricular de Educación Secundaria. *Ministerio de Educación Del Perú*, 1–229.

Molina-Toro, J. F. (2013). *La Modelación con tecnología en el estudio de la función seno*. Universidad de Medellín.

Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 87–115.

Rendón-Mesa, P. A. (2016). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la Ingeniería de Diseño de Producto. Aportes de la modelación matemática*.

Santillana. (2016). *Matemática 5*. Lima Perú.

Sol, M., Giménez, J., & Rosich, N. (2016). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, *4*(27), 329. https://doi.org/10.4995/msel.2011.3100

Vargas, N. M. E. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno*. Universidad Nacional de Colombia.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: Un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas*. https://doi.org/10.22430/22565337.505

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis*, *8*(16), 133–148. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe

Villa-ochoa, J. A., & Gonzalez, D. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Modelación y Tecnología en el Estudio de la

Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas Modelling and Technology in the Study of the Instantaneous Rate of Change in Mathematics, (April). https://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Villa-Ochoa, J. A., Yepes, A. C., & Sanchez-cardona, J. (2017). *Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas / Types of modeling task for the mathematics class*.

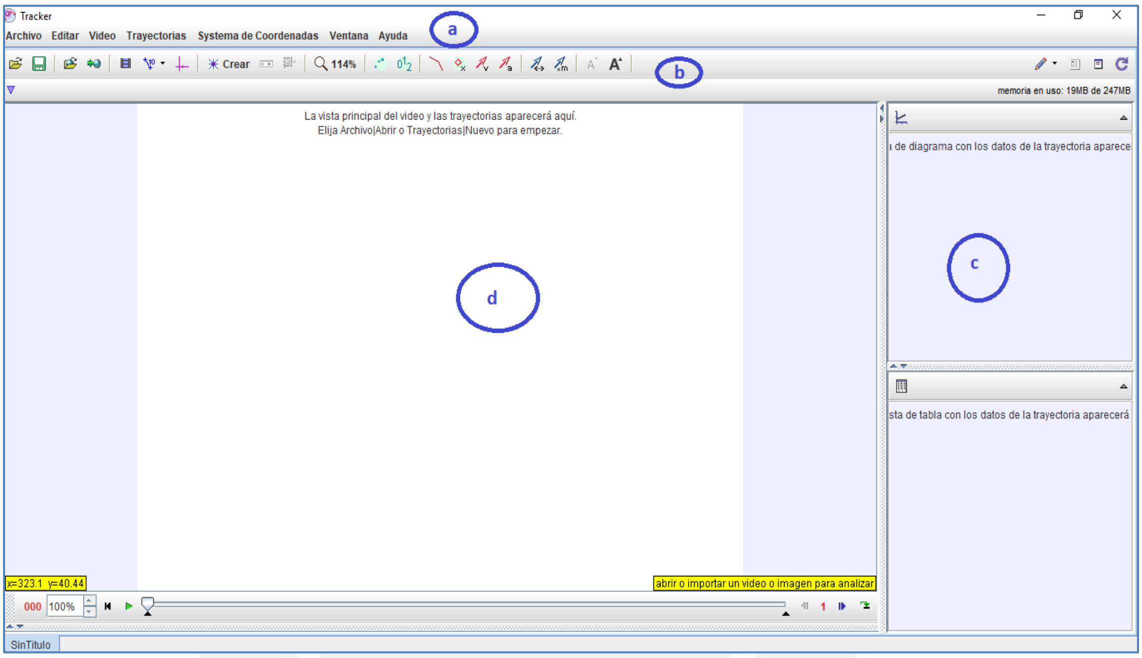
Villarraga, S. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación*. Universidad Nacional de Colombia.

