PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Roy Anthony Arredondo Rivas

ASESORA:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Junio, 2020

RESUMEN

Esta investigación, pretende analizar la práctica docente del profesor universitario de matemática en el dominio del análisis, en particular cuando enseña la función exponencial a estudiante de la Facultad de Letra y Ciencias Humanas. En ese sentido, es importante estudiar la organización de los conocimientos y tareas que propone el profesor al enseñar este tipo de función, ya que, según los planes de estudio de diversas carreras de humanidades en universidades peruanas, se presenta la necesidad de su enseñanza, esto es respaldado en diversos libros universitarios de matemática para estas carreras, donde se muestra su utilidad para modelar situaciones de interés compuesto, de interés continuo, crecimiento o decrecimiento poblacional, entre otras. Por lo tanto, esta problemática nos lleva a establecer nuestro objetivo, que es analizar el Espacio de Trabajo Matemático Idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo. Para ello, nos fundamentamos en la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesto por Kuzniak.

El procedimiento metodológico utilizado se relaciona con algunos aspectos del estudio de casos. Además, nuestra investigación se realiza a partir de la información obtenida por la observación de la clase y complementada por medio de una entrevista, esta información nos permite presentar y analizar las acciones que realiza el docente universitario de matemática al enseñar la función exponencial, con ello reconocer las génesis y planos que activa, así como los paradigmas del análisis que privilegia, interpretando los resultados obtenidos de su ETM idóneo, el cual puede estar influenciado por su ETM personal.

Se concluye que, las acciones realizadas en clase por el profesor al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo evidencian la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, la activación de los planos semiótico-instrumental, Instrumental-discursivo y Semiótico-Discursivo. Además, el profesor insta a trabajar en los paradigmas del Análisis Geométrico/Aritmético y del Análisis Calculatorio.

Palabras clave: Función exponencial; Génesis; Paradigmas; Trabajo matemático.

ABSTRACT

This research aims to analyze the teaching practice of the university professor of mathematics in the Field of analysis, particularly when teaching the exponential function to a student of the Faculty of Arts and Human Sciences. In that sense, it is important to study the organization of knowledge and tasks proposed by the teacher when teaching this type of function, since, according to the curricula of various humanities careers in Peruvian universities, there is a need for their teaching, this It is backed up in various university math books for these careers, where its utility is shown to model situations of compound interest, of continuous interest, population growth or decrease, among others. Therefore, this problem leads us to establish our objective, which is to analyze the Suitable Mathematical Working Space of the university professor when teaching the exponential function to humanities students of the first cycles. To do this, we are based on the Mathematical Working Space theory (MWS) proposed by Kuzniak.

The methodological procedure used is related to some aspects of the case study. In addition, our research is carried out from the information obtained by the observation of the class and complemented by an interview, this information allows us to present and analyze the actions carried out by the university mathematics professor when teaching the exponential function, with it recognize the genesis and planes that activates, as well as the paradigms of the analysis that privileges when teaching this function, interpreting the results obtained on his suitable MWS, which may be influenced by his Personal MWS.It is concluded that, the actions carried out in class by the professor in teaching the exponential function to students of the humanities of the first cycle evidence the activation of the semiotic, instrumental and discursive genesis, the activation of the semiotic-instrumental, Instrumental-discursive and semiotic-Discursive plans. In addition, the professor urges to work on the paradigms of Geometric/Arithmetic Analysis and Calculation Analysis.

Keywords: Exponential function; Paradigms; Genesis; Mathematical work.

A Dios por permitirme vivir para cumplir mis metas.
A mis hijos Thiago y Josué por ser mi felicidad y motivo de superación.
A mi esposa Pilar por su amor y apoyo en todos mis proyectos.
A mi madre Inés y a mi mami Joca por apoyarme e inculcarme valores que me permiten ser una mejor persona.
A mis hermanos Wilmer y Andrea, a quienes amo y guardo los mejores recuerdos de su niñez.

AGRADECIMIENTOS

De manera especial a mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su apoyo constante, paciencia y tolerancia durante la realización de esta tesis. Por sus aportes pertinentes y oportunos que me facilitaron mejorar y culminar esta investigación.

A los miembros del jurado, Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo y Mg. Flor Carrillo Lara, por sus observaciones y sugerencias que permitieron mejorar la presente investigación.

Al grupo de investigadores de la línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus aportes y sugerencias, las cuales orientaron el desarrollo de esta investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP por compartir sus conocimientos, los cuales contribuyeron en mi formación académica.

A los profesores que participaron amablemente de esta investigación.

A mis compañeros de la Maestría, por el tiempo y conocimientos compartidos durante estos años de estudio.

A mis hijos Thiago y Josué, a mi esposa Pilar, a mi madre Inés y a mi mami Joca, por amarme y estar a mi lado en todo momento, apoyándome a salir adelante en esta etapa académica.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La necesidad de analizar las acciones de los profesores universitarios de matemática al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades, resulta como respuesta de la revisión de investigaciones de referencia, de manera particular aquellas relacionadas a la organización de los conocimientos y tareas que realiza el profesor universitario de matemática para enseñar la función exponencial en cursos de precálculo y aquellas que estudian la práctica docente de profesores en formación inicial y continua a través de la teoría Espacio de Trabajo Matemático, en las cuales consideran necesario analizar las acciones que realiza el profesor para organizar la enseñanza de las funciones en cursos del primer ciclo universitarios.

La presente investigación tiene como objetivo general analizar el Espacio de Trabajo Matemático Idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo. Por lo tanto, se considera pertinente utilizar como sustento la teoría Espacio de Trabajo Matemático propuesto por Kuzniak (2011). Además, como la investigación es de corte cualitativo, nuestros procedimientos metodológicos considerados toman de referencia algunos aspectos del estudio de casos, el cual nos permitirá lograr nuestro objetivo general.

La presente tesis está organizada en tres capítulos. En el primer capítulo revisamos investigaciones de referencia relacionados al estudio de la práctica docente de profesores en el dominio del análisis, de manera particular sobre la función exponencial. De acuerdo con lo anterior y los planes de estudio de distintas universidades, se establece la justificación de nuestra investigación. Además, se presenta la pregunta y los objetivos que orientan nuestra tesis, incluso los aspectos teóricos y metodológicos que fueron utilizados. En el segundo capítulo se describen aspectos matemáticos y epistemológicos del objeto función exponencial, aspectos matemáticos para la enseñanza de la función exponencial en libros universitarios de matemática, por último, aspectos didácticos y matemáticos para la enseñanza de la función exponencial presente en el material de curso de Matemática Básica. El tercer capítulo trata sobre el análisis del trabajo matemático idóneo del profesor universitario de matemática a partir de la información obtenida por la observación de clase y la entrevista semiestructurada. Finalmente, se presenta los resultados de la investigación, así como, las consideraciones finales y las perspectivas para futuras investigaciones.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

Para organizar la problemática de la investigación, en primer lugar, realizamos una revisión de otros trabajos relacionados con la enseñanza del objeto matemático función exponencial, con el análisis de la práctica docente de profesores en formación inicial o continua, e investigaciones de corte teórico. También, fundamentamos las razones por lo cual consideramos que la presente investigación es necesaria en el área de Didáctica de las Matemáticas de nuestro país, en particular en el nivel de educación superior.

Posteriormente, presentamos aspectos de la teoría Espacio de Trabajo Matemático, ETM; además, la pregunta, el objetivo general y específicos considerados para nuestra investigación. Finalmente, se explica la metodología de la investigación utilizada, la cual orienta nuestro estudio.

1.1 Investigaciones de referencia

En principio, nuestro interés se centra en analizar la práctica docente del profesor universitario que enseña el objeto función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo. Por tanto, las investigaciones de referencia están organizadas de la siguiente manera: investigaciones relacionados al conocimiento y a la organización del profesor universitario de matemática para enseñar la función exponencial, investigaciones relacionadas al estudio del Espacio de Trabajo Matemático de profesores en el dominio del análisis para la enseñanza de algún tópico sobre funciones, finalmente revisamos investigaciones que brindan herramientas teóricas que validen el uso de la teoría Espacio de Trabajo Matemático para el análisis de la práctica docente del profesor universitario. A continuación, presentaremos cada una de ellas, ya que servirán posteriormente de sustento para justificar la pertinencia de la investigación.

Las investigaciones relacionadas con el conocimiento de los docentes universitarios de matemática sobre el objeto función exponencial y a la organización que realizan para su enseñanza, nos proporciona indicios o un acercamiento sobre la concepción o caracterización que tienen los docentes de matemática del primer ciclo sobre la función exponencial, implicando la forma de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje para los cursos que imparte, particularmente cuando enseña este tipo de función.

En ese sentido, la investigación de Vargas (2012) tiene por objetivo analizar la práctica docente de profesores universitarios al enseñar la función exponencial en cursos de precálculo. Para ello, considera analizar las etapas de planeación y gestión de la clase del profesor, donde el marco teórico empleado son el enfoque sociocultural según Gavilán (citado en Vargas, 2012) y la teoría Action Process Object Schema (APOS).

La metodología empleada por Vargas (2012) es de naturaleza cualitativa, realizando un estudio de casos apoyado de un software para analizar datos cualitativos. Los sujetos considerados son dos profesores de distintas universidades colombianas, una pública y la otra privada, en donde el primer profesor, Ernesto, es licenciado en Matemáticas con maestría en Docencia de la matemática, mientras que el otro, Arturo, es ingeniero químico con estudios de maestría en Educación. Los instrumentos para la recolección de datos son una entrevista estructurada inicial, grabaciones de audio y video de las clases seguido de una entrevista semiestructurada después de la observación de clase.

La investigadora realiza y propone una descomposición genética de la función exponencial. A partir de ello analiza la práctica docente de cada uno de los sujetos de investigación. Así encuentra que Ernesto, en relación con el uso de los registros de representación, trata de integrar las expresiones gráficas y simbólicas de los elementos presentes sobre el concepto, con ello se acerca al concepto de iteración, la aproximación y la continuidad. Además, observa que utiliza programas como el Derive para tratar de fortalecer la construcción del significado del concepto en sus estudiantes, independientemente de la forma de representación utilizada; a pesar de ello, el recurso de reconocer a la función exponencial como aquella en donde la variable se encuentra en el exponente concibe alguna dependencia con su representación simbólica.

En ese sentido, la investigadora observa que Ernesto resalta claramente las relaciones entre los elementos matemáticos como una forma de otorgar significado al concepto, entendida como la construcción progresiva de los conceptos, es decir, no solo genera relaciones entre las formas de conocer, sino que la secuencia que orienta su enseñanza pretende conceder los mecanismos de interiorización y encapsulación, apoyándose inicialmente del examen y la acción sobre funciones particulares, para luego favorecer la interiorización y encapsulación de la función exponencial y persistir con la tematización.

Respecto al segundo caso, la investigadora encuentra que, Arturo, modela la descomposición genética independiente de los significados gráficos y simbólicos de los elementos matemáticos del concepto, pero muestra diferencias e independencia entre ambos registros. Además, observa que Arturo considera que el objeto matemático se debe presentar formalmente a través del registro simbólico, mientras que los registros gráficos deben pasar a un segundo plano, así como su capacidad de incluir el significado del concepto en la sesión de enseñanza. Por otro lado, desde el inicio observa que este docente emplea la definición de la función exponencial en un registro simbólico, luego en el transcurso de la enseñanza va permitiendo la identificación del objeto mediante la comprensión de los elementos que lo conforman: base, dominio y rango, monotonía, asíntota, corte con el eje y.

Vargas (2012) concluye que, en uno de los casos, el profesor Ernesto, se destaca el recurso de la iteración y la aplicación transversal del interés compuesto y continuo, incluso recurre intuitivamente a la idea de límite, continuidad y el número e. Mientras que, en el otro caso, del profesor Arturo, inicia con la presentación a través de la definición y la utilidad en algunos ejemplos, por ello, si muestra las nociones matemáticas como objetos o pseudo objetos, entonces no hay una modelación de los mecanismos constructivos. Además, los instrumentos empleados permiten comparar las prácticas y las creencias de los docentes, con la finalidad no solo de establecer las decisiones que toman los profesores para la enseñanza sino sobre lo que ellos están dispuestos a aprender.

Por su parte, Velásquez (2014) estudia las prácticas matemáticas de un grupo de docentes al enseñar la función exponencial a estudiantes primer ciclo de las carreras de humanidades y a estudiantes de ingeniería, con el objetivo de identificar las creencias y una aproximación de la concepción de los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en cursos de pre-cálculo. Para el logro de dicho objetivo, el marco teórico empleado es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e instrucción Matemática (EOS) ya que le permite realizar un análisis de los conocimientos didácticos-matemáticos (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica) de ese grupo de docentes, utilizando el primer nivel del análisis didáctico (análisis de tipos de problemas y sistemas de prácticas), la configuración cognitiva y el significado personal que proporciona esta teoría.

Cabe destacar que, Velásquez (2014), tras hacer una revisión histórica y determinar un significado de referencia de la función exponencial, encuentra que la caracterización de Cauchy, la cual afirma que si f es una función con dominio no nulo en los reales y continua en el punto cero que verifica $f(x+y) = f(x).f(y)$ para todos los reales x e y, entonces, existe un A real positivo, tal que: $f(x) = A^x$ para todo número real x, define la existencia de una función que cumple esta caracterización, denominada función exponencial. Además, el investigador considera que las funciones de la forma $f(x) = e^x$ incluso $f(x) = e^{ax}$ también son funciones exponenciales, mientras que las funciones de la forma $f(x) = b.a^x$, $f(x) = b.e^x$, $f(x) = b.a^{x-h} + k$ podrían denominarse funciones de tipo exponencial pero no función exponencial ya que no cumple la relación funcional $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

La metodología empleada por el investigador es de naturaleza cualitativa constructivista, utilizando el Estudio de Casos. En ese sentido, considera analizar a cuatro profesores que imparten cursos de precálculo en distintas universidades particulares de Lima y que enseñen la función exponencial; de los cuales solo analizan las prácticas matemáticas realizadas por dos de ellos a través de las grabaciones de audio y video de sus sesiones de clase, pero a los cuatro docentes se les aplica una entrevista semiestructurada y un cuestionario a partir del análisis de las prácticas matemáticas observadas, ya que se requería una mejor aproximación a la concepción de los profesores sobre función exponencial.

Cabe resaltar que las preguntas de la entrevista, realizada por el investigador, estaban dirigidas hacia tres criterios: concepción de aprendizaje de la función exponencial, concepción de enseñanza de la función exponencial y concepción de evaluación de la función exponencial. Encontrando que tres de los cuatro docentes no recordaban o no conocían la caracterización de Cauchy, y en algunos casos, tras hacerles recordar, los profesores afirman que no expresan la caracterización de Cauchy en la enseñanza de la función exponencial, debido a que consideran innecesario para enseñarlo en este nivel. Además, los profesores manifiestan que presentan algún modelo exponencial como función exponencial según sus objetivos de clase, pero que es conveniente uniformizar para que no se generen problemas en la evaluación ya que en estas universidades no necesariamente el docente elabora las pruebas de su aula.

Velásquez (2014) deduce que, a partir de las entrevistas y de las configuraciones cognitivas, algunas de las creencias sobre la función exponencial obtenidas de los profesores son: una función exponencial es una función real de variable real que da la idea de crecimiento, todas las funciones que tenga la forma $f(x) = b.a^x$, con a y b positivos y a diferente de 1, son exponenciales, estas funciones solo presentan una asíntota horizontal, su forma básica pasa por uno y que hay otros casos en donde no es forma básica y también pasa por uno, además $h(x) = e^x - 1$ no es una función exponencial. Asimismo, respecto a una aproximación de la concepción de estos profesores, tenemos que una función exponencial está definida por la regla de correspondencia $f(x) = a^x$ con $a > 0,\ a \neq 1$, para todo número real x, con la cual modelan situaciones reales, pero por tiempo solo se dedican a crecimiento poblacional. Manifestando que esta concepción guarda relación con los textos que utilizan para sus clases, confirmando lo determinado en la configuración epistémica.

El investigador concluye que, existe un alto grado de idoneidad ecológica al definir la función exponencial, porque la mayoría de los docentes tienen en cuenta el tipo de estudiante y el contexto en que realiza su enseñanza. Por otra parte, encuentra que existen diferencias entre la definición de la función exponencial que utiliza el profesor y la definición que la mayoría de los textos presentan, aunque hace una excepción con un texto que sí presenta esta caracterización de Cauchy, pero como una consecuencia de la función exponencial y no en sentido inverso como lo enuncia Cauchy. Además, afirma que los profesores participantes de su investigación no muestran la caracterización de Cauchy ni diferencian entre una función exponencial y una función de tipo exponencial, llegando a utilizar solo los modelos relacionados a los problemas que trabajan en clase y según lo que se condicione a su enseñanza.

Por otra parte, las investigaciones relacionadas al estudio del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de los profesores de matemática en el dominio del análisis para la enseñanza de algún tópico sobre funciones, nos permitirán comprender como la teoría ETM permite analizar e interpretar la práctica profesional del docente cuando enseña la función exponencial. Pero, previamente, consideramos necesario precisar algunos conceptos, los cuales permitan comprender los términos de la teoría ETM que se utilizan en las investigaciones de referencia.

Para Kuzniak y Richard (2014), el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), debe entenderse como un ambiente organizado, el cual permita el trabajo de la persona que resuelve problemas matemáticos el dominio correspondiente, ya sea en el Dominio de la geometría, del análisis, de las probabilidades u otro. Además, Kuzniak (2011), distinguen dos planos: el epistemológico y el cognitivo. En el plano epistemológico del ETM se tiene tres componentes: el representamen, los artefactos y el referencial, mientras que, en el plano cognitivo tenemos a las componentes: visualización, construcción y prueba. Estos planos se articulan mediante tres génesis: una génesis semiótica, basada en la Teoría de los registros de representación semiótica de Duval, que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una génesis instrumental, que permite hacer operativos los artefactos en el proceso de construcción; y una génesis discursiva de la prueba que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático.

A la fecha existen investigaciones relacionadas al estudio del ETM de los profesores de matemática en el dominio del análisis, como la investigación realizada por Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena, Mena y Montoya (2017), cuyo objetivo es establecer relaciones entre el ETM de las funciones y de las series de polinomios con sus propiedades (Continuidad, derivabilidad) y con sus distintas representaciones. Para ello, el objeto matemático considerado en la investigación es la función exponencial y el fundamento teórico utilizado es el Espacio de Trabajo Matemático en el que se considera dominios específicos como el de la Geometría, el Análisis, las Probabilidades, entre otros.

Los investigadores centraron su estudio en el dominio del Análisis y sus paradigmas correspondientes (Análisis-Geométrico/Aritmético, Análisis-Calculatorio y Análisis-Real). En cuanto a los tres tipos de ETM (Referencial, idóneo y personal), profundizaron en el ETM Personal de profesores en formación inicial. Asimismo, revisaron el ETM de Referencia de las instituciones para la construcción de la función exponencial.

Tras analizar cómo está organizada la enseñanza de la función exponencial en los currículos de educación secundaria de Francia y Chile, encuentran que en ambos países existe una desarticulación de los contenidos de dicho currículo que orienten hacia una construcción coherente del objeto matemático, lo cual se traslada, como es de esperar, a la formación inicial de profesores de Matemática, ya que este objeto matemático se fundamenta, en diversos cursos, como parte del estudio de otros contenidos, los temas de continuidad, derivada, integración y series; en concordancia con ello, los investigadores señalan que no existe una conexión total que permita la construcción del objeto función exponencial.

En relación a la metodología, Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena, Mena y Montoya (2017) utilizan aspectos de la Ingeniería Didáctica, los sujetos de estudio fueron profesores de Matemática en formación inicial, quince de Chile y dieciséis de Francia, a quienes se les aplica en cuatros sesiones, una serie de secuencias didácticas que les permita, a estos futuros profesores, construir un ETM estructurado y global en el dominio del análisis, en particular, para la función exponencial. En estas secuencias se manifiestan tres momentos: Análisis de las regularidades durante la búsqueda de la función, construcción de la función por aproximación y prueba de la existencia de la función mencionada.

Los investigadores, esperan que, mediante la secuencia didáctica, los futuros profesores logren identificar la función f como una función exponencial y probar, a partir de la serie entera, que f satisface la relación funcional $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Para tal fin, en la primera sesión, los profesores en formación inicial realizaron tareas de modelación a partir de situaciones reales con la finalidad de introducir la ecuación de funcionalidad; en la segunda sesión, ellos buscan soluciones no constantes de dicha relación funcional cuando $f(1)$ es conocido (Propiedades y regularidades); la tercera tiene por finalidad definir f y revelar la existencia de dicha función, suponiendo la regularidad en 0 (Aproximaciones polinomiales); finalmente, en una cuarta sesión, el objetivo era promover circulaciones por los diferentes polos y sus génesis, fortaleciendo su ETM personal.

Kuzniak et al. (2017) concluyen que, la secuencia didáctica utilizada hizo que los estudiantes, profesores en formación inicial, analicen y cuestionen sus conocimientos sobre la función exponencial y sus propiedades. Además, al iniciar esta secuencia a partir del estudio de las propiedades de la función exponencial (funcionalidad, continuidad y derivabilidad), se encontró que no todos los estudiantes reconocían la exclusividad de la ecuación funcional $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ para definir una función exponencial. Por otra parte, en el aspecto gráfico, se evidencia la dialéctica de lo local y global, es decir, lo que ocurre en el primer cuadrante bastaba para predecir lo que sucederá en el infinito. En ese sentido, esta investigación permite la conformación de un Espacio de Trabajo Matemático personal, el cual considera los elementos del análisis.

En concordancia con la investigación anterior, el trabajo realizado por Menares y Montoya (2014) tiene por objetivo estudiar la labor del profesor universitario en el dominio del Análisis, en particular analiza las acciones del profesor al enseñar la continuidad de funciones en la formación inicial de profesores.

Para llevar a cabo dicho estudio, Menares y Montoya (2014) revisan los planes de estudio de seis universidades chilenas formadoras de profesores, enfocándose en la línea del análisis matemático, encontrando que todas, en sus primeros ciclos, pasan por el concepto de continuidad. Asimismo, analizan el currículo de la educación media para comprender el escenario donde el profesor realiza su actividad docente, observando que el tema de continuidad de funciones se utiliza de forma implícita en algunos temas de Análisis, como sucesiones, funciones, entre otros, pero el trabajo de estos temas es netamente algebraico, concluyendo que la continuidad no es considerada un objeto de estudio en este nivel educativo.

El fundamento teórico utilizado por las autoras para su investigación es el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), definido como un ambiente organizado que facilita o permite el trabajo en la resolución de problemas en el dominio correspondiente. En ese sentido, las investigadoras centran su estudio en el dominio del Análisis.

Además, se trata de una investigación cualitativa, donde se muestra el ETM idóneo en el dominio del Análisis de un profesor universitario que imparte cursos de Cálculo en la formación inicial de profesores. Para ello, realizaron entrevistas grabadas, estudio de mallas curriculares de la institución donde labora el profesor universitario, asimismo una revisión del plan de trabajo de dicho profesor. Las preguntas realizadas en la entrevista a los profesores están relacionadas con el teorema de valor intermedio, a partir de la información obtenida buscaron conocer el trabajo que realiza el docente en base a este teorema.

En ese sentido, Las investigadoras estudian el ETM idóneo de profesores de Matemática y para ello realizan una entrevista a un profesor, donde este declaró que introduce el teorema de valor intermedio a través de la representación gráfica de puntos que cumplan ciertas condiciones y realiza su demostración utilizando el axioma del supremo. En ese sentido, las autoras afirman que, al inicio, el profesor activa la génesis semiótica, y pone énfasis en la visualización, después, el docente cambia el trabajo de manera intencional para destacar el componente referencial teórico y provocar una actividad deductiva que refiera a la génesis discursiva.

Por otro lado, encuentran que una de las tareas propuestas en clase por el profesor, sujeto de análisis, consiste en demostrar que la ecuación $sen(x) = 1 - x$ tiene solución cuando $x_0 \epsilon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Además, la acción que realiza el profesor es graficar ambas curvas, activándose la génesis semiótica, luego, utiliza una función auxiliar $f(x) = sen(x) - 1 + x$, como parte de su referencial teórico, y usa el teorema de valor intermedio para demostrar la existencia de $x_0 \epsilon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f(x_0) = 0$ con ello, activa el componente prueba incluida en la génesis discursiva.

Para complementar este estudio, Menares y Montoya (2014) realizan un cuestionario sobre el teorema de valor intermedio basada en una pregunta, aplicada a 20 profesores de secundaria, esta pregunta consistía en demostrar que la ecuación $sen(x) = 1 - x$ tiene solución en $x_0 \epsilon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la cual fue resuelta por estos docentes en formación continua. Luego, tras analizar la información obtenida en la resolución de los cuestionarios, presentan el ETM personal de los profesores, donde destacan que, uno de ellos utiliza la función auxiliar enunciada anteriormente $f(x) = sen(x) - 1 + x$ y el resto resolvió a través de su gráfica; por consiguiente, los profesores tienen potenciada la génesis semiótica, enfatizando la visualización, pero los componentes referencial teórico y prueba de la génesis discursiva se presentan debilitados.

En conclusión, las investigadoras encuentran que, el ETM idóneo del profesor universitario y el personal del docente de escuela están muy distanciados. Por un lado, encuentran que el docente universitario privilegia la génesis discursiva en las tareas que enuncia, pero que el paso de la génesis semiótica a la discursiva resulta muy forzado y no de manera espontánea, además, que no están organizadas o están poco conectadas, mientras que el docente de educación secundaria privilegia la génesis semiótica.

La investigación realizada por Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena, Mena y Montoya (2017), junto al estudio de Menares y Montoya (2014), nos orienta a revisar investigaciones que, por un lado, confirmen la utilidad de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) para nuestra investigación y por otro lado, que nos brinden herramientas teóricas que permitan describir e interpretar el Espacio de Trabajo Matemático de los profesores a partir del análisis de su práctica docente.

En ese sentido, la investigación realizada por Espinoza (2017) relaciona el ETM con el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK), lo cual nos orienta para realizar un mejor análisis de la práctica en aula del docente universitario. Esta investigación tiene por objetivo identificar las relaciones entre los componentes del ETM y los subdominios del MTSK. Para ello, pretendió analizar los elementos de ambos modelos teóricos que faciliten dicha articulación, centrando la atención en el profesor y su conocimiento sobre el objeto matemático: Función.

Para lograr el objetivo mencionado, los marcos teóricos utilizados por Espinoza (2017) son el MTSK y el ETM. De este último constructo teórico, se conocen tres tipos de ETM, el ETM de referencia en base a criterios matemáticos, el ETM idóneo que acondiciona el ETM de referencia para que el sujeto se comprometa con la tarea matemática y el ETM personal en el cual se centra en sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas propias, pero dicha investigación centra su atención en el ETM idóneo y el personal y cómo estos espacios de trabajo se relacionan con los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas.

La metodología utilizada por Espinoza (2017) es el estudio de casos del tipo instrumental, debido a que necesita comprender los conocimientos que moviliza el profesor de Matemáticas durante la enseñanza. Por ello, el caso de estudio es un profesor, llamado Arturo, de quien se registraron y analizaron, en video, nueve de sus clases impartidas a estudiantes de primer año de educación media en Chile, en donde el objeto de enseñanza es el concepto de función. De los videos, se seleccionó algunos fragmentos de clase en donde se pueda identificar *indicios* o *evidencias* de conocimiento especializado del profesor relacionado con elementos del ETM idóneo o personal del profesor.

En su estudio, sostiene que el conocimiento del concepto de Función del profesor Arturo está orientado al planteamiento de tareas, además es explicada como una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, donde a uno le corresponde únicamente otro mediante una ley; con este concepto de función, el investigador observó que existe una relación entre el conocimiento de la enseñanza de la Matemática y el ETM idóneo del profesor, en donde se presenta la definición y analogías con el objetivo que los estudiantes comprendan el concepto de Función.

El investigador, tras analizar los ejemplos realizados por Arturo, señala que, en el primer ejemplo, sobre la prueba de la unicidad de la imagen, se identifica el conocimiento del tema por parte del profesor, lo cual se relaciona con el polo referencial y artefacto en el plano epistemológico del ETM personal del profesor. En un segundo ejemplo, donde no es función, el investigador encontró que los razonamientos de validación utilizados por Arturo son considerados como activaciones de las génesis discursivas en el ETM personal del profesor relacionado con el conocimiento de su práctica matemática. Por tanto, al observar la definición del concepto de Función y los ejemplos dados por el profesor, el investigador afirma que se activa la génesis discursiva e instrumental y se evidencia su conocimiento del tema (Definiciones, propiedades y fundamentos), su conocimiento de la práctica matemática (Maneras de demostrar) y conocimiento de la enseñanza de la Matemática (Uso de analogías).

Adicionalmente, Arturo, sujeto de dicha investigación, presenta la tarea de graficar la función afín $f(x) = x + 3$ para articular las representaciones algebraica y cartesiana, identificar una conexión entre el objeto función afín (del Análisis) y el objeto recta euclidiana (de la Geometría euclidiana). Dicha articulación o conversión entre las distintas representaciones da evidencia de su conocimiento del tema y de su ETM personal (activa la génesis semiótica)

En una segunda tarea sobre el cálculo de pre imágenes con funciones representadas algebraicamente, por ejemplo $f(x) = 5x + 1$, el investigador estudia el conocimiento del profesor sobre la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita para la solución de la tarea, evidenciando su conocimiento del tema y de la estructura matemática (conexión entre contenidos), que es utilizado para el diseño del ETM idóneo (activa su génesis instrumental y discursiva) y da indicios del conocer las características del aprendizaje (formas en que los estudiantes interactúan con el contenido).

Espinoza (2017) concluye que, los episodios de clases permiten identificar la génesis que activa el profesor Arturo al realizar las tareas y los fundamentos de sus procedimientos, estableciendo relaciones entre el ETM y MTSK (ver tabla 1). Además, indica que la realización de tareas propuestas adicionalmente por el profesor permitió la utilización de la definición de Función para validar su conocimiento del tema y de la práctica matemática, el uso y conocimiento sobre ecuaciones para el cálculo de imágenes y pre imágenes (Conocimiento de la Estructura de la Matemática) y algunos indicios sobre las relaciones que se pretende entre objetos matemáticos (función afín y recta euclidiana). Sin embargo, el investigador al poner mayor atención en los componentes específicos de ambos modelos, queda pendiente profundizar el análisis y la relación en su totalidad entre los modelos, así como los aportes que ello pueda dar.

Tabla 1.

Relaciones entre los componentes del ETM y los subdominios del MTSK.

Episodio observado	ETM	MTSK
Definición del concepto de función	Activa la Génesis Discursiva e Instrumental	Da evidencia del Conocimiento de los Temas (Definiciones), Conocimiento de la Práctica Matemática (Formas de demostrar) y Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (Uso de analogías)
Construcción de ejemplos y no ejemplos	Activa la Génesis Instrumental: artefacto	Da evidencia del Conocimientos de los Temas (Propiedades y fundamentos)
Distintas representaciones de la función	Activa la Génesis Semiótica: representamen	Da evidencia del Conocimientos de los Temas (Registros de representación)
Resolución de ecuaciones, valorización	Activa la Génesis Instrumental: artefactos	Da evidencia del Conocimientos de los Temas (procedimientos), Conocimiento de la Estructura de la Matemática (conexión auxiliar) y da indicios del Conocimiento de las características del Aprendizaje de las Matemáticas (formas de interacción de los estudiantes con el contenido)

Resolución de ecuaciones de la forma *ax*+*b*=0 Cantidad de puntos para graficar una recta	Génesis Discursiva: referencial	Da indicios de Conocimiento de la Estructura de la Matemática (conexiones transversales)

Fuente: Espinoza (2017, pp. 447-448)

Finalmente, Espinoza (2017) afirma que, permanecen ideas abiertas sobre el conocimiento del profesor acerca del ETM personal de sus estudiantes y cómo este conocimiento mejora el conocimiento didáctico del profesor respecto al contenido matemático.

Por otro lado, Henríquez (2017) nos muestra la importancia de la teoría Espacio de Trabajo Matemático, la cual puede ser utilizada como una herramienta teórica para estudiar la práctica docente. En consecuencia, el objetivo de su investigación es crear una herramienta tecnológica que permita analizar la actividad en el aula del profesor de Matemática y las circulaciones en su ETM idóneo.

En ese sentido, la investigadora describe la forma de reconstruir el ETM del profesor en clase a partir del uso de la herramienta tecnológica creada. Además, utiliza como sustento teórico al ETM para realizar la aplicación del instrumento y su posterior análisis, particularmente, describir y analizar las circulaciones en el ETM idóneo del profesor en clase a partir de la información obtenida

Respecto a los tres tipos de ETM, tanto de referencia, idóneo y personal, la investigadora centra su estudio en el ETM idóneo del profesor en el dominio de la Geometría durante su práctica en aula. Además, respecto a los paradigmas geométricos como la Geometría Natural, Geometría Axiomática Natural y Geometría Axiomática Formal, ella busca que al analizar el ETM del profesor se llegue a definir cuál es el paradigma geométrico que incide en mayor frecuencia en su práctica docente.

La investigación de Henríquez (2017) es de corte cualitativo y la metodología utilizada es el estudio de casos, ya que como la población objetivo eran profesores de nivel secundario, se tomó como referentes a estudiantes de últimos ciclos de una universidad chilena, quienes se encuentran en el tercer curso de su etapa de prácticas profesionales. Ellos impartían clases a estudiantes de primero de medio (catorce años), cuya finalidad de sus clases era utilizar la congruencia de triángulos para demostrar propiedades en polígonos. Cabe destacar que en esta investigación solo se menciona el análisis de la prueba sobre propiedades del paralelogramo. Para ello, la investigadora, realiza una observación no participante de clase, la cual es grabada, y analiza las producciones de estos futuros docentes.

Lo relevante para nuestro estudio es la herramienta tecnológica creada y usada por la investigadora, en particular las preguntas que utiliza, ya que le permite realizar anotaciones e interpretaciones sobre las acciones de los docentes en clase. En ese sentido, esta herramienta fue creada con preguntas que permitan analizar e interpretar el ETM del profesor (ver tabla 2) para llegar a reconstruir su ETM idóneo, pero la investigadora advierte que el usuario debe tener un conocimiento adecuado sobre las génesis y componentes de este constructo teórico (ETM), ya que los resultados deben ser interpretados por dicho usuario/investigador. Al final, esta herramienta muestra un resumen de la circulación, tabla de síntesis y un resumen de los planos verticales.

Tabla 2.

Modelo de interpretación del ETM según componentes, génesis y respuestas.

Componente	Pregunta	Opciones de respuesta
	Grupo 1	
Génesis semiótica	1: ¿Qué registro semiótico privilegia?	Registro algebraico / Registro figural / Registro gráfico / Tabla / Lenguaje natural / Registro numérico
Génesis semiótica	2: ¿Otros registros semióticos?	Sí / No
Visualización	3: ¿Se activa el proceso de visualización?	Sí
Visualización	4: ¿Qué tipo de visualización?	Icónica (botánico) / Icónica (topógrafo) / No-icónica (constructeur) / No-icónica (inventeur-bricoleur) / Otra
Representamen	5: ¿Cómo aparecen las nociones matemáticas?	Objeto / Herramienta
	Grupo 2	
Artefactos	6: ¿Hay uso de artefactos?	Sí
Génesis instrumental	7: ¿Cómo se usa el instrumento?	Medir / Construir / Fórmula (artefacto simbólico)
Construcción	8: ¿Qué tipo de artefactos?	Material / Tecnológico / Simbólico
	Grupo 3	
Génesis discursiva	9: ¿Hay expansión discursiva?	Sí
Prueba	10: ¿Qué forma de expansión discursiva?	Argumentación / Demostración / Explicación / Prueba empírica
Referencial	11: ¿Qué elemento del referencial?	Propiedad / Definición

Fuente: Henríquez (2017, p. 110)

En síntesis, se piensa que para la realización de la presente investigación es importante resaltar los aportes de Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena, Mena y Montoya (2017) y Menares y Montoya (2014), aunque estudian dos objetos matemáticos distintos, el primero abordó la función exponencial y el segundo a la función continua, ambos reflejan la importancia de continuar trabajos sobre el ETM idóneo y personal en el dominio del análisis de profesores, ya sea de formación inicial o continua, la cual orienta a nuestra investigación.

Por otro lado, en las investigaciones de Espinoza (2017) y Henríquez (2017), se observa que el primero articula los tipos de ETM con los dominios del MTSK, estableciendo relaciones para un mejor análisis del objeto función así como lo que el docente concibe para su clase. Mientras que, la otra investigación crea y utiliza un instrumento tecnológico para analizar e interpretar el ETM idóneo del profesor, así esta herramienta o las preguntas presentes en ella nos va a permitir realizar una descripción más coherente sobre el ETM idóneo en el dominio del análisis que organizan los profesores para enseñar la función exponencial. En ambos se presenta la utilidad de la Teoría Espacio de Trabajo Matemático para analizar la práctica en aula del profesor.

Por tanto, las investigaciones referidas, nos permitirán a continuación establecer la importancia y fundamentar la necesidad de realizar trabajos en esta línea de investigación.

1.2 Justificación

Las investigaciones de referencia presentadas, en la sección anterior, muestra la pertinencia de nuestra investigación. En ese sentido, Vargas (2012) respalda la importancia de analizar la práctica en aula del profesor de matemática al enseñar la función exponencial, mientras que, Velásquez (2014) considera importante identificar el conocimiento que tiene el profesor sobre este tipo de función durante su práctica docente. A partir de ello, consideramos que es necesario analizar los conocimientos y organización que realiza el docente universitario para enseñar algún tópico sobre funciones, para tal fin hemos seleccionado al objeto función exponencial, ya que según Derouet, Kuzniak, Montoya, Páez, Rousse, Vandebrouck, Verdugo y Vivier (2016),

> Desde el punto de vista del contenido matemático, el énfasis está en el juego entre lo discreto y lo continuo, que es una de las características constitutivas del análisis. […] a través de la introducción de funciones exponenciales, la dialéctica entre el juego discreto y continuo aparece de manera crucial (traducción nuestra, p. 1)

Respecto a la práctica en aula del docente universitario de matemática que pretendemos analizar, resulta necesario revisar cómo él organiza los conocimientos y las tareas cuando va a enseñar la función exponencial. En ese sentido, consideramos pertinente utilizar aspectos del Espacio de Trabajo Matemático, ETM, propuesto por Kuzniak (2011), para comprender el ETM idóneo del profesor, el cual estructura la forma en cómo el conocimiento será enseñado, pero que es dependiente de su ETM personal, en donde se muestra las preferencias matemáticas del profesor durante la resolución de problemas, esto es respaldado por Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena, Mena y Montoya (2016) y Menares y Montoya (2014) en sus respectivas investigaciones.

En particular, en la investigación realizada por Kuzniak et al. (2016) analizan el ETM de profesores en formación inicial y su objeto de estudio es la función exponencial, la cual nos interesa investigar pues consideran que,

> En el caso de la función exponencial es elemental el *espacio matemático* que se observa, esto es, tabular puntos (discreto) y luego obtener una curva representativa (continuo) lo que muchas veces es apoyado por un software (artefacto). Para su construcción es necesario el conocimiento de otras nociones (límites, continuidad,…) del modo de comprender la continuidad (y otras propiedades) de la función exponencial (Kuzniak et al. 2016, p. 51).

Por otro lado, las investigaciones de Espinoza (2017) y Henríquez (2017) revelan que los constructos presentes en la teoría del Espacio de Trabajo matemático permiten realizar un análisis integral de la práctica docente de profesores en formación continua.

En ese sentido, Espinoza (2016) respalda que, la teoría Espacio de Trabajo Matemático, con apoyo del MTSK, permite analizar la práctica docente por medio de un contraste entre el conocimiento del profesor con las génesis del ETM que emergen durante la organización de conocimientos y tareas que proponen para su clase, logrando describir el ETM idóneo y personal del profesor. Asimismo, Henríquez (2017), también considera oportuno utilizar el ETM, para ello elabora una herramienta tecnológica basada en preguntas que facilitan recolectar información sobre los conocimientos y actividades que organiza el profesor, lo cual le permite interpretar cuál es el ETM idóneo que éste manifiesta.

En general, las investigaciones anteriores resaltan la importancia de la teoría Espacio de Trabajo Matemático para analizar la práctica docente de profesores en formación inicial o continua, describiendo e interpretando cuál es el ETM personal o idóneo de los profesores. Sin embargo, no se han encontrado investigaciones que, en particular, analicen el ETM de profesores universitarios que enseñan matemáticas a estudiantes de humanidades del primer ciclo. Por ello, resulta pertinente realizar un estudio exhaustivo sobre el ETM idóneo del profesor universitario al enseñar función exponencial a este tipo de estudiantes.

Como precisamos analizar la práctica de este tipo particular de docente universitario, primero examinaremos la presencia de los cursos de matemática en los planes de estudio de dos universidades peruanas (ver tabla 3) en donde se enseñe la función exponencial a estudiantes de los primeros ciclos, como en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y en la Universidad Privada del Norte (UPN).

Tabla 3.

Cursos de Matemática en los primeros ciclos.

Curso	Especialidad	Ciclo	Universidad
Matemática 1	Gestión y Alta Dirección	1	Pontificia Universidad Católica del Perú
Matemática Básica	Comunicación y Periodismo	2	Universidad Privada del Norte

Fuente: Plan de Estudios de Estudios generales letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú. (Recuperado de http://www.pucp.edu.pe)
Plan de Estudios de la carrera de Administración y Negocios Internacionales de la Universidad Privada del Norte. (Recuperado de http://www.upn.edu.pe)

Según la información obtenida, verificamos que los cursos de Matemática forman parte de los ciclos correspondientes al primer año de las carreras universitarias mencionadas, por tanto, es indispensable que estas universidades consten con docentes que impartan las clases referidas a estos cursos. (Ley 30220, 2014, art. 82)

Por otro lado, para comprobar la inclusión del objeto función exponencial, se analizó el sílabo del curso Matemática 1 de Estudios Generales Letras de la PUCP correspondiente a la carrera de Gestión y Alta Dirección, de igual manera se analizó el silabo de Matemática Básica de la carrera de Comunicación y Periodismo de la UPN, en ambos sílabos se encontraron similitudes respecto a los contenidos matemáticos necesarios en su formación profesional.

Tabla 4.

Silabo de matemáticas que incluye función exponencial.

Universidad	Curso	Unidad
Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP.	Matemática 1	<u>*Unidad 4: Funciones reales de variable real*</u> Función afín Función cuadrática. Función racional con numerador constante o lineal y denominador lineal Función raíz cuadrada y función raíz cúbica ***Función exponencial.*** Caso particular: Función exponencial natural (base e) Función logarítmica. Caso particular: Función logaritmo natural Ecuaciones e inecuaciones exponenciales Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas Álgebra de funciones Funciones definidas por tramos Función compuesta Aplicaciones a la Gestión y la Contabilidad

Universidad Privada del Norte-UPN.	Matemática Básica	*Unidad 1: Funciones reales de variable real* Funciones reales de variable real: dominio, rango e interpretación gráfica de una función. Función lineal. Función constante. Función identidad. Función lineal por tramos. Representación e interpretación gráfica. Aplicaciones. Funciones cuadráticas. Interpretación gráfica. Problemas de optimización relacionados a su especialidad. **Funciones exponenciales.** Interpretación gráfica. Aplicaciones. Funciones logarítmicas. Definición. Representación e interpretación gráfica. Aplicaciones. Álgebra de funciones: adición, sustracción, multiplicación y división. Aplicaciones. Composición de funciones. Determinación de la regla de correspondencia de la función compuesta. Dominio de la función compuesta. Problemas de aplicación de la composición de funciones. Problemas de aplicación relacionados a ingresos, costos y utilidades. Inecuación lineal con dos variables. Representación gráfica en RxR. Sistema de inecuaciones lineales con dos variables. Introducción a programación lineal: optimización. Método gráfico.

Fuente: Silabo de Matemática 1 de la Facultad de Gestión y Alta dirección, Pontificia Universidad Católica del Perú (Recuperado de http://www.pucp.edu.pe)
Silabo de Matemática Básica de la Facultad de Negocios, Universidad Privada del Norte.

Como se observa en la tabla 4, encontramos que en una unidad de cada silabo existen contenidos en común, como la función exponencial, la cual es trabajada en el curso de Matemática 1 de la carrera de Gestión y alta dirección de la PUCP, así como en el curso de Matemática Básica de la carrera de Comunicación y Periodismo de la UPN. Así, encontramos que la función exponencial se ubica en la unidad de funciones, donde previamente se trabaja el concepto de función, funciones elementales, como la lineal, afín, cuadrática y polinómicas para luego abordar la función exponencial. Además, esta información nos permite establecer otra justificación sobre la elección del objeto función exponencial para nuestro estudio, entendiendo que, este tipo de función permite modelar situaciones relacionadas a estas carreras, lo cual es respaldado por los libros presentes en la bibliografía de matemática 1 de la PUCP, como por ejemplo el libro de Arya, Lardner e Ibarra (2009), en él se muestra la utilidad de las funciones exponenciales para modelar situaciones de interés compuesto, de interés continuo, crecimiento o decrecimiento poblacional, entre otras.

Por lo tanto, en concordancia con las investigaciones de referencia y los planes de estudios de las tres instituciones de nivel superior presentadas, es pertinente realizar esta investigación centrándonos en el ETM idóneo de profesores universitarios cuando enseñan la función exponencial.

Es necesario indicar que, hasta el momento, en la revisión de investigaciones en bases de datos *online* no hemos encontrado trabajos sobre el Espacio de Trabajo Matemático de docentes universitarios que enseñen la función exponencial a estudiantes del primer ciclo de formación para las carreras de humanidades.

Por tal motivo, se presenta a continuación el fundamento teórico, así como la pregunta y objetivos de la investigación.

1.3 Aspectos del Espacio de Trabajo Matemático

Nuestra investigación busca realizar un análisis exhaustivo sobre el Espacio de Trabajo Matemático del profesor universitario cuando enseñanza la función exponencial a estudiantes del primer ciclo de las carreras de humanidades. Por lo tanto, la base teórica que fundamenta nuestra investigación es el Espacio de Trabajo Matemático, ETM, este modelo fue desarrollado por Kuzniak (2011), como una ampliación de la teoría denominada Espacio de Trabajo Geométrico introducida por Houdement y Kuzniak (1999), el cual permite analizar el trabajo matemático de un individuo cuando resuelve problemas.

A continuación, presentaremos algunas reflexiones básicas, Kuzniak y Richard (2014) refieren al trabajo matemático como una actividad racional dirigida por un objetivo específico, el cual puede ser apoyado por el uso de instrumentos o artefactos determinados, desde una mirada epistemológica, dicho objetivo estará centrado en los objetos estudiados por los matemáticos. En relación con ello, Kuzniak, Montoya y Vivier (2016, p. 237) manifiestan que, "los objetos y los resultados producidos por el trabajo matemático se distribuyen en dominios que […] permiten dar cuenta de la diversidad de la actividad matemática". Por tanto, podemos inferir que, desde un punto de vista didáctico, el trabajo matemático es una actividad racional que tiene por objetivo la construcción y comprensión de objetos matemáticos a partir de la resolución de problemas, según el dominio al que pertenece.

De lo anterior, resulta necesario reconocer que los dominios matemáticos se determinan mediante la organización de conocimientos que cumplan ciertos requerimientos de prueba para su constitución. Además, según Montoya y Vivier (citados en kuzniak et al., 2016) la diferenciación de los dominios está relacionada a la naturaleza de los objetos, por tanto, consideran el dominio de aritmética, álgebra, geometría, análisis, probabilidades y estadística; aunque esta lista no es absoluta.

Para Kuzniak et al. (2016), un dominio matemático es interpretado de diversas formas para su enseñanza, y dependerá de las transposiciones didácticas realizadas por las instituciones educativas. Estas interpretaciones difieren sobre un mismo dominio matemático dependiendo de la evolución de las matemáticas y de las instituciones educativas. Por ello, Kuzniak et al. (2016), han introducido un enfoque por medio de paradigmas para tener en cuenta esta diversidad, en donde “un paradigma designará para nosotros el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico” (p. 238). Un primer alcance sobre los paradigmas presentes en un dominio matemático fue realizado por Houdement y Kuzniak (citado en Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016) quienes introdujeron tres paradigmas para la geometría (ver figura 1).

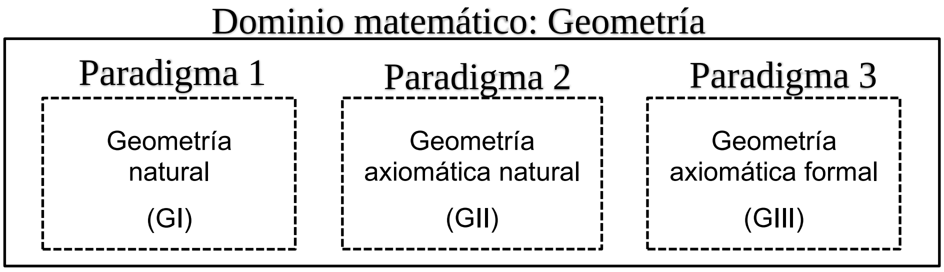


Figura 1. Paradigmas de la geometría.

Por otra parte, Kuzniak Tanguay y Elia (2016) afirman que, en un contexto matemático, pueden coexistir distintos paradigmas en una misma institución, estos permitirán describir y caracterizar el trabajo matemático que realiza el individuo al construir un saber a partir de la resolución problemas.

En ese sentido, Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) declara que la resolución de problemas es fundamental para el trabajo realizado por los matemáticos y para la enseñanza de las matemáticas, además afirman que “a través de los problemas, […] los estudiantes van a poner en práctica saberes y técnicas dependiente del paradigma utilizado” (pp. 238-239). Por consiguiente, todo individuo que resuelve problemas, con el objetivo de construir su propio conocimiento matemático, tendrá acceso o un acercamiento a la obra matemática que resulta del trabajo realizado por los matemáticos.

Para comprender la importancia de los problemas, los investigadores especifican la necesidad de establecer la noción de tarea a partir de los aportes de Sierpinska (citada en Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016), quien "utiliza la expresión tarea matemática en un amplio sentido para referirse a cualquier tipo problema matemático, con hipótesis y preguntas que son claramente formuladas, las cuales se sabe que podrán resolverse por los estudiantes en un tiempo predecible” (traducción nuestra, p.724).

De lo anterior, resulta importante considerar que la organización y resolución de la tarea permite observar el trabajo matemático que realiza los individuos al resolver ejercicios, problemas o preguntas que faciliten la construcción del conocimiento matemático puesto en juego, todo ello según el dominio al que esté ligado la tarea y los paradigmas que emerjan o que se pretendan que surjan durante la resolución. Además, se debe considerar al trabajo matemático como un conjunto de acciones que realiza un individuo al resolver una tarea propuesta. En correspondencia a ello, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016), declaran que las tareas propuestas al individuo y las actividades que éste realiza le permitirán una mejor comprensión del conocimiento matemático pretendido, por tanto, el trabajo matemático dependerá del dominio y de su relación con las acciones que el individuo realiza.

En consecuencia, los investigadores pretenden establecer una relación entre aspectos epistemológicos, como conocimientos matemáticos, y aspectos cognitivos, como las actividades que el individuo realiza al resolver las tareas o problemas, ambos aspectos son necesarios para la construcción del Espacio de Trabajo Matemático, ETM, el cual es detallado a continuación.

Espacio de trabajo matemático (ETM)

Para Kuzniak y Richard (2014), "el espacio concebido de esta manera designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos" (p.6). Por tanto, el ETM debe ser comprendido como un ambiente organizado que permite el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos según el dominio matemático que corresponda.

En ese sentido, según sea el caso, para Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), este individuo puede ser un experto ideal (profesional matemático), un profesor, o incluso, un estudiante. Además, aclaran que los problemas matemáticos que los individuos resolverán no son parte del ETM, sin embargo, deben ser considerados como su razón de ser, debido a que el ETM debe ser el medio para la resolución de los problemas, así como su catalizador, porque permite estructurar el ETM a nivel institucional y personal.

Por otro lado, Kuzniak (2011) declara que, un individuo adquiere la comprensión de un saber cuándo transita por dos planos, uno de naturaleza epistemológica y otro de naturaleza cognitiva, el primero estrechamente relacionado con los contenidos matemáticos del objeto de estudio y el segundo relacionado con los procesos mentales que realiza el sujeto cuando resuelve problemas matemáticos. Por consiguiente, considera que en el ETM se debe establecer el principio de articulación entre el plano epistemológico y el cognitivo como consecuencia del trabajo matemático, los cuales se describen a continuación.

El plano epistemológico

Los autores consideran que este plano está constituido por tres componentes que se interrelacionan entre sí (ver figura 2), los cuales se caracterizan con el propósito de describir el trabajo matemático en su dimensión epistemológica, organizados por criterios estrictamente matemáticos, y que según Kuzniak, et al. (2016, p.247) "permite estructurar la organización matemática del ETM dándole un sentido que […] los paradigmas ayudan a definir". Estos componentes son: el *representamen* (signos semióticos), los *artefactos* (materiales o simbólicos) y un *referencial teórico* (definiciones, propiedades y teoremas).

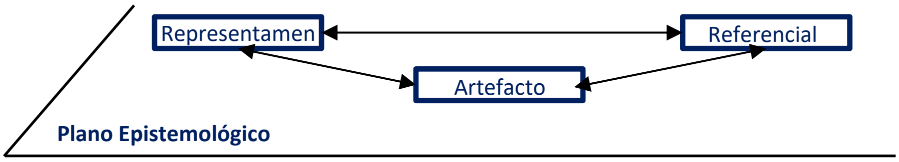


Figura 2. Componentes del plano epistemológico.

El signo o *Representamen*, al estar relacionado con los objetos concretos y tangibles dependientes del dominio matemático y de las estrategias de enseñanza establecidas, es concebido por Kuzniak, Tanguay y Elia (2016), como algo que representa o refiere a un objeto matemático en algún aspecto o su totalidad. Por tanto, un signo puede ser un dibujo geométrico, símbolos o expresiones algebraicas, incluso gráficas, entre otras. Además, desde una concepción de las matemáticas basada en representaciones semióticas, estos elementos pueden estar organizados en registros de representación semiótica de Duval (citado en Kuzniak et al., 2016) y la interacción entre registros puede relacionarse con los grupos semióticos de Arzarello (citado en Kuzniak et al., 2016).

Los *artefactos*, a partir de los aportes de Rabardel (citado en Kuzniak et al., 2016), los autores refieren a un conjunto de objetos materiales o sistemas simbólicos que se transformarán por intervención humana. Respecto a los objetos materiales, estos pueden ser instrumentos de dibujo o algún software. Pero, en el caso de los sistemas simbólicos, para no confundir con otros componentes del plano epistemológico, los autores afirman que los únicos sistemas simbólicos considerados serán los algoritmos relacionados a técnicas de cálculo, como la división euclidiana, a artefactos materiales tradicionales, como el ábaco o las tablas trigonométricas, o bien a técnicas de la construcción, como las que se realiza con regla y compás, los cuales su validación no requiere preocupación.

El *referencial*, considerado por Kuzniak (2011) como un sistema teórico constituido por definiciones y propiedades sobre algún objeto matemático, los cuales permiten interpretar los contenidos de las demás componentes durante el trabajo matemático. En consecuencia, Kuzniak et al. (2016) afirman que este conjunto de propiedades fundamentará el discurso deductivo de la prueba matemática, por ello es necesario que se organicen en coherencia a la tarea que resuelve el individuo y que hayan sido objeto de alguna institucionalización.

El plano cognitivo

Si concebimos que la matemática es esencialmente una actividad humana, resulta necesario comprender cómo los individuos utilizan y se apropian de los conocimientos durante la resolución de problemas. Por ello, Kuzniak et al. (2016) consideran a un segundo plano centrado en la persona y en la articulación cognitiva de las componentes del ETM, en ese sentido presentan tres procesos estrechamente relacionados a los componentes del plano epistemológico (ver figura 3), los cuales son: la *visualización* asociada a procesos de interpretación de los signos, la *construcción* dependiente de los artefactos utilizados, y la *prueba* a partir de validaciones producidas en base al marco teórico de referencia.

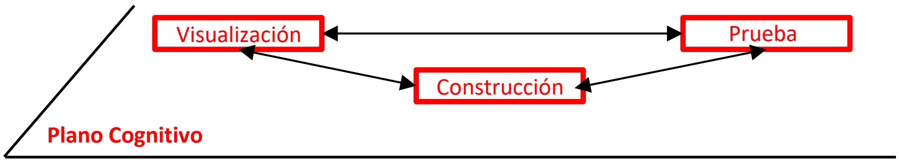


Figura 3. Componentes del plano cognitivo.

La *visualización*, para Kuzniak y Richard (2014) este proceso cognitivo se tiene que diferenciar de la simple percepción de los objetos, para ser comprendida como el proceso que permite la estructuración de las informaciones dadas por los signos o *representamen*. En ese sentido, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) declaran que este proceso está relacionado con la interpretación de signos y la construcción interna de la representación de los objetos involucrados.

La *construcción*, concebido para Kuzniak y Richard (2014), como un proceso determinado por los instrumentos utilizados, y que según Kuzniak, Tanguay y Elia (2016), está en relación con las acciones producidas por el uso de los artefactos. Además, los autores indican que dichas acciones no son necesariamente resultado de una producción concreta o tangible, como el caso de un dibujo o un escrito, sino que también puede comprender la observación, exploración o experimentación.

Por último, el proceso de *Prueba* que produce argumentaciones, y que según Kuzniak et al. (2016), debe estar fundamentado y organizado deductivamente a partir de un marco teórico de referencia para su demostración, además de ser admitida por una comunidad matemática.

Las Génesis de los Espacios de Trabajo Matemático

Para Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), es posible articular, de manera operatoria, el plano epistemológico con el plano cognitivo a partir de las génesis producidas como consecuencia del trabajo matemático, las cuales articulan un proceso del plano cognitivo con un componente del plano epistemológico, así se estructura el ETM (ver figura 4). Por consiguiente, los autores consideran tres génesis: la *génesis semiótica* para la *visualización* y *representamen*, la *génesis instrumental* para la *construcción* y *artefactos*, por último, la *génesis discursiva* para *prueba* y *referencial*.

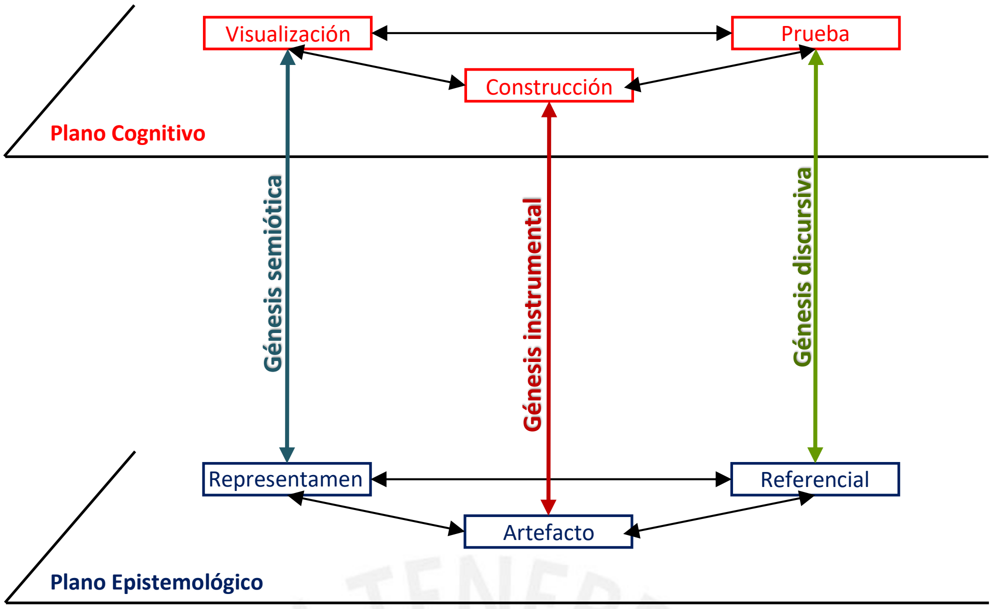


Figura 4. Espacio de trabajo matemático y sus génesis.

Fuente: Kuzniak et al. (2016, p.246)

La *génesis semiótica*, es considerada por Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) como “el proceso asociado a los signos y representamen […], que explica la relación dialéctica entre las perspectivas sintáctica y semántica de los objetos matemáticos, desarrollados y organizados a través de sistemas de representación semiótica” (traducción nuestra, p.726). En consecuencia, esta génesis proporciona al representamen percibido el estado de objeto matemático operatorio para establecer conexiones entre la función y la estructura de los signos referidos.

Para especificar esta génesis, Kuzniak et al. (2016) consideran un proceso circular, de ida y vuelta, entre el *Representamen* y el proceso de *visualización*, por ello, en un primer sentido, establecen un proceso de decodificación o interpretación, mientras que, en sentido inverso, un proceso de codificación o instanciación (ver figura 5). El primer proceso parte del representamen dado y utilizado para el trabajo matemático, el cual se direcciona a la conciencia cognitiva del individuo a través de la percepción, permitiendo la deducción de los significados que otorgan los signos o representamen. Mientras que, en el sentido inverso, todo inicia en la mente del individuo que realiza el trabajo matemático y se dirige hacia la presentación de un representamen, debido a que éste permitirá la exteriorización de las representaciones mentales que tiene el individuo respecto al objeto matemático asociado durante el trabajo matemático.

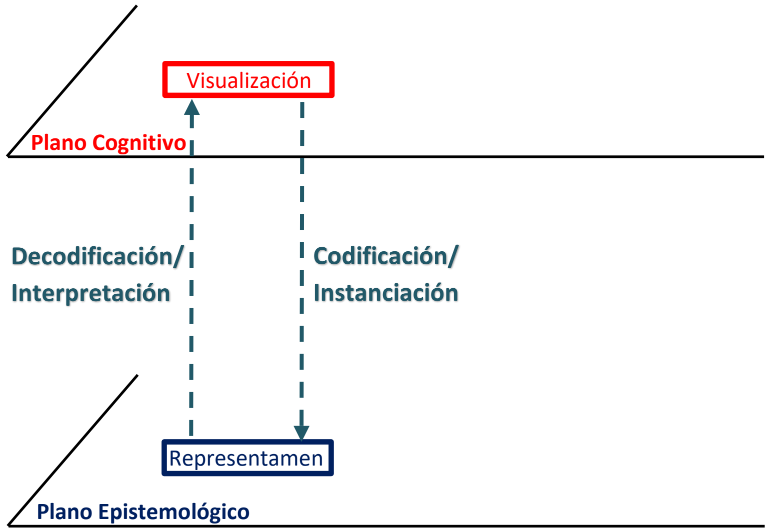


Figura 5. Posibles especificaciones de la génesis semiótica.

Fuente: Kuzniak et al. (2016, p.726)

La *génesis instrumental*, que según Kuzniak y Richard (2014) “hace funcional los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático” (p.11).

Los investigadores consideran necesario establecer la noción de *instrumento* distinguido por Rabardel (citado en Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016), quien indica que todo instrumento es definido por un artefacto y sus esquemas de uso. Además, declaran que la palabra instrumento tendrá un valor cognitivo, en el sentido que, un artefacto se transforme en un instrumento cuando el individuo que realiza el trabajo matemático ha adquirido o desarrollado esquemas para su uso. Siguiendo esa distinción, Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016) concluyen que “un instrumento no se da sino que debe ser desarrollado por el sujeto” (p.864, traducción nuestra). De ello, la génesis instrumental puede ser comprendida como el proceso de transformación de un artefacto a instrumento o como el proceso de evolución del instrumento a partir del desarrollo de sus esquemas de uso.

Para describir está génesis, los investigadores consideran oportuno presentar algunas diferencias entre herramienta e instrumento, según Kuzniak et al. (2016) todo componente del plano epistemológico que tiene una utilidad potencial para resolver un problema determinado puede ser considerado una herramienta, mientras que, en el plano cognitivo, se refiere a un instrumento cuando un individuo interactúa con una herramienta con el fin de abordar una tarea matemática de manera efectiva. Por otra parte, como una herramienta y un artefacto tienen la misma naturaleza epistemológica, los autores advierten que se conserven las restricciones sobre el significado de artefacto para no confundirlo con las demás componentes epistemológicas del ETM.

Los investigadores resaltan los aportes de Artigue (citada en Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016) para especificar la génesis instrumental en el ETM como un proceso que se desarrolla en dos sentidos, uno que puede originarse en el artefacto y se direcciona al proceso de construcción, al cual denomina instrumentación, mientras que en el sentido inverso, lo denomina instrumentalización (ver figura 6).

En específico, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) consideran que, si la instrumentación inicia en el artefacto hacia las acciones que se le solicitan, entonces describe el proceso de manipulación o uso que realiza el usuario con el artefacto o con el instrumento definido por el artefacto, adaptando sus esquemas de uso a las herramientas proporcionadas por el artefacto. Por otro lado, la instrumentalización se origina desde el cumplimiento dirigido por el usuario durante la construcción hasta la elección adecuada de una herramienta, incluso se pueden producir algunas adaptaciones del artefacto a las acciones solicitadas.

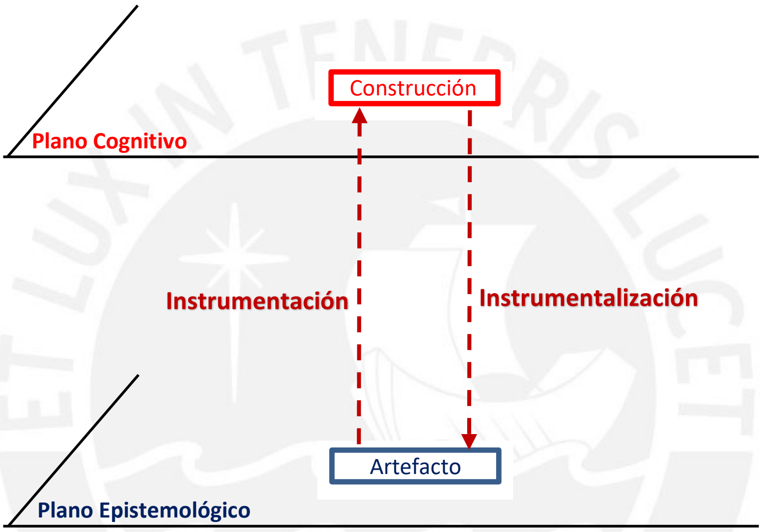


Figura 6. Posibles especificaciones de la génesis instrumental.

En contraste con las génesis anteriores, la génesis discursiva de la prueba, para Kuzniak y Richard (2014) utiliza el referencial teórico para la validación o prueba, dicha validación no es icónica, gráfica o instrumentada. En ese sentido, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) la define como el proceso por el cual se activan las propiedades y los resultados presentes en el referencial teórico, con la intención de que estén al servicio del razonamiento matemático y de las validaciones discursivas. Además, estas validaciones van más allá de las verificaciones gráficas, empíricas o instrumentadas, aunque éstas podrían provocarlas.

Para Kuzniak et al. (2016), la génesis discursiva debe entenderse como un proceso bidireccional: en un primer sentido, el discurso deductivo o de prueba se realiza a partir del sustento que le proporcionan las propiedades organizadas y dispuestas en el referencial teórico, mientras que en el sentido inverso, la finalidad es la identificación de definiciones y propiedades que se incluirán en el referencial teórico, probablemente provocadas por tratamientos visuales o instrumentales (ver figura 7).

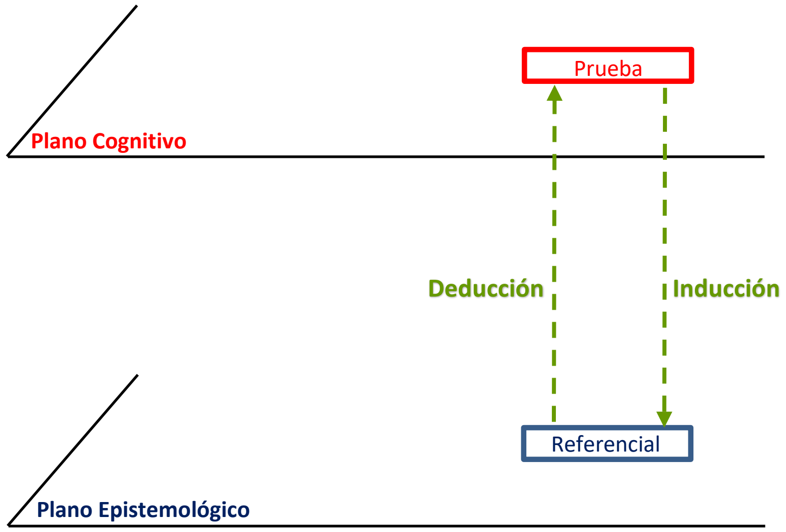


Figura 7. Posibles especificaciones de la génesis discursiva.

De estas afirmaciones, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) destacan la necesidad de analizar con precisión la tarea solicitada y la actividad realizada por el individuo, ello los conduce a considerar planos verticales a partir de la inclusión y articulación de dos génesis, los cuales se explican a continuación.

Los planos verticales y las circulaciones en el ETM

En principio, Coutat y Richard (citado en Kuzniak y Richard, 2014) definen tres planos verticales para analizar las interacciones especificas en el trabajo geométrico. De ello, Kuzniak y Richard (2014) consideran que estos planos verticales pueden vincularse con las fases del trabajo matemático durante la realización de tareas, donde la ejecución adecuada de estas precisará las competencias cognitivas matemáticas en base a la coordinación de sus génesis, en ese sentido los autores afirman que,

> Un primer tipo de interacciones privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en las génesis semiótica e instrumental para desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos. Un segundo tipo […] desarrolla el razonamiento matemático fundado en la justificación de descubrimientos, que articula las génesis instrumental y discursiva. Finalmente, un último tipo está orientado hacia la comunicación matemática de los resultados y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva. (Kuzniak y Richard, 2014, p.12)

De lo anterior, los autores consideran necesario incorporan estos planos verticales a la teoría del ETM con el objetivo de comprender y analizar la circulación del conocimiento entre los planos epistemológico y cognitivo que estructuran al ETM, los cuales se activan a través de una tarea. Estos planos son: el plano [Sem–Dis] asociado a las génesis semiótica y discursiva de la prueba matemática, el plano [Ins–Dis] es asociado a la génesis discursiva de prueba y a la génesis instrumental, finalmente el plano [Sem–Ins] es asociado a una génesis semiótica y a la génesis instrumental (ver figura 8).

En ese sentido, Gómez, Kuzniak y Vivier (2016) resaltan que, la interpretación exacta de estos planos verticales y la descripción de sus interrelaciones, dependerán del dominio matemático específico que sea objeto de estudio en el trabajo matemático. Por otra parte, enuncia que una circulación hace referencia al movimiento del conocimiento por los distintos polos de los planos epistemológico y cognitivo, por tanto, durante el trabajo matemático, pueden resultar una o más circulaciones del conocimiento, ya sea en los planos horizontales (Epistemológico y Cognitivo) o en los planos verticales indicados anteriormente.

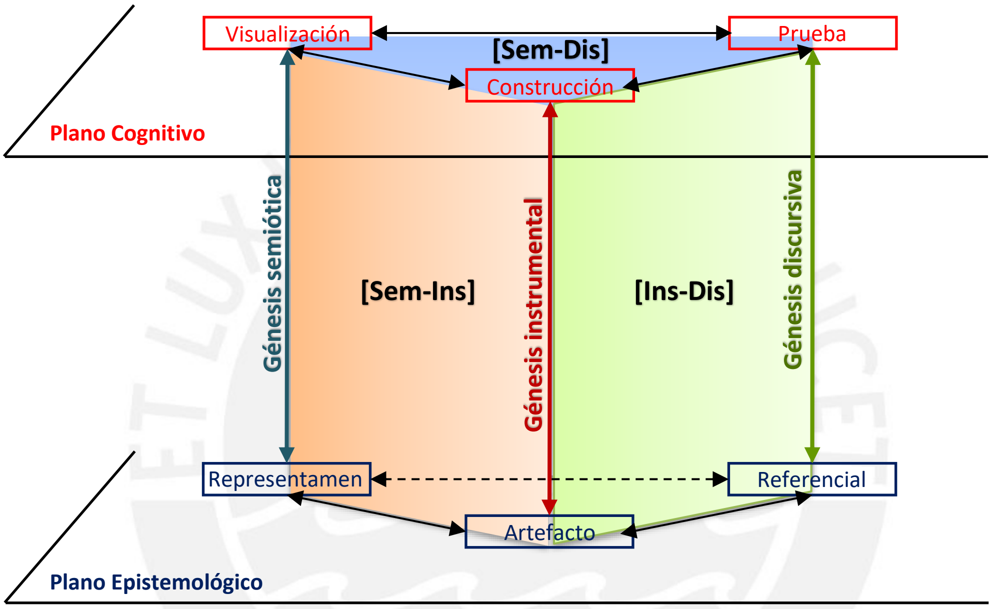


Figura 8. Posibles especificaciones de la génesis semiótica

Fuente: Adaptado de Kuzniak et al. (2016, p.727)

Respecto al plano semiótico-discursivo [Sem–Dis], Gómez et al. (2017) afirman que,

> Una estrecha relación entre la génesis semiótica y la génesis discursiva de la prueba es crucial en el desarrollo del trabajo matemático que supera una visión simple icónica de los objetos. De acuerdo a la prioridad dada a la dimensión semiótica y discursiva, son posibles dos tipos de enfoques. Cuando la atención se centra en el lado semiótico, transformaciones visuales estructuran la descripción de los signos y organizan un razonamiento perceptivo. Por el contrario, si la atención se centra en una prueba o demostración, el razonamiento hipotético y deductivo se basa en propiedades, signos y la visualización desempeña un papel heurístico. (p.11)

Sobre el plano instrumental-discursivo [Ins–Dis], Gómez et al. (2017, p.11) indican que,

> El punto crucial es la cuestión de la prueba que se basa en experimentos o en la argumentación deductiva pura. Si se sacan conclusiones a partir de datos

> dados por instrumentos, vamos a hablar de una prueba experimental. De otra forma, si la prueba o demostración se basará en un referencial teórico, los instrumentos se utilizan para ilustrar o para la construcción de configuraciones geométricas.

En ese sentido, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) afirman que un vínculo entre la génesis instrumental y la discursiva emerge de forma natural cuando los procesos de experimentación se llevan a cabo a partir de enunciados bien definidos, originando circulaciones del conocimiento en el plano [Ins-Dis]. De ello, si los resultados y las conclusiones son obtenidos a partir de la información que proporciona los instrumentos y el razonamiento inductivo, el trabajo matemático se orienta hacia la dimensión instrumental. Sin embargo, si se prioriza el razonamiento deductivo construido de forma progresiva a partir de pasos verificados por ejemplificaciones instrumentadas, entonces el trabajo matemático se desarrolla en su dimensión discursiva.

Finalmente, sobre el plano semiótico instrumental [Sem–Ins], los autores declaran que en este plano interactúan los signos y artefactos con los procesos de visualización y prueba, entendiéndose que esta interacción va en diversas direcciones. Por tanto, estas direcciones pueden partir de cualquier componente y tomar distintos sentidos. Por ejemplo, en el nivel cognitivo, el trabajo matemático puede iniciar en el proceso de visualización, pero con la prioridad en la construcción de objetos matemáticos respetando las condiciones de los signos. En el sentido inverso, al partir del proceso de construcción, hace referencia a una exploración visual y semiótica.

Por otro parte, Kuzniak et al. (2016) afirman que el trabajo matemático puede iniciar a partir de la exploración de representaciones, por ejemplo, representaciones gráficas por medio de algún software, con la finalidad de conceptualizar y comprender el objeto matemático en estudio. A la vez, comprometen al descubrimiento y a la identificación de componentes en la representación, por tanto, provocan la activación de la génesis semiótica relacionada con el objeto matemático en estudio, el cual conduce a realizar circulaciones en el plano [Sem-Ins]. En ese sentido, Gómez, Kuzniak y Vivier (2016, p.11) resaltan que

> Este plano ha recibido más importancia debido a la aparición de Software digital. Las herramientas digitales aumentan la capacidad de explorar configuraciones y descubrir nuevas propiedades. El enfoque exploratorio ya existía, pero sólo con base en la experiencia de los estudiantes. […] Se pueden observar dos formas de trabajar: la que está más orientado hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) que cumplen algunas condiciones y otra hacia la interpretación de los datos aportados por los artefactos.

De todo lo anterior, Kuzniak et al. (2016) concluyen que resulta difícil describir y especificar con exactitud cada uno de estos planos, pero al hacerlo se debe tener presente el campo o dominio matemático en estudio, las tareas, el nivel educativo, la institución, el tipo de trabajo esperado, entre otros aspectos necesarios a considerar dentro del trabajo matemático.

Tipos de Espacios de Trabajo Matemático

Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) consideran importante estudiar el trabajo matemático que se realiza en el contexto educativo, en ese sentido resulta necesario analizar los procesos que realizan los estudiantes durante el trabajo matemático, el cual está delimitado por las orientaciones dadas por las instituciones educativas y por los maestros que dirigen y materializan estas orientaciones en el trabajo matemático dentro del aula. Por lo tanto, Los autores consideran distinguir tres tipos de ETM: ETM de referencia, ETM idóneo y ETM personal, los cuales están relacionados con la vigilancia epistemológica, didáctica y cognitiva que deben involucrarse en la educación matemática.

> El ETM de referencia se define con respecto a la relación con el conocimiento, bajo criterios matemáticos; el ETM idóneo depende de la institución involucrada y se define de acuerdo a la forma en que el conocimiento debe ser enseñado, en relación con su lugar y su función específica dentro del currículo nacional; y el ETM personal se relaciona con cada individuo y se define por la forma en que él o ella se ocupa de un problema matemático con sus propios conocimientos y capacidades matemáticas (Kuzniak et al., 2016, p.729).

En ese sentido, los autores resaltan que el ETM de referencia se estructura en base al conocimiento matemático, mientras que el ETM idóneo puede estar estructurado a partir del conocimiento matemático que considera la institución o el profesor para el proceso de enseñanza. Mientras que, el ETM personal se puede estructurar a partir de los conocimientos matemáticos que poseen los individuos al resolver problemas.

ETM de referencia

Para Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) un paradigma se instaura a partir del acuerdo de una comunidad de individuos sobre la formulación de problemas y la organización de sus soluciones, privilegiando las herramientas o las formas de pensamiento. De ello, Kuzniak y Richard concuerdan que, “a ese espacio de trabajo ‘paradigmático’, tal como es definido por esta comunidad, se le llamará ETM de referencia” (2014, p.9).

Los autores consideran que la organización esperada del ETM referencial se estructura de manera natural según criterios matemáticos definidos por alguna comunidad de individuos, quienes acuerdan algún paradigma con la finalidad de incluir conceptos, herramientas o formas de pensamiento. Sin embargo, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) consideran que su organización está también predispuesta a los aspectos económicos, políticos y sociales, lo cual conlleva a analizar el currículo o el plan de estudio, los tratados escritos por los matemáticos y las investigaciones realizadas por educadores en matemáticas. Asimismo, consideran que este aspecto orienta a una vigilancia epistemológica, lo cual revela que las reglas operativas involucradas contribuyen en la organización del conocimiento en un campo matemático definido con coherencia. Por otra parte, consideran que este ETM puede ser constituido por la interacción entre paradigmas de un dominio matemático determinado.

ETM idóneo

En una institución educativa, para Kuzniak, Montoya Vivier (2016) la resolución de un problema presume que un ETM, al cual denominan idóneo, se ha logrado organizar de cierta manera con el objetivo de comprometer a un estudiante en la resolución del problema y que el utilizador-diseñador del ETM idóneo debe ser un experto ideal quien construya un ETM para utilizadores potenciales. Por esa razón, Kuzniak y Richard (2014) establecen que este ETM idóneo debe cumplir dos condiciones para su estructuración: primero, debe permitir el trabajo matemático en el paradigma correspondiente al problema considerado; segundo, sus componentes deben estar organizados de acuerdo a criterios de validez. Pero, "el ETM idóneo no es fijo y se debe modificar continuamente para ajustarse a las restricciones locales" (p.10).

Los autores consideran que el ETM idóneo puede entenderse como el espacio en donde se genera la reflexión sobre la reorganización didáctica de sus componentes. En ese sentido, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) declaran que este ETM se relaciona con la vigilancia didáctica, ya que controla el trabajo del estudiante, adaptándolo a lo que se pretende con el ETM de referencia que considera la institución educativa.

Debido a que nuestra investigación está centrada en el análisis de la práctica de docentes universitarios que enseña la función exponencial, se deduce que el ETM idóneo puede clasificarse en dos tipos: el ETM idóneo que propone la institución educativa y el ETM idóneo del profesor.

Respecto al ETM idóneo propuesto por la institución, Kuzniak (2011) considera que resulta de la adecuación y organización del ETM de referencia de la institución dada con un propósito, la cual describe la matemática que la institución pretende. Desde esa perspectiva, Kuzniak et al. (2016) afirma que una institución educativa puede estructurar un ETM idóneo para que sea utilizado por el profesor, el cual permita a los estudiantes ser activos y eficientes al resolver problemas o tareas definidas.

Por otra parte, el ETM idóneo que propone la institución educativa se analiza a partir del texto, materiales, guías, tareas, etc. que propone la institución para el trabajo de los docentes con sus estudiantes.

Respecto al ETM idóneo del profesor, Kuzniak y Richard (2014) afirma que,

> En clase, el diseño de este espacio va depender del ETM personal del profesor. […] La elección y la organización de las tareas propuestas a los alumnos por los profesores son esenciales en la constitución del ETM idóneo. Ofrece la posibilidad de resolver, de manera adecuada, lo que se les propone; es decir, conforme a las expectativas institucionales descritas de manera más o menos explícita en el ETM de referencia. (p.10).

En ese sentido, el papel del profesor resulta fundamental, debido a que él es el responsable del proceso de enseñanza y de él dependerá facilitar el trabajo matemático de los estudiantes. Por lo tanto, el trabajo matemático de los estudiantes está orientado y desarrollado por las acciones que realiza el docente durante el proceso de enseñanza, ello nos permite justificar la necesidad de nuestra investigación por analizar el ETM idóneo del profesor.

