PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

FUNCIÓN CUADRÁTICA Y LA COORDINACIÓN ENTRE SUS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN ESTUDIANTES DE HUMANIDADES

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

CHRISTIAN FLAVIO RODRIGUEZ AGUILA

ASESORA

DRA. VERÓNICA NEIRA FERNÁNDEZ

Mayo, 2020

A mi madre Gina, que me dio todo su apoyo y amor.

A mi padre Flavio, que me acompañó siempre.

A mis hermanos Henry y Juan,

por animarme y apoyarme siempre.

A mi hermana Sara y su esposo Carlos,

por su dedicación y comprensión.

AGRADECIMIENTOS

El aprecio y agradecimiento afectuoso a mi asesora, Dra. Verónica Neira Fernández, por su apoyo constante en el proceso de investigación, sus consejos, enseñanzas, recomendaciones y sugerencias tan pertinentes.

A mi profesora y miembro del jurado, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, de la línea de investigación “Tecnologías y visualización en Educación Matemática”, por las sugerencias y recomendaciones realizadas durante la elaboración del presente estudio, que me hicieron mejorar y seguir investigando.

De igual forma, agradecer a la profesora y miembro del jurado, Dra. Katia Vigo Ingar, por sus apreciables y oportunas sugerencias.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus valiosos consejos y la constante exigencia en estos años de estudio.

Al Director Jimmy Suazo y los profesores Doris Moreno, Pedro Llaja, Karina Ramos, Magaly Dúplex y Rosario Durán, de la Institución Educativa Particular La Fe de María, por su amistad, aportes y apoyo constante.

A los tres estudiantes de la universidad privada del Perú que participaron amablemente en la investigación.

A los compañeros de clases, quienes en todos estos años de estudio y dedicación me hicieron enriquecer con sus experiencias profesionales.

RESUMEN

El presente estudio tiene como finalidad analizar la coordinación entre Registros de Representación Semiótica cuando se moviliza la noción de Función Cuadrática en el desarrollo de una secuencia de actividades con estudiantes de las carreras de Humanidades. La pesquisa se realizó con estudiantes del primer ciclo de las carreras de Humanidades de una universidad privada del Perú, cuyas edades fluctúan entre 15 y 17 años. La planteamiento del problema de estudio se da en base a los antecedentes de investigación que permiten explorar las dificultades que enfrentan los estudiantes de estudio superior cuando movilizan la noción Función Cuadrática en relación al abuso de tratamientos numéricos, lo que lleva a dejar de lado la visualización del objeto matemático en el registro gráfico (variables visuales que indican características del objeto representado) y su vinculación con su representación en el registro algebraico (parámetros de la ecuación cuadrática) de la Función Cuadrática. Para la presente investigación, tomamos la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1988) como marco teórico y, como referencial metodológico, tomamos aspectos de la metodología cualitativa de Fox (1981). Respecto a la fase de experimentación y análisis, adaptamos una secuencia didáctica desarrollada en la investigación de Rodríguez (2018) y lo aplicamos en dos momentos, cuyo propósito fue propiciar la visualización, según Duval, de la representación del objeto matemático en el registro gráfico. Los resultados que se obtuvieron permitieron evidenciar que, en un mayor porcentaje de las actividades desarrollados por los estudiantes, se logró establecer la visualización de la Función Cuadrática en el registro gráfico por medio de la identificación de las variables visuales y la correspondencia de los valores de estas variables visuales con las unidades significantes de la representación del objeto matemático en el registro algebraico, por lo que esta discriminación de las variables visuales y las unidades significantes se realizó mediante un reconocimiento cualitativo, tal como sugiere Duval (1999), y que mediante este reconocimiento cualitativo, por medio de la vía de interpretación global (tercera vía de tratamiento de las representaciones gráficas), se logró definir las variables visuales pertinentes para la interpretación gráfica.

Palabras clave: Función Cuadrática; Aprehensión Global Cualitativa; Conversión de Representaciones Semióticas; Coordinación de Registros.

ABSTRACT

The present study aims to analyze the coordination between Records of Semiotic Representation when the notion of Quadratic Function is mobilized in the development of a sequence of activities with students of the Humanities careers. The research was carried out with students of the first cycle of the Humanities careers of a private university in Peru, whose ages fluctuate between 15 and 17 years. The statement of the study problem is based on the research background that allows exploring the difficulties faced by higher education students when they mobilize the notion Quadratic Function in relation to the abuse of numerical treatments, which leads to leaving aside the visualization of the object mathematics in the graphic register (visual variables that indicate characteristics of the represented object) and their relationship with its representation in the algebraic register (parameters of the quadratic equation) of the Quadratic Function. For the present research, we take the Semiotic Representation Registers theory developed by Duval (1988) as a theoretical framework and, as a methodological reference, we take aspects of the qualitative methodology of Fox (1981). Regarding the experimentation and analysis phase, we adapted a didactic sequence developed in Rodríguez's research (2018) and applied it in two moments, the purpose of which was to promote the visualization, according to Duval, of the representation of the mathematical object in the graphic register. The results obtained allowed to show that, in a higher percentage of the activities developed by the students, it was possible to establish the visualization of the Quadratic Function in the graphic register by means of the identification of the visual variables and the correspondence of the values of these visual variables with the significant units of the representation of the mathematical object in the algebraic register, so this discrimination of the visual variables and the significant units was carried out through qualitative recognition, as suggested by Duval (1999), and that through this Qualitative recognition, through the way of global interpretation (third way of treatment of graphic representations), it was possible to define the relevant visual variables for graphic interpretation.

Key words: Quadratic Function; Qualitative Global Apprehension; Conversion of Semiotic Representations; Coordination of Registers.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

INTRODUCCIÓN

El análisis de la coordinación de Registros de Representación Semiótica de la Función Cuadrática de la presente investigación, a través de la discriminación de las variables visuales en el registro gráfico y la correspondencia de los valores de estas variables con las unidades significativas de la representación del objeto matemático en el registro algebraico, con estudiantes del primer ciclo de las carreras de Humanidades, surgió como interés en base al análisis de los antecedentes de las investigaciones referidos a la movilización de la Función Cuadrática, en donde se pudo evidenciar las dificultades (abuso de tratamientos algebraicos en el registro algebraico y la ausencia de la visualización en el registro gráfico) que enfrentan los estudiantes de Educación Superior al desarrollar actividades que involucren la movilización de la noción de la Función Cuadrática y la coordinación de varios registros del mismo objeto matemático.

Es por ello, la importancia de determinar el marco teórico para el análisis de la discriminación de las diferentes variables visuales y unidades significativas en la coordinación de los Registros de Representación Semiótica de la Función Cuadrática y del mismo modo la referencial metodológica para lograr conseguir nuestro objetivo general.

En ese aspecto, desarrollaremos la investigación en cuatro capítulos.

El primer capítulo abordaremos la problemática de investigación. En ella, realizaremos un examen de antecedentes de investigación de diversos países sobre la movilización de la Función Cuadrática, la justificación de nuestro estudio, así como la pregunta y los correspondientes objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo, abordaremos el marco teórico con aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1988) y los aspectos de la metodología cualitativa de Fox (1981), este último como referencial metodológico.

En el tercer capítulo, profundizaremos los aspectos históricos y matemáticos de la Función Cuadrática, además de los aspectos didácticos observados en el estudio del texto de referencia que emplean los estudiantes del primer ciclo de las carreras de Humanidades, cuyas edades oscilan entre 15 y 17 años.

Posteriormente, en el cuarto capítulo, desarrollaremos la fase experimental y análisis de investigación, en donde describiremos a los sujetos participantes, el escenario donde se realiza y el análisis preliminar y posterior del desarrollo de la secuencia realizada por los estudiantes.

Finalmente, presentaremos los resultados finales y las consideraciones relacionadas a la coordinación de registros de la Función Cuadrática.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentaremos la problemática de investigación y los antecedentes vinculados a investigaciones sobre el estudio de la Función Cuadrática. Luego, procederemos a justificar nuestro objeto de estudio sobre la base de estas investigaciones, dando paso posteriormente a la pregunta y a los objetivos de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Nuestra investigación nace a raíz de cómo los estudiantes de Educación Superior, específicamente estudiantes de carreras de Humanidades, coordinan diferentes registros de representación cuando se moviliza la noción de la Función Cuadrática.

Entre las investigaciones examinadas de Educación Matemática que tienen como propósito el estudio de la Función Cuadrática, podemos mencionar la investigación de Almonacid (2018), que está vinculado a la Modelización de Funciones Cuadráticas: Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de Humanidades, y la investigación de Carrillo (2013), que nos habla sobre las Organizaciones Matemáticas de la noción Función Cuadrática en la enseñanza media superior.

Los artículos de investigación considerados son los de Gómez, Guirette y Morales (2016) sobre el tratamiento de interpretación global de la Función Cuadrática, por medio del uso del Geogebra y luego examinaremos el artículo de Guirette, Gómez y Valero (2017) con respecto al reconocimiento de las variables y unidades simbólicas significativas de las Funciones Cuadráticas.

También examinaremos la investigación de Guevara (2011) con respecto a una propuesta didáctica para lograr el aprendizaje significativo del concepto de Función, mediante la modelación y la simulación y analizaremos el artículo de investigación de Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) que trata sobre las dificultades de los alumnos para coordinar representaciones gráficas y algebraicas de Funciones Lineales y Cuadráticas.

A continuación, precisaremos las investigaciones antes mencionadas.

La investigación de Almonacid (2018) se enfoca en analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal con estudiantes de la carrera de Humanidades al movilizar el concepto de Función Cuadrática en la resolución de tareas de modelización mediante la tecnología digital. Esta investigación se realiza bajo la perspectiva de la teoría de Espacio de Trabajo Matemático de Kuzniak (2011), tomando como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

En la investigación de Almonacid (2018), el secuencia didáctica consiste de una tarea de modelización y su estructura se guía por el ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007), en donde se hace referencia a la relación del mundo real con la Matemática, iniciando el ciclo desde un problema (situación real) que luego, mediante una serie de tratamientos, proporciona una solución a dicho problema.

Entre las principales conclusiones de la investigación, podemos mencionar las dificultades y concepciones erróneas que presentaron los sujetos de estudio, como el tratamiento de un solo registro del objeto matemático Funciones Cuadráticas, a razón de la enseñanza fundamentada únicamente en el desarrollo de tratamientos algebraicos, la cual impide fomentar la coordinación de registros de representación y, que en ningún caso, permite una indagación de la relación intrínseca de dependencia y característica variable del objeto.

La investigadora también menciona que se debe tener en cuenta, en los planes de estudio de Educación Superior, actividades que logren promover la acción de indagación de la característica relacional y variable del objeto matemático, lo que permitirá la comprensión por parte de los estudiantes y que lo puedan relacionar con situaciones de contexto real.

La investigación de Carrillo (2013) tiene el propósito de analizar las organizaciones matemáticas sobre la Función Cuadrática en los libros de texto de enseñanza universitaria en la escuela de Economía. Para tal análisis, utiliza algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard y, en cuanto a la metodología de investigación, toma como referencia el método cualitativo de tipo bibliográfico.

Entre los aportes de dicha investigación, la autora refiere que, para ayudar a superar la dificultad en los estudiantes de no relacionar la representación gráfica con la algebraica de una Función Cuadrática, el texto de consulta debe presentar un lenguaje algebraico, un lenguaje natural y representaciones gráficas que ayuden la comprensión del objeto matemático, además de la pertinencia de presentar tareas resueltas en donde se pueda establecer la diferencia entre una Función Cuadrática y una ecuación cuadrática.

Otro aporte de este estudio es sobre la sugerencia de presentar tareas resueltas y propuestas en donde los estudiantes se vean involucrados en coordinar el registro lengua natural y registro algebraico, como puede ser la optimización de áreas, volúmenes, entre otros, así como tomar en consideración tres tipos de tareas: obtener las intersecciones con los ejes coordenados, establecer los parámetros a partir de una expresión algebraica y a partir de una gráfica del objeto Función Cuadrática determinar su escritura algebraica.

Si bien es cierto nuestra investigación no es de enfoque cualitativo bibliográfico, los aportes de Carrillo (2013) serán de importancia cuando se analicen los textos de consulta de los estudiantes, ya que nuestra investigación toma aspectos de la metodología cualitativa de Fox (1981).

El artículo de investigación de Gómez, Guirette y Morales (2016), se desarrolla bajo los objetivos de determinar las unidades simbólicas significantes del registro algebraico del objeto Función Cuadrática que delimitan una variable visual adecuada en el registro gráfico y ejemplificar con la tecnología (Geogebra) cómo se logra alcanzar la discriminación de estas variables y unidades significantes desde el enfoque de la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1988) con estudiantes que cursan el cuarto semestre del nivel medio superior del curso de Matemática IV, podemos destacar la propuesta de presentar y explorar tres variables visuales de la gráfica de la Función Cuadrática, que están en correspondencia semiótica con el valor de las unidades significantes (parámetros a, b y c), de la estructura algebraica de la Función Cuadrática. Es decir, a cada valor de la variable visual le corresponde el signo de una unidad significante.

Otro aporte a mencionar sobre el artículo es la exploración y la identificación de las variables visuales y unidades significativas que realizaron los estudiantes en las tareas propuestas, como la comparación de expresiones o gráficas visualmente semejantes. Los resultados de la investigación reflejan la imposibilidad de admitir que los estudiantes perciban de forma espontánea la relación semiótica de las características visuales y las unidades significantes de los registros gráfico y algebraico del objeto Función Cuadrática, debido a que están acostumbrados a realizar tratamientos sin coordinación de los registros gráfico y algebraico.

Los investigadores también comentan que la finalidad del estudio es explorar el reconocimiento global cualitativo por medio de la conversión de la representación entre los registros gráfico y algebraico de la noción Función Cuadrática en su forma general, desde el enfoque de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1988) con estudiantes del quinto semestre de bachillerato (entre 16-18 años de edad).

Entre sus aportes figura como “un reconocimiento consistente” si la relación de las unidades significativas (parámetros a, b y c) del registro algebraico, con sus respectivas variables visuales en el registro gráfico del objeto Función Cuadrática, se realizaba de manera correcta en todas las tareas propuestas y como “reconocimiento inconsistente” si dicha asociación era falible en al menos una tarea.

Cabe mencionar que los autores observaron, en las respuestas analizadas de las tareas, que había estudiantes que a un mismo signo de una unidad significante se le asociaba valores diferentes a la variable visual respectiva, como por ejemplo, al signo del parámetro “a”, de la escritura algebraica, se le asociaba la concavidad y la traslación de la representación gráfica. Además, la correspondencia semiótica de las unidades significantes y las variables visuales se hace más difícil cuando se cambia de registro de partida (registro gráfico al registro algebraico).

Sobre la investigación de Guevara (2011), este tiene como propósito analizar el concepto de función desde el aprendizaje significativo y las alternativas del proceso de aprendizaje relacionadas con los sistemas de representaciones (grafico, algebraico, lengua natural) que conllevan a la modelación de las funciones en cursos de Precálculo y, además, se presentan diferentes bloques de actividades de simulación y modelación, esto en referencia a una alternativa para integrar diferentes representaciones del objeto Función en los cursos de Precálculo, logrando así prosperar el aprendizaje en este nivel.

El estudio está orientado desde la perspectiva del Aprendizaje Significativo desarrollado por Ausubel y Novak (1970) y teniendo como metodología de trabajo una reorganización de los distintos conocimientos para instituir una red conceptual curricular, donde se tengan en consideración los conceptos, las proposiciones y procedimientos que provienen significativamente del objeto Función.

Uno de los aportes del estudio refiere que, para adquirir un aprendizaje significativo, se debe enseñar la noción de Función como una red conceptual ligada, al proceso de modelación y simulación de contextos reales, considerando las representaciones: verbal, gráfica, algebraica y tabla de datos, con respecto a Funciones.

El autor finaliza considerando que si en el desarrollo de la actividad al estudiante no se propone un problema significativo (de contexto real) que genere la indagación de su solución, complica la evidencia de una organización y estructuración de los conocimientos y habilidades.

El artículo de investigación de Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) se enfoca en las complicaciones de los estudiantes para articular representaciones gráficas y algebraicas de las Funciones tanto lineales como cuadráticas. Dicho estudio se realiza con ingresantes a la carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional del Litoral de Argentina desde el enfoque de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1988) y con una metodología de corte descriptivo y exploratorio.

Entre las conclusiones de este artículo podemos destacar que con los datos obtenidos se pudo evidenciar que los sujetos de la investigación no lograron constituir una coordinación espontánea y libre de errores de las representaciones del objeto matemático, esto debido a la ausencia de una aprehensión conceptual (referente al proceso del pensamiento por el que se comprende, “convirtiéndose en un contenido mental”, la información percibida) de los objetos en estudio (Función lineal y cuadrática).

También mencionan Díaz et al. (2015), con respecto al objeto Función Cuadrática, que la dificultad para articular representaciones de la noción matemática se hizo notorio en cuanto a la correspondencia entre el parámetro del término lineal con la posición del eje de la gráfica (parábola) y además tampoco lograron determinar el parámetro del término cuadrático en base a la información visual inmersa en la gráfica.

Otro fenómeno que observan los investigadores, se refiere a una mayor dificultad cuando el registro gráfico es el punto de partida, trayendo como consecuencia que los estudiantes no logren realizar generalizaciones, formalizaciones y abstracciones. En este sentido, los investigadores comentan que, existiendo investigaciones y resultados en Educación Matemática relacionados a los beneficios de la articulación de registros como un perfil a desarrollar, pareciera que, en el entorno contextual en donde se aplicó el estudio, aún es escaso la evidencia de esos tratamientos en las actividades del aula y en los materiales didácticos utilizados.

Estas investigaciones sobre la Función Cuadrática nos muestran cómo, en muchos casos, el objeto matemático está asociado solo al tratamiento algebraico y numérico, por lo que se pierde las características de la exploración y observación de la relación de dependencia y característica variable del objeto de estudio, trayendo como consecuencia en los estudiantes dificultades y conceptos erróneos cuando se moviliza la noción matemática Función Cuadrática, además que la asociación de las unidades significantes del registro algebraico, con sus correspondientes variables visuales del registro gráfico de la Función Cuadrática, son importantes para la interpretación global cualitativa de las características propias del objeto matemático, por lo que los investigadores concuerdan en el uso de actividades didácticas en donde se coordine diferentes tipos de representación del objeto matemático para lograr una mayor abstracción de dicho objeto.

Por ello, las citadas investigaciones nos servirán como guía para la elección y adaptación de actividades didácticas del presente trabajo.

1.2 Justificación

En las referencias citadas, podemos observar las dificultades que evocan los estudiantes al construir y movilizar el objeto matemático Función Cuadrática y, por parte de los educadores, la necesidad de diseñar secuencias didácticas en donde los estudiantes puedan coordinar diferentes tipos de representación de la noción matemática Función Cuadrática.

Al respecto, la pesquisa de Almonacid (2018) señala que, en cuanto a las concepciones y dificultades que presentan los estudiantes, se deben a que priorizan el registro de representación algebraico, trayendo como consecuencia la dificultad de analizar el objeto matemático en otro tipo de representación (tabular o gráfico).

Almonacid (2018) también indica que una enseñanza orientada primordialmente en tratamientos algebraicos, trae como consecuencia las concepciones erradas y hace referencia en que las dificultades y concepciones erróneas que puede presentar el estudiante es debido a una enseñanza orientada principalmente en tratamientos algebraicos, las cuales no fomentan la coordinación de diferentes tipos de representación del objeto matemático Función Cuadrática, lo que impide la exploración y observación de la correspondencia de dependencia y variacional del objeto matemático en los diferentes registros.

Por otra parte, Cuesta (2007), citada por Carrillo (2013), presenta en su estudio que los estudiantes muestran dificultades al establecer las representaciones algebraica y gráfica de la noción Función como conceptos independientes, relacionando el objeto Función solo a su representación algebraica y los valores de una tabla es solo una herramienta para graficar la Función.

Félix (2009), citada por Carrillo (2013), refiere que los estudiantes presentan dificultad en la actividad matemática relacionada con la Función Cuadrática, ya que al presentar los valores en una tabla de datos no distinguen si la relación es cuadrática y, en consecuencia, no logran simbolizarla. Además, algunos estudiantes cuando visualizan la gráfica de la parábola no logran identificar elementos como su vértice, las intersecciones con los ejes, la correspondencia entre las variables y su variación conjunta, la concavidad, etc.

Guevara (2011), en su propuesta didáctica del objeto matemático función, refiere que, para alcanzar un aprendizaje significativo que logre superar los efectos de un aprendizaje centrado en contenidos, es introduciendo la noción de Función como una red conceptual relacionada al proceso de modelación y simulación de contextos reales, considerando las distintas formas de representar el objeto Función: verbal, gráfica, tabla de datos y mediante ecuaciones algebraicas.

El investigador manifiesta que a través de su propuesta didáctica, las herramientas tecnológicas permiten, mediante un registro visual, entender y estudiar varias características acerca del objeto de estudio y aclarar en los individuos cómo se efectúan las diferentes conversiones entre sí de las representaciones de la Función: gráfico-tabular, tabular-algebraico, gráfico-algebraico y numérico-tabular.

Por otra parte, la investigación de Díaz et. al. (2015) evidencia las dificultades de los estudiantes para articular representaciones gráficas y algebraicas de Funciones lineales y cuadráticas, como son el no lograr determinar una coordinación natural y sin errores de sus representaciones, lo cual indica la ausencia de una aprehensión conceptual de los objetos de estudio (Función lineal y cuadrática).

En relación a la Función Cuadrática, los individuos no llegaron a establecer la vinculación entre el coeficiente del término lineal y la orientación del eje de la parábola y tampoco identificaron el coeficiente del término cuadrático por medio de la información visual inmersa en la gráfica. Además, se evidencia una mayor dificultad cuando el registro gráfico es el punto de partida, trayendo como consecuencia el no poder entablar generalizaciones, formalizaciones y abstracciones.

Díaz et. al. (2013) refieren que, a partir de los datos, las observaciones y conclusiones obtenidas permiten a futuro determinar interrogantes sobre la magnitud de la repercusión de los errores derivados de los conocimientos previos en las evidencias obtenidos por los estudiantes de primer año de carrera universitaria y, por consiguiente, se hace necesario seguir realizando estudios acerca de la incidencia de los diferentes tipos de errores en el primer curso de Matemática de los estudios universitarios.

Por otra parte, los artículos de investigación de Gómez, Guirette y Morales (2016) y Guirette, Gómez y Valero (2017) refieren en la necesidad de una interpretación global cualitativa, por parte de los estudiantes, al abordar el estudio de la Función Cuadrática, ya que promueve que estos alcancen a determinar la coordinación de los Registros de Representación Semiótica de la Función Cuadrática, permitiendo así un mayor conocimiento de las características inherentes al objeto matemático.

Podemos afirmar que los estudiantes de Educación Superior (Humanidades), ya tuvieron un acercamiento a nuestro objeto de estudio, debido a que el Ministerio de Educación (MINEDU, 2017), mediante el Currículo Nacional De Educación Básica (CNEB, 2017), ubica nuestro objeto matemático Función Cuadrática en la competencia **resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio** perteneciente al ciclo VII:

> Resuelve problemas referidos a… funciones cuadráticas y exponenciales. Expresa su comprensión de… una función lineal y una Función Cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos... “(Perú, Ministerio de Educación, 2017, p. 139)”.

Esto se ratifica en el sílabo del curso de Humanidades de los estudiantes. En cuanto a la relevancia profesional, Almonacid (2018) presenta un cuadro en donde el objeto matemático

Función Cuadrática está incluida en las mallas curriculares de estudios generales de la carrera de Humanidades de dos universidades del Perú (ver Figura 1).

Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).	• Antropología • Ciencia Política y Gobierno • Psicología • Sociología	• Matemática Básica curso prerrequisito para el curso de Estadística.
Programa de Estudios Generales de la Escuela Universitaria de Humanidades de la Universidad Privada de Lima.	• Comunicación • Derecho • Psicología	• Fundamentos de Matemática prerrequisito para los cursos de Economía y Empresa, y Estadística Aplicada a la Psicología.

Figura 1. Planes de estudio de carreras de humanidades
Fuente: Almonacid (2018, p. 26)

Cabe resaltar que los cursos en donde se enseña la Función Cuadrática, en dichas universidades, es impartida, en su mayoría, entre el primer y segundo semestre de estudios generales.

En tal sentido, por las referencias presentadas en nuestra investigación, es pertinente que los estudiantes de las carreras de Humanidades tengan una comprensión profunda de la Función Cuadrática y de sus propiedades intrínsecas y logren transitar y coordinar adecuadamente por los diferentes tipos de representación de dicha noción.