ANEXOS

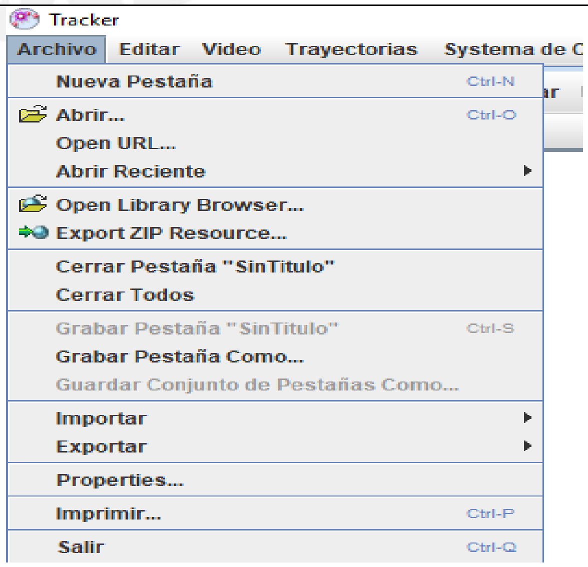
ACTIVIDAD CERO

SESIÓN: "FAMILIARIZACIÓN CON TRACKER"

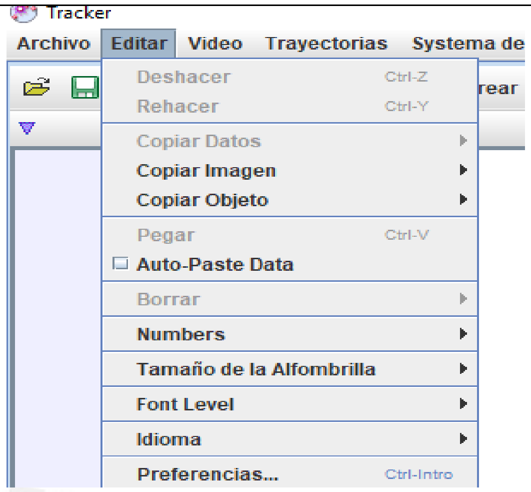
1. **ÁREA DE TRABAJO**
   a. Barra de menú principal
   b. Solapas de exploración y atajos
   c. Visualización de la computadora
   d. Área de pre-visualización



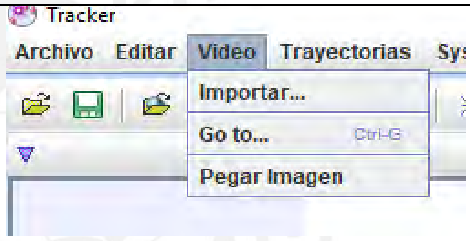
2. **Barra de menú.**

Archivo: Contiene las herramientas de abrir un archivo de video, archivos recientes, cerrar pestañas, grabar, importar, exportar, imprimir y salir	

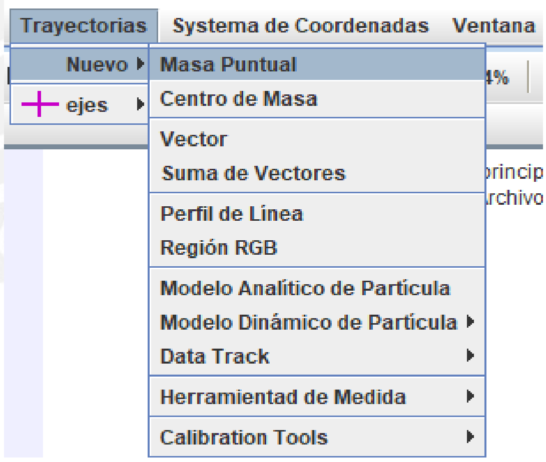
Editar: Permite copiar imágenes, datos, objetos, deshacer y rehacer el trabajo realizado.

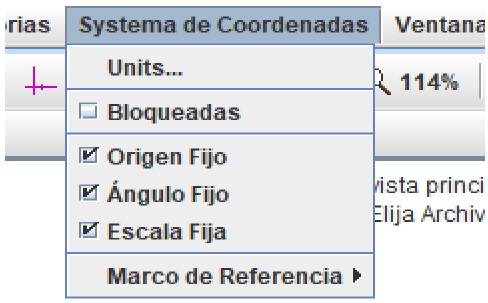
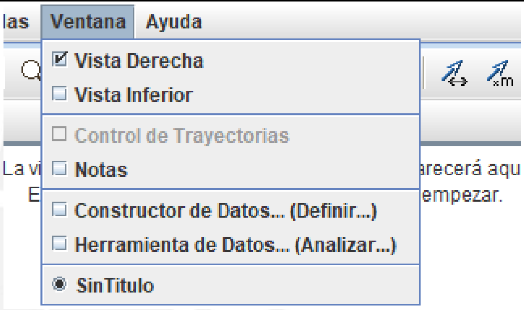
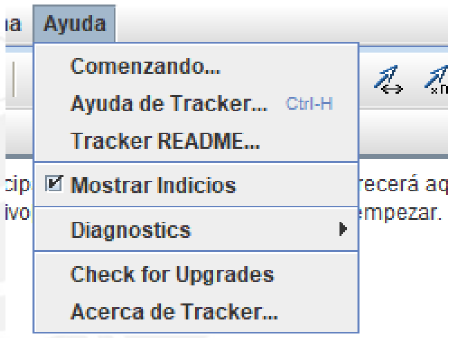


Video: Permite importar un video y pegar imágenes en él.



Trayectorias: Permite trazar trayectorias desde una masa puntual, centro de masa, vectores, suma de vectores y modelar analíticamente partículas.



Sistema de coordenadas: Permite dar unidades a un ángulo determinado, mantener el origen, ángulo y escala fija y nos determina un marco de referencia.	
Ventana: Permite elegir cómo queremos ver nuestra hoja de trabajo.	
Ayuda: Ofrece ayuda en todo lo relacionado con el programa.	

3. **Observa los siguientes videos**
   a) https://youtu.be/ly9jNYzIaok
   b) https://youtu.be/qR-IFPhPGec

ACTIVIDAD 1

SESIÓN: "FUNCIÓN CUADRÁTICA"

Apellidos y Nombres……………………………………………………………………………… Sección…………

I. USANDO LÁPIZ Y PAPEL

1. De las siguientes expresiones, ¿cuáles equivalen a $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$?. Justifique su respuesta.

a. $f(x) = 3x^2 - 5(x + 1) + 2$

b. $f(x) = 3x(x + 2) - 11x + 2$

c. $f(x) - 2 = 2(x^2 - 3x) + x^2 + x$

2. ¿Cuál de las tablas pertenecen a la función? Justifique su respuesta.