Por otro lado, precisamos que el ETM idóneo del profesor se analiza a partir del texto que utiliza para trabajar con sus estudiantes, la guía de ejercicios que propone a sus estudiantes, los apuntes de clase que realiza el profesor para sus estudiantes, entre otros recursos que considere indispensable en el desarrollo de su sesión de clase.

ETM personal

En un contexto educativo, según Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), si un problema es propuesto a un individuo, quien puede ser el profesor o un estudiante, entonces el tratamiento matemático que este individuo dará al problema se realizará dentro de lo que han denominado un ETM personal. En ese sentido, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) afirman que,

> En el contexto de una institución educativa determinada, dar acceso a ETM personales eficientes es el objetivo final, y el logro de este objetivo a través de la enseñanza y el aprendizaje requiere una vigilancia cognitiva. Aquí, los individuos particulares […] están preocupados, y para conocer mejor su pensamiento se requiere que se estudien las concepciones y el conocimiento de los estudiantes a través de sus actividades observables (p. 729)

Respecto al ETM personal del profesor, los autores manifiestan que está condicionado por sus experiencias, los cuales se manifiestan en cada una de sus preferencias matemáticas durante la resolución de problemas que deba afrontar dentro y fuera del aula de clase. Esto resulta un motivo por el cual Kuzniak y Richard (2014) recomiendan que, el profesor debe reestructurar continuamente su ETM idóneo, seleccionando pertinentemente las actividades o el trabajo matemático que espera que realicen sus estudiantes, debido a que sus prácticas pasadas están condicionadas a un cierto ETM personal del estudiante, el cual no siempre podrá adaptarse a los estudiantes que actualmente tenga a su cargo. En ese sentido, los autores afirman que “estas elecciones y la gestión de las actividades van a depender, en gran parte, del ETM personal del profesor” (Kuzniak y Richard, 2016, p.10).

Respecto al ETM personal del estudiante, según Kuzniak y Richard (2014, p.10) “cuando el problema se propone a un alumno, el tratamiento matemático que éste le da lo conduce al ETM personal de este alumno”. Por lo tanto, un estudiante activa su ETM personal cuando aplica sus capacidades cognitivas y sus conocimientos matemáticos a partir de la resolución de un problema o una tarea dada. Además, los autores resaltan que el desarrollo de este espacio de trabajo está en función del ETM idóneo propuesto, debido a que este último permite el compromiso del estudiante hacia la resolución del problema. En ese sentido, el desarrollo del ETM personal de un estudiante es dependiente de las tareas elegidas en el ETM idóneo estructurado por el profesor.

Por otra parte, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) manifiestan que el trabajo matemático previsto en el ETM idóneo no necesariamente garantiza que los estudiantes construirán coherentemente los conocimientos matemáticos puestos en juego. Por esta razón, recomiendan que es indispensable analizar los ETM personales de los estudiantes para asegurarse que el trabajo matemático realizado por ellos sea el esperado.

Paradigmas en el dominio del análisis

En relación con los paradigmas del análisis, la investigación de Montoya y Vivier (2016) sobre ETM en el dominio del Análisis y los paradigmas que emergen en él, proponen un modelo de ETM para el análisis real. Los autores caracterizan y presentan los paradigmas globales, como son: el paradigma de análisis estándar, relacionado a los números reales, y el paradigma de análisis no estándar, relacionado a las cantidades infinitesimales. Además, explican que ambos paradigmas globales se sitúan en el ETM de referencia, pero el que prevalece en la educación matemática actual es el paradigma del análisis estándar. Por esta razón, consideramos que es necesario especificar los paradigmas propuestos para el análisis estándar en la investigación de Montoya y Vivier (2016), los cuales serán utilizados para nuestro trabajo de investigación y detallamos a continuación:

- El análisis geométrico/aritmético (AG), aquí se permite las interpretaciones y suposiciones implícitas originados sobre la base de la geometría, de cálculos aritméticos o del mundo real.
- El análisis del Cálculo (AC), en este paradigma las reglas del cálculo, como las existentes en el cálculo diferencial o integral que se definen son algo explicitas, y se aplican sin la necesidad de reflexionar sobre la existencia y la naturaleza de los objetos introducidos.

  En este paradigma, los cálculos se realizan bajo un enfoque algorítmico para expresiones formales que tienen una función representativa. Estos procedimientos se realizan sin ninguna reflexión de la naturaleza del objeto matemático. Por ejemplo, para determinar la ecuación de la recta tangente de una función en un punto, se deriva y se evalúa la función para obtener la pendiente, luego se establece una ecuación cartesiana para la tangente, esto se puede hacer algorítmicamente sin la necesidad de reconocer de objetos, curvas, tangentes o las relaciones entre ellos.

- El análisis real (AR), el cual involucra trabajos que implican la aproximación y vecindad, incluso topológico. Además, las definiciones y propiedades son establecidas de manera teórica para permitir el trabajo de un ε definido para este paradigma, como en el caso de los límites, la desigualdad, o para describir "lo despreciable".

La naturaleza de los objetos difiere entre paradigmas, siendo explícito en AR e implícito en AC y AG.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

El propósito de nuestra investigación es analizar los conocimientos matemáticos y las tareas que presenta el profesor universitario cuando enseña el objeto función exponencial a estudiantes de humanidades, con ello, determinar cómo la define o la caracteriza, que instrumentos utiliza y que representaciones prioriza para su enseñanza. En ese sentido, al contrastar este propósito con el marco teórico, resulta necesario estudiar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial, en particular cómo llega a definirla, qué tareas intra-matemáticas organiza y presenta en clase. Por lo tanto, por medio de este estudio, se va a describir las acciones que realiza el profesor para activar las génesis semiótica, instrumental y discursiva, incluso, reconocer el paradigma del análisis que privilegia. A pesar de que, el análisis de las tareas que realiza el profesor en clase nos lleva a acercarnos a su ETM personal, será necesario distinguirlo del ETM idóneo para centrarnos en nuestro propósito de estudio.

Por tanto, de acuerdo a las investigaciones de referencia, la justificación detallada que establece la pertinencia de esta investigación y los aspectos fundamentales del ETM se formula la siguiente pregunta que direcciona nuestra investigación:

¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo?

Objetivo General:

De la formulación anterior, se desprende el siguiente objetivo general de la investigación:

Analizar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades.

Objetivos Específicos:

Para lograr el objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

1. Describir el trabajo matemático efectivo del profesor universitario al enseñar la función exponencial.
2. Analizar la activación de las génesis y los planos en el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial.
3. Identificar los paradigmas del dominio análisis que privilegia el profesor universitario al enseñar función exponencial.

A continuación, se presenta el estudio de caso como método para nuestra la investigación.

1.5 Estudio de caso como metodología de la investigación

La metodología en nuestra investigación es de corte cualitativo ya que según Hernández, Fernández y Baptista (2010), una investigación cualitativa permite describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes, distinguiéndola de la investigación cuantitativa, dado que su esencia es el proceso y no los resultados.

Por otro lado, una metodología cualitativa en la investigación según M. Martínez "se trata del estudio de un todo integrado que forma o constituye una unidad de análisis y que hace que algo sea lo que es: Una persona, una entidad étnica, social, empresarial, un producto determinado, etc." (2006, p. 128).

En ese sentido, nuestros procedimientos metodológicos toman como referencia algunos aspectos del método de Estudio de Casos, los cuales serán necesarios para el desarrollo de nuestra investigación.

En principio, Martínez (2006) manifiesta que, según su propósito, las investigaciones realizadas con el método de estudio de caso pueden ser descriptivas o exploratorias, es decir, si en una investigación lo que se trata es identificar y describir los factores que influyen en el fenómeno estudiado, esta investigación es descriptiva, mientras que, si se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías y la realidad objeto de estudio a través de su exploración, entonces esta investigación es exploratoria.

En ese sentido, Yin (citado en Martínez, 2006) afirma que "el método de estudio de caso es una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado" (p.167).

Complementando lo anterior, rescatamos algunas consideraciones de Chetty (citado en Martínez, 2006), quien indica que

> El estudio de caso es una metodología rigurosa que es adecuada para investigar fenómenos en los que se busca dar respuesta a cómo y por qué ocurren, […] es ideal para el estudio de temas de investigación en los que las teorías existentes son inadecuadas, […] y permite explorar en forma más profunda y obtener un conocimiento más amplio sobre cada fenómeno, lo cual permite la aparición de nuevas señales sobre los temas que emergen (p.175).

Además, sobre investigaciones en Educación Matemática, Ponte (2006, p.4) declara que

> Estudios de casos se han utilizado para investigar los problemas de aprendizaje de los estudiantes, así como conocimientos y prácticas profesionales de los maestros, programas de formación inicial y continua de los maestros, proyectos de innovación curricular, nuevos planes de estudio, etc.

Debido a que nuestra investigación pretende analizar cuál es el ETM idóneo del profesor universitario para enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades, se define el caso: Trabajo matemático del profesor universitario al enseñar la función exponencial.

Para analizar el caso, los profesores que participan de esta investigación son docentes de matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, quien enseña la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo, a quien en adelante llamaremos en adelante profesor André, mientras que al otro, Profesor Esteban.

Tabla 5.

Profesores involucrados en la investigación.

Docentes universitarios	Formación	Institución donde fue formado	Experiencia como docente de matemática
Profesor André	Ingeniero electrónico	Pontificia Universidad Católica del Perú	12 años
Profesor Esteban	Matemático Puro	Universidad Pedro Ruiz Gallo	10 años

Las características de los profesores participantes son las siguientes: el profesor André es ingeniero electrónico, pero con maestría en enseñanza de las matemáticas. Él tiene aproximadamente 12 años de experiencia como docente universitario en cursos de matemáticas del primer ciclo, en distintas universidades de Lima y enseñando tanto a estudiantes de humanidades como de ciencias, durante ese tiempo lleva 2 años seguidos dictando matemática a estudiantes de humanidades del primer ciclo de la Pontificia Universidad católica del Perú. Mientras que, el profesor Esteban es licenciado y magister en matemática, él tiene 10 años de experiencia como docente universitario en matemática, la mayor parte de esos años ha dictado cursos de matemática relacionado a carreras de Ciencias en la Pontificia Universidad Católica del Perú, pero estos 2 últimos años también ha tenido cursos de primer ciclo en donde enseña matemática a estudiantes de humanidades, en esos años siempre ha enseñado la función exponencial en cursos del primer ciclo de estos estudiantes.

Para nuestra investigación, solo estudiaremos las acciones del profesor André, debido a que se logró recolectar toda la información necesaria para el análisis del Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial, mientras que la información obtenida del profesor Esteban no está completa, por tanto, no podríamos realizar el análisis riguroso y exhaustivo que pretendemos a partir de los datos obtenidos de él.

Para analizar el ETM idóneo del profesor al enseñar la función exponencial, establecemos los siguientes componentes para nuestra investigación.

Primero, la pregunta de investigación, considerada el punto de partida, servirá de referencia para la recolección de la información, de modo que permita establecer la estrategia más oportuna para la investigación.

En nuestra investigación la pregunta es: ¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo?

Segundo, las proposiciones teóricas, del mismo modo que las preguntas, servirán de referencia para la recolección de información, los cuales, posteriormente, nos permita analizar los datos obtenidos (Martínez, 2006). En ese sentido, las proposiciones teóricas, así como la pregunta de investigación contiene conceptos, dimensiones, factores o variables, por tanto, debemos obtener información de estos constructos para analizar el caso.

En esta investigación, las proposiciones teóricas que fundamentan la tesis están definidas por aspectos del Espacio del Trabajo Matemático propuesto por Kuzniak (2011), el cual permitirá analizar las acciones que realiza el profesor universitario al enseñar la función exponencial y cómo estas acciones activan las génesis y planos del ETM. Además, reconocer cuales son los paradigmas del dominio análisis que el profesor privilegia, así como estudiar el espacio de trabajo matemático idóneo del profesor.

Tercero, las unidades de análisis, que según Martínez (2006) son elementos que conforman el caso, los cuales pueden ser una o varias personas, una institución, documentos o alguna situación, en ese sentido, pueden ser únicos o múltiples. También, Las unidades de análisis son dependientes de la forma cómo son determinadas las preguntas iniciales en la investigación.

En la presente investigación, las unidades de análisis serán las etapas del trabajo matemático del profesor universitario al enseñar la función exponencial, las cuales son: exploración (acciones orientadas a explorar la solución de un problema introductorio), estudio de la función exponencial (acciones centradas en explicar la definición, características y elementos), por último, resolución de tareas (acciones sobre la organización de las tareas propuestas a los estudiantes). A partir de la información obtenida, pretendemos analizar cuál es el ETM del profesor universitario cuando enseña la función exponencial, el cual es descrito e interpretado en términos de la teoría Espacio de Trabajo Matemático.

Cuarto, la vinculación lógica de los datos a las proposiciones, aquí se verifica la relación existente entre la información recolectada y las proposiciones teóricas de la investigación.

En esta investigación, a partir de la información obtenida se describe los conocimientos y tareas que organiza y presenta el profesor universitario para enseñar la función exponencial a estudiantes universitarios, aproximándonos a su comprender su ETM idóneo en el dominio del análisis. Asimismo, determinar los paradigmas del análisis que él privilegia.

Para ello, previamente se organizará la información, la cual será recolectada por medio de entrevistas semiestructuradas, observación y grabación de las clases, e incluso los materiales de curso de los profesores que enseñan la función exponencial.

Por último, los criterios para la interpretación de los datos, hace referencia al análisis que realiza el investigador después de recolectar la información obtenida de la unidad de análisis.

En nuestra investigación, después de la recolección de datos y de vincular la información obtenida con las proposiciones teóricas enunciadas anteriormente, se analizan las unidades de análisis para estudiar el ETM idóneo del profesor universitario que enseñan la función exponencial, interpretando la información en términos del marco teórico utilizado, aspectos del Espacio de Trabajo Matemático, para finalmente obtener los resultados y conclusiones de nuestra investigación.

Por otra parte, para garantizar la objetividad del estudio de casos, en el sentido de su fiabilidad y validez, Yin (citado en Martínez, 2006) propone el protocolo del estudio de casos, que está constituido por una guía de procedimientos que tiene que realizarse para obtener evidencia y que está conformado por los siguientes elementos: semblanza del estudio de caso, preguntas del estudio de caso, procedimientos metodológicos a ser realizados y guía del reporte del estudio de caso.

En ese sentido, Martínez (2006) presenta especificaciones sobre los elementos que constituyen el protocolo del estudio de casos, considerando lo siguiente.

Iniciamos con la semblanza del estudio de caso, ya que es útil para integrar al equipo que colaborará en la investigación, además debe contener: los antecedentes del proyecto, los principales tópicos por investigar, las proposiciones teóricas por confirmar y la literatura relevante. En nuestro caso, integraremos a personas que formen parte de esta investigación, manteniéndolas informadas sobre los antecedentes, las proposiciones teóricas y todo lo concerniente a nuestro propósito de investigación que es analizar el Trabajo Matemático del profesor universitario cuando enseñanza la función exponencial.

Seguidamente se formula la pregunta de investigación, la cual es planteada con la finalidad de garantizar la obtención de la información que se necesita para ser contrastada con las proposiciones teóricas de la investigación.

Luego, se establece los procedimientos a ser realizados, aquí se determinan los instrumentos suficientes y se recomienda contar con un esquema de las actividades que se realizarán para recolectar la información. En ese sentido, los instrumentos que consideramos para nuestra investigación son: Iniciaremos utilizando las guías de las entrevistas semiestructuradas para obtener información del profesor que enseña la función exponencial, luego mediante la grabación y observación de la clase del profesor, así como su material de curso, evidenciaremos y contrastaremos la información obtenida en los otros instrumentos, así, posteriormente generaremos resultados y conclusiones objetivas.

Finalmente, se realiza la guía para el reporte del estudio, no existe un único formato para reportar los resultados obtenidos en la investigación, por ello se debe diseñar un esquema que sirva de base sobre cómo sería el reporte del estudio de caso, el cual favorezca la obtención de la información y reduzca el riesgo de regresar por información necesaria.

A continuación, a partir de los procedimientos a ser realizados como parte del protocolo del estudio de casos, presentamos el procedimiento metodológico que se utiliza para nuestra investigación, el cual se basa a lo propuesto por Martínez (2006).

1. Planteamiento del problema, es el primer procedimiento para realizar nuestra tesis, en donde consideramos las investigaciones de referencia que sustentan nuestro estudio, la justificación que define la pertinencia de la investigación, la pregunta de investigación, y el objetivo general, así como los específicos de la investigación.
2. Formulación de proposiciones, el propósito de nuestra estudio es analizar el Espacio de Trabajo Matemático del profesor universitario cuando enseñanza la función exponencial, por tanto revisaremos los libros de Cauchy (1821), de Stewart, Redlin y Watson (2012) y el material de curso para los profesores que propone la Universidad, en particular, los capítulos donde se presenta el estudio del objeto función exponencial, además revisaremos aspectos del Espacio de Trabajo Matemático que utiliza nuestra tesis, con

ello tener bases teóricas claras para utilizar instrumentos de recolección de datos, como una entrevista semiestructurada, la grabación de clase y material de curso.

3. Recolección de la información, se realiza a partir de la información proporcionada por los profesores universitarios que enseñan la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo de una universidad privada, en ese sentido se utilizan guías para la entrevista semiestructurada, formato de trascripción de la grabación de la clase, así como el material de curso utilizado por el profesor.
4. Transcripción de los datos, para Martínez (2006), consiste en organizar la información obtenida y se realiza después recolectar la información que necesitamos de los profesores universitarios, a través de los instrumentos de investigación diseñados.
5. Análisis de la información, en esta parte se realiza la triangulación de la información, el cual consiste en contrastar los datos recolectados con los instrumentos de nuestra investigación, a partir de ello, se analiza e interpreta la información obtenida en base al marco teórico definido en nuestra investigación, que son aspectos del Espacio de Trabajo Matemático.
6. Conclusiones generales e implicaciones de la investigación, en esta parte se redacta los resultados y conclusiones generales, así como consideraciones finales sobre perspectivas de posibles investigaciones futuras.

En el siguiente capítulo, se presenta aspectos matemáticos del objeto función exponencial, es decir, aspectos epistemológicos y matemáticos para la enseñanza de este objeto matemático.

CAPITULO II: ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En este capítulo presentamos algunos aspectos del objeto función exponencial, explicando tanto sus aspectos epistemológicos como aspectos matemáticos para su enseñanza en los libros de texto o materiales de curso.

2.1 Aspectos matemáticos y epistemológicos del objeto función exponencial

Según Morales (2011) una de las formas de definir la función exponencial es construirla como la solución de una ecuación funcional. Además, afirma que Cauchy encontró que la función exponencial es la única función que cumple algunas propiedades importantes.

En ese sentido, resulta importante revisar los estudios de Cauchy en su *Cours d´analyse*, en donde presenta el problema de

> Déterminer la fonction φ(x) de maniere qu'elle reste continue entre deux limites reelles quel conques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs reelles des variables x et y:" φ(x+y) = φ(x)·φ(y) (1821, pp.106-107)

El problema y la solución realizada por Cauchy, traducida por nosotros, lo presentamos a continuación.

Determine la función φ(x) para que permanezca continua entre dos límites reales de la variable x, y de manera que para todos los valores reales de las variables x e y se obtenga que:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \ldots \text{ (2)}$$

Primero, es fácil asegurarse que la función $\varphi(x)$ pretendida para satisfacer la ecuación (2) admite sólo valores positivos. De hecho, si hacemos $y = x$ en la ecuación (2), encontraremos

$$\varphi(2x) = [\varphi(x)]^2,$$

Luego concluiremos, al escribir $\frac{1}{2}x$ en lugar de x, que

$$\varphi(x) = \left[\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)\right]^2.$$

La función $\varphi(x)$ es siempre igual a un cuadrado, por consecuencia siempre es positiva. Esto planteó, que supongamos que en la ecuación (2) sucesivamente se reemplaza y por $y + z$, z por $z + u, \ldots$ obteniendo

$$\varphi(x + y + z + u + \cdots) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(u) \ldots$$

Cualquiera que sea el número de variables $x, y, z, u, \ldots$, si denotamos este número de variables por m, y una constante positiva por una de ellas, haciendo $x = y = z = u = \cdots = \alpha$, entonces la fórmula que encontramos se convertirá en

$$\varphi(m\alpha) = [\varphi(\alpha)]^m$$

Para extender esta fórmula para el caso de que el número entero m se reemplaza por un número fraccionario $\frac{m}{n}$, o incluso por un número cualquiera u, haremos primero $\beta = \frac{m}{n}\alpha$, donde m y n son números enteros,así llegaremos a la conclusión que

$$n\beta = m\alpha$$

$$\varphi(n\beta) = \varphi(m\alpha)$$

$$[\varphi(\beta)]^n = [\varphi(\alpha)]^m$$

$$[\varphi(\beta)] = \varphi\left(\frac{m}{n}\alpha\right)$$

$$[\varphi(\beta)] = [\varphi(\alpha)]^{\frac{m}{n}}$$

Haciendo un cambio de variable con $\frac{m}{n} = u$, se obtiene

$$\varphi(u\alpha) = [\varphi(\alpha)]^u$$

Si tomamos $\alpha = 1$, tenemos que para los valores positivos de u

$$[\varphi(u)] = [\varphi(1)]^u$$

Como φ es continua, aplicamos límite cuando u tiende a cero a ambos miembros,

$$\lim_{u \to 0}[\varphi(u)] = \lim_{u \to 0}[\varphi(1)]^u$$

$$\varphi(0) = 1$$

Además, en la ecuación $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$, al hacer un cambio de variable $x = u$ e $y = -u$, se tiene

$$\varphi(u + -u) = \varphi(u)\varphi(-u)$$

$$\varphi(0) = \varphi(u)\varphi(-u)$$

$$\varphi(-u) = \frac{\varphi(0)}{\varphi(u)}$$

$$\varphi(-u) = \frac{\varphi(0)}{\varphi(u)}$$

$$\varphi(-u) = \frac{1}{\varphi(u)}$$

$$\varphi(-u) = \frac{1}{[\varphi(1)]^u}$$

$$\varphi(-u) = [\varphi(1)]^{-u}$$

Entonces, la ecuación $\varphi(u) = [\varphi(1)]^u$ se mantiene al cambiar u por $-u$, en otras palabras, tenemos que para cualquier valor de la variable x, sea positivo o negativo se cumple

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x$$

Por lo tanto, se deduce que cualquier función $\varphi(x)$ que verifica el problema planteado al principio es necesariamente de la forma $\varphi(x) = A^x$, donde A es una constante positiva. Luego, podemos atribuirle a esta constante cualquier valor entre los límites de 0 y ∞, es decir, que, para cualquier valor positivo de A, la función permanece constante desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$, y la ecuación $A^{x+y} = A^x A^y$ es una identidad. Donde A es una constante arbitraria que solo admite valores positivos.

En la solución realizada por Cauchy, se encontró que una función será exponencial cuando tiene como condición necesaria cumplir con la propiedad $A^{x+y} = A^x A^y$.

Además, Cauchy (citado en Morales, 2011) define también una característica de la función exponencial para la ecuación funcional mencionada, afirmando que "sea f una función con dominio en los reales no nula, continua en el punto cero que verifica que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos los reales x e y. Entonces existe un real α talque, $f(x) = e^{\alpha x}$, para todo real x".

De lo anterior, Morales (2011) deduce que la función exponencial surge como consecuencia de esta y otras propiedades, lo cual contradice la forma como se presenta y enseña la función exponencial en los libros de texto, donde la definen y, en algunos textos, presentan estas propiedades como una consecuencia de su definición.

2.2 Aspectos matemáticos para la enseñanza de la función exponencial en libros universitarios de matemática

Respecto a cómo se organiza la enseñanza de la función exponencial, tomamos de referencia el libro de Stewart, Redlin y Watson (2012), el cual es considerado por los docentes universitarios como una guía que orienta el conocimiento matemático del docente sobre este objeto, ya que presenta definiciones, ejemplos, propiedades y tareas de aplicación para el desarrollo de su clase; por lo tanto se considera pertinente revisar la información que presenta, debido a que, si el docente afirma que sus conocimientos matemáticos para la enseñanza de la función exponencial están orientados por este libro, entonces nos permitirá un acercamiento al ETM de referencia de este objeto matemático.

El análisis del texto realizado enfatiza tres aspectos respecto al objeto función exponencial: primero, concepto y propiedades, segundo, los ejemplos, y tercero, las tareas y aplicaciones. De estos tres aspectos solo detallaremos los dos primeros, ya que necesitamos comprender como presenta y organiza los conocimientos para enseñar la función exponencial.

Análisis del concepto y propiedades de la función exponencial

Stewart et al. (2012), introducen el tema con un ejemplo de función exponencial $f(x) = 2^x$, utiliza el registro tabular para presentar algunos cálculos realizados en la función, obteniendo la imagen a partir del valor de su pre imagen para cualquier número real, en ese sentido, utiliza el proceso de calcular el valor numérico de una expresión exponencial como un artefacto simbólico, por lo tanto, activa la génesis instrumental (ver figura 9)

En este capítulo estudiamos una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Por ejemplo,

$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que aumentan los valores de esta función:

$$f(3) = 2^3 = 8$$
$$f(10) = 2^{10} = 1024$$
$$f(30) = 2^{30} = 1,073,741,824$$

Figura 9. Introducción a la función exponencial.

Fuente : Stewart et al. (2012, p.302)

A continuación, los autores utilizan el registro algebraico de la función exponencial para definirla. En ese sentido, la regla de correspondencia $f(x) = a^x$ es utilizada como una herramienta semiótica, activando la génesis semiótica. Además, reconoce que la función exponencial es definida por esa regla de correspondencia, lo cual es utilizada como herramienta teórica, por tanto activa la génesis discursiva (ver figura 10).

FUNCIONES EXPONENCIALES

La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Figura 10. Definición de la función exponencial.

Fuente : Stewart et al. (2012, p.302)

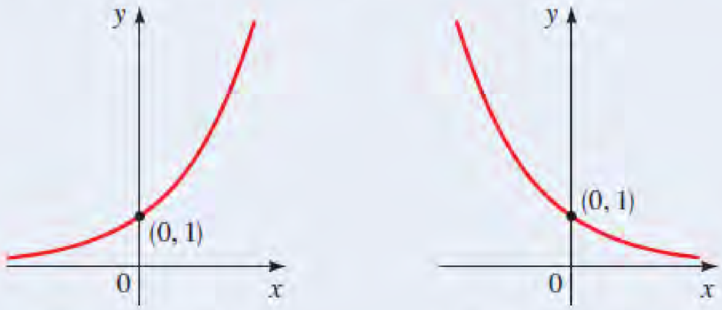
Por otra parte, los autores consideran pertinente pasar de una forma de representación a otra para comprender la función exponencial. Por tanto, coordina el registro en lengua natural, algebraico y gráfico para definir la gráfica de una función exponencial (ver figura 11), ello activa la génesis semiótica. Además, el intervalo en que está definida la base "a" de la función exponencial, permite reconocer la monotonía de la función, es decir, si es una función creciente o decreciente, mostrando su intersección con el eje de las ordenadas. Luego, define el dominio y rango para toda función exponencial, y describe su asíntota horizontal.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.



$f(x) = a^x$ para $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

Figura 11. Gráfica de la función exponencial.

