

Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado



Comportamiento dinámico de la composición de polinomios de la forma $z^d + c_n$

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

Graduando

SAMIR LUISENRRIQUE SÁNCHEZ CHAMBERGO

Asesor

ALFREDO BERNARDO POIRIER SCHMITZ

Jurado

PERCY BRAULIO FERNÁNDEZ SÁNCHEZ

JOHEL VICTORINO BELTRÁN RAMÍREZ

Lima - Perú

Noviembre - 2020

COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LA COMPOSICIÓN DE POLINOMIOS DE LA FORMA

$$z^d + c_n$$

Samir Luisenrique Sánchez Chambergo

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez, PUCP
(Presidente del jurado)

Dr. Alfredo Bernardo Poirier Schmitz, PUCP
(Asesor)

Dr. Johel Victorino Beltrán Ramírez, PUCP
(Tercer miembro)

Lima - Perú
Noviembre - 2020

Dedicado a Emis.



Resumen

COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LA COMPOSICIÓN DE POLINOMIOS DE LA FORMA

$$z^d + c_n$$

Samir Luisenrique Sánchez Chambergo

2020

Asesor: Alfredo Bernardo Poirier Schmitz.

Título obtenido: Magíster en Matemáticas

En esta tesis estudiamos sucesiones de polinomios que se encuentran en

$$\mathcal{P} = \{(f_n) : f_n(z) = z^d + c_n, \text{ con } (c_n) \text{ sucesión en } \mathbb{C}\}$$

Dada una secuencia $(f_n) \in \mathcal{P}$, escribimos F_n para denotar la composición $f_n \circ \dots \circ f_1$. Clasificamos las sucesiones de polinomios (f_n) según el comportamiento asintótico de (F_n) y caracterizamos dicha clasificación dependiendo del comportamiento de la sucesión (c_n) .

Generalizamos los resultados obtenidos por Büger y Brück [4] y realizamos una comparación entre la teoría clásica de iteraciones y nuestro enfoque. Buscamos cuales de estos resultados importantes se preservan para cualquier tipo de secuencia (f_n) y en otros casos formulamos condiciones necesarias para que estos resultados se mantengan.

Palabras clave:

Familias normales, Conjunto de Fatou, Conjunto de Julia.

Abstract

In this thesis we study sequences of polynomials which belong to

$$\mathcal{P} = \{(f_n) : f_n(z) = z^d + c_n, \text{ with } (c_n) \text{ sequence in } \mathbb{C}\}$$

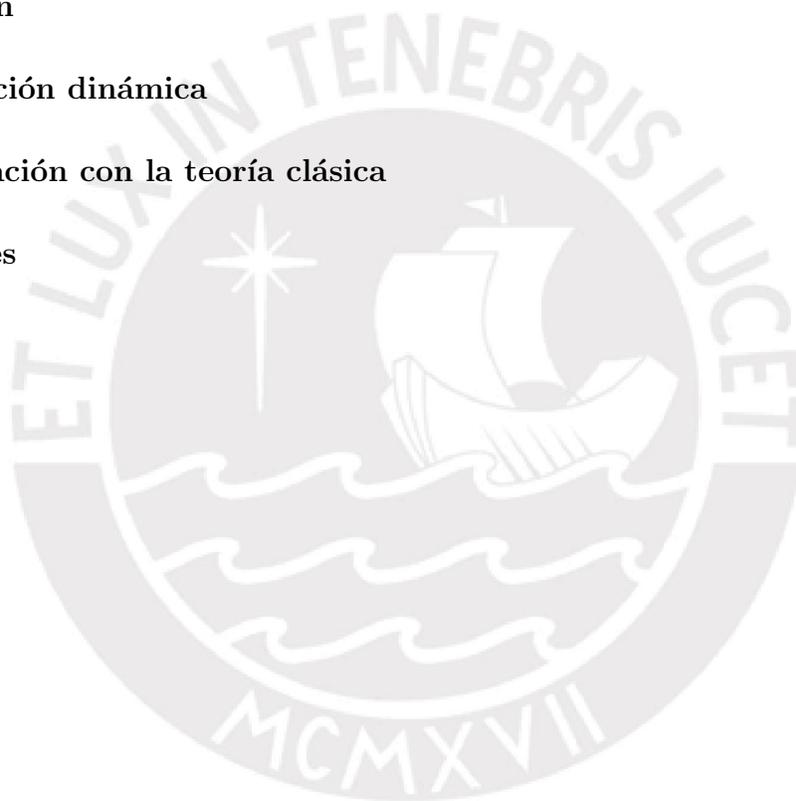
Given any sequence $(f_n) \in \mathcal{P}$, we write F_n to denote the composition $f_n \circ \dots \circ f_1$. We classify this sequences of polynomials (f_n) according to asymptotic behavior of (F_n) and we characterize such classification depending of the behavior of the sequence (c_n) .

We generalize the results obtained by Büger and Brück [4] and we make a comparison between the classical iteration theory and our approach. We look for which of these important results are preserved for any type of sequence (f_n) and in the other cases we formulate the necessary conditions for which these results are maintained.

Key words: Normal families, Fatou set, Julia set.

Índice general

Introducción	1
1. Clasificación dinámica	3
2. Comparación con la teoría clásica	14
Conclusiones	32
Bibliografía	33



Agradecimiento

Agradezco a mi familia por el apoyo incondicional.



Introducción

Según la teoría clásica de iteración de polinomios, para un polinomio de grado 2 siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas donde para cierto $c \in \mathbb{C}$ el sistema se deja leer como $z \mapsto z^2 + c$. De este modo, basta conocer el comportamiento de $z^2 + c$ para entender la dinámica polinomial de grado 2. Como es de esperar, a medida que se cambia el parámetro c se obtienen diferentes conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(c)$ y Julia $\mathcal{J}(c)$. Si a cada paso nos permitimos variar el valor de c a uno aleatorio c_n cercano, se consigue un conjunto de imágenes que representan los diferentes conjuntos de Julia asociados a cada c_n . Al tener una gran variedad de representaciones visuales de conjuntos de Julia que provienen de una distorsión del original, lo primero que uno busca es compararlos con el conjunto de Julia inicial. Es claro entonces que los conjuntos de Julia de c_n y c están relacionados. Lo siguiente es intentar compararlos vía una suerte de clasificación que nos permita ordenar las imágenes de mayor a menor parentesco con el conjunto de Julia original. Al observar el gran parecido entre todas las imágenes, no queda claro qué relación guardan los conjuntos de Julia de c_n y de c_m entre ellos, pues al tomarse de manera aleatoria no es posible afirmar a ciencia cierta cual de los dos conjuntos de Julia se asemeja más al conjunto de Julia original. En otras palabras, no es posible establecer una relación jerárquica de parecido. En vista de este vacío, decidimos cambiar el parámetro de manera monótona y aparece un detalle curioso. En algunas oportunidades no importaba cómo cambiáramos c , los respectivos conjuntos de Julia parecían seguir también el mismo comportamiento monótono. No obstante, en otros casos sí importaba, pues para diferentes cambios monótonos se tenían diferentes cambios estructurales. Estos cambios sugieren una sucesión de parámetros (c_n) que a su vez esconden detrás una sucesión de polinomios $f_n(z) = z^2 + c_n$.

Hay que precisar que a pesar de la sutileza de este cambio, se tiene una gran variación en la manera de conseguir los conjuntos de Julia. Por ejemplo, al mantener fijo el parámetro c , se mantiene fijo el polinomio f y por tanto se cumple $f^{n+m}(z) = f^m(f^n(z)) = f^n(f^m(z))$. Por otro lado, al variar el parámetro, el orden en el que se componen los polinomios es crucial. De este modo una pequeña variación en la forma de obtener los conjuntos de Julia nos lleva de estudiar iteración de polinomios a estudiar composición de objetos del tipo $f_n(z) = z^d + c_n$, donde (c_n) es una sucesión de números complejos. Como antecedente, indicamos que Matthias Büger, Rainer Brück y Stefan Reitz estudian este fenómeno en [4], [5], [2] y [3] para el caso particular $d = 2$.

Pasaremos a detallar el contenido de esta tesis. En el primer capítulo se definen los conjuntos de Fatou y Julia de la composición de polinomios de la forma $z^d + c_n$. Clasificamos el comportamiento de la familia de funciones y, por último, caracterizamos esta clasificación para generalizar la prueba dada por M. Büger [4] para $d \geq 2$. En el capítulo 2 se pretende realizar una comparación entre la teoría clásica y la iteración aleatoria de polinomios de grado al menos 2. Observamos qué resultados importantes se preservan para cualquier tipo de polinomios. En otros casos formulamos condiciones necesarias para que se mantengan.

Samir Luisenrique Sánchez Chambergó

Lima, Perú.

2020

Capítulo 1

Clasificación dinámica

Consideremos (f_n) una sucesión de polinomios de la forma $f_n(z) = z^d + c_n$, con $c_n \in \mathbb{C}$. El objetivo de este primer capítulo es clasificar las sucesiones (f_n) de polinomios de acuerdo con su comportamiento dinámico. Nuestro universo de estudio es entonces el conjunto

$$\mathcal{P} = \{(f_n) : f_n(z) = z^d + c_n, \text{ con } (c_n) \text{ sucesión en } \mathbb{C}\}.$$

Dada una sucesión $(f_n) \in \mathcal{P}$, escribimos F_n para referirnos a la composición $f_n \circ \dots \circ f_1$. El **conjunto de Fatou** de (f_n) es por definición el conjunto de puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ que admiten alguna vecindad donde (F_n) es una familia normal; será denotado por $\mathcal{F}(c_n)$. Por su parte el **conjunto de Julia** es el complemento del conjunto de Fatou con respecto a $\widehat{\mathbb{C}}$. Nótese que casi por definición el conjunto de Fatou es abierto.

Un conjunto **invariante** debe satisfacer $f_n(M) \subset M$ para todo n . Salvo que se diga lo contrario, para evitar de paso los casos triviales $f_n(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$ y $f_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ que no conducen a nada, por dominio invariante entenderemos un conjunto abierto e invariante dentro de $\widehat{\mathbb{C}}$ cuyo complemento tiene al menos tres puntos.

Definimos tres clases:

1. \mathcal{P}_I constituida por aquellas sucesiones para las cuales existe una vecindad conexa invariante de infinito donde F_n converge uniformemente en compactos a ∞ ;
2. \mathcal{P}_{II} conformada por todas las sucesiones para las cuales F_n converge a ∞

uniformemente en compactos de alguna vecindad de infinito, mas no existe un dominio invariante que contiene a ∞ ;

3. \mathcal{P}_{III} instituida por todas aquellas sucesiones para las cuales $\infty \in \mathcal{J}(c_n)$.

En el caso particular $(f_n) \in \mathcal{P}_I$, se define la **cuenca de atracción de infinito** como el conjunto de puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ que admiten una vecindad donde (F_n) converge uniformemente en compactos a ∞ . Es claro que la cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es parte del conjunto de Fatou, sin embargo no es necesariamente un conjunto invariante en el sentido de que se satisface $f_k(\mathcal{A}_\infty(c_n)) \subset \mathcal{A}_\infty(c_n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. No obstante, debido a la condición $(f_n) \in \mathcal{P}_I$, por definición sí existirá una vecindad conexa invariante de infinito M donde (F_n) converge uniformemente en compactos a ∞ , por lo tanto se tendrá $M \subset \mathcal{A}_\infty(c_n)$. Notemos que si tomamos un punto en la cuenca de atracción de infinito, entonces eventualmente caerá en M . Así podemos caracterizar $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ como el conjunto de puntos que eventualmente caen en una vecindad conexa invariante de infinito. Por su parte, el **conjunto lleno de Julia** $\mathcal{K}(c_n)$ resulta ser el complemento de la cuenca de atracción de infinito con respecto a $\widehat{\mathbb{C}}$.

Observación 1.1. Notemos que cuando (f_n) pertenece a \mathcal{P}_I o \mathcal{P}_{II} , se cumple $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$. Puesto que $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ implica $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de una vecindad M invariante por los f_n , resulta obvio que (F_n) es normal en ∞ , ya que F_n omite el complemento de M , el mismo que evita al menos tres puntos; se sigue $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$ del teorema de Montel. Es importante tener en cuenta que en cualquier subconjunto cerrado de M , dominio invariante de ∞ , la convergencia es uniforme hacia ∞ . Si $(f_n) \in \mathcal{P}_{II}$, entonces $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de alguna vecindad Q de ∞ , que no es invariante. Sin embargo, a pesar de tal hecho, la convergencia uniforme de F_n asegura que para n suficientemente grande, F_n omite un disco centrado en el origen y con ello F_n es normal en ∞ , así conseguimos también $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$. Detalles adicionales se encuentran en las pruebas que siguen.

Es claro que una sucesión $(f_n) \in \mathcal{P}$ no puede estar contenida en dos clases diferentes, pero lo que aún no es claro es si estas clases agotan las posibilidades. Para aclarar ello necesitaremos algunos preliminares técnicos.

Lema 1.2. Consideremos $f_n(z) = z^d + c_n$. Entonces, $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ si y solo si (c_n) es acotada.

Demostración. Sea $C > 0$ tal que $|c_n| \leq C$ para todo n . Consideremos $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > C + d\}$. En primer lugar mostraremos que M es invariante. En efecto, en este caso se satisface

$$|f_n(z)| = |z^d + c_n| > |z^d| - C.$$

Si $z \in M$, tenemos $|z| > 1$, de modo que se cumple

$$|f_n(z)| > |z|^d - C > |z|^d - C|z| \geq d|z|,$$

y así, M resulta un dominio invariante. Observemos que lo anterior también muestra la inclusión $\overline{f_n(M)} \subset M$, lo cual indica que en cierto M conexo e invariante ocurre una atracción topológica. Por lo anotado, tenemos $|F_n(z)| > d^n|z|$, y con ello $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de M , es decir se cumple $(f_n) \in \mathcal{P}_I$.

Recíprocamente consideremos $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ con M vecindad invariante de infinito donde hay convergencia uniforme en compactos a ∞ . Tomemos $z_0 \in \mathbb{C} \setminus M$ y por contradicción supongamos que (c_n) no es acotada. Sea w_n cualquier valor sujeto a $w_n^d = z_0 - c_n$. Como esta sucesión no es acotada y M es vecindad de ∞ tenemos $w_{\bar{n}} \in M$ para cierto \bar{n} . Debido a que M es invariante tendremos $z_0 = w_{\bar{n}}^d + c_{\bar{n}} = f_{\bar{n}}(w_{\bar{n}}) \in f_{\bar{n}}(M) \subset M$, lo cual no puede ocurrir. En consecuencia (c_n) debe ser acotada. \square

Como ya sabemos $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$ si $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ o \mathcal{P}_{II} , los siguientes resultados serán las primeras pistas para caracterizar las familias según el comportamiento de (c_n) .

Lema 1.3. Si $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$ entonces existe $r > 2$ y n_0 tal que $0 \notin F_n(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$ cuando $n \geq n_0$.

Demostración. Sea $r > 2$ de modo que F_n sea una familia normal en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$. Supongamos por contradicción que existe una secuencia de índices creciente $n_1 < n_2 < \dots$ donde se tiene $0 \in F_{n_k}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$. Gracias a la normalidad de F_n , es claro que podemos asumir que f_{n_k} converge en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$ digamos a F . Observese que se cumple $F(inty) = intfy$. Debido a la continuidad de F , podemos incrementar r de modo que se tenga $|F(z)| > 1$ en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$. Por convergencia uniforme tendremos entonces $|F_{n_k}(z)| > 0$ con la posible excepción de un número finito de índices. Esto va en contra de la selección de los n_k . \square

Lema 1.4. Si $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$, entonces se cumple $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |c_n|}{d^n} < \infty$.

Demostración. Supongamos por contradicción $\limsup \frac{\ln |c_n|}{d^n} = +\infty$, es decir, la sucesión $\frac{\ln |c_n|}{d^n}$ es no acotada. Pongamos $a_n = \frac{\ln |c_n|}{d^n}$, lo cual equivale a escribir $|c_n| = \exp(a_n d^n)$. Obsérvese que cabe la posibilidad de tener $|c_n| = 0$ en algún momento, y es por ello que por conveniencia notacional convendremos en la igualdad $\exp(-\infty) = 0$. Debido a que (a_n) no es acotada, (c_n) tampoco lo es, y así, por el lema 1.2, tendremos $(f_n) \notin \mathcal{P}_I$. Por definición alguna subsucesión de F_n converge uniformemente en compactos en alguna vecindad de ∞ , por ejemplo en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \geq r\}$ con $r > 2$. Por el lema anterior se puede incluso asumir que se tiene $0 \notin F_n(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$ cuando $n \geq n_0$. Definimos de manera recursiva $r_n = r_{n-1}^d + |c_n|$, donde $r_0 = r$. Debido a $r_0 > 2$ se tiene $r_n \geq r_{n-1}^d > r_{n-1}$. Ya que definimos los radios, veamos qué sucede con las imágenes de semillas elegidas en $\overline{\mathbb{D}_r}$. Tomemos $F_1(z) = f_1(z) \in F_1(\overline{\mathbb{D}_r})$, de modo que se satisfaga

$$|F_1(z)| \leq |z|^d + |c_1| \leq r^d + |c_1| = r_0^d + |c_1| = r_1,$$

$$|F_2(z)| \leq |F_1(z)|^d + |c_2| \leq r_1^d + |c_2| = r_2,$$

y por inducción logramos $|F_n(z)| \leq r_n$, para todo n . Y así obtenemos

$$\sup\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : z \in F_n(\overline{\mathbb{D}_r})\} \leq r_n.$$

Una consecuencia de haber definido los radios de manera recursiva es que se cumple $F_n(\overline{\mathbb{D}_r}) \subseteq \overline{\mathbb{D}_{r_{n-1}^d}}(c_n)$. En efecto, al tomar $F_n(z) \in F_n(\overline{\mathbb{D}_r})$ (es decir, gracias a $|z| \leq r_{n-1}$ y $|F_n(z)| \leq r_n$) se consigue

$$|F_n(z) - c_n| = |F_{n-1}(z)^d + c_n - c_n| = |F_{n-1}(z)^d| \leq r_{n-1}^d.$$

En vista de $0 \notin F_n(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$ para $n \geq n_0$, necesariamente se tiene $0 \in F_n(\overline{\mathbb{D}_r})$ para $n \geq n_0$ pues por ser F_n un polinomio de grado d^n debe tener d^n raíces: al no estar ellas en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$ (si $n \geq n_0$) aparecerán todas en $\overline{\mathbb{D}_r}$. Por la inclusión probada en el párrafo anterior se concluye $0 \in \overline{\mathbb{D}_{r_{n-1}^d}}(c_n)$ y así se logra $|c_n| \leq r_{n-1}^d$.

Ahora escogemos $\rho_n > 0$ de manera que se tenga $r_n = \exp(\rho_n d^n)$ y reescribimos

$$1 \leq \frac{r_{n-1}^d}{|c_n|} = \frac{(\exp(\rho_{n-1} d^{n-1}))^d}{\exp(a_n d^n)} = \exp(d^n(\rho_{n-1} - a_n)).$$

Con ello conseguimos $\rho_{n-1} \geq a_n$ para todo $n \geq n_0$. De como está definido r_n se deduce

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1}^d + |c_n| = \exp(\rho_{n-1} d^n) + \exp(a_n d^n) \\ &\leq 2 \exp(\rho_{n-1} d^n) = \exp(\ln 2 + \rho_{n-1} d^n), \end{aligned}$$

lo cual implica $\rho_n d^n \leq \rho_{n-1} d^n + \ln 2$ para $n \geq n_0$. Al simplificar obtenemos

$$\rho_n \leq \rho_{n-1} + \frac{\ln 2}{d^n},$$

para $n \geq n_0$. De ello se sigue

$$\begin{aligned} \rho_{n_0+2} &\leq \rho_{n_0+1} + \frac{\ln 2}{d^{n_0+2}} \\ &\leq \rho_{n_0} + \frac{\ln 2}{d^{n_0+1}} + \frac{\ln 2}{d^{n_0+2}} \\ &= \rho_{n_0} + \ln 2 \left(\frac{1}{d^{n_0+1}} + \frac{1}{d^{n_0+2}} \right), \end{aligned}$$

y por inducción $\rho_{n_0+k} \leq \rho_{n_0} + \ln 2 \left(\frac{1}{d^{n_0+1}} + \dots + \frac{1}{d^{n_0+k}} \right)$. Pero n_0 es grande, por lo que se tiene

$$\rho_n \leq \rho_{n_0} + \ln 2$$

cuando $n \geq n_0$. Concluimos que (ρ_n) es acotada, lo que hace que (a_n) también lo sea, y esto es una contradicción. \square

Finalmente el teorema de clasificación.

Teorema 1.5. *Consideremos $f_n(z) = z^d + c_n$. Entonces, (f_n) pertenece a*

- I. la clase \mathcal{P}_I si y solo si (c_n) es acotada;
- II. la clase \mathcal{P}_{II} si y solo si (c_n) no es acotada, pero cumple $\ln |c_n| = O(d^n)$;
- III. la clase \mathcal{P}_{III} si y solo si cumple $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln |c_n|)}{d^n} = +\infty$.

En particular, \mathcal{P} es la unión disjunta de \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} y \mathcal{P}_{III} .

Demostración. El ítem (I) fue probado en el lema 1.2.

Para la segunda parte consideremos (c_n) una sucesión no acotada que satisface $\ln |c_n| = O(d^n)$, es decir, existe $a > 0$ con el cual se tiene $\ln |c_n| \leq ad^n$. Consideremos la vecindad de infinito $Q = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > d \exp(da)\}$. Probraremos primero que F_n converge a ∞ uniformemente en compactos de Q . Para ello basta mostrar que se cumple

$$|F_n(z)| > d \exp(ad^{n+1})$$

cuando $z \in Q$. En efecto, por inducción, si $n = 0$, se tiene

$$|F_0(z)| = |z| > d \exp(da).$$

Asumamos que esta propiedad es válida hasta n . A partir de ahí tenemos para $z \in Q$ las relaciones

$$\begin{aligned} |F_{n+1}(z)| &= \left| F_n(z)^d + c_{n+1} \right| \geq |F_n(z)|^d - |c_{n+1}| \\ &> |d \exp(ad^{n+1})|^d - |c_{n+1}| = d^d \exp(ad^{n+2}) - |c_{n+1}|. \end{aligned}$$

Pero se cumple $\ln |c_n| \leq ad^n$, lo cual es síntoma de $|c_n| \leq \exp(ad^n)$, y conseguimos

$$|F_{n+1}(z)| > d^d \exp(ad^{n+2}) - \exp(ad^{n+1}).$$

Pero al tenerse $\ln 2 \leq \ln d < d$, además de $ad^{n+1} \ln d < ad^{n+2}$, se consigue $\exp(ad^{n+1}) < \exp(ad^{n+2})/d$, y de este modo se cumple

$$\begin{aligned} |F_{n+1}(z)| &> d^d \exp(ad^{n+2}) - \frac{1}{d} \exp(ad^{n+2}) \\ &= \left(d^d - \frac{1}{d}\right) \exp(ad^{n+2}) > d \exp(ad^{n+2}), \end{aligned}$$

pues $d \geq 2$. En pocas palabras (F_n) converge a ∞ uniformemente en compactos de Q . Obsérvese que no puede existir una vecindad invariante de ∞ , pues de lo contrario la sucesión (c_n) sería acotada, lo cual no es el caso. La recíproca se sigue por descarte del lema 1.3.

Si $(f_n) \in \mathcal{P}$ está sujeto a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |c_n|}{d^n} = +\infty$, nuevamente del lema 1.4, se tiene $\infty \in \mathcal{J}(c_n)$.

Por último tomemos $(f_n) \in \mathcal{P}_{III}$ y supongamos por contradicción que la sucesión $\frac{\ln |c_n|}{d^n}$ es acotada. Esto solo puede ocurrir si $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ o \mathcal{P}_{II} . En cualquier caso se cumple $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$, lo cual es imposible por la definición de la clase \mathcal{P}_{III} . \square

Nota 1.6. *A posteriori* el lema 1.4, en cierto sentido es inútil pues debido al teorema de clasificación se tendrá como consecuencia que ∞ está en el conjunto de Fatou si y solo si los sucesivos iterados convergen cerca de infinito a la función idénticamente igual a ∞ .

Debido al teorema anterior resulta más sencillo presentar ejemplos de sucesiones de funciones que pertenezcan a las clases $\mathcal{P}_I, \mathcal{P}_{II}$ y \mathcal{P}_{III} que hacer un análisis directo.

Ejemplo 1.7. Consideremos el caso particular $d = 3$ y $c_n = -0.1085 + 0.8i + \frac{i}{n+1}$, una sucesión acotada en norma por aproximadamente 1.8. Una vecindad invariante M de ∞ es, según lo exhibido en la prueba, el conjunto $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \geq 4.8\}$. (Ver fig.1.1.).

Ejemplo 1.8. Consideremos el caso particular $d = 2$ y $c_n = i \exp(2^n)$, una sucesión no acotada. Como $\frac{\ln |c_n|}{2^n}$ satisface

$$\frac{\ln |i \exp(2^n)|}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} = 1,$$

tendremos $f_n(z) = z^2 + i \exp(2^n) \in \mathcal{P}_{II}$. Una vecindad de ∞ en la que F_n converge a infinito uniformemente en compactos, según lo detallado en la prueba del teorema 1.5, es $Q = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > 2 \exp(2)\}$.

Observación 1.9. Notemos que para $n \geq 2$, la imagen de $f_n(Q)$ tiene partes fuera de Q ; así Q no es invariante. Con los coeficientes del ejemplo anterior se tiene $\ln |c_n| \leq 2^n$. Por otro lado, si “desplazamos los c_n ” (ver capítulo 2); por ejemplo, si ponemos $\gamma_n = c_{n+N}$ se tendrá $\ln |\gamma_n| \leq 2^N 2^n$, así el valor de la cota “ a ” crece desmesuradamente.

Ejemplo 1.10. Consideremos el caso particular $d = 3$ y $c_n = \exp(n3^n)$ sucesión no acotada, que satisface además

$$\frac{\ln |\exp(n3^n)|}{3^n} = \frac{n3^n}{3^n} = n.$$

Tenemos así $f_n(z) = z^3 + \exp(n3^n) \in \mathcal{P}_{III}$.

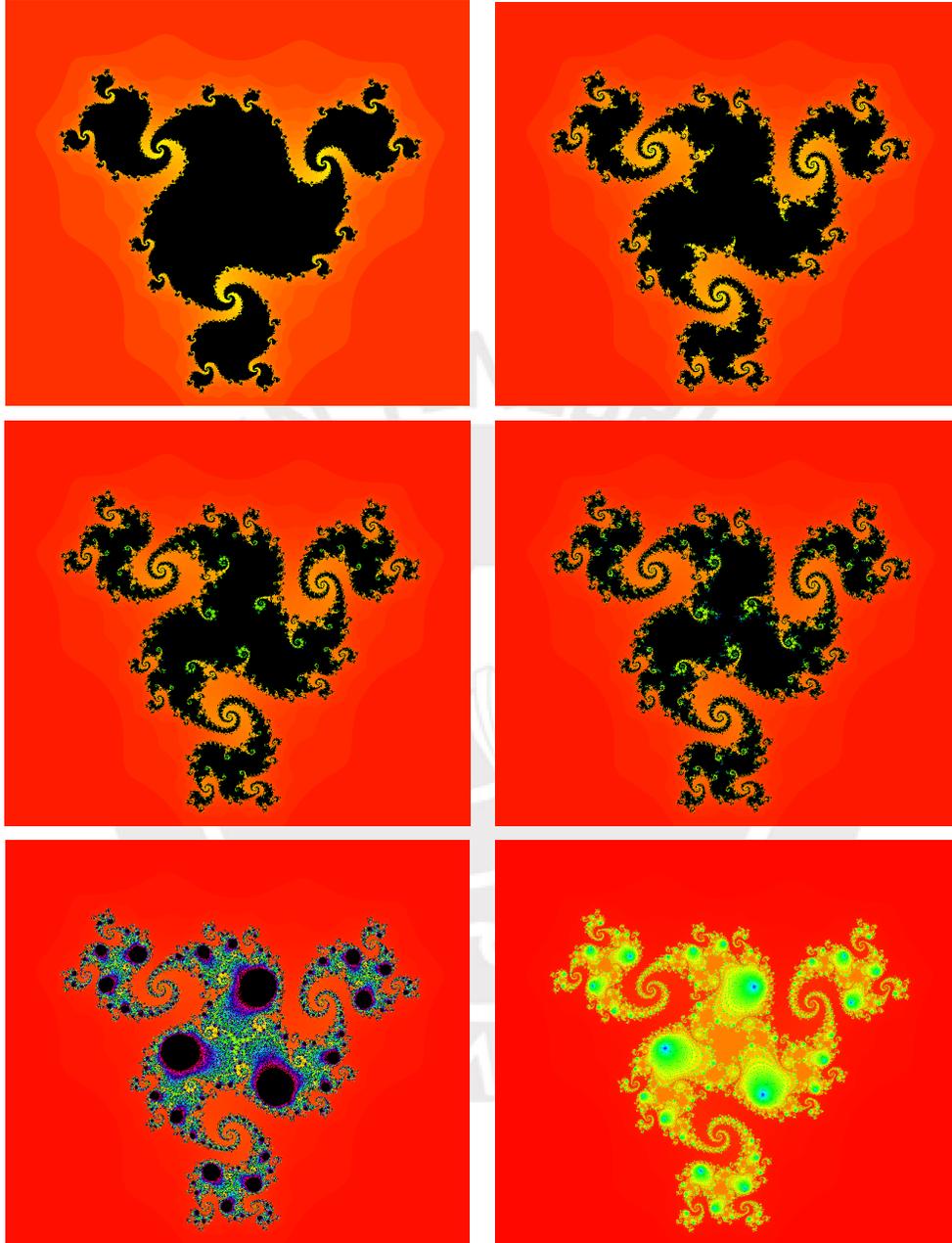


Figura 1.1: De izquierda a derecha y de arriba abajo se muestran los conjuntos llenos de Julia de $z^3 + c_{50}$, $z^3 + c_{1500}$, $z^3 + c_{7500}$, $z^3 + c_{10000}$, $z^3 + c_{11050}$ y $z^3 + c_{990150}$.

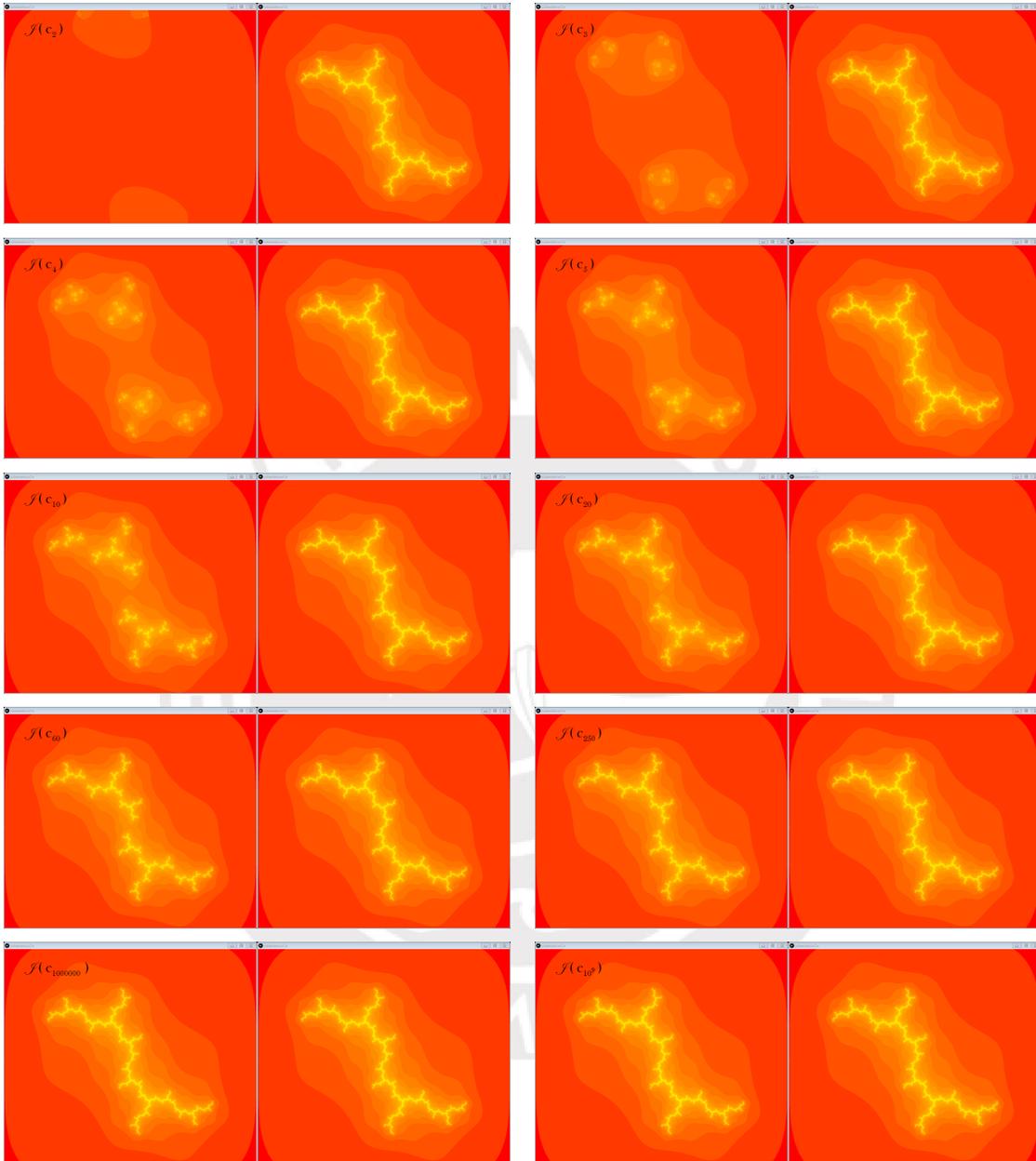


Figura 1.2: Comparación entre los conjuntos de Julia de los polinomios $z^2 + i$ y $z^2 + i + c_n$ con $c_n = \frac{1}{n^2} + \frac{i}{\ln^3(n)}$. De izquierda a derecha y de arriba abajo se exhiben $z^2 + c_2$, $z^2 + c_3$, $z^2 + c_4$, $z^2 + c_5$, $z^2 + c_{10}$, $z^2 + c_{20}$, $z^2 + c_{60}$, $z^2 + c_{250}$, $z^2 + c_{10^6}$ y $z^2 + c_{10^9}$.

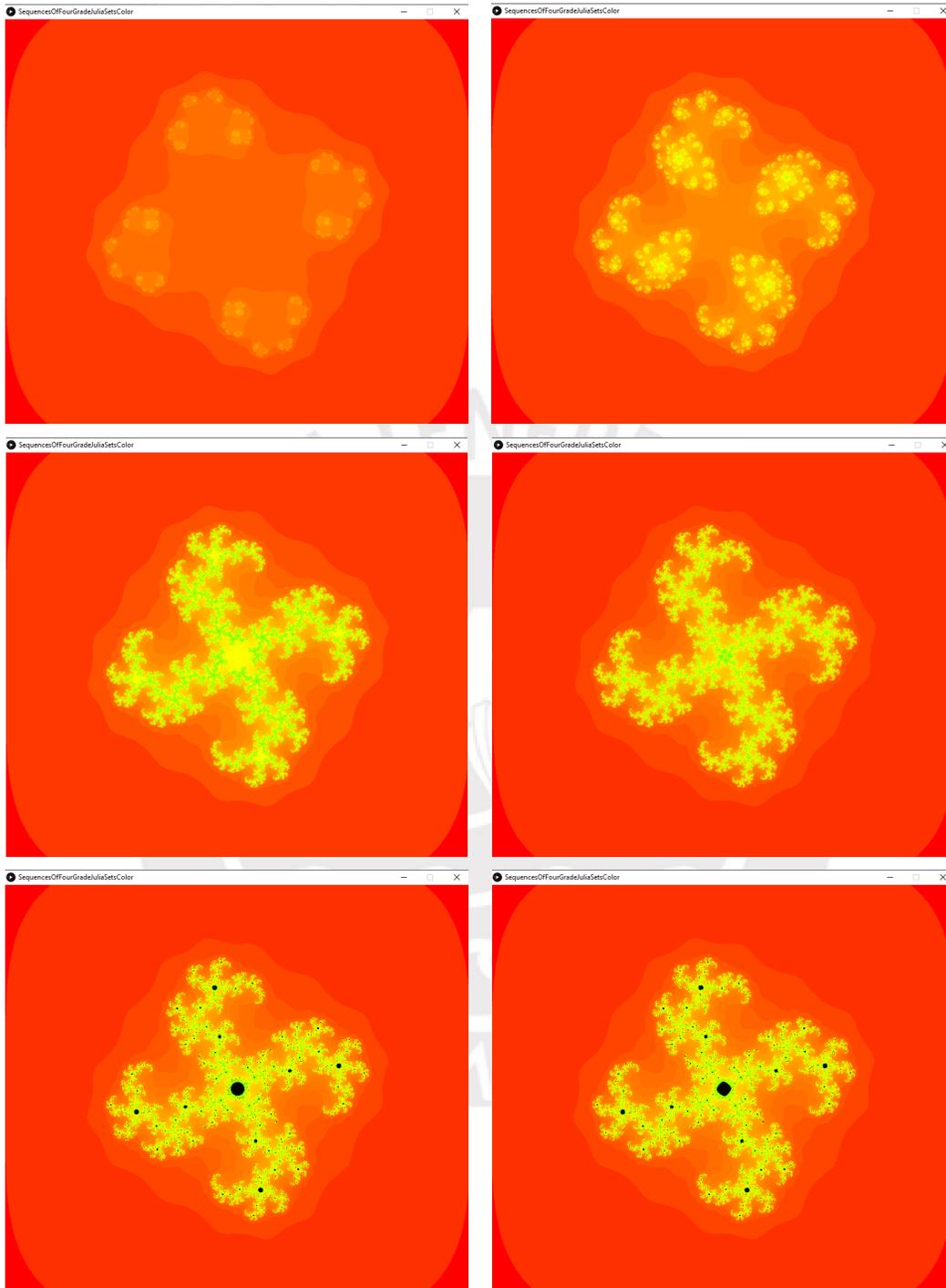


Figura 1.3: Conjuntos de Julia del polinomio $z^4 - 0,39596995 + 0,495975i + c_n$ con $c_n = \frac{1}{2^n} + \frac{i}{n \ln(n)}$. De izquierda a derecha y de arriba abajo se exhiben $z^4 + c_4$, $z^4 + c_7$, $z^4 + c_{10}$, $z^4 + c_{15}$, $z^4 + c_{20}$ y $z^4 + c_{107}$.

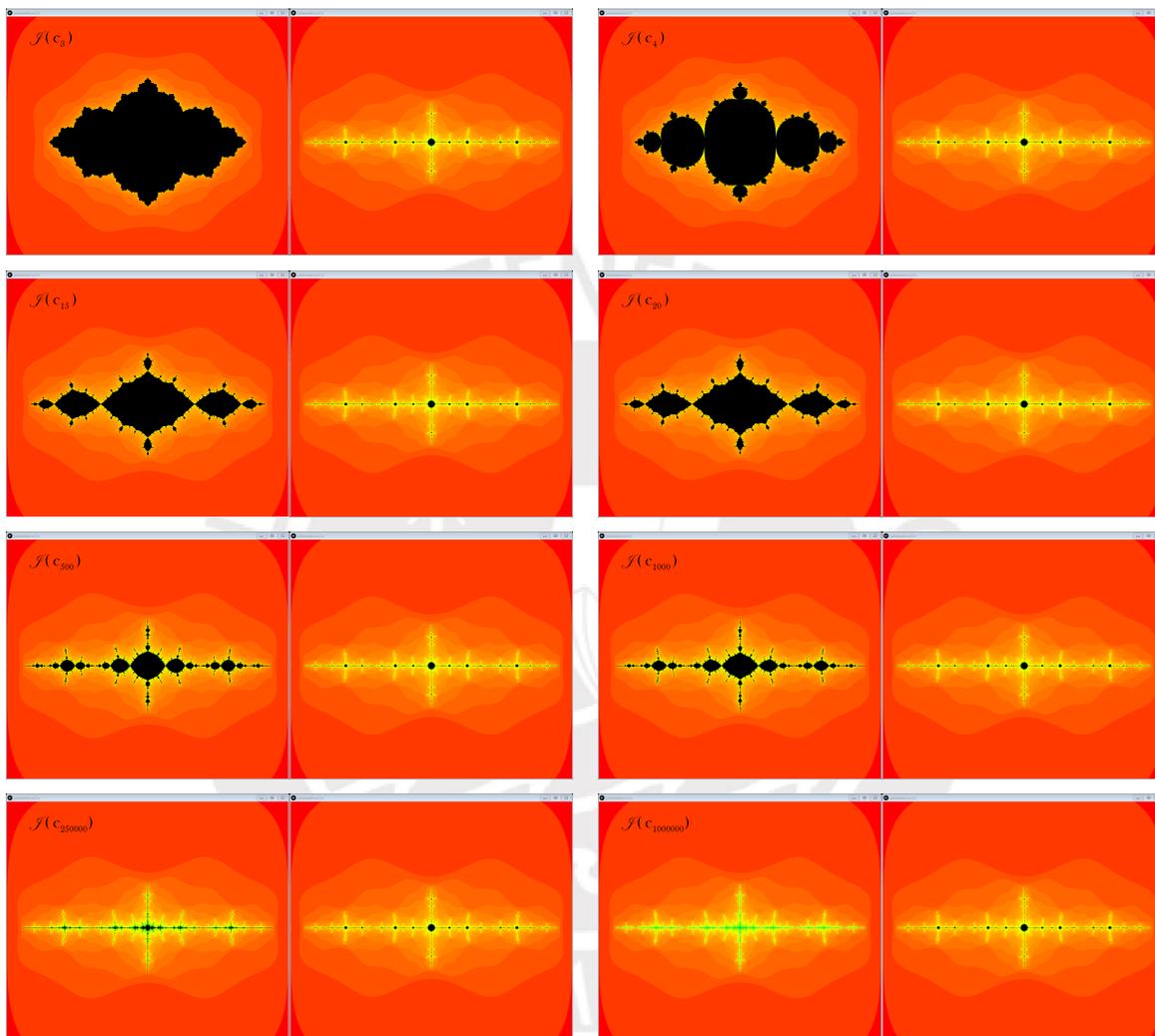


Figura 1.4: Comparación entre los conjuntos de Julia de los polinomios $z^2 - 1,476$ y $z^2 - 1,476 + c_n$ con $c_n = \frac{1}{\ln(n)}$. De izquierda a derecha y de arriba abajo se muestran $z^2 + c_3$, $z^2 + c_4$, $z^2 + c_{15}$, $z^2 + c_{20}$, $z^2 + c_{500}$, $z^2 + c_{1000}$, $z^2 + c_{250000}$ y $z^2 + c_{10^6}$.

Capítulo 2

Comparación con la teoría clásica

En vista de que lo trabajado asemeja una generalización de la teoría clásica de iteración de funciones racionales, en especial de polinomios, nos interesa sobremanera conocer qué resultados se preservan de la teoría clásica. También estudiaremos cuáles de ellos no dependen de la clasificación realizada en el primer capítulo, en particular, pretendemos formular condiciones necesarias para su generalización. Empezamos con un hecho básico.

Consideremos f_n polinomios no constantes del mismo grado $d \geq 2$, no necesariamente mónicos ni unicríticos.

Teorema 2.1. *El conjunto de Julia \mathcal{J} es no vacío.*

Demostración. Si por contradicción \mathcal{J} fuera vacío, tendríamos $\mathcal{F} = \widehat{\mathbb{C}}$, y así cerca de todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ la familia (F_n) será normal. Por un argumento diagonal podemos extraer una subsucesión F_{n_k} que converge uniformemente a una función F , la cual, al estar definida en todo $\widehat{\mathbb{C}}$ será una función racional o idénticamente igual a ∞ .

Si F es analítica y no constante (no idénticamente igual a ∞ en este caso), entonces cada F_{n_k} fija a ∞ (pues todos son polinomios) y se tendrá $F(\infty) = \infty$. Por la continuidad de F , existe $r > 0$ lo suficientemente grande tal que $|F(z)| \geq 2$ para todo $|z| \geq r$, en particular tendremos $|F(z)| \neq 0$, y si alargamos r incluso se puede asumir $|F(z)| \neq \infty$. Esto significa que F no admite ceros ni polos adicionales sujetos a

$|z| \geq r$, por lo que en caso de existir se ubican en \mathbb{D}_r . Pongamos $K_r = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \geq r\}$. Como F es continua y ∂K_r es compacto tendremos entonces

$$0 < \inf_{z \in \partial K_r} |F(z)| \leq \sup_{z \in \partial K_r} |F(z)| < \infty.$$

Como la convergencia es uniforme en compactos de $\widehat{\mathbb{C}}$, lo será en ∂K_r y así existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene para $z \in \partial K_r = \partial \mathbb{D}_r$ la relación

$$|F_{n_k}(z) - F(z)| < \inf_{w \in \partial \mathbb{D}_r} |F(w)| \leq |F(z)|,$$

acá $\inf_{w \in \partial \mathbb{D}_r} |F(w)|$ hace las veces de epsilon para aprovechar la continuidad uniforme. Por el teorema de Rouché tendremos dentro del disco \mathbb{D}_r la igualdad

$$n^\circ \text{ceros } F_{n_k} - n^\circ \text{polos } F_{n_k} = \underbrace{n^\circ \text{ceros } F - n^\circ \text{polos } F}_{\text{constante}}.$$

Por tanto, la cantidad de ceros de F_{n_k} en \mathbb{D}_r es constante puesto que no admite polos al ser polinomio. Por otro lado la cantidad de ceros de F_{n_k} crece con k , así que el resto de esos ceros estarán en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r = K_r$. Tomemos una sucesión de ceros p_n que se acumula en $p \in K_r$. Como la convergencia es uniforme en compactos, conseguimos entonces

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(p_n) = F(p).$$

Es decir F arroja un cero en K_r . Sin embargo antes hemos concordado que ello es imposible.

Queda entonces descartar $F \equiv \infty$. Como F_n es polinomio es posible encontrar $p_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ que cumple $F_n(p_n) = 0$ para cada n . La sucesión p_n posee una subsucesión convergente en $\widehat{\mathbb{C}}$. Consideramos p_{n_k} con límite $p \in \widehat{\mathbb{C}}$. En vista de que la familia (F_n) es normal en $\widehat{\mathbb{C}}$, se sigue por la convergencia uniforme en compactos la igualdad

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(p_{n_k}) = F(p),$$

lo cual no puede ocurrir pues hemos asumido $F \equiv \infty$. Así la familia (F_n) no es normal y con ello $\mathcal{J}(c_n)$ es no vacío. \square

Ejemplo 2.2. El conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ de $(f_n) \in \mathcal{P}$, definido como en el capítulo anterior, es no vacío.

Ahora que sabemos que el conjunto de Julia es no vacío nos interesa saber qué ocurre con su imagen bajo los sucesivos F_k . Con ese fin, comentaremos el caso general de polinomios no necesariamente mónicos ni unicríticos, incluso examinaremos el caso en que los polinomios tienen diferentes grados.

Consideremos f_n polinomios no constantes de grado d_n y escribamos $F_n = f_n \circ \dots \circ f_1$. Se definen los conjuntos de Fatou y de Julia como se hace habitualmente. (Por conveniencia tomaremos $d_n \geq 2$, lo cual no es pérdida de generalidad.)

Ejemplo 2.3. El caso particular en que los grados son todos iguales y además mayores que 1, los conjuntos de Fatou y de Julia han sido concertados anteriormente siempre que los polinomios sean mónicos y 0 sea su único punto crítico.

Antes de pasar al siguiente ejemplo recordemos un resultado de familias normales.

Proposición 2.4. Sean \mathcal{H} una familia normal, g una función analítica y f una función analítica definida por lo menos en la clausura de la unión de las imágenes de las funciones $h \in \mathcal{H}$. Entonces

$$f_*(\mathcal{H}) = \{f \circ h : h \in \mathcal{H}\} \quad \text{y} \quad g^*(\mathcal{H}) = \{h \circ g : h \in \mathcal{H}\},$$

son familias normales.

Demostración. La prueba se encuentra en [8], página 65. □

Ejemplo 2.5. Si en algún momento uno de los polinomios, digamos f_N , se factoriza como composición

$$f_N = g_M \circ \dots \circ g_1,$$

entonces entre F_{N-1} y F_N se puede intercalar

$$F_{N-1}, g_1 \circ F_{N-1}, g_2 \circ g_1 \circ F_{N-1}, \dots, g_M \circ \dots \circ g_1 \circ F_{N-1} = f_N \circ F_{N-1} = F_N.$$

El interés de esta generalización es aprovechar un hecho elemental de la teoría de familias normales.

Lema 2.6. Definamos $\tilde{f}_1 = f_2, \dots, \tilde{f}_n = f_{n+1}$ y pongamos $\tilde{F}_n = \tilde{f}_n \circ \dots \circ \tilde{f}_1$. Entonces tenemos

$$f_1^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{f}_n)) = \mathcal{F}(f_n),$$

donde $\mathcal{F}(\tilde{f}_n)$ y $\mathcal{F}(f_n)$ denotan el conjunto de Fatou de la familias (\tilde{F}_n) y (F_n) respectivamente. Similarmente para los conjuntos de Julia.

Demostración. En efecto, consideremos $z \in f_1^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{f}_n))$. Entonces tendremos $f_1(z) \in \mathcal{F}(\tilde{f}_n)$ y por definición existe una vecindad U_1 de $f_1(z)$ de manera que la familia (\tilde{F}_n) es normal en U_1 . Debido a la continuidad de f_1 el conjunto $U = f_1^{-1}(U_1)$ es una vecindad de z . Por proposición 2.4, la familia $\tilde{F}_n \circ f_1$ es normal en U . Sin embargo, de acuerdo con la definición se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n \circ f_1 &= \tilde{f}_n \circ \dots \circ \tilde{f}_1 \circ f_1 \\ &= f_{n+1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 \\ &= F_{n+1}. \end{aligned}$$

Así, la familia $(F_{n+1}) = \{F_2, F_3, \dots\}$ es normal. Con ello la familia $((F_{n+1}) \sqcup F_1) = \{F_1, F_2, \dots\} = (F_n)$ también es normal en U . Con esto hemos conseguido una vecindad para z donde la familia (F_n) es normal. En consecuencia logramos $z \in \mathcal{F}(c_n)$.

Recíprocamente, consideremos $z \in \mathcal{F}(f_n)$. Por definición existe una vecindad U de z donde la familia (F_n) es normal. Al partir de U se tiene la secuencia

$$U \xrightarrow{f_1} F_1(U) \xrightarrow{f_2} F_2(U) \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n+1}} F_{n+1}(U).$$

Pero la definición $\tilde{f}_i = f_{i+1}$, indica que la secuencia anterior también puede verse como

$$U \xrightarrow{f_1} F_1(U) \xrightarrow{\tilde{f}_1} \tilde{F}_1(U) \rightarrow \dots \xrightarrow{\tilde{f}_n} \tilde{F}_n(U).$$

Es decir, lo anterior se resume en

$$U \xrightarrow{f_1} f_1(U) \xrightarrow{\tilde{F}_n} \tilde{F}_n(U).$$

Debido a que la familia $(F_n) = \{F_1, F_2, \dots\}$ es normal en U , la familia $(F_{n+1}) = \{F_2, F_3, \dots\} = ((\tilde{F}_n) \sqcup f_1)$ también lo es. De la proposición 2.4, la familia (\tilde{F}_n) es normal en $f_1(U)$. Así tenemos $f_1(z) \in \mathcal{F}(\tilde{f}_n)$, lo cual significa $z \in f_1^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{f}_n))$. \square

Nos beneficiaremos de este resultado para el caso particular de interés. Con ello en mente, en la composición de polinomios de la forma $f_n(z) = z^d + c_n$, para evitar confusiones notacionales, convengamos en referirnos por $\mathcal{F}(c_{n+1})$ al conjunto de Fatou de la familia (\widetilde{F}_n) donde $\widetilde{F}_n = f_{n+1} \circ f_n \circ \cdots \circ f_3 \circ f_2$. En este caso el lema anterior se traduce en

$$\mathcal{F}(c_{n+1}) = \mathcal{F}(\widetilde{f}_n) = f_1(\mathcal{F}(f_n)) = f_1(\mathcal{F}(c_n)) = F_1(\mathcal{F}(c_n)).$$

De manera general, al tomar $m \geq 1$, denotamos por $\mathcal{F}(c_{n+m})$ al conjunto de Fatou de la familia desplazada $f_{n+m} \circ f_{n+m-1} \circ \cdots \circ f_{m+1}$. Y de manera similar se denotará el correspondiente conjunto de Julia. Gracias a este último ejemplo y con la notación recién convenida, el siguiente resultado es trivial.