a. $f(x) = 2x^2 - 1$

x	1	2	3	4	
f(x)	3	9	19	33	

x	1	2	3	4	
f(x)	1	7	17	31	

x	1	2	3	4	
f(x)	0	1	7	17	

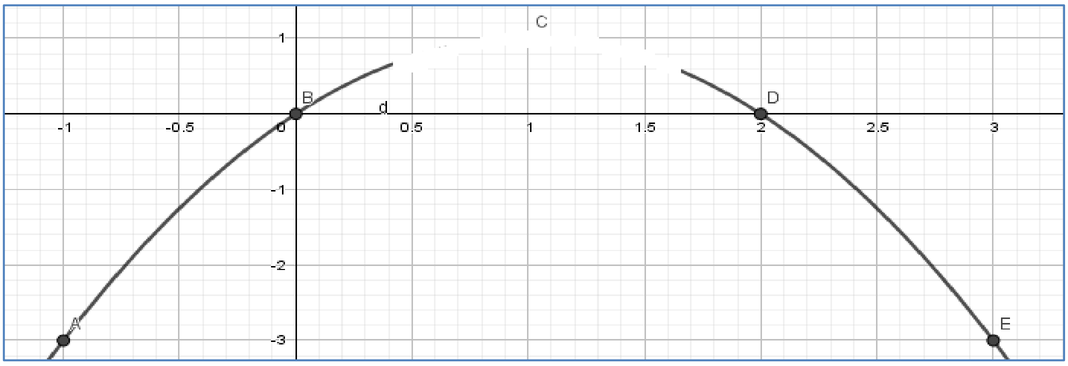
b. $f(x) = 4 - x^2$

x	1	2	3	4	
f(x)	4	3	0	-5	

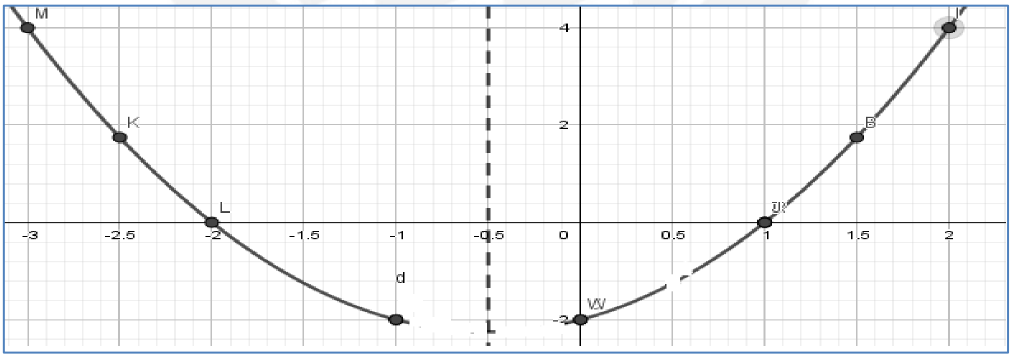
x	1	2	3	4	
f(x)	3	0	-5	-12	

x	1	2	3	4	
f(x)	5	8	13	20	

3. Halle la función cuadrática que representa a la gráfica adjunta. Utilice el recuadro para sus operaciones y/o cálculos. La función es continua para el intervalo $[-1, 3]$



4. Halle la función cuadrática que representa a la gráfica adjunta. Utilice el recuadro para sus operaciones y/o cálculos. La función es continua para el intervalo $[-3, 3]$



ACTIVIDAD 2

SESIÓN: "MODELACIÓN DEL OBJETO DESLIZÁNDOSE, TRACKER"

Nombres:

…………………………………………………………………………………… Sección…………

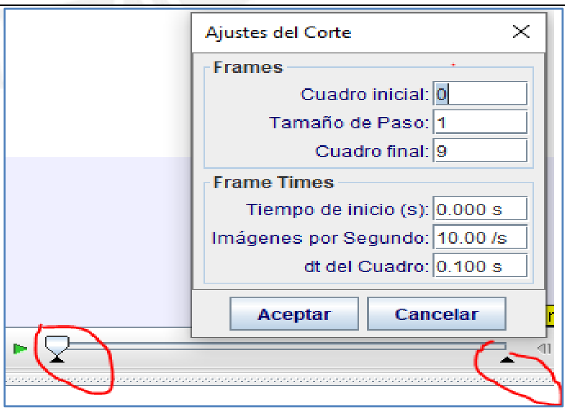
…………………………………………………………………………………… Sección…………

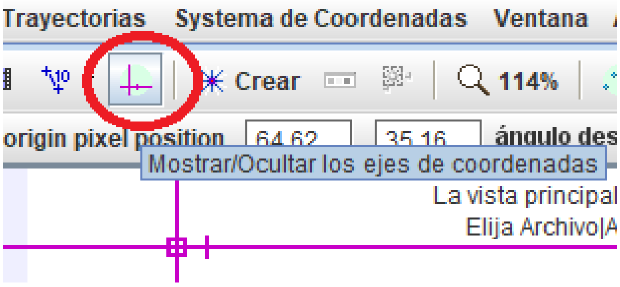
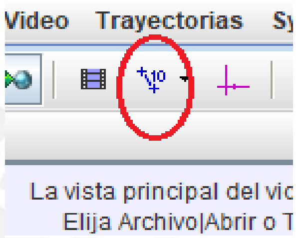
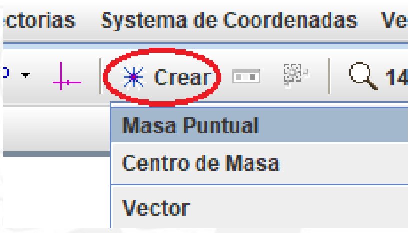
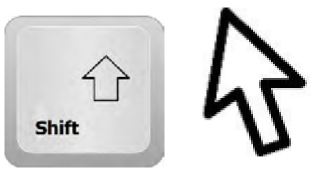
Tiempo: 70 minutos Trabajo en equipo (2 integrantes)