Por todo lo presentado, ante las necesidades vigentes en didáctica de la Matemática, se considera necesario realizar una investigación que permita estudiar la coordinación de los diferentes tipos de representación, a través de la discriminación de las unidades significantes, cuando se moviliza la noción Función Cuadrática en una secuencia didáctica con estudiantes de carreras de Humanidades.

A continuación, presentaremos la pregunta, así como los objetivos de la presente investigación.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

En concordancia con los trabajos referenciales, anteriormente citados, y la justificación, formulamos la pregunta de investigación:

¿Cómo estudiantes de carreras de Humanidades realizan la coordinación de Registros de Representación Semiótica, a través de la discriminación de las unidades significantes, cuando se moviliza la noción de Función Cuadrática en una secuencia didáctica?

En consecuencia, para nuestra investigación, el objetivo general es el siguiente:

Analizar la coordinación entre Registros de Representación Semiótica, por medio de la discriminación de las unidades significantes, cuando se moviliza la noción de Función Cuadrática en una secuencia didáctica con estudiantes de carreras de Humanidades.

Para cumplir con el objetivo general, se proponen los objetivos específicos:

- Analizar la coordinación de los registros en lengua natural, gráfico y algebraico que realizan los estudiantes de Humanidades a través de la discriminación de las unidades significantes, al desarrollar una secuencia didáctica de la noción Función Cuadrática.
- Identificar las conversiones y tratamientos que realizan los estudiantes de Humanidades al movilizar la noción Función Cuadrática en el desarrollo de una secuencia didáctica.

A continuación, presentaremos el marco teórico y metodológico de nuestro trabajo de investigación.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, presentaremos características de la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1988) y elementos de la metodología cualitativa del autor Fox (1981).

2.1 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Esta teoría es un constructo teórico desarrollado por Raymond Duval en 1988, en donde prevalecen dos aspectos en la acción cognitiva de las habilidades matemáticas: los diversos Registros de Representación Semiótica y los objetos matemáticos que no son tangibles.

En este sentido, el investigador refiere que la actividad matemática se ejecuta en un contexto de representación y que las representaciones semióticas permiten el acceso a objetos matemáticos no tangibles, a diferencia de otras ciencias.

En la actividad matemática, según el autor, se hace necesario examinar los procesos cognitivos, como la conceptualización, en donde los mismos necesitan del uso de diferentes tipos de representación ajenos a los del lenguaje natural, como pueden ser el simbólico, tabular, esquemas, imágenes, algebraico, geométrico, gráfico, entre otros, en donde estas representaciones logran la condición de lenguajes paralelos al lenguaje natural para poder exteriorizar las relaciones y las operaciones.

En esta perspectiva, el constructo teórico refiere que las representaciones son necesarias para alcanzar el aprendizaje de un objeto matemático, por lo que Duval (1999) afirma: "*la comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva*". Por lo tanto, la coordinación de diferentes tipos de representación es crucial para el aprendizaje de una noción matemática y en donde se hace primordial no confundir el objeto con su representación, quedando así establecido que el objeto debe ser reconocido en cada una de sus diferentes representaciones.

El investigador manifiesta que podemos acceder a un objeto matemático a través de sus diferentes tipos de representación y que para lograr la comprensión de una noción matemática se hace indispensable desarrollar procesos cognitivos fundamentales: conceptualización, razonamiento, solución de problemas y la comprensión de textos, y que estas necesitan el uso de diferentes sistemas semióticos de representación, por lo que el investigador establece dos tipos de representación:

- *Representaciones mentales*: vinculadas a un conjunto de concepciones o imágenes mentales que se tiene acerca de un objeto. Es estrictamente de carácter interno, por lo que no puede ser visualizada por otro individuo.
- *Representaciones semióticas*: referidas a las producciones constituidas por el uso de signos y que se rigen a través de reglas explicitas o implícitas. Es decir, son el medio por el cual se puede exteriorizar las representaciones mentales y lograr la accesibilidad a otros individuos.

Las representaciones semióticas, según Duval (1988), además de cumplir la función de comunicación, también deben cumplir la función de objetivación, necesaria para la actividad matemática; el funcionamiento cognitivo del pensamiento; el tratamiento de la información y; la toma de conciencia y comprensión.

Duval (1999) afirma que la aprehensión o la producción de una representación semiótica de una noción matemática es la semiosis y los actos cognitivos del individuo a consecuencia de la aprehensión conceptual de la noción es la noesis. Por lo tanto, ambas están estrechamente vinculadas o lo que es lo mismo decir que no hay noesis sin semiosis, quedando así establecido que la noesis es la representación mental de una noción matemática y la semiosis es la expresión, a través de símbolos, de dicha representación mental.

El autor denomina a estos registros como sistemas de representación semiótica, los cuales son definidos a través de tres actividades cognitivas que se pueden realizar en ellos: la formación (representación del objeto en un registro), el tratamiento (transformación interna de la representación de un objeto en un registro) y la conversión (transformación de la representación de un objeto en un registro a otro registro).

Es decir:

> "Los sistemas semióticos, en efecto, han de permitir que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: en primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Luego, transformar las representaciones de acuerdo a las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado" (Duval, 2004, p. 30).

Por tal motivo, Duval (1999) diferencia cuatro tipos de Registros de Representación Semiótica en Matemática:

- *Los discursivos*: que posibilitan inferir, razonar, describir, enunciar y transformar expresiones.
- *Los no discursivos*: permiten visualizar lo que no es dado de manera visible a través de formas, configuraciones y organizaciones.
- *Los multifuncionales*: se usan en diversos espacios culturales y sociales, por lo que no son tratamientos de tipo algorítmico.
- *Los monofuncionales*: son sistemas especializados en transformaciones internas de tipo algorítmico, siendo de carácter técnico y formal con gran potencialidad de tratamientos, los cuales lo hacen en la enseñanza los más favorecidos.

Para nuestra investigación, tomaremos en consideración el registro algebraico (registro de representación discursivo) y el registro gráfico (registro de representación no discursivo), ya que en las actividades se formularán expresiones y se representarán conformaciones de formas, derivando de estas el razonamiento, el cálculo, y la visualización de lo que no es presentado a primera vista (Duval, 2004).

Como mencionamos anteriormente, los Registros de Representación Semiótica pueden conllevar a dos tipos de transformación: tratamientos y conversiones. Duval (2004) asegura que la comprensión de una situación propuesta en el registro lengua natural, es necesario hacer un tratamiento para su comprensión, así como puede ser una descripción o explicación, y mediante la conversión el individuo debe diferenciar las unidades significantes existentes en el enunciado de la situación y lograr poner en correspondencia dichas unidades con su representación en otro registro, siendo esta correspondencia quizás la de mayor dificultad en realizar.

En este sentido, la conversión conlleva a poder elegir una representación, ya sea de tipo algebraica, gráfica, figural, simbólica o aritmética, y de esta manera se pueda lograr organizar la información de la situación planteada, permitiendo así realizar el tratamiento matemático correspondiente que dé solución a dicha situación.

Según el autor, se debe considerar los criterios de *congruencia*, como son la correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden posible de aprehensión, de las unidades significantes existentes en el conjunto de partida (registro inicial) y el conjunto de llegada (registro a coordinar).

Para la presente investigación, es necesario considerar los registros de representación empleados en Matemáticas referente a nuestro objeto de estudio Función Cuadrática, a fin considerarlos en la propuesta de las secuencias didácticas y que serán un referente para el análisis de las producciones de los sujetos de estudio, en referencia a las acciones cognitivas de formación, tratamiento y conversión.

- *Registro de representación lengua natural*, admitiendo como representación una descripción en lengua natural, ya sea de tipo verbal o escrito. Esta representación está relacionada con la facultad lingüística de los sujetos de estudio y es primordial en la interpretación de situaciones contextualizadas.
- *Registro de representación algebraico,* admitiendo como representación expresiones algebraicas (en nuestro caso: escritura algebraica de la Función Cuadrática). Esta representación está relacionada con la capacidad simbólica que poseen los individuos, específicamente con el Álgebra.
- *Registro de representación gráfico,* admitiendo como representación una figura geométrica (en nuestro caso: la gráfica de la Función Cuadrática). Esta representación está relacionada con el pensamiento geométrico y analítico según Duval (1988).

2.1.1 Coordinación de Registros de Representación Semiótica

Con relación a la coordinación de Registros de Representación Semiótica, Duval (1999) manifiesta que esta se refiere en la movilización y la coordinación de los Registros de Representación Semiótica, considerando un aspecto importante la diferenciación e identificación de las unidades significantes en los diferentes registros.

En donde "*las unidades significantes son aquellas componentes de la representación cuya variación (dejando el resto de variables fijas) produce variaciones observables en la representación del objeto en otro registro*", Duval (1999, pp. 74-75).

En ese sentido, Duval (2004) afirma que la comprensión matemática demanda una coordinación entre los diferentes Registros de Representación Semióticos disponibles que se pueden distinguir, optar y usar. Si no se desarrolla esta coordinación en los estudiantes, estos no podrán realizar la actividad cognitiva de la conversión de representación y del desarrollo de esta coordinación depende la habilidad de movilizar diferentes representaciones conjuntamente de forma interactiva o en paralelo.

Duval (2004) expresa que la percepción conceptual no es condición de dicha coordinación, sino que la apropiación conceptual emerge del desarrollo de dicha coordinación, por lo que es indispensable para la enseñanza de las Matemáticas, en ningún caso la elección de un mejor registro de representación, sino que los estudiantes logren la capacidad de relacionar diferentes representaciones de los objetos matemáticos.

Ejemplo de la coordinación del registro de representación *algebraico-gráfico* de la noción Función Cuadrática:

La representación de la Función Cuadrática en el registro algebraico:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

luego con el tratamiento respectivo en el registro algebraico:

$$f(x) = ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c,$$

obtenemos: $$f(x) = a(x-h)^2 + k,$$

donde: $$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad k = c - \frac{b^2}{4a}$$

La representación de la Función Cuadrática en el registro gráfico (ver Figura 2):

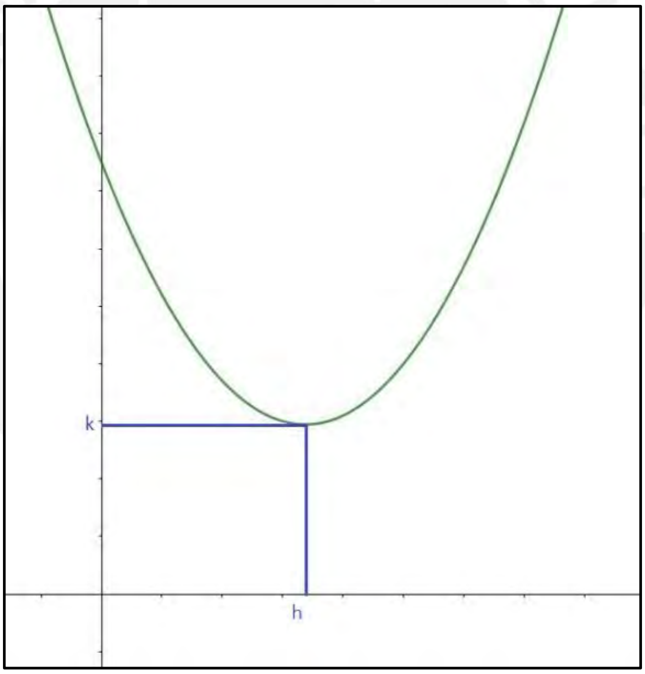


Figura 2. Registro gráfico de la Función representado por: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, cuando $a > 0$.

Por lo tanto, según Duval (1999), la coordinación se basa en la movilización y vinculación de los diferentes registros involucrados, en nuestro caso del objeto matemático Función Cuadrática, considerando como requisito importante la discriminación de las unidades significantes, estableciendo correspondencia entre ellas, tanto en el registro algebraico así como en el registro gráfico (ver Figura 3).

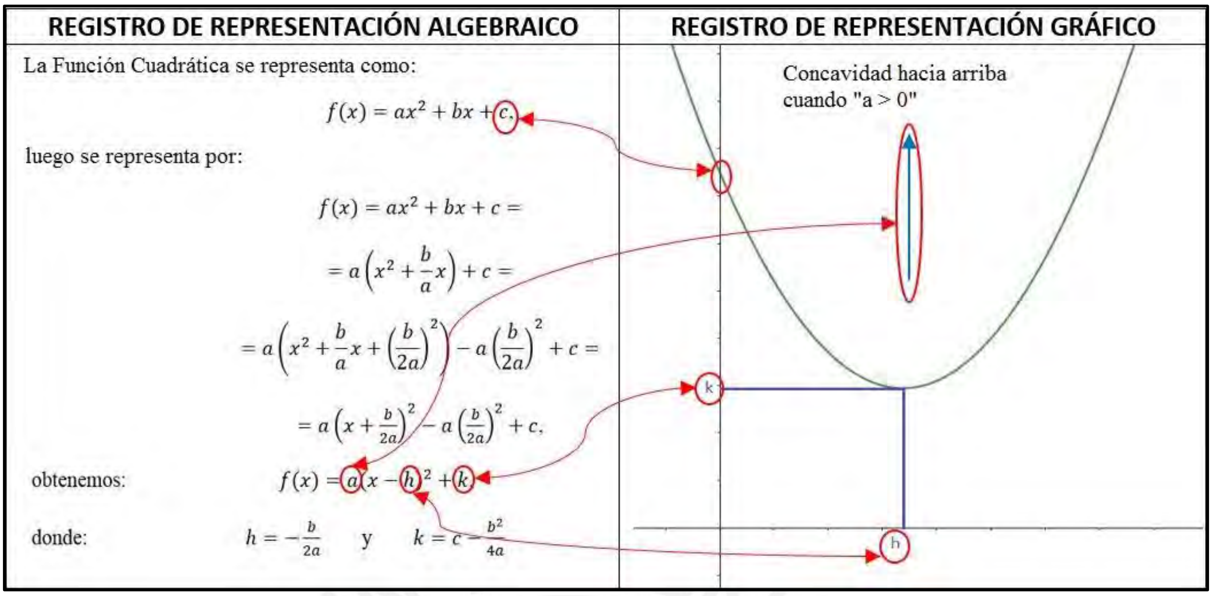


Figura 3. Discriminación de las unidades significantes y correspondencia entre el registro algebraico y gráfico.

La graficación de la Función Cuadrática necesita de transformar (conversión) la representación algebraica a su representación gráfica e igualmente es importante, para el aprendizaje de las Matemáticas, realizar el proceso inverso. Esta conversión requiere de hacer explícito las unidades significantes en los registros involucrados para que posibiliten transitar de un registro a otro.

En ese sentido, Duval (1988), a través de sus investigaciones, evidencia la dificultad de las representaciones gráficas y algebraicas del mismo objeto matemático, ya que los estudiantes no han sido instruidos acerca de las leyes semióticas que relacionan a las distintas representaciones (en nuestro caso: algebraica y gráfica). Es decir, la ley semiótica que vincula a las unidades simbólicas algebraicas y las variables visuales de las gráficas.

Con respecto a la codificación del registro gráfico, Duval refiere que en el registro gráfico se define una regla de codificación: a un punto del eje coordenado (plano) le corresponde un par ordenado (pareja de números) y viceversa. Permitiendo así, demarcar varios puntos como se desee, pero no realizar el trazo continuo de la figura (recta, parábola, etc.)

Finalmente, la coordinación de registros de representación necesita que la conversión pueda realizarse fácilmente para todos sus diversos cambios de registro y la manera de favorecer esta coordinación, se hace pertinente proponer una tarea que conduzca a explorar sistemáticamente las variantes posibles de una representación en un registro y predecir u observar las variaciones concurrentes de las representaciones en el otro registro (Duval, 1999).

2.1.2 Aprehensión global cualitativa de la representación de la Función Cuadrática en el registro gráfico

Antes de desarrollar la forma de visualizar la representación gráfica de la Función Cuadrática, conviene mencionar que los tratamientos propios de las representaciones gráficas, según Duval (1988), son tres: *vía el punteo*, la más acertada para un primer acercamiento de las representaciones gráficas del objeto Función; *vía de extensión del trazo efectuado*, en referencia a las actividades propias de interpolación y extrapolación, centrándose en los datos del trazo hecho, dejando de lado las variables visuales idóneos de la representación gráfica; *vía de interpretación global de las propiedades de las figuras*, la más importante entre las tres, que en palabras del autor distingue, que toda alteración de una representación gráfica que ejerza una transformación en la escritura algebraica correspondiente, determina una variable visual oportuna para la interpretación gráfica.

Duval establece que las dos primeras *vías* quedan reducidas a valores y puntos particulares, dejando de lado las diferentes variables visuales que se debe tomar en consideración en la representación gráfica, por lo que para nuestro estudio utilizaremos la interpretación global de las características de la representación gráfica de la Función Cuadrática, ya que nos ayudará a definir las variables visuales a considerar en la secuencia didáctica que desarrollarán los estudiantes.

El estudio de una correspondencia semiótica de las unidades significativas (parámetros *a*, *b* y *c*) de la escritura algebraica con las variables visuales de la representación gráfica se fundamenta en la *vía de interpretación global* que refiere Duval (1988).

Por otro lado, el investigador menciona que la visualización es una organización de la correspondencia de las unidades significantes, que además hace evidente lo que ha simple vista no lo es, por lo que la visualización no puede ser limitada solo a la visión. Entonces, para poder analizar cualquier forma de visualización, es importante considerar la existencia de varios registros de representación, así como también es necesario la identificación de las unidades significantes para propiciar la coordinación del registro de partida y el registro de llegada.

Duval (1988) refiere que, para la lectura de las representaciones gráficas, es necesario la diferenciación e identificación de las variables visuales y la observación de las variaciones correspondientes en el registro algebraico, en donde dichas variables visuales son definidas por la interpretación global de las propiedades de la representación gráfica del objeto matemático, por lo que las modificaciones en el registro gráfico y la coordinación de los registros gráfico y algebraico son esenciales en el proceso de visualización (Vigo y Ferreira, 2015).

El término “aprehender” se usa en el sentido de comprender a la perfección la información, asimilándola y pudiendo reutilizarla a partir de la interpretación propia, tal como destacan Vigo y Ferreira (2019).

Dado que la actividad cognitiva de la conversión es compleja entre los registros algebraico y gráfico, ya que no hay pasos específicos para realizar dicha transformación de manera directa, Duval (1999) manifiesta que debe distinguirse lo perceptible en un gráfico y lo que las distinciones particulares hacen posible identificar. Por ello, Duval (2004) designa tres formas de visualizar las gráficas en el plano cartesiano: *aprehensión* local, *aprehensión* icónica y *aprehensión* global cualitativa.

La *aprehensión* global cualitativa favorece la articulación de los registros gráfico y algebraico, ya que los indicadores visuales de la representación gráfica se colocan en relación con las unidades simbólicas de la escritura algebraica y no con enunciados numéricos (Duval, 2004).

A razón de esto, en nuestra investigación, elegiremos la tercera forma de visualizar las gráficas cartesianas, como lo es la *aprehensión* global cualitativa, ya que esta *aprehensión* favorece la coordinación de los registros gráfico y algebraico del objeto Función cuadrática.

Basados en la discriminación del conjunto de unidades cognitivamente pertinentes de la escritura algebraica del objeto Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde *a*, *b* y *c* son números reales con $a \neq 0$, para la coordinación de los registros gráfico y algebraico de dicha noción, estudiado en la investigación de Guirette, Gómez y Valero (2017), es que se hace una adaptación de dicha discriminación desarrollada por los autores, donde la variable visual “intersección de la curva con el eje *x*” no es tomada en consideración.

Cuadro 1. *Adaptación de las variables visuales y unidades simbólicas significativas de la Función Cuadrática desarrolladas por Guirette, Gómez y Valero (2017).*

Variables visuales	Valores	Unidades simbólicas
Concavidad	Hacia arriba	$a > 0$
	Hacia abajo	$a < 0$
Posición del vértice respecto del eje y	A la izquierda	$ab > 0$
	Sobre el eje	$b = 0$
	A la derecha	$ab < 0$
	Arriba del origen	$c > 0$
	En el origen	$c = 0$

Intersección de la curva con el	Abajo del origen	$c < 0$
Intersección de la curva con el eje x	Dos puntos de intersección	$b^2 - 4ac > 0$
	Un punto de intersección	$b^2 - 4ac = 0$
	No hay intersección	$b^2 - 4ac < 0$

Como se puede observar en el cuadro 1, cada valor de las variables visuales se le asigna una unidad simbólica en la escritura algebraica del objeto Función cuadrática.

Para la presente investigación, tomaremos en consideración las siguientes variables visuales: Concavidad, intersección de la curva con el eje "y" e intersección de la curva con el eje "x".

Concavidad

Los valores de la variable visual *concavidad*, de la representación de la Función Cuadrática en el registro gráfico, pueden ser hacia arriba o hacia abajo y la misma es una curva abierta vertical (parábola en posición vertical), en donde esta variable visual es determinada por la unidad simbólica perteneciente al valor del signo del parámetro *"a"* del término cuadrático, la cual cabe en la posibilidad de ser negativo ($a < 0$) o positivo ($a > 0$).

Intersección de la curva con el eje coordenado y

Los valores de la variable visual *intersección de la curva con el eje "y",* de la representación de la Función Cuadrática en el registro gráfico, considerando como referencia el origen del eje coordenado "*y*", pueden ser por encima del origen, en el origen o por debajo del origen.

La intersección de la representación con el eje "*y*" es determinado por el valor del signo del parámetro "*c*", la cual si es positiva ($c > 0$), la curva intersecta al eje "y" en el valor positivo, si es igual a cero ($c = 0$), la curva intersecta el origen del eje "*y*" y si es negativa ($c < 0$), la curva intersecta al eje "*y*" en el valor negativo.

Intersección de la curva con el eje coordenado x

Los valores de la variable visual *intersección de la curva con el eje "x",* de la representación del objeto Función cuadrática en el registro gráfico, tomando como punto de referencia el eje "*x*", pueden ser dos puntos de intersección: un punto de intersección o ninguna intersección.

El corte de la representación gráfica con el eje "*x*" es determinado por el signo del discriminante de la ecuación cuadrática vinculada a la función. Es decir, del *tratamiento* de los parámetro "*a*", "*b*" y "*c*", la cual, si es positiva ($b^2 - 4ac > 0$), la curva corta en dos puntos al eje "*x*", si es igual a cero ($b^2 - 4ac = 0$), la curva corta en un punto al eje "*x*" y si es negativa ($b^2 - 4ac < 0$), la curva no corta en ningún punto al eje "x".

2.1.3 Cambio de registro de la representación de la Función Cuadrática

Tocto (2015) realiza una ejemplificación en relación a los diferentes tipos de representación de la Función Cuadrática cuando se moviliza esta noción (ver Figura 4).

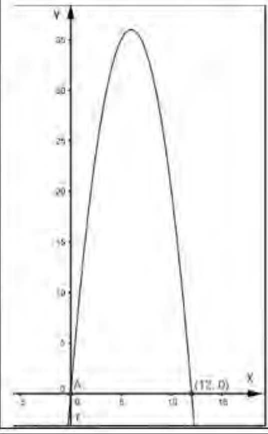
<table>
<tr><th>Registro de lenguaje natural</th><th>Registro tabular</th><th>Registro gráfico</th><th>Registro algebraico</th></tr>
<tr><td>Pedro tiene 24 metros de malla de alambre y quiere construir un corral de forma rectangular para sus pollos. ¿Cuál es la mayor área que puede cercar con los 24 metros de malla que tiene?</td><td><table><tr><th>x</th><th>F(x)</th></tr><tr><td>2</td><td>20</td></tr><tr><td>4</td><td>32</td></tr><tr><td>6</td><td>36</td></tr><tr><td>8</td><td>32</td></tr><tr><td>10</td><td>20</td></tr><tr><td>12</td><td>0</td></tr></table></td><td></td><td>$f(x) = -x^2 + 12x$</td></tr>
</table>

Figura 4. Ejemplo de la movilización de la Función Cuadrática en diferentes registros de representación semiótica.
Fuente: Tocto (2015, pp. 25 y 26)

Al llevar a cabo una transformación de representación en registros diferentes, se hace indispensable la identificación de las unidades significantes en los diferentes registros semióticos que las relacionan.

Duval afirma que para que se logre una transformación de una representación de un objeto de un registro a otro, es prescindible discriminar de manera óptima las unidades simbólicas de las representaciones involucradas en la transformación.

En la figura 4, observamos que las unidades significantes corresponden a los registros gráfico, tabular y algebraico. El registro verbal desempeña un papel de soporte y hace explícitos las consideraciones tanto gráficas, tabular y algebraicas. Cabe resaltar que "*en una escritura algebraica cada símbolo define a una unidad significante*" (Duval, 1998).

En consecuencia, el autor afirma que la actividad matemática demanda que los estudiantes utilicen diversos registros de la representación del mismo objeto matemático, la cual requiere una coordinación inmediata y espontanea según el propósito de la actividad.

Finalmente, para la comprensión conceptual de una noción matemática es indispensable la coordinación de diferentes registros, teniendo en consideración que el objeto no sea confundido con su representación y que al haber la ausencia de dicha coordinación entre las representaciones semióticas diferentes significaría que se evidencia dos objetos diferentes, (Duval, 1999).

2.2 Aspectos metodológicos

En esta parte, desarrollaremos la metodología de investigación del presente estudio, que será de corte cualitativa, que nos proporcionará datos descriptivos como las palabras de los sujetos de estudio (habladas o escritas) y la conducta observable.

Borba y Araujo (2004) señalan que la investigación cualitativa, en Educación Matemática, se encuentra avocada al análisis y explicación de procesos de la enseñanza y aprendizaje asociados a la Matemática, donde el contexto real es quien proporciona los datos y en la que el investigador juega un papel fundamental.

En tal sentido, Hernández, Fernández y Baptista (2014) refieren que un estudio, desde una perspectiva cualitativa, toma en consideración la recolección y análisis de datos para delimitar la pregunta de investigación o evocar nuevas interrogantes en el proceso del análisis de las mismas.

Al respecto, Garnica (2004) expresa las características de una investigación cualitativa:

> (i) La transitoriedad de sus resultados; (ii) la imposibilidad de una hipótesis a priori, cuyo objetivo de la investigación será comprobar o refutar; (iii) la no neutralidad del investigador que, en el proceso interpretativo, utiliza sus perspectivas y filtros experimentales previos de los que no puede desvincularse; (iv) que la constitución de sus entendimientos ocurre no como resultado, pero en una trayectoria en la que estos mismos entendimientos y también los medios para obtenerlos pueden reconfigurarse; y (v) la imposibilidad de establecer regulaciones en procedimientos sistemáticos y previos, estáticos y generalistas.(Garnica 2004, p.86)

Se puede mencionar que las características vistas anteriormente no deben considerarse como reglas estrictas, ya que en el entendimiento una investigación de corte cualitativo está en movimiento, por lo que esas características antes mencionadas conducen a diferentes énfasis.

Araujo y Borba (2004) enfatizan que una investigación de corte cualitativo debe sustentarse en una visión de conocimientos que esté en sintonía con procedimientos como entrevistas, análisis de videos e interpretaciones. Al respecto, Bodgan y Biklen (1994) refieren:

> Aunque datos cuantitativos recopilados por otras personas (evaluadores, administradores y otros investigadores) pueden ser convencionalmente útiles tal como fueron descritos, los investigadores cualitativos utilizan esos datos cuantitativos críticamente. No es que los números de por si no tengan valor, al contrario, el investigador cualitativo tiende a cambiar el proceso de compilación en su cabeza preguntándose lo que los números dicen sobre los supuestos de las personas que los usan y los compilan. [...]Los investigadores cualitativos son inflexibles en no tomar los datos cuantitativos por su valor aparente. (Bodgan y Biklen 1994, p.195)

En ese sentido, los datos cuantitativos pueden ser utilizados en una investigación cualitativa.

Por otro lado, Fox (1981) establece 17 etapas referidos a la metodologia de investigación en educación, que coincide en lo básico con la propuesta de otros autores, las cuales se dividen en tres partes: la primera en relación al diseño del plan de investigación; la segunda sobre la ejecución del plan; y la tercera de la aplicación de los resultados, las cuales mencionamos a continuación:

Etapas del Plan de Investigación (Fox 1981, p. 56)

Parte 1: Estructura del Plan de Investigación

Primera etapa. Necesidad impulsora de la investigación y el área del problema

Segunda etapa. Análisis inicial de la bibliografía

Tercera etapa. Delimitación del problema concreto de investigación

Cuarta etapa. Predicción del éxito potencial de la investigación

Quinta etapa. Segundo análisis de la bibliografía

Sexta etapa. Elección del enfoque de la investigación

Séptima etapa. Presentación de la hipótesis de la investigación

Octava etapa. Selección de métodos y técnicas de obtención de datos

Novena etapa. Elección, elaboración y adaptación de los instrumentos de recogida de datos

Décima etapa. Estructuración del plan de análisis de datos

Décima primera etapa. Estructuración del plan de recogida de datos

Décima segunda etapa. Identificación de la muestra a utilizar

Décima tercera etapa. Estudios preliminares del enfoque de recolección de datos, métodos e instrumentos y del plan de análisis de datos.

Parte 2: Ejecución del Plan de Investigación

Décima cuarta etapa. Llevar a cabo el plan de recolección de datos

Décima quinta etapa. Llevar a cabo el plan de análisis de datos

Décima sexta etapa. Formulación de los informes de la investigación

Parte 3: Aplicación de los resultados

Décima séptima etapa. Publicación de los resultados y propuestas de actuación

Según Fox (1981), las etapas generales mencionadas anteriormente se aplican a cada tipo de investigación (descriptiva, experimental, cualitativa e histórica) sin ser exhaustiva. Es decir, no necesariamente deben considerarse todas las etapas.

En referencia a la metodología cualitativa, ésta vincula en su más amplio sentido al estudio que produce datos descriptivos, como por ejemplo las propias palabras de las personas (habladas o escritas) y la conducta observable; y en ese sentido los investigadores de estudios de corte cualitativo siguen un diseño flexible.

La metodología cualitativa conlleva a que el investigador perciba el contexto y a los individuos en un enfoque holístico, ya que las personas, los contextos o grupos no se reducirán a variables, sino como parte de un todo. El investigador cualitativo suspende o trata de apartar sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones a fin de ver las cosas como si ellas estuvieran ocurriendo por primera vez, ya que nada se da por sobrentendido a razón de que "todo" es un tema de investigación.

El estudio de la conducta humana demanda mucho tiempo, es intelectualmente fatigante y su éxito depende de la capacidad del investigador (Taylor y Bogdan, 1987).

Para nuestra investigación, procederemos a considerar algunas etapas en base a lo expuesto por Fox (1981) y que mencionaremos a continuación:

Consideraciones iniciales: Desarrollaremos la etapa 1 referido a la necesidad impulsora de realizar la presente investigación.

Capítulo I: Desarrollaremos la etapa 2, concerniente a un revisión bibliográfica de investigaciones y artículos referidos al estudio de la noción matemática Función Cuadrática asociada a las características cognitivas del grupo humano en el que se enfoca nuestro estudio, en donde las mismas han sido expuestas (limitaciones, dificultades y errores conceptuales en el estudio de funciones). Y en este capítulo también consideraremos la etapa 3 relacionado a la definición del problema de investigación.

Capítulo II: En este capítulo, consideraremos la etapa 6, referido a la selección y desarrollo del enfoque de la investigación (marco teórico y tipo de investigación).

Capítulo III: Desarrollaremos la etapa 5, referido a un segundo examen bibliográfico, donde usaremos la revisión de investigaciones y textos de consulta del objeto matemático Función Cuadrática.

Capítulo IV: Abordaremos las etapas 8, 9, 10, 11, 12, 14 y 15. Elaboraremos una secuencia didáctica, con su respectivo análisis *preliminar*, tomando en consideración la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), que permitirá recoger evidencias sobre la coordinación de registros del objeto Función cuadrática con estudiantes de Estudio Superior de carreras de Humanidades.

En este sentido, la finalidad del análisis *preliminar* es determinar de qué manera las elecciones realizadas permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y de los significados que ellos construyen. De esta forma, en dicho análisis, deben considerarse dos aspectos fundamentales: el aspecto descriptivo y el aspecto predictivo.

Se realizará también en este Capítulo IV la ejecución del plan de recolección de datos. En nuestro caso, la experimentación abarca la aplicación de los instrumentos de recojo de datos, estos son las actividades impresas que van a ser desarrolladas con el uso de lápiz y papel, en donde los estudiantes, en una clase determinada, conducidos por el profesor a cargo de la asignatura y acompañado por el investigador, realizarán de manera personal la secuencia didáctica que integra de dos momentos para ser desarrolladas en una sesión de clase, con la finalidad de movilizar la noción Función Cuadrática.

Finalmente, ejecutaremos el plan de análisis de datos que, para nuestro estudio, desde la perspectiva de la teoría de Registros de Representación Semiótica, se analiza las producciones de los estudiantes de carreras de Humanidades al desarrollar la secuencia didáctica, debido al interés de examinar la coordinación de los tipos de registros de representación que hacen uso los estudiantes cuando movilizan el objeto matemático Función Cuadrática.

Consideraciones Finales: Desarrollaremos la etapa 16 referido a las conclusiones de la presente investigación.

A continuación, desarrollaremos el estudio del objeto matemático.

CAPÍTULO III: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Realizando un corto recorrido a lo largo del tiempo, nos damos cuenta que el hombre ha buscado, a través de la historia, descubrir relaciones o asociaciones de correspondencia entre elementos de conjuntos numéricos y, en específico, las relaciones cuadráticas que se hallaron presente en los inicios de las Matemáticas como disciplina, cuando los griegos entraron en escena en la época clásica (Kline, 1992). No obstante, otras civilizaciones anteriores ya habían empezado la construcción de algunas nociones matemáticas.

3.1 Aspectos históricos

3.1.1 En relación a la noción de función

La cultura babilónica disponía entre algunos elementos matemáticos, como las raíces cuadradas y raíces cúbicas, originados al calcular la diagonal *d* de un rectángulo de altura *h* y base *b*. Es decir, se iniciaba el desarrollo de asociación entre elementos matemáticos.

Por otra parte, fueron encontradas tablillas en donde se puede percibir la medición de ángulos y relaciones geométricas, si bien es cierto no se puede hablar de una función definida; sin embargo, la cultura babilónica estaba encontrando relaciones entre cantidades numéricas.

El rio Nilo y los fenómenos geográficos y ambientales, como la inundación de la ribera del rio una vez al año que dejaba depósitos fértiles de limo al retirarse las aguas, permitieron la necesidad de realizar conjeturas matemáticas entre sus pobladores para poder aprovechar dicha fertilidad en sus tierras y efectuar reparticiones correspondientes a las mismas.

Del papiro moscovita se puede apreciar indicios de los antiguos pobladores egipcios sobre la idea intuitiva de función en la dependencia del área de un terreno rectangular asociado a la medida de la base y altura de dicho rectángulo, debido al impuesto que debía pagar un poblador según el área de terreno (ver Figura 5).

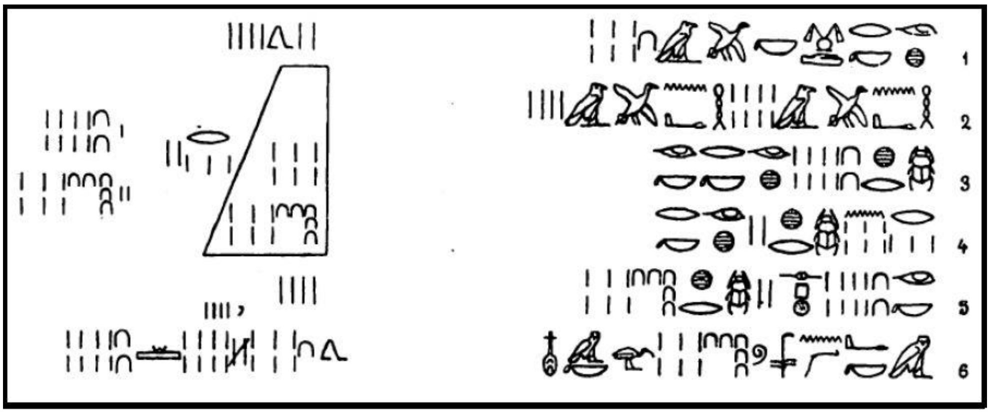


Figura 5. Transcripción de un fragmento del Papiro de Moscú
Fuente: Boyer (1986, p. 30)

Los pitagóricos demostraron que las sumas de 1, 1+2, 1+2+3,… y subsiguientes generaban a los números triangulares, además que los números 1, 4, 9, 16,… eran conocidos como números cuadrados, ya que sus puntos se pueden ordenar formando cuadrados. Esto llevaría a pensar que la idea de función, como correspondencia entre elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto, tiene un sentido primitivo en la cultura griega.

El interés hacia las tablas trigonométricas, en las cuales las cuerdas se sustituyen por semicuerdas, hace que la geometría hindú tenga características de ser una ciencia aplicada. En este sentido, esta cultura consideraba en esencia las funciones trigonométricas seno, coseno y seno inverso, de tal modo que, realizando una mirada más profunda a las conjeturas matemáticas hindúes, se podría decir que dicha cultura tenía también la noción primitiva de función.

Newton (1687) figura en la transición del estudio del movimiento y, por ende, lo variacional, tal como lo podemos observar en la siguiente proposición: *descubrir en cualquier tiempo asignado el lugar de un cuerpo que se mueve en una parábola dada*. Esta proposición hace dilucidar la conexión entre la geometría euclidea, la analítica y las cónicas; donde dicha demostración se realiza en un plano cartesiano muy primitivo, ya que solo incorpora la intersección de dos rectas en ángulo recto sin segmentación numérica, en donde se traza las curvas sobre él adoptando una característica variable a la que designa un lugar geométrico Marcela (2008).

Por otro lado, Del Rio (1996) destaca que Descartes acentuó su interés por resolver geométricamente las ecuaciones algebraicas con dos variables, encontrando métodos para lograr la construcción geométrica de los valores de una variable fijados los de la otra. Con esto, se tenía dos propiedades de la noción de función, en primer término considerar dos cantidades variables y; en segundo término, un grado de correspondencia de dependencia.

No cabe duda que la implicancia de la geometría analítica en el estudio de los lugares geométricos tendió una conexión para transitar entre la Geometría y el Álgebra, permitiendo vincular ecuaciones y curvas, según Marcela (2008).

La investigación de Marcela (2008) destaca que, según Euler, toda Función es una expresión analítica. Esto es que las expresiones cuadráticas, luego de ser analizadas en el plano, dándole una generalidad a través de su expresión analítica, pasan a convertirse en un punto donde se relacionan dos magnitudes en una cantidad establecida que finalmente se determina como una pareja ordenada *(x, y)* que, al analizar el comportamiento de la curva construida, a través de la ecuación cuadrática, se podía observar un tipo de asociación univoca entre cantidades, que posteriormente fue nombrada como Función Cuadrática.

3.1.2 En relación a la noción de ecuaciones cuadráticas vinculada a la Función Cuadrática

La noción de ecuación, entendida como la igualdad de dos expresiones algebraicas, se ha manifestado durante la historia en diversas culturas, llegando a ser uno de los conceptos de tipo cuadrático más importantes del análisis matemático actual. En este sentido, en los estudios de la cultura babilónica, se han descubierto producciones matemáticas que poseen ciertas características algebraicas, por ejemplo estudiaban algunos problemas en relación a la variación continua y en referencia a ecuaciones de tipo cuadrático, que se puede observar la siguiente situación: *hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado, que puede ser expresado como* $x.x^{-1} = 1$ y $x + x^{-1} = b$, *dando como resultado la ecuación cuadrática* $x^2 - bx + 1 = 0$.

Por otra parte, los griegos, a través de Euclides con su obra *Los Elementos,* se evidencia el desarrollo de las relaciones cuadráticas por medio del tratamiento y manejo de diferentes proposiciones, por ejemplo: *si se corta una línea recta AB en iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la entera, junto con el cuadrado de los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad*. (Ver Figura 6).

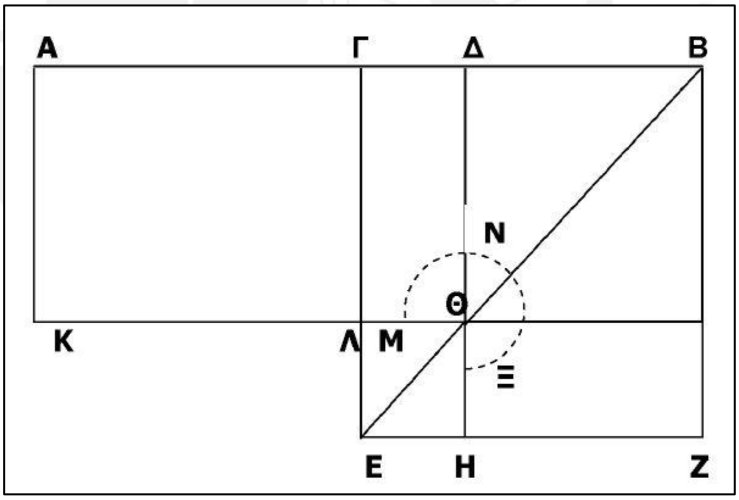


Figura 6. Ilustración de la proposición 5 de los Elementos de Euclides
Fuente: Y. Marcela (2008, p. 24)

En base a esta proposición, se puede observar la relación entre la Geometría y el Álgebra que asentaban los griegos tratando de generalizar la medida de un segmento para aplicarlo en cualquier otra circunstancia que cumpla con dichas características de las áreas cuadradas. Es así que Luque (2003) observa la relación entre lo aritmético, lo algebraico y lo geométrico (ver Figura 7).

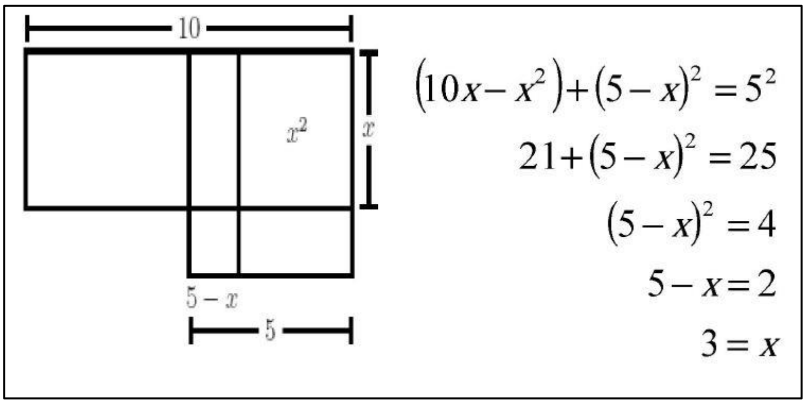


Figura 7. Procedimiento para solucionar la ecuación $10x - x^2 = 21$
Fuente: Y. Marcela (2008, p. 25)

Euclides realizó un análisis basado no solo en un segmento de medida particular, sino en un segmento de medida general, lo cual le da cierto grado de generalidad, que es una característica del pensamiento algebraico.

Diofanto, con las relaciones geométricas, plantea y resuelve ecuaciones indeterminadas de tipo cuadrático, con varias soluciones y dando una idea de variabilidad. También plantea ecuaciones de tipo $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx$ y resuelve proposiciones con características cuadráticas, como por ejemplo "*encontrar dos números tales que su suma sea 20 y su producto sea 96".*

Es pertinente mencionar que Diofanto solo consideraba las raíces positivas a diferencia de los habitantes de la India, quienes tenían conocimiento que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces que podrían contener números negativos e irracionales.

Finalmente, los árabes fueron los que designaron el nombre de Álgebra, ya que viene de un libro desarrollado en el siglo VIII por Al-khowarizmi, en donde se muestra el proceso de incluir y sustraer términos de expresiones de la forma $ax^2 + bx + c$, de las cuales solo se reconoce las raíces positivas, indicando posiblemente su carácter geométrico y afianzando así que el Álgebra, de manera formal o explicita, se gestó con la Geometría.

3.2 Aspectos matemáticos

Según Villa-Ochoa (2008), *"se llama Función Cuadrática a la relación entre dos cantidades de magnitud, cuya razón de cambio varía linealmente"*, por lo que es pertinente, a partir de esta definición, tomar en consideración para el entendimiento de la Función Cuadrática:

- La descripción cualitativa del cambio a partir de la identificación de características de su gráfica.
- La asociación de la forma como varía el cambio con las concavidades de la gráfica de la Función.

- La generalización de un patrón cuadrático a partir de la interpolación de un conjunto de datos en una tabla (Villa-Ochoa, 2008).

Para nuestra investigación, utilizaremos la definición de Stewart (2007) de la Función Cuadrática en el registro algebraico como:

$$f: R \to R$$

$$x \to f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\forall a, b \ y \ c \in R \ / \ a \neq 0$$

En donde:

ax^2: *término cuadrático*

bx : *término lineal*

c : *término independiente*

La gráfica de toda Función Cuadrática es una sección cónica, específicamente la parábola, cuya orientación de su abertura depende de la ecuación cuadrática asociada a dicha Función (ver Figura 8).

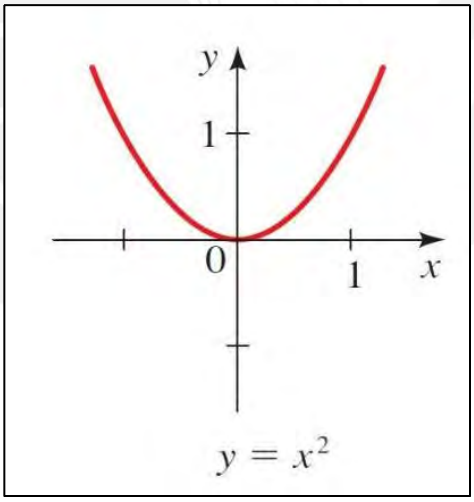


Figura 8. Representación gráfica de la Función Cuadrática $f(x) = x^2$
Fuente: Stewart et al. (2007, p. 233)

Toda Función Cuadrática en el registro algebraico $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en su forma canónica. Esto implica completar el cuadrado del polinomio asociado a la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c,$$

obtenemos la forma canónica de la función

$$f(x) = a(x-h)^2 + k,$$

en donde

$$h = -\frac{b}{2a} \qquad \text{y} \qquad k = c - \frac{b^2}{4a}$$

El par ordenado *(h; k)* es la coordenada del vértice de la parábola asociada a la Función Cuadrática, en donde *h* es el valor de la abscisa y *k* el valor de la ordenada (ver Figura 9).

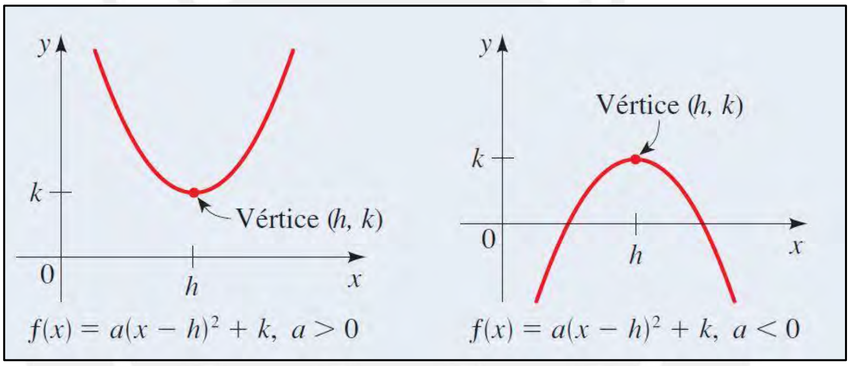


Figura 9. Representación gráfica de la Función Cuadrática en su forma canónica
Fuente: Stewart et al. (2007, p. 224)

Una Función Cuadrática de vértice *(h; k)* tiene un valor mínimo en el vértice si la curva de su gráfica se abre hacia arriba y un valor máximo en el vértice si la curva de su gráfica se abre hacia abajo (ver Figura 10).

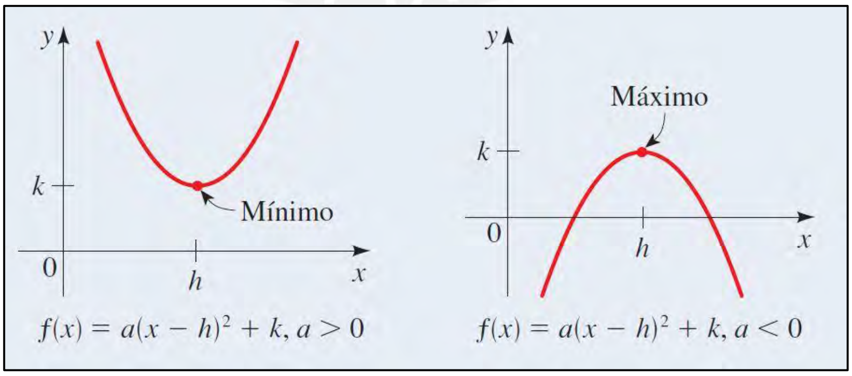


Figura 10. Valor mínimo y máximo de la Función Cuadrática
Fuente: Stewart et al. (2007, p. 225)

Si el dominio de una Función Cuadrática está dada por $D_f =]-\infty;\ +\infty[$, entonces:

- Si *k* es el valor mínimo de una Función Cuadrática, entonces su rango está establecido como $R_f = [k;\, +\infty[$, donde el intervalo $\left]-\infty;\, -\frac{b}{2a}\right[$ del dominio es decreciente y el intervalo $\left]-\frac{b}{2a};\, +\infty\right[$ del dominio es creciente.
- Si *k* es el valor máximo de una Función Cuadrática, entonces su rango está establecido como $R_f =]-\infty;\, k]$, donde el intervalo $\left]-\infty;\, -\frac{b}{2a}\right[$ del dominio es creciente y el intervalo $\left]-\frac{b}{2a};\, +\infty\right[$ del dominio es decreciente.

3.3 La Función Cuadrática en el texto de consulta

En esta sección de la presente investigación, nos referiremos al libro "*Matemática para no matemáticos*" de Gaita, Advíncula, Barrantes, Henostroza, Jabo y Luna (2009), tal como se puede apreciar en el Cuadro 2, la cual es tomada como un referente por los docentes de la carrera de Humanidades de la Universidad en donde se desarrollará la parte experimental de nuestra investigación.

Cuadro 2. *Texto de consulta*

Autor	Capítulo	Páginas	Titulo
Gaita et al.	Capítulo 2 Cambio y relaciones	66 - 77	Matemática para no matemáticos

El análisis del texto se realizará tomando en cuenta tres aspectos: el concepto de Función Cuadrática, construcción del gráfico de una Función Cuadrática y la movilización de Funciones Cuadráticas, tal como lo presenta el libro resumido en el cuadro 3.

Cuadro 3. *Temas de la Función Cuadrática en el texto de consulta*

"Matemática para no matemáticos"		
Capítulo	Sección	Temas
Capítulo 2 Cambio y relaciones Páginas 66 - 77	2.4 Función Cuadrática	• Situación problema de la noción Función Cuadrática • Definición de Función Cuadrática • ¿Cómo graficar una Función Cuadrática? • Situaciones problema para practicar

3.3.1 En referencia al concepto de Función Cuadrática

En relación al concepto de Función Cuadrática, el texto de consulta lo presenta de la siguiente manera (ver figura 11).

¿Qué es una función cuadrática?

Una función cuadrática es una correspondencia de variable real y de valor real definida por:

$$f : R \to R$$

$$x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a , b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Figura 11. Definición de la Función Cuadrática
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 70)

Podemos observar que, en esta sección del libro, Gaita et al. (2009) definen la Función Cuadrática, usando el registro algebraico y lengua natural, restringiendo los valores de *a, b* y *c* al conjunto de números reales y en donde *a* es diferente de cero.

Los autores vinculan a la definición formal de la Función Cuadrática la ecuación general de segundo grado y una representación simbólica $f: R \to R$ para referirse de que se trata de una correspondencia de variable real y de valor real.

Cabe mencionar que este texto está dirigido a estudiantes de Educación Superior, lo cual nos hace poder inferir que los sujetos ya han tenido contacto con el objeto matemático Función Cuadrática en la Educación Básica regular y por ello los autores no inciden mucho en su definición.

3.3.2 En referencia a la construcción de la gráfica de una Función Cuadrática

Con respecto a la construcción de la gráfica de una Función Cuadrática, Gaita et al. (2009) creen pertinente transitar de un registro a otro para poder saber y comprender las propiedades de la función, que es pasar del registro algebraico al registro gráfico, para lograr percibir si la función es creciente o decreciente, entablar los valores mínimo y máximo y definir el dominio y rango de dicha Función.

Los autores comienzan explicando la construcción genérica de la gráfica de una Función Cuadrática en el registro lengua natural (ver Figura 12).

¿Cómo graficar una función cuadrática?

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, la cual se puede «abrir» hacia arriba o hacia abajo; esto dependerá del signo de la constante a. Así, si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo. Una vez identificada la dirección de la abertura, interesará identificar las coordenadas del vértice de la parábola para proceder a graficarla.

Figura 12. Determinación de la gráfica de una Función Cuadrática
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 71)

En este apartado del escrito, se define la gráfica de la Función Cuadrática como una parábola, ya que se puede observar que se da uso del registro lengua natural acompañado con algunos símbolos como $a > 0$ y $a < 0$ para poder establecer la orientación de la gráfica, además de la necesidad de conocer la coordenada del vértice de la parábola para poder realizar la construcción de la gráfica.

Gaita et al. (2009) también ven la necesidad de transitar del registro lengua natural al registro algebraico (ver Figura 13).

Sea $V = (h, k)$ el vértice de la parábola asociada a la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para identificar el vértice $V = (h, k)$ se seguirá el siguiente procedimiento:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

Como se puede observar, se ha completado cuadrados para expresar f en la forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

donde: $h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}$.

Figura 13. Transformaciones en la construcción de la gráfica de una Función Cuadrática
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 71)

Como mencionamos anteriormente, Gaita et al. (2009) ven la necesidad de poder identificar las coordenadas de la parábola y para ello realizan dos tipos de transformación referente a la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1995): conversión y tratamiento.

En primer lugar, los autores efectúan la conversión del registro lengua natural al registro algebraico con la finalidad de poder obtener la coordenada del vértice de la parábola, estableciéndola como $V = (h, k)$ asociada a la Función Cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Luego, realizan el tratamiento respectivo en el registro algebraico, desde la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c$ hasta llegar a la ecuación canónica de segundo grado $a(x-h)^2 + k$, ya que ello le permitirá identificar los valores de h y k concernientes al vértice de la parábola buscada.

Finalmente, Gaita et al. (2009) vuelven a transitar en el registro lengua natural (ver Figura 14).

Nótese que debemos tomar en cuenta los dos casos siguientes:

- si $a > 0$, la función toma valor mínimo cuando $x = h$.
- si $a < 0$, la función toma valor máximo cuando $x = h$.

Para mejorar el gráfico de la función cuadrática es conveniente hallar las intersecciones de la gráfica de la función con los ejes coordenados, en caso de que las hubiere.

Para ello se debe calcular $(0; f(0))$, $(x_1; 0)$, y $(x_2; 0)$, donde x_1 y x_2 son las soluciones reales de la ecuación $a(x - h)^2 + k = 0$.

Figura 14. Unidades significantes en la construcción de la gráfica de una Función Cuadrática
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 71)

En esta sección del texto, los autores establecen la correspondencia de las unidades significantes entre la escritura algebraica y la representación gráfica. Esto es si en el registro algebraico se tiene que $a > 0$, entonces en el registro gráfico la función toma el valor mínimo en $x = h$ y si se tiene que $a < 0$ en el registro algebraico, entonces la función toma el valor máximo en $x = h$ en el registro gráfico. Cabe mencionar que todo el discurso se realiza dentro del registro lengua natural.

Posteriormente, como se ve en la Figura 14, los autores interactúan entre los registros lengua natural y algebraico para explicar la identificación de las intersecciones de la curva de la Función con los ejes "*x*" y "*y*".

Gaita et al. (2009) realizan la explicación de un caso particular (ver Figura 15).

Por ejemplo:
Grafique la función cuadrática $f(x) = x^2 + 6x + 5$, y señale las coordenadas de su vértice, de los puntos de corte con los ejes de coordenadas, y su dominio y rango.

Solución propuesta
En primer lugar, se identifican los coeficientes $a = 1$; $b = 6$; $c = 5$. De acuerdo con esto, como a > 0, la parábola se abre hacia arriba.

A continuación se identifica el vértice. Para ello es necesario completar cuadrados reescribiendo la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 5 \\ &= (x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2) - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 5 \\ &= (x+3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x+3)^2 - 4 \end{aligned}$$

Por tanto, el vértice es $V = (h; k) = (-3; -4)$.

Figura 15. Ejemplo propuesto en donde se halla la coordenada del vértice de la gráfica
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 72)

Gaita et al. (2009), en el ejemplo explicativo, transitan entre los registros lengua natural y algebraico para poder determinar la coordenada del vértice de la gráfica buscada. En este sentido, se realiza el respectivo tratamiento dentro del registro algebraico, identificando anteriormente los valores de los coeficientes para luego efectuar el procedimiento de completar cuadrados y de esta manera obtener el par ordenado *(-3; -4)* vinculado al vértice de la gráfica buscada.

Posteriormente, los autores ubican los puntos de intersección (ver Figura 16).

Se calculan los puntos de intersección con los ejes coordenados:

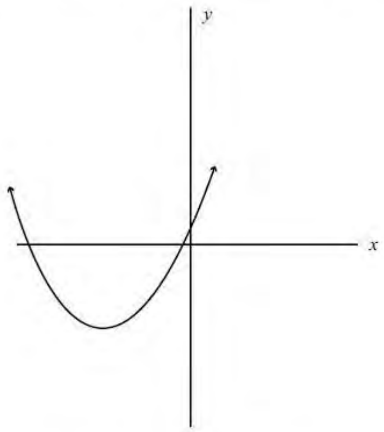
- Si la gráfica de f corta el eje y, entonces ese punto de intersección debe tener abscisa igual a cero:
  $x = 0$, $f(0) = 5$. Luego, el punto de intersección con el eje x es $(0; 5)$.
- Si la gráfica de f corta el eje x, entonces ese punto de intersección debe tener ordenada igual a cero:
  $y = 0$, $f(x) = 0$.
  Esto ocurrirá cuando $(x + 3)^2 - 4 = 0$
  $(x + 3)^2 = 4$
  $x + 3 = 2$ ó $x + 3 = -2$
  $x = -1$ ó $x = -5$

Figura 16. Identificación de los puntos de intersección con los ejes coordenados
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 72)

Como podemos apreciar en la figura, Gaita et al. (2009) transitan entre los registros lengua natural y algebraico, con su respectivo tratamiento, para poder explicar la identificación de los puntos de corte de la curva con los ejes coordenados. Los autores se valen de un sistema semiótico mixto que, en palabras de Duval (2004), lo determina como la mezcla de características propias del registro algebraico con características propias del registro lengua natural.

Finalmente, los autores realizan la construcción de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$, teniendo como referencia el vértice, los puntos de intersección y la orientación de la gráfica; hechos que fueron explicados anteriormente por estos (ver Figura 17).

Luego, los puntos de intersección con el eje y son $(-1;0)$ y $(-5;0)$.



Finalmente, se calcula el dominio $\mathrm{Dom}(f) = R$ y el rango $\mathrm{Ran}(f) = [-4; +\infty[$.

Figura 17. Gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 73)

3.3.3 En referencia a la movilización de la noción de Función Cuadrática

En cuanto a la movilización de la noción de Función Cuadrática, Gaita et al. (2009) empiezan con una situación problema que da la idea de Función Cuadrática antes de definirla formalmente y explicar la construcción de la gráfica de dicha función.

Como mencionamos anteriormente, el texto está dirigido a estudiantes de Educación Superior y eso hace inferir la intencionalidad de los autores de darle más énfasis a la movilización del objeto en contextos extra-matemáticos, en contra posición de otros autores que prefieren empezar en un contexto intra-matemático, debido a que los estudiantes de Educación Superior ya han tenido un acercamiento al objeto Función Cuadrática en la Educación Básica regular.

Los autores empiezan el desarrollo de la sección concerniente a Función Cuadrática con una situación extra-matemático (ver Figura 18).

Aurelio y Graciela son amigos desde la infancia. Aurelio piensa construir un establo con un piso circular y un cerco de madera que lo rodee. Graciela va a visitar a Aurelio a su casa de campo y aprovecha para ayudarlo a decidir sobre la propuesta que mejor le conviene para construir su establo.

Aurelio tiene dos propuestas de constructoras para levantar su establo, las cuales le ofrecen los mismos materiales y acabados. La primera cobra \$ 30 por metro cuadrado por la construcción de piso, \$ 25 por metro lineal del cerco, más una tasa fija de \$ 250 por gastos administrativos. La segunda constructora cobra \$ 28 por metro cuadrado por el piso, \$ 30 por metro lineal del cerco, más una tasa fija de \$ 650 por gastos administrativos.

Graciela quiere determinar cuál de las dos constructoras le conviene a Aurelio para levantar su establo de vacas de la forma más económica posible, siguiendo los siguientes pasos.

Figura 18. Situación 8 del capítulo 2 del texto de referencia
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 67)

Como podemos observar, la situación problema se presenta en el registro lengua natural, en donde la intencionalidad de Gaita et al. (2009) es evocar en los estudiantes la movilización del objeto matemático Función Cuadrática en un contexto extra-matemático.

Cabe mencionar que otra intencionalidad de los autores es que los estudiantes desarrollen por si mismos la solución del problema planteado, esto es debido a que en el texto se encuentra cuadros para completar y que dan una guía a los estudiantes de cómo enfrentar el problema (ver Figura 19).

1. Completando la tabla que se muestra a continuación, con los datos del enunciado.

	Costo por m² de piso (dólares)	Costo por m del cerco circular (dólares)	Costo fijo por gastos administrativos (dólares)
Primera constructora			
Segunda constructora			

Figura 19. Cuadro referencial al problema planteado.
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 67)

Posteriormente, Gaita et al. (2009) desarrollan la solución propuesta al problema planteado (ver Figura 20).

Solución propuesta

Recordando que:

a) El área de un círculo de radio r es igual a: πr^2.

b) La longitud de una circunferencia de radio r es igual a: $2\pi r$.

1. Con los datos del enunciado, se completa la siguiente tabla:

	Costo por m² de piso (dólares)	Costo por m del cerco circular (dólares)	Costo fijo por gastos administrativos (dólares)
Primera constructora	30	25	250
Segunda constructora	28	30	650

Figura 20. Planteamiento de la solución propuesta
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 68)

En este apartado, los autores proponen una solución, teniendo como base los cuadros en blanco (Ver figura 19) para poder plantear la actividad en el registro de lengua natural acompañado de simbologías matemáticas, teniendo como guía los cuadros propuestos por estos.

El cuadro da la impresión de que se trata de un registro tabular, pero, según Duval (1988), para poder designar un Registro de Representación Semiótica se debe tener en consideración dos tipos de transformaciones, la conversión y el tratamiento. En este caso, no se cumple estos requisitos, ya que entre los elementos del cuadro no se puede realizar ningún tipo de *tratamiento*, lo que es lo mismo decir que la información contenida en el cuadro solo cumple el objetivo de estar estructurado para un mejor entendimiento por parte de los estudiantes en relación a los datos contenidos en la situación problema.

Posteriormente, Gaita et al. (2009) recurren al registro tabular para poder identificar el costo total en relación a la longitud y el área de la circunferencia. (Ver figura 21).

2. Usando las fórmulas para calcular el área y longitud de una circunferencia, se completa la siguiente tabla:

$$C_1(r) = 30\pi r^2 + 25(2\pi r) + 250$$
$$\text{y}$$
$$C_2(r) = 28\pi r^2 + 30(2\pi r) + 650$$

Tabla de costos para construir el establo

Longitud del radio (metros)	Costo total (dólares)	
	Primera compañía	Segunda compañía
6	4 585,394	4 947,695
8	7 538,489	7 787,692
10	11 245,565	11 331,406
12	15 706,623	15 578,836
14	20 921,662	20 529,982
16	26 890,683	26 184,844
18	33 613,686	32 543,422
20	41 090,670	39 605,716

Figura 21. Registro tabular de la situación problema
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 69)

Analizando esta parte de la solución propuesta, Gaita et al. (2009) recurren a la necesidad de transitar entre el registro algebraico y tabular con la intención de posteriormente esbozar la gráfica de la Función Cuadrática puesta en acción, además de poder presentar a los estudiantes la relación de correspondencia entre la variable independiente *longitud del radio* con la variable dependiente *costo total*. Finalmente, se esboza la gráfica de la función correspondiente (ver figura 22).

3. A continuación se esbozan las gráficas de los costos de ambas propuestas:

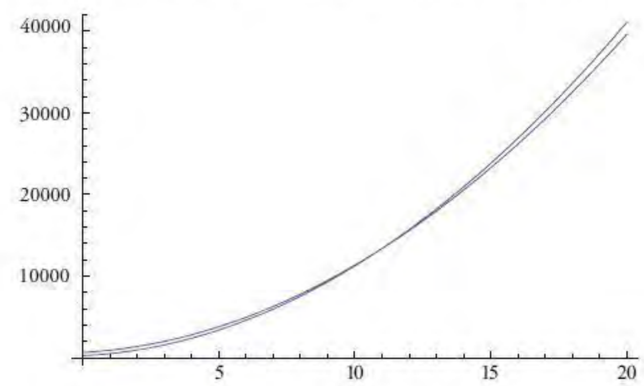


Figura 22. Esbozo de la gráfica de la función
Fuente: Gaita et al. (2009, p. 69)

Los autores esbozan la gráfica de las funciones $C_1(r) = 30\pi r^2 + 25(2\pi r) + 250$ y $C_2(r) = 28\pi r^2 + 30(2\pi r) + 650$, teniendo como base la información obtenida en el registro tabular. En este caso, podemos afirmar que para esta situación problema los autores transitaron entre cuatro registros de representación según Duval (1995): registro en lengua natural, registro algebraico, registro tabular y registro gráfico.

Duval (2000) refiere que la comprensión de un objeto matemático se da al vincular varios contenidos de representación del mismo objeto. Es decir, exige una articulación entre los diferentes registros de representación disponibles, en este caso el texto plantea los registros en lengua natural, algebraico, tabular y gráfico.

Si no se procura la intencionalidad de realizar esta coordinación en los estudiantes, estos no podrán iniciar el proceso de transformación de la representación del objeto de un registro a otro y, en ese sentido, el desarrollo de esta coordinación depende la destreza de movilizar diferentes representaciones integradas de forma interactiva o en paralelo.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo, presentaremos a los sujetos de investigación, la descripción de la secuencia de actividades, con su respectivo análisis preliminar y posterior, partiendo desde el enfoque de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995).

4.1 Descripción de los sujetos de estudio

La investigación se llevó a cabo con estudiantes del primer ciclo de Estudios Generales Letras de una universidad privada del Perú, cuyas edades oscilan entre 15 y 17 años.

Los sujetos de estudio tienen conocimientos previos acerca de la Función Cuadrática, ya que como mencionamos anteriormente, en el currículo de Educación Básica, dicho objeto está presente y es la segunda clase sobre Funciones Cuadráticas desarrollada en el curso. En consecuencia, se adaptó las actividades tomando en consideración estos aspectos.

En ese sentido, se tomó en consideración la producción matemática de tres estudiantes para el análisis posterior, cuyo criterio fue el haber completado la totalidad o en mayor parte las secuencias didácticas propuestas.

Cabe mencionar que para salvaguardar la identidad de los tres estudiantes seleccionados, solo nos referiremos a ellos por medio de los seudónimos, como lo son *Micaela, Sandra* y J*oel*. Es importante notar que en la experimentación se contó con el profesor a cargo del curso Matemática Básica, además del investigador que tomó el rol de observador.

Como nuestra investigación es de corte cualitativo, solo se seleccionó la producción de tres estudiantes, ya que según Borba y Araujo (2004) es innecesario contar con un número muy grande de la muestra.

4.2 Descripción de la secuencia didáctica

En esta investigación, la secuencia didáctica consta de dos momentos de 45 minutos de duración cada uno, las cuales tienen por finalidad evocar en los estudiantes la movilización del objeto matemático Función Cuadrática en los diferentes Registros de Representación Semiótica (gráfica y algebraica), cuya teoría fue desarrollada por Duval (1988).

El primer momento de la secuencia de actividades consta de cuatro ítems, en donde se presenta un problema de contexto matemático en la cual los estudiantes deben movilizar el objeto matemático Función Cuadrática, de acuerdo a sus conocimientos previos de dicha noción, tal como se puede apreciar en el Cuadro 4.

Cuadro 4. *Descripción de la secuencia de actividades del primer momento*

Actividad	Descripción	Nociones de la Función Cuadrática a movilizar
Actividad Integral Nº 1	En esta actividad, en los ítems *a*, *b* y *c*, los estudiantes deben interpretar cualitativamente, de acuerdo a sus conocimientos previos, características propias del objeto matemático Función Cuadrática en los registros algebraico y gráfico.	• Características de la regla de correspondencia de una función. • Puntos de intersección con los ejes coordenados de la gráfica de la función. • Discriminante de una ecuación cuadrática vinculada a la función. • Parámetros de la ecuación cuadrática. • Orientación de la concavidad de la gráfica de la función.

La secuencia de actividades presentada es una adaptación de las actividades de la pesquisa de Rodríguez (2018) en relación a la noción Función Cuadrática.

El segundo momento de la secuencia de actividades consta de cinco ítems, en donde se desarrolla un problema intramatemático con los estudiantes para movilizar el objeto matemático Función Cuadrática, tal como se puede apreciar en el Cuadro 5.

Cuadro 5. *Descripción de la secuencia de actividades del segundo momento*

Actividad	Descripción	Nociones de la Función Cuadrática a movilizar
Actividad Integral Nº 2	En esta actividad, en los ítems *a* y *b*, los estudiantes deben movilizar sus conocimientos sobre la Función Cuadrática a fin obtener los parámetros de la ecuación cuadrática vinculada a la función. En los ítems *c* y *d,* los estudiantes deben representar en un sistema de coordenadas y establecer el dominio y rango de la noción Función Cuadrática y, finalmente,	• Características de la regla de correspondencia de una función. • Puntos de cortes con los ejes coordenados de la gráfica de la función. • Parámetros de la ecuación cuadrática. • Vértice de la representación gráfica de la función.

	en el ítem *e* los sujetos de estudio deben argumentar sobre la veracidad de las tres afirmaciones propuestas.	• Interpretación del vértice (valor máximo y mínimo de la Función Cuadrática).

Las secuencias de actividades se realizaron en el aula de Estudios Generales Letras de una universidad privada y para el desarrollo de dichas actividades se utilizó lápiz y papel.

4.3 Análisis y resultados de la secuencia didáctica

En este apartado, desarrollaremos el análisis de la secuencia de actividades presentada en dos momentos con su respectivo análisis preliminar, análisis de la producción matemática de los estudiantes *Micaela, Sandra* y *Joel* y los resultados obtenidos.

Es bueno mencionar que las secuencias didácticas tuvieron la finalidad de que los estudiantes realicen una interpretación global de las propiedades de la representación en el registro gráfico del objeto Función cuadrática para estimular la coordinación de los registros gráfico y algebraico del objeto matemático, todo esto desde la perspectiva desarrollada por Duval (1988) en la teoría de Registros de Representación Semiótica.

4.3.1 Actividad Integral Nº 1

El objetivo es que los estudiantes movilicen con sus conocimientos el objeto Función cuadrática por medio de la coordinación de registros y puedan identificar características de dicho objeto en tres diferentes registros: lengua natural, gráfica y algebraica.

En tal sentido, los estudiantes movilizarán la noción Función Cuadrática, teniendo como base sus conocimientos previos enfocados en la asociación semiótica de los parámetros “*a*” y “*c*” de la escritura algebraica vinculada al objeto Función cuadrática con las variables visuales concavidad e intersección de la curva con el eje “*y*” de la representación gráfica del objeto matemático, además de la relación del discriminante de la escritura algebraica de la noción Función cuadrática con los puntos de corte de la representación gráfica del objeto matemático Función Cuadrática.

Cabe mencionar que el parámetro “*b*” de la ecuación, vinculada a la Función Cuadrática, no es tomado en consideración en el curso de Matemática Básica, por lo que en el presente estudio no se consideró dicho parámetro.

Actividad Integral Nº 1

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, y cuyo gráfico es como se muestra en la figura 1.

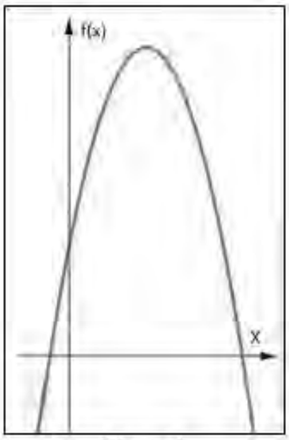


Figura 1.

Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vinculada a la función, y la información brindada anteriormente para responder los siguientes ítems.

a) ¿"a" puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

b) ¿"c" puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

c) ¿El discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede ser positivo?

Figura 23. Actividad Integral Nª 1.
Fuente: Adaptación Rodríguez (2018, pp. 124 y 126)

En la figura 23 se muestra la Actividad Integral Nº 1, por lo que se espera que los estudiantes, conforme a las indicaciones de los ítems y con la información presentada, puedan establecer asociaciones semióticas entre las variables visuales de la gráfica de la Función cuadrática y las unidades simbólicas de su escritura algebraica con la ayuda de lápiz y papel. En ese sentido, se espera que, al movilizar la noción del objeto matemático mediante la coordinación de los registro de representación algebraico y gráfico, se logre establecer una aprehensión global cualitativa en relación a las unidades significantes entre estos dos registros, ya que un registro de representación es un sistema con signos que permiten la identificación de una representación de un objeto de conocimiento, tal como lo afirman Saddo y Henriques (2016).

También hay que mencionar que se espera que los estudiantes, al responder a los ítems propuestos, logren realizar la actividad cognitiva de conversión de los registros de representación en que se presenta la actividad (registros algebraico y gráfico) al registro de representación lengua natural, de modo que se verifique lo manifestado por Duval (1995) acerca de la coordinación de registros, como la manifestación de un individuo en la capacidad de reconocer la representación del mismo objeto en dos o más registros distintos.

En la presente actividad, como mencionamos anteriormente, la información del objeto Función Cuadrática se presenta en los registros de representación gráfico y algebraico y, por medio de los ítems, se pretende inducir a los estudiantes que, en una primera instancia, coordinen los dos registros presentados para lograr una aprehensión global cualitativa, que es la capacidad de reconocer la representación del objeto Función Cuadrática en los registros gráfico y algebraico, tal como lo mencionan Saddo y Henriques (2016) y; en una segunda instancia, se realice la conversión de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro de representación lengua natural apoyado con los registros iniciales.

Cabe mencionar que la conversión de una representación de un objeto matemático es la transformación de ésta a una representación en otro registro (Saddo y Henriques, 2016).

Los tres ítems son propuestos para la coordinación de los registros gráfico y algebraico, para posteriormente realizar la conversión pertinente al registro lengua natural al justificar la respuesta por parte del estudiante. Además, los ítems estuvieron acompañados con la pregunta "¿Por qué?", dado que el estudiante podría justificar su respuesta con tratamientos dentro de los dos registros iniciales, por lo que esta pregunta permitió identificar si la conversión al registro lengua natural estuvo basada o no en un reconocimiento cualitativo.

A continuación, pasaremos a analizar el primer ítem de la Actividad Integral Nº 1:

a) ¿"a" puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

Análisis preliminar

En este ítem, se espera que el estudiante, por medio de una asociación semiótica, relacione la variable visual concavidad de la curva de la Función cuadrática $f(x)$ con la unidad simbólica pertinente (parámetro "*a*") de la escritura algebraica $ax^2 + bx + c = 0$. Además, por medio de la coordinación entre los registros iniciales, desarrolle la capacidad de reconocer el mismo objeto matemático en los dos registros (gráfico y algebraico).

La interpretación global implica discriminar que la curva es cóncava con orientación hacia abajo, por lo que el valor de la unidad significativa "*a*" debe ser negativo y además diferente de cero (esto es $a < 0$ y $a \neq 0$), ya que el valor del parámetro $a \neq 0$ es una característica inherente de toda Función Cuadrática (ver Figura 24).

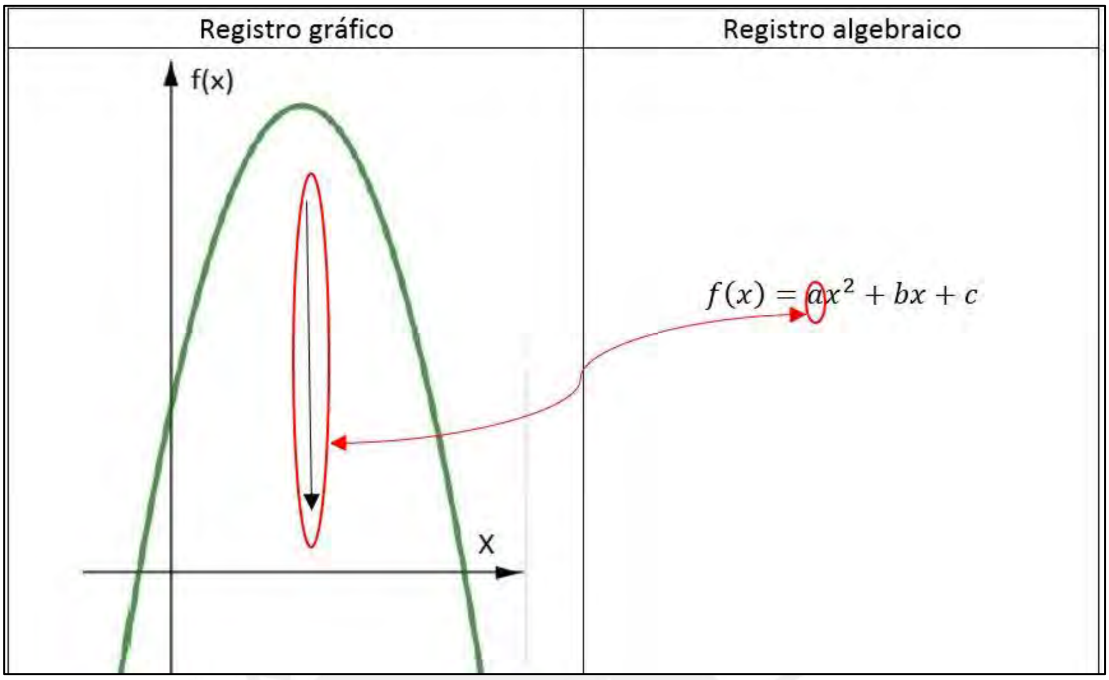


Figura 24. Regla semiótica de correspondencia entre la variable visual concavidad y la unidad simbólica "*a*".

En ese sentido, al condicionar el no uso de *tratamientos* numéricos, es necesaria la aprehensión global, ya que les facilita transitar entre registros resaltando las reglas semióticas de vinculación entre la unidad simbólica de la escritura algebraica y la variable visual de la representación gráfica del objeto Función cuadrática. Posteriormente, se espera que el sujeto de estudio pueda realizar la conversión de la representación del objeto presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro lengua natural y responda: "*No, porque la función $f(x)$ representada por la parábola es cóncava hacia abajo, por lo tanto el parámetro a es un número negativo diferente de cero"*

El análisis de la respuesta a este ítem se centrará en identificar la asociación que realiza el estudiante de la variable visual (concavidad) de la representación gráfica con la unidad simbólica (parámetro *a*) de la escritura algebraica para su posterior conversión al registro lengua natural, todo esto con el fin de justificar su respuesta al presente ítem, así como indagar sobre el reconocimiento cualitativo que realiza el estudiante sobre dicha asociación.

Análisis de la respuesta de Micaela

Con respecto al ítem *"a)"* de la actividad, la estudiante *Micaela* correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 25).

No, porque la gráfica (parábola) está graficada hacia abajo, lo que significa que "a" puede tomar cualquier valor real negativo (diferente de cero)

Figura 25. Respuesta de Micaela del ítem a).

En la figura 25, podemos observar, por medio de la respuesta que escribió *Micaela*, que logró relacionar la variable visual de la gráfica de la Función Cuadrática $f(x)$ (parábola cóncava hacia abajo) con la unidad simbólica (parámetro *a*) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En este sentido, hubo éxito en la coordinación de los registros gráfico y algebraico, logrando así reconocer el mismo objeto matemático en dichas representaciones.

Además, la aprehensión global cualitativa le permitió establecer la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes involucradas de ambos registros (gráfico y algebraico) para poder percibir dicha correspondencia.

Posteriormente, la estudiante pudo realizar la *conversión* de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro lengua natural para justificar su respuesta al ítem planteado.

Análisis de la respuesta de Sandra

En este caso, la estudiante *Sandra* responde parcialmente a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 26).

Sí, porque si fuese cero se convertiría en una función lineal.

Figura 26. Respuesta de Sandra del ítem a).

En este aspecto, el resultado fue parcial, ya que la estudiante asoció incorrectamente la variable visual (concavidad) de la representación del objeto $f(x)$ (curva cóncava hacia abajo) en el registro gráfico con la unidad simbólica (parámetro *a*) de la ecuación de contexto cuadrático $ax^2 + bx + c = 0$. En este sentido, la presencia de la coordinación de los registros gráfico y algebraico fue parcial, al no lograr avanzar y reconocer el mismo objeto matemático en ambos registros, quedándose en la parte básica del parámetro $a \neq 0$.

Debido a esta coordinación parcial entre registros, la estudiante asignó a un mismo valor de la variable visual (para abajo) dos signos diferentes (esto es $a < 0$ y $a > 0$) de la unidad simbólica correspondiente en el registro algebraico, por lo que las reglas semióticas de vinculación entre las unidades significantes de ambos registros no están bien establecidas.

La conversión de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro lengua natural, para dar respuesta al ítem planteado, se logró, pero con una justificación errada, lo cual contradice a lo esperado en el análisis preliminar.

Análisis de la respuesta de Joel

Con respecto al estudiante *Joel*, el resultado correspondió parcialmente a lo esperado por el análisis preliminar (ver Figura 27).

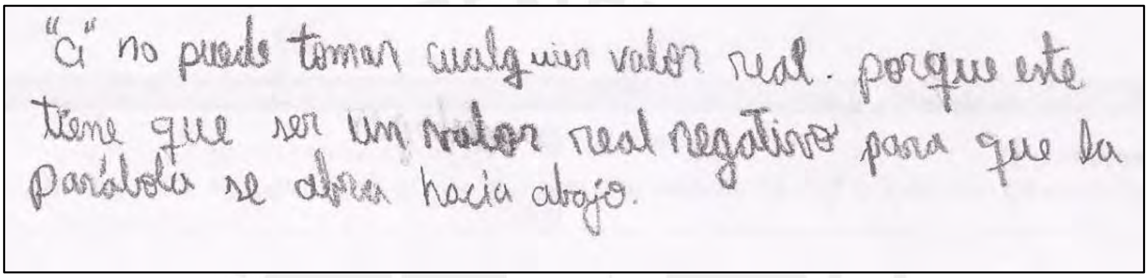

"a" no puede tomar cualquier valor real. porque este tiene que ser un valor real negativo para que la parábola se abra hacia abajo.

Figura 27. Respuesta de Joel del ítem a).

En la figura 27, podemos observar que *Joel* logró relacionar la variable visual (concavidad) de la curva de la Función cuadrática $f(x)$ (parábola cóncava hacia abajo) con la unidad simbólica (parámetro *a*) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En este sentido, hubo una coordinación parcial de los registros gráfico y algebraico, logrando establecer parcialmente la regla semiótica de correspondencia entre dichas unidades significantes, pero no logró identificar la característica inherente de una Función Cuadrática en relación con el parámetro *a* (esto es $a \neq 0$) con la representación gráfica del objeto Función $f(x)$, ya que sin este detalle se establecería como una función lineal y no cuadrática.

Posteriormente, *Joel* pudo realizar la *conversión* de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro lengua natural y con ello justifica parcialmente al ítem planteado, ya que no corresponde a lo esperado por el análisis preliminar.

En este sentido, Duval (1988) establece que el estudio de las representaciones gráficas exige como condición necesaria la diferenciación e identificación de las variables relevantes y la percepción de las alteraciones correspondientes de las expresiones algebraicas. Además, tal discriminación es condición necesaria en toda actividad de conversión y por ende en el desarrollo de la coordinación de registros de representación (Duval, 2004).

Ahora, pasaremos a analizar el segundo ítem de la Actividad Integral Nº 1:

b) ¿“c” “puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

Análisis preliminar

En el presente ítem, se espera que el estudiante, por medio de una asociación semiótica, relacione la variable visual intersección de la curva con el eje “y” de la gráfica de la Función Cuadrática con la unidad simbólica pertinente (parámetro “*c*”) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ vinculada a dicha función. Además, por medio de la coordinación entre los registros iniciales, posea la capacidad de reconocer la misma función en los dos registros (gráfico y algebraico).

Una aprehensión global cualitativa implica discriminar que la curva de la Función Cuadrática intercepta al eje “*y*” en la parte positiva (registro gráfico), por lo que el valor de la unidad simbólica “*c*” debe ser positivo (esto es $c > 0$) (ver Figura 28).

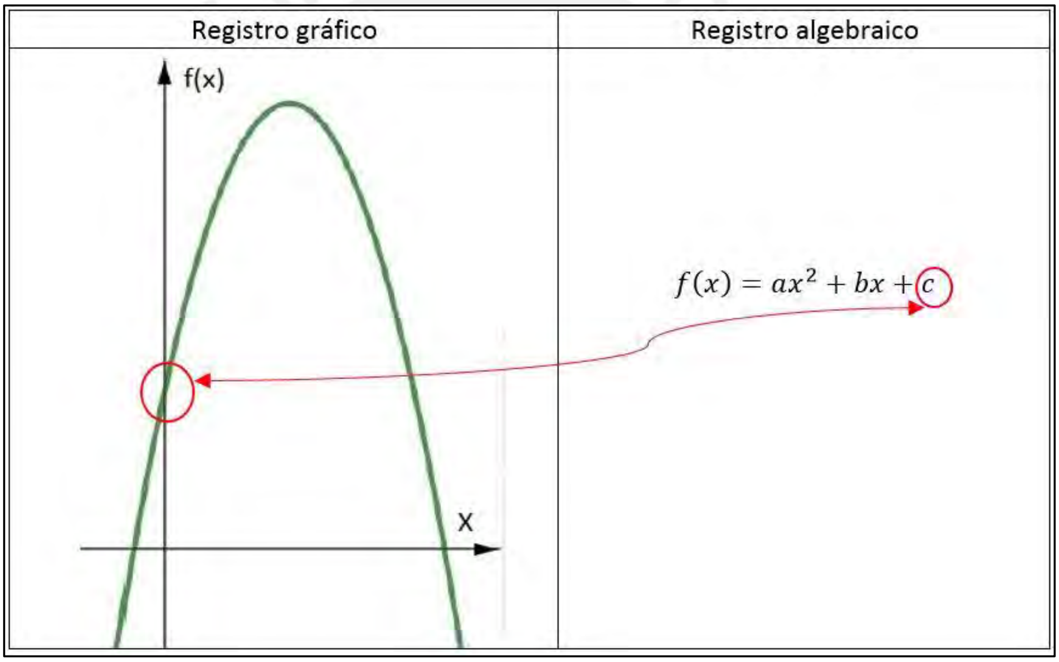


Figura 28. Regla semiótica de correspondencia entre la variable visual intersección de la curva con el eje “*y*” y la unidad simbólica “*c*”.

En ese sentido, como mencionamos anteriormente, al condicionar el no uso de tratamientos numéricos, la aprehensión global cualitativa se hace indispensable, ya que permite transitar de un registro a otro considerando como referencia únicamente las reglas semióticas de correspondencia entre la unidad simbólica de la escritura algebraica y la variable visual de la representación gráfica de la noción Función cuadrática.

Posteriormente, se espera que el estudiante pueda realizar la conversión de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro lengua natural y responda: "*No, porque del gráfico de la figura 1 la intersección de la curva con el eje Y es en la parte positiva, por lo tanto "c" solo puede tomar valores positivos"*

El análisis de la respuesta del presente ítem se centrará en identificar la asociación que realiza el estudiante entre la variable visual (intersección de la curva con el eje "y") del registro gráfico con la unidad simbólica (parámetro *c*) del registro algebraico, para su posterior conversión al registro lengua natural a fin de justificar su respuesta al presente ítem.

Todo esto es con la finalidad de indagar sobre el reconocimiento cualitativo que realiza el estudiante sobre dicha asociación.

Análisis de la respuesta de Micaela

Respecto al ítem *b)*, la respuesta de la estudiante Micaela correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 29).

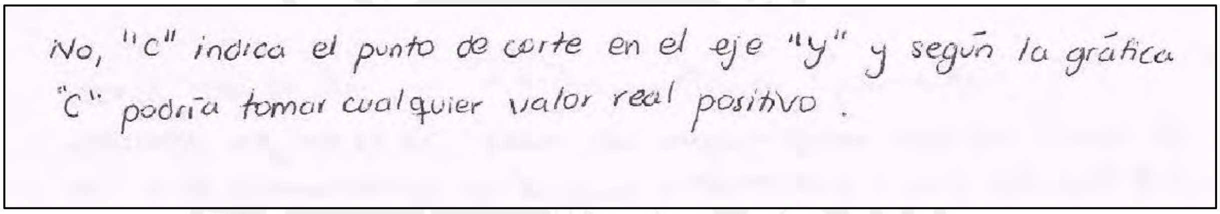

No, "c" indica el punto de corte en el eje "y" y según la gráfica "C" podría tomar cualquier valor real positivo .

Figura 29. Respuesta de Micaela del ítem b).

Se puede evidenciar en la figura 29 la *coordinación* esperada, ya que reconoce la misma Función Cuadrática en los dos registros presentados, como lo son el gráfico y algebraico, para luego establecer la regla semióticas de correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros, que es relacionar la variable visual intersección de la curva con el eje "*y*" y la unidad simbólica pertinente (parámetro *c*) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de la función $f(x)$ en un sistema coordenado, permitiendo la aprehensión global cualitativa establecer la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes involucradas de ambos registros (gráfico y algebraico) para poder percibir dicha correspondencia.

Luego, observamos que la estudiante *Micaela* realizó la correspondiente *conversión* de los registros iniciales (gráfico y algebraico) al registro lengua natural para poder justificar su respuesta al ítem. En este sentido, la respuesta corresponde a lo esperado en el análisis preliminar.

Análisis de la respuesta de Sandra

En relación al ítem *b)*, la respuesta de *Sandra* no correspondió a lo esperado por el análisis preliminar (ver Figura 30).

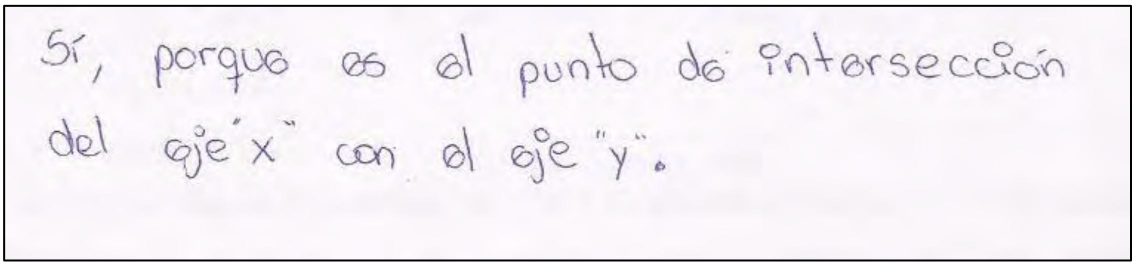

Sí, porque es el punto de intersección del eje "x" con el eje "y".

Figura 30. Respuesta de Sandra del ítem b).

Se puede evidenciar en la figura 30 que la *coordinación* entre registros no se dio, ya que no reconoce la misma Función Cuadrática en los dos registros presentados: gráfico y algebraico. Esto se debe a que no logró relacionar la unidad simbólica pertinente (parámetro *c*) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con la variable visual (intersección de la curva con el eje "*y*") de la gráfica de la función $f(x)$, llevándola al error al querer justificar su respuesta.

Luego, a consecuencia de esta ausencia de *coordinación* entre registros, observamos que la estudiante pudo realizar la *conversión* de los registros iniciales (gráfico y algebraico) al registro lengua natural, describiendo el origen coordenado y dando de esta manera una respuesta errónea y diferente a lo esperado en el análisis preliminar.

De esta manera, la ausencia de *coordinación* entre registros evidencia que las reglas semióticas de correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros no están bien establecidas en la estudiante.

Análisis de la respuesta de Joel

En relación al ítem *b)*, la respuesta del estudiante *Joel* correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 31).

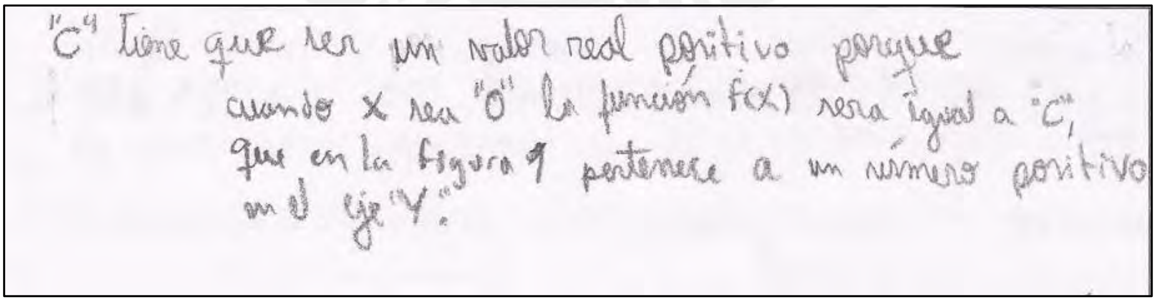

"C" Tiene que ser un valor real positivo porque cuando x sea "0" la función f(x) sera igual a "C", que en la figura 1 pertenece a un número positivo en el eje "Y".

Figura 31. Respuesta de Joel del ítem b).

Se puede evidenciar en la figura 31 que la *coordinación* entre registros es la esperada, ya que reconoce el mismo objeto en los dos registros presentados inicialmente (gráfico y algebraico). Con esto, *Joel* logra establecer una asociación entre la unidad simbólica (parámetro *c*) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con la variable visual (intersección de la curva con el eje “*y*”) de la gráfica de la función $f(x)$ en un sistema coordenado, justificando el valor positivo del parámetro *c* cuando la variable independiente “*x*” toma el valor de 0.

Luego, observamos que el estudiante realizó la correspondiente conversión de los registros iniciales (gráfico y algebraico) al registro lengua natural para poder dar respuesta a la pregunta.

Por ello, tal como lo menciona Duval (1992), la *aprehensión* global cualitativa conlleva a una asociación: *variable visual de la representación – unidad significante de la escritura algebraica.*

Finalmente, analizaremos el tercer ítem de la Actividad Integral Nº 1:

c) ¿El discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede ser positivo?

En este apartado, se espera que el estudiante ponga en acción sus conocimientos previos acerca de las características del discriminante de una ecuación cuadrática, en razón a la representación gráfica del objeto matemático. Es decir, el signo del discriminante de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ establece los puntos de corte de la curva con el eje “*x*” de la representación gráfica de la función vinculada a dicha ecuación.

En ese sentido, el estudiante, al coordinar los registros gráfico y algebraico del objeto matemático, que es que relacione la variable visual (intersección de la curva con el eje “*x*”) de la gráfica de la Función Cuadrática con la unidad simbólica compuesta (esto es $b^2 - 4ac$) de la escritura algebraica y en base a lo descrito anteriormente, se espera responda: *“El discriminante de la ecuación cuadrática asociada a la función $f(x)$ es positiva, porque la gráfica de la función $f(x)$ que se muestra en la figura 1 tiene dos puntos de cortes con el eje x”*

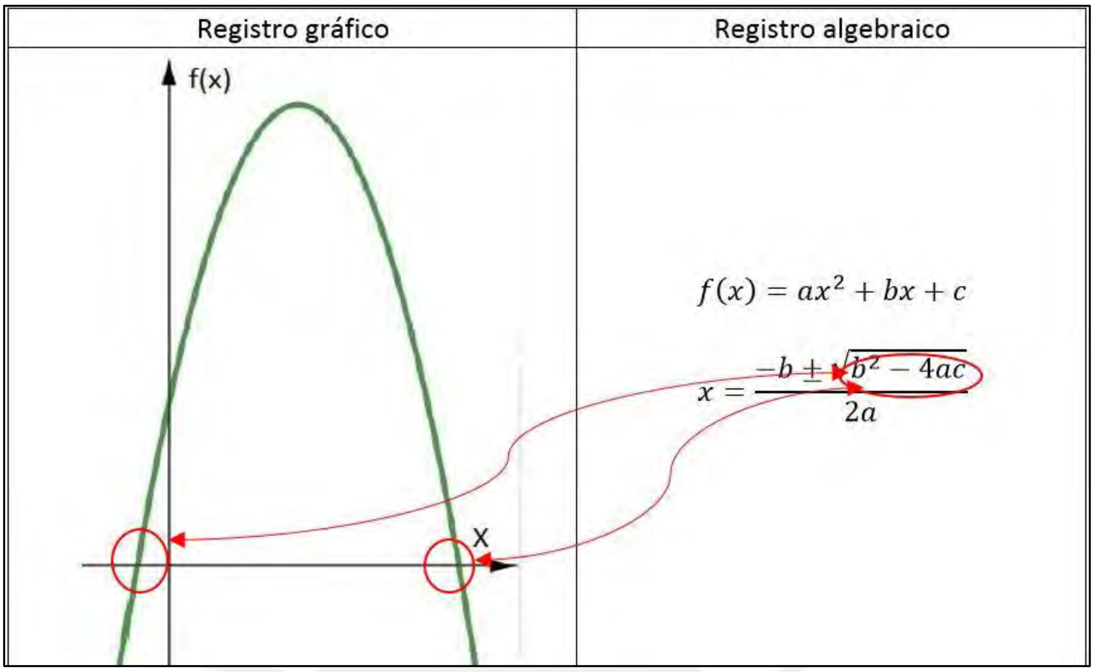


Figura 32. Regla semiótica de correspondencia entre la variable visual intersección de la curva con el eje "*x*" y la unidad simbólica "$b^2 - 4ac$".

Como se observa en la Figura 32, los puntos de cortes de la curva con el eje "*x*" está relacionado con el signo de la combinación de las unidades simbólicas que constituyen la escritura algebraica "$b^2 - 4ac$" del discriminante de una ecuación cuadrática. Es decir, del tratamient*o* de los parámetros "*a*", "*b*" y "*c*", la cual si es positiva ($b^2 - 4ac > 0$), la curva corta en dos puntos al eje "*x*", si es igual a cero ($b^2 - 4ac = 0$), la curva corta en un punto al eje "*x*" y, si es negativa ($b^2 - 4ac < 0$), la curva no corta en ningún punto al eje "x".

Como mencionamos anteriormente, la *coordinación* es la manifestación de un individuo en la posibilidad de reconocer el mismo objeto matemático en dos o más registros distintos, tal como lo mencionan Saddo y Henriques (2016), por lo que se espera con esta secuencia poder favorecer dicha *coordinación* en el estudiante que luego, por medio de la actividad cognitiva de conversión, pueda justificar en el registro lengua natural su respuesta al ítem planteado.

El análisis de la respuesta del presente ítem se centrará en identificar la asociación que realiza el estudiante entre la variable visual (intersección de la curva con el eje "*x*") del registro gráfico con la unidad simbólica ($b^2 - 4ac$) del registro algebraico para su posterior conversión al registro lengua natural a fin de justificar su respuesta, esto con la finalidad de indagar sobre el reconocimiento cualitativo que realiza el estudiante sobre dicha asociación.

Análisis de la respuesta de Micaela

En el ítem *c)*, podemos observar que la respuesta de la estudiante corresponde a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 33).

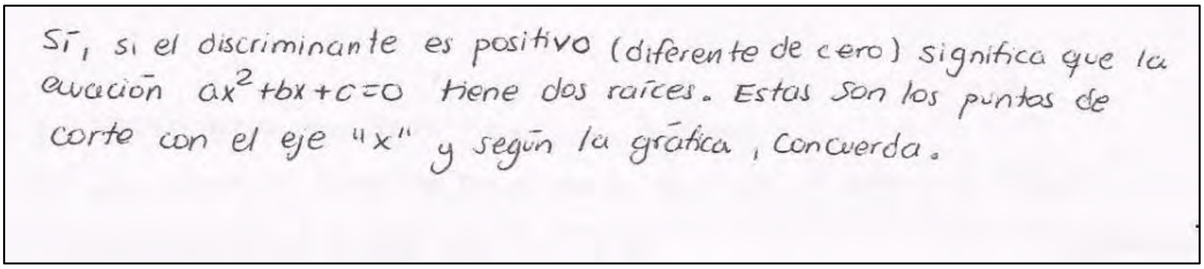

Sí, si el discriminante es positivo (diferente de cero) significa que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos raíces. Estas son los puntos de corte con el eje "x" y según la gráfica, concuerda.

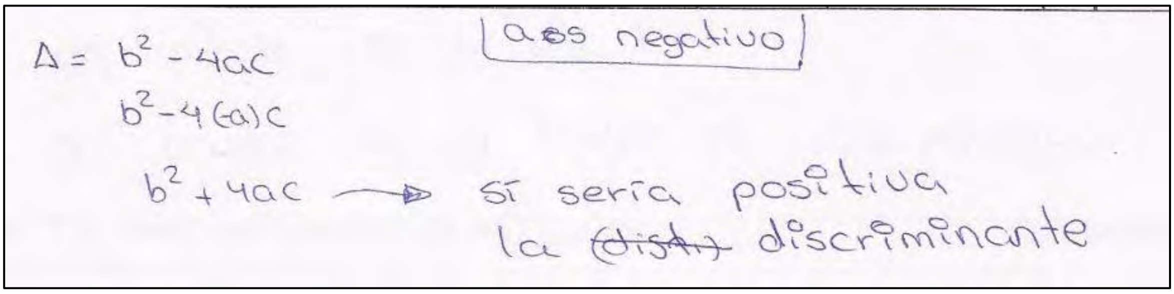
Figura 33. Respuesta de Micaela del ítem c).

Podemos apreciar en la figura 33 la coordinación de los registros gráfico y algebraico del objeto matemático, ya que logra asociar la variable visual (intersección de la curva con el eje "x") del registro gráfico con la unidad simbólica compuesta $b^2 - 4ac$ del registro algebraico de la función $f(x)$. Esto se expresa en que los puntos de cortes de la gráfica de la función determina el valor (número de raíces) que puede tomar el discriminante de una ecuación cuadrática.

Luego, para poder justificar su respuesta al ítem planteado, *Micaela* ejecutó la *conversión* de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro lengua natural, permitiendo la *aprehensión* global cualitativa al establecer la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes involucradas en ambos registros (gráfico y algebraico) para poder percibir dicha correspondencia.

Análisis de la respuesta de Sandra

En cuanto al ítem *c)*, podemos observar el resultado dado por la estudiante *Sandra* corresponde parcialmente a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 34).


$\Delta = b^2 - 4ac$ | a es negativo |

$b^2 - 4(a)c$

$b^2 + 4ac \longrightarrow$ sí sería positiva

la ~~(dist)~~ discriminante

Figura 34. Respuesta de Sandra del ítem c).

Podemos apreciar que la *coordinación* de los registros gráfico y algebraico del objeto matemático fue parcial, ya que, en este ítem, *Sandra* sí logró relacionar una característica de la gráfica de la Función Cuadrática $f(x)$ (parábola cóncava hacia abajo) con el parámetro de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (asociación que no se logró en el ítem *a)* por esta estudiante)*,* pero no pudo percibir la relación entre el signo del discriminante de una ecuación cuadrática con los puntos de corte de la curva con el eje "*x*". Esto, como lo mencionamos anteriormente, expresado en que los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje "*x*" determina el signo (número de raíces) que puede tomar el discriminante de una ecuación cuadrática.

En este sentido, la estudiante, a través de los tratamientos en el registro algebraico, trató de justificar su respuesta y luego hizo la conversión de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico a una expresión mixta que, en palabras de Duval (2004), se refiere a aquellas expresiones que combinan características propias de un registro con otras intrínsecas de otro registro, como lo refleja la Figura 34. En esta parte, la estudiante, en la justificación de su respuesta, tomó características propias del registro algebraico y las unió con características propias del registro lengua natural.

De esta manera, la coordinación parcial entre registros evidenció que la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros no está bien establecida en la estudiante.

Análisis de la respuesta de Joel

Respecto al ítem *c)*, la respuesta del estudiante Joel corresponde a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 35).

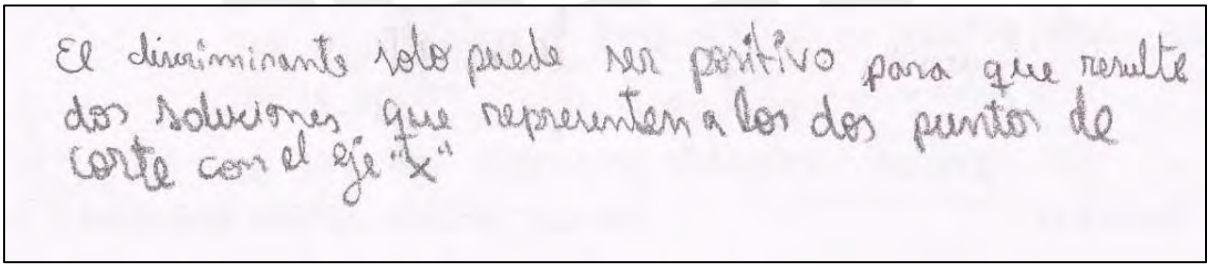

El discriminante solo puede ser positivo para que resulte dos soluciones que representan a los dos puntos de corte con el eje "x"

Figura 35. Respuesta de Joel del ítem c).

Se aprecia en la figura 35 la *coordinación* de los registros gráfico y algebraico del objeto matemático, ya que el estudiante vincula el signo del discriminante de una ecuación cuadrática en razón a la representación gráfica de la función $f(x)$. Esto queda evidenciado en que los puntos de cortes de la gráfica de la función $f(x)$ con el eje "x" determina el signo (número de raíces) que puede tomar el discriminante de una ecuación cuadrática vinculada a dicha función.

Luego, para poder dar respuesta al ítem planteado, *Joel* hizo la *conversión* de la representación del objeto matemático presentado inicialmente en los registros gráfico y algebraico al registro lengua natural, esto permitió que la aprehensión global cualitativa pueda establecer la regla semiótica de correspondencia entre las unidades simbólicas involucradas en ambos registros (gráfico y algebraico) para poder percibir dicha correspondencia.

4.3.2 Actividad Integral Nº 2

El objetivo es que los estudiantes movilicen el objeto matemático Función cuadrática, por medio de la coordinación, y logren realizar tratamientos y conversiones pertinentes en los registros gráfico y algebraico en un contexto intramatemático.

En este apartado, las nociones a tener en cuenta acerca de la Función Cuadrática corresponden a los puntos de cortes con los ejes, parámetros de la ecuación cuadrática vinculada a la función, vértice de la curva de la Función cuadrática e interpretación del vértice de la gráfica de la función (valor máximo y mínimo), además del trazo de la curva de la Función Cuadrática, reconociendo los puntos de corte y, finalmente, la capacidad de validación de argumentos.

A continuación, se muestra la actividad integral Nº 2 (ver Figura 36).

Actividad Integral Nº 2

La representación gráfica de la función f, con regla de correspondencia

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16;\ a, c \in \mathbb{R}$$

pasa por el punto $(4\,;5)$.

De acuerdo a lo enunciado responda los siguientes ítems.

a) Halle el valor de c .

b) Si uno de los puntos que resulta de intersecar la representación gráfica de la función con el eje “X” tiene abscisa $x = -1$, halle el valor de a.

c) Represente el gráfico de la función f, indicando: las coordenadas del vértice, intercepto con los ejes coordenados.

d) Tres estudiantes del curso de matemática básica manifiestan lo siguiente:

- Julián : “ el valor mínimo de la función f es 1”
- Edwin: “ el intervalo donde $f(x) > 0$ es $]1;\ +\infty[$”
- Valeria: “ el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga, ejemplo si $Dom(f) =]-\infty; 0]$ entonces $\min(f) = -3.$ ”

¿Está usted de acuerdo con las afirmaciones? Justifique su respuesta.

Figura 36. Actividad Integral Nª 2.
Fuente: Actividades del profesor a cargo del curso.

Acá se espera que los estudiantes, teniendo en cuenta los datos proporcionados en los ítems, puedan movilizar la noción matemática Función Cuadrática con el apoyo del lápiz y papel como medios tecnológicos.

Para dar respuesta a los ítems propuestos, se espera que los sujetos de estudio coordinen los diferentes registros de representación (lengua natural, algebraico y gráfico). Si bien es cierto la información el objeto matemático es presentado inicialmente en el registro algebraico, se espera, a partir de los ítems propuestos, la inducción a transitar en los registros lengua natural, algebraico y gráfico para dar respuesta a las proposiciones antes mencionadas.

Sobre la coordinación de Registros de Representación Semiótica, Duval (1999) manifiesta que esta consiste en la movilización y la articulación *inmediatas* de los Registros de Representación Semiótica. Es decir, la capacidad de reconocer la representación del objeto Función Cuadrática en los registros en lengua natural, gráfico y algebraico.

A continuación, pasaremos a analizar el primer ítem de la actividad integral Nª 2:

a) Halle el valor de *c*.

Análisis preliminar

En el presente ítem, se espera que el sujeto de estudio relacione el punto representado por el par ordenado (4; 5), perteneciente a la curva de la gráfica de la Función Cuadrática, y establezca la relación de la regla de correspondencia de la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$ como el conjunto de puntos pertenecientes a dicha correspondencia. Es decir, que el estudiante logre *coordinar* los registros gráfico y algebraico de la función para posteriormente realizar el siguiente tratamiento en el registro algebraico:

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$$

$$5 = a(4-4)^2 + 6(4) + c - 16$$

$$5 = 24 + c - 16$$

$$5 = 8 + c$$

$$-3 = c$$

Obteniendo la respuesta por medio de tratamientos en el registro algebraico, en base a la relación de la variable dependiente con la variable independiente de la regla de correspondencia, para luego responder: *“el valor de c es -3”*

Análisis de la respuesta de Micaela

Con respecto al ítem *a)* de la actividad Nº 2, la respuesta de la estudiante Micaela correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 37).

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$$
$$5 = \cancel{a(4-4)^2} + 6(4) + c - 16$$
$$5 = 24 + c - 16$$
$$5 = c + 8 \qquad \boxed{c = -3}$$

Figura 37. Respuesta de Micaela del ítem a).

Se puede afirmar que la estudiante coordinó registros (algebraico y gráfico) en vista que relacionó el punto representado por el par ordenado (4; 5) perteneciente a la representación gráfica de la Función Cuadrática y logró establecer la relación de correspondencia de la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$ como el conjunto de puntos pertenecientes a dicha curva, ya que la estudiante tuvo la capacidad de reconocer el mismo objeto matemático en los registros gráfico y algebraico para posteriormente, por medio de tratamientos en el registro algebraico, obtener el valor del parámetro *c* de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x)$, tal como se puede apreciar en la Figura 37.

Análisis de la respuesta de Sandra

Con respecto al ítem *a)* de la actividad, la respuesta de la estudiante *Sandra* correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 38).

$$\left.\begin{array}{l} y = 5 \\ x = 4 \end{array}\right\} \quad 5 = \cancel{a(4-4)^2} + 6(4) + c - 16$$
$$5 = 24 + c - 16$$
$$c = -3$$

∴ Sale −3, porque cuando se reemplaza el "x" y "y" se dimina "c" y sale el resultado "c"

Figura 38. Respuesta de Sandra del ítem a).

Se observa que la estudiante coordinó los registros algebraico y gráfico, ya que relacionó el par ordenado (4; 5) perteneciente a la representación gráfica de la Función Cuadrática y logró vincularla a la regla de correspondencia de la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$. Esto se debe a que la estudiante reconoció el mismo objeto matemático en los registros gráfico y algebraico, para luego, por medio de tratamientos en el registro algebraico, obtener el valor del parámetro *c* de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x)$, además de justificar su respuesta en el registro lengua natural, redactando el procedimiento realizado para obtener el valor del parámetro *c*.

Análisis de la respuesta de Joel

Con respecto al ítem *a)* de la actividad, la respuesta del estudiante *Joel* correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 39).

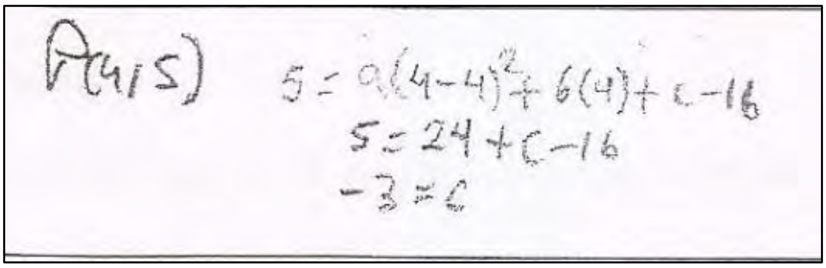


Figura 39. Respuesta de Joel del ítem a).

Se puede apreciar que el estudiante coordinó satisfactoriamente los registros algebraico y gráfico, debido a que pudo relacionar el par ordenado (4; 5) perteneciente a la representación gráfica de la Función cuadrática con la regla de correspondencia de la Función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$. En este sentido, *Joel* tuvo la capacidad de reconocer el mismo objeto en los dos registros (gráfico y algebraico) para posteriormente, por medio de tratamientos pertinentes en la escritura algebraica, determinar el valor del parámetro *c* de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x)$, tal como se puede apreciar en la figura 39.

Ahora, pasaremos a analizar el segundo ítem de la actividad integral Nª 2:

b) Si uno de los puntos que resulta de intersecar la representación gráfica de la función con el eje X tiene abscisa $x = -1$, halle el valor de a.

Análisis preliminar

Para este ítem se espera que, a través de la coordinación de los registros de representación gráfico y algebraico, los estudiantes logren relacionar el punto de intersección de la representación gráfica con el eje coordenado X, representado por el par ordenado (-1; 0), con la regla de correspondencia de la Función cuadrática $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$, en donde, por el ítem anterior, se determinó el valor del parámetro *c* igual a -3, por lo que con el respectivo tratamiento en el registro algebraico se establezca el valor del parámetro *a* de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$$

$$0 = a((-1)-4)^2 + 6(-1) + (-3) - 16$$

$$0 = 25a - 6 - 19$$

$$25 = 25a$$

$$1 = a$$

Por consiguiente, se espera que, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, los estudiantes establezcan la relación entre el punto de corte de la gráfica de la función y el eje X con la regla de correspondencia de dicha función y responda: *"el valor de a es 1"*

Análisis de la respuesta de Micaela

En relación al ítem *b)*, la respuesta de la estudiante *Micaela* correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 40).

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x - 19$$
$$f(x) = a(x^2 - 8x + 16) + 6x - 19$$
$$ax^2 - 8ax + 16a + 6x - 19 = 0$$
$$\hookrightarrow x = -1 \qquad a + 8a + 16a - 6 - 19 = 0$$
$$25a = 25 \qquad \boxed{a = 1}$$

Figura 40. Respuesta de Micaela del ítem b).

Se puede observar que la estudiante realizó los tratamientos esperados en el análisis preliminar, esto en relación a la representación de la Función Cuadrática en el registro algebraico, logrando previamente, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, vincular el punto de intersección de la representación gráfica con el eje X, representado por el par ordenado (-1; 0), con la regla de correspondencia de la Función Cuadrática $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$.

Cabe mencionar que, por el ítem anterior, *Micaela* logró determinar el valor del parámetro *c*, por lo que con el respectivo tratamiento en el registro algebraico pudo establecer el valor del parámetro *a* de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x)$.

Análisis de la respuesta de Sandra

En relación al ítem *b)*, la respuesta de la estudiante *Sandra* correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 41).

$$\left.\begin{array}{l}(x;y)\\(-1;0)\end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 = a(-1-4)^2 + 6(-1) + (-3) - 16 \\ 0 = 25a - 6 - 3 - 16 \\ 25 = 25a \\ \boxed{a = 1}\end{array}$$

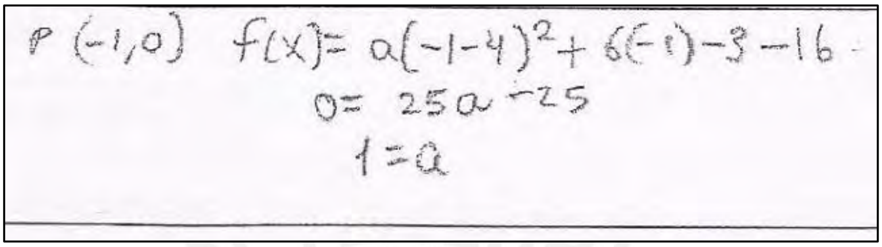
Figura 41. Respuesta de Sandra del ítem b).

Como estaba previsto, la estudiante logró, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, relacionar el punto de intersección de la representación gráfica de la función $f(x)$ con el eje X, representado por el par ordenado (-1; 0), con la regla de correspondencia de la Función Cuadrática $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$.

Luego, tomando en consideración el valor del parámetro *c* obtenido en el ítem anterior, realizó el respectivo tratamiento en el registro algebraico para determinar el valor del parámetro *a* de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x)$.

Análisis de la respuesta de Joel

En relación al ítem *b)*, la respuesta del estudiante *Joel* correspondió a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 42).



$P(-1,0)$ $f(x)= a(-1-4)^2+6(-1)-3-16$

$0= 25a-25$

$1=a$

Figura 42. Respuesta de Joel del ítem b).

Como se puede observar, el estudiante realizó los tratamientos pertinentes en el registro algebraico, logrando en un primer momento, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, vincular el punto de intersección de la representación gráfica de la función con el eje X, representado por el par ordenado (-1; 0), con la regla de correspondencia de la Función Cuadrática $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$.

Se conoce que, por el ítem anterior, Joel logró determinar el valor del parámetro *c* de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x)$, por lo que con el respectivo tratamiento en el registro algebraico pudo establecer el valor del parámetro *a*.

Seguidamente, pasaremos a analizar el tercer ítem de la actividad integral Nª 2:

c) Represente el gráfico de la función f, indicando: las coordenadas del vértice, intercepto con los ejes coordenados.

Análisis preliminar

En este ítem, se espera, además de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, la conversión del registro algebraico al registro gráfico con sus respectivos tratamientos. En este sentido, el estudiante tendrá que representar la función $f(x)$ en el registro gráfico y para esto, previamente en el registro algebraico, deberá obtener el par ordenado que represente el vértice de la representación gráfica de dicha función, tomando en cuenta los valores determinados anteriormente para los parámetros *a* y *c*.

Esto es:

$$f(x) = (x-4)^2 + 6x - 19$$

$$f(x) = x^2 - 8x + 16 + 6x - 19$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4$$

En donde el par ordenado del vértice de la representación gráfica queda establecido como:

$$V(1; -4)$$

Posteriormente, se espera que el estudiante, al haber obtenido el par ordenado del vértice de la representación gráfica de la función, que como mencionamos anteriormente es el que nos proporciona el valor máximo o mínimo de la función, también logre identificar el punto de corte con el eje Y que, en este caso, sería el término independiente de la ecuación cuadrática presentada $x^2 - 2x - 3$. Es decir, el valor -3. Además, se espera que el estudiante determine el otro punto de corte con el eje X por medio del tratamiento respectivo en el registro algebraico:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$0 = (x - 3)(x + 1)$$

$$x = -1 \wedge x = 3$$

Luego de esto, se espera que el estudiante realice la *conversión* pertinente, la cual se establece como la transformación de la representación de la Función Cuadrática del registro algebraico a la representación de dicho objeto matemático en el registro gráfico (ver Figura 43).

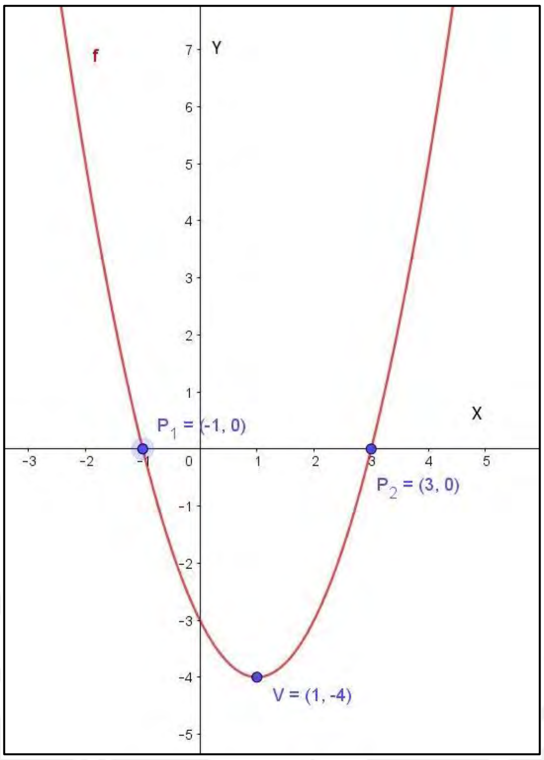


Figura 43. Representación gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Por lo tanto, se espera que, en relación al tratamiento y *conversión* respectivo realizado por el estudiante, pueda dar como respuesta: *"Las coordenadas del vértice es V= (1; -4) y el intercepto con el eje X es (-1; 0) y con el eje Y es (0; -3)"*

Análisis de la respuesta de Micaela

En cuanto al ítem *c)*, evidencia que la respuesta de la estudiante *Micaela* corresponde a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 44).

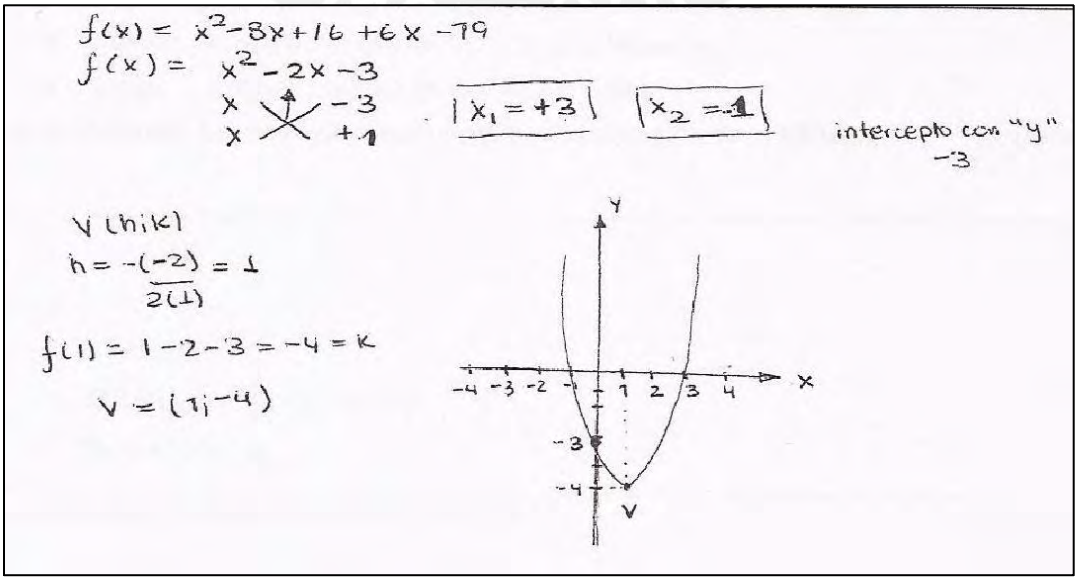


Figura 44. Respuesta de Micaela del ítem c).

En la figura 44, siguiendo los parámetros de Duval, la estudiante coordinó los registros de representación gráfico y algebraico, tal como se esperaba, y antes de efectuar la conversión de la representación del objeto en el registro algebraico al gráfico, Micaela previamente, en el registro inicial (algebraico), obtuvo el par ordenado que simboliza el vértice de la curva de la Función $f(x)$, tomando en consideración los valores obtenidos anteriormente para los parámetros *a* y *c* de la ecuación cuadrática.

La estudiante, con los tratamientos pertinentes, determinó los dos puntos de corte con el eje X, además de lograr identificar el punto de corte con el eje Y que, en este caso, sería el término independiente de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x)$, para finalmente realizar la conversión pertinente, la cual se establece como la transformación de la representación de la Función Cuadrática del registro algebraico a la representación de dicho objeto matemático en el registro gráfico, como se evidencia en la Figura 44.

En relación al tratamiento respectivo realizado por la estudiante, pudo determinar las coordenadas del vértice V= (1; -4), los pares ordenados que representan el intercepto con el eje X (-1; 0) y (3; 0) y con el eje Y (0; -3) para luego realizar la conversión adecuada para el trazo de la representación gráfica de la función $f(x)$, tal como se esperaba en el análisis preliminar.

Análisis de la respuesta de Sandra

En cuanto al ítem *c)*, se evidencia que la respuesta dada por la estudiante *Sandra* es la esperada en el análisis preliminar.

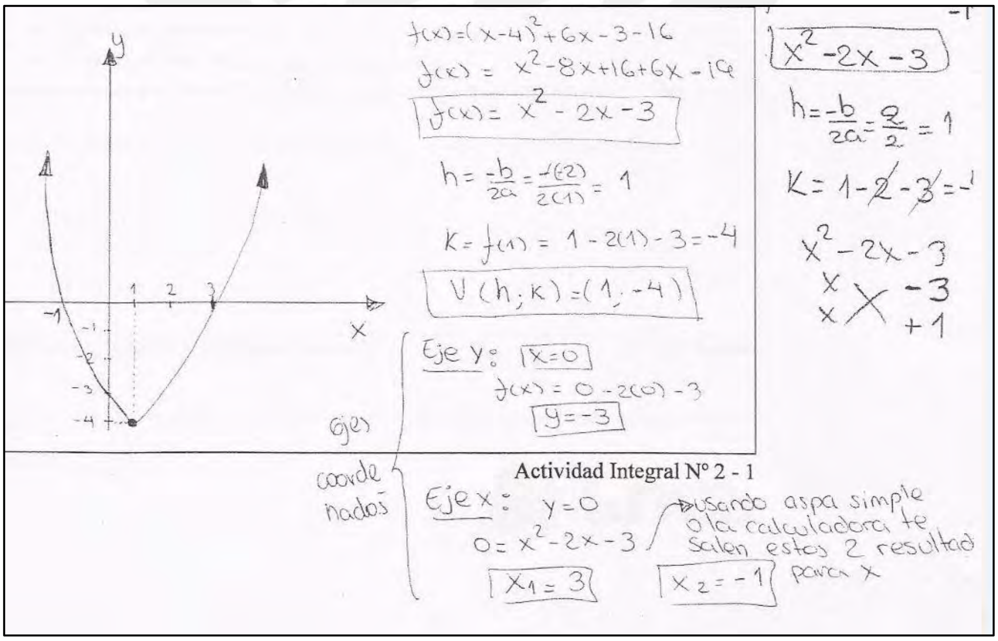


Figura 45. Respuesta de Sandra del ítem c).

En la figura 45, se puede percibir que la estudiante coordinó los registros gráfico y algebraico, como se vaticinaba en el análisis preliminar, que para poder efectuar la conversión de la representación del objeto del registro algebraico al gráfico, *Sandra* primero obtuvo, en el registro algebraico con el respectivo tratamiento, el par ordenado del vértice de la curva de la Función $f(x)$, considerando los valores obtenidos anteriormente de los parámetros *a* y *c* de la ecuación cuadrática vinculada a dicha Función.

Después, la estudiante, con los tratamientos adecuados, obtuvo los dos puntos de corte con el eje X (raíces de la ecuación cuadrática), además de lograr identificar el punto de intersección de la gráfica de la función $f(x)$ con el eje Y, que, en este caso, lo obtuvo asignando el valor de cero a la variable independiente de la ecuación cuadrática, para finalmente, teniendo las coordenadas del vértice V= (1; -4), los pares ordenados que representan el intercepto con el eje X (-1; 0) y (3; 0) y con el eje Y (0; -3), realizar la conversión pertinente, que es el trazo de la gráfica de la función $f(x)$, tal como se refleja en la Figura 45.

Análisis de la respuesta de Joel

En cuanto al ítem *c)*, la respuesta del estudiante *Joel* evidencia que corresponde a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 46).

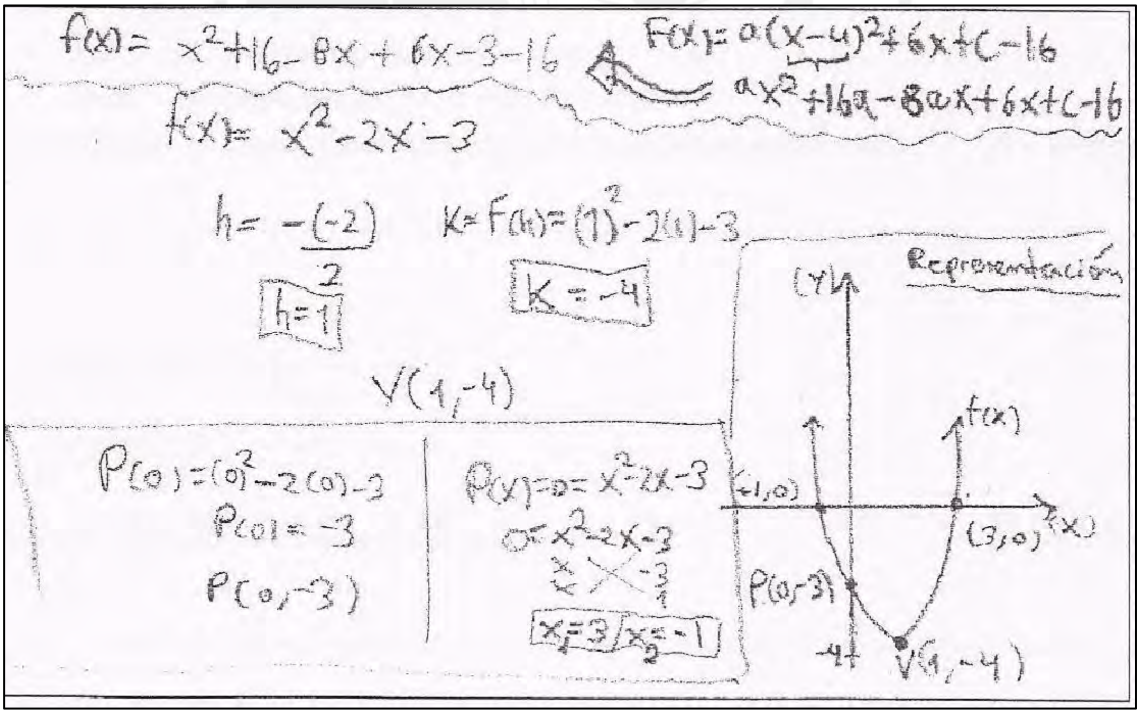


Figura 46. Respuesta de Joel del ítem c).

Como se ve en la Figura 46, se puede percibir que el estudiante coordinó los registros de representación gráfico y algebraico, tal como se esperaba en el análisis preliminar, el cual, para poder efectuar la conversión del registro algebraico al gráfico, *Joel*, en primera instancia, por medio de tratamientos pertinentes en el registro algebraico, obtuvo el par ordenado que representa el vértice de la curva de la Función $f(x)$, considerando los valores obtenidos anteriormente para los parámetros *a* y *c* de la ecuación cuadrática.

Luego, el estudiante determinó los dos puntos de corte de la gráfica de la Función cuadrática con el eje coordenado X y posteriormente pudo identificar el punto de corte de la gráfica de la función con el eje Y que, en este caso, le dio el valor de cero a la variable independiente de la función $f(x)$ para obtener el par ordenado (0; -3) que representa dicha intersección.

Finalmente, realizó la conversión pertinente, la cual se establece como la transformación de la representación de la Función Cuadrática del registro algebraico a la representación de dicho objeto matemático en el registro gráfico, tal como se refleja en la Figura 46, teniendo en consideración, para dicha conversión, las coordenadas del vértice V= (1; -4), los pares ordenados que representan el intercepto con el eje X (-1; 0) y (3; 0) y con el eje Y (0; -3), tal como se esperaba en el análisis preliminar.

Finalmente, analizamos el cuarto ítem de la actividad integral Nª 2:

d) Tres estudiantes del curso de Matemática Básica manifiestan lo siguiente:
   - Julián : “el valor mínimo de la función f es 1”
   - Edwin: “el intervalo donde $f(x) > 0$ es $]1;\ +\infty[$”
   - Valeria: “el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga, ejemplo si $Dom(f) =]-\infty; 0]$ entonces $\min(f) = -3.$”

¿Está usted de acuerdo con las afirmaciones? Justifique su respuesta.

Análisis preliminar

Para este ítem, se espera que el estudiante coordine el registro inicial de lengua natural (en donde se presenta tres diferentes argumentos con respecto al objeto matemático Función Cuadrática) con los registros gráfico y algebraico. En esta parte se espera que el sujeto de estudio valide o invalide cada argumento, teniendo en cuenta la información presentada y la solución de los ítems anteriores.

Para el primer argumento “*el valor mínimo de la función f es 1*”, se espera que el estudiante interprete las coordenadas del vértice del ítem anterior, en donde V = (1; -4) y cuya ordenada de dicho par ordenado igual a -4 es el valor mínimo de la función. En este aspecto, la coordinación del registro gráfico con el registro lengua natural, que es presentado en el argumento, permite invalidar lo propuesto, conduciendo al estudiante a responder: *“Este argumento es falso, ya que el valor mínimo de la función es -4”*

En el segundo argumento “*el intervalo donde $f(x) > 0$ es $]1;\ +\infty[$*”, se espera que el estudiante, por medio de la *coordinación* de los registros gráfico y algebraico, establezca que el intervalo, donde la función $f(x) > 0$, es cuando los valores de la variable independiente x son $]-\infty; -1[$ y $]3; +\infty[$, por lo que se espera que el estudiante responda: *“Este argumento es erróneo, ya que el intervalo cuando $f(x) > 0$ es $]-\infty; -1[$ y $]3; +\infty[$”*

Finalmente, para el tercer argumento “*el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga, ejemplo si $Dom(f) =]-\infty; 0]$ entonces $min(f) = -3$.* ”, donde se espera que puedan reconocer la validez del argumento propuesto por medio de la coordinación de los registros gráfico y lengua natural, donde logre reconocer la dependencia del valor mínimo de la función en relación al dominio de la misma. En ese sentido, se espera que responda: *“Este argumento es válido, ya que cuando el dominio de la función es $Dom(f) =]-\infty; 0]$, el valor mínimo de la misma es $min(f) = -3$”*

Análisis de la respuesta de Micaela

En el ítem d) de la actividad integral Nª 2, la respuesta y justificación de la estudiante *Micaela* corresponde a lo esperado por el análisis preliminar (ver Figura 47).

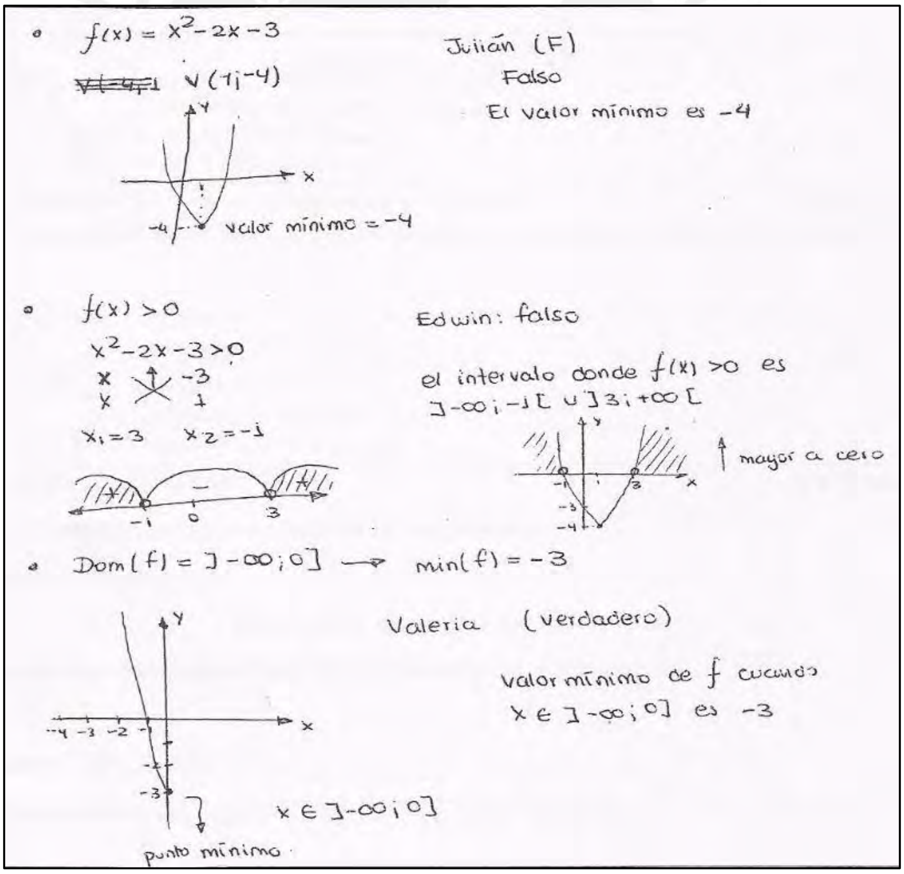


Figura 47. Respuesta de Micaela del ítem d).

En la respuesta de *Micaela* se evidenció la coordinación del registro inicial lengua natural (en donde se presenta tres diferentes argumentos con respecto al objeto matemático Función cuadrática) con los registros gráfico y algebraico, observando que, para justificar sus afirmaciones, se valió del registro de representación gráfico, tal como se evidencia en la Figura 47.

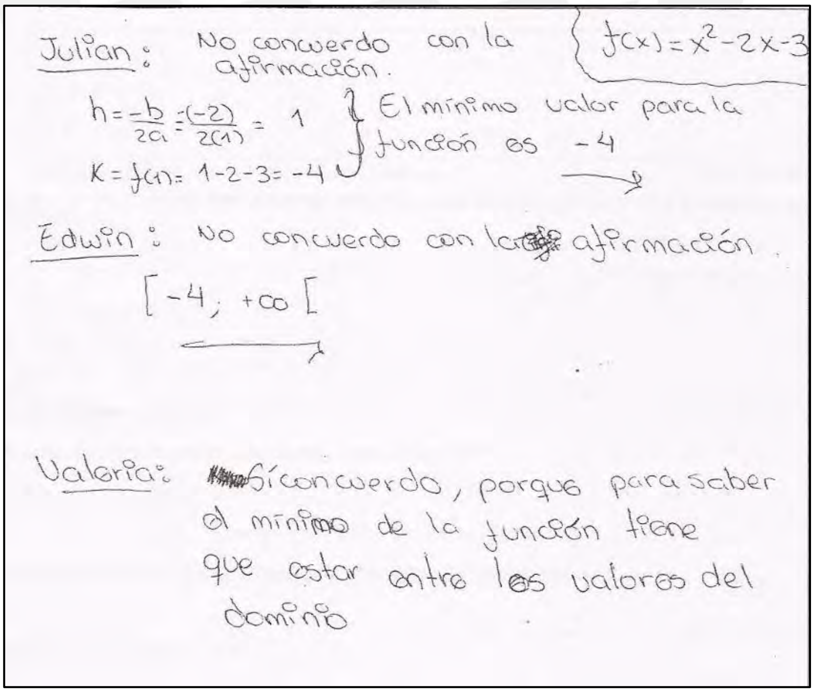
Para el primer argumento, la estudiante interpretó las coordenadas del vértice del ítem anterior, en donde V = (1; -4) y cuya ordenada de dicho par ordenado igual a -4 es el valor mínimo de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$. En este aspecto, la coordinación del registro gráfico con el registro lengua natural que es presentado el argumento le permitió invalidar el argumento propuesto.

Para el segundo argumento, *Micaela*, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, estableció que el intervalo, donde la función $f(x) > 0$, se cumple cuando los valores de la variable independiente *x* son $]-\infty; -1[$ y $]3; +\infty[$, lo que le permitió invalidar también el argumento propuesto.

Finalmente, para el tercer argumento, la estudiante logró reconocer su validez sostenido en la coordinación de los registros gráficos y lengua natural, ya que identificó la dependencia del valor mínimo de la función $f(x)$ en relación al dominio de la misma.

Análisis de la respuesta de Sandra

Para el ítem d), la respuesta y justificación de la estudiante *Sandra* corresponde parcialmente a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 48).


Julian: No concuerdo con la afirmación. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$

$K = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

El mínimo valor para la función es -4

Edwin: No concuerdo con la afirmación

$[-4; +\infty[$

Valeria: Sí concuerdo, porque para saber el mínimo de la función tiene que estar entre los valores del dominio

Figura 48. Respuesta de Sandra del ítem d).

La coordinación del registro inicial lengua natural con los registros gráfico y algebraico fue parcial, caso contrario que el de *Micaela*, para justificar sus afirmaciones, ya que *Sandra* no se valió del registro gráfico.

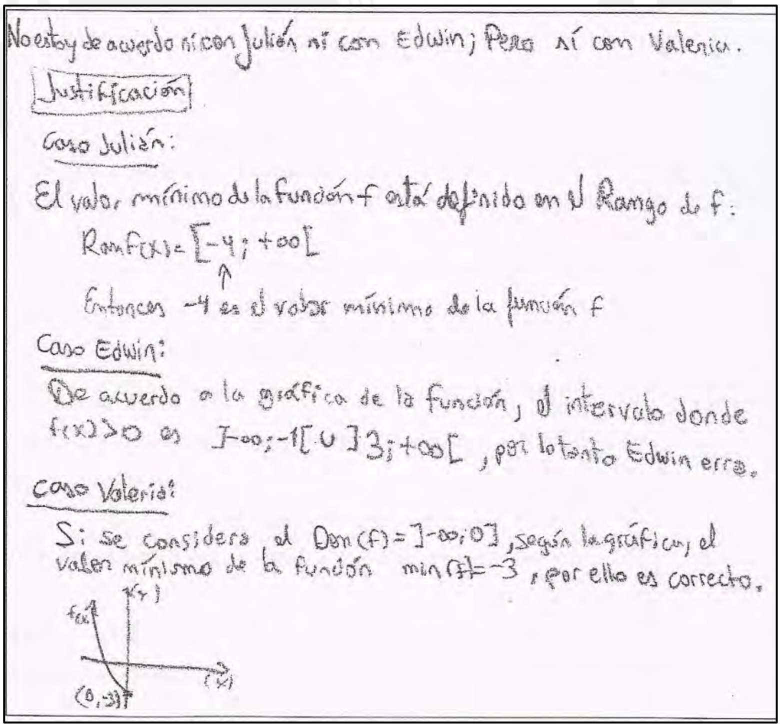
Para el primer argumento, la estudiante, por medio de tratamientos algebraicos, obtuvo las coordenadas del vértice, en donde V = (1; -4) y cuya ordenada de dicho par ordenado representa el valor mínimo de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$. En este caso, la coordinación del registro gráfico con el registro lengua natural que es presentado el argumento, permitió invalidar el argumento propuesto.

Para el segundo argumento, *Sandra* no pudo establecer la *coordinación* de los registros gráfico y algebraico. Debido a esto, erró al establecer que el intervalo donde la función $f(x) > 0$ se cumple cuando los valores de la variable independiente *x* son $[-4; +\infty[$. En ese sentido, no logró justificar la invalidez del argumento propuesto.

Finalmente, para el tercer argumento, la estudiante no pudo justificar la validez del argumento propuesto mediante de la coordinación de los registros gráfico y lengua natural, debido a que no logró reconocer la dependencia del valor mínimo de la función $f(x)$ en relación al dominio de la misma.

Análisis de la respuesta de Joel

En el ítem d), la respuesta y justificación del estudiante *Joel* corresponde a lo esperado en el análisis preliminar (ver Figura 49).



No estoy de acuerdo ni con Julián ni con Edwin; Pero sí con Valeria.

Justificación

Caso Julián:

El valor mínimo de la función f está definido en el Rango de f:

Ran f(x) = [-4; +oo[

Entonces -4 es el valor mínimo de la función f

Caso Edwin:

De acuerdo a la gráfica de la función, el intervalo donde f(x) > 0 es]-oo; -1[U]3; +oo[, por lo tanto Edwin erra.

Caso Valeria:

Si se considera el Dom(f) =]-oo; 0] , según la gráfica, el valor mínimo de la función min(f) = -3 , por ello es correcto.

Figura 49. Respuesta de Joel del ítem e.

En la respuesta de *Joel* se evidenció la coordinación del registro inicial lengua natural con los registros gráfico y algebraico.

Para el primer argumento, el estudiante relacionó el valor mínimo de la función con el rango de dicha función, que fue obtenido en el ítem anterior, en donde $\mathcal{R}_f = [-4;\ +\infty[$ y cuyo valor mínimo del intervalo igual a -4 es el valor mínimo de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$. En este aspecto, la coordinación del registro gráfico con el registro lengua natural que es presentado el argumento, le permitió a Joel invalidar el argumento propuesto.

Para el segundo argumento, el estudiante, por medio de la *coordinación* de los registros gráfico y algebraico, estableció, a través de la visualización de las características de la representación gráfica de la función, que el intervalo donde la función $f(x) > 0$ es cuando los valores de la variable *x* son $]-\infty; -1[$ y $]3;\ +\infty[$, lo que le permitió invalidar también el argumento propuesto.

Finalmente, para el tercer argumento, Joel logró reconocer la validez del argumento propuesto mediante la coordinación de los registros gráfico y lengua natural. Esto lo hizo logrando reconocer la dependencia del valor mínimo de la función $f(x)$ en relación al dominio de la misma. Además, para justificar la validez de este tercer argumento, se valió de la representación de la Función acotada en el registro gráfico.

4.3.3 Resultados de la aplicación de la secuencia de actividades

Resultados de la Actividad Integral Nº 1

En referencia a la **Actividad Integral Nº 1**, es pertinente considerar que de los tres estudiantes tomados en consideración para el estudio, solo dos (**Micaela y Joel**) alcanzaron el objetivo de movilizar, con sus conocimientos previos, el objeto matemático Función Cuadrática. Por su parte, la estudiante **Sandra** logró alcanzar parcialmente el objetivo de la secuencia didáctica, ya que en los ítems *a)* y *b)* de la actividad no logró establecer una *aprehensión* global cualitativa entre las unidades significantes del objeto matemático en los registros gráfico y algebraico.

En el **ítem *a)***, solo **Micaela** logró completamente relacionar la variable visual concavidad de la representación gráfica de la Función Cuadrática $f(x)$ con la unidad simbólica (parámetro "a") de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Es decir, a través de la coordinación de registros, pudo reconocer el mismo objeto en los dos registros. En ese sentido, la estudiante logró percibir la concavidad hacia abajo de la representación de la función en el registro gráfico y vincularla con el parámetro "a" de la ecuación cuadrática relacionada a dicha función, permitiendo así establecer correctamente la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros (gráfico y algebraico).

Con **Sandra**, esto no se llevó a cabo debido a una coordinación parcial entre los registros gráfico y algebraico, lo que ocasionó no avanzar en su desarrollo del análisis con respecto a la orientación de la concavidad de la representación de la función en el registro gráfico. Esto provocó que solo se mantuviera en la parte elemental de las características de la Función Cuadrática en el registro algebraico, ya que solo estableció el parámetro $a \neq 0$. Esto evidencia que la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros no está bien establecido en la estudiante.

Con respecto al estudiante **Joel**, logró una coordinación parcial entre los registros gráfico y algebraico, ya que sí pudo percibir la orientación de la concavidad de la curva de la Función, que es establecer los valores que puede tomar el parámetro "*a*" de la ecuación cuadrática ($a < 0$), pero, a similitud de Sandra, no logró avanzar en su análisis de una característica inherente de la Función Cuadrática al no considerar el valor del parámetro $a \neq 0$. Esto evidencia que la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros está parcialmente establecido en el estudiante.

Cabe resaltar que los resultados obtenidos de **Sandra** y **Joel**, diferentes a lo que señala el análisis preliminar, se puede relacionar a que los estudiantes no asocian con claridad la concavidad de la gráfica de la Función Cuadrática con el valor de la unidad simbólica *"a"* de la ecuación cuadrática vinculada a dicha función y dicha asociación es importante para la aprehensión global cualitativa, la cual implica discriminar la concavidad de la gráfica en relación al signo del parámetro "*a"* de la ecuación cuadrática.

Sobre esto, Duval (2006) manifiesta que "*la actividad matemática requiere que, aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica, solo elijan una según el propósito de la actividad*", además "*dicha actividad matemática requiere una coordinación interna que ha de ser construida, ya que sin dicha coordinación dos representaciones diferentes del mismo objeto significarían dos objetos diferentes sin ninguna relación entre ambos".*

En ese sentido, la coordinación interna y sobre todo la *conversión* solicita que se discrimine óptimamente las unidades significantes inherentes de los registros, esto es identificar bien, en el registro gráfico, las variables visuales convenientes y, en el registro algebraico, las diferentes oposiciones que dan una relevancia a los símbolos utilizados (Duval, 1998).

En relación al **ítem *b)***, **Micaela** y **Joel** lograron establecer, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, la asociación entre el parámetro *c* (unidad simbólica) de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con el punto de corte de la curva con el eje "*y*" (variable visual) en el registro gráfico. Esto es el parámetro *c* de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ vinculada a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ que establece el punto de intersección de la curva de la gráfica de la función con el eje "*y*" en el sistema coordenado.

En este punto, la correcta asociación les permitió a los dos estudiantes lograr una aprehensión global cualitativa, ya que discriminaron correctamente las unidades significantes de ambos registros para lograr establecer la correspondencia.

Por otro lado, **Sandra** no logró percibir esta relación entre el parámetro "*c"* (unidad simbólica) de la ecuación cuadrática vinculada a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con el punto de corte de la curva con el eje "*y*" en el registro gráfico, debido a que no pudo coordinar los registros gráfico y algebraico, trayendo como consecuencia no percibir el mismo objeto matemático en estos dos registros, tal como lo manifiesta Duval (1995).

Para este ítem, podemos observar que **Micaela** y **Joel**, por medio de la discriminación del intercepto de la curva de la gráfica con el eje Y, lograron entablar una *aprehensión* global cualitativa en relación al objeto matemático. En este sentido, Duval (1998) refiere que "*el sistema semiótico de representación gráfica permite definir una regla de codificación; a un punto del plano le corresponde una pareja de números"* y, por otro lado, "*cualquier pareja de números codifica un punto en el plano".*

Esta pareja de números que codifica un punto en el plano, en este caso el punto de corte de la curva con el eje Y, vincula las unidades simbólicas de la escritura algebraica con las variables visuales de la representación gráfica mediante una ley *semiótica* que, en el sentido de Duval (1988), ha detectado a través de sus investigaciones que, la gran mayoría de estudiantes, las representaciones gráficas y algebraicas del mismo objeto matemático no pueden relacionarse y además los mismos no han sido instruidos acerca de las leyes semióticas que relacionan a las distintas representaciones.

En cuanto al **ítem *c)***, los estudiantes **Micaela** y **Joel**, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico del objeto matemático, lograron relacionar el signo del discriminante (unidad simbólica) de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con los puntos de corte de la representación gráfica de la función con el eje "*x*" (variable visual). De este modo, los dos estudiantes establecieron que el signo del discriminante de la ecuación cuadrática vinculada a la Función $\mathrm{f(x)}$ es positiva, porque la gráfica de la función $\mathrm{f(x)}$ presentada en la actividad tiene dos puntos de intersección con el eje "*x*".

Es así que sus respuestas evidenciaron que la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes está bien establecida.

En cambio, **Sandra** logró una coordinación parcial de los registros gráfico y algebraico, al no poder relacionar el signo del discriminante de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con los puntos de corte de la representación gráfica de la función con el eje "*x*". No obstante, la estudiante trató de justificar su respuesta en un sistema semiótico mixto (algebraico y lengua natural) con el tratamiento que solo involucraban los signos de los parámetros de la ecuación cuadrática.

Cabe resaltar que la estudiante fue la única en asociar a un mismo valor (hacia abajo) de la variable visual concavidad dos unidades simbólicas ($a > 0$ y $a < 0$) del parámetro "*a*" de la escritura algebraica de la Función Cuadrática, lo que evidencia una coordinación parcial y un establecimiento parcial de la regla semiótica de correspondencia en los registros gráfico y algebraico.

Resultados de la Actividad Integral Nº 2

En referencia a la **Actividad Integral Nº 2**, es pertinente considerar que los estudiantes **Micaela** y **Joel**, tomados en consideración para el estudio, alcanzaron el objetivo de movilizar la noción matemática Función Cuadrática, en un contexto intramatemático, logrando así realizar conversiones y tratamientos por medio de la coordinación de registros correspondientes. En cuanto a la estudiante **Sandra**, alcanzó parcialmente el objetivo de la actividad, ya que en el último ítem de la secuencia no logró dicha coordinación.

En el **ítem *a)***, los tres estudiantes, a través de la *coordinación* de los registros gráfico y algebraico, pudieron vincular el punto representado por el par ordenado (4; 5) en el registro gráfico, perteneciente a la curva de la gráfica de la Función Cuadrática con la regla de correspondencia de la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$ como el conjunto de puntos pertenecientes a dicha correspondencia. Posteriormente, con el tratamiento pertinente, lograron obtener el valor del parámetro c de la ecuación cuadrática relacionada a la función.

Como ya habíamos indicado, según Duval (2000), la comprensión matemática demanda una coordinación de los diferentes registros de representación disponibles que se pueden optar y utilizar. Si dicha coordinación no se construye en los estudiantes, estos no podrán atravesar el umbral de la transformación de la representación de un objeto de un registro a otro y del desarrollo de esta coordinación depende la habilidad de movilizar diferentes representaciones integrales de forma interactiva o en paralelo.

En relación al **ítem *b)***, los estudiantes participantes alcanzaron a relacionar el punto de corte de la representación gráfica de la Función con la abscisa X, representado por el par ordenado (-1; 0), con la regla de correspondencia de la Función cuadrática $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$, en donde, con ayuda del ítem anterior, lograron determinar el valor del parámetro $c = -3$ y con el respectivo tratamiento en el registro algebraico establecieron el valor del parámetro *a*. Cabe mencionar que todo esto se realizó por medio de la *coordinación* de los registros de representación gráfica y algebraica.

Para la comprensión de una situación propuesta en un registro, se requiere hacer un tratamiento para su comprensión y, mediante la conversión, el individuo debe diferenciar las unidades significantes existentes en el texto de la actividad y lograr establecer en correspondencia dichas unidades con su expresión en otro registro, siendo esta correspondencia probablemente la de mayor dificultad en realizar.

En este sentido, la conversión conlleva a poder encontrar una representación, ya sea de tipo algebraica, gráfica, figural, simbólica o aritmética, y de esta manera se pueda lograr organizar la información de la situación planteada, permitiendo así realizar el tratamiento matemático correspondiente que dé solución a dicha situación (Duval, 2004).

En cuanto al **ítem *c)***, los tres estudiantes, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico y con la conversión del registro algebraico al registro gráfico con sus respectivos tratamientos, lograron obtener el par ordenado que representa el vértice de la representación gráfica de la función, tomando en consideración los valores determinados anteriormente para los parámetros *a* y *c*. Posterior a ello, lograron identificar el punto de corte de la gráfica de la función con el eje Y que, en este caso, sería el término independiente de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 3$ vinculada a dicha función y determinar las dos raíces de la ecuación cuadrática (puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje X), para finalmente, por medio de la *conversión* pertinente, trazar la representación de la función en el registro gráfico.

Finalmente, en el **ítem *e)***, los estudiantes **Micaela** y **Joel** coordinaron el registro lengua natural (en donde se presenta los tres diferentes argumentos con respecto al objeto matemático Función Cuadrática) con los registros gráfico y algebraico, ya que invalidaron el primer argumento, por medio de la interpretación del par ordenado del vértice de la gráfica de la función, constatando así que el verdadero valor mínimo de la función está relacionado con la ordenada del par ordenado del vértice V = (1; -4). También invalidaron el segundo argumento, constatando que el intervalo donde $f(x) > 0$ es $]-\infty; -1[\ \ y\ ]3;\ +\infty[$ y, por último, validaron el tercer argumento, constatando que el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga, ya que si $Dom(f) =]-\infty; 0]$, entonces $\min(f) = -3$.

Cabe mencionar que la estudiante **Micaela** justificó la validez o invalidez de los tres argumentos coordinando los registros de lengua natural y gráfico de la representación de la Función Cuadrática. En cambio, el estudiante **Joel** solo realizó esta coordinación entre los registros lengua natural y gráfico para validar el tercer argumento.

En cuanto a la estudiante **Sandra**, la coordinación del registro lengua natural con los registros gráfico y algebraico fue parcial, ya que solo pudo validar el primer argumento, pero no pudo justificar la validez o invalidez del segundo y tercer argumento propuesto.

CONCLUSIONES

En concordancia con los antecedentes de investigaciones revisadas y en relación a la movilización del objeto matemático Función Cuadrática, es pertinente afirmar que dicha movilización depende de las secuencias didácticas que el profesor a cargo del curso desarrolla dentro del aula, puesto a que estas facilitan en menor o mayor grado la comprensión de las características inherentes del objeto matemático por parte de los estudiantes. Es por eso que, si se diseñan o adaptan secuencias didácticas bien estructuradas para el desarrollo de las capacidades de análisis, visualización e interpretación, estas podrían jugar un rol significativo en la comprensión y movilización de la noción Función Cuadrática.

En referencia al marco teórico utilizado en nuestra investigación, consideramos de gran importancia y utilidad el enfoque que le da al análisis de las producciones matemáticas de los estudiantes, respecto al objeto matemático Función Cuadrática, la Teoría de Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Raymond Duval en 1988.

En palabras de Duval, la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación y dichas representaciones permiten el acceso a objetos matemáticos no tangibles, a diferencia de otras ciencias. También manifiesta que, en la actividad matemática, se hace necesario hacer un análisis de procesos cognitivos, como es la conceptualización, donde los mismos necesitan de la utilización de diferentes tipos de representación ajenos a los del lenguaje natural, como pueden ser el simbólico, tabular, esquemas, imágenes, algebraico, geométrico, gráfico, entre otros, en donde estas representaciones logran el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para poder reflejar las relaciones y las operaciones.

En ese sentido, el autor también afirma que la comprensión matemática demanda una coordinación entre los diferentes Registros de Representación Semióticos disponibles que se pueden elegir y usar. Si no se desarrolla esta coordinación en los estudiantes, estos no podrán cruzar el umbral de la conversión de representación y del desarrollo de esta coordinación depende la habilidad de movilizar diferentes representaciones conjuntamente de manera interactiva o en paralelo.

Consideramos pertinente realizar nuestra investigación a nivel de Educación Superior, específicamente en estudiantes de estudios generales de Humanidades, ya que en las mallas curriculares de este nivel de educación se encuentran inmersos el objeto matemático Función Cuadrática. Además, la comprensión de dicha noción matemática es importante en la resolución de problemas de las diferentes Carreras de Humanidades.

En cuanto a la metodología de investigación empleada en nuestro estudio, optamos por la de corte cualitativo de Fox (1981), y que en palabras de Borba y Araujo (2004), está avocada en indagar y explicar procesos de enseñanza y aprendizaje asociados a la Matemática, donde el contexto real es quien proporciona los datos y donde actor principal es el investigador.

Taylor y Bogdan (1987) refieren que la metodología cualitativa conlleva a que el investigador perciba el contexto y a los individuos en una perspectiva holística, ya que las mismas personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a valores, sino que son vistos como un todo. El investigador cualitativo suspende o trata de apartar sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones a fin de ver las cosas como si ellas estuvieran ocurriendo por primera vez y que nada se da por sobrentendido, ya que “todo” es un tema de investigación.

En referencia al estudio histórico del objeto matemático Función Cuadrática, en palabras de Kline (1992), permitió conocer que el hombre ha buscado, a través de la historia, descubrir relaciones o asociaciones de correspondencia entre elementos de conjuntos numéricos y, en específico, las relaciones cuadráticas que se hallaron presente en los inicios de las Matemáticas como disciplina, cuando los griegos entraron en escena en la época clásica.

En el análisis del libro de consulta de los estudiantes, se percibió que está estructurado en tres aspectos: concepto de Función Cuadrática, construcción del gráfico de una Función Cuadrática y movilización de la Función Cuadrática; aparte de eso, se pudo evidenciar los tratamientos y conversiones que presentan las actividades desarrolladas en relación a la Función Cuadrática.

Sobre las secuencias didácticas planteadas en la experimentación, estas fueron adaptadas para analizar la coordinación entre los registros en lengua natural, algebraico y gráfico, permitiendo así realizar, por parte de los estudiantes, la construcción de la representación de la Función Cuadrática en el registro gráfico por medio de lápiz y papel.

Cabe mencionar que la secuencia didáctica aplicada en nuestra investigación se realizó en dos sesiones en compañía del profesor a cargo del curso, donde la finalidad de dichas secuencias era evocar en los estudiantes la coordinación entre los diferentes registros presentados en las actividades, además de motivar en los sujetos de estudio a realizar tratamientos y conversiones para el desarrollo de dichas actividades.

Con respecto a los resultados de la investigación:

En referencia a la pregunta de investigación: *¿Cómo estudiantes de carreras de Humanidades realizan la coordinación de Registros de Representación Semiótica, a través de la discriminación de las unidades significantes cuando se moviliza la noción de Función Cuadrática en una secuencia didáctica con estudiantes de las carreras de Humanidades?*

Se logró el objetivo de la pregunta de investigación, ya que los participantes del estudio, por medio de la coordinación de registros de representación lengua natural, algebraico y gráfico, lograron movilizar la noción de Función Cuadrática, permitiendo así, en palabras de Duval, la comprensión matemática de dicha noción por medio de la discriminación de las unidades significantes entre los diferentes Registros de Representación Semióticos disponibles, permitiendo a los estudiantes cruzar el umbral de la conversión de representación.

Referente al logro de nuestro objetivo general: *Analizar la coordinación entre Registros de Representación Semiótica, por medio de la discriminación de las unidades significantes, cuando se moviliza la noción de Función Cuadrática en una secuencia didáctica con estudiantes de las carreras de Humanidades*.

Se pudo cumplir, ya que, en el desarrollo de la secuencia didáctica, los estudiantes lograron discriminar las unidades significantes de los diferentes Registros de Representación Semiótica en que se presentaron las actividades: registro de representación lengua natural, registro de representación algebraico y registro de representación gráfico, permitiendo afirmar que los estudiantes, a través de la coordinación, poseen la capacidad de percibir el mismo objeto matemático en los tres diferentes registros presentados.

Posteriormente, por medio de esta coordinación, los estudiantes lograron realizar los tratamientos y conversiones pertinentes entre los diferentes registros de representación.

En relación a los objetivos específicos que se plantearon para alcanzar el objetivo general:

- *Analizar la coordinación de los registros lengua natural, gráfica y algebraica que realizan los estudiantes de Humanidades a través de la discriminación de las unidades significantes, al desarrollar una secuencia didáctica de la noción Función Cuadrática.*
- *Identificar las conversiones y tratamientos que realizan los estudiantes de Humanidades al movilizar la noción Función Cuadrática en el desarrollo de una secuencia didáctica.*

Los estudiantes lograron coordinar a través de la discriminación de las unidades significantes los diferentes registros de representación: registro lengua natural, algebraico y gráfico; con sus respectivas conversiones y tratamientos, cuando desarrollaron la secuencia didáctica de la noción Función Cuadrática.

En la primera etapa de la actividad desarrollada, dos de los tres estudiantes coordinaron los registros gráfico y algebraico, lo que posibilitó identificar características inherentes de la Función Cuadrática, en el registro algebraico así como en el registro gráfico. Esto es, asociar la orientación de la concavidad (variable visual) de la representación gráfica de la Función con el parámetro "*a*" (unidad simbólica) de la ecuación cuadrática vinculada a dicha Función, asociar el punto de intersección de la curva con el eje "y" (variable visual) de la función en el registro gráfico con el término independiente (unidad simbólica) de la ecuación cuadrática y la asociación del signo del discriminante (unidad simbólica) de la ecuación cuadrática con los puntos de intersección de la gráfica de la Función con el eje "*x*" (variable visual).

Todo lo anteriormente descrito hace evidenciar la correcta coordinación entre los registros involucrados, ya que permitieron una aprehensión global cualitativa de la Función Cuadrática exento de tratamientos numéricos que posibilita dicha aprehensión.

Luego de esto, realizaron la conversión de los registros iniciales (algebraico y gráfico) al registro lengua natural a fin de justificar su respuesta a cada ítem propuesto, en la que se identificaron los registros de representación gráfico, algebraico y lengua natural al desarrollar la secuencia didáctica.

En la segunda etapa de la actividad, se evidenció la coordinación entre los registros presentados para movilizar el objeto matemático Función Cuadrática, ya que lograron reconocer el mismo objeto matemático en los tres diferentes registros, lo que permitió, por medio de tratamientos y conversiones pertinentes, que los estudiantes lograran dar respuesta a las actividades propuestas. Cabe resaltar que en esta etapa solo una estudiante no pudo justificar la validez de los argumentos presentados en el último ítem.

Como manifiesta Duval (1998), la lectura de representaciones gráficas tiene como condición la discriminación de las variables visuales relevantes y la percepción de las alteraciones correspondientes de las expresiones algebraicas, por lo que sugerimos realizar investigaciones a fin de favorecer el desarrollo de esta discriminación de unidades significantes de la Función Cuadrática, por medio de la aprehensión global cualitativa, y así se logre establecer correctamente las reglas semióticas de correspondencia entre los diferentes registros.

Además, Duval (2004) refiere que dicha discriminación es condición necesaria para toda actividad de conversión, así como para el desarrollo de la coordinación de registros de representación, por lo que también sugerimos seguir realizando investigaciones en donde se creen las condiciones necesarias que induzcan al estudiante a realizar conversiones de la representación de la Función Cuadrática en varios registros, a fin de seguir desarrollando en estos la coordinación de varios registros y no quedarse en un solo registro (mono registro).

REFERENCIAS

Almonacid, A. (2018). *Modelización de Funciones Cuadráticas: Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de Humanidades.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12602

Borba, M. C.; Araújo, J. L. (2004) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática.* (M. Martínez Perez, Trad.) España: Alianza Editorial.

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las Organizaciones Matemáticas del objeto Función Cuadrática en la enseñanza superior.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4634

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F., Córdoba, L. (2015). *Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas.* Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe, pp. 1 – 13. Recuperado de: http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf

Duval, R. (1988). *Graphiques et equations: Articulation de deux registres.* Em Annales de Didactique et de Sciences Cognitives I, pp. 235-255.

Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking*. Basic Issues for learning, Em F. Hitt and M. Santos (Eds.), Proceedings of the XXI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 311-335. Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo.* Traducción: Myriam Vega Restrepo. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en educación*, Pamplona: EUNSA. (1 ed. Inglesa, 1969).

Gaita, C., Advíncula, E., Barrantes, E., Henostroza, J., Jabo, F., & Luna, M. (2009). *Matemática para no matemáticos.* Perú.

Gómez, A. L., Guirette, R., & Morales, F. (2016). *Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la Función Cuadrática mediante el uso del software GeoGebra.* Educación Matemática, 29 (3), 189-224. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665 58262017000300189

Guevara, C. (2011*). Propuesta Didáctica para lograr Aprendizaje Significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. Recuperado de: http://bdigital.unal.edu.co/6821/1/201021674.2012.pdf

Guirette, R., Gomez, A. L., & Valero, R. (2017). *Reconocimiento de las variables visuales y unidades simbólicas significativas de las funciones cuadráticas.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22 (3), 159-184. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/319112458_Reconocimiento_de_las_variables_visuales_y_unidades_simbolicas_significativas_de_las_funciones_cuadraticas

Henriques, Afonso y Almouloud, Saddo Ag. (2016). *Teoría de Registros de Representación Semiótica en investigación en Educación Matemática en Educación Superior: un análisis de superficies y funciones de dos variables con intervención del software Maple.* Ciencia y Educación (Bauru), *22* (2), 465-487. Recuperado de: https://dx.doi.org/10.1590/1516-731320160020012

Hernández, R. & Fernández, C., & Baptista, P., (2014). *Definición del alcance de la investigación que se realizara: exploratorio, descriptivo, correlacional o explicativo.* Metodología de la Investigación, 6 Ed., 88-101. Recuperado de: http://metabase.uaem.mx/bitstream/handle/123456789/2792/510_06_color.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Mesa, Y. & Villa, J. (2007). *Elementos didácticos, históricos y epistemológicos del concepto de Función Cuadrática.* Revista Virtual FUCN, 21. Artículo 6. Extraído 25 Agosto, 2007 de http://www.ucn.edu.co/portal/uzine/volumen21/html/articulo5.html

Perú, Ministerio de Educación (2017). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* México. Thomson.

Tocto, E. (2015). *Comprensión de la noción Función Cuadrática por medio del tránsito de Registros de Representación Semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6755

Taylor, S. J., & Bogdan, R., (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidos. España.

Vigo, K., Ferreira, M., (2015*). A visualizacao de valores máximos e minimos de duas variaveis*. In: 12TH International Conference on Technology in Mathematics Teaching, 12, 2015, Faro, Portugal. Proceeding. Faro: Universidad de Algarve, 2015. p. 687-695.

Vigo, K., Ferreira, M., (2019). *Las aprehensiones en el registro gráfico para el estudio de la derivada parcial.* Educación XXVIII, 22 (55), 203-224. Recuperado de: http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/educacion/article/view/21360

ANEXOS

Actividad Integral Nº 1

Apellidos y nombres: ____

Código: _________________

I. EXPLORACIÓN INICIAL

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuyo gráfico es como se muestra en la figura 1.

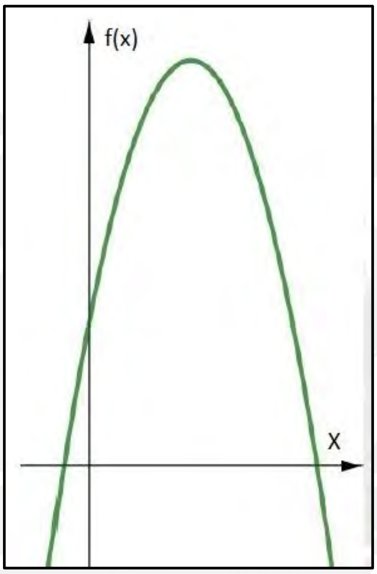


Figura 1.

Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y la información brindada anteriormente para responder los siguientes ítems:

a) ¿"a" puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

b) ¿ "c" puede tomar cualquier valor real? ¿Por qué?

c) ¿El discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede ser positivo?

Actividad Integral Nº 2

Apellidos y nombres: ____

Código: _______________

La representación gráfica de la función f, con regla de correspondencia:

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16;\ a, c \in \mathbb{R}$$

pasa por el punto $(4\,;5)$.

De acuerdo a lo enunciado, responda los siguientes ítems:

a) Halle el valor de c .

b) Si uno de los puntos que resulta de intersecar la representación gráfica de la función con el eje X tiene abscisa $x = -1$, halle el valor de a.

c) Represente el gráfico de la función f indicando: las coordenadas del vértice, intercepto con los ejes coordenados.

d) Tres estudiantes del curso de Matemática básica manifiestan lo siguiente:

- Julián : " el valor mínimo de la función f es 1"
- Edwin: " el intervalo donde $f(x) > 0$ es $]1;\ +\infty[$"
- Valeria: " el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga, ejemplo si $Dom(f) =]-\infty; 0]$ entonces $\min(f) = -3.$ "

¿Está usted de acuerdo con las afirmaciones? Justifique su respuesta.