Corolario 2.7. *Para $m > 0$ se tiene $F_m(\mathcal{F}(c_n)) = \mathcal{F}(c_{n+m})$ y $F_m(\mathcal{J}(c_n)) = \mathcal{J}(c_{n+m})$.*

Corolario 2.8. *Si $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$, entonces $F_k^{-1}(F_k(z_0)) \subset \mathcal{J}(c_n)$. Análogamente, si $z_0 \in \mathcal{F}(c_n)$, entonces $F_k^{-1}(F_k(z_0)) \subset \mathcal{F}(c_n)$. \square*

Es decir, tanto el conjunto de Julia como el de Fatou son co-invariantes, en el sentido que todo co-punto de un punto en el conjunto de Julia (Fatou) también pertenece al conjunto de Julia (Fatou). Esto es análogo al hecho de que si un punto comparte gran órbita con un punto en el conjunto de Julia (Fatou), entonces todos, simultáneamente, pertenecen al conjunto de Julia (o Fatou).

Corolario 2.9. *Los conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(c_n)$ y de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ son co-invariantes en el sentido que cumplen*

$$F_k^{-1}(F_k(\mathcal{J}(c_n))) = \mathcal{J}(c_n) \text{ y } F_k^{-1}(F_k(\mathcal{F}(c_n))) = \mathcal{F}(c_n).$$

Demostración. Esto es inmediato del lema y los corolarios anteriores. \square

Notemos que los resultados anteriores son válidos para cualquier familia dentro de \mathcal{P} .

Nos enfocaremos nuevamente en la familia \mathcal{P} . Un resultado importante que se preserva de la teoría clásica, independientemente de a cual de las tres familias pertenece la sucesión de polinomios (f_n) , es que el conjunto de Julia es infinito.

Teorema 2.10. *El conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ tiene infinitos elementos.*

Demostración. Si por contradicción $\mathcal{J}(c_n)$ fuese un conjunto finito, entonces el número de elementos de $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ eventualmente se estancará a medida que k avance pues el número de elementos no puede decrecer por siempre. Como por el lema 2.6 el conjunto $\mathcal{J}(c_n)$ es finito si y solo si $\mathcal{J}(c_{n+k})$ es finito, asumimos sin más comentarios que $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ tiene siempre el mismo tamaño. Tomemos z_0 arbitrario en $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ y lo enviamos a $z_0^d + c_{k+1} \in F_{k+1}(\mathcal{J}(c_n))$ y contamos las preimágenes de este último. Sabemos que las d preimágenes se encuentran en $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ y debido a que la cantidad de elementos permanece constante, las d preimágenes deben ser la misma; ello solo acontece cuando $z_0 = 0$. Ya que tomamos z_0 de manera arbitraria, se tiene $c_n = 0$ persistentemente. Esto se reduce al estudio de $z \mapsto z^d$ y el conjunto de Julia de esta dinámica es $\partial\mathbb{D}$. Esto es imposible, debido a que estamos suponiendo que $\mathcal{J}(c_n)$ es finito. \square

El resultado anterior nos permite concluir que la cantidad de elementos del conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ es infinito, independientemente de a cual de las tres clases \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} o \mathcal{P}_{III} pertenezca la sucesión de polinomios (f_n) . Ello se debe a que la familia \mathcal{P} está conformada por polinomios mónicos y unicríticos. Si, por ejemplo, cambiamos el tipo de polinomios que compondremos, podemos toparnos con resultados totalmente opuestos a los obtenidos hasta ahora, tal y como lo hizo Büger en [5].

Ejemplo 2.11. Consideremos los polinomios

$$f_n(z) = n^{d^n} z^d.$$

con $d \geq 2$. Es claro que la sucesión formada por este tipo de polinomios no pertenece a \mathcal{P} . Aún así podemos notar que el conjunto $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ es un dominio invariante y (F_n) converge a ∞ uniformemente en compactos de M . Por otro lado, una

manipulación rutinaria lleva a

$$|F_1(z)| = |1^{d^1} z^d| = |z|^d$$

$$|F_2(z)| = |2^{d^2} (F_1(z))^d| = 2^{d^2} |z|^{d^2}$$

$$|F_3(z)| = |3^{d^3} (F_2(z))^d| = 3^{d^3} 2^{d^3} |z|^{d^3}$$

$$|F_n(z)| = |n^{d^n} (F_{n-1}(z))^d| = n^{d^n} \dots 2^{d^n} |z|^{d^n}.$$

Así conseguimos $|F_n(z)| \geq n^{d^n} |z|^{d^n} = (n|z|)^{d^n}$. De este modo, la familia (F_n) converge uniformemente a ∞ en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, y obtenemos $\mathcal{F}(c_n) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ con $\mathcal{J}(c_n) = \{0\}$ finito.

Después de ver esta curiosidad retornaremos a las sucesiones de nuestro interés.

Los siguientes resultados pretenden ser una generalización de los resultados conocidos en la teoría clásica pero necesitan de la condición $(f_n) \in \mathcal{P}_I$. La existencia de una vecindad invariante de infinito es de suma importancia; sin él podrían fallar. Para los siguientes resultados, y hasta que se diga lo contrario, convendremos $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ con un dominio M vecindad conexa invariante de infinito.

Antes de probar que el conjunto de Julia es la frontera de la cuenca de atracción de infinito necesitaremos algunos pormenores técnicos.

Lema 2.12. *Si $z \in \mathcal{J}(c_n)$, entonces $F_n(z) \notin M$ para todo n . Además $\sup_{z \in \mathcal{J}(c_n)} |F_n(z)|$ es acotado independientemente de z y de n .*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$ con $F_k(z_0) \in M$ para algún $k > 0$. Por una caracterización ofrecida antes, la cuenca atractora de ∞ , $\mathcal{A}_\infty(c_n)$, es el conjunto de puntos que eventualmente caen en M . De este modo conseguimos $z_0 \in \mathcal{A}_\infty(c_n) \subset \mathcal{F}(c_n)$, lo cual es absurdo. Por lo dicho antes, si $z \in \mathcal{J}(c_n)$, su órbita nunca visita M ; en particular la sucesión $|F_n(z)|$ es acotada independientemente de $z \in \mathcal{J}(c_n)$ y de n . \square

Lema 2.13. *Sea $r > 0$ tal que $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > r\}$ es subconjunto de M . Entonces se tiene $z \in \mathcal{A}_\infty(c_n)$ si y solo si existe N tal que $|F_n(z)| > r$ cuando $n \geq N$.*

Demostración. Supongamos que existe N de manera que se tenga $|F_n(z)| > r$ cuando $n \geq N$. Ello significa $F_n(z) \in \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > r\} \subset M$; es decir, z eventualmente pertenecerá a M y por tanto a $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. La recíproca es trivial. \square

Notemos que esto no es válido para la familia \mathcal{P}_{II} debido a que no existe ningún dominio invariante que contenga ∞ .

De la definición de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ se obtiene gratis que es abierto. Sin embargo, el lema anterior nos brinda una forma contundente de comprobarlo.

Corolario 2.14. *Si $r > 0$ es como en el lema 2.13, entonces se tiene $\mathcal{A}_\infty(c_n) = \bigcup_{n \geq 0} (F_n)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}_r})$.*

Demostración. Esto es reescribir en símbolos el lema anterior. \square

De esta manera reconstruimos $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ como una unión enumerable de conjuntos abiertos y es por tanto abierto.

A continuación exhibiremos el conjunto de Julia como la frontera de la cuenca de atracción de infinito.

Proposición 2.15. *Sea $(f_n) \in \mathcal{P}_I$. Entonces se tiene $\partial\mathcal{A}_\infty(c_n) = \mathcal{J}(c_n) = \partial\mathcal{K}(c_n)$.*

Demostración. Tomemos $z \in \partial\mathcal{A}_\infty(c_n) = \overline{\mathcal{A}_\infty(c_n)} \cap \overline{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_\infty(c_n)}$, de modo que existen sucesiones $z_t \in \mathcal{A}_\infty$ y $\bar{z}_t \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_\infty(c_n)$ tales que $z_t \rightarrow z$ y $\bar{z}_t \rightarrow z$. Si suponemos $z \notin \mathcal{J}(c_n)$, tendremos $z \in \mathcal{F}(c_n)$, es decir, (F_n) será normal en alguna vecindad U de z . Eso quiere decir que (F_n) posee una subsucesión (F_{n_k}) que converge uniformemente en compactos de U a una función analítica F . Sin embargo, tendremos

$$F(z) = \lim F_{n_k}(z_t) = \infty,$$

pues $z_t \in \mathcal{A}_\infty(c_n)$ y la convergencia es uniforme en compactos. Por otro lado, si $z_t \notin \mathcal{A}_\infty(c_n)$, tendremos

$$F(z) = \lim F_{n_k}(\bar{z}_t) \neq \infty,$$

y esto es una contradicción. Concluimos entonces $z \in \mathcal{J}(c_n)$.

Para la inclusión recíproca utilizaremos el hecho de que todo dominio abierto D que se interseque con el conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ también intersectará a $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. En efecto, si suponemos $D \cap \mathcal{A}_\infty(c_n) = \emptyset$, lo contrario, entonces tendremos

$$D \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_\infty(c_n) = \mathcal{K}(c_n) \subset \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |F_k(z)| \leq r\}.$$

Por lo tanto (F_n) resulta ser acotada en D , y en particular se tendrá

$$\sup\{|F_n(z)| : z \in D\} < r,$$

donde $r > 0$ es como en el lema 2.13. Esto significa que (F_n) es localmente acotada en D , y por Montel, (F_n) será normal en D , así $D \subset \mathcal{F}(c_n)$. Ello es una contradicción pues $D \cap \mathcal{J}(c_n) \neq \emptyset$. \square

La compacidad del conjunto lleno de Julia y el conjunto de Julia también se mantiene.

Lema 2.16. *Los conjuntos $\mathcal{J}(c_n)$ y $\mathcal{K}(c_n)$ son compactos.*

Demostración. Los conjuntos $\mathcal{J}(c_n)$ y $\mathcal{K}(c_n)$ son cerrados por ser complemento de abiertos. Además por el lema 2.13, sabemos que se tiene

$$\partial\mathcal{J}(c_n) \subset \partial\mathcal{K}(c_n) \subset \mathcal{K}(c_n) \subset \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \leq r\}.$$

En consecuencia serán acotados y por lo tanto compactos. \square

Un conjunto es llamado **perfecto** si es cerrado y no contiene puntos aislados. Debido a que $\mathcal{J}(c_n)$ es cerrado, para confirmar que $\mathcal{J}(c_n)$ es perfecto bastará desacartar que tenga puntos aislados.

Teorema 2.17. *El conjunto de Julia es perfecto.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $\mathcal{J}(c_n)$ tiene puntos aislados. Consideremos $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$ punto aislado y $s > 0$ lo suficientemente pequeño para tener $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset \mathcal{F}(c_n)$. Al estar contenido en el conjunto de Fatou la familia (F_n) será normal en $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Por la proposición 2.15, los puntos que rodean a z_0 estarán en

$\mathcal{A}_\infty(c_n)$, la cuenca de atracción de infinito.

Luego, como $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset \mathcal{F}(c_n)$ se tendrá $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\}$. En particular ello sucede para $\partial\mathbb{D}_s(z_0)$ y así, existe $N > 0$ para el cual se cumple $F_N(\partial\mathbb{D}_s(z_0)) \subset M$, donde M es un dominio invariante inherente a la clase \mathcal{P}_I . Tengamos en cuenta que se tiene $F_N(z_0) \notin M$ pues $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$. Notemos también que se satisface $F_N(z_0) \notin F_N(\partial\mathbb{D}_\rho(z_0))$ para $\rho \leq s$ no nulo puesto que $F_N(z_0)$ está en el conjunto de Julia y imagen del círculo, en el conjunto de Fatou.

Pongamos $\gamma_\rho = F_N(\partial\mathbb{D}_\rho(z_0))$. Recordemos que mientras \tilde{z} no pertenezca a la imagen de γ_ρ , el valor

$$W(\gamma_\rho, \tilde{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - \tilde{z}},$$

llamado **número de vueltas** que le da γ_ρ a \tilde{z} , es un entero. Es más, se sabe que como función es continua en ρ y \tilde{z} . En efecto, es localmente constante pues solo toma valores enteros. Además se sabe que vale 0 si \tilde{z} pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{im}\gamma_\rho$.

Como ya hemos indicado, para $\rho \leq s$ tenemos $F_N(z_0) \notin \text{im}\gamma_\rho$. De este modo vemos que $W(\gamma_\rho, F_N(z_0))$ vale siempre lo mismo. Resulta elemental que en este caso se tiene $W(\gamma_\rho, F_N(z_0)) = \deg_{z_0} F_N > 0$.

Para cada punto $\tilde{z} \neq F_N(z_0)$, por continuidad tenemos $\tilde{z} \notin F_N(\mathbb{D}_\rho(z_0))$ si ρ es pequeño. Así \tilde{z} está en la componente no acotada de γ_ρ y por lo ya indicado tendremos $W(\gamma_\rho, \tilde{z}) = 0$. Sin embargo al tenerse $\gamma_s \subset M$, resulta que todo $\mathbb{C} \setminus M$ está en la misma componente de $\mathbb{C} \setminus \gamma_s$ y por lo ya explicado tendremos $W(\gamma_s, w) = W(\gamma_\rho, F_N(z_0)) > 0$. Pero si $w \in (\mathbb{C} \setminus M) \setminus \{F_N(z_0)\}$ tenemos $W(\gamma_\rho, w) \neq W(\gamma_s, w)$ cuando ρ es pequeño, lo que solo puede significar que $W(\gamma_\rho, w)$ no está definido para todo $\rho \in (0, s]$. En particular tendremos $w \in \text{im}\gamma_\rho \subset \mathcal{F}(c_n)$ para algún ρ entre 0 y s . De este modo concluimos la inclusión $(\mathbb{C} \setminus M) \setminus \{F_N(z_0)\} \subset \mathcal{F}(c_{n+N})$ y por tanto tendremos $\mathcal{J}(c_{n+N}) = \{F_N(z_0)\}$, lo cual es imposible por el teorema 2.10. En conclusión $\mathcal{J}(c_n)$ es perfecto. \square

Un conjunto de un espacio topológico es llamado **nunca denso** si el interior de su clausura es vacío. Para concluir que $\mathcal{J}(c_n)$ es nunca denso bastará probar que su

interior es vacío.

Teorema 2.18. *El conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ es nunca denso.*

Demostración. Notemos que las sucesivas imágenes del interior del conjunto de Julia son acotados por el lema 2.12, y luego por el teorema de Montel, forman parte del conjunto de Fatou. Este abierto al estar contenido tanto en el conjunto de Julia como en el conjunto de Fatou, obligatoriamente es vacío. \square

Otros resultados importantes que examinaremos están relacionados con la conexidad de la cuenca de atracción de infinito y del conjunto de Julia.

La cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es un conjunto abierto y por tanto se puede descomponer como unión disjunta enumerable de las componentes conexas que la conforman. El objetivo primer es probar que $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ está formado por una sola pieza.

Teorema 2.19. *Sea $(f_n) \in \mathcal{P}_I$. Entonces la cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es conexa.*

Demostración. Sea V la componente conexa de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ que contiene al conjunto $K_r = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > r\} \subset M$, de modo que cualquier otra componente de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ se encontrará incluida en $\overline{\mathbb{D}_r}$. Notemos que se cumple $\partial V \cap \mathcal{A}_\infty(c_n) = \emptyset$, así se sigue $\partial V \subset \mathcal{K}(c_n)$. Al ser $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \partial V$ conjunto abierto puede escribirse como unión de sus componentes conexas. Sean V_0, V_1, \dots las componentes conexas de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \partial V$ con $V_0 = V$. Observemos que se satisface $\partial V_i \subset \partial V \subset \mathcal{K}(c_n)$. Además, para toda semilla $w \in V_i$ con $i \neq 0$, se sigue del principio del módulo máximo la cadena de desigualdades

$$|F_k(z_0)| \leq \sup_{w \in V} |F_k(w)| \leq \sup_{w \in \partial V} |F_k(w)| \leq \sup_{w \in \mathcal{K}(c_n)} |F_k(w)| \leq r.$$

Ello implica $z_0 \in \mathcal{K}(c_n)$, pues su órbita es acotada. Por tanto ningún V_i con $i \neq 0$ es subconjunto de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. De este modo, la cuenca de atracción $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es V_0 , conexo. \square

En aras de caracterizar cuándo la cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es un conjunto simplemente conexo será necesario el siguiente resultado técnico.

Lema 2.20. *Para $m > 0$ se tiene $F_m(\mathcal{A}_\infty(c_n)) = \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$.*

Demostración. Trabajaremos por inducción en m . Para el caso $m = 1$ usamos el mismo razonamiento empleado en lema 2.6, con la sutil diferencia de que ahora la convergencia es uniforme en compactos a ∞ . Para detalles adicionales el corolario 2.7 resulta útil. \square

Recordemos que para un espacio topológico X existe un importante invariante topológico llamado **característica de Euler**, denotado por $\chi(X)$. Con el objetivo de definir $\chi(X)$, necesitaremos del concepto de *descomposición celular* de un espacio topológico. Informalmente, una triangularización finita τ de X es “dividir” X en un número finito de regiones “poligonales”, a las que llamaremos **caras**, por arcos que no se autointersecan, llamados **lados**, que se unen en **vértices**. Así, *grosso modo*, una triangulación de un espacio topológico luce como un “poliedro topológico”. La característica de Euler de una triangularización finita τ de un espacio topológico X se define como

$$\chi(X, \tau) = C(\tau) - L(\tau) + V(\tau),$$

donde $C(\tau)$, $L(\tau)$ y $V(\tau)$ denotan, respectivamente, la cantidad de caras, lados y vértices en τ . La característica de Euler, como dijimos antes, es un invariante topológico que además es independiente de la triangularización escogida, así que convendremos por denotar $\chi(X)$ dicho valor. Por ejemplo, para toda variedad compacta de dimensión 2, es decir superficies de Riemann compactas, siempre es posible encontrar una triangularización finita. En caso no pueda proveerse a X de una triangularización finita, convendremos en que la característica de Euler es $-\infty$.

Ejemplo 2.21. El plano complejo y el disco unitario pueden presentarse como una única célula de dimensión 1. Por lo tanto se tiene $\chi(\mathbb{C}) = \chi(\mathbb{D}) = 1 - 0 + 0 = 1$. El círculo \mathbb{S}^1 lo imaginamos como un segmento con extremos identificados, es decir, un lado y un vértice pero ninguna cara, de manera que se tiene $\chi(\mathbb{S}^1) = 0 - 1 + 1 = 0$. La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, posee una cara, el plano \mathbb{C} , un vértice (en ∞) y 0 lados; en consecuencia $\chi(\widehat{\mathbb{C}}) = 1 - 0 + 1 = 2$.

El siguiente teorema nos brinda información importante sobre la cantidad de puntos críticos de una función analítica propia en función de la característica de Euler de los conjuntos de partida y de llegada.

Teorema 2.22 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea f una función analítica entre superficies de Riemann compactas. Supongamos que la restricción $f : U \rightarrow V$ es*

propia de grado d . Entonces la cantidad de puntos críticos de f en U , contados con multiplicidad, está dado por

$$d\chi(V) - \chi(U).$$

Demostración. La prueba se encuentra en [8] página 44. □

Ejemplo 2.23. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{D}^* &\rightarrow \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto f(z) = z^d \end{aligned}$$

Por Riemann-Hurwitz existen

$$d\chi(\mathbb{D}^*) - \chi(\mathbb{D}^*)$$

puntos críticos. Debido a que se tiene $\chi(\mathbb{D}^*) = 0$, corroboramos que f no posee puntos críticos en \mathbb{D}^* .

Se sabe que para regiones planas abiertas y conexas la característica de Euler es a lo mucho 1.

Ejemplo 2.24. Recordemos que para el caso polinomial $z \mapsto z^d + c$, la cuenca de atracción de infinito \mathcal{A}_∞ es totalmente invariante. Además se sabe que \mathcal{A}_∞ es simplemente conexo si y solo si no contiene al origen (el único punto crítico finito en este contexto); de lo contrario esta región será infinitamente conexa. Esta dicotomía puede explicarse con la fórmula de Riemann-Hurwitz. Cuando la característica de Euler de \mathcal{A}_∞ es finita, ésta será menor o igual a 1, y la fórmula de Riemann-Hurwitz predice que hay $(d-1)\chi(\mathcal{A}_\infty(f)) \leq d-1$ puntos críticos; pero como $d-1$ es la multiplicidad crítica de ∞ , concluimos, por un lado, que \mathcal{A}_∞ tiene característica de Euler igual a 1 (es decir, es simplemente conexo) y, por otro lado, que los puntos críticos adicionales (es decir, el 0) no pertenecen a esta cuenca de atracción.

Juguemos con estas mismas ideas. La importancia de conocer la característica de Euler de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ se debe a que el complemento de todo conjunto simplemente conexo en $\widehat{\mathbb{C}}$ es conexo, por lo tanto, mientras la característica de Euler de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ sea 1 el conjunto lleno de Julia $\mathcal{K}(c_n)$ será conexo.

La cantidad de puntos críticos del polinomio f_{m+1} de grado d en $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ depende de si 0 está o no incluido en esta región. En caso de que lo esté, la cantidad de puntos críticos será $2(d-1)$, pues 0 e ∞ poseen ambos multiplicidad crítica $d-1$, de lo contrario, la cantidad de puntos críticos será apenas $d-1$. Por Riemann-Hurwitz, la cantidad de puntos críticos de f_{m+1} en $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ está dada por

$$d-1 + (d-1)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})}(0) = d\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})), \quad (2.1)$$

donde $\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})}$ denota la función característica de $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$. Al manipular la ecuación conseguimos la igualdad

$$(d-1)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})}(0) = d[\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - 1] - [\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) - 1]. \quad (2.2)$$

Los siguientes resultados se desprenden casi de inmediato de esta observación.

Corolario 2.25. *Para $m \geq 0$ la condición $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) > -\infty$ es equivalente a $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) > -\infty$.*

Demostración. El miembro de la izquierda de la ecuación 2.2 es no negativo y finito, así que la igualdad solo tendrá sentido si ambos valores, $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ y $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1}))$ son finitos o infinitos a la vez. \square

Corolario 2.26. *Si $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ es finito, entonces se cumple*

$$d[1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1}))] \leq 1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})).$$

Demostración. Por el corolario anterior tendremos también $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) > -\infty$. El segundo miembro de la ecuación 2.2 es finito mientras que el lado izquierdo es no negativo. Basta manipular la ecuación para obtener lo deseado. \square

Observación 2.27. Es inmediato del corolario anterior que la secuencia $1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n)), 1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+1})), \dots$ es una sucesión de números enteros no negativos estrictamente decreciente a menos que tome el valor 0, donde se estancará. Ello significa que la cantidad de “agujeros” decrecerá hasta que alguno de los $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ sea simplemente conexo y a partir de ese instante todos lo serán.

Con el fin de establecer condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ sea simplemente conexo mostramos los siguientes resultados técnicos.

Lema 2.28. Si $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ es simplemente conexo entonces $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$.

Demostración. Supongamos por contradicción $0 \in \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$. Por Riemann-Hurwitz tenemos entonces

$$2d - 2 = d\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) = d\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - 1$$

de donde conseguimos $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) = 2 - \frac{1}{d}$, imposible dado que la característica de Euler debe ser un número entero. \square

El siguiente corolario se deriva fácilmente del lema anterior.

Corolario 2.29. Si $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ es simplemente conexo entonces $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m+k})$.

Demostración. Es inmediato del corolario 2.26 que se tiene $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+k})) = 1$ y por consiguiente $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m+k})$. \square

La siguiente proposición resume nuestros hallazgos cuando la característica de Euler de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es finita.

Proposición 2.30. Si $-\infty < \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n)) < 1$ entonces existe $N > 0$ tal que para todo $m \geq N$ se tiene $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) = 1$ y $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$.

Demostración. De los corolarios 2.25 y 2.26 tenemos que $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ es finito y cumple

$$0 \leq 1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) \leq \frac{1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))}{d^m}.$$

Al tomar el límite con m conseguimos que el valor $1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ debe ser 0 para $m \geq N$, donde N es el primer entero para el cual $\frac{1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))}{d^m}$ es menor que 1. \square

El siguiente teorema confirmará que en este contexto, al igual que en el caso polinomial, si ∞ no atrae puntos críticos entonces $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ tendrá que ser simplemente conexo.

Teorema 2.31. La cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es simplemente conexa si y solo si se tiene $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ para todo $m \geq 0$.

Demostración. Supongamos $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ para todo $m \geq 0$, es decir $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ no contiene ningún otro punto crítico aparte de ∞ . Por el trabajo realizado en el primer capítulo, sin pérdida de generalidad, podemos considerar $M = K_r = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$ en el corolario 2.14, es decir, escribir

$$\mathcal{A}_\infty(c_n) = \bigcup_{k \geq 1} F_k^{-1}(M).$$

Notemos que M es simplemente conexo pues es el complemento de un disco en la esfera, por lo tanto tendremos $\chi(M) = 1$. Debido a la invarianza de M , también se tiene $M \subset F_1^{-1}(M)$. De este modo $F_1^{-1}(M) \subset \mathcal{A}_\infty(c_n)$ no puede contener otro punto crítico que no sea ∞ . Al tener ∞ multiplicidad d , la cantidad de puntos críticos en $F_1^{-1}(M)$ es precisamente $d - 1$. Además, $F_1^{-1}(M)$ es conexo. En efecto, al ser $F_1 : F_1^{-1}(M) \rightarrow M$ función propia, con grado d cerca de ∞ , el grado topológico será d . Ello significa que no hay otra preimagen de ∞ . Así, necesariamente $F_1^{-1}(M)$ consta de una pieza.

En vista de que $F_1 : F_1^{-1}(M) \rightarrow M$ es de grado d , la fórmula de Riemann-Hurwitz indica que la cantidad de puntos críticos, es decir $d - 1$, será

$$d - 1 = d\chi(M) - \chi(F_1^{-1}(M)) = d - \chi(F_1^{-1}(M)),$$

de donde obtenemos $1 = \chi(F_1^{-1}(M))$. Así, al ser $F_1^{-1}(M)$ un subconjunto abierto y conexo de la esfera de Riemann que posee característica de Euler igual a 1, resulta simplemente conexo. Como además se tiene $F_{k+1}^{-1}(M) \subset F_k^{-1}(M)$, al repetir el mismo razonamiento también $F_k^{-1}(M)$ resulta simplemente conexo. Por lo tanto, al ser $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ unión de conjuntos simplemente conexos encajados (por el corolario 2.14) se concluye que $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es simplemente conexo.

La recíproca se sigue de la proposición 2.30. □

El teorema anterior explica por qué en caso ∞ atraiga puntos críticos $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ no es simplemente conexo. Acá hay que distinguir dos casos: si atrae finitos puntos críticos entonces $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))$ será finita, de lo contrario será infinita. Si $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))$ es finito aplicamos la proposición 2.30 para buscar algún $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ que sea simplemente conexo. Una vez que lo hallamos, procedemos con Riemann-Hurwitz hacia atrás para determinar la cantidad (finita) de componentes conexas del conjunto lleno de Julia.

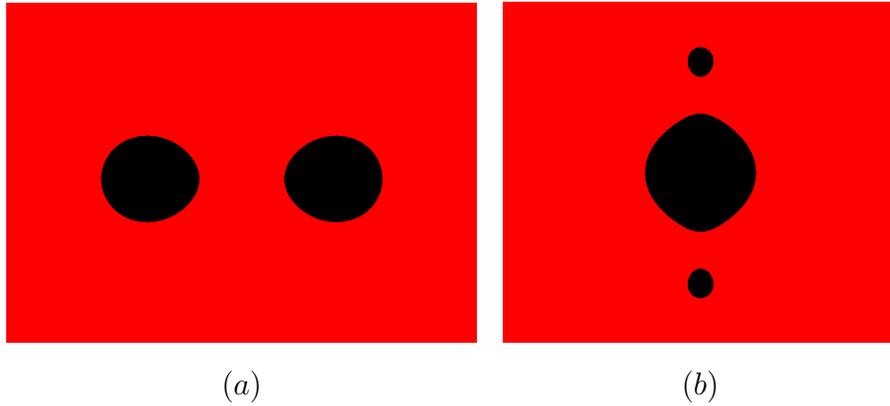


Figura 2.1: Componentes de los conjuntos llenos de Julia $\mathcal{K}(c_{n+1})$ y $\mathcal{K}(c_n)$ respectivamente del ejemplo 2.32.

Ejemplo 2.32. Para grado $d = 2$, consideremos $c_0 = 1, c_1 = -1, 2$ y $c_n = 0$ para $n \geq 2$. La dinámica de la familia desplazada dos unidades es $z \mapsto z^2$ cuyo conjunto lleno de Julia es la clausura del disco unitario y la cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_{n+2})$ es simplemente conexa. Como se tiene $0^2 + c_1 = -1, 2 \in \mathcal{A}_\infty(c_{n+2})$, de Riemann-Hurwitz obtenemos $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+1})) = 0$, o lo que es lo mismo decir, el conjunto lleno de Julia $\mathcal{K}(c_{n+1})$ posee dos componentes (ver figura 2.1(a)). Asimismo, la imagen de 0 bajo el primer iterado es 1 el cual sí pertenece a $\mathcal{K}(c_{n+1})$, es decir, esta vez el punto crítico no escapa: al aplicar Riemann-Hurwitz observamos que $\mathcal{K}(c_n)$ posee tres piezas (ver figura 2.1(b)).

Ejemplo 2.33. Trabajemos con los mismos valores del caso anterior, excepto $c_0 = 0$. En este caso la modificación ocurre apenas en $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. En vista de que el punto crítico escapa, al aplicar Riemann-Hurwitz concluimos que $\mathcal{K}(c_n)$ posee cuatro componentes (ver figura 2.2).

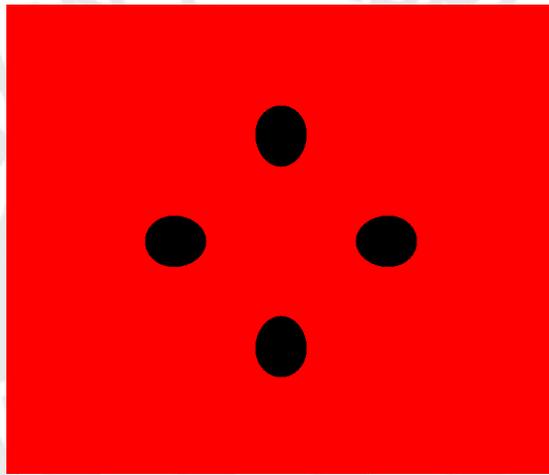


Figura 2.2: Componentes del conjunto lleno de Julia $\mathcal{K}(c_n)$ del ejemplo 2.33.

Conclusiones

La presente investigación se ha dedicado al estudio de la composición de funciones del tipo $f_n(z) = z^d + c_n$, lográndose cumplir con los objetivos planteados. Luego de ello se ha llegado a las siguientes conclusiones:

Es posible generalizar el teorema de clasificación de Buger para polinomios del tipo $f_n(z) = z^d + c_n$ con $d \geq 2$.

La existencia del dominio invariante de ∞ , para funciones (f_n) que se encuentran en \mathcal{P}_I , es clave para la generalizaci3n de los resultados importantes. Por tal motivo la consideramos una condici3n necesaria para generalizar los teoremas de la teoría clasica de iteraciones

Bibliografía

- [1] A. Beardon, *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [2] R. Brück. *Connectedness and stability of Julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$* . J. London Math Soc. **61**, 462-470, 1998
- [3] R. Brück, M. Bürger, and S. Reitz. *Random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$: Connectedness of Julia sets*. Ergod.Th. & Dynam. Sys. **19**, 1221-1231, 1999
- [4] M. Bürger. *On the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$* . Ann. Math. **310**, 661-683, 1998
- [5] M. Bürger. *Self-similarity of Julia sets of the composition of polynomials*. Ergod.Th. & Dynam. Sys. **17**, 1289-1297, 1996
- [6] S. Lang, *Complex Analysis*, Addison-Wesley, 1977.
- [7] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures*, Vieweg, 1999.
- [8] A. Poirier. *Iteración de polinomios y funciones racionales*. Fondo Editorial PUCP, 2016.