Determinen el modelo matemático que caracteriza al movimiento vertical de un objeto que se desliza por un plano inclinado.

1. Dejen deslizar un objeto (carrito) por un plano inclinado, realicen la grabación en video y guarden dicha grabación en el escritorio de las computadoras asignadas con el nombre GRUPO 1 o GRUPO 2 según corresponda.

2. Utilicen el aplicativo Tracker para el registro y la medición de variables como tiempo y altura de la trayectoria de la pelota ubicada sobre el carrito.

Para importar el video a Tracker, utilicen de la barra de menú, Archivo, Luego en atajos **abrir**, ubicar el video en el escritorio con el nombre que fue guardado y abrir	
Utilicen la barra inferior de deslizamiento para delimitar el fragmento del video que describa la trayectoria de la pelota sobre el carrito.	

De la barra de solapas de exploración y atajos, elijan ejes **coordenados** en el primer cuadro del video u origen de la trayectoria de la pelota sobre el carrito.	
De la barra de solapas de exploración y atajos, elijan **vara de calibración** y ubíquenla en el parámetro establecido dentro del video.	
De la barra de solapas de exploración y atajos, elijan ***Crear***, luego dentro de las opciones **masa puntual**, la masa puntual va a corresponder a la pelota sobre el carrito.	
Utilizando la tecla "shift" y haciendo clic sobre la masa puntual (pelota negra sobre el carrito) cuadro a cuadro, realicen el rastreo manual de las posiciones de la pelota. Esto les permitirá completar la tabla que se presenta a continuación. Observen en el área c visualización de la computadora.	

3. ANÁLISIS TIEMPO VS ALTURA

Posición masa. Masa puntual cuadro por cuadro en Tracker:	**Tiempo (t)** Unidad de medida: ______	**Altura (y)** Unidad de medida: ________
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

4. Representen gráficamente los datos obtenidos en la tabla anterior

5. ¿Qué forma presenta la gráfica del movimiento de la pelota sobre el carrito que se desliza por un plano inclinado, que relaciona el tiempo y la altura?

6. ¿Haciendo uso de Tracker qué ajustes deben hacerse a los coeficientes para adecuar la gráfica al modelo dado por Tracker?

7. ¿Qué modelo matemático se ajusta al movimiento de la pelota sobre el carrito según Tracker?

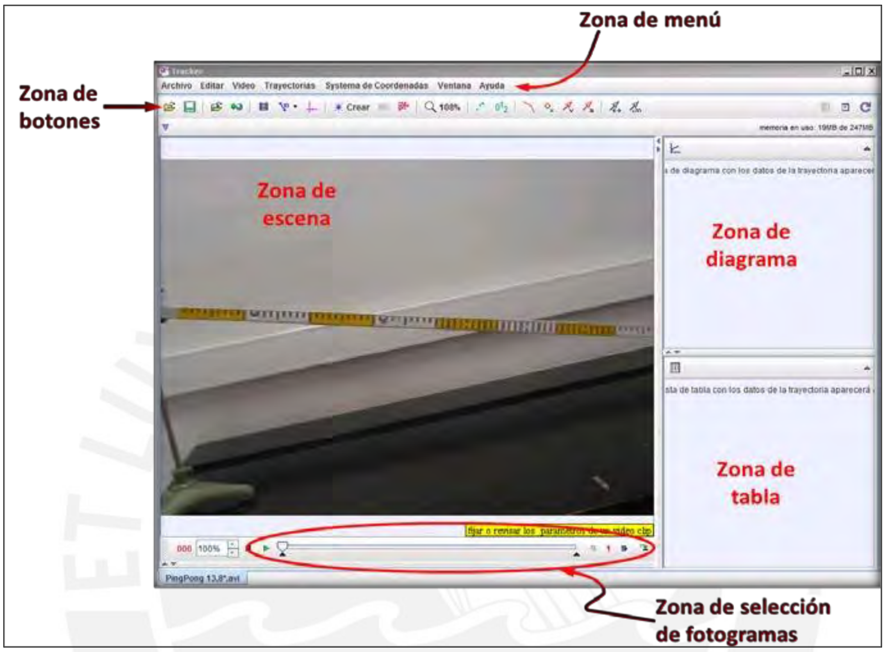
Gracias

GUÍA BREVE DE PROCEDIMIENTOS DE TRACKER

Tracker es un programa de análisis de vídeo y modelación de fenómenos físicos. Es un programa gratuito y de código abierto y está disponible para varios sistemas operativos en la siguiente dirección: https://physlets.org/tracker/

1. PREPARACIÓN DE LA ESCENA

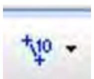
Después de instalado e iniciado el programa, se abre el archivo de vídeo que se quiere analizar. La ruta de menú para hacerlo es la usual: **Archivo > Abrir…** Cuando el vídeo se haya cargado la pantalla, presentará un aspecto parecido a este:



 Pulsando el botón de reproducción en la zona de selección de fotogramas, se pude ver el video completo.

Sistema de Coordenadas

A continuación, se elige un sistema de coordenadas con el que se medirá las posiciones, velocidades, etc. del móvil o móviles estudiados. Para ello, se pulsa **Ocultar/Mostrar los ejes de coordenadas** de la zona de botones. Aparece, superpuesto a la escena, los ejes de coordenadas. Haciendo clic en la intersección entre los ejes se puede desplazar el origen al punto de inicio del movimiento y haciendo clic sobre la parte positiva del eje X se pude girar ambos ejes hasta conseguir la orientación que se requiera.



Escala

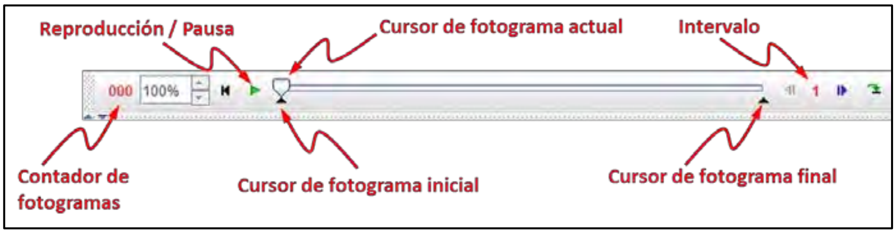
Es necesario establecer una escala que permita convertir las dimensiones visibles en el video en verdaderas longitudes de la escena real. Se pulsa el botón de **Herramientas de calibración** y en el menú emergente se elige Nuevo **> Vara de calibración.** Aparece un segmento –la vara de calibración– en el centro de la escena, se desplaza sus extremos con el mouse hasta abarcar con ella un detalle de la escena cuya longitud real es conocida. Finalmente, en la ventana que hay sobre la vara, se escribe la longitud real en las unidades que se midan; a partir de este momento, todas las posiciones, coordenadas, etc. que presente el programa estarán expresadas conforme a la escala que hemos establecido.

Una vez establecida la escala de calibración, se puede desplazar la vara hacia otra región de la escena donde no estorbe.

Selección De Fotogramas

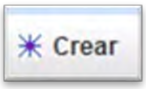
Normalmente, el archivo de vídeo que grabado contiene información no relevante (al inicio y al final), que no es de interés analizar. Para descartar estas porciones de video, se accede a la zona de selección de fotogramas. También es posible llevar a cabo este proceso pulsando el botón

Ajustes del Corte

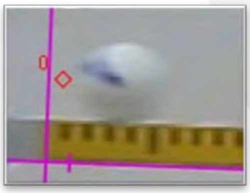


Desplazando el cursor de fotograma actual se puede visualizar fotogramas específicos. Cuando se haya establecido qué fotograma será el fotograma inicial, se desplaza el cursor de fotograma inicial hasta su posición; a partir de ese momento, el programa considerará a ese fotograma como el instante t=0. Del mismo modo, desplazando el cursor de fotograma final, se elige el final de nuestro intervalo de interés. Por último, se hace la selección del intervalo; el valor por defecto es '1' y significa que nos proponemos estudiar todos los fotogramas entre el inicial y el final.

2. SEGUIMIENTO DE UN MÓVIL

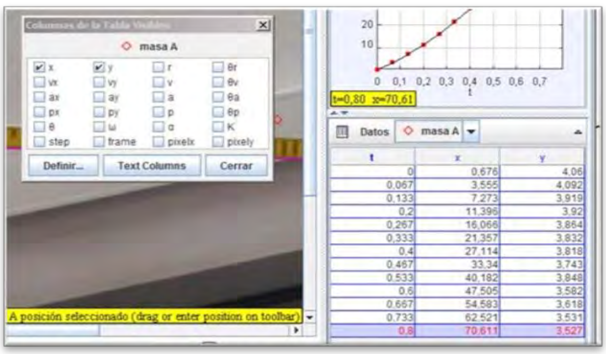


En el vídeo existe un móvil cuyo movimiento nos interese estudiar. Se informa a Tracker de su existencia pulsando la secuencia **Crear > Masa puntual**. Aparecerá una nueva ventana, la ventana de control de trayectorias, en la que se identifica al móvil (el nombre por defecto es 'masa A').



Ahora es posible especificar la trayectoria. La **zona de escena** se habrá ubicado automáticamente al primer fotograma de interés. Se presiona la tecla de Mayúsculas y el cursor cambia de símbolo; se centra cuidadosamente el símbolo sobre el móvil y se hace clic. Esta acción tiene varios efectos. El primero, aparece sobre la zona de escena un pequeño símbolo en forma de rombo (el mismo que aparece en la ventana de **control de trayectorias**) en la posición marcada. El segundo, aparecen valores numéricos en la zona de tabla y puntos en la zona de diagrama. El tercero, el vídeo avanza los fotogramas que se especificaron en la casilla intervalo de la zona de selección de fotogramas, disponiéndose el programa a la espera que se señale la nueva posición (Mayúsculas + clic). De esta forma, se va marcando la trayectoria del móvil hasta el último fotograma disponible.

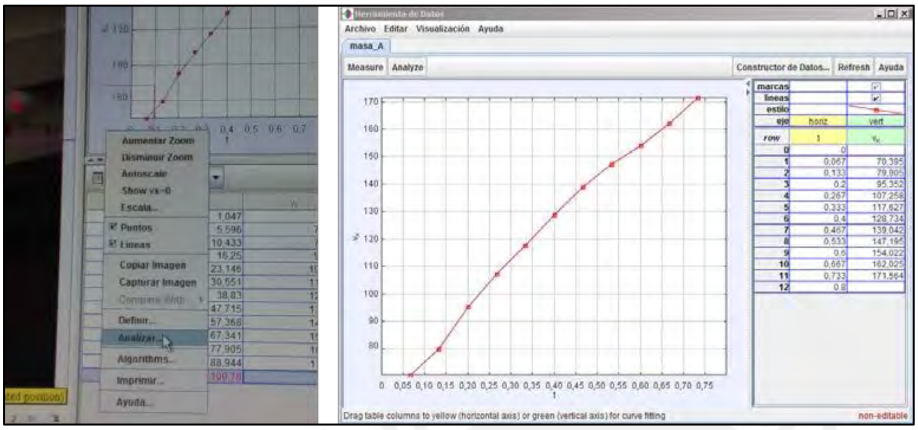
3. DIAGRAMAS Y TABLAS



Cuando se termina de especificar la trayectoria, las **zonas de tabla y diagrama** habrá quedado rellenado, al menos de forma preliminar. En la zona de tabla, figuran, organizadas por columnas, el tiempo y otras variables cinemáticas. Si pulsamos en la pestaña **Datos de la tabla,** aparecerá la ventana **Columnas de la Tabla visibles**. En ella, aparecen variables tales como: posiciones, velocidades, ángulos, aceleraciones, etc. Se puede seleccionar a requerimiento del modelador.

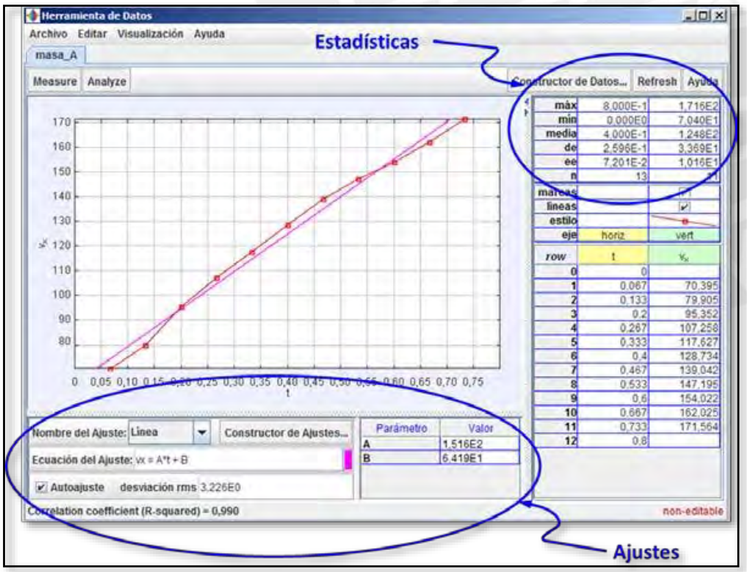
La **zona de gráfico** presentará, por defecto, un diagrama x(t). Es sencillo cambiar de gráfica: solo se debe pulsar en los símbolos del eje de abscisas o de ordenadas, según se requiera, y elegir la variable de interés de entre la lista que habrá aparecido. Es posible también representar dos o tres gráficas a la vez, pulsando en la pestaña Diagramas de la **zona de gráfico**.

4. ANÁLISIS DE DATOS



Los valores numéricos que figuran en la zona de tabla se pueden copiar y pegar luego en una hoja de cálculo o se pueden analizar dentro del mismo programa Tracker. Si elegimos esta segunda opción supongamos, por ejemplo, que queremos estudiar la componente vertical de la velocidad del móvil, Vy. Le solicitamos al programa aparezca la variable Vy en la zona de tabla y que represente gráficamente esa misma variable en función del tiempo.

Un clic con el botón derecho del mouse en alguna parte de la zona de gráfico y en el menú emergente que aparece (ver figura superior izquierda) se elige **Analizar**. Aparece una nueva ventana, titulada **Herramienta de datos**, con el aspecto que se muestra en la figura de arriba a la derecha.



Inicialmente esta ventana no ofrece más información que la que se representaba en la ventana principal del programa, pero en las pestañas **Measure** y **Analyze** de la parte superior izquierda se puede acceder a otras herramientas. Por ejemplo, marcando la opción Estadísticas de la pestaña **Analyze** aparece en la parte superior derecha de la ventana de **Herramienta de datos** información sobre valores máximos, mínimos, promedios, etc. de todas las variables presentes.

La opción **Ajustes** dentro de la misma pestaña **Analyze**, se puede llevar a cabo un ajuste de regresión por mínimos cuadrados, con formas funcionales diversas (rectas, parábolas, exponenciales, sinusoides, etc.).