Fuente : Stewart et al. (2012, p.304)

Stewart et al. (2012) define las características y elementos presentes en la función exponencial en el registro algebraico y gráfico, presentando una coordinación entre ambos registros para comprender algunas propiedades que puedan deducirse de su representación gráfica. Además, esta definición es utilizada como artefacto simbólico para la resolución de tareas referidas a graficar la función exponencial.

En concordancia con lo anterior, también considera pertinente explicar la función exponencial natural, para ello inicia explicando la definición del número de Euler "e" a través de un registro tabular, concluyendo que es un número irracional y que no es posible escribir un valor exacto en forma decimal ya que se expresa como una aproximación, resultando que este número $e = 2.71828182845904523536$, lo cual es utilizado como herramienta teórica, por lo tanto activa la génesis discursiva. Luego, los autores definen la función exponencial natural a través de su representación algebraica (ver figura 12).

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

Con base e. Es frecuente llamarla *la* función exponencial.

Figura 12. Definición de la función exponencial natural.

Fuente: Stewart et al. (2012, p.310)

Para su representación gráfica los autores utilizan la definición general sobre gráfica de funciones exponenciales, utilizándola como un artefacto simbólico, solo con la aclaración de que el número e es un valor entre 2 y 3, por tanto su gráfica se encuentra entre la gráfica de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$ (ver figura 13).

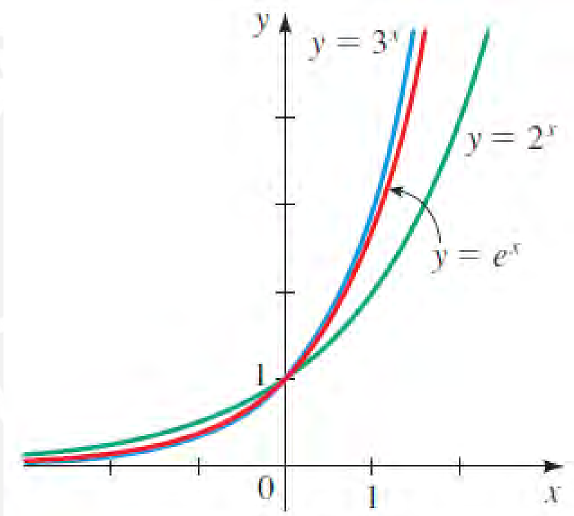


Figura 13. Gráfica de la función exponencial natural.

Fuente: Stewart et al. (2012, p.310)

Después de analizar este aspecto del texto, observamos que en ningún momento presenta la caracterización de Cauchy para definir la función exponencial como resultado de la ecuación funcional $f(x + y) = f(x)f(y)$, ni que exista alguna propiedad que se derive de su definición. Por lo tanto, al no analizar la naturaleza de este objeto matemático, nos lleva a afirmar que Stewart et al. (2012) trabaja en el paradigma del análisis del cálculo. Asimismo, las acciones descritas al definir la función exponencial y explicar los elementos que la componen a partir de su representación algebraica y gráfica, insta a trabajar en el paradigma del análisis geométrico/aritmético.

Análisis de los ejemplos sobre función exponencial

En ejemplos iniciales, Stewart et al. (2012) utiliza el registro numérico para evaluar la función exponencial de acuerdo a la base presente en su representación algebraica y a los valores que toma la pre imagen con ayuda de la calculadora, en términos del ETM, la calculadora será considerada una herramienta informática, es decir, un artefacto. Además, utiliza el proceso de calcular el valor numérico de una expresión exponencial como un artefacto simbólico, por lo tanto, estas acciones activan la génesis instrumental (ver figura 14).

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

(a) $f(2)$ **(b)** $f(-\frac{2}{3})$

(c) $f(\pi)$ **(d)** $f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para obtener los valores de f.

	Tecleo en calculadora	Salida
(a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
(b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
(c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
(d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

Figura 14. Evaluar una función exponencial.

Fuente: Stewart et al. (2012, p.303)

Mientras que, en un segundo ejemplo, referido a su representación gráfica, Stewart et al. (2012) utiliza la representación tabular y gráfica a partir de su representación algebraica, además muestra una coordinación entre ellos para deducir alguna característica o propiedad en la función exponencial a partir del valor de su base, en palabras del ETM este ejemplo activa la génesis semiótica (ver figura 15).

EJEMPLO 2 | **Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos**

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

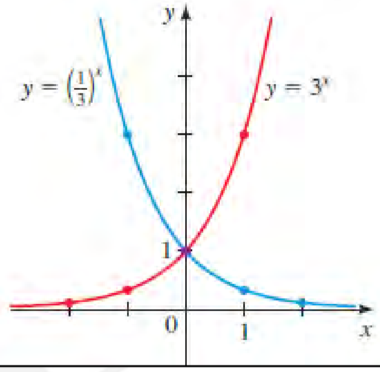


Figura 15. Ejemplo de grafica una función exponencial.

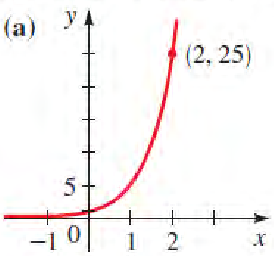
Fuente : Stewart et al. (2012, p.303)

En un tercer ejemplo, para determinar la regla de correspondencia $f(x) = a^x$ de la función exponencial a partir de su gráfica, realizan la conversión del registro gráfico al registro algebraico. Para ello, utiliza las coordenadas de un punto en la gráfica para calcular el valor de la base a presente en la regla de correspondencia de la función exponencial, esta regla es utilizada como artefacto simbólico, con ello activa la génesis instrumental (ver figura 16).

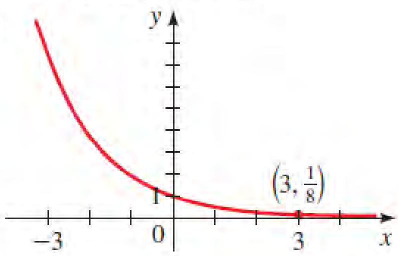
EJEMPLO 3 | **Identificar gráficas de funciones exponenciales**

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.

(a)



(b)



SOLUCIÓN

(a) Como $f(2) = a^2 = 25$, vemos que la base es $a = 5$. Entonces $f(x) = 5^x$.

(b) Como $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, vemos que la base es $a = \frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Figura 16. Ejemplo de grafica una función exponencial.

Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, pp.304-305)

En otros ejemplos, Stewart et al. (2012) presenta las transformaciones gráficas de la función exponencial definida por $f(x) = 2^x$. En ese sentido, tenemos la traslación vertical definida por $g(x) = 1 + 2^x$, la reflexión con el eje x definida por $h(x) = -2^x$ y la traslación horizontal definida por $k(x) = 2^{x-1}$. Se observa que, realiza tratamientos en el registro gráfico, activando la génesis semiótica (ver figura 17).

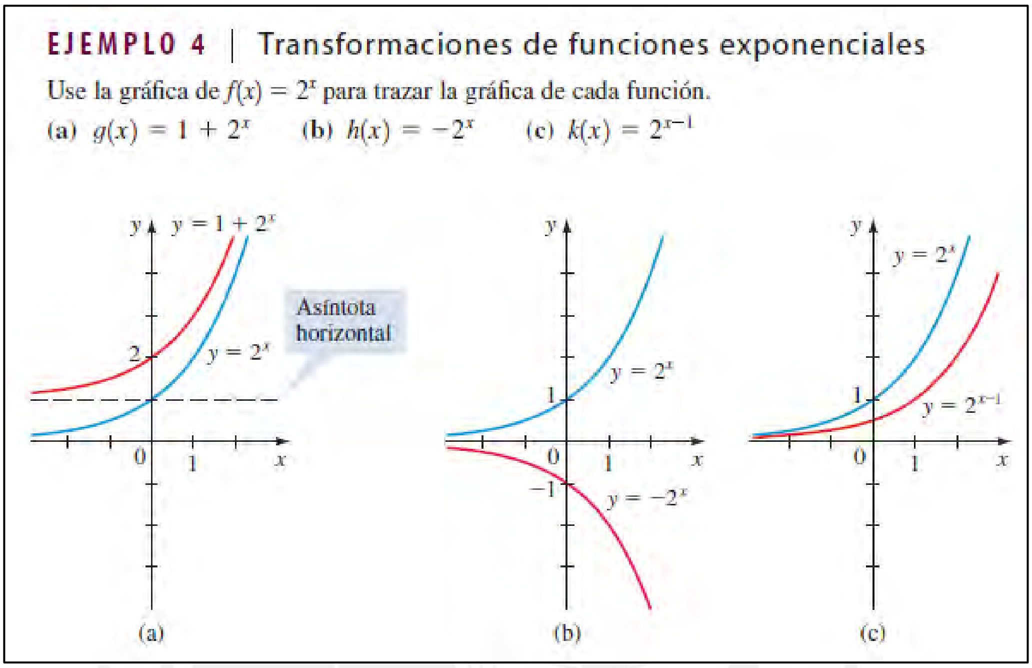


Figura 17. Ejemplo de grafica una función exponencial.

Fuente: Adaptado de Stewart et al. (2012, p.305)

En este último ejemplo, cabe destacar que, Stewart et al. (2012), no define como función exponencial a los modelamientos presentes en cada ejemplo, solo manifiesta que son funciones, esto es importante ya que esas representaciones algebraicas pertenecen a las denominadas funciones de tipo exponencial, la cual tiene ciertas diferencias con la función exponencial, dado que, estas no cumple la caracterización de Cauchy, mientras que la función exponencial sí.

En términos del ETM, las acciones descritas por los autores para resolver los ejemplos, instan a trabajar en el paradigma del análisis del cálculo, debido a que, se utiliza la definición, los elementos y características del objeto función exponencial sin discutir sobre su naturaleza, a pesar de que algunos procesos son algo explícitos.

2.3 Aspectos didácticos y matemáticos en el material de curso Matemática Básica para la enseñanza de la función exponencial

El material de curso de Matemática Básica - MAT155 es una guía de estudio elaborado y/o revisado por los docentes de una universidad privada que dictan el curso en mención, a partir de las consideraciones dadas por el coordinador de curso, los cuales se ajustan a las competencias que deberá desarrollar el estudiante en base al perfil de egreso que pretende la Unidad Académica de Estudios Generales Letras de la Universidad, como la competencia 4 denominada razonamiento Lógico-Matemático, en donde se especifica que, el estudiante resuelve problemas de su contexto cotidiano y profesional, reconoce modelos matemáticos, aplica conocimientos y procedimientos matemáticos apoyado de la tecnología, y comprueba, interpreta y comunica los resultados obtenidos. En ese sentido, el estudio del material del curso nos dará indicios sobre el ETM idóneo de la institución.

Por otra parte, el material de curso es compartido a los estudiantes en formato digital mediante la plataforma de la universidad.

Respecto a la parte del material del curso donde se trabaja la función exponencial, consta de:

1. Problema de introducción (denominado exploremos).
2. Definiciones y características analíticas y gráficas de la función exponencial.
3. Un ejemplo desarrollado sobre la representación gráfica de 4 funciones a partir de su regla de correspondencia.
4. Tres ejercicios de función por tramos donde incluya un tramo exponencial (solo uno está desarrollado)
5. Tres situaciones contextualizadas sobre función exponencial donde solo uno está resuelto
6. Finalmente, nueve ejercicios propuestos.

Debido a que nos centraremos en el aspecto intra-matemático del objeto función exponencial, a continuación presentamos el análisis de los tres primeros puntos detallados en el párrafo anterior.

Se introduce el tema mediante la exploración de una situación en lengua natural (ver figura 18). Este problema de exploración, nos orienta a resolverlo con el apoyo de un representación tabular y gráfica, lo cual permita pasar de lo discreto, mediante los puntos obtenidos en la tabulación, a lo continuo, expresado como la curva que pasa por esos puntos, con ello activar la génesis semiótica.

Exploremos

Carolina en el año 2013 adquirió una computadora All-in-one a un precio de S/ 1700, para realizar sus trabajos de historia. Sin embargo, el equipo se ha devaluado en 20% cada año.

Con la información dada, responda lo siguiente:

a) ¿Cuál fue el precio de la computadora de Carolina en el 2015? ¿Cuál será el precio de la computadora de Carolina en el 2018?
b) Grafique los puntos que conoce hasta el momento acerca del valor de la computadora en el tiempo.
c) ¿Conoce la curva que se forma al unir los puntos de la parte b)?

Figura 18. Introducción a la función exponencial en el material de curso.

Posteriormente, se define la función exponencial, la cual inicia como herramienta teórica. Luego, esta definición de función exponencial, representada algebraicamente, es utilizado como herramienta semiótica, representamen. Finalmente, será considerada como artefacto simbólico que permita determine la regla de correspondencia de toda función exponencial (Ver figura 19).

Función exponencial

Una función exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con base a está definida por:

$$f(x) = Ca^{kx}, x \in \mathbb{R},$$

donde a, C y k son números reales, $a > 0, a \neq 1$.

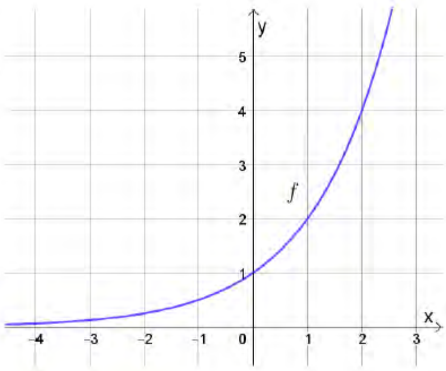
Si consideramos $C = 1$ y $k = 1$, tenemos la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, la cual analizaremos a continuación a través de los valores que puede tomar a.

Figura 19. Definición de la función exponencial en el material de curso.

En el material de curso se considera pertinente establecer algunas propiedades y características de la función exponencial a partir de su representación algebraica, con la finalidad de que sea utilizado como un artefacto simbólico para realizar su representación gráfica y determinar alguna de sus componentes, como definir las coordenadas de su intersección con el eje y, la ecuación de su asíntota horizontal, el dominio y rango para toda función exponencial $f(x) = a^x$, pretendiendo activar la génesis instrumental. Además, se presentan dos casos para la función exponencial a partir del intervalo en que es definida la base "a", donde si $a < 1$, la monotonía de la función es creciente (ver figura 20), definiendo algunas características para este caso.

Caso 1: Si $a > 1$, la función $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente creciente.

A modo de ejemplo tenemos la función: $f(x) = 2^x$, cuya gráfica se muestra a continuación.



Características que se observan en la gráfica:

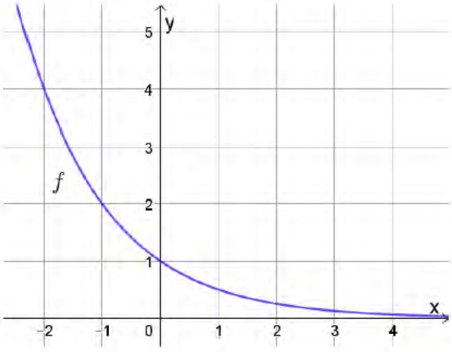
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Ran(f) =]0; +\infty[$
- La gráfica de la función f no tiene intercepto con el eje X.
- La gráfica intercepta al eje Y en el punto $(0;\ 1)$.
- La función es creciente en todo su dominio.
- Observamos que a medida que x decrece ilimitadamente, los valores de y tienden a cero, pero nunca toman dicho valor. Por tal razón, esta función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es: $y = 0$.

Figura 20. Características de la función exponencial creciente en el material de curso.

Mientras que, si $0 < a < 1$ en $f(x) = a^x$ (ver figura 21), algunas características como las coordenadas del punto de intersección con el eje y, la ecuación de la asíntota horizontal, el dominio y rango de la función, se mantiene semejantes al caso anterior, pero las otras si presenta diferencia ya que la monotonía de la función exponencial ahora es decreciente.

Caso 2: Si $0 < a < 1$, la función $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente decreciente.

A modo de ejemplo tenemos la función: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, cuya gráfica se muestra a continuación.



Características

- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Ran(f) =]0, +\infty[$
- La gráfica de la función f no tiene intercepto con el eje X.
- La gráfica intercepta al eje Y en el punto $(0;\ 1)$.
- La función es decreciente en todo su dominio.
- Observamos que a medida que x aumenta ilimitadamente, los valores de y tienden a cero, pero nunca toman dicho valor. Por tal, esta función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es $y = 0$.

Figura 21. Características de la función exponencial decreciente en el material de curso.

Por otro lado, se enuncia que la función exponencial es biunívoca (ver figura 22), con ello se define algunas propiedades que formarán parte del referencial teórico.

La función exponencial es biunívoca, por tal razón se cumple que:

- Si $a^{x_1} = a^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$, o que es lo mismo,
- Si $x_1 \neq x_2$ entonces$a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Figura 22. Propiedades de una función biunívoca en el material de curso.

Luego, definen la función exponencial natural (ver figura 23) a partir de la coordinación entre su representación algebraica y gráfica, activando la génesis semiótica.

Función exponencial de base "e"

La función exponencial natural o de base e es la función definida por: $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, donde e es un número irracional cuyo valor es 2,7182818284590… aproximadamente. El número e es conocido como número de Euler.

La gráfica de la función $f(x) = e^x$ se muestra en la figura.

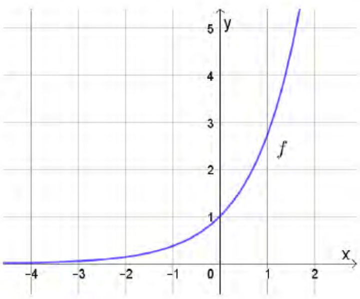


Figura 23. Características de la función exponencial de base "e" en el material de curso.

Con la finalidad de establecer un referencial teórico que justifique el trabajo con expresiones exponenciales, se presentan algunas propiedades de la potenciación (ver figura 24).

Propiedades relacionadas con expresiones exponenciales

Dado $a > 0, a \neq 1$, se cumple que:

1. $a^b = a^c \Rightarrow b = c$
2. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
3. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
4. $(a^b)^c = a^{bc}$

Figura 24. Propiedades relacionadas con expresiones de tipo exponencial en el material de curso.

Respecto a ejemplos o tareas que presenta el material del curso, tenemos un ejemplo donde el propósito es representar gráficamente la función exponencial y determinar algunos de sus elementos (ver figura 25), aquí se pretende que se utilice la información presente en cada caso de la función exponencial como un artefacto simbólico para su solución, con el objetivo de activar la génesis semiótica e instrumental.

Ejemplo 1

Trace la gráfica de las siguientes funciones e indique su rango y los interceptos con los ejes coordenados.

a) $f(x) = 5^x$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = 0{,}4^x$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = 2^x$, $x \geq 0$

d) $f(x) = 3(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$

Figura 25. Tarea para representar la gráfica de una función exponencial.

La solución que se presenta en el material de curso permite activar la génesis semiótica (ver figura 26), ya que las representaciones remiten al objeto matemático por medio del proceso de visualización.

Solución propuesta

a) Para trazar la gráfica $f(x)=5^x$, $x \in \mathbb{R}$, realizamos el proceso de tabulación. Recordemos que: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$	$5^{-2}=\frac{1}{25}$	$5^{-1}=\frac{1}{5}$	$5^0=1$	$5^1=5$	$5^2=25$

La gráfica de $f(x)=5^x$ es:

- $Ran(f)=]0;+\infty[$
- Intercepto con el eje Y: (0; 1)

Figura 26. Propuesta de solución para graficar una función exponencial.

En esta última imagen, observamos que se coordinan tres tipos de representaciones que son: algebraica, tabular y gráfica para construir el objeto, en donde la definición y las características de la función exponencial pasan de ser una herramienta ubicada en el referencial teórico a ser un artefacto simbólico para la resolución de las tareas.

En términos del ETM, las acciones descritas de manera específica y clara en el material de curso se trabajan dentro del paradigma del análisis del cálculo, dado que, la definición, los elementos y características de la función exponencial se usan sin discutir sobre su naturaleza y algunas reglas de cálculo se algo explicitas.

Por otro lado, algunos aspectos del material que fueron deducidos en el análisis del material de curso serán contrastados con el Espacio de Trabajo Matemático organizado por el profesor para la realización de su clase.

En el siguiente capítulo, se presenta Espacio de Trabajo Matemático Idóneo del profesor universitario, en particular, se analiza el trabajo matemático efectivo realizado por el profesor para la enseñanza de la función exponencial.

CAPITULO III: ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO DEL PROFESOR UNIVERSITARIO

Como pretendemos analizar el Trabajo Matemático del profesor universitario al enseñar la función exponencial (ETM idóneo), necesitamos estudiar las acciones que el profesor de una universidad privada organiza y realiza al enseñar este tipo de función.

Por ello, en este capítulo, se estudia los conceptos y las tareas sobre función exponencial que presentan los profesores universitarios a sus estudiantes, los cuales fueron obtenidos de la grabación de la clase y de la entrevista.

3.1 Escenario, sujetos e instrumentos

El curso de Matemática Básica se imparte a estudiantes del primer ciclo de las carreras de humanidades de una universidad privada de Lima y es enseñado por profesores con varios años de experiencia a nivel universitario, quienes tienen grado de Maestría, incluso algunos poseen el grado de Doctor.

En el desarrollo del curso de Matemática Básica, el profesor tiene el apoyo de dos asistentes de docencia, quienes tienen la función de apoyar a los estudiantes durante el desarrollo de las tareas propias del tema que se esté trabajando en la clase. Además, el curso consta de 4 horas semanales, partidas en dos bloques de 2 horas, en las cuales, una parte es dirigida por el docente por un tiempo aproximado de 80 a 90 minutos, luego los asistentes de docencia realizan una práctica calificada en el tiempo restante para afianzar la comprensión del tema.

Los profesores que participaron de nuestra investigación trabajan en la misma universidad y fueron dos, a los que llamaremos a partir de ahora como André y Esteban.

El profesor André es magister en enseñanza de las matemáticas y tiene formación en pregrado como ingeniero electrónico, él tiene alrededor de 12 años de experiencia como docente universitario enseñando matemáticas a estudiantes del primer ciclo, en diversas universidades de Lima, durante ese tiempo lleva 2 años seguidos dictando el curso de matemática 1 a estudiantes de humanidades del primer ciclo.

Por otro lado, el profesor Esteban es licenciado y magister en matemática, él tiene 10 años de experiencia como docente universitario en matemática, gran parte de su experiencia docente está relacionada con el dictado de cursos de matemática en carreras de Ciencias, pero en los dos últimos años también ha dictado el curso de matemática 1 a estudiantes de humanidades del primer ciclo.

Cabe precisar que, que los profesores están habituados en el uso de software GeoGebra para el desarrollo del curso.

Por otro lado, resultó necesario recolectar información sobre las acciones que realizan los profesores y la organización de su Espacio de Trabajo Matemático (ETM), los cuales permiten describir las génesis y los planos que se activan en su ETM idóneo, incluso, permite identificar los paradigmas que él privilegia. En ese sentido, según Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) las génesis semiótica, instrumental y discursiva solo se activarán como consecuencia del trabajo matemático que realiza el individuo. Además, para Kuzniak y Richard (2014), este trabajo matemático realizado por el profesor podría activar los planos Semiótico–Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis], y según Montoya y Vivier (2016) los paradigmas del análisis que el profesor podría privilegiar al enseñar la función exponencial son: el paradigma del análisis geométrico/aritmético (AG), el paradigma del análisis calculatorio (AC) y el paradigma del análisis real (AR). Por esta razón, los instrumentos utilizados son los indicados a continuación.

Para nuestra investigación, solo presentaremos el análisis de las acciones del profesor André, de quién se logró recolectar la información completa y necesaria para nuestro estudio.

Momentos de clase del profesor André

La clase realizada por el profesor André, denominada, según silabo, función exponencial y sus representaciones, es una sola sesión impartida a 65 estudiantes de Ciencias de la Comunicación y tiene una duración total de 2 horas cronológicas. Además, consta de un total de seis momentos, los cuales son: presentación de la clase, introducción a la función exponencial, definición de la función exponencial y su gráfica, desarrollo de ejemplos y tareas, actividades propuestas al estudiante y evaluación calificada de cierre. De ellas, se consideró oportuno observar, grabar y analizar solo tres momentos que nos permita realizar nuestro análisis.

Tabla 6.

Momentos observados y analizados de la clase de función exponencial realizada por el Profesor André.

Momentos	Objetivo	Tiempo real
Introducción a la función exponencial.	Describir las acciones del profesor que activan las génesis y planos de su ETM idóneo.	15 min.
Definición de la función exponencial y su representación gráfica.	Identificar los paradigmas del dominio análisis que privilegia el profesor.	15 min

Desarrollo de ejemplos y tareas propuestas al estudiante.	Describir las génesis y planos de su ETM idóneo que se activan al enseñar la función exponencial.	40 min

En la tabla 6, se muestra solo tres momentos de la clase del profesor André, ello es fuente de información para nuestro análisis, ya que nuestra preocupación es estudiar el ETM idóneo del profesor cuando enseña la función exponencial, en particular, como organiza y que acciones realiza para su enseñanza.

Entrevista

Para contrastar la información obtenida de la observación, el tipo de entrevista utilizada para este estudio fue la entrevista semiestructurada, debido a que, según Hernández, Fernández y Baptista (2014, p. 403) afirman que "se basa en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener más información", facilitando la comunicación y generando un ambiente coloquial entre el entrevistador y el entrevistado.

Tabla 7.

Preguntas de la entrevista semiestructurada realizada a los profesores universitarios.

Preguntas	Objetivo	Tiempo real
(1) De estas formas de introducir o iniciar una clase donde se enseñe la función exponencial (ver ficha 1), ¿Qué opina?	Reconocer las acciones que permite la activación de las génesis del ETM idóneo del profesor, privilegiando el paradigma AG.	5 min
(2) De estas definiciones dadas para la función exponencial (ver ficha 2), ¿Qué opina sobre ellas? ¿Usted cómo la define?	Identificar las representaciones semióticas que utiliza para definir la función exponencial, sin privilegiar al paradigma AR.	5 min
(3) De estas formas de explicar las características y elementos de la función exponencial (ver ficha 3), ¿cuál recomienda o cómo la enseñaría?	Reconocer las acciones que activan las génesis del ETM idóneo del profesor, privilegiando el paradigma AG y AC.	4 min
(4) De estos procesos sobre cómo graficar la función exponencial (ver ficha 4),	Analizar las acciones que realiza el profesor, las cuales activan las	4 min

¿Qué opina? ¿Se asemeja a lo que propuso en su clase?	génesis de su ETM idóneo, privilegiando el paradigma AG y AC.	
(5) De estos ejemplos resueltos (ver ficha 5), ¿Cuáles consideraría para una clase o cuáles propondría? ¿por qué?	Analizar las tareas que organiza en su ETM idóneo, privilegiando el paradigma AG y AC.	5 min
(6) ¿Cuál es la secuencia de conocimientos y tareas que recomendaría a un profesor que va a enseñar la función exponencial a este tipo de estudiantes?	Identificar los conocimientos y tareas que organiza en su ETM idóneo.	5 min
(7) Si tuviera que recomendar a los estudiantes un libro que les enseñe la función exponencial, ¿cuál sería? ¿por qué?	Identificar los conocimientos y tareas que organiza en su ETM idóneo.	2 min

En esta tabla, tenemos las preguntas formuladas, el objetivo del planteamiento de cada pregunta realizada al profesor André y el tiempo real de duración de cada pregunta realizada durante la entrevista.

Para el análisis de trabajo matemático realizado por el profesor universitario, presentamos la siguiente estructura.

Iniciamos estudiando las acciones del profesor André a través de la observación de la clase, complementando con la información presente en fragmentos de la entrevista realizada, con el objetivo de aclarar nuestras interpretaciones sobre las acciones observadas. Luego, se presenta una tabla de resumen que muestra las acciones que realiza el profesor André, las génesis y planos que activa, además, el paradigma del análisis que privilegia. Finalmente, se concluye e interpreta las génesis y planos que activa el profesor, los cuales son obtenidos de los conocimientos y tareas que organiza en su ETM idóneo cuando enseña la función exponencial, el cual puede estar influenciado por su ETM personal.

3.2 Trabajo matemático efectivo

Recordemos que, el profesor organiza su ETM idóneo iniciando con la elección y organización coherente de las tareas, las cuales propondrá a sus estudiantes. En ese sentido, el profesor acondiciona el ETM de referencia para que el espacio de trabajo matemático concebido por el profesor sea efectivo e idóneo. (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016). En ese sentido, las tareas consideradas en el ETM idóneo del profesor deben permitir el trabajo en el paradigma que privilegie.

A partir de los aportes de Gómez-Chacón, et al. (2016), el trabajo matemático efectivo del profesor debe entenderse como las acciones realizadas por el profesor en el aula, las cuales pueden reestructurarse, por ejemplo, se puede introducir un nuevo recurso o concepto para salir de un bloqueo que surge en el grupo de estudiantes.

En ese sentido, en esta parte de nuestro estudio presentamos el trabajo matemático efectivo del profesor André, a partir de la observación de las acciones que realizan al enseñar la función exponencial a estudiantes de la carrera de humanidades. Por lo tanto, hemos divido la clase en tres etapas.

Tabla 8.

Etapas del trabajo matemático efectivo del profesor André.

Etapas	Descripción
a) Exploración	Las acciones del profesor están orientadas en explorar la solución de una situación problemática de introducción para la enseñanza de la función exponencial.
b) Estudio de la función exponencial	Las acciones del profesor tienen como centro explicar la definición, representación gráfica, elementos y características de una función exponencial.
c) Resolución de tareas propuestas	Las acciones del profesor están organizadas para presentar la solución de dos tareas propuestas a los estudiantes como: graficar la función exponencial a partir de su regla de correspondencia y determinar su regla de correspondencia a partir de su representación gráfica.

Las etapas presentadas en la tabla 8 nos permiten observar, describir y analizar las acciones que realiza el profesor André al enseñar la función exponencial. Por lo tanto, se reconocen los conocimientos de función exponencial que organiza y las tareas que propone para su clase, los cuales se detallan en cada una de las etapas.

Es necesario aclarar que a partir de esta sección de nuestro estudio, en la trascripción de las interacciones realizadas en la clase sobre función exponencial, al profesor André lo denominamos como profesor, al grupo formado por el profesor y estudiantes como todos, al grupo de estudiantes como estudiantes, mientas que a los estudiantes con mayor participación en la clase como estudiante A, estudiante B y estudiante C.

a) Exploración

El profesor presentó y resolvió una tarea llamada “exploremos” (ver figura 27), cuyo objetivo fue orientar a sus estudiantes para descubrir algunas características de la función exponencial.

Exploremos

Carolina en el año 2013 adquirió una computadora All-in-one a un precio de S/ 1700, para realizar sus trabajos de historia. Sin embargo, el equipo se ha devaluado en 20% cada año.

Con la información dada, responda lo siguiente:

a) ¿Cuál fue el precio de la computadora de Carolina en el 2015? ¿Cuál será el precio de la computadora de Carolina en el 2018?
b) Grafique los puntos que conoce hasta el momento acerca del valor de la computadora en el tiempo.
c) ¿Conoce la curva que se forma al unir los puntos de la parte b)?

Figura 27. Tarea de exploración sobre la función exponencial.

Profesor: Vamos a ver un problemita, [..] para que vean un proceso de construcción de este tipo de funciones, bien dice, Carolina en el año 2003 adquirió una computadora All-in-one a un precio de 1700 soles, para realizar su trabajo. Sin embargo, el equipo se ha devaluado en 20% por año, ¿qué significa que se ha devaluado?

Estudiante A: que ha perdido valor.

Profesor: o sea, por año está perdiendo valor esa máquina. Pero, te dice pierde valor 20% anual, entonces, cómo podemos saber, luego de un año, ¿cuánto costaría esa máquina?, luego de 2 años y luego de 3 años, ¿Cómo podríamos nosotros saber el precio de esa máquina? ¿Qué hacer?

Estudiante B: hallar ecuaciones con sus variables.

Profesor: claro, hallar ecuaciones, hallar variables.

En ese fragmento de la clase, el profesor comenta sobre la información presente en el problema. Además, relaciona esta tarea con su referencial teórico, asegurando que, incrementos constantes para la variable x implica incrementos o decrementos proporcionales para la variable y, debido a que reconoce que el valor de la computadora se deprecia proporcionalmente en 20% respecto al año anterior. Asimismo, el profesor utiliza la variable x para describir que la función es continua, indicando que x puede ser cualquier número real. Pero, especifica que, en este caso resulta ser $x \geq 0$. Con ello se activa la génesis discursiva y privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Luego, el profesor resuelve el problema de exploración realizando cálculos aritméticos. A continuación, se detalla la forma cómo determina el precio de la computadora según los años transcurridos.

Profesor: […] Vamos a comenzar a darle valores, por ejemplo, voy a poner que t sea el tiempo transcurrido y V vamos a ponerle, valor de la máquina. Inicialmente, ¿cuánto costó esa máquina?

Estudiantes: 1700.

Profesor: ¿Qué valores le asignarían a esta variable t?, la cual va a ser el tiempo en años y V, valor en soles. Inicialmente, podemos decir que el tiempo es cero, o sea, el momento en que compró el equipo, ¿cuánto costó el equipo?

Estudiante A: 1700

Profesor: Ahora, luego de un año, ¿cuánto costará el equipo?

Estudiantes: 1360

Profesor: O sea, ¿cómo obtengo ese valor? ¿De dónde salió ese valor?, O sea a este número 1700 por quién lo ha multiplicado.

Estudiante A: por 0,8.

Profesor: Ah, lo ha multiplicado por 0,8 […] ya hemos trabajado este tema, al decir que su valor disminuye en 20% quiere decir que ahora su valor es 80%, vamos a dejarlo así $1700 \cdot 0{,}8$ sin el valor numérico, porque queremos construir la función que va a modelar el valor de esta máquina a partir de casos particulares. De esta manera, a ver si hay un patrón que nos permita determinarlo. A ver, luego de 2 años, ¿cuánto será el valor de esa máquina?

Estudiante A: Multiplicamos otra vez por 0,8.

Profesor: O sea, ahora esto $1700 \cdot 0{,}8$ es tu nuevo 100%, ¿qué quiere decir?

Todos: 1700 por 0,8 por 0,8,

Profesor: O sea, esto queda al cuadrado, $1700 \cdot 0{,}8^2$, eso te va a dar el valor numérico, entonces, para tres $1700 \cdot 0{,}8^3$, ya creo que uno ya distingue, ¿no?, y así sucesivamente.

El profesor hizo que sus estudiantes usen la calculadora científica para que evalúen algunos valores discretos, representando el problema en una tabla que relacione el tiempo transcurrido en años con el valor de la computadora (ver figura 28). Por tanto, utiliza la representación tabular para determinar el precio de la computadora a partir de los años transcurridos desde el 2013, activando la génesis semiótica. Además, se activa la génesis instrumental, cuando utilizó la calculadora científica como una herramienta informática, la equivalencia $0{,}8 \equiv 80\%$ como un artefacto simbólico para el cálculo del precio de la computadora, y el proceso de calcular el valor numérico de una expresión exponencial, por tanto activa el plano [Sem-Ins]. Además, se observa que emplea la definición de una sucesión geométrica para calcular el precio de la computadora en función del tiempo transcurrido, activando su génesis discursiva, estos valores lo representa en una tabla. En ese sentido, se activa el plano [Sem-Dis].

Las acciones descritas en el párrafo anterior, instaron a trabajar en el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético y en el paradigma del Análisis Calculatorio.

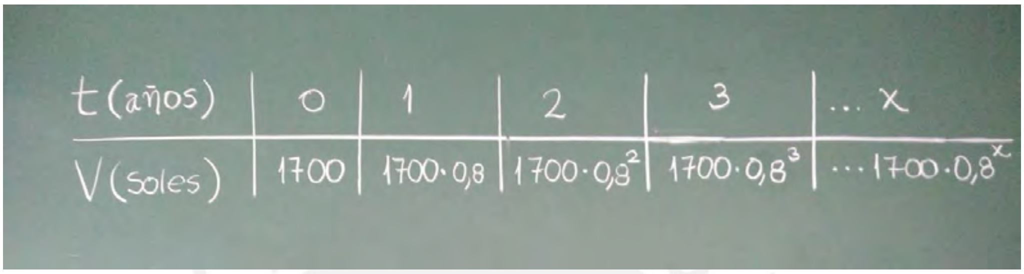


Figura 28. Representación tabular del problema de exploración sobre función exponencial

Seguidamente, el profesor determina la regla de correspondencia a través de los valores encontrados en la tabla, de la siguiente manera.

Profesor: Ahora, la pregunta será y luego de x años, cualquier año de forma general, ¿cuánto costará ese equipo?

Estudiantes: 1700 por 0,8 a la x.

Profesor: $1700 \cdot 0{,}8^x$, o sea, hemos encontrado el valor de la máquina luego de x años de haberla comprado, es decir, luego de x años, a partir de 2013, se puede encontrar o modelar a partir de esta función $V(x) = 1700 \cdot 0{,}8^x$, y qué particularidad la ven a esa función, qué es diferente a la lineal y a la cuadrática que hemos estudiado anteriormente.

Estudiante C: El x está en el exponente.

Profesor: La variable está en el exponente, la variable es un exponente. […] De forma general, vamos a modelar una función exponencial de esta forma $f(x) = c \cdot a^x$, ese va a ser mi función […] con una constante C, valor inicial, y voy a tener acá una base elevada a la x, esta va a ser nuestra de correspondencia, para modelar este tipo de función. […] Inicialmente, esto será para nosotros la función exponencial, de la cual vamos a partir para representarla gráficamente, o a partir de un gráfico la vamos a representar de forma algebraica, determinando su regla de correspondencia.

En este momento, el profesor determinó la regla de correspondencia $V(x) = 1700 \cdot 0{,}8^x$ para $x \geq 0$, afirmando que corresponde a una función exponencial justificando que este tipo de función tiene a la variable independiente x como exponente y tiene la forma $f(x) = c \cdot a^x$, donde c es el valor de la computadora en el 2013, denominándolo valor inicial, ratificando que, si $x = 0$ entonces el valor $V(0) = 1700$.

En ese sentido, utiliza la información presente en la tabla para cambiar de su representación tabular a su representación algebraica de la función exponencial, activando la génesis semiótica. Además, utiliza la expresión $f(x) = c \cdot a^x$ de su referencial teórico, para que a partir de ella pueda justificar si una función es exponencial, activándose la génesis discursiva. Por lo tanto, las acciones descritas permiten la activación del plano [Sem-Dis] e instó a trabajar en el paradigma AC.

Luego, representa gráficamente para visualizar la función exponencial (ver figura 29).

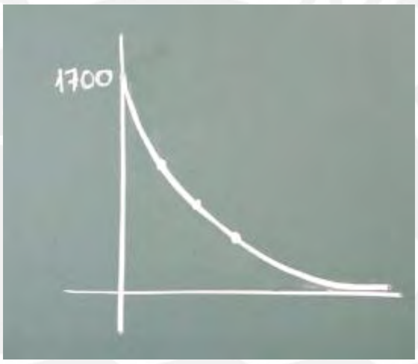


Figura 29. Representación gráfica del problema de exploración de la función exponencial.

Se evidencia que el profesor coordinó la representación tabular con la representación gráfica de la función exponencial y su explicación está orientada por la definición y características de la gráfica de una función de la forma $f(x) = c \cdot a^x$ presentes en el material del curso. En términos del ETM, activó la génesis semiótica y discursiva del plano [Sem-Dis], privilegiando el paradigma del Análisis Calculatorio.

Para concluir con esta tarea, el profesor pretendió que sus estudiantes interpreten algunas características de la función exponencial a partir de su gráfica.

Profesor: Ahora, claro está que, para esta función, ¿cuál vendría a ser el dominio?

Estudiante A: Los reales.

Profesor: Seguro, ¿todos los reales para esto? (señala la tabla de valores).

Estudiante A: de cero al infinito.

Profesor: Vamos a ponerle mayor igual a cero, porque el cero era cuando estabas en el año 2013. […] habrá que ver hasta cuándo perderá valor, ¿habrá algún tiempo o valor de x que haga que la función sea cero? […]¿Qué pasará, si x cada vez es mayor?, esto va ir bajando (señala la gráfica de la función), pero hasta dónde bajará, ¿llegará a tomar valores negativos?

Estudiantes: No

Profesor: Claro, va a seguir bajando, pero no toma valores negativos. […] La función va a seguir bajando y bajando, la cantidad se hace casi despreciable saber cuánto más baja, pero va a seguir bajando. […] x se va hacia al infinito, y seguirá bajando. Ese es un comportamiento de algunas funciones exponenciales. Tal vez ustedes reconocen o saben ¿qué nombre recibe esta recta a la cual la gráfica se va acercando a medida que x tiende al infinito?

Estudiante C: Asíntota.

Profesor: Este es una asíntota horizontal (señala el eje x). Las funciones exponenciales presentan este tipo de comportamiento, tienen asíntotas. Ahora, […] se ha prestado el problema de exploración para dibujar una función decreciente, pero si tú te das cuenta, esta función ¿en algún momento crece o es estrictamente decreciente?

Estudiante C: Decreciente

Profesor: Totalmente decreciente. Pero, podríamos encontrar una función que tenga un comportamiento que sea creciente y también tendrá su asíntota. Estas funciones o son crecientes o son decrecientes, no como las cuadráticas […]. Estas son funciones que vamos a trabajar ahora.

El profesor explica la monotonía de la función exponencial a partir de su representación gráfica y explica la noción de la asíntota horizontal presente en la gráfica de esta función.

En ese sentido, moviliza los elementos y características de una función exponencial, activando la génesis instrumental, y utiliza el referencial teórico sobre monotonía y asíntota de una función exponencial activando la génesis discursiva. En consecuencia, las acciones del profesor activan el plano [Ins-Dis], privilegiando el paradigma Análisis Geométrico/Aritmético y el paradigma del Análisis Calculatorio.

Esta práctica del profesor André es coherente con la respuesta dada en la pregunta 1 realizada en la entrevista.

Tabla 9.

Pregunta 1 de la entrevista semiestructurada realizada al profesor André.

Pregunta	Respuesta del profesor

(1) De estas formas de introducir o iniciar una clase donde se enseñe la función exponencial (ver ficha 1), ¿Qué opina?	Cuando le enseñas a estudiantes de humanidades, ellos lo que buscan es como usar la matemática en problemas relacionados a su carrera o en un contexto real.
Si usted elaborara su propio material, ¿cómo iniciaría?	Buscaría información en artículos y revistas, [...] generando la necesidad de estudiar esta función. Prepararía un material a partir de casos particulares donde el estudiante va construyendo números, va ir construyendo esa función. [...] una vez que construye se le puede decir que este tipo funciones es una función exponencial, y luego, mostrar sus características, ahí yo utilizaría software matemáticos ya que es muy motivador para los chicos, el ver movimiento y como las variables covarían.

En esta respuesta, se deduce que el profesor André considera que, para enseñar la función exponencial a estudiantes del primer ciclo de las carreras de humanidades, se debe partir de una situación contextualizada que permita al estudiante conocer el objeto función exponencial, y que su resolución permita representarla numérica y gráficamente.

Por otra parte, recomienda el uso de un software matemático que facilite graficar y que permita distinguir algunas características presentes en la gráfica, esto último no es realizado por el profesor en esta etapa del trabajo matemático efectivo del profesor.

En ese sentido se confirma que el profesor André, en esta etapa, privilegia trabajar en el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético y del Análisis calculatorio.

Tabla 10.

Análisis del trabajo matemático del profesor André en la etapa de exploración.

Acciones matemáticas realizada por el profesor	**Tipo de génesis activadas**	**Planos activados**	**Paradigma del análisis que privilegia**
Identifica la utilidad de la función exponencial para la solución del problema e identifica las variables.	Génesis discursiva Relaciona con su referencial sobre incrementos constantes para x generan incrementos proporcionales para $f(x)$.	–	**AG**

Construye una tabla donde calcula el precio de la computadora en función del tiempo transcurrido.	Génesis semiótica: Emplea el registro tabular para calcular valores discretos de la función exponencial. Génesis instrumental: Utiliza el proceso de calcular el valor numérico de una expresión exponencial Utiliza la equivalencia $80\% \equiv 0{,}8$ como artefacto simbólico. Génesis discursiva Emplea la definición de sucesión geométrica para el cálculo de precio en función del tiempo.	**[Sem-Ins]** **[Sem-Dis]**	**AG** **AC**
Determina la regla de correspondencia de la función.	Génesis semiótica: En el registro tabular calcula el precio de la computadora después de x años transcurridos, efectúa el cambio a su representación algebraica para definir la regla de correspondencia de la función. Génesis discursiva: Emplea como referencial que, una función exponencial es de la forma $f(x) = C \cdot a^x$	**[Sem-Dis]**	**AC**
Representa gráficamente los puntos en la pizarra y la curva que pasa por ellos.	Génesis semiótica: Coordina el registro tabular, algebraico y gráfico para representar la curva que pasa por los puntos, haciendo el tránsito de lo discreto a lo continuo. Génesis discursivo: Fundamenta su explicación con las características de una función de la forma $f(x) = C \cdot a^x$	**[Sem-Dis]**	**AC**

Determina la monotonía y la recta asíntota de la función a partir de su representación gráfica.	Génesis instrumental: Moviliza la definición, elementos y características de una función exponencial. Génesis discursiva: Fundamenta su explicación sobre asíntota y monotonía de una función de la forma $f(x) = C \cdot a^x$	**[Ins-Dis]**	**AG** **AC**

En esta etapa, se observa que el profesor André pretendió que sus estudiantes evalúen numéricamente en una tabla para obtener algún patrón entre los valores obtenidos y a través de estos puntos discretos poder representar la curva que pasa por esos puntos, haciendo un tránsito de lo discreto a lo continuo. En términos del ETM se activaron los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis], y el profesor instó a trabajar en los paradigmas del Análisis geométrico/Aritmético y del Análisis calculatorio.

b) Estudio de la función exponencial

El profesor presenta una diapositiva y define que, una función exponencial es una función real de variable real $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = Ca^{kx}$, $x \epsilon \mathbb{R}$, donde $a, C\ y\ k$ son números reales con $a > 0$ y $a \neq 1$ (ver figura 30).

Profesor: La presentación de las funciones exponenciales a veces cambia en los libros, a veces ponen $f(x) = Ca^x$, a veces le ponen $f(x) = Ca^{kx}$, donde k es una constante. Pero, ese a^k, también va a ser una constante, entonces a^{kx}, puede ponerse como b^x. Entonces, suficiente para ustedes hacer esto, si quieren modelar un exponencial.

Una función exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con base a está definida por:

$$f(x) = Ca^{kx}, x \in \mathbb{R},$$

donde a, C y k son números reales, $a > 0, a \neq 1$.

Figura 30. Definición de la función exponencial utilizada por el profesor.

En términos del ETM, Al definir la función exponencial activó la génesis semiótica ya que representó algebraicamente a la función exponencial, de esta manera este representamen nos remite al objeto matemático. Además, basa su definición en que las funciones exponenciales tienen la forma $f(x) = Ca^{kx}$, activando su génesis discursiva. Por tanto, las acciones realizadas por el profesor activan las génesis del plano [Sem–Dis] y se privilegia el paradigma del Análisis Calculatorio.

Luego, en otra diapositiva, consideró $c = 1$, $k = 1$ para presenta la función de forma $f(x) = a^x$, a partir de ella presentó algunas diferencias. Enfatiza que, cuando $a > 1$, la función es creciente (ver figura 31).

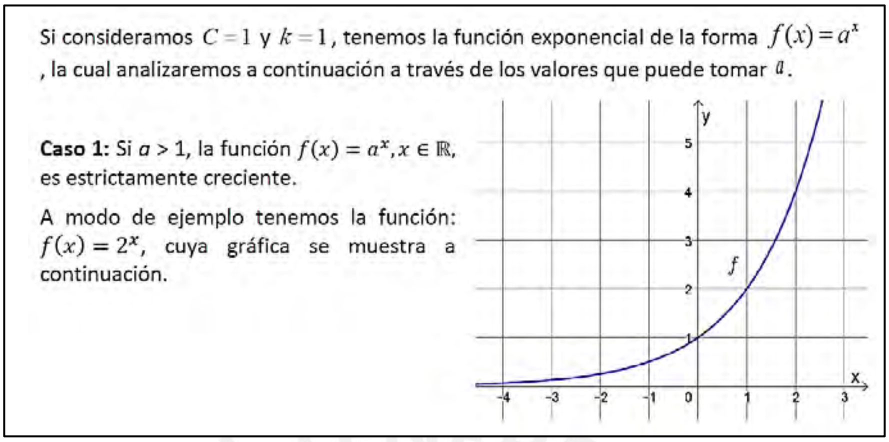


Figura 31. Características de la función exponencial de base $a > 1$.

Profesor: Ahora, si se considera que $C = 1\ y\, k = 1$, entonces tenemos una función de la forma $f(x) = a^x$, y en base a ella, vamos a ver cómo es el comportamiento de las funciones exponenciales. Por ejemplo, cuando a es mayor que uno, no es este caso (señala el problema de exploración) porque nos salió menor que 1. Pero, cuando $a > 1$ las funciones exponenciales tienen esta forma (ver figura 31), según las características son crecientes cortan al eje y en el punto $(0; 1)$, así tienen ese comportamiento, claro va a depender del valor de a, […] tiene asíntota horizontal cuya ecuación es, ¿Cuál es la ecuación de esta recta horizontal que es el eje x? ¿Cuál es su ecuación? ¿Cómo son las rectas horizontales? ¿Cuál será la ecuación de esta recta? ¿x igual a un número o y igual a un número?

Estudiante B: Igual a un número,

Profesor: Igual a…

Estudiante B: cero.

Profesor: Las funciones que tienen esta forma $f(x) = a^x$, todas tienen una forma creciente o decreciente. […] la gráfica de la función se va a pegar al eje x, su asíntota será $y = 0$.

Estudiante B: ¿debería ser cero, cuando x es cero?

Profesor: Lo que pasa es que, para el concepto de asíntota intervienen límites, el límite cuando esto tiende al infinito va a ser cero. Pero, eso no vamos a trabajar ahora.

En la diapositiva siguiente, el profesor explicó cuándo $0 < a < 1$ la función es decreciente (ver figura 32).

Profesor: Cuando la base es un valor entre 0 y 1, la función es decreciente, como en el caso que hemos visto en el ejemplo anterior, igual va a tener su asíntota $y = 0$, [...] todos van a tener esa forma. Ahora, acabamos de ver funciones, que todas se están acercando al eje x, pero no necesariamente va a pasar eso, ¿cómo tendría que ser la función para que se acerque a otro número, a otra recta? Ahí, tienes que manejar lo que es la traslación de la gráfica.

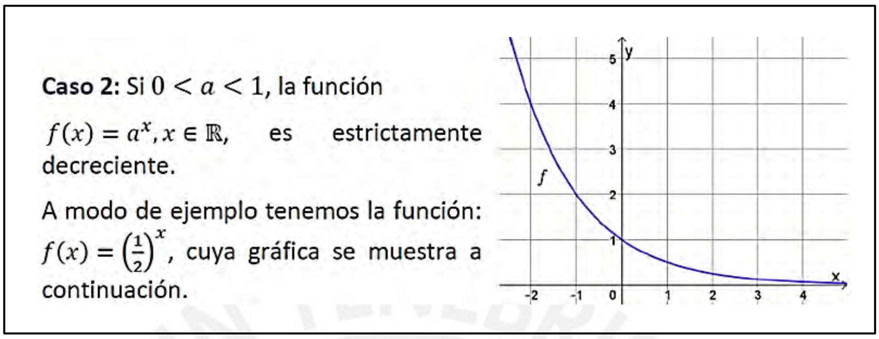


Figura 32. Características de la función exponencial de base $0 < a < 1$.

Se observó que, el profesor coordinó las representaciones en lengua natural, algebraica y gráfica, luego explicó el concepto de asíntota, lo cual está fundamentado en las características de la función exponencial $f(x) = a^x$. En ese sentido, activó la génesis semiótica y discursiva del plano [Sem-Dis], privilegiando el paradigma Análisis Calculatorio.

Por otro lado, el profesor André presenta una diapositiva adicional, donde define la función exponencial de base e (ver figura 33), como un caso particular cuando $a > 1$.

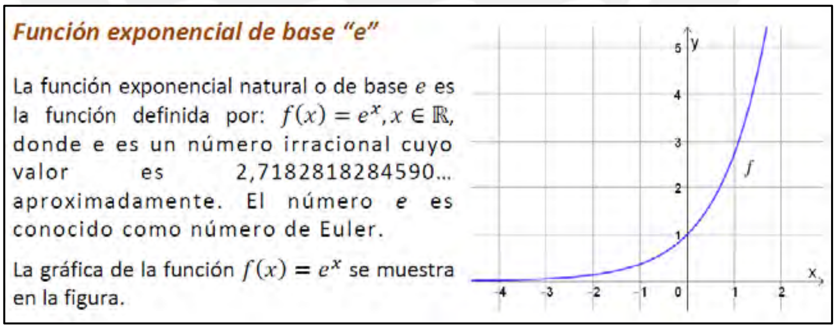


Figura 33. Definición de la función exponencial natural.

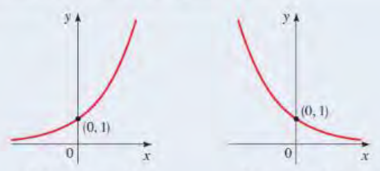
Profesor: Un caso particular de este tipo de funciones crecientes es cuando la base es el número de Euler, la función e^x, donde ese es su valor (ver figura 33). El valor de e es un número irracional, verán que su gráfica es muy similar a cualquiera que tenga su base mayor a 1, sino que nosotros en modelación empleamos bastante este tipo de función, más adelante vamos a trabajar con logaritmos también, pero solamente como una fórmula que nos va a permitir determinar un valor de x.

En este caso, el profesor coordina la representación gráfica con la algebraica. Además, reconoce el valor del número e, el cual es utilizado como una herramienta teórica, por tanto se activaron las génesis del plano [Sem-Dis] y se insta a trabajar en el paradigma del Análisis Calculatorio.

Se observa que, el profesor siguió lo indicado en el material del curso (pp. 62-63) y sus acciones coinciden con respuesta dada en la pregunta 2 y 3.

Tabla 11.

Pregunta 2 y 3 de la entrevista semiestructurada realizada a los profesores universitarios.

Preguntas	Respuesta del profesor
(2) De estas definiciones dadas para la función exponencial (ver ficha 2), ¿Qué opina sobre ellas?	Para los chicos de humanidades me parecería suficiente la segunda. **FUNCIONES EXPONENCIALES** La **función exponencial con base** a está definida para todos los números reales x por $$f(x) = a^x$$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Aunque, tendríamos que decir que esta es una función exponencial básica y que después se le puede aplicar otras transformaciones.
¿Usted cómo la define?	Yo la definiría como una función que presenta la variable independiente como el exponente de una base, donde esa base tiene que ser un número real positivo diferente de uno.
¿Conoce la caracterización de Cauchy para que una función sea exponencial?	No, no la recuerdo.
(3) De estas formas de explicar las características y elementos de la función exponencial (ver ficha 3), ¿cuál recomienda?	El primero es más general, por eso yo trabajaría como la segunda opción, cuando "a" es mayor que uno, y entre cero y uno. **GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES** La función exponencial $$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.  $f(x) = a^x$ para $a > 1$ $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

	Luego, les mostraría casos particulares [...] yo utilizaría la tecnología acá pues, dándole a "a" diferentes valores entre cero y uno para que vean como es la forma, que todas son muy similares. Mostraría estas dos y abajo les dejaría una tabla para que comiencen a indicar las características de ambos, para que hagan un comparativo.
¿Qué características o elementos considera necesarios?	Trabajaríamos con una función conocida donde su tabulación sea sencilla como una base 2 o ½, con valores grandes positivos y negativos, [...] para que valor se aproxima la función cuando x es más negativo. Con ello, determinar los interceptos y su asíntota.

En las respuestas dadas por el Profesor André, encontramos que el profesor privilegia trabajar en el paradigma del Análisis calculatorio, ya que usa la definición y las características de la función exponencial sin la necesidad de reflexionar sobre su naturaleza.

Para concluir esta etapa, el profesor utilizó el software GeoGebra para su explicación, con ello, permitir que sus estudiantes reconozcan la monotonía de la función exponencial de la forma $f(x) = a^x + b$, visualizando su representación gráfica y su asíntota horizontal a partir de los valores que tomen a y b al momento de manipularlos por medio de deslizadores de GeoGebra.

En un inicio, manipuló los deslizadores haciendo $b = 0$ generando la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$. Manipuló el valor de a con ayuda de su respectivo deslizador, obteniendo que si $0 < a < 1$, la función es decreciente y su asíntota tiene por ecuación $y = 0$ (ver figura 34).

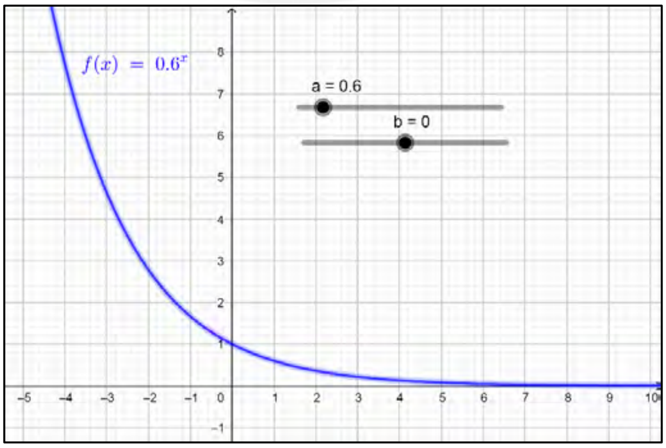


Figura 34. Grafica de la función exponencial $f(x) = a^x$ cuando $0 < a < 1$.

Profesor: Esta la función que estamos trabajando, […] cuando la base es de 0 a 1, como verán para diferentes valores de a, que es la base, todos son decrecientes. Pero, a medida que ya se acerca a uno, que pasa cuando la base es 1.

Estudiante A: Es uno, una recta.

Profesor: Se hace uno, ¿no?, porque 1^x es 1, o sea, por eso cuando hablamos de funciones exponenciales definimos la base entre cero y uno, pero abierto en cero y abierto en 1, o mayor a 1, porque, si la base es uno ya no es una función exponencial, sería una función constante

En ese instante, el profesor André explicó las razones porque $a \neq 1$ ya que se convertía en una función constante donde $f(x) = 1^x = 1$ (ver figura 35).

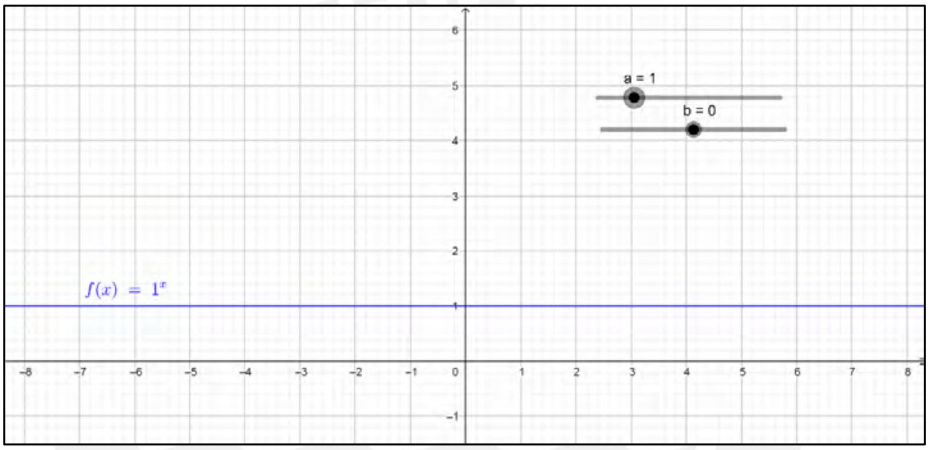


Figura 35. Grafica de la función de la forma $f(x) = 1^x$.

Profesor: En cambio, cuando la base comienza a ser más grande, son crecientes. A medida que la base es mayor el crecimiento es rápido, más pronunciado.

En este caso, concluyó que si $a > 1$, la función es creciente y su asíntota tiene por ecuación $y = 0$ (ver figura 36).

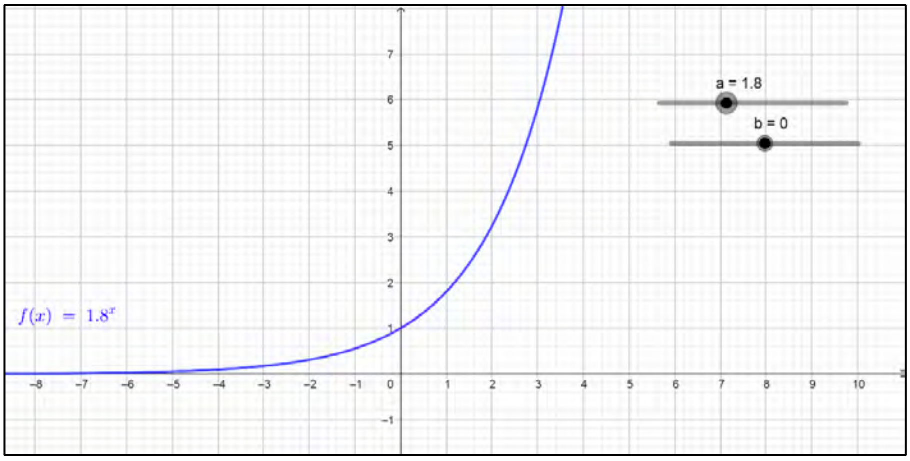


Figura 36. Grafica de la función exponencial $f(x) = a^x$ cuando $a > 1$.

Luego, manipuló el deslizador haciendo $b \neq 0$ generando la función exponencial de la forma $f(x) = a^x + b$, indicando que el valor de b le permite obtener la ecuación de la asíntota $y = b$ (ver figura 37).

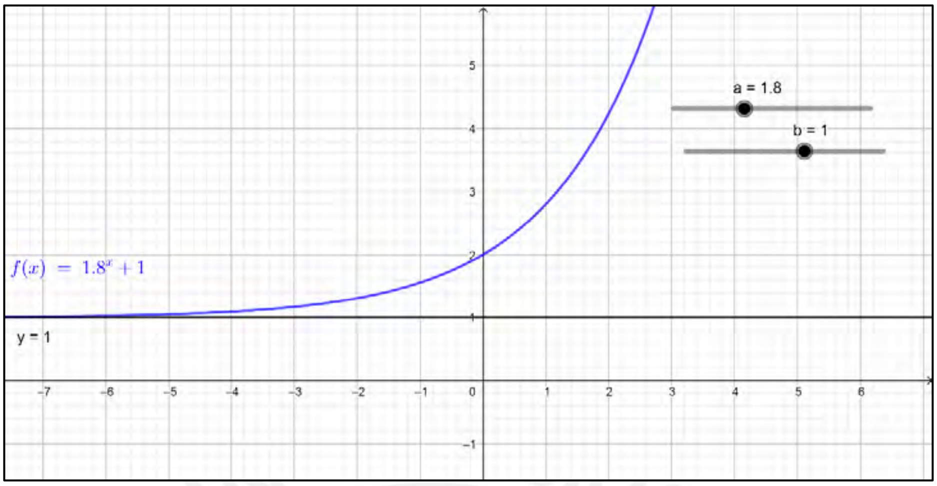


Figura 37. Grafica de la función exponencial $f(x) = a^x + b$ donde $b \neq 0$.

Profesor: Voy a poner acá (software GeoGebra) una recta $y = b$, esa es su asíntota. Qué pasa cuando variamos el b, por ejemplo, ya mi función no es $f(x) = 1{,}8^x$, sino estoy sumando uno, $f(x) = 1{,}8^x + 1$. A sumarle, al sumarle un valor numérico o restarle lo que hace es que toda la gráfica suba o baja, se desplaza verticalmente, si acá le pongo $+1$, quiere decir que toda la función sube una unidad, además, cuando x se hace cada vez más negativa va a ir aproximándose a $y = 1$, entonces acá, ¿Cuál será la ecuación de la asíntota?

Estudiante C: $y = 1$.

Profesor: Igual, si yo le pongo dos o tres, toda la gráfica sube. Nosotros le llamamos traslación vertical.

Estudiante C: ¿La grafica llega a chocar a $y = 1$?

Profesor: No. Se va aproximando cada vez más pero no la llega a cortar. […] como ven la gráfica no siempre se acerca al eje x, ello va a depender de la asíntota. […] Para hacer un gráfico de una función, tú tienes que tabular, pero también tienes que reconocer la regla de correspondencia que se utiliza. Por ejemplo, si escribo $f(x) = 0{,}1^x - 2$, tienes que reconocer que con ese numerito vas a construir su asíntota, es decir, si es -2 su asíntota es $y = -2$, por eso les aclaro que va a depender de ese número, igual puede bajar o puede subir.

En esta parte, se activan el plano [Ins-Dis] ya que a partir de la representación mediada por el GeoGebra, moviliza la definición de la función exponencial y sus transformación gráfica $f(x) = a^x + b$ para construir algunas características de esta función, como su monotonía y la ecuación de la asíntota $y = b$, activando su génesis instrumental, ello se contrastó en todo momento con su referencial teórico sobre las características de una función de la forma $f(x) = a^x + b$, activando su génesis discursiva.

Tabla 12.

Análisis del trabajo matemático del profesor André en la etapa de estudio de la función exponencial.

Acciones matemáticas realizada por el profesor	Tipo de génesis activadas	Planos activados	Paradigma del análisis que privilegia
Define la función exponencial.	Génesis semiótica: Emplea el registro algebraico para definir la función exponencial. Génesis discursiva: Una función exponencial está definida por $f(x) = C \cdot a^x$	**[Sem-Dis]**	**AC**
Define las características de la función exponencial definida por $f(x) = a^x$	Génesis semiótica: Coordina el registro en lengua natural, algebraico y gráfico para definir los elementos y características presentes en la función exponencial. Génesis discursiva: Fundamenta su explicación con las características de una función exponencial $f(x) = a^x$	**[Sem-Dis]**	**AC**
Define la función exponencial natural $f(x) = e^x$	Génesis semiótica Coordina el registro algebraico y gráfico para definir a la función exponencial natural como un	**[Sem-Dis]**	**AG**

	caso particular de la función exponencial cuando $a > 1$. Génesis discursiva: Reconoce el valor del número e.		
Determina la monotonía y la asíntota de la función definida por $f(x) = a^x + b$ empleando un ambiente de representaciones dinámicas en el GeoGebra.	Génesis instrumental Moviliza la definición de función exponencial y las transformaciones gráficas de una función. Génesis discursiva Fundamenta su explicación con las características de una función exponencial de la forma $f(x) = a^x + b$, el cual define la trasformación de la función exponencial.	**[Ins-Dis]**	**AG** **AC**

El profesor no enmarca su clase en el paradigma del Análisis real (AR), ya que trabaja en los paradigmas del Análisis Aritmético/Geométrico y del Análisis Calculatorio, considerando a la definición de función exponencial como un referencial teórico para justificar cuando una función es o no exponencial, de forma independiente a la naturaleza o existencia del objeto matemático, ello se contrasta ya que desconoce la caracterización de Cauchy para definir cuando una función es exponencial.

Además, se activó las génesis del plano [Sem-Dis], ya que la función exponencial se presenta en el registro algebraico y gráfico, de esta manera este representamen nos permite visualizar el objeto función exponencial, el cual está fundamentado en las características de la función exponencial. Además, a partir de la representación gráfica mediada por el GeoGebra, permitió establecer algunas características de la función exponencial como la monotonía de la función de acuerdo con el valor de "a", y definió de manera intuitiva y gráfica la ecuación de la recta asíntota de acuerdo con el valor de "b", en este caso se activó las génesis del plano [Ins-Dis].

El profesor privilegia para su clase el paradigma del Análisis geométrico/aritmético (AG), ya que utiliza la representación gráfica para interpretar y deducir las características presentes en toda función exponencial. Además, los elementos y características de la función exponencial encontradas sirven para el cálculo de forma independiente a su naturaleza, en ese sentido, el profesor privilegiará el paradigma del análisis calculatorio (AC).

c) Resolución de tareas propuestas

El profesor propuso y resolvió dos tareas (ver figura 38), las cuales las presenta como ejemplos de la clase, las cuales son: primero, trazar la gráfica de una función exponencial, e indicar el rango, interceptos con los ejes coordenados y la ecuación de la asíntota, segundo, determinar su regla de correspondencia a partir de su representación gráfica de la función. El objetivo del profesor fue que los estudiantes puedan graficar la función exponencial a partir de su regla de correspondencia y viceversa, es decir, que puedan pasar de una representación a otra.

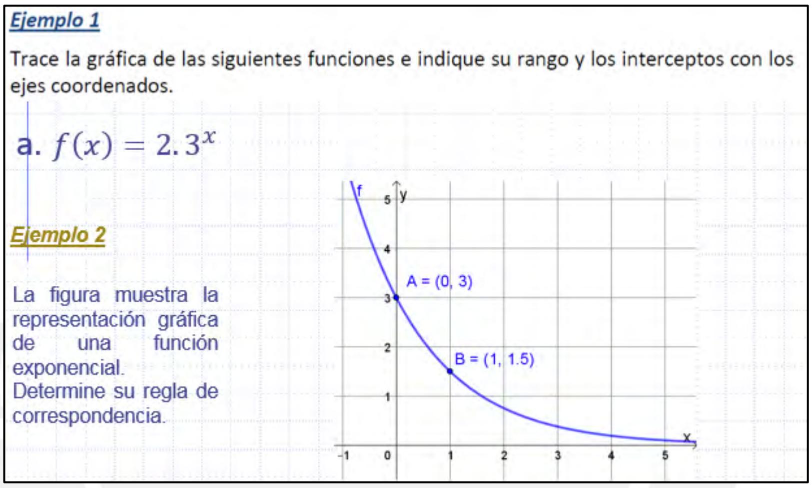


Figura 38. Tareas sobre función exponencial propuesta por el profesor.

Tarea 1: Trace la gráfica de las siguientes funciones e indique su rango y los interceptos con los ejes coordenados. a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$

El profesor graficó la función exponencial a partir de su representación algebraica, utilizó la representación tabular para calcular la imagen $y = f(x)$ a partir de algunos valores discretos de la variable x. Luego, a partir de las coordenadas de los puntos discretos obtenidos de la tabulación, el profesor afirma que "estos puntos pertenecen a la gráfica de la función", por ello grafica estos puntos luego los une mediante una curva, así representa gráficamente la función a partir de la regla de correspondencia dada, realizando gráficamente el tránsito de lo discreto a lo continuo. Finalmente, representa algebraicamente la ecuación de su asíntota, dominio y rango de la función, pero el intercepto con los ejes coordenados lo representa gráficamente (ver figura 39).

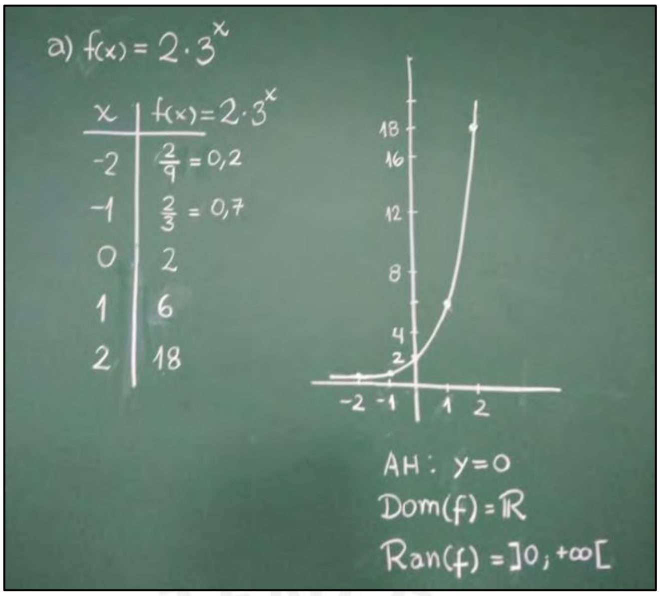


Figura 39. Solución de la tarea 1 a realizada por el profesor André.

Adicionalmente, propone una tarea complementaria, pidiendo a sus estudiantes que ahora grafiquen la función definida por $f(x) = 2^x + 3$, con el objetivo de determinar la ecuación de la asíntota, utilizando como herramienta teórica el modelo $f(x) = a^x + b$, del cual durante la etapa anterior se logró construir y deducir que la ecuación de la asíntota tiene la forma $y = b$ (ver figura 40).

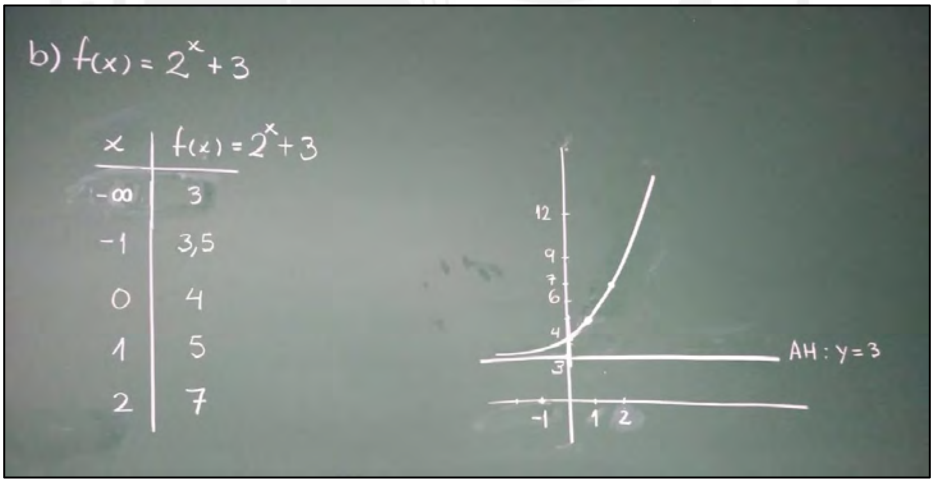


Figura 40. Solución de una tarea complementaria realizada por el profesor André.

Se observa que, se activó las tres génesis, resultando la activación de los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis]. Inicia con la representación algebraica de la función exponencial, luego la presenta en su registro tabular, y finaliza con su registro gráfico, permitiendo a sus estudiantes visualizar esta función, de esa manera se activa la génesis semiótica. Además, al cambiar del registro tabular al registro gráfico se presenta el tránsito de lo discreto a lo continuo que es una de las características constitutivas del análisis, el cual debe ser apoyado con el uso de un software matemático que permita graficar la curva que pasa por esos puntos. Respecto a la génesis instrumental, esta se activó al utilizar la calculadora científica como una herramienta informática y al utilizar el proceso del cálculo del valor numérico de una expresión exponencial, el cual permite la construcción de la función exponencial en su registro tabular, además, moviliza el cálculo del dominio y rango de una función a partir de su gráfica. En el caso de la génesis discursiva, esta se activa cuando reconoce que las expresiones de la forma $f(x) = C \cdot a^x$ y $f(x) = a^x + b$ son reglas de correspondencia de funciones exponenciales.

Tabla 13.

Análisis del trabajo matemático del profesor André en la etapa resolución de tareas propuestas - tarea 1

Acciones matemáticas realizada por el profesor	Tipo de génesis activadas	Planos activados	Paradigma del análisis que privilegia
Identifica las variables y la regla de correspondencia de dos funciones.	Génesis semiótica: Reconoce la representación algebraica de una función exponencial y sus transformaciones. Génesis discursiva: Reconoce que $f(x) = C \cdot a^x$, $f(x) = a^x + b$ son reglas de correspondencia para funciones exponenciales.	**[Sem-Dis]**	**AC**
Construye tablas y realiza operaciones aritméticas para obtener la función.	Génesis semiótica: Emplea el registro tabular para obtener las coordenadas de puntos discretos que pertenezcan a la gráfica de la función. Génesis instrumental: Utiliza el proceso de calcular el valor numérico de una expresión exponencial	**[Sem-Ins]**	**AG** **AC**
Representa gráficamente la función en la pizarra con su respectivo dominio y rango	Génesis semiótica: Coordina el registro tabular, algebraico y gráfico para	**[Sem–Ins]** **[Ins-dis]**	**AG** **AC**

	representar la curva que pasa por los puntos. Génesis instrumental: Moviliza la definición de una función exponencial, dominio y rango de una función. Génesis discursiva: Fundamenta su explicación con las características de una función exponencial.		
Determina la asíntota y la monotonía de la función a partir de su representación gráfica y de los valores tabulados.	Génesis instrumental: Moviliza la definición de función exponencial, monotonía y asíntotas de una función. Génesis discursiva: Fundamenta su explicación sobre asíntota y monotonía de una función de tipo exponencial.	**[Ins-Dis]**	**AG** **AC**

En la tabla 13, se presenta que el profesor privilegia el paradigma del Análisis geométrico/aritmético (AG), debido a que utiliza las características de la gráfica de la función exponencial para deducir algunos elementos de la función exponencial, como el rango y el intercepto con el eje y. Asimismo, el profesor privilegia el paradigma del análisis calculatorio (AC) ya que utiliza el referencial teórico solo como justificación y herramienta semiótica para el cálculo, pero no analiza su naturaleza.

Tarea 2: la figura muestra la representación gráfica de una función exponencial. Determine la regla de correspondencia (ver figura 41).

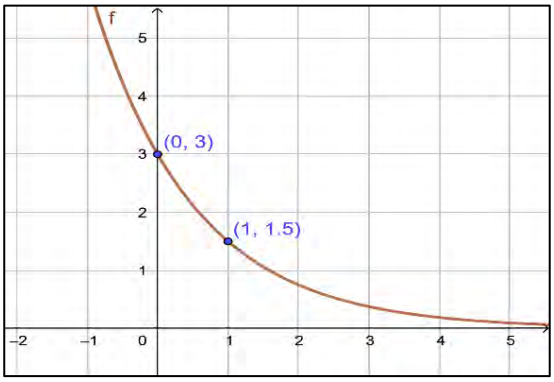


Figura 41. Grafica de la función exponencial para la tarea 2.

El profesor presenta la segunda tarea, afirma que “el objetivo es que modelen la función exponencial a partir de su gráfica”, en ese sentido el profesor efectúa la conversión del registro gráfico al registro algebraico, indica que se debe utilizar el modelo $f(x) = Ca^x$ porque su asíntota es $y = 0$. Luego, busca las coordenadas de dos puntos en la gráfica para calcular las dos constantes presentes en el modelo elegido, el cual es utilizado como herramienta teórica (ver figura 42).

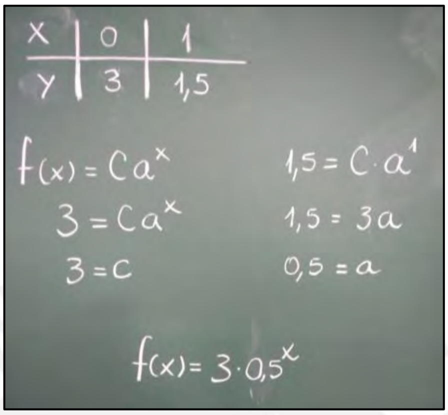


Figura 42. Solución de la Tarea 2.

Adicionalmente, el profesor André grafica una función en el GeoGebra y lo presenta como una tarea complementaria (ver figura 43), para que sus estudiantes lo resuelvan.

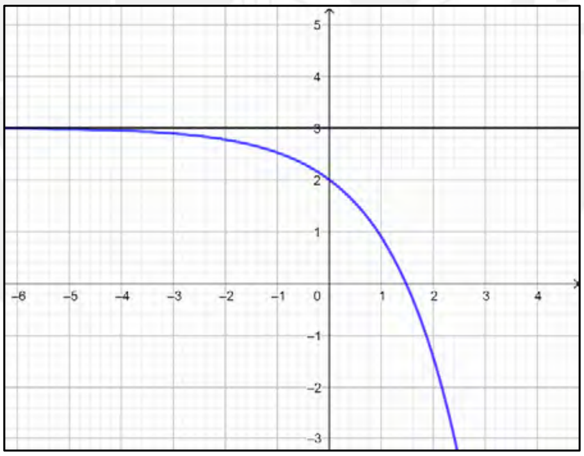


Figura 43. Tarea complementaria sobre modelación a partir de su gráfica.

El profesor efectúa la conversión del registro gráfico al algebraico, considera la representación gráfica de la recta asíntota para indicar que su ecuación es $y = 3$. En ese sentido, utiliza el modelo $f(x) = Ca^x + b$ con $b = 3$, obteniendo $f(x) = Ca^x + 3$ (ver figura 44) este conocimiento se construyó en la etapa anterior y en esta etapa es utilizado como herramienta teórica.

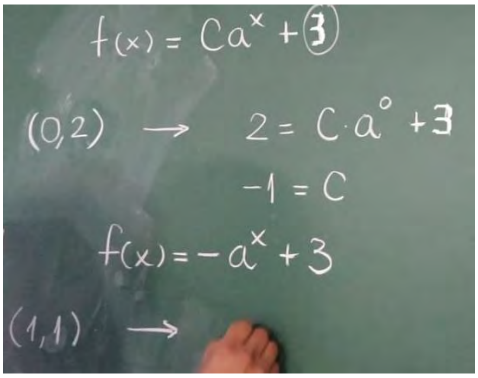


Figura 44. Selección de la representación algebraica de la función a utilizar.

Luego, el profesor selecciona dos puntos de paso y utiliza sus coordenadas para encontrar el valor de los parámetros presentes en la representación algebraica, en este caso esto es utilizado como una herramienta semiótica activando la génesis instrumental y privilegiando el paradigma AC (ver figura 45).

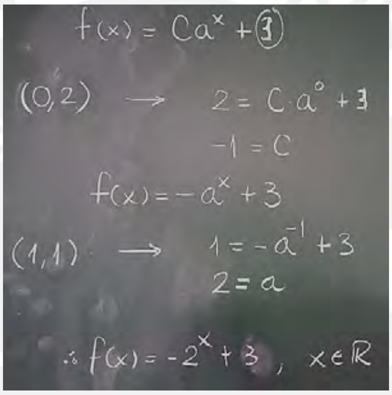


Figura 45. Solución de la tarea complementaria para encontrar la regla de correspondencia.

Tabla 14.

Análisis del trabajo matemático del profesor André en la etapa resolución de tareas propuestas - tarea 2

Acciones matemáticas realizada por el profesor	**Tipo de génesis activadas**	**Planos activados**	**Paradigma del análisis que privilegia**
Reconoce las coordenadas de los puntos que pertenecen a la gráfica de una función.	Génesis semiótica: Identifica la representación cartesiana de los puntos que pertenece a la función. Génesis discursiva: Referencial, todo punto tiene una coordenada cartesiana y se representa como (x,y)	**[Sem-Dis]**	**AG**

Reconoce la cantidad puntos pertenecientes a la gráfica de $f(x) = Ca^x$ para determina su regla de correspondencia.	Génesis semiótica: Representa la regla de correspondencia como una ecuación. Génesis discursiva: Utiliza el criterio de buscar las coordenadas de tantos puntos como parámetros tenga la regla de correspondencia de la función.	**[Sem-Dis]**	**AG**
Determina la regla de correspondencia de la función de la forma $f(x) = Ca^x$	Génesis semiótica: Efectúa la conversión del registro gráfico al registro algebraico para determinar la regla de correspondencia. Génesis instrumental: Proceso para determinar los parámetros de la regla de correspondencia de una función, como artefacto simbólico. Utiliza el proceso de solución de una ecuación y de un sistema de ecuaciones.	**[Sem-Ins]**	**AC**

En la tabla 14, se observa que el profesor André insta a trabajar en el paradigma del Análisis geométrico/aritmético (AG), debido a que, la representación gráfica de la función exponencial presentada por el profesor André, permite identificar las coordenadas cartesianas de los puntos de paso de la función y reconocer la representación algebraica correspondiente. Además, privilegia el paradigma del análisis calculatorio (AC), ya que utiliza como herramientas teóricas que, todo punto en el plano se representa como el par $(x; y)$, y los parámetros o coeficientes de una regla de correspondencia se determinan a partir de la búsqueda de puntos de paso, sin la necesidad de analizar su naturaleza.

De todo lo descrito y analizado en el capítulo III, establecemos las conclusiones en la sección siguiente.

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las consideraciones finales y perspectivas para futuras investigaciones relacionadas al Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores universitarios que enseñan la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo.

Respecto a los antecedentes de investigación

En el primer capítulo se revisaron diversas investigaciones relacionadas a la noción que tiene los docentes universitarios de matemática sobre el objeto función exponencial y a la organización que estos realizan para su enseñanza. Relacionado a ello, Vargas (2012) muestra la necesidad de analizar la práctica docente de profesores universitarios al enseñar la función exponencial en cursos de precálculo, lo cual es respaldado por Velásquez (2014), quien estudia las prácticas matemáticas de un grupo de docentes al enseñar la función exponencial a estudiantes primer ciclo de humanidades así como de ingeniería, permitiéndole identificar las creencias y una aproximación a la concepción de los profesores sobre la función exponencial para su enseñanza. Estas afirmaciones, a pesar de considerar distintos marcos teóricos, son significativas para nuestra investigación, ya que los hallazgos obtenidos en estos trabajos reflejan la necesidad de la comunidad científica respecto a analizar la práctica docente durante la enseñanza de la función exponencial a estudiantes universitarios, lo cual contrasta con lo que inicialmente fue nuestro propósito para realizar esta investigación.

Por otra parte, estos antecedentes nos han guiado para abordar el objeto en estudio, para seleccionar los procedimientos metodológicos y los instrumentos de recolección de datos que sean pertinentes para nuestra investigación, como son la observación de clase y entrevista semiestructurada, los cuales son utilizados por estas investigaciones para cumplir sus objetivos.

Otras investigaciones relacionan la importancia de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) para analizar las acciones de los profesores que enseñan funciones. De acuerdo ello, tenemos a Kuzniak, Tanguay, Vivier, Mena, Mena y Montoya (2017), donde el objeto matemático considerado en su investigación fue la función exponencial y priorizó el análisis de ETM personal de profesores en formación inicial a través de una secuencia de actividades. Por otro lado, Menares y Montoya (2014) analizaron las acciones del profesor en su ETM idóneo, particularmente al enseñar una tarea sobre continuidad de funciones. En ese sentido, la investigación de Kuzniak et al. (2017) respalda la elección de nuestro objeto, función exponencial, y nos orienta la forma de abordarlo en nuestra investigación, mientras que, la investigación de Menares y Montoya (2014), nos guía la forma de abordar nuestra investigación, en especial, nos orienta a definir y establecer los procedimientos metodológicos y los tipos de instrumentos para realizar nuestro análisis.

Los resultados obtenidos de estas investigaciones, nos orienta a estudiar el Espacio de Trabajo Matemático del profesor universitario en el dominio del análisis, en particular cuando enseña la función exponencial. La decisión de estudiar este objeto es respaldada por Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya, E., Páez, R., Rousse, S., Vandebrouck, F. Verdugo, P. y Vivier, L. (2016), ya que, ellos afirman que, la dialéctica entre lo discreto y lo continuo, lo cual es una característica constitutiva del análisis, resulta a través del estudio de la función exponencial.

Finalmente, estas investigaciones nos condujeron a revisar las investigaciones de Espinoza (2017) y Henríquez (2017), quienes dan importancia a la utilidad de la teoría Espacio de Trabajo Matemático, la cual brinda herramientas teóricas que permite describir e interpretar las acciones de los profesores a partir del análisis de su práctica docente, en particular, ambas investigaciones priorizaron el análisis del ETM idóneo del profesor de matemática.

Los resultados de estos trabajos concuerdan con los hallazgos de nuestra investigación acerca de la necesidad de analizar el Espacio de Trabajo Matemático Idóneo en el dominio del análisis del profesor universitario de matemática, lo cual caracteriza las acciones del profesor durante la organización y realización de su clase.

Respecto a los objetivos y pregunta de esta investigación

En relación al primer objetivo específico, “Describir el trabajo matemático efectivo del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades”, podemos afirmar que sí se logró dicho objetivo, ya que, en la observación de la clase del profesor André, se consiguió recolectar la información necesaria sobre las acciones que el profesor realiza al enseñar la función exponencial, permitiendo identificar y describir el trabajo matemático que él realiza al enseñar a estudiantes de humanidades del primer ciclo. Estas acciones del profesor en clase, nos permitió establecer tres etapas del trabajo matemático efectivo del profesor universitario como son: exploración, estudio de la función exponencial y resolución de tareas propuestas.

Respecto al segundo objetivo específico, “Analizar la activación de las génesis y los planos en el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial”, podemos aseverar que se logró dicho objetivo, debido a que, durante la descripción de las acciones que realiza el profesor André y en contraste con la información obtenida en la entrevista semiestructurada, se presentó el análisis de las génesis y los planos verticales que se privilegian, encontrando que se activan las tres génesis (semiótica, instrumental y discursiva), así como los tres planos verticales ([Sem-Dis], [Sem-Ins] y [Ins-Dis]).

En particular sobre el ETM idóneo, podemos afirmar que, en la etapa de exploración, donde el objetivo es introducir la aplicación de la función exponencial en la vida real, el plano que más se activa mayormente es el [Sem-Dis], ya que las representaciones que utiliza para la visualización del objeto función exponencial son orientadas por el referencial teórico. De igual manera este plano es el que más se activa en la etapa de estudio de la función exponencial, ya que presenta la definición, características y elementos de la función exponencial, a través de su representamen se busca que los estudiantes conozcan la función exponencial, ello es orientado por el referencial teórico. En la última etapa, sobre resolución de tareas propuestas, encontramos que el plano que más se activa en la primera tarea (graficar una función exponencial) son los planos [Sem-Ins] y [Ins-Dis] donde los artefactos simbólicos son los que facilitan la activación de los planos verticales. Mientras que, en la segunda tarea (determinar la regla de correspondencia a partir de su gráfica) se activa con más frecuencia el plano [Sem-Dis].

Con respecto al tercer objetivo específico, "Identificar los paradigmas del dominio del análisis que privilegia el profesor al enseñar la función exponencial", durante las acciones que realiza el profesor André en clase y lo que él considera para la organización de una clase sobre función exponencial, se observa que privilegia o insta en trabajar en el paradigma del análisis Geométrico/Aritmético (AG) y en el paradigma del análisis calculatorio (AC), dejando de lado al análisis real, ya que en las acciones del profesor y la organización que realiza, solo es necesario realizar cálculos aritméticos, y tomar de manera implícita la naturaleza de los objetos o algoritmos utilizados.

De todo lo anterior, podemos confirmar que se logró el objetivo general, "Analizar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades". Por tanto, se respondió a la pregunta de investigación, "*¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo?",* donde este espacio de trabajo está determinado por las acciones que se realizan sobre artefactos, registros de representación y referencial teórico relacionados con los procesos de construcción, visualización y justificación, respectivamente.

Respecto a los fundamentos teóricos de esta investigación

En el segundo capítulo se detalló el modelo teórico utilizado para esta investigación, el cual es la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesto por Kuzniak (2011), en donde el Espacio de Trabajo Matemático debe ser entendido como un ambiente que permite el trabajo matemático del individuo al resolver problemas en el dominio matemático correspondiente.

Durante el trabajo matemático realizado por el sujeto que resuelve problemas, se articulan componentes del plano epistemológico (Representamen, Artefacto y Referencial) con componentes de plano cognitivo (Visualización, Construcción y Prueba) activando las génesis semiótica, instrumental y discursiva. A partir de la activación de estas génesis, se logran activar los planos verticales, los cuales son: Semiótico – Instrumental, Semiótico – Discursivo e Instrumental – Discursivo. Además, según quien sea el que realice el trabajo matemático, los tipos de Espacio de Trabajo Matemático son tres: ETM de referencia, ETM idóneo y ETM personal. Por otra parte, Montoya-Delgadillo y Vivier (2016) establecieron los paradigmas en el dominio del Análisis, los cuales son el Paradigma del análisis Geométrico/ Aritmético, Paradigma del análisis calculatorio y Paradigma del análisis real.

Por tanto, las herramientas teóricas que ofrece esta teoría permiten analizar la práctica docente, es decir, permite describir y analizar las acciones que el profesor universitario realiza al enseñar función exponencial a estudiantes del primer ciclo de las carreras de humanidades, en particular, caracterizar su ETM idóneo, en palabras sencillas, analizar cómo organiza los conocimientos y tareas para la enseñanza de la función exponencial en aula. En ese sentido, se estudió las acciones del profesor universitario al enseñar la función exponencial: Primero, describiendo su trabajo matemático efectivo en aula, luego, analizando las acciones que permiten la activación de las génesis y plano verticales de su ETM idóneo, por último, concluir con el paradigma del análisis que privilegia al enseñar este tipo de función a estudiantes de humanidades.

Respecto a perspectivas futuras de investigación

Consideramos que la presente investigación puede ser replicada con profesores de educación Básica Regular, debido a que el propósito de clase es semejante al del profesor universitario de matemática que enseña la función exponencial a estudiantes del primer ciclo de humanidades y, por otra parte, las investigaciones de referencia muestran la necesidad de la comunidad científica en didáctica de las matemáticas para continuar en esta línea de investigación, en donde se analice la práctica docente en el dominio del Análisis a partir de la teoría Espacio de Trabajo Matemático.

Por otro lado, se considera importante que, en referencia al objeto función exponencial, complementar el análisis del ETM idóneo de profesor, producto de esta investigación, con investigaciones que se preocupen en analizar el ETM personal del profesor y el ETM personal de los estudiantes del primer ciclo de humanidades, para establecer alguna relación o correspondencia entre lo que el profesor organiza y hace en clase con lo que el estudiante realiza, por tanto, establecer un ETM estructurado para la función exponencial. Para ello es necesario realizar un análisis más profundo sobre los tipos de ETM existentes.

REFERENCIAS

Arya, J., Lardner, R. y Ibarra, V. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. México D.F., México: Pearson. Recuperado de https://ediersu012.files.wordpress.com/2017/09/matematicas-aplicadas-a-la-administracion-airya-5edi.pdf

Cauchy, A. (1821). Course d'analise de L'école royale politecnique. Versalles. Francia: L'Imprimerie Royale. Recuperado de https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog/page/n17

Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya, E., Páez, R., Rousse, S., Vandebrouck, F. Verdugo, P. y Vivier, L. (2016). *TD de la 18ª Escuela de verano de Didáctica, Brest, del 19 al 26 de agosto de 2015*. Recuperado de http://docplayer.fr/29239152-Td-espace-de-travail-mathematique-1.html

Espinoza, G. (2017). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los Modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En *Acta Simposio Internacional*, *5,* pp. 439-450. Recuperado de http://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/11/ETM5Final.pdf

Gómez, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2017). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema - Mathematics Education Bulletin 30* (54), pp. 1-22. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n54/1980-4415-bolema-30-54-0001.pdf

Henríquez, C. (2017). El Espacio de Trabajo Matemático como una herramienta para el estudio de la práctica en el aula del Profesor. En *Acta Simposio Internacional, 5*, pp. 105-116. Recuperado de http://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/11/ETM5Final.pdf

Hernández, R., Fernández, C, y Baptista, P. (2006). Metodología de investigación. México D.F., México: MacGraw Hill. Recuperado de http://files.especializacion-tig.webnode.com/200000775-097910b6c0/sampieri-et-al-metodologia-de-la-investigacion-4ta-edicion-sampieri-2006_ocr.pdf

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* pp. 9-24. Recuperado de https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043/document

Kuzniak A., Montoya E. y Vivier L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), pp. 235-249. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompletos/Cuaderno15.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A., y Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48(6)*, 861–874. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/297654633_Understanding_the_development_of_mathematical_work_in_the_context_of_the_classroom

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17* (4), pp. 5-15. Recuperado de https://www.redalyc.org/jatsRepo/335/33553644001/33553644001.pdf

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48(6)*, 721–737. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Alain_Kuzniak/publication/307622091_Mathematical_Working_Spaces_in_schooling_an_introduction

Kuzniak, A., Tanguay, D., Vivier, L., Mena, J., Mena, A. y Montoya, E. (2017). Conectar los ETM del análisis: El caso de la función exponencial. En *Acta Simposio Internacional*, *5*, pp. 49-62. Recuperado de http://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/11/ETM5Final.pdf

Ley N° 30220. Diario Oficial el Peruano, Lima, Perú, 9 de julio de 2014.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en Psicología, 9(1)*, pp. 123-146. Recuperado de http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/psico/article/view/4033/3213

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, *20*, pp. 165-193. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

Menares, R. y Montoya, E. (2014). Estudio de las funciones continuas en la formación inicial de profesores. En *Acta latinoamericana de matemática educativa, 27,* pp. 1905-1914. Recuperado de http://clame.org.mx/uploads/actas/alme27.pdf

Montoya, E. y Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education, 48(6),* pp. 739-754. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/Images/MWS-ZDM.pdf

Morales, A. (2011). Un breve estudio histórico y epistemológico de la función exponencial y análisis de algunos libros de texto. *Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística*, *10*, pp. 123-129. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/9984/1/Morales2011Un.pdf

Perú, Pontificia Universidad Católica del Perú (2018). *Sílabo del curso Matemática 1*, Facultad de Gestión y Alta dirección.

Perú, Pontificia Universidad Católica del Perú (2018). *Plan de Estudios, Facultad de Gestión y Alta dirección.* Recuperado de http://facultad.pucp.edu.pe/generales-letras/informacion-para-estudiantes/plan-de-estudios/alumnos-ingresaron-partir-del-2017-1-2

Perú, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (2018). *Malla curricular, carrera de Economía Gerencial de la Facultad de Economía*. Recuperado de http://pregrado.upc.edu.pe/carrera-de-economia-gerencial/malla-curricular

Perú, Universidad Privada del Norte (2018). *Silabo de Matemática Básica*, Facultad de Negocios.

Perú, Universidad Privada del Norte (2018). *Plan de Estudios, carrera de Administración y Negocios internacionales de la Facultad de Negocios.* Recuperado de http://www.upn.edu.pe/sites/default/files/pe-fn-administracion-negocios-internacionales.pdf

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática, 25*. Recuperado de http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte%28BOLEMA-Estudo%20de%20caso%29.pdf

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.* México: Cengage Learning.

Vargas, J. (2012). Análisis de la práctica del docente Universitario. Estudio de casos en la enseñanza de la función exponencial. (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca. España, Salamanca. Recuperado de https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/121430/1/DDMCE_VargasHernandezJeannette_Tesis.pdf

Velásquez, F. (2014). Creencias y una aproximación de la concepción de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en cursos de pre-cálculo. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú, Lima. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/5498/VELASQUEZ_MILLONES_FELIX_CREENCIAS_ENSENANZA.pdf?sequence=1

ANEXOS

GUÍA DE LA ENTREVISTA

Las respuestas que Ud. nos brinde en esta entrevista son sumamente importantes para nuestra investigación. Les pedimos, por favor, responda con absoluta confianza y sinceridad, ya que todas sus respuestas se mantendrá en reserva. Gracias.

Información personal
¿Cuánto años de experiencia tiene enseñando matemáticas? ¿En qué niveles? ¿Cuánto tiempo lleva enseñando matemática a estudiantes de humanidades del primer ciclo? ¿Cuál es su carrera? ¿En qué institución ha sido formado?

Información sobre la enseñanza de la función exponencial A partir de su experiencia docente en la enseñanza de la función exponencial a estudiantes de humanidades del primer ciclo.
1. De estas formas de introducir o iniciar una clase donde se enseñe la función exponencial (ver ficha 1), ¿Qué opina? ¿Qué actividad propondría usted? 2. De estas definiciones dadas para la función exponencial (ver ficha 2), ¿Qué opina sobre ellas? ¿Cómo define usted a la función exponencial? 3. Según estas formas de describir la gráfica de la función exponencial y sus características (ver ficha 3), ¿cuál es la que recomendaría para su enseñanza? ¿Qué características o elementos consideraría para una clase? 4. De estos procesos sobre como graficar la función exponencial (ver ficha 4), ¿Qué opina sobre ellos? ¿Cómo lo propondría en su clase? 5. Según los siguientes ejemplos (ver ficha 5), ¿Cuáles consideraría usted para la enseñanza de la función exponencial o cuáles propondría? ¿Por qué? 6. Si tuviera que recomendar a los estudiantes un libro que les enseñe la función exponencial, ¿cuál sería? ¿por qué? 7. ¿Cuál es la secuencia de actividades que usted recomendaría a un profesor que va a enseñar la función exponencial a este tipo de estudiantes?

FICHA 1

Introducción a la enseñanza de la función exponencial

Introducción 1

Exploremos

Carolina en el año 2013 adquirió una computadora All-in-one a un precio de S/ 1700, para realizar sus trabajos de historia. Sin embargo, el equipo se ha devaluado en 20% cada año.

Con la información dada, responda lo siguiente:

a) ¿Cuál fue el precio de la computadora de Carolina en el 2015? ¿Cuál será el precio de la computadora de Carolina en el 2018?
b) Grafique los puntos que conoce hasta el momento acerca del valor de la computadora en el tiempo.
c) ¿Conoce la curva que se forma al unir los puntos de la parte b)?

Introducción 2

En este capítulo estudiamos una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Por ejemplo,

$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que aumentan los valores de esta función:

$$\begin{aligned} f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(10) &= 2^{10} = 1024 \\ f(30) &= 2^{30} = 1,073,741,824 \end{aligned}$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. El punto es que cuando la variable está en el exponente, incluso un pequeño cambio en la variable puede causar un cambio muy grande en el valor de la función.

FICHA 2

Definición de la función exponencial

Definición 1

Función exponencial

Una función exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con base a está definida por:

$$f(x) = Ca^{kx}, x \in \mathbb{R},$$

donde a, C y k son números reales, $a > 0, a \neq 1$.

Si consideramos $C = 1$ y $k = 1$, tenemos la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$, la cual analizaremos a continuación a través de los valores que puede tomar a.

Definición 2

FUNCIONES EXPONENCIALES

La **función exponencial con base** a está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

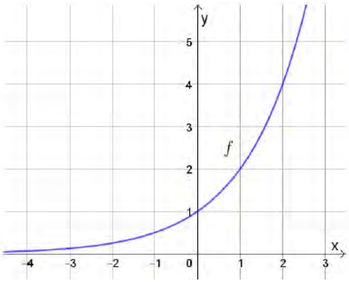
FICHA 3

Gráfica y características de la función exponencial

Gráfica y características 1

Caso 1: Si $a > 1$, la función $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente creciente.

A modo de ejemplo tenemos la función: $f(x) = 2^x$, cuya gráfica se muestra a continuación.

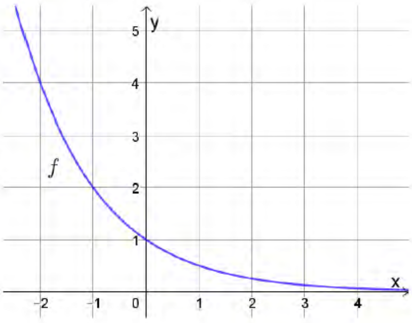


Características que se observan en la gráfica:

- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Ran(f) =]0; +\infty[$
- La gráfica de la función f no tiene intercepto con el eje X.
- La gráfica intercepta al eje Y en el punto $(0;\ 1)$.
- La función es creciente en todo su dominio.
- Observamos que a medida que x decrece ilimitadamente, los valores de y tienden a cero, pero nunca toman dicho valor. Por tal razón, esta función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es: $y\ =\ 0$.

Caso 2: Si $0 < a < 1$, la función $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente decreciente.

A modo de ejemplo tenemos la función: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, cuya gráfica se muestra a continuación.



Características

- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Ran(f) =]0, +\infty[$
- La gráfica de la función f no tiene intercepto con el eje X.
- La gráfica intercepta al eje Y en el punto $(0;\ 1)$.
- La función es decreciente en todo su dominio.
- Observamos que a medida que x aumenta ilimitadamente, los valores de y tienden a cero, pero nunca toman dicho valor. Por tal, esta función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es $y = 0$.

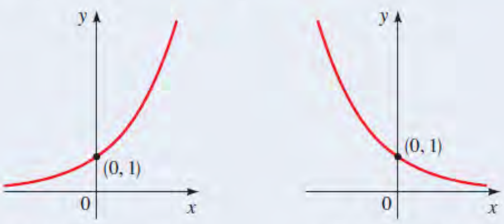
Gráfica y características 2

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.



$f(x) = a^x$ para $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

FICHA 4

Proceso para graficar una función exponencial

Proceso 1

Solución propuesta

a) Para trazar la gráfica $f(x)=5^x$, $x \in \mathbb{R}$, realizamos el proceso de tabulación. Recordemos que: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$	$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$5^{-1} = \frac{1}{5}$	$5^0 = 1$	$5^1 = 5$	$5^2 = 25$

La gráfica de $f(x)=5^x$ es:

- $Ran(f) =]0;+\infty[$
- Intercepto con el eje Y: (0; 1)

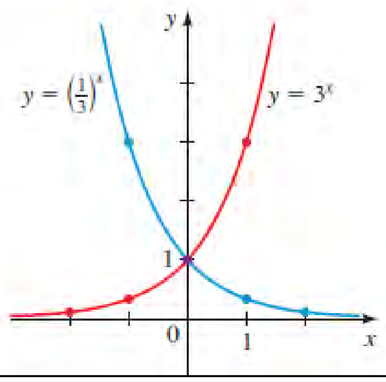
Proceso 2

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−3	$\frac{1}{27}$	27
−2	$\frac{1}{9}$	9
−1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



FICHA 5

Ejemplos para la enseñanza de la función exponencial natural

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

(a) $f(2)$ (b) $f(-\frac{2}{3})$

(c) $f(\pi)$ (d) $f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para obtener los valores de f.

	Tecleo en calculadora	Salida
(a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
(b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
(c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
(d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

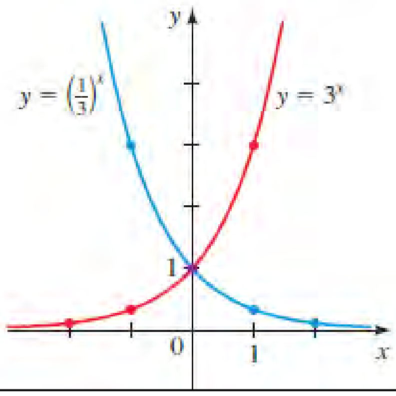
EJEMPLO 2 | Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ (b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

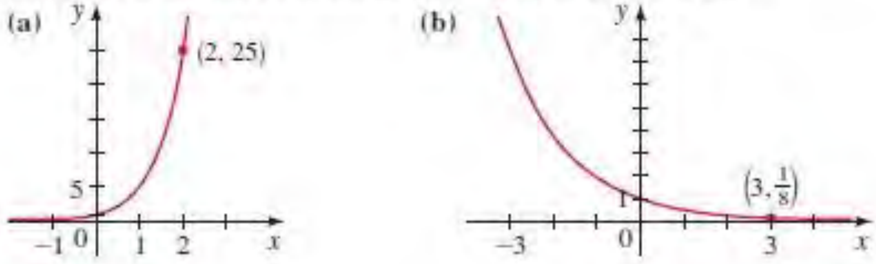
SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−3	$\frac{1}{27}$	27
−2	$\frac{1}{9}$	9
−1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



EJEMPLO 3 | Identificar gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.



SOLUCIÓN

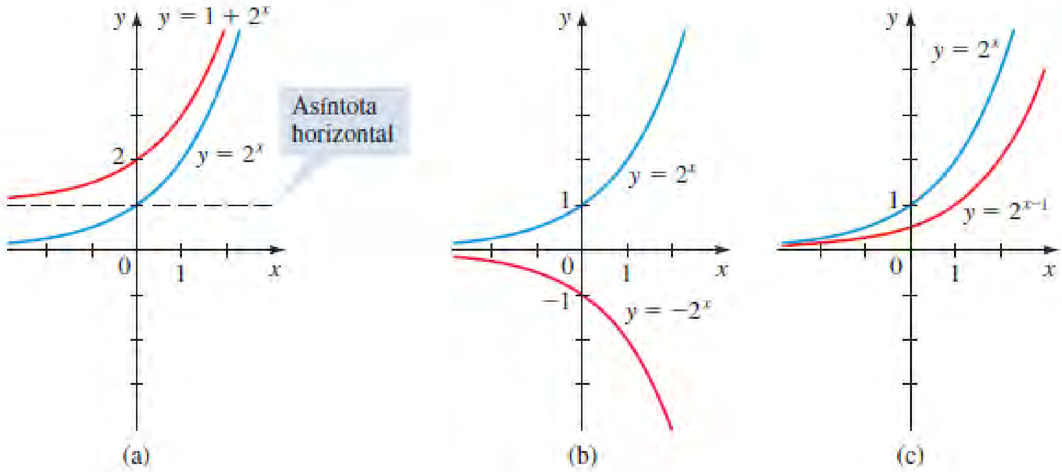
(a) Como $f(2) = a^2 = 25$, vemos que la base es $a = 5$. Entonces $f(x) = 5^x$.

(b) Como $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, vemos que la base es $a = \frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

EJEMPLO 4 | Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada función.

(a) $g(x) = 1 + 2^x$ **(b)** $h(x) = -2^x$ **(c)** $k(x) = 2^{x-1}$



FICHA DE TRANSCRIPCIÓN DE LA CLASE

Momento	Tiempo (min)	Transcripción	Observaciones y/o comentarios
Inicio de la clase			
Introducción a la función exponencial			
Definición de la función exponencial			
Desarrollo de ejemplos y tareas			
Actividades propuestas al estudiante			
Evaluación o cierre			