PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

VALORACIÓN DE PRUEBAS DE MATEMÁTICA A PARTIR DE UN SIGNIFICADO DE REFERENCIA SOBRE LOS NÚMEROS RACIONALES EN EL SISTEMA EDUCATIVO PERUANO

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Autora:

VANESSA CRISTINA QUEZADA VARA

Asesora:

Mg. FLOR ISABEL CARRILLO LARA

Junio, 2020

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo valorar las preguntas de las pruebas de Matemática de los concursos de Nombramiento y Ascenso del Ministerio de Educación peruano a partir de un significado de referencia para los números racionales construido a partir del sistema educativo peruano. Para la construcción del significado de referencia, se utilizó como metodología dos herramientas teóricas del 'Enfoque ontosemiótico' propuesto por Godino, Batanero y Font (2007). La primera herramienta es el sistema de prácticas, el cual sostiene que el significado de un objeto matemático está asociado al sistema de prácticas que realiza o una persona o que se comparten en una institución (significado institucional) para resolver situaciones-problemas. Esta herramienta permitió delimitar el estudio hacia la identificación del significado de referencia institucional del objeto matemático 'números racionales'. La segunda herramienta, configuración ontosemiótica, posibilitó identificar los objetos primarios (situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos) vinculados al objeto matemático de estudio. Con respecto a la valoración de las preguntas de las pruebas de los concursos de Nombramiento y Ascenso, se seleccionaron 55 preguntas que evaluaban conocimientos referidos a los números racionales. Además, se realizó el análisis de cada ítem a partir de significado de referencia construido. A partir de ello, se concluyó que, si bien lo evaluado en las pruebas guarda relación con el significado de referencia pretendido, se han identificado situaciones que forman parte del sistema de referencia institucional construido para los números racionales que no se han abordado en las pruebas.

Palabras claves: Números racionales; significado de referencia; Enfoque Ontosemiótico; objetos primarios.

ABSTRACT

This research aimed to evaluate the questions of the Mathematics tests of the Appointment and Promotion competitions of the Peruvian Ministry of Education based on a reference meaning for rational numbers constructed considering the Peruvian educational system. For the construction of the reference meaning, two theoretical tools of The Onto-semiotic Approach' proposed by Godino, Batanero and Font (2007) were used as a methodology. The first tool is the systems of practices, which argues that the meaning of a mathematical object is associated with the system of practices that a person performs or that are shared in an institution (institutional meaning) to solve problem-situations. This tool allowed the study to be delimited towards the identification of the institutional reference meaning of the mathematical object 'rational numbers'. The second tool, ontosemiotic configuration, allowed to identify the primary mathematical objects (situations-problems, languages, concepts-definitions, procediments, properties and arguments) linked to the mathematical object of study. Regarding to the assessment of the questions of the tests of the Appointment and Promotion contests, 55 questions were selected that evaluated knowledge related to rational numbers. In addition, the analysis of each item was performed based on the constructed reference meaning. From this, it was concluded that, although what was evaluated in the tests is related to the intended reference meaning, situations have been identified that are part of the institutional reference system constructed for rational numbers have not been addressed in the tests.

Keywords: Rational number; reference institutional meaning; Onto-semiotic Approach; primary mathematical objects.

A mis padres, Enriqueta y Pío, por su amor y apoyo constante, por sostenerme en todo momento y por brindarme confianza para siempre seguir adelante. Los amo.

A mi hermano, Daniel, por siempre transmitirme paz. Te admiro mucho.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por acompañarme en este proceso de crecimiento personal y profesional.

A mi querida asesora, Mg. Flor Isabel Carrillo Lara, por su apoyo incondicional durante el desarrollo de toda la investigación, por confiar en mi trabajo, por su constante disposición de escucha y por las oportunas sugerencias que me permitieron ir afinando esta tesis.

A todos los docentes de la maestría por compartir sus conocimientos y sus valiosas experiencias profesionales. Un agradecimiento especial, a la Dra. Jesús Flores Salazar, a la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre y a la Dra. Carolina Reaño Paredes, por todas sus enseñanzas en cada uno de los cursos impartidos por ustedes y por sus aportes en la construcción de este estudio.

A mi querida familia, por su apoyo incondicional durante el transcurso de toda la maestría. En especial a mi tía Haydée, que me demuestra con su ejemplo que nunca se deja de aprender.

A mis amigos del equipo de Instrumentos-Difusión del Ministerio de Educación, Lucero, Aelyn, Elaine, Geraldo, Magaly, Flavia y Gabriela, por todo el soporte académico y emocional brindado en todo momento, y más aún, durante el desarrollo de la maestría.

A mis compañeros de la maestría, por todas las experiencias y conocimientos compartidos a lo largo de los cursos. De manera especial, a mis amigos Henry, Carlos, Percy, Ray y Cristian, por el apoyo y motivación constante.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

CONSIDERACIONES INICIALES

Desde los años ochenta, es interés de la Didáctica de las Matemáticas abordar los conocimientos del profesor de matemáticas. Muchos de estos estudios (Shullman, 1986; D'Amore, 2004; García, 2005; Llinares, 2008; Ball, Thames & Phelps, 2008; Godino, 2009; Carrillo, Climent & Muñoz-Catalán, 2012; entre otros) han coincidido en afirmar que existen dos dimensiones del conocimiento docente, una referida al conocimiento del contenido matemático, y otra, al conocimiento didáctico del contenido. Sobre el primer aspecto, el contenido o conocimiento matemático, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), sustenta que el significado o representación de un objeto matemático siempre estará asociado al sistema de prácticas que realiza o una persona (significado personal) o que se comparten en una institución (significado institucional) para resolver las situaciones-problemas vinculadas a un objeto matemático (Godino et al., 2007). En esta tesis, el objeto matemático de estudio son los números racionales, puesto que su enseñanza se da de manera ininterrumpida desde el tercer grado de educación primaria hasta el quinto año de educación secundaria de la Educación Básica Regular peruana. En definitiva, la enseñanza de este objeto matemático recae directamente sobre el profesor y los conocimientos que este posea sobre el contenido (Giné de Lera & Deulofeu, 2014; Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017). Por ello, es interés de esta tesis construir un significado de referencia (considerando el sistema educativo peruano) para los números racionales, el cual permita identificar el conocimiento que debería tener un profesor de matemáticas de educación secundaria sobre los números racionales.

En el sistema educativo peruano, la evaluación docente contribuye con la mejora de la educación pública mediante la realización de procesos de evaluación que permiten a) la selección de los docentes más idóneos para ingresar a la Carrera Pública Magisterial (CPM), b) la permanencia en ella de quienes tienen un buen desempeño en el ejercicio de sus funciones, c) el ascenso y el acceso a cargos en base al mérito, y d) la reflexión continua sobre la práctica docente (Ministerio de Educación, 2019d). En la tesis, se analizarán algunas preguntas de las pruebas de Matemática del Concurso Público de Ingreso a la Carrera Pública Magisterial en Instituciones Educativas Públicas de Educación (Concurso de Nombramiento) y del Concurso para el Ascenso de Escala en la Carrera Pública Magisterial (Concurso de Ascenso), que fueron aplicadas entre los años 2017 y 2019.

El presente trabajo se ha organizado en cuatro capítulos. En el primero, se presenta una revisión de investigaciones que abordan el conocimiento didáctico y matemático de un profesor; se justifica la pertinencia del presente trabajo; y se propone la pregunta y objetivos de la investigación, y el método seguido para llevarla a cabo. En el segundo capítulo, se exponen los elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, y las herramientas teóricas consideradas para el estudio. En el tercer capítulo, se describe y presenta el Significado de Referencia Institucional sobre los números racionales en la educación secundaria peruana. En el cuarto capítulo, finalmente, se realiza la valoración de las preguntas de las pruebas de los concursos de Nombramiento y Ascenso del Ministerio de Educación a partir del significado de referencia institucional construido.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo inicial, en primer lugar, se presentan investigaciones que han identificado aspectos que permiten comprender las dimensiones del conocimiento matemático y didáctico de un profesor, y otras que han caracterizado el conocimiento que debería tener un profesor con relación a los números racionales. En segundo lugar, se justifica el problema de investigación, y se explicita la pregunta y los objetivos. Finalmente, se describe la metodología y los procesos metodológicos seguidos para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Investigaciones de referencia sobre el conocimiento didáctico y matemático de un profesor

Las investigaciones de referencia han sido organizadas en dos grupos: i) las que abordan el conocimiento didáctico y matemático de un profesor, y ii) las que han descrito e identificado el conocimiento de un profesor en relación con los números racionales. A continuación, se describen cada una de ellas.

La formación de profesores es un campo de investigación científica y tecnológica de creciente interés cuyo objetivo es estudiar los efectos de los conocimientos del profesor sobre la calidad de los aprendizajes de los estudiantes. Varios investigadores coindicen en afirmar que el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes depende en gran medida de la formación didáctica de sus profesores de matemática en esta ciencia (Giné de Lera & Deulofeu, 2014; Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017).

> En las últimas décadas, la formación (…) de profesores de matemáticas, ha sido objeto de estudio para profesionales de diversos campos, entre ellos el de la didáctica de las matemáticas. Las perspectivas teóricas, así como las aportaciones para la consecución del objetivo global ([que es] proporcionar una formación completa y adecuada a futuros profesionales de la enseñanza de las matemáticas), toman distintas formas [pero se orientan hacia la obtención de dicho objetivo].
>
> (García, 2005, p. 153).

Diversos estudios sostienen que el profesor es considerado uno de los elementos del sistema educativo con mayor incidencia en el aprendizaje de los estudiantes (García, 2005; Sanz & Martín, 2014). Ello explica que sea sujeto de estudio de diferentes investigadores. A continuación, se presenta el trabajo de algunos autores en cuyos estudios se aborda la formación del profesor de Matemática.

García (2005) presenta dos modelos teóricos que profundizan en los procesos que subyacen al conocimiento requerido para ser un profesor competente. En primer lugar, explica el modelo para la formación de profesores de matemática de primaria propuesto por Goffree y Oonk en el año 1999, cuya base se sustenta en la 'Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas', desarrollada por Freudenthal en el año 1980. Este modelo afirma que, en el proceso de aprendizaje de los futuros profesores, actúan los procesos de matematización y didactización. Freudental (1991) definió matematizar como la actividad de organizar y estructurar la matemática a partir de la realidad o de la disciplina misma, y didactizar (tarea primordial de un profesor), como la actividad que permite organizar y reflexionar sobre los fenómenos de enseñanza y aprendizaje (fenómenos que surgen del entorno de sus estudiantes) y que facilitan la actividad de matematización (Freudenthal, 1991, pp. 30-45).

> La didactización se da tanto a nivel horizontal como vertical. En su forma horizontal, los docentes actúan, observan y se auto-observan en el aula explicando sus propias prácticas (y las de otros). A nivel vertical, reflexionan, elaboran y formalizan sus propias herramientas didácticas para facilitar el proceso de matematización de los estudiantes.
>
> (Gallegos & Pérez, 2013, pp. 18-19).

García (2005) menciona que, según Goffree y Oonk (1999), las constantes reflexiones del futuro profesor de matemática sobre los procesos de aprendizaje de sus estudiantes y de sus propias experiencias con las matemáticas le permiten establecer un conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas en el nivel primario. Asimismo, según este modelo, el futuro profesor se encuentra sumido en un proceso constante de actividades, tales como “resolución de problemas matemáticos, actividades de matematización, reflexión sobre la actividad desarrollada y sobre métodos de enseñanza” (p. 155). En resumen, en este modelo de formación de profesores, el análisis de la práctica docente y las reflexiones en torno a ella constituyen el mayor referente para la mejora de la enseñanza.

En segundo lugar, la autora menciona el modelo propuesto por Simon en el año 1994. Esta propuesta considera aspectos del constructivismo social y de la ‘Teoría de situaciones didácticas’ propuesto por Brousseau en el año 1986. Este modelo se configura por medio de seis ciclos recursivos en el que cada uno contiene al ciclo que lo antecede. Estos son “aprendiendo matemáticas (conformado por las actividades de exploración de situaciones matemáticas, identificación de conceptos y aplicación); desarrollando conocimiento sobre matemáticas; desarrollando teorías de aprendizaje matemático; comprendiendo el aprendizaje de los estudiantes; planificando la enseñanza; y enseñanza” (García, 2005, p. 156).

Según García (2005), este último modelo conecta diferentes dominios del conocimiento del profesor y sirve para planificar la enseñanza de un contenido. Esta planificación debe incluir las actividades que van a desarrollar los futuros profesores (considerando la aplicación de la teoría a la práctica de enseñar), y el objetivo principal: desarrollar en los futuros docentes los conocimientos y las destrezas necesarias para enseñar matemáticas.

La autora precisa que, considerando la participación del futuro profesor como elemento característico del aprendizaje, los modelos presentados pueden ser complementados. En ese sentido, se plantea la siguiente pregunta: "¿Cómo podemos caracterizar los procesos por los que un estudiante para profesor construye el conocimiento necesario para enseñar?" (García, 2005, p. 157). Al respecto, destaca tres principios importantes para analizar la formación de profesores:

i) *el carácter constructivo del conocimiento y las creencias:* en el aprendizaje, el conocimiento y las creencias cumplen un rol importante, y es mediante este proceso de aprender que el futuro profesor amplía o modifica sus estructuras mentales a partir de las nuevas experiencias;

ii) *el carácter social de la cognición:* el conocimiento se da mediante la interacción de personas; y

iii) *el carácter situado de la cognición:* este principio resalta la importancia del uso de diversos contextos en la generación del conocimiento y de las actividades en las que se desarrolla el aprendizaje (García, 2005).

En general, la autora afirma que son los programas de formación inicial de docentes de matemática los que deben favorecer que estos futuros profesores participen de forma progresiva y diversa de espacios o tareas que caracterizan la práctica de enseñar matemáticas. Esto permitirá una mejoría y ampliación al respecto de su comprensión de las nociones y representaciones matemáticas.

Por otro lado, la investigación de Llinares (2008) explica que la formación de profesores debería permitirles a estos estar preparados para ejecutar 'algo' de manera competente y adquirir destrezas para seguir aprendiendo continuamente. En este sentido, se cuestiona sobre los conocimientos y destrezas que debería tener un profesor de matemática y cómo es que lo adquieren. Al respecto, menciona que, para responder estas cuestiones, es necesario considerar tres aspectos: i) la actividad en la que se desea que una persona llegue a ser competente (la enseñanza de matemática), ii) el conocimiento que sustenta dicha actividad y las competencias necesarias para realizarla, y iii) la forma en la que se genera el conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

Considerando estos aspectos, el autor señala que, para poder identificar el conocimiento y las competencias necesarias para enseñar matemáticas, es importante analizar el sistema de actividades que articulan la enseñanza de las matemáticas ((Llinares, 2008, p.2). Presenta tres sistemas y los componentes del conocimiento profesional que implican su realización:

i) *"analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones matemáticas de sus alumnos y compararlas con los objetivos esperados*, proceso que se sustenta en el uso de los conocimientos de un profesor sobre la forma en la que sus estudiantes aprenden ciertas nociones matemáticas;

ii) *planificar y organizar el contenido matemático para enseñarlo [y] determinar planes de acción,* proceso que se sustenta en la capacidad del profesor para utilizar conocimientos conceptuales característicos de la Didáctica de la Matemática (situaciones didácticas, transposición didáctica, etc.); y

iii) *dotar de sentido y gestionar la comunicación matemática en el aula";* proceso que implica valorar la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático en diferentes contextos (Llinares, 2008, p. 2-3).

A partir de los sistemas de actividades identificados, Llinares (2008) menciona que los conocimientos sobre los que se deberían fundamentar las competencias específicas de cada sistema son los conocimientos de Didáctica de la Matemática, y que el desarrollo de las competencias debería vincularse con los descriptores 'conocer' y 'usar' en cada uno de los sistemas de actividades.

La tabla 1, a continuación, muestra algunos ejemplos de estos descriptores asociados a los sistemas de actividades vinculados con la enseñanza de las matemáticas.

Tabla 1
Descriptores asociados a la práctica de enseñar matemática

Sistema de actividad	**Descriptor**
Organizar el contenido matemático a enseñar	• **Conocer** los contenidos matemáticos como objeto de enseñanza y aprendizaje • **Usar** el conocimiento (matemático y didáctico) de los contenidos matemáticos para diseñar y seleccionar actividades, ejercicios y problemas, y analizarlos como instrumentos de aprendizaje en la enseñanza del nivel secundaria • **Usar** el conocimiento (matemático y didáctico) de los contenidos matemáticos para diseñar y analizar unidades didácticas • **Usar** el conocimiento de la didáctica de la matemática para evaluar las propuestas y organizaciones curriculares en torno a las matemáticas
Analizar e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes	• **Conocer** la didáctica de la matemática • **Conocer** las características del aprendizaje de las nociones, conceptos y procedimientos matemáticos del nivel secundaria • **Usar** el conocimiento sobre las características del aprendizaje para interpretar las producciones de los estudiantes

Sistema de actividad	Descriptor
	• **Usar** los conocimientos sobre el aprendizaje de la matemática para diagnosticar y dar significado a las producciones de los estudiantes (identificar posibles causas y plantear acciones)
Gestionar el contenido matemático en el aula	• **Conocer e identificar** las fases o momentos de los diversos tipos de sesiones de matemáticas • **Conocer e identificar** las interacciones que pueden surgir en el aula con relación al aprendizaje de las matemáticas • **Conocer, identificar e interpretar** las características del discurso matemático en el aula y su relación con el aprendizaje • **Conocer, identificar e interpretar** las características de los debates, de las preguntas y repreguntas, y de las situaciones matemáticamente desafiantes, como instrumentos poderosos para el aprendizaje de las matemáticas.

Nota: Adaptado de "Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. *Aprendizaje del estudiantes para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación*", por S. Llinares, 2008, Bogotá*,* pp. 4-6.

En la tabla, Llinares (2008) asocia el conocimiento y las competencias de un profesor de matemática con acciones relacionadas al conocimiento profundo de los contenidos matemáticos y la enseñanza de estos. Asimismo, resalta cómo el dominio de los objetos matemáticos permite el diseño de situaciones cognitivamente demandantes acordes con el nivel de enseñanza. Finalmente, destaca el dominio de la didáctica de la matemática y la construcción del conocimiento matemático como fundamentales para analizar, diagnosticar e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes para, a partir de ello, implementar las acciones necesarias.

En esa misma línea, D'Amore (2004) afirma que un profesor de matemáticas no es el encargado de crear ni teorías ni teoremas, sino que es un profesional, experto en Matemática, encargado de lograr que los jóvenes desarrollen y aprendan a utilizar competencias matemáticas. En ese sentido, el autor expresa que es necesario e importante que los futuros profesores de Matemática del nivel secundaria se preparen ‘culturalmente en Epistemología de la Matemática’, es decir, en conocer el sentido y significado que la Matemática tiene al interior de sí misma.

D'Amore (2004) considera que el conocer la Matemática es el punto de partida en la formación de un profesor de matemática y vincula a la labor estas dos acciones:

i) *Efectuar una transposición didáctica*: se refiere a que el profesor no puede repetir la Matemática que aprendió en su formación académica (saber académico), sino que debe transformarla en un saber que sea adecuado para sus estudiantes (saber a enseñar), y
ii) *Comunicar la Matemática*: difícilmente, el estudiante tiene relación directa con el Saber; por ello, su aprendizaje está dado por su relación con el profesor y el aprendizaje que él elige como Saber a enseñar. Así, el paso de la Matemática que enseña el profesor al estudiante se lleva a cabo en un proceso de comunicación que debe ser comprensible (D'Amore, 2004).

Tomando como base estas dos tareas, el autor sostiene que el profesor no puede “ignorar el sentido que tiene el desarrollo de la Matemática” (D'Amore, 2004, p. 416). Es decir, no se puede negar que la formación en Epistemología de la Matemática implica consecuencias en el campo didáctico, meta-matemático y en otros factores transversales a la enseñanza.

Sobre el campo didáctico, el autor plantea una terna de contenidos que se deben dominar para la enseñanza de la matemática: “los contenidos de la disciplina, los contenidos de la Didáctica de aquella disciplina, y los contenidos de la Didáctica general” (D'Amore, 2004). Sobre el campo meta-matemático, menciona que estos hacen referencia a las definiciones y demostraciones. Afirma que la epistemología enseña que, tanto en las definiciones como en las demostraciones debe existir libertad. Es decir, el profesor debe favorecer el abordaje de estos dos términos y los estudiantes deben ser los encargados de usarlos y aplicarlos.

Con relación a los factores transversales, D'Amore (2004) se pregunta lo siguiente: ¿cómo está hecho el lenguaje de la Matemática?, ¿cómo se aprende la Matemática?, y ¿cuáles son las relaciones entre semiótica y noética? (p. 421). Para la primera pregunta, el autor explicita que restringirse a la idea de que el lenguaje usado en Matemática es unívoco y determinado a priori por la comunidad científica solo limita a que el estudiante haga un uso 'ciego', 'a-crítico', 'vacío' y 'estéril' del lenguaje matemático. Sobre la segunda pregunta, expresa que el aprendizaje de la matemática no solo es un problema que se aborda a nivel psicológico, pedagógico o didáctico, sino también a nivel epistemológico. Finalmente, para responder la tercera pregunta, el autor menciona que no es discutible que el aprendizaje matemático esté vinculado a la noética y al uso de representaciones de registros semióticos; sin embargo, aún no se asimila con profundidad la idea de que un estudiante construye conocimiento (conceptos) mediante representaciones semióticas. Por ello, mientras el profesor trabaja sobre los conceptos, el estudiante trabaja sobre las representaciones semióticas. Esta separación entre cómo se enseña y cómo se aprende puede producir el fracaso en los estudiantes (D'Amore, 2004, p. 422).

En conclusión, de este primer grupo de investigaciones, se resalta la importancia de caracterizar los conocimientos pedagógicos y disciplinares necesarios con los que debería contar un profesor para una óptima enseñanza de la matemática, y la necesidad de evaluar los programas de formación inicial docente en Matemática con la finalidad de poner mayor énfasis en la profundización de la Matemática misma. A continuación, se presentan algunas investigaciones que han identificado los conocimientos didácticos y de contenido con los que debería contar un profesor de matemática sobre los números racionales.

1.2. Investigaciones de referencia sobre el conocimiento didáctico y matemático de un profesor en relación con los números racionales

Diversos estudios han identificado cuáles son los conocimientos didácticos y matemáticos con los que debería contar un profesor relacionados a los números racionales. Este interés probablemente ha surgido porque "la presencia de los números racionales en el currículum de Matemáticas es una constante que podemos detectar, ininterrumpidamente, en la historia de la enseñanza de las matemáticas" (Gairín, 1998, p. 42).

La investigación realizada por Rojas, Flores y Carrillo (2013) caracteriza y analiza el conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales usando el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008). Este modelo (MKT) plantea dos dominios de conocimiento: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido. El primer dominio considera el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del horizonte matemático. El segundo dominio considera el conocimiento del contenido y de los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del currículo.

En el desarrollo del estudio, los autores utilizaron el 'análisis didáctico', implementado por Rico (1997), el cual se constituye como una herramienta de investigación específica de la Didáctica de la matemática que permite "(…) fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar (…)" (Rico, 2013, p. 19).

Rojas et al. (2013) recogieron información sobre el objeto matemático utilizando ocho herramientas del método de análisis didáctico: "análisis conceptual, análisis fenomenológico, sistemas de representación, expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje, oportunidades de aprendizaje, tareas y secuencias de tareas, y materiales y recursos" (Rojas, Flores & Carrillo, 2013, p. 52).

Como producto de este análisis y su vinculación con los dominios del modelo MKT, los autores elaboraron categorías de análisis e indicadores que les permitieron identificar el conocimiento del profesor de matemáticas al enseñar los números racionales. Las categorías e indicadores se establecieron a priori y sirvieron para analizar la información recopilada de la observación de 21 episodios de clase de un profesor de matemáticas experto de Educación Primaria que enseñaba el contenido 'números racionales' a estudiantes de 11 y 12 años.

En la tabla 2, se presentan el desarrollo de algunas de las categorías de análisis e indicadores que plantearon los investigadores. Se han seleccionado aquellas que se relacionan con el dominio del conocimiento del contenido.

Tabla 2

Categorías de análisis del conocimiento de los números racionales

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO
Análisis conceptual
- Conocimiento de los conceptos y las relaciones existentes entre los componentes de la estructura conceptual de los números racionales (cuerpo conmutativo con las propiedades de adición y multiplicación, como cociente de los $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, relaciones de equivalencia y orden de $\mathbb{Q}$, existencia de neutros e inversos, etc.)
Análisis fenomenológico
- Conocimiento de las situaciones y contextos en las que están presenten los distintos significados de las fracciones:

- Situaciones que involucran a las fracciones como medida
- Situaciones que involucren las acciones de dividir, partir y repartir
- Situaciones donde la unidad de medida no está contenida en un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o expresar una magnitud

- Conocimiento del sentido y significado de los algoritmos.
- Conocimiento de las diversas situaciones y contextos en las que se pueden plantear las tareas:
  - Situaciones que usan magnitudes (media hora, tres cuartos de kilo, etc.)
  - Situaciones que evidencien relaciones concretas entre cantidades (escalas, cartografía; tanto por ciento, comercio, descuentos, construcción, etc.)
- Conocimiento del sentido que las situaciones aportan al contenido matemático escolar.

Sistemas de representación

- Conocimiento explícito de la diversidad de sistemas de representación para los racionales
  - *Representación verbal o literal:* p. ej. mitad, un medio, medio, uno de dos, media parte.
  - *Representación simbólica:* p. ej. como división indicada $\left(\frac{1}{2}\right)$, como par ordenado (1,2), como razón (1:2 o 1 es a 2), como porcentaje (50%), como decimal (0,5), etc.
  - *Representación gráfica:* p. ej. recta numérica (como subconjunto de los $\mathbb{R}$), plano cartesiano (correspondencia biunívoca: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\{0\}$) y representación de las clases de equivalencia de pares de enteros.
  - *Representación figural:* p. ej. una unidad (rectángulo, cuadrado, etc.) dividida en partes iguales, donde cada parte representa una cantidad.
  - *Representación material o concreta:* p. ej. regletas de Cuisenaire, cantidad como longitud, área o volumen, reglas de colores, tangram, etc.)
- Conocimiento de las relaciones que se dan entre los tipos de representación
- Conocimiento amplio y preciso del lenguaje formal y algebraico según el nivel de enseñanza

Limitaciones de aprendizaje

- Conocimiento de las dificultades y errores más frecuentes de los estudiantes en el aprendizaje de los racionales.
- Dominio de los conocimientos matemáticos que están detrás de los errores más frecuentes de los estudiantes como: amplitud de la validez de los algoritmos y los procedimientos no convencionales que utilizan. P. ej. al sumar o restar fracciones con distintos denominadores, el estudiante puede sumar o restar los numeradores y los denominadores entre sí. El profesor debe distinguir que el estudiante ha transferido las propiedades de los números naturales para realizar las operaciones con los racionales.

Nota: Adaptado de "Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales", por N. Rojas, P. Flores & J. Carrillo, 2013, España: *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática,* pp. 47-64.

En esa misma línea, se desarrolló la tesis doctoral de Rojas (2014). La investigación tuvo por objetivo comprender el conocimiento especializado de dos profesores de matemática, uno de Educación Primaria y otro de Educación Secundaria, que enseñaban el contenido de los números racionales a estudiantes de 6° grado de primaria y 1° de secundaria respectivamente. El modelo teórico que orientó el trabajo fue el del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (*Mathematical Teacher's Specialised Knowledge* - MTSK), propuesto por Carrillo, Climent y Muñoz-Catalán (2012).

Para lograr el objetivo propuesto, la autora estableció una relación teórica entre la herramienta del análisis didáctico (Rico, 1997) y, los dominios y subdominios del MTSK. Los dominios del modelo son dos: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido. A su vez, los subdominios están conformados por el conocimiento del tema, el conocimiento de la estructura de las matemáticas, el conocimiento de la práctica matemática, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, y el conocimiento de los estándares de aprendizaje (Rojas, 2014, pp. 61-62).

Como producto de dicho análisis, la autora elaboró diecinueve categorías con sus respectivos indicadores de conocimiento (alrededor de sesenta), en relación con los números racionales, para cada subdominio. Estos indicadores se establecieron a priori y se convirtieron en una herramienta conceptual y operacional importante para el posterior análisis e interpretación de la información recogida.

A continuación, en las tablas 3, 4 y 5, se muestran algunos de los indicadores de conocimiento planteados por la autora para el dominio *conocimiento del contenido matemático* y que complementan lo presentado por la investigación de Rojas et al (2013).

La tabla 3 presenta los indicadores asociados al conocimiento de los números racionales. Estos indicadores describen el conocimiento que debería tener un profesor sobre los conceptos y procedimientos en torno a $\mathbb{Q}$; de los significados, contextos y usos del número racional; de las formas de representación de los números racionales y de las tareas que favorecen la exploración, investigación, el razonamiento, la comprensión del sentido de las matemáticas, etc. (Rojas, 2014, pp. 81-83).

Tabla 3

Indicadores asociados al conocimiento de los números racionales

Conceptos
- Conocer los elementos de la estructura conceptual de $\mathbb{Q}$. Es decir, dominar los diversos conceptos asociados a $\mathbb{Q}$: cuerpo conmutativo con las propiedades de adición y multiplicación, conjunto que tiene una representación decimal finita o periódica, conjunto definido como cociente de los $\mathbb{Z}$. - Conocer las características, propiedades y relaciones definidas para los racionales: $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, relaciones de equivalencia y orden de $\mathbb{Q}$, existencia de neutros e inversos, entre otros. - Conocer los diversos contenidos, temas, conceptos y procedimientos matemáticos asociados a los números racionales, como probabilidad, razones trigonométricas, semejanza de figuras, entre otras. - Conocer la evolución histórica de los números racionales.
Fenomenología
- Conocer los distintos significados asociados al concepto de fracción: parte-todo, reparto, medida, cociente, operador y razón. - Conocer las diversas estructuras de problemas asociados a las operaciones con los racionales: problemas aditivos de cambio, combinación y comparación, y problemas multiplicativos de proporcionalidad, fracción de fracción, producto de medidas y áreas. - Conocer la utilidad de los racionales en ámbitos específicos relacionados con el pensamiento multiplicativo inverso y la proporcionalidad. P. ej., si el docente hace referencia a la noción de los números racionales como razón, fomenta el pensamiento proporcional, destaca momentos de la génesis de las matemáticas.

Procedimientos matemáticos
- Dominar los algoritmos de las operaciones y los procedimientos usados para resolver situaciones y problemas asociados a los números racionales. P. ej.: • Para dividir fracciones, el profesor debería conocer el algoritmo de los productos cruzados: invertir y multiplicar, o bien el de invertir los numeradores una vez reducidas ambas fracciones a denominador común • Para la equivalencia de fracciones, el profesor debería conocer el método de los productos cruzados (multiplicar o dividir numerador y denominador), entre otros. - Dominar los conceptos y procedimientos asociados con las fracciones, como simplificación y amplificación de fracciones, operaciones con fracciones, fracciones equivalentes, comparación de fracciones, números decimales, entre otros.
Sistemas de representación
- Conocer los diferentes sistemas de representación asociados con los números racionales: verbal o literal, numérico, gráfico, figural y material o concreta. El profesor debería saber que estos tipos de representaciones permiten abordar las cantidades como longitud y área, y posteriormente permiten representar las fracciones como clases de equivalencia de pares. Este conocimiento, también permite la comprensión de que todo número con representación decimal finita o periódica puede representarse como un número racional (cociente entre dos enteros).
Aspectos de comunicación
- Dominar la amplitud y precisión del lenguaje formal-algebraico que se utiliza en la enseñanza de los números racionales (el cual debe adecuarse al nivel de enseñanza). - Conocer las expresiones cotidianas asociadas a las nociones de reparto equitativo o medición - Conocer el lenguaje utilizado en la vida cotidiana (lenguaje natural): mitad, parte, partir, repartir, dividir, media hora, entre otros.
Tareas matemáticas
- Conocer la variedad de tareas o situaciones que muestran los diversos significados de las fracciones como objeto matemático, enmarcadas en un contexto significativo. P. ej. situaciones que impliquen dividir, partir y repartir (fracción como medida, reparto, parte-todo), situaciones en las que la unidad de medida no está contenida en un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o expresar una magnitud - Conocer y crear ejemplos donde los números racionales estén enmarcados en un contexto y un contenido matemático - Conocer en qué medida las situaciones o tareas dan sentido al aprendizaje de los números racionales; p.ej., saber cómo justificar el algoritmo de los productos cruzados para la división de fracciones ayuda a la comprensión de estos

Nota: Tomado de “Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos”, por N. Rojas, 2014, España: *Doctoral dissertation,* pp. 83-85.

En la tabla 4, se muestran los indicadores vinculados al conocimiento de la estructura de los números racionales. Estos indicadores hacen referencia al conocimiento que debería tener un profesor sobre la estructura conceptual de $\mathbb{Q}$, por ejemplo, el análisis del rol que cumple la estructura multiplicativa de los racionales en la construcción y razón de ser de $\mathbb{Q}$, así como a la conexión que existe entre los elementos de la estructura conceptual de $\mathbb{Q}$ y las relaciones entre ellos. Finalmente, los indicadores también describen el conocimiento sobre conceptos y procedimientos asociados a $\mathbb{Q}$, tales como la proporcionalidad, la probabilidad, etc. (Rojas, 2014, p. 86).

Tabla 4

Indicadores asociados al conocimiento de la estructura de los números racionales

Relaciones entre componentes de la estructura conceptual
- Conocer las relaciones que existen entre los contenidos matemáticos del nivel escolar que enseña y los niveles escolares anteriores y posteriores. P. ej. conocer la correspondencia entre las fracciones, los decimales y los porcentajes, relacionar las fracciones con la razón y proporción para poder identificar magnitudes proporcionales o porcentajes y así, posteriormente establecer composiciones o variaciones. - Conocer las relaciones o conexiones entre los elementos de la estructura conceptual de $\mathbb{Q}$. P. ej. saber explicar con claridad cómo estas conexiones se traducen en las variedad de significados de la fracción, entre otros.

Nota: Tomado de "Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos", por N. Rojas, 2014, España: *Doctoral dissertation,* p. 86.

La tabla 5 contiene los indicadores asociados al conocimiento de las prácticas matemáticas. En relación con los números racionales, implica que el profesor conozca "la forma en que se ha construido $\mathbb{Q}$ a partir de la relación de equivalencia, así como, los isomorfismos que permiten identificar las fracciones con divisiones, el papel que juegan los algoritmos, en relación con las definiciones formales de las operaciones con los racionales, etc." (Rojas, 2014, p. 87).

Tabla 5

Indicadores asociados al conocimiento de las prácticas matemáticas

Modos de proceder en matemáticas
- Conocer y utilizar las distintas formas de proceder en matemática (usar argumentaciones lógicas, definiciones, axiomas, demostraciones, ejemplos y contraejemplos, entre otros) para profundizar en el aprendizaje de los números racionales. - Identificar el papel que juegan los algoritmos de equivalencia, orden y operaciones en la construcción de los números racionales.

Nota: Tomado de "Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos", por N. Rojas, 2014, España: *Doctoral dissertation,* p. 87.

Rojas (2014), también elaboró indicadores relacionados con el dominio *conocimiento didáctico del contenido*. Estos se agruparon de acuerdo a si hacían referencia al conocimiento de i) las características del aprendizaje de los números racionales, ii) la enseñanza de los números racionales o iii) de los estándares de aprendizajes.

El primer grupo de indicadores se refería al conocimiento que debe tener un profesor sobre los conflictos, errores o dificultades que los estudiantes pudieran presentar en el aprendizaje de los racionales. Además, describían la capacidad del profesor para generar tareas que permitan reforzar los conceptos o procedimientos matemáticos, y para adaptar actividades según el propósito de aprendizaje.

El segundo grupo de indicadores abordaba el conocimiento que debe tener un profesor de las estrategias, tanto matemáticas como didácticas, para abordar los errores y/o dificultades que pudieran presentar los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales. Estas estrategias consideran tanto las explicaciones y argumentos del profesor, como la selección adecuada de los sistemas de representación, las tareas, los materiales y los recursos didácticos.

Finalmente, el tercer grupo de indicadores propuesto por Rojas (2014) describía el conocimiento que debe tener un profesor sobre cómo se aborda el estudio de los números racionales en los documentos oficiales (el currículo nacional, programaciones curriculares y/o algún documento de otros países), así como saber justificar las adaptaciones que se realicen de las tareas a la luz de las orientaciones curriculares (estándares, PISA, etc.) en educación matemática.

La autora aplica las categorías del conocimiento y sus respectivos indicadores para analizar los episodios de las 21 sesiones de clase del profesor de primaria y las 12 sesiones del profesor de secundaria en las que se abordó el tema de los números racionales. Esto se llevó a cabo con la finalidad de identificar componentes del conocimiento matemático especializado en las acciones de ambos profesores.

Este trabajo de investigación representa un insumo importante para la construcción del significado de referencia institucional sobre los números racionales; en específico, los indicadores de conocimiento pertenecientes al dominio de 'conocimiento del contenido matemático' (tablas 3, 4 y 5), porque describen aspectos que deben considerarse en la enseñanza de los números racionales (que pueden traducirse en situaciones-problemas) y, por tanto, deben ser dominados por los profesores de Matemática.

Por otro lado, se ha revisado la investigación de Gairín (2004), en la cual se identificaron las dificultades de un grupo de futuros maestros de Matemática en relación con la comprensión de los números racionales. Para lograr dicho objetivo, en primer lugar, encuestó a 47 futuros profesores para conocer sus concepciones en relación con i) los significados de las fracciones y expresiones decimales, ii) el significado de las relaciones de orden, iii) el significado de la densidad con relación al orden, y iv) las conexiones entre la representación fraccionaria y la representación decimal. En segundo lugar, Gairín (2004), caracterizó a los estudiantes a partir del análisis de sus respuestas (respuestas recurrentes de la mayoría), e identificó cinco características principales:

a) Usan predominantemente el significado de la fracción como parte-todo y su asociación con un modelo físico (p. ej. la parte de una torta).
b) Asocian una notación decimal con un significado numérico, mas no lo relacionan con cantidades de magnitud. Además, no vinculan la expresión decimal con algún modelo físico.
c) Relacionan una notación fraccionaria con una decimal mediante un proceso algorítmico (p. ej. división del numerador entre denominador).
d) Utilizan técnicas de cálculo para establecer relaciones de orden entre fracciones y no hacen uso de modelos (u otros recursos) para su justificación.
e) No admiten la densidad, en torno al orden, en los racionales, porque trasladan la topología de los naturales a $\mathbb{Q}$.

El autor vincula estas dificultades a ocho fenómenos que están relacionados con la comprensión de los números racionales (Gairín, 2004, pp. 240-244):

1. El significado de la fracción es un conocimiento inestable: el significado de fracción como parte-todo es insuficiente para comprender diversas situaciones; por ello, se hace necesario profundizar en los otros significados de la fracción.
2. Las ideas están fuertemente influenciadas por la percepción visual: un razonamiento asociado solo a la percepción visual limita la resolución de algunas tareas; por lo tanto, se deben conocer las técnicas y la razón de ser de estas.
3. Se tiende a sustituir los conceptos por alguna de las técnicas asociadas: el conocimiento matemático considera tanto el manejo de los conceptos como el de los procedimientos

(técnicas) asociados a un objeto matemático; en ese sentido, no se debe suplir un concepto por la técnica asociada a este.

4. Los conocimientos de los estudiantes sobre los números racionales suelen estar limitados al uso de reglas: todo proceso de cálculo debe contar con una justificación conceptual; de no ser así, estaríamos ante una 'receta'. Por ello, es importante conocer los conceptos asociados a los números racionales y los fundamentos que sustentan las diversas técnicas.
5. La descontextualización de la medida obstaculiza la resolución de problemas: muchos problemas se modelan con los números racionales. Estos problemas suelen estar asociados al campo de las magnitudes medibles; en ese sentido, es importante que la magnitud y la unidad de medida sean fundamentales para así lograr la modelización deseada.
6. El orden entre expresiones decimales está fuertemente influenciado por el orden entre números naturales: cuando se trata de expresiones decimales con un número finito de cifras, suele no haber dificultades; sin embargo, es necesario trabajar el orden de expresiones decimales periódicas, pues ello contribuye con que los estudiantes admitan la densidad en $\mathbb{Q}$.
7. En el cálculo con números periódicos, se crean algoritmos a partir de lo que conocen de los números naturales y de los números decimales: algunos de los algoritmos de cálculos erróneos con números decimales periódicos puros y mixtos son los siguientes: i) sumar dos números periódicos y colocar de periodo tantas cifras como las del sumando con más cifras tenga; ii) multiplicar dos números periódicos, y al producto colocarle de periodo tantas cifras como la suma de las cifras de los periodos resulte; y iii) usar el algoritmo de la división ampliando la cantidad de cifras del periodo hasta que aparezca un cero en el residuo, lo que resulta como cociente un número decimal exacto.

8. Los números periódicos dificultan la formulación de situaciones problemáticas coherentes: es necesario fomentar la creación de problemas en torno a situaciones que exijan pensar en las expresiones decimales periódicas como cantidades de magnitudes. Estas situaciones deben ser coherentes y corresponder con las características de las magnitudes (Gairín, 2004, pp. 240-244).

A partir de estas reflexiones, Gairín (2004) presenta una guía para el diseño de tareas que permitan mejorar la comprensión de los números racionales. La guía hace referencia a tipos de situaciones o tareas que no deberían dejar de abordarse cuando se trabaja con los números racionales. En la tabla 6, se presentan estas tareas, sus características y finalidad.

Tabla 6

Tareas que favorecen la comprensión de los números racionales

Tarea o situación	**Características**	**Descripción**
Tareas que usen modelos[1] de medida (contextos de medida)	Los modelos de medida a usar deben considerar lo siguiente: • *Magnitudes medibles*: p.ej. longitud, superficie y cardinalidad • *Objetos en los que resulta perceptible una cantidad de magnitud*: p.ej. listones de madera, tiras de papel, cubos ensamblados, etc. • *Acción para realizar*: medir cantidades de magnitudes en diversas situaciones • *Técnica*: medir en una sola fase (Fig. 1), medir en varias fases o medir por conmensuración	Este tipo de tareas cumple con las siguientes características: • Centra la enseñanza del número racional en la medida de cantidades de magnitudes que no contienen un número entero de veces la unidad de medida (la nueva unidad es un submúltiplo de la unidad inicial) • En este tipo de tareas, la fracción *m/n* es la expresión del número *m* de subunidades (de tamaño *1/n* de unidad), es la cantidad de magnitud medida

[1] El autor utiliza el término ‘modelo’ para designar un entorno físico con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior y que permite las acciones de los sujetos (Gairín, 2004, p. 244).

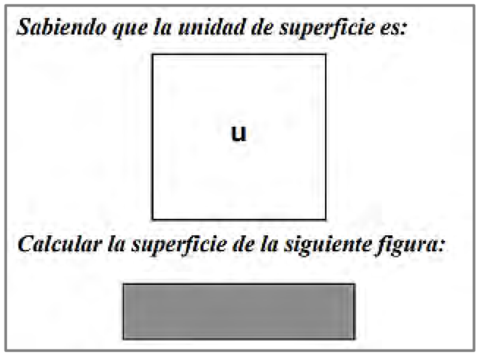
<table>
<tr><th>Tarea o situación</th><th>Características</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td></td><td>

Figura 1. Medir en una sola fase
(Escolano & Gairín, 2005, p. 20)</td><td>• Refuerza la idea de ‘número’ para el número racional que suele estar privilegiada solo al número natural.</td></tr>
<tr><td>Tareas que usen modelos de cociente</td><td>Los modelos de cociente se basan en el significado de fracción como ‘cociente partitivo’. Gairín (2004) sugiere que los modelos consideren lo siguiente:
• *Uso de objetos habituales*: p.ej. tortillas de igual superficie, circulares y de igual radio
• *Magnitud*: la superficie (la igualdad de cantidad de superficie repartida se comprueba de la igualdad de los ángulos de los sectores)
• *Acción para realizar*: repartir una cantidad inicial en un número entero de partes de igual superficie.
• *Técnica*: medir en una sola fase</td><td>Este tipo de tareas cumple con las siguientes características:
• La fracción representa la medida de la cantidad de magnitud que resulta luego de que una cantidad inicial de magnitud se reparte en varias cantidades iguales
• En este tipo de tareas, la fracción *m/n* representa la cantidad (formada por *m* subunidades de tamaño *1/n*) de magnitud en cada una de las *n* partes entre los que se reparte *m* unidades de magnitud.
• Permite establecer conexiones entre la representación decimal y la fraccionaria (fraccionamiento en 10 partes iguales)</td></tr>
<tr><td>Tareas que usen modelos de razón entre cantidades de magnitud</td><td>Estas actividades o situaciones consisten en disponer de la medida de dos cantidades de magnitud y establecer relaciones entre ellas.</td><td>Este tipo de tareas permite asociar el número racional con el concepto de proporcionalidad</td></tr>
</table>

Tarea o situación	Características	Descripción
Tareas sobre densidad en $\mathbb{Q}$ respecto del orden	• Estas tareas se pueden proponer desde el significado de fracción como cociente. Por ejemplo, se puede proponer lo siguiente: Justificar que si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a}{b} > \frac{\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}}{2} > \frac{c}{d}$ *Figura 2.* Densidad desde una situación de reparto (Escolano & Gairín, 2005, p. 20) En esta tarea, desde la idea de reparto, se puede identificar lo siguiente: - Los términos extremos (a/b y c/d) representan cantidad distintas correspondiente a ‘dos personas’ que han participado en repartos distintos. - El término central indica que estas ‘dos personas’ se han vuelto a juntar y se han repartido en cantidades iguales las cantidades que tenían anteriormente. • Desde un sentido numérico, estas tareas se caracterizan porque favorecen la comprensión de número racional como ‘número’ que no permite el recuento.	“Razonar sobre la existencia de infinitas fracciones comprendidas entre otras dos posibilita el sentido de la densidad respecto del orden, que es una idea esencial para la comprensión de la estructura topológica del conjunto de los números racionales.” (Gairín, 2004, p. 250).
Tareas sobre equivalencia de fracciones	Actividades o situaciones en la que se tenga que verificar la igualdad de dos cantidades de magnitud expresadas de diferentes formas	La equivalencia de fracciones es fundamental en la relación de orden, en el desarrollo de los algoritmos para sumar y restas fracciones heterogéneas, hasta la construcción del número

Tarea o situación	Características	Descripción
		racional como clases de equivalencia de fracciones.
Tareas de suma y resta de fracciones positivas	Actividades o situaciones en las que el algoritmo encuentre sentido en la necesidad de 'medir' la adición o separación de cantidades respecto de una misma magnitud.	Es requisito previo la comprensión de la equivalencia de fracciones.
Tareas de multiplicación de fracciones	Estas actividades o situaciones se deben plantear desde dos perspectivas: la de operador y la de producto de cantidades de magnitud. • *Como operador*, se presentan dos casos: cuando el operador es un número natural (la multiplicación asume el significado de suma repetida de cantidades de magnitud), y cuando el operador es una fracción (la multiplicación se asume como la parte de una parte de cantidad de magnitud). • *Como producto de dos cantidades de magnitud*, se debe analizar a las magnitudes que intervienen y la resultante (que a veces es una de las magnitudes intervinientes y otras donde es distinta). Por ejemplo, del producto de dos longitudes se obtiene la superficie.	La construcción del algoritmo para multiplicar se puede realizar considerando las dos perspectivas. Además, Gairín (2004) recomienda el uso de representaciones gráficas para la construcción.
Tareas de división de fracciones	Estas actividades o situaciones se deben plantear desde dos perspectivas: la de operador inverso, y la de cantidad de magnitud, que, al ser multiplicada por otra cantidad, produce una nueva cantidad de magnitud.	La construcción del sentido de la división de fracciones se debe realizar desde la noción de multiplicación.

Nota: Adaptado de "Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos", por J. Gairín, 2004, España: *Contextos educativos,* pp. 244-255.

El trabajo de Gairín (2004) brinda a la presente investigación una guía importante para la identificación de situaciones-problemas sobre los números racionales que no se pueden dejar de abordar en el estudio y comprensión de este objeto matemático. Queda claro, a partir del análisis del autor, que es primordial considerar el origen del número racional, el cual no radica en su significado de parte-todo, sino en la necesidad de 'medir' o 'comparar' cantidades de magnitudes.

Fandiño (2009) presenta en su libro 'Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos' un panorama amplio de las fracciones, desde una perspectiva histórica, epistemológica y didáctica. Es decir, profundiza en la historia de las fracciones, en los diversos significados que se asocian a ella en los obstáculos y dificultades de su aprendizaje, y en las acciones didácticas que pueden ayudar a superarlas.

En relación con las diferentes formas de entender e interpretar el concepto de fracción, la autora menciona la existencia de varias acepciones para este término. En el texto, se presentan once significados que la fracción asume en matemática, y en el proceso de enseñanza y aprendizaje: "la fracción como parte de una unidad-todo (a veces continua y a veces discreta), la fracción como cociente, la fracción como relación, la fracción como operador, la fracción en probabilidad, la fracción en los puntajes, la fracción como número racional, la fracción como punto de una recta orientada, la fracción como medida, la fracción como indicador de cantidad de elección, y la fracción como porcentaje" (Fandiño, 2009, pp. 102-120).

Cuando la autora hace referencia al significado de la fracción como número racional, lo define como la clase de equivalencia que se forma por todos y solo aquellas infinitas parejas ordenadas de números (a; b), donde $a, b \in \mathbb{N} - \{0\}$, p. ej. la clase (1; 2) o $b = 2 \times a$. Además, presta especial atención a la equivalencia de fracciones, adición de fracciones, entre otros. Esto se debe a que no es lo mismo operar entre fracciones que operar entre racionales. La autora sostiene que muchas veces la forma fraccionaria no es útil para representar un número racional ni gestionar la teoría; sin embargo, a veces facilita la gestión de algunas operaciones: “En las fracciones surgen mil problemas conceptuales constituidos por objetos de saber que no existen en $\mathbb{Q}^a$, como es el caso de las fracciones impropias; su presencia es pesada y compleja, llena de dificultades cognitivas, mientras que en los racionales este caso ni siquiera existe” (Fandiño, 2009, p. 79).

Al respecto de las dificultades y/o errores típicos asociadas al aprendizaje de las fracciones y números racionales, Fandiño (2009, pp. 143-155) hace referencia a las siguientes:

1. Dificultades en el ordenamiento: se refiere a la dificultad de los estudiantes al ordenar fracciones, números decimales o ambos. Dicho error tiene su origen en el intento de aplicar la idea de ‘sucesivo’ que funcionaba con los números naturales y que ya no cumple ni existe entre los racionales.
2. Dificultades en la realización de las operaciones: se refiere a la dificultad para dar sentido a las operaciones comprendiendo lo que se está haciendo. También, involucra la dificultad que tienen los estudiantes para comprender cuándo, para resolver un problema, hay que usar la multiplicación o división entre fracciones o para comprender por qué lo que construyeron para los naturales ya no funciona con los números racionales.
3. Dificultades en el reconocimiento de esquemas: alude a la dificultad para interpretar algunas representaciones gráficas de la fracción, lo que se incrementa cuando se trata de situaciones discretas o fracciones impropias. El error se presenta porque no se logra identificar cuál es la unidad en juego.
4. Dificultades en la gestión del adjetivo ‘igual’: relacionado con cómo los estudiantes y los profesores limitan la expresión de ‘partes iguales’ solo a partes con igual forma y no a

partes de igual área. Esta dificultad también se da por el frecuente uso de figuras sencillas de partir.

5. Dificultades en la gestión de la equivalencia: aun a los 15 años son muchos los estudiantes que evidencian poca seguridad en la ejecución de tareas, tales como $\frac{2}{7} = \frac{\triangle}{14} = \frac{10}{\triangleright}$. Esta dificultad se incrementa cuando se trata de comprender la equivalencia en situaciones discretas, inclusive en estudiantes de nivel superior. Por ejemplo, la autora menciona que les propuso esta pregunta: “Tengo la fracción $\frac{x}{y}$ y divido tanto ‘x’ como ‘y’ por 2. Obtengo una nueva fracción. ¿Es esta fracción la mitad, igual o el doble de $\frac{x}{y}$?” (Fandiño, 2009, p. 151). La autora expresa que la mayoría brinda como respuesta ‘la mitad’ y ‘el doble’.
6. Dificultades en la gestión de la fracción irreductible: hace referencia a cómo muchas veces, a modo de ‘técnica’, se usa la expresión ‘cancelar arriba y abajo’ en la acción de reducir una fracción. Esto trae varios inconvenientes, sobre todo cuando el numerador o denominador se reduce a la unidad y la mayoría de los estudiantes lo interpreta como ‘no queda nada’ y colocan 0.
7. Dificultades en la gestión de figuras no estándar: esta dificultad se da porque con frecuencia se presentan actividades en las cuales, para encontrar fracciones en contextos continuos, se utilizan figuras estándar (cuadrado, rectángulo, círculo y pocas veces triángulo equilátero). Esto ocasiona que se crea que solo es posible encontrar la fracción en figuras de ese tipo.
8. Dificultades al pasar de una fracción a la unidad que la generó: esto se da porque en clase se presentan muy pocas situaciones en las que, a partir de una fracción, deben construir la unidad que los generó. La dificultad para resolver este tipo de tareas se incrementa cuando la fracción se presenta como una figura compacta, unitaria y convexa a partir de la cual hay que encontrar la unidad.

9. Dificultades en la gestión autónoma o espontánea de esquemas, figuras o modelos: se refiere al conflicto que tienen los estudiantes para gestionar de forma espontánea todos los registros semióticos aprendidos y para usarlos autónomamente (Fandiño, 2009, pp. 143-155).

En definitiva, tener conocimiento de los diversos significados asociados al término 'fracción', y de las limitaciones de una fracción frente a un número racional y de las dificultades en su aprendizaje son aspectos importantes en la organización de la enseñanza de un profesor. En la medida en la que un profesor sepa reconocer los errores de sus estudiantes y las causas que los originan, podrá reorganizar la enseñanza del objeto matemático y contribuir con la comprensión del objeto matemático de estudio.

Por otro lado, una de las investigaciones que más ha contribuido con el análisis de los diferentes significados que se asocian a las fracciones ha sido la de Kieren (1988). Este autor plantea un modelo teórico para la construcción del conocimiento matemático sobre los números racionales utilizando todos los argumentos que precedían a su investigación. En la figura 3, se presenta un esquema del modelo realizado por Kieren, en el cual se ilustra cómo se puede conectar y desarrollar el conocimiento de los números racionales. El modelo consta de seis niveles:

a) *El nivel 0* está conformado por un sistema de conocimientos cercanos a los hechos, es decir, el conocimiento específico de una situación; por lo tanto, están aislados unos de otros.

b) *El nivel 1* está conformado por los procesos de partición, equivalencia cuantitativa y formación de unidades divisibles. Estos procesos son los primeros con los cuales un aprendiz puede desarrollar ciertos problemas de relaciones fraccionarias. Además, se caracterizan porque pueden ser representados por un lenguaje fraccionario aditivo. Estos procesos son primordiales en la comprensión de la fracción unitaria (Kieren, 1988).

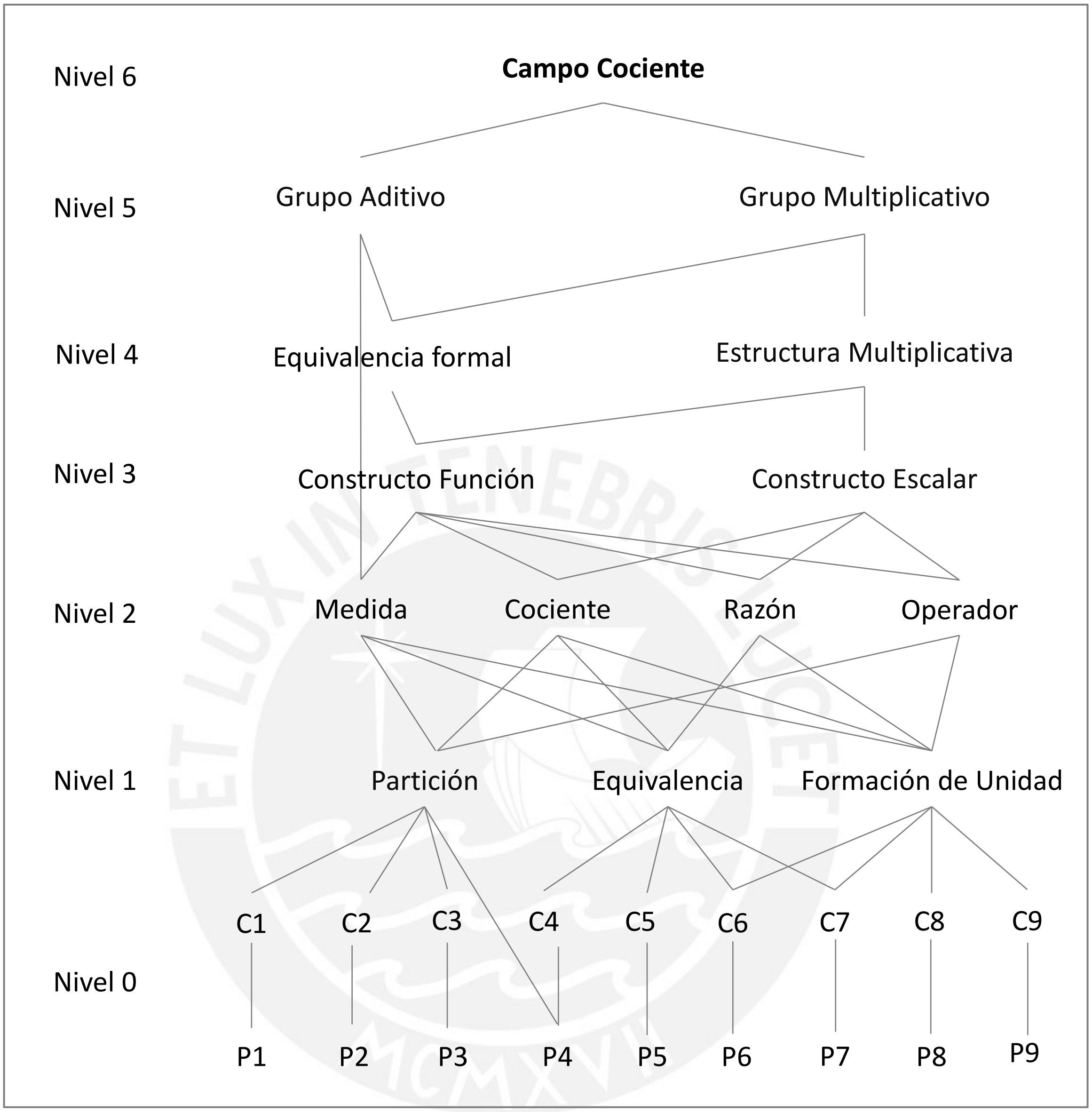


Figura 3. Orden del Conocimiento del número racional. Traducción de "Interrelationships between teachers' content knowledge of rational number, their instructional practice, and students' emergent conceptual knowledge of rational number", por M. Millsaps, 2005, Doctoral dissertation, p. 19.

c) *El segundo nivel* está compuesto por las cuatro construcciones de número racionales: medida, cociente, razón y operador. Estos representan el primer nivel de razonamiento formal de los números racionales. La construcción parte-todo se ha subsumido dentro de las construcciones del primer nivel.

d) *El tercer nivel* refiere a las construcciones (función y escalar) que favorecen el desarrollo del razonamiento proporcional y del campo conceptual multiplicativo de Vergnaud. Se entiende como campo multiplicativo a todas las situaciones que se pueden analizar como simples problemas o como problemas de proporcionalidad múltiple, es decir, problemas que para su solución se hace uso de la multiplicación o división (Kieren, 1988).

e) *El cuarto nivel* comprende la equivalencia formal y la estructura multiplicativa de números racionales. Este nivel representa la síntesis de las construcciones más formales de la fracción y del número racional (nivel anterior).

f) *El quinto nivel* abarca los grupos aditivo y multiplicativo que incluyen las construcciones formales de la suma/resta y multiplicación/división con los números racionales. La comprensión de este nivel va de la mano con la capacidad de crear y relacionar problemas de los números racionales.

g) *El nivel superior* lo constituye la construcción de los números racionales como elementos de un campo de cociente infinito.

Millsaps (2005) menciona que el modelo de Kieren es exhaustivo y útil para analizar todos los conceptos que son necesarios para una construcción del concepto de número racional.

En general, las investigaciones de este segundo grupo resaltan la importancia del estudio de los números racionales debido a que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en su etapa escolar están relacionadas con la comprensión de los conceptos, procedimientos y operaciones asociados a $\mathbb{Q}$. En ese sentido, a partir de un análisis didáctico, estos estudios también han destacado la necesidad de identificar y categorizar aquellas situaciones y conceptos en las que tienen sentido los números racionales. Este último es de suma importancia para esta investigación, ya que ello permitirá conocer en qué medida se considera el abordaje de dichas situaciones o conceptos en la educación peruana.

1.3. Justificación

Los números racionales constituyen un campo numérico complejo y de mucha importancia, tanto desde una perspectiva matemática, como desde su aplicabilidad en situaciones cotidianas. El estudio de los números racionales ha sido y es un tema constante en el Currículo Nacional del Perú (2016), en el cual dicho contenido se aborda desde la Educación Básica Regular del nivel de primaria y continúa ininterrumpidamente hasta el nivel de secundaria.

El contenido de los números racionales aparece dentro de la competencia *Resuelve problemas de cantidad*, la cual "consiste en que el estudiante solucione problemas o plantee nuevos problemas que le demanden construir y comprender las nociones de cantidad, número, de sistemas numéricos, sus operaciones y propiedades. Además, dotar de significado a estos conocimientos en la situación y usarlos para representar o reproducir las relaciones entre sus datos y condiciones. Implica también discernir si la solución buscada requiere darse como una estimación o cálculo exacto, y para ello selecciona estrategias, procedimientos, unidades de medida y diversos recursos. El razonamiento lógico en esta competencia es usado cuando el estudiante hace comparaciones, explica a través de analogías, induce propiedades a partir de casos particulares o ejemplos, en el proceso de resolución del problema" (Ministerio de Educación, 2016a, p. 133).

Los estándares de aprendizaje describen el nivel que se espera que un estudiante alcance al finalizar los ciclos de la Educación Básica Regular (EBR) y tienen por finalidad ser referentes para la evaluación de los aprendizajes tanto a nivel de aula como a nivel de sistema (Ministerio de Educación, 2016a).

Los números racionales aparecen en varias de las descripciones de los niveles de los estándares de aprendizaje. En la figura 4, se puede observar este objeto matemático en la descripción de los niveles Destacado, nivel 7 y nivel 6 de la competencia ‘Resuelve problemas de cantidad’.

DESTACADO

D

Resuelve problemas referidos a relaciones entre cantidades o realizar intercambios financieros, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números racionales e irracionales, y modelos financieros. Expresa su comprensión de los números racionales, sus propiedades y operaciones, la noción de número irracional y la densidad en Q; las usa en la interpretación de información científica, financiera y matemática. Evalúa y determina el nivel de exactitud necesario al expresar cantidades y medidas de tiempo, masa y temperatura, combinando e integrando un amplio repertorio de estrategias, procedimientos y recursos para resolver problemas, optando por los más óptimos. Elabora afirmaciones sobre la validez general de relaciones entre expresiones numéricas y las operaciones; las sustenta con demostraciones o argumentos.

7

Resuelve problemas referidos a las relaciones entre cantidades muy grandes o muy pequeñas, magnitudes o intercambios financieros, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números irracionales o racionales, notación científica, intervalos, y tasas de interés simple y compuesto. Evalúa si estas expresiones cumplen con las condiciones iniciales del problema. Expresa su comprensión de los números racionales e irracionales, de sus operaciones y propiedades, así como de la notación científica; establece relaciones de equivalencia entre múltiplos y submúltiplos de unidades de masa, y tiempo, y entre escalas de temperatura, empleando lenguaje matemático y diversas representaciones; basado en esto interpreta e integra información contenida en varias fuentes de información. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos de cálculo y estimación para resolver problemas, los evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea y compara afirmaciones sobre números racionales y sus propiedades, formula enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones numéricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades matemáticas

6

Resuelve problemas referidos a las relaciones entre cantidades o magnitudes, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números naturales, enteros y racionales, y descuentos porcentuales sucesivos, verificando si estas expresiones cumplen con las condiciones iniciales del problema. Expresa su comprensión de la relación entre los órdenes del sistema de numeración decimal con las potencias de base diez, y entre las operaciones con números enteros y racionales; y las usa para interpretar enunciados o textos diversos de contenido matemático. Representa relaciones de equivalencia entre expresiones decimales, fraccionarias y porcentuales, entre unidades de masa, tiempo y monetarias; empleando lenguaje matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, procedimientos, y propiedades de las operaciones y de los números para estimar o calcular con enteros y racionales; y realizar conversiones entre unidades de masa, tiempo y temperatura; verificando su eficacia. Plantea afirmaciones sobre los números enteros y racionales, sus propiedades y relaciones, y las justifica mediante ejemplos y sus conocimientos de las operaciones, e identifica errores o vacíos en las argumentaciones propias o de otros y las corrige.

Figura 4. Descripciones de los niveles Destacado, nivel 6 y nivel 7 del desarrollo de la competencia matemática. Tomado de “Currículo Nacional”, por Ministerio de Educación, 2016a, p.135.

En la figura 5, se visualiza las descripciones de los niveles 4 y 5. Cabe resaltar que si bien en estas últimas descripciones no se hace referencia a los números racionales como tal, sí se menciona a las fracciones y a los decimales, que son expresiones del número racional.

5

Resuelve problemas referidos a una o más acciones de comparar, igualar, repetir o repartir cantidades, partir y repartir una cantidad en partes iguales; las traduce a expresiones aditivas, multiplicativas y la potenciación cuadrada y cúbica; así como a expresiones de adición, sustracción y multiplicación con fracciones y decimales (hasta el centésimo). Expresa su comprensión del sistema de numeración decimal con números naturales hasta seis cifras, de divisores y múltiplos, y del valor posicional de los números decimales hasta los centésimos; con lenguaje numérico y representaciones diversas. Representa de diversas formas su comprensión de la noción de fracción como operador y como cociente, así como las equivalencias entre decimales, fracciones o porcentajes usuales. Selecciona y emplea estrategias diversas, el cálculo mental o escrito para operar con números naturales, fracciones, decimales y porcentajes de manera exacta o aproximada; así como para hacer conversiones de unidades de medida de masa, tiempo y temperatura, y medir de manera exacta o aproximada usando la unidad pertinente. Justifica sus procesos de resolución, así como sus afirmaciones sobre las relaciones entre las cuatro operaciones y sus propiedades, basándose en ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

4

Resuelve problemas referidos a una o más acciones de agregar, quitar, igualar, repetir o repartir una cantidad, combinar dos colecciones de objetos, así como partir una unidad en partes iguales; traduciéndolas a expresiones aditivas y multiplicativas con números naturales y expresiones aditivas con fracciones usuales. Expresa su comprensión del valor posicional en números de hasta cuatro cifras y los representa mediante equivalencias, así también la comprensión de las nociones de multiplicación, sus propiedades conmutativa y asociativa y las nociones de división, la noción de fracción como parte – todo y las equivalencias entre fracciones usuales; usando lenguaje numérico y diversas representaciones. Emplea estrategias, el cálculo mental o escrito para operar de forma exacta y aproximada con números naturales; así también emplea estrategias para sumar, restar y encontrar equivalencias entre fracciones. Mide o estima la masa y el tiempo, seleccionando y usando unidades no convencionales y convencionales. Justifica sus procesos de resolución y sus afirmaciones sobre operaciones inversas con números naturales.

Figura 5. Descripciones de los niveles 4 y 5 del desarrollo de la competencia matemática. Tomado de "Currículo Nacional", por Ministerio de Educación, 2016a, p.135.

Como se aprecia en las descripciones de los niveles y al realizar un análisis de los Programas Curriculares de Educación Primaria (Ministerio de Educación, 2016c) y Secundaria (Ministerio de Educación, 2016b), en relación con los números racionales, se indica lo siguiente:

- La noción de fracción se aborda desde tercer grado de primaria con el significado de parte-todo usando fracciones usuales, lenguaje numérico y diversas representaciones. Asimismo, se trabaja la equivalencia entre fracciones.
- Para el quinto y sexto grado de primaria, se estudia la fracción como operador y cociente, se realizan operaciones con fracciones, y se aborda la equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes.
- Al finalizar el VI ciclo (1° y 2° de secundaria), se espera que el estudiante exprese su comprensión de la fracción como razón y operador usando diversas representaciones y usando lenguaje numérico y del significado del uso negativo en los racionales. Asimismo,

que sea capaz de plantear afirmaciones sobre las propiedades de los números decimales y racionales.

- Finalmente, se espera que el estudiante, al terminar la etapa escolar, sea capaz de expresar su comprensión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), sus propiedades y sus operaciones, así como la densidad en $\mathbb{Q}$**,** y que pueda usar dicha información para interpretar información científica, financiera y matemática, haciendo uso de estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con racionales.

De esta manera, se confirma que la enseñanza de los números racionales se da a lo largo de la escolaridad y la comprensión del concepto de fracción es un objetivo fundamental que se debe alcanzar desde los primeros grados de la EBR. En todo este proceso, es fundamental el rol del profesor. En ese sentido, se torna esencial que tenga un conocimiento especializado sobre el tema que le permita lograr en sus estudiantes una comprensión idónea del contenido (Zakaryan & Ribeiro, 2016).

Por otro lado, uno de los temas que más ha interesado en los últimos años en el campo de la didáctica de las matemáticas, ha sido valorar cuáles son los conocimientos necesarios que un profesor posea para la enseñanza de las matemáticas (Pino-Fan & Godino, 2015; Gonzalez & Eudave, 2018). En ese sentido, la formación de profesores se ha convertido en un campo de investigación de creciente interés, cuya finalidad es estudiar los efectos de los conocimientos del profesor sobre la calidad de los aprendizajes de los estudiantes. Como lo señala García (2005), el profesor tiene gran incidencia en el aprendizaje de los estudiantes; es decir, el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes depende de manera directa de los conocimientos, habilidades y competencias de sus profesores (Zakaryan & Ribeiro, 2016, Pino-Fan et al., 2013).

En definitiva, el desempeño de un profesor “está influenciado por su conocimiento profesional, que le permite diseñar, aplicar, actuar frente a las respuestas de los estudiantes, improvisar unas acciones por otras, entre otros aspectos” (Rojas et al., 2013). Por ello, es interés de esta tesis proponer una investigación que brinde información al campo de formación de profesores, sobre cuál es el significado de referencia institucional en torno a los números racionales y, a partir de este, identificar el conocimiento didáctico y matemático que el que debería contar un profesor de educación secundaria sobre dicho objeto matemático.

La evaluación docente en el sistema educativo peruano plantea como objetivo contribuir con la mejora de la educación pública a través de la implementación de procesos de evaluación que permitan a los profesores, entre otros, el ingreso, la permanencia, el ascenso y el acceso a cargos en la Carrera Pública Magisterial (CPM). Con este fin, la Dirección de Evaluación Docente del Ministerio de Educación diseña y realiza las evaluaciones. Dos de los concursos que congregan a la mayor cantidad de docentes son el Concurso de Nombramiento y el Concurso de Ascenso. En la etapa nacional de estos concursos se aplica la Prueba Única Nacional (PUN). Las pruebas de cada uno de estos concursos tienen en común la evaluación de los conocimientos pedagógicos de la especialidad; en la cual se valora los conocimientos de la didáctica específica de la especialidad necesarios para conducir procesos de aprendizaje, y el conocimiento solvente de la disciplina o especialidad (Ministerio de Educación, 2019a; Ministerio de Educación, 2019c).

En ese sentido, es importante analizar las preguntas de las pruebas mencionadas, en las que se abordan los números racionales para poder identificar qué tipo de situaciones-problemas se evalúan, así como qué se está evaluando con más frecuencia, qué no se está evaluando, etc. Este análisis y las investigaciones que sustentan esta tesis permitirán determinar la importancia de que los ítems de las pruebas cumplan con ciertas características de tal manera que considere el sistema de referencia para los racionales en el sistema educativo peruano.

Por otro lado, tal como se menciona en el libro para maestros de Matemáticas del nivel secundario en México, “el estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra” (Secretaría de Educación Pública, 2004, p. 81). Es decir, los números racionales se articulan con otros objetos y posibilitan la comprensión de otras áreas de la matemática. Además, su enseñanza se adecúa a la propuesta del enfoque por competencias del Currículo Nacional peruano, pues tiene una gran capacidad para adaptarse a distintas situaciones y problemas.

Finalmente, esta investigación es relevante, ya que, a partir de mi experiencia como profesora, y como monitora de docentes del nivel primaria y secundaria, surgió la necesidad de investigar con respecto a las fracciones. Es en este contexto que, en la revisión de variada literatura (Fandiño (2009), Silva (2005) y Gairín (2004), entre otros) identifico la existencia de diversas acepciones para la fracción, información que en mi formación inicial no recibí, así como los diferentes errores típicos y dificultades de los estudiantes en torno al aprendizaje de las fracciones. Además, pude comprobar que los profesores a los que capacitaba sobre este objeto matemático también desconocían los diferentes significados de la fracción y más aún los tipos de tareas y situaciones que podían trabajar con sus estudiantes y las dificultades que experimentaban en el aprendizaje de este.

1.4. Pregunta y objetivos de la investigación

Ante lo expuesto, y considerando las herramientas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, se plantea la siguiente pregunta de investigación.

¿Qué elementos del significado de referencia institucional de los números racionales están presentes en las pruebas de Matemática aplicadas por el Ministerio de Educación?

Partiendo de la pregunta, se establecen el siguiente objetivo general y los objetivos específicos.

Objetivo general

Valorar las pruebas de Matemática de los concursos de Nombramiento y Ascenso del Ministerio de Educación a partir del significado de referencia construido para los números racionales en la educación secundaria peruana.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general de la investigación, se pretende alcanzar los siguientes objetivos específicos:

Objetivo específico 1: Construir el significado de referencia institucional del objeto matemático 'números racionales' a partir de investigaciones previas, los documentos curriculares y los textos de la educación secundaria peruana.

Objetivo específico 2: Organizar y clasificar las preguntas de las pruebas de Matemática de los concursos de Nombramiento y Ascenso del Ministerio de Educación de acuerdo a criterios establecidos previamente.

1.5. Metodología de la investigación

Según Strauss y Corbin (2002), se entiende por investigación cualitativa todo tipo de estudio a cuyos resultados no se llega por medio de métodos estadísticos u otros procesos de cuantificación. Es decir, si bien “los datos pueden cuantificarse (…) el grueso del análisis es interpretativo” (p. 20). Además, esto se lleva cabo con la finalidad de encontrar conceptos y relaciones entre los datos recogidos para posteriormente organizarlos en un esquema teórico. Como bien lo expresa Martínez (2006), “lo cualitativo (que es el todo integrado) no se opone a lo cuantitativo (que es solo un aspecto), sino que lo implica e integra, especialmente donde sea importante” (p. 128).

Asimismo, Nóblega, Vera, Gutiérrez y Otiniano (2018) mencionan que se debe usar el enfoque cualitativo cuando es interés del investigador conocer detallamente “las estructuras y procesos mediante los cuales se construye el conocimiento” (p. 6). De igual manera, si el tema de estudio no ha sido muy explorado o no hay investigaciones sobre ella, la investigación cualitativa debería ser la primera opción (Strauss & Corbin, 2002; Nóblega et al., 2018).

Por lo antes mencionado y por las características de esta tesis, se emplea la metodología cualitativa. Para lograr el objetivo de esta investigación, se han llevado a cabo procesos como los siguientes: a) comprensión y análisis interpretativo de las preguntas seleccionadas de las pruebas de los concursos de Nombramiento y Ascenso, con el fin de poder identificar los objetos primarios presentes en ellas, b) establecimiento de relaciones entre las investigaciones de referencia y los diversos textos matemáticos analizados, c) identificación de los aspectos del significado de referencia que tienen reflejo en las pruebas, d) valoración de las pruebas de los concursos de Nombramiento y Ascenso a la luz del significado de referencia construido, entre otros procesos.

> [El] enfoque cualitativo utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación. [Así], la acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien "circular" en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio.
>
> (Hernández, Fernández & Baptista, 2014, p. 7)

El primer objetivo específico de la tesis está conformado por el proceso de **construcción del significado de referencia institucional**. Para lograrlo, se llevaron a cabo cinco procedimientos que se describen a continuación.

El primer paso consistió en la *revisión de los documentos oficiales* de la educación peruana, es decir, del currículo nacional, del programa curricular de educación primaria y secundaria, de los textos escolares del nivel secundaria que reparte el Minedu a todos los estudiantes de escuelas públicas, y de textos matemáticos. El segundo paso fue el *análisis del contenido* de investigaciones y de textos matemáticos en los que se aborden los números racionales. La finalidad de este paso fue identificar enunciados verbales, definiciones, gráficos, justificaciones, etc., y toda información que se relacione con los números racionales. El tercer paso consistió en la *clasificación y organización de la información* para caracterizar los objetos matemáticos primarios (situaciones-problemas, lenguaje, conceptos-definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos) presentes en los textos. Lo identificado hasta este punto forma parte del significado de referencia 'pretendido' sobre los números racionales. El cuarto paso fue *la identificación de situaciones-problema, lenguajes, conceptos-definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos* sobre los números racionales que se consideran en las investigaciones y textos matemáticos, aunque no tengan presencia en los textos escolares. Finalmente, para terminar de construir el significado de referencia institucional peruano sobre los números racionales, se incorporó al significado de referencia 'pretendido' las situaciones-problemas consideradas relevantes o claves por las investigaciones y que no estaban siendo abordadas en los textos matemáticos analizados.

El segundo objetivo específico de la tesis está conformado por el proceso de **organizar y clasificar las preguntas de las pruebas de Matemática de los concursos de Nombramiento y Ascenso**. Para lograrlo, se llevaron a cabo cuatro procedimientos que se describen enseguida.

Primero, se *determinaron los criterios* para seleccionar las preguntas de las pruebas de Ascenso y Nombramiento del 2017 al 2019 a considerar en el análisis. Los criterios fueron tres: i) preguntas pertenecientes a la subprueba de Conocimientos Pedagógicos de la Especialidad, ii) preguntas en las que el objeto matemático implicado sea los números racionales, y iii) preguntas en las que la resolución dominante en el sistema exige los números racionales. En segundo lugar, se realizó la *identificación de las pregunta*s que cumplían con los criterios establecidos. En el caso de las pruebas de Nombramiento, se descartaron las preguntas que, si bien evaluaban el contenido de los números racionales, se encontraban en la subprueba de Razonamiento lógico. Esto se hizo porque esta subprueba es común a los postulantes de todos los niveles y especialidades, y el foco de nuestra investigación son los profesores de matemática de educación secundaria. Tampoco se consideraron las preguntas de carácter didáctico, es decir, las que, a pesar de abordar el objeto matemático de estudio, exigían del postulante conocimientos de procesos pedagógicos tales como la retroalimentación, conflicto cognitivo, entre otros, y no requerían una solución matemática. En tercer lugar, se procedió con la *resolución de las preguntas* con la participación de dos integrantes del equipo de instrumentos de la Dirección de Evaluación Docente para identificar algunos elementos de los objetos primarios. Finalmente, se llevó a cabo el *análisis y la valoración de las* *preguntas* de las pruebas del Ministerio de Educación a partir del significado de referencia institucional construido. La realización de estos dos procesos permitió cumplir el objetivo general de la presente tesis.

En el siguiente capítulo, se presentan los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) que se usaron para la investigación. Entre ellos, se encuentran las herramientas de análisis: configuración ontosemiótica y los significados institucionales.

CAPÍTULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se presenta una síntesis del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y las herramientas metodológicas que se utilizaron para la construcción del significado de referencia institucional en torno a un objeto matemático.

2.1. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

El enfoque ontosemiótico es un sistema teórico que surge de la Didáctica de las Matemáticas (disciplina científica que articula a las diferentes disciplinas interesadas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas), y propone la integración y articulación de diferentes elementos teóricos sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje (Godino, 2009).

El EOS se sustenta en "presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje" (Godino et al., 2017). Este modelo brinda herramientas teóricas y metodológicas que permiten analizar de manera conjunta el pensamiento matemático, las nociones y representaciones de este, las situaciones, y los elementos que condicionan su desarrollo.

2.2. Herramientas teóricas del EOS usadas en la investigación

Godino (2017) sustenta que, para realizar un análisis didáctico matemático completo que fundamente el diseño, la implementación y evaluación de los procesos de estudio matemático, se requieren ciertas herramientas que permitan llevarlo a cabo. Las cinco herramientas teóricas que componen este enfoque son las siguientes: i) sistema de prácticas, ii) configuración ontosemiótica,

iii) configuración didáctica, iv) dimensión normativa, e v) idoneidad didáctica (Godino, 2017, pp. 7-13).

A continuación, se describen las herramientas utilizadas para lograr los objetivos de la tesis.

2.2.1. Sistema de prácticas

Se considera práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino, Batanero & Font, 2007, pp. 4-5). El EOS sostiene que las prácticas matemáticas pueden ser características de una persona o compartidas por una institución. Una institución la conforman personas comprometidas en un mismo tipo de situaciones problemáticas con un tipo de instrumentos, reglas y formas de funcionamiento particulares.

En el estudio de las matemáticas, interesa analizar, más que la práctica específica ante un problema, los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) llevadas a cabo por las personas ante la resolución de situaciones problemáticas (Godino et al., 2007). Por lo tanto, el significado o representación de un objeto matemático siempre estará asociado al sistema de prácticas que realiza o una persona (significado personal) o que se comparten en una institución (significado institucional) para la resolución de las situaciones-problemas vinculadas a dicho objeto matemático (Godino et al., 2007).

En la presente tesis, se han identificado los sistemas de prácticas operativas y discursivas a los que se enfrenta una persona cuando aborda situaciones-problemas sobre los números racionales. Además, se ha considerado como institución al sistema educativo peruano en la Educación Básica

Regular - Nivel Secundaria. En la figura 6, se presenta la tipología de significados: personales e institucionales.

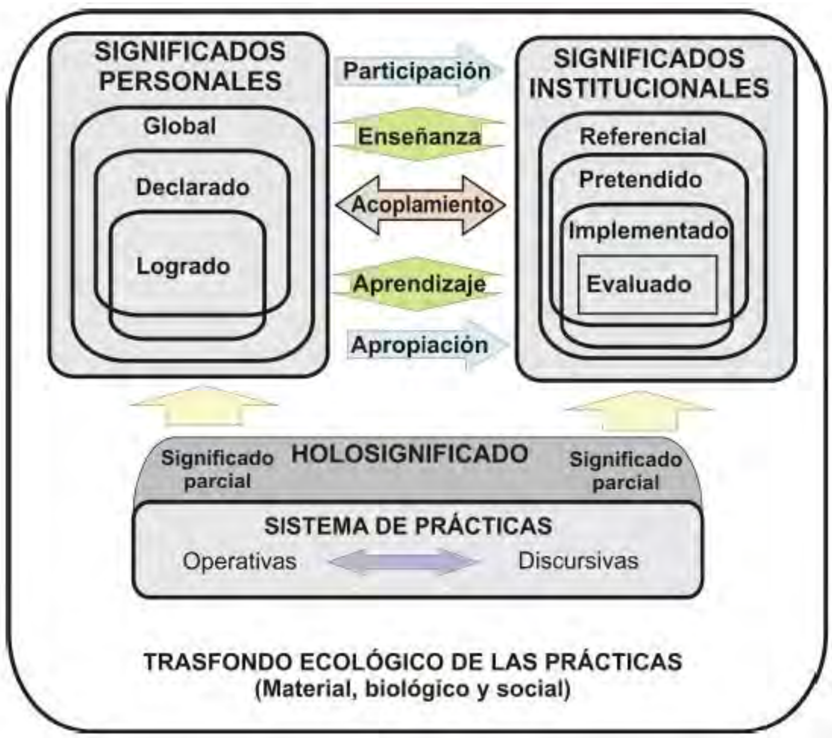


Figura 6. Significados sistémicos. De "Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas", por J. Godino, 2014, p.13.

El significado institucional está conformado por el sistema de prácticas institucionales vinculadas al conjunto de problemas del que surge un objeto matemático (Godino & Batanero, 1994), en este caso, el de los números racionales. Para poder caracterizarlo, "es necesario ver cuáles son los usos característicos de los conceptos, proposiciones y teorías matemáticas, las situaciones problemáticas fundamentales que incorporan las notas esenciales de las nociones y las notaciones que podríamos llamar canónicas" (Godino & Batanero, 1994, p. 21).

En esta investigación, los procesos seguidos permitieron, en primer lugar, identificar el significado institucional pretendido, es decir, el sistema de prácticas presente en la Educación Básica Regular - Nivel Secundaria para los números racionales. Para ello, se realizó la revisión del currículo nacional, de la programación curricular de educación secundaria y de los textos de matemática usados por los estudiantes de las escuelas públicas.

Con respecto al significado institucional de referencia sobre un objeto matemático, que conforma uno de los objetivos específicos de esta tesis, se ha encontrado que, para su construcción, es necesario valerse de "(…) los textos matemáticos correspondientes, las orientaciones curriculares, y en general de lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional (Godino, 2003, p. 138).

Por ello, en segundo lugar, se construyó un significado institucional de referencia sobre los números racionales. Para esto, se complementó el proceso anterior con la revisión y análisis de investigaciones y textos matemáticos que abordaran el estudio del objeto matemático en cuestión. No se realizó la identificación del significado institucional implementado y evaluado, ya que estos implicaban un trabajo en campo con los docentes, y del estudio de lo que se realmente se implementa y evalúa en las aulas con los estudiantes.

2.2.2. Configuración ontosemiótica

Esta herramienta permite "identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen en las practicas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones-problemas" (Godino, 2017, p. 8). En el análisis de los sistemas de prácticas, emergen dos niveles de objetos matemáticos. En el primer nivel, centro de la presente investigación, están presentes aquellas entidades primarias que se pueden observar en un texto matemático (Godino et al., 2007, p. 6). En el desarrollo de la presente tesis, se analizaron investigaciones, textos matemáticos y textos escolares. Los objetos primarios son seis:

i) *Situaciones-problemas*: problemas o situaciones en contextos extramatemáticos o intramatemáticos que ponen en juego actividades de matematización. En esta investigación, se presentan veintidós tipos de tareas asociadas a los números racionales (véase tabla 9).

ii) *Lenguajes*: conformado por los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., presentados en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.). En esta investigación, se presentan siete tipos de lenguajes usados tanto para la resolución de las situaciones-problemas sobre números racionales como para la presentación del concepto en sí (véase tabla 11).

iii) *Conceptos-definiciones*: descripciones características de las expresiones matemáticas que intervienen en el desarrollo de un objeto matemático. En esta investigación, se presentan diecisiete conceptos-definiciones en relación con los números racionales y aplicaciones de las propiedades de estos (véase tabla 12 y tabla 13).

iv) *Procedimientos*: conformando por las operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procesos y estrategias que se usan para resolver las situaciones-problemas. En esta investigación, se presentan diecisiete procedimientos asociados a los números racionales y a conceptos que se desprenden de las propiedades de estos (véase tabla 14).

v) *Propiedades*: se refieren a las condiciones (enunciados) de ejecución de los procedimientos, a las características particulares de las situaciones-problemas. En esta investigación, se presentan cinco propiedades relacionadas con los números racionales (véase tabla 15).

vi) *Argumentos*: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo. En esta investigación, se presentan cuatro argumentos que permiten verificar y justificar las situaciones-problemas (véase tabla 16).

Godino (2017) sostiene, en líneas generales, que la identificación de estos objetos y procesos permite anticipar dificultades y conflictos en el aprendizaje de un objeto matemático, evaluar cuán competente matemáticamente son los estudiantes, e identificar los objetos matemáticos primarios que deben institucionalizarse pertinentemente.

2.3. El conocimiento didáctico y matemático de un profesor desde el Enfoque Ontosemiótico

Hacia el año 2009, Godino y Batanero expresaban su interés en aplicar el marco teórico del 'Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática' (EOS) a la formación de profesores de matemáticas. Motivados desde su propia práctica como responsables de la formación matemática y didáctica de futuros profesores de matemática, aplicaban el principio de enseñar a los profesores en formación como esperaban que futuros docentes lo hicieran en su práctica docente (Godino & Batanero, 2009). Así, en uno de sus artículos titulado "Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica", describieron un modelo de formación de profesores de matemáticas que considere los presupuestos asumidos por el EOS y sus herramientas.

En primer lugar, presentaron la definición ampliada de 'reflexión guiada'. Esta hace referencia a la reflexión que debe estar presente no solo en la práctica docente de un profesor, sino también en las etapas de formación académica. Además, este proceso de reflexión debe ser asistido o apoyado no solo por el formador, sino también por un conjunto de indicadores o pautas que guíen, de forma crítica, el proceso reflexivo.

En segundo lugar, expusieron cuáles son las 'competencias para el análisis didáctico del profesor de matemática'. Un profesor de matemática debe poseer a) competencia matemática, que desde el punto de vista del proceso de enseñanza y aprendizaje le permita "analizar la actividad matemática realizada al resolver los problemas, identificando los objetos y significados puestos en juego, con el fin de enriquecer su desempeño y contribuir al desarrollo de sus competencias profesionales" (Godino & Batanero, 2009, pp. 5-6), y b) competencia didáctica, que le permita el "análisis de los objetos matemáticos y significados que se ponen en juego en la enseñanza a fin de prever conflictos de significados y distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados" (Godino & Batanero, 2009, p. 6).

A continuación, en la tabla 7, se presenta las competencias didácticas que Godino y Batanero (2009) consideraron necesarias en la formación de profesores.

Tabla 7

Competencias didácticas en la formación de profesores

Competencias asociadas al diseño e implementación de procesos de estudio matemático
- Selección y elaboración de problemas matemáticos adecuados para los estudiantes (considerando el nivel académico), usando los recursos pertinentes. - Definición y justificación de los conceptos, procedimientos y propiedades matemáticas, considerando las nociones matemáticas previas y los procesos vinculados con su comprensión. - Implementación de configuraciones didácticas que permitan reconocer y resolver los diversos conflictos semióticos que pueden surgir en las interacciones didácticas, y potenciar el aprendizaje de los estudiantes. - Reconocimiento del sistema de normas sociales y disciplinares asociados al desarrollo de los procesos de estudio matemático.
Competencias didácticas específicas y de valoración de la idoneidad didáctica
- Conocimiento de los aportes que brinda la Didáctica de la Matemática en la enseñanza y aprendizaje de los contenidos y procesos matemáticos que se abordan en los niveles de educación primaria y secundaria. - Valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio que han sido planificados o implementados en sus distintas dimensiones (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica), a partir del conocimiento de la Didáctica de la Matemática. - Desarrollo de una actitud positiva hacia la enseñanza de las matemáticas, que permita valorar tanto su rol formativo como su importancia en la educación de todos los ciudadanos.

Nota: Tomado de "Formación de profesores de Matemática basada en la reflexión guiada sobre la práctica", por J. Godino y C. Batanero, 2009, España, pp. 6-7.

Para el logro de estas competencias, Godino y Batanero (2009) proponen un ciclo formativo, el cual sostiene que la formación didáctica de un profesor se puede orientar mediante unas guías de análisis y reflexión didáctica que le permitan aprender de su propia experiencia. Las cuatro guías que proponen se componen así:

i) Guía para el diseño de unidades temáticas (GDUT)
ii) Guía para el recononocimiento de objetos y significados (GROS)
iii) Guías para el reconocimiento de actos y procesos de significación (GRAPS)
iv) Guía para el reconocimiento de normas

Los autores indican que las guías muestran un ciclo reflexivo que debe iniciarse con "la reconstrucción de un 'significado de referencia' mediante la consulta de los libros de texto, experiencias e investigaciones previas" (Godino & Batanero, 2009, p. 8). En general, el ciclo formativo y reflexivo que describen los autores muestra que las competencias puestas en juego en cada etapa responden a un modelo de conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza que orienta la reflexión de un profesor en torno a su propia práctica docente.

A finales del año 2009, Godino presentó el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor. Este modelo reúne, organiza y amplía los modelos propuestos por Shullman (1986), Ball (2000), y Schoenfeld y Kilpatrick (2008). El CDM se sustenta en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, e intenta identificar qué es lo que un profesor debe saber para enseñar matemáticas.

Godino (2009) indicó que el CDM está compuesto por seis facetas y cuatros niveles, que conforman el sistema de categorías de análisis de los conocimientos didácticos y matemáticos de un profesor. Las seis facetas que permiten analizar los procesos de instrucción matemática son estas: faceta epistémica, faceta cognitiva, faceta afectiva, faceta mediacional, faceta interaccional, y faceta ecológica. Asimismo, los cuatro niveles de análisis son las prácticas matemáticas y didácticas, las configuraciones de objetos y procesos (matemática y didácticos), las normas y metanormas, y la idoneidad. La figura 7 muestra la organización de las facetas y los niveles de análisis que conforman el CDM.

Figura 7. Facetas y niveles del CDM. De "Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas", por J. Godino, 2009, p. 21.

Posteriormente, en el año 2015, Pino-Fan y Godino presentaron una perspectiva ampliada del sistema de categorías de análisis del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor. Esta versión considera, utilizando las mismas facetas y niveles, tres dimensiones para el análisis del CDM: las dimensiones matemática, didáctica, y meta didáctico-matemático.

La dimensión matemática incluye el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido. La dimensión didáctica incluye i) el conocimiento especializado de la dimensión matemática; ii) el conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes; iii) el conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes; iv) el conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula; v) el conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes; y i) el conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, etc., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes (Pino-Fan & Godino, 2015, pp. 98-99). Finalmente, la dimensión meta didáctico-matemática se refiere al conocimiento sobre las normas y metanormas, las condiciones, y las restricciones contextuales. Además, considera el conocimiento de los criterios de idoneidad didáctica. Estos criterios han sido previstos para cada una de las facetas de la dimensión didáctica, y permiten que el profesor reflexione sobre su propia práctica e implemente mejoras en la misma.

Pino-Fan y Godino (2015) afirman que existen diferentes propuestas de modelos que caracterizan el conocimiento que debería tener un profesor de matemáticas para desempeñarse de manera óptima en su práctica y lograr que sus estudiantes aprendan. Esto significa que no existe un acuerdo sobre las categorías o dimensiones a considerar como parte del conocimiento matemático y didáctico de un profesor (Pino-Fan, Godino & Font, 2013; Gonzalez & Eudave, 2018).

Luego de analizar los tres modelos que han sido mencionados en los antecendes, MKT (Ball et al., 2008), MTSK (Carrillo et al., 2013) y el CDM (Godino, 2009), se hace notorio que, todos pretenden explicar un mismo fenómeno y, por ello, son mayores los aspectos comunes que las diferencias (Gonzalez & Eudave, 2018).

Sin embargo, se han encontrado las siguientes diferencias:

a) El MKT (Ball et al., 2008) y MSTK (Carrillo et al., 2013) enfocan el conocimiento de los estudiantes desde una óptica cognitiva; es decir, establecen que el profesor debe identificar lo que conocen, cómo piensan, y cómo aprenden matemáticas sus estudiantes. Además, estos modelos no abordan en sus dominios la interacción entre profesor, estudiante y el saber matemático (Gonzalez & Eudave, 2018).
b) El CDM considera, en las facetas cognitiva y afectiva, los conocimientos que se esperarían que un profesor de matemática tenga sobre sus estudiantes; es decir, conocimiento de "las

características y aspectos que están relacionados con la forma de pensar, conocer, actuar y sentirse de los estudiantes dentro de la clase y a propósito de un problema matemático" (Pino-Fan & Godino, 2015, p. 100). Además, en la faceta interaccional, se considera la necesidad de que un profesor gestione, construya, implemente y evalúe interacciones entre estudiante-estudiante, estudiante-recurso, y profesor-recurso-estudiantes.

Lo antes mencionado evidencia la completitud de las facetas del modelo CDM del Enfoque Ontosemiótico en comparación con las propuestas de los otros modelos. Por ello, esta investigación utiliza las herramientas metodológicas del EOS, descritas en el acápite anterior. Gracias a ellas, se ha podido construir un significado de referencia para los números racionales en el Sistema Educativo peruano (EBR - Nivel Secundaria). En el siguiente capítulo, se detalla cómo se construyó el significado de referencia institucional.

CAPÍTULO III: CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA INSTITUCIONAL PARA LOS NÚMEROS RACIONALES

Este capítulo tiene por finalidad presentar cómo se realizó la construcción del significado de referencia institucional para los números racionales. Por ello, se describirá y caracterizará los objetos matemáticos primarios (situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definición, procedimientos, propiedades y argumentos) del objeto en estudio. Los insumos para la construcción (Godino, 2003, pág. 138) fueron las investigaciones referidas al estudio de los números racionales (abordadas en los antecedentes), textos matemáticos y los textos escolares que distribuye el Ministerio de Educación gratuitamente a todos los docentes y estudiantes de entidades escolares públicas y que, por indicación del Minedu, son usados hasta el presente año escolar.

3.1. Significado de referencia institucional de los números racionales en la educación secundaria peruana

Para construir una propuesta de significado de referencia institucional sobre los números racionales, fue necesario empezar con la revisión de investigaciones que abordaran el estudio de los números racionales. Esto se realizó con la finalidad de identificar en esta literatura los objetos primarios (declarados por los 'expertos') asociados al objeto matemático en estudio.

Esto permitió establecer los criterios para analizar los textos. A continuación, se presentan los criterios utilizados:

- Situaciones-problemas o tareas de contexto intramatemático y/o extramatemático en las que la matemática necesaria para resolverlos es el de los números racionales

- Situaciones-problemas que ponen de manifiesto los diversos significados de las fracciones (situaciones en las que la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se mida, situaciones de partición de la unidad, entre otros)
- Situaciones-problemas, conceptos y procedimientos que utilicen distintos sistemas de representación (verbal, numérico, figural, tabular, etc.)
- Conceptos-definiciones relacionados con los números racionales; por ejemplo, cómo se define el conjunto $\mathbb{Q}$, temas o conceptos vinculados a los racionales, etc.
- Procedimientos matemáticos característicos de las situaciones-problemas o tareas asociadas a los números racionales; por ejemplo, el algoritmo para la división de fracciones, el algoritmo para convertir una fracción decimal a su fracción generatriz, entre otros.
- Propiedades asociadas a los números racionales; por ejemplo, la densidad en $\mathbb{Q}$.

En el proceso de análisis de textos surgieron las siguientes preguntas: ¿qué matemática necesito para resolver las situaciones-problemas identificadas?, ¿cómo las puedo resolver?, ¿con qué tipo de lenguajes?, ¿con qué tipo de estrategias?, ¿con qué procedimientos?, ¿qué concepto está detrás de esta situación?, ¿están presentes todas las situaciones-problemas que las investigaciones asocian a los números racionales?, entre otras. Este análisis se concreta en la identificación de los objetos primarios (situaciones-problemas, los lenguajes, los conceptos-definición, los procedimientos, las propiedades y argumentos) asociados a los números racionales.

En la tabla 8, se presentan los textos y las páginas analizados como parte del proceso para la construcción de un significado de referencia.

Tabla 8

Listado de textos matemáticos analizados

Título	Autor	Año	Editorial	Páginas
Matemática 1. *Texto escolar*	Ministerio de Educación	2016	Norma	28-61
Matemática 1. *Cuaderno de trabajo*	Ministerio de Educación	2016	Norma	12-27, 44-45.
Matemática 2. *Texto escolar*	Ministerio de Educación	2016	Norma	8-31, 38-51.
Matemática 2. *Cuaderno de trabajo*	Ministerio de Educación	2016	Norma	12-35, 44-45, 120, 131, 272-289.
Matemática 3. *Texto escolar*	Ministerio de Educación	2016	Norma	8-14, 32-39, 42-53.
Matemática 3. *Cuaderno de trabajo*	Ministerio de Educación	2016	Norma	10-21, 78-85, 114-121
Matemática 4. *Texto escolar*	Ministerio de Educación	2016	Norma	8-13, 30-43, 65
Matemática 4. *Cuaderno de trabajo*	Ministerio de Educación	2016	Norma	10-18, 58-67, 80-101
Matemática 5. *Texto escolar*	Ministerio de Educación	2016	Norma	12-15, 34-53
Matemática 5. *Cuaderno de trabajo*	Ministerio de Educación	2016	Norma	14-17, 84-101
Matemática para Arquitectos	Ugarte Guerra, Francisco Yucra Nuñez, Janet	2014	Facultad de Arquitectura y Urbanismo - PUCP	38-48
Tópicos de Aritmética y Álgebra	Carranza Saravia, César	2006	IANAS	109-153
Aritmética. Teoría y práctica	Gamarra Morales, Héctor		San Marcos	227-232
Precálculo. Matemáticas para el cálculo	James Stewart	2017	CENGAGE Learning	2-12

A continuación, se detallan las situaciones-problemas, los lenguajes, los conceptos-definición, los procedimientos, las propiedades y argumentos asociadas a los números racionales, en otros términos, el significado de referencia institucional que se construyó para los números racionales. Para cada caso, se presentan ejemplos extraídos de las investigaciones o textos analizados. Al finalizar la presentación de cada objeto primario, se realiza un breve análisis de la identificación de estos.

3.1.1. Objeto primario 1: situaciones-problemas

Godino (2003) precisa que este objeto hace referencia a los problemas o situaciones de tipo matemático, es decir, a aquellas situaciones y contextos extramatemáticos o intramatemáticos que ponen en juego actividades de matematización. Algunos ejemplos de estas actividades propuestos por el autor son los siguientes:

- “construir o buscar posibles soluciones que no son accesibles inmediatamente; inventar una simbolización adecuada para representar las situaciones y las soluciones encontradas y para comunicar dichas soluciones a otras personas;
- producir nuevas expresiones y enunciados significativos mediante manipulaciones simbólicas;
- justificar (validar o argumentar) las soluciones propuestas;
- generalizar las soluciones a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos” (Godino, 2003, p. 88).

Con relación a las condiciones o contextos que determinan la actividad, situación o problema, Godino (2003) hace referencia a dos: el contexto intramatemático y el extramatemático. Es decir, las situaciones-problemas podrían o no tener conexiones con objetos/fenómenos de la realidad (Freudenthal, 1991).

La Unidad de Medición de la Calidad (UMC) del Ministerio de Educación, citando a Freudental, Proenza y Treffers, define a estos dos tipos de contextos de la siguiente manera (Ministerio de Educación, 2015, pp. 34-35):

i. Contexto intramatemático: tarea o situación que refiere directamente a los objetos matemáticos. Principalmente, se desarrollan en el plano de objetos, conceptos y procedimientos matemáticos abstractos. Asimismo, la solución de estas tareas demanda procesos de matematización vertical (moverse dentro del mundo de los símbolos: matematizar mediante una expresión algebraica, una gráfica o una tabla sin conectarlo con objetos o fenómenos de la realidad, hasta llegar al estado final deseado).
ii. Contexto extramatemático: tarea o situación que refiere directamente a objetos y situaciones simuladas de la realidad. Es decir, contiene elementos externos que influyen en la interpretación y solución de problema. La solución de estas situaciones demanda tanto procesos de matematización horizontal como vertical; es decir, supone la transformación de una situación problemática (dada en un contexto real) en un problema matemático propiamente dicho en el que la interpretación del resultado se da considerando la situación-problema en sí.

Según, Treffers y Goffree (1985), ambos procesos (matematización horizontal y vertical) pueden tener lugar en cualquier nivel de la actividad matemática.

A continuación, se presenta el listado de los veintidós tipos de situaciones-problemas asociadas a los números racionales que fueron identificadas en la revisión de los textos. Cabe resaltar que cada una de estas situaciones ha sido nombrada con un descriptor que permite identificar de manera sencilla el tipo de tarea al que hace referencia.

- Tipo 1: Clasificar fracciones
- Tipo 2: Determinar fracciones homogéneas y heterogéneas
- Tipo 3: Ordenar-comparar fracciones
- Tipo 4: Ubicar fracciones en la recta numérica
- Tipo 5: Ubicar números decimales en la Tabla de valor posicional
- Tipo 6: Obtener fracciones equivalentes
- Tipo 7: Expresar una fracción impropia como fracción mixta o viceversa
- Tipo 8: Expresar una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa
- Tipo 9: Operar con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)
- Tipo 10: Discriminar números racionales
- Tipo 11: Aplicar la propiedad de densidad en $\mathbb{Q}$
- Tipo 12: Aplicar propiedades de las operaciones en $\mathbb{Q}$
- Tipo 13: Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)
- Tipo 14: Expresar la equivalencia entre fracción, decimal y porcentaje
- Tipo 15: Aplicar la definición de porcentaje
- Tipo 16: Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje

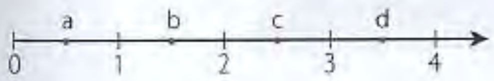
- Tipo 17: Aplicar aumentos y descuentos porcentuales
- Tipo 18: Calcular la variación porcentual
- Tipo 19: Calcular la tasa de interés
- Tipo 20: Aplicar la definición de razón
- Tipo 21: Aplicar la definición de proporcionalidad
- Tipo 22: Resolver situaciones de cálculo de probabilidad

A continuación, en la tabla 9, se presentan ejemplos para cada uno de estos tipos de tareas, desde primero hasta quinto de secundaria. Ello permite ver la gradualidad de estas tareas y la presencia o ausencia de ciertas tipologías según se avanza en la educación secundaria. En esta tabla, también se puede identificar el texto matemático de donde ha sido tomado el ejemplo (se han priorizado ejemplos de los textos escolares), y el contexto matemático al que hace referencia la situación.

Tabla 9

Situaciones-problemas en relación con los números racionales

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 1. *Texto escolar* Matemática 1. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	Tipo 1: Clasificar fracciones Clasifica las siguientes fracciones: **a.** $\frac{7}{8}$ **b.** $\frac{31}{3}$ **c.** $\frac{16}{16}$ (Ministerio de Educación, 2016d, p. 31) Tipo 2: Determinar fracciones homogéneas y heterogéneas En cada caso, representa mediante un gráfico una fracción que cumpla con las condiciones dadas: **a.** Una fracción homogénea a $\frac{3}{5}$ que no sea mixta. **b.** Una fracción heterogénea a $\frac{1}{4}$ que no sea mixta. **c.** Una fracción heterogénea a $\frac{5}{6}$ que sea mixta. **d.** Una fracción homogénea a $\frac{2}{3}$ que sea mixta. (Ministerio de Educación, 2016i, p. 23) Tipo 3: Ordenar-comparar fracciones Ordena de manera descendente las siguientes fracciones: $\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}$. (Ministerio de Educación, 2016d, p. 31)

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 1. *Texto escolar* Matemática 1. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	<u>Tipo 4</u>: Ubicar fracciones en la recta numérica 2. Escribe la fracción que está representada por cada letra en la semirrecta de la figura 1.2.  (Ministerio de Educación, 2016i, p. 15) <u>Tipo 5</u>: Ubicar números decimales en la Tabla de valor posicional Ubica en la tabla de valor posicional los siguientes números y escríbelos en palabras. **a.** 52,9 **b.** 721,34 **c.** 4,503 **d.** 0,0006 (Ministerio de Educación, 2016d, p. 35) <u>Tipo 7</u>: Expresar una fracción impropia como fracción mixta o viceversa Hallemos la fracción mixta que corresponde a la fracción $\frac{9}{4}$. (Ministerio de Educación, 2016d, p. 34)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr><td>Matemática 1. Texto escolar
Matemática 1. Cuaderno de trabajo</td><td>Intramatemático</td><td>
<u>Tipo 8</u>: Expresar una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa

Escribe como número decimal cada una de las siguientes fracciones decimales.
a. $\frac{148}{100}$ b. $\frac{67}{1000}$
(Ministerio de Educación, 2016d, p. 35)

<u>Tipo 10</u>: Discriminar números racionales

Indica si los siguientes números pertenecen a $\mathbb{Q}^-$, {0} o $\mathbb{Q}^+$.
a. $\frac{8}{7}$
b. $-\frac{1}{2}$
c. 0
(Ministerio de Educación, 2016d, p. 33)

<u>Tipo 9</u>: Operar con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)

• ¿Cuánto es $\frac{50}{100}$ m más 0,1 m de la caña? ____________
• ¿Cuánto es $\frac{16}{100}$ m más 0,02 m de la caña? ____________
• ¿A cuánto equivale la suma entre $\frac{10}{100}$ m y 0,3 m de la caña? ____________
(Ministerio de Educación, 2016i, p. 13)
</td></tr>
</table>

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 1. *Texto escolar* Matemática 1. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	Tipo 16: Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje ¿Sabías que la Copa América se realiza desde el año 1916 y por ello es considerada el torneo internacional de fútbol más antiguo del mundo? La selección que más veces la ha ganado es Uruguay con 15 títulos, le sigue Argentina con 14 títulos, Brasil con 8, Paraguay y Perú con 2 y Colombia y Bolivia con una sola Copa América en sus vitrinas. Últimamente, el torneo se realiza cada cuatro años, aunque inicialmente se realizaba cada año. **a.** Algunos datos de competencias futbolísticas se presentan como porcentajes; ¿por qué pueden exponerse bajo este concepto? **b.** Respecto a los títulos obtenidos en la Copa América, ¿qué porcentaje corresponde a Uruguay? **c.** ¿Qué parte del total corresponde la cantidad de trofeos ganados por el Perú? (Ministerio de Educación, 2016i, p. 312)
	Extramatemático	Tipo 6: Obtener fracciones equivalentes 1. Construye una tabla de equivalencia para las fracciones que consideras son utilizadas con mayor frecuencia en situaciones cotidianas. 2. Consulta una receta de cocina y reemplaza las fracciones que relacionan la cantidad de ingredientes por fracciones equivalentes. 3. Plantea una situación problema en la que se utilicen fracciones equivalentes. (Ministerio de Educación, 2016i, p. 19)

TEXTO	**CONTEXTO MATEMÁTICO**	**SITUACIONES-PROBLEMAS**
Matemática 1. *Texto escolar* Matemática 1. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	<u>Tipo 13</u>: Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales (exactos o periódicos) Como cada uno dispone de tres tubos de mismo tamaño, ¿es correcto afirmar que Adrián al cortar su material obtiene 9 trozos cada uno de $\frac{1}{3}$ m, es decir, $\frac{9}{3}$? Justifica tu respuesta. ____________ (Ministerio de Educación, 2016i, p. 18) A Sara y Josefina les obsequiaron una bolsa de dulces. Sara recibió $3\frac{4}{5}$ de los dulces. Si come $1\frac{3}{4}$ de los dulces, tendría lo mismo que Josefina. ¿Cuántos dulces recibió Josefina? (Ministerio de Educación, 2016d, p. 41) Una constructora construirá un edificio de 21,6 m de altura. Si construye departamentos simples, el edificio tendrá 9 pisos. Si hace departamentos dúplex, cada piso tendrá una altura de 3,6 m. ¿Qué altura tendrá cada piso si se construyen departamentos simples? ¿Cuántos pisos tendrá el edificio si se construyen departamentos dúplex? (Ministerio de Educación, 2016d, p. 39) <u>Tipo 16</u>: Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje El 40 % de los empleados de una empresa es menor de 30 años. Si en la empresa hay 120 empleados, ¿cuántos empleados son menores de 30 años? (Ministerio de Educación, 2016d, p. 54)

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 1. *Texto escolar* Matemática 1. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	<u>Tipo 17</u>: Aplicar aumentos y descuentos porcentuales Una vez culminada la Copa América 2015, la dirigencia de la selección nacional de fútbol del Perú está cotizando en dos líneas aéreas para adquirir los boletos de regreso de la delegación conformada por 30 personas, entre jugadores, comando técnico y dirigentes. En la línea aérea Luna, el precio de los boletos por persona es de S/. 500. Sin embargo, esta aerolínea le ofrece a la selección algunos descuentos: el 10 %, porque llegó a la semifinal; y el 20 % sobre el precio rebajado, por haber ocupado el tercer lugar en el campeonato. En la línea aérea Armania, el precio de los boletos por persona es también de S/. 500. Esta aerolínea ofrece un descuento único del 29 %, porque la selección ocupó el tercer lugar en este importante torneo. **a.** ¿Cuál será el precio de los boletos de toda la delegación sin tener en cuenta los descuentos? **b.** ¿Cuál será el precio final de cada boleto considerando los descuentos en la línea aérea Luna? **c.** ¿Cuál será el precio final de cada boleto considerando los descuentos en la línea aérea Armania? **d.** ¿Cuál de las líneas aéreas ofrece un mejor precio por los boletos de regreso? (Ministerio de Educación, 2016d, p. 57) <u>Tipo 20</u>: Aplicar la definición de razón De los 100 estudiantes que asisten a las actividades extracurriculares después de clases, 72 están inscritos en cursos deportivos y 28 en cursos culturales. Escribamos las razones que comparan el número de estudiantes en cada tipo de curso con el total de alumnos. (Ministerio de Educación, 2016d, p. 54)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 1.
Texto escolar
Matemática 1.
Cuaderno de trabajo</td>
<td>Extramatemático</td>
<td>
Tipo 21: Aplicar la definición de proporcionalidad

Para construir cierto muro se usan bloques, tubos, alambre y cemento, y se marca en el piso de forma lineal la zona en la que se levantará el muro. La instalación eléctrica se realiza después de construir el muro.
Para construir el muro se pegó una hilera de 12 bloques y después se añadió una fila encima aumentando la cantidad de cemento necesario para pegarlos, tal como se muestra en la tabla 10.1.
<table>
<tr><td>Cemento (libras)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Bloques (unidades)</td><td>12</td><td>24</td><td>36</td><td>48</td><td>60</td><td>72</td><td>84</td><td>96</td><td>108</td></tr>
</table>
Tabla 10.1
c. Establece la expresión que determine:
• La cantidad de cemento que se usará para determinada cantidad de bloques.
• La cantidad de bloques que se usará con determinada cantidad de cemento.
(Ministerio de Educación, 2016i, p. 52)

Tipo 22: Resolver situaciones de cálculo de probabilidad

De una urna como la de la figura 73.1 se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea...
a. de color rojo, número impar?
b. de cualquier color, número par?
c. de color amarillo o azul, número impar?

Figura 73.1
(Ministerio de Educación, 2016d, p. 183)
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 2. Texto escolar
Matemática 2. Cuaderno de trabajo</td>
<td>Intramatemático</td>
<td>
<u>Tipo 3</u>: Ordenar-comparar fracciones

Ordenemos de mayor a menor las siguientes fracciones: $\frac{7}{3}$; $\frac{11}{2}$ y $\frac{5}{4}$.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 12)

<u>Tipo 4</u>: Ubicar fracciones en la recta numérica

Representemos $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ en la recta y respondemos: ¿se encuentran antes que 1?

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 10)

<u>Tipo 6</u>: Obtener fracciones equivalentes

Simplificamos la fracción $\frac{36}{60}$.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 13)

<u>Tipo 7</u>: Expresar una fracción impropia como fracción mixta o viceversa

Organiza en la siguiente tabla las cantidades de las proteínas de los alimentos referidos al almuerzo:
<table>
<tr><th></th><th>Cantidad</th><th>Fracción impropia</th><th>Fracción mixta</th><th>Fracción decimal</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Almuerzo</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
(Ministerio de Educación, 2016j, p. 27)
</td>
</tr>
</table>

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 2. *Texto escolar* Matemática 2. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	Tipo 8: Expresa una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa; Tipo 10: Discriminar números racionales; Tipo 9: Operar con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)

<u>Tipo 8</u>: Expresa una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa

Números de porciones	Número de cuadrados	Fracción decimal	Decimal	Porcentaje
1	20			
2				40 %
3		$\frac{60}{100}$		
4			0,8	

(Ministerio de Educación, 2016j, p. 21)

<u>Tipo 10</u>: Discriminar números racionales

Ejemplo 1

Identificamos a qué conjunto numérico pertenece cada número.

Número	Naturales	Enteros	Racionales
23	X	X	X
$\frac{2}{3}$			X
–0,4			X

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 18)

<u>Tipo 9</u>: Operar con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)

¿A qué fracción equivalen los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de un área?

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 15)

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 2. *Texto escolar* Matemática 2. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	<u>Tipo 11</u>: Aplicar la propiedad de densidad en $\mathbb{Q}$ En la recta numérica, entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{6}$ se encuentra la fracción $\frac{3}{5}$. ¿Existirá alguna fracción entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{5}$? (Ministerio de Educación, 2016e, p. 18) <u>Tipo 12</u>: Aplicar propiedades de las operaciones en $\mathbb{Q}$ Simplifiquemos las siguientes expresiones: a. $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{50}}$ b. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}^{6}$ (Ministerio de Educación, 2016e, p. 31) Realizamos las siguientes operaciones: a. $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^5\right)^{\frac{-1}{5}}$ b. $\left\{\left((100)^1\right)^{\frac{-3}{5}}\right]^0$ c. $\left(\frac{-1}{8}\right)^{27^{9^{\frac{-1}{2}}}}$ (Ministerio de Educación, 2016e, p. 32) <u>Tipo 14</u>: Expresar la equivalencia entre fracción, decimal y porcentaje Representa en decimal y en porcentaje las siguientes fracciones: a. $\frac{1}{3}$ = c. $\frac{3}{4}$ = (Ministerio de Educación, 2016j, p. 14)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemática 2.
Texto escolar
Matemática 2.
Cuaderno de trabajo</td><td>Intramatemático</td><td>
Tipo 15: Aplicar la definición de porcentaje

Representa gráficamente cada situación.
– El 40 % de la barra.
– El 25 % de la barra.

(Ministerio de Educación, 2016j, p. 22)

Tipo 17: Aplicar aumentos y descuentos porcentuales

<table>
<tr><th>Condición</th><th>Expresión matemática</th><th>Resultado</th></tr>
<tr><td>Aumento sucesivo del 20 % y 30 % de 300.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Descuento sucesivo del 5 % y 10 % de 150.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aumento del 45 % al que le sigue un descuento del 10 % de 600.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Descuento del 15 % al que les sigue un aumento del 8 % y otro aumento del 10 % de 1000.</td><td></td><td></td></tr>
</table>
(Ministerio de Educación, 2016j, p. 123)
</td></tr>
<tr><td>Extramatemático</td><td>
Tipo 3: Ordenar-comparar fracciones

En el concurso Dulce Perú se entregó un premio a la persona que elaboraba más rápido los típicos y sabrosos buñuelos. Julia se demoró $\frac{3}{5}$ de hora y Mónica se demoró $\frac{5}{6}$ de hora. ¿Quién ganó la competencia?

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 11)
</td></tr>
</table>

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 2. *Texto escolar* Matemática 2. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	<u>Tipo 6</u>: Obtener fracciones equivalentes Juan y yo compramos una pizza. El vendedor la dividió en 8 pedazos. Cuando llegamos a la casa ofrecí a Juan elegir entre $\frac{4}{8}$ de la pizza, $\frac{2}{4}$ y la mitad. ¿Qué opción debe elegir Juanito para obtener una mayor cantidad de pizza? (Ministerio de Educación, 2016e, p. 13) Escribe la fracción simplificada que representa los siguientes casos, en relación con el tangram: – Dos triángulos pequeños. – El cuadrado y el triángulo verde juntos. – El paralelogramo y el cuadrado juntos. (Ministerio de Educación, 2016j, p. 30) <u>Tipo 8</u>: Expresar una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa Eric entra a una tienda a comprar golosinas. La persona que lo atiende le explica cuánto vale cada producto: "Las galletas cuestan tres quintos de sol; el caramelo de menta, ocho cuarentavos de sol, y la gaseosa, veintisiete quinceavos de sol". ¿Cómo se expresa como número decimal la cantidad que debe pagar Eric por cada producto? (Ministerio de Educación, 2016e, p. 16)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 2.
Texto escolar
Matemática 2.
Cuaderno de trabajo</td>
<td>Extramatemático</td>
<td>

<u>Tipo 11</u>: Aplicar la propiedad de densidad en $\mathbb{Q}$

Lorena ha pagado $\frac{1}{2}$ de su deuda del banco, Xavier ha pagado $\frac{3}{12}$ de su deuda y Rafael ha pagado menos que Lorena pero más que Xavier. ¿Cuánto pudo haber pagado Rafael?

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 18)

<u>Tipo 13</u>: Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)

En una canasta había cierta cantidad de pecanas. La primera hora Andrea comió 1/5 de las pecanas y una más; la segunda hora Brenda comió 1/5 del resto y una más; y la tercera hora Carla comió 1/5 del nuevo resto y una más. Si al final quedaron 59 pecanas en la canasta, ¿cuántas había al principio?

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 23)

Fernanda realiza las siguientes compras en un supermercado para preparar una comida: zanahorias 3 kg, papas 20 kg, manzana $3\frac{1}{2}$ kg, piña $1\frac{1}{4}$ kg, mandarina 3 kg y papaya $1\frac{3}{4}$ kg. Los precios se muestran en la tabla. ¿Cuánto debe pagar Fernanda por toda la compra? Justifica tu respuesta.

<table>
<tr><th>Alimento</th><th>Precio por kg</th></tr>
<tr><td>Zanahoria</td><td>S/ 1,78</td></tr>
<tr><td>Papa</td><td>S/ 1,90</td></tr>
<tr><td>Manzana</td><td>S/ 2,20</td></tr>
<tr><td>Piña</td><td>S/ 2,55</td></tr>
<tr><td>Mandarina</td><td>S/ 2,12</td></tr>
<tr><td>Papaya</td><td>S/ 1,43</td></tr>
</table>

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 36)

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 2. Texto escolar
Matemática 2. Cuaderno de trabajo</td>
<td>Extramatemático</td>
<td>
<u>Tipo 16</u>: Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje

Se anotaron las edades (en años) de 50 estudiantes beneficiarios del programa de alimentación.
13; 12; 13; 14; 11; 12; 13; 14; 13; 13; 13; 15; 16; 16; 15; 13; 14 11; 12; 13; 12; 15; 11; 13; 13; 13; 12; 14; 11; 12; 12; 13; 13; 15; 15; 16; 13; 14; 14; 11; 12; 14; 13; 10; 10; 13; 10; 16; 15; 13.
c. ¿Qué porcentaje de los estudiantes que pertenecen al programa, de la muestra tomada, tienen 15 años? ____

(Ministerio de Educación, 2016j, p. 45)

<u>Tipo 17</u>: Aplicar aumentos y descuentos porcentuales

Todos los años, por el aniversario del distrito donde vive Lucía, se realizan ferias de ropa. Ella aprovecha siempre para ir a comprar con su mamá. Este año se están vendiendo las prendas con distintos descuentos:
• Todas las prendas tienen 20 % de descuento sobre el precio del producto.
• Todos los integrantes de la escuela El Saber tienen un descuento adicional del 10 % sobre el precio ya rebajado.

La siguiente tabla muestra el precio de lista de algunas prendas. Lucía estudia en El Saber y desea realizar compras por un importe no mayor de S/ 500. Planea comprar 3 faldas, 2 vestidos, 1 jean, 1 blusa y algunos polos. ¿Cuántos polos como máximo podría comprar?
<table>
<tr><th>Prenda</th><th>Falda</th><th>Vestido</th><th>Jean</th><th>Blusa</th><th>Polo</th></tr>
<tr><td>Precio del producto (S/)</td><td>60</td><td>100</td><td>70</td><td>50</td><td>30</td></tr>
</table>
(Ministerio de Educación, 2016e, p. 51)

Mi padre cobraba al mes S/ 1400 y este año le han subido el sueldo 10 %. ¿Cuánto cobrará ahora? Si para el próximo año se espera un aumento de sueldo similar, ¿cuánto terminará cobrando mi padre en un mes? Calcula, además, el porcentaje de aumento de sueldo respecto al sueldo original.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 45)
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Matemática 2. Texto escolar
Matemática 2. Cuaderno de trabajo</td><td rowspan="3">Extramatemático</td><td><u>Tipo 18</u>: Calcular la variación porcentual

¿En qué porcentaje se incrementa el área de una región cuadrada cuando la longitud de su lado aumenta en 20 %?

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 45)</td></tr>
<tr><td><u>Tipo 20</u>: Aplicar la definición de razón

La caja de caramelos grande pesa 4,5 kg y la pequeña 1,5 kg. Hallamos la razón entre el peso de la caja grande y el peso de la caja pequeña. ¿Cómo interpretamos el valor de la razón obtenida?

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 38)</td></tr>
<tr><td><u>Tipo 21</u>: Aplicar la definición de proporcionalidad

En un colegio se colocarán 70 afiches sobre la exposición, y se espera que por cada 10 de estos, asistan 30 estudiantes. Construye una tabla donde se representen los datos y llénala, relacionando el tiempo (en horas que demorará en ser difundido el mensaje) versus el número de afiches usados. Calcula las constantes de proporcionalidad que se presentan en el problema.

<table>
<tr><th>Afiches</th><th>Tiempo (horas)</th></tr>
<tr><td>10</td><td>400</td></tr>
<tr><td></td><td>200</td></tr>
<tr><td>40</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>80</td></tr>
<tr><td>80</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>40</td></tr>
</table>

(Ministerio de Educación, 2016j, p. 308)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td><u>Tipo 22</u>: Resolver situaciones de cálculo de probabilidad</td></tr>
<tr><td>Matemática 2.
Texto escolar
Matemática 2.
Cuaderno de trabajo</td><td>Extramatemático</td><td>En un colegio, se rifará entre todos sus estudiantes una beca completa para el siguiente año escolar.
Utilizamos la información de la tabla y respondemos.
<table>
<tr><th>Sección</th><th>Mujeres</th><th>Hombres</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Primaria</td><td>136</td><td>129</td><td>265</td></tr>
<tr><td>Secundaria</td><td>168</td><td>167</td><td>335</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>304</td><td>296</td><td>600</td></tr>
</table>
¿Cuál es la probabilidad de cada evento?
A: Gana la beca un estudiante de Primaria.
B: Gana la beca una mujer.
C: Gana la beca un varón de Secundaria.

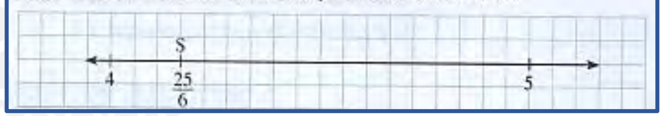
(Ministerio de Educación, 2016e, p. 183)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><u>Tipo 3</u>: Ordenar-comparar fracciones</td></tr>
<tr><td>Matemática 3.
Texto escolar
Matemática 3.
Cuaderno de trabajo</td><td>Intramatemático</td><td>Resuelve en tu cuaderno. Luego, intercámbialo con un(a) compañero(a) y revisa sus soluciones.
1. Ordena en forma decreciente las siguientes fracciones: $-\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{12}$ y $-\frac{1}{2}$.
2. ¿Qué número no es mayor que 2/9?
A) 1/4 B) 1/9 C) 1/3

(Ministerio de Educación, 2016k, p. 19)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 3. Texto escolar
Matemática 3. Cuaderno de trabajo</td>
<td>Intramatemático</td>
<td>
<u>Tipo 2, 3 y 9</u>: Determinar fracciones homogéneas y heterogéneas, ordenar-comparar fracciones y expresar una fracción como número decimal o viceversa

Efectúa los cálculos y completa la tabla.
<table>
<tr><th>Participante</th><th>Distancia recorrida en km</th><th>Distancia en km (como fracción)</th><th>Fracción homogénea</th><th>Orden según la mayor distancia recorrida</th></tr>
<tr><td>Cinthya Páucar</td><td>$\frac{13}{3}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Inés Melchor</td><td>$4,\overline{6}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Soledad Torre</td><td>$4\frac{1}{6}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Kimberly García</td><td>$\frac{9}{2}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Jovana de la Cruz</td><td>4,50</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Gladys Tejeda</td><td>$\frac{29}{6}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
(Ministerio de Educación, 2016k, p. 19)

<u>Tipo 4</u>: Ubicar fracciones en la recta numérica

Representa las fracciones en la recta y verifica tus resultados.


(Ministerio de Educación, 2016k, p. 19)

<u>Tipo 6</u>: Obtener fracciones equivalentes

DESAFÍO
¿Cuántas regletas de 1/8 completan una barra unidad? ¿Y cuántas de 1/4, de 1/2 y de 1/10?
(Ministerio de Educación, 2016k, p. 21)
</td>
</tr>
</table>

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 3. *Texto escolar* Matemática 3. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	<u>Tipo 8</u>: Expresar una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa El dueño de una tienda de abarrotes desea verificar en su balanza digital si los pesos de los productos son correctos. ¿Cuál de los productos tiene el peso que indica su etiqueta?  (Ministerio de Educación, 2016f, p. 10) <u>Tipo 9</u>: Operar con fracciones y números decimales (exactos o periódicos) Simplifica esta expresión: $0{,}1\widehat{6} - \frac{5}{3} + 2{,}5$ (Ministerio de Educación, 2016k, p. 21) <u>Tipo 14 y 15</u>: Expresar la equivalencia entre fracción, decimal y porcentaje, y aplicar la definición de porcentaje 7. ¿Qué significa 1% y cómo se representa con una fracción? 8. Si se gastó el 20 % de una cantidad, ¿qué porcentaje queda? (Ministerio de Educación, 2016k, p. 23) Elabora un cuadro comparativo para representar en forma de fracción, decimal o porcentaje cada una de estas cantidades: 0,35; 40/100; 70 %; 0,06; 7/100; 13 %. Si todas representan descuentos, ¿cuál es mayor? ¿Y menor? (Ministerio de Educación, 2016k, p. 23)

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 3. *Texto escolar* Matemática 3. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	<u>Tipo 13</u>: Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales (exactos o periódicos) Para armar 4 canastas por el Día de la Madre, los 45 estudiantes de 4.º A han traído víveres. La tercera parte ha traído $\frac{3}{4}$ kg de arroz y $\frac{1}{2}$ kg de azúcar cada uno, y el resto, 2 kg de fideos y $\frac{1}{8}$ kg de avena cada uno. ¿Cuánto pesará cada canasta con los productos dentro si vacía pesa $\frac{1}{2}$ kg? (Ministerio de Educación, 2016f, p. 13) Jorge es contratado para cubrir con baldosas el piso y las paredes de tres pozas de iguales dimensiones: 2,45 m de largo, 1,80 m de ancho y 2,50 m de altura. Se sabe que cobrará S/ 25 por cada metro cuadrado que cubra con baldosas. Además, acuerda con el cliente redondear al entero el área total que deberá cubrir en cada poza. Si recibe un adelanto de S/ 1200 y el resto se lo pagarán en dos quincenas, ¿cuánto recibirá en cada quincena?  (Ministerio de Educación, 2016f, p. 13) <u>Tipo 16</u>: Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje El 75 % de las camas de un hospital están ocupadas. Si hay 1280 camas en total, ¿cuántas camas están desocupadas? (Ministerio de Educación, 2016f, p. 42)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 3.
Texto escolar
Matemática 3.
Cuaderno de trabajo</td>
<td>Extramatemático</td>
<td>
Tipo 17: Aplicar aumentos y descuentos porcentuales

El administrador de una tienda de artefactos eléctricos añade S/ 20 de transporte al precio de fábrica de un equipo de sonido. Luego, a esta suma le agrega un 20% que es la ganancia de la tienda y, por último, le aumenta el 18 % de IGV. Si el precio de venta del equipo de sonido es de S/ 1450, ¿cuál es su precio de fábrica?
(Ministerio de Educación, 2016f, p. 52)

Rodrigo firma un contrato por la entrega de un juego de estantes, cuyo monto asciende a S/ 24 000. En dicho contrato acepta una penalidad de descuento de 1,2% por día de demora. Si Rodrigo entregó la obra con 4 días de retraso, ¿cuánto cobró en total?
(Ministerio de Educación, 2016f, p. 49)

Tipo 18: Calcular la variación porcentual

Ana registra el dinero recaudado en su tienda de ropa durante una semana.
<table>
<tr><td>Día</td><td>Lunes</td><td>Martes</td><td>Miércoles</td><td>Jueves</td><td>Viernes</td></tr>
<tr><td>Soles</td><td>650</td><td>800</td><td>620</td><td>780</td><td>600</td></tr>
</table>
¿Cuál fue la variación porcentual de lo recaudado entre el lunes y el jueves? ¿Y entre el martes y el viernes?
(Ministerio de Educación, 2016f, p. 44)
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 3.
Texto escolar
Matemática 3.
Cuaderno de trabajo</td>
<td>Extramatemático</td>
<td>

<u>Tipo 19</u>: Calcular la tasa de interés

El banco Crecer ofrece una tasa diaria del 0,03 %, mientras que el banco Aumentar ofrece una tasa mensual del 0,8 %. Si Daniel tiene un capital de S/ 3600 y lo quiere depositar durante dos meses, ¿cuál de los bancos le conviene? ¿Cuánto más obtendrá en un banco que en el otro?

(Ministerio de Educación, 2016f, p. 47)

<u>Tipo 20</u>: Aplicar la definición de razón

<table>
<tr><th>Ingredientes</th><th>Preparación</th></tr>
<tr><td>• 750 g harina
• 750 g de azúcar
• 450 g de mantequilla
• 5 huevos
• 2 1/2 cucharaditas de vainilla
• 1 pizca de sal</td><td>Se baten el azúcar y la mantequilla. Luego, se añaden, los huevos, la vainilla y la sal hasta conseguir una masa homogénea. Se agrega poco a poco la harina, hasta obtener una pasta consistente que se extiende con un rodillo sobre una superficie espolvoreada de harina. Se cortan las galletas con ayuda de la boca de un vaso y se meten al horno a 180 °C durante un cuarto de hora.
</td></tr>
</table>

La mamá de Luana sabe que con esta receta puede obtener dos cajas grandes de galletas, pero como recibirá la visita de sus amigos, debe preparar una pequeña cantidad. Si solo utilizara dos huevos, ¿qué cantidad de cada uno de los demás ingredientes necesitará?

4. Determina la razón entre la cantidad de huevos de la receta original y la nueva receta.

(Ministerio de Educación, 2016k, pp. 78-79)

<u>Tipo 21</u>: Aplicar la definición de proporcionalidad

Un grupo de operarios levanta 96 metros de pared en una semana. Se sabe que si tuvieran que levantar 128 metros de pared, se necesitaría contratar a 4 operarios más. ¿Cuántos operarios hay en el grupo? ¿Cuántos metros de pared levanta un operario en una semana?

(Ministerio de Educación, 2016f, p. 32)

</td>
</tr>
</table>

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 3. *Texto escolar* Matemática 3. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	Bruno cría pollos para venderlos en un mercado. Si por una docena de pollos le pagan S/ 102, ¿cuánto le pagarán por 40 pollos? (Ministerio de Educación, 2016f, p. 33) <u>Tipo 22</u>: Resolver situaciones de cálculo de probabilidad Se lanzan dos dados tetraédricos. Calcula la probabilidad de que la suma de los números de la base sea 4. (Ministerio de Educación, 2016f, p. 186) Luisa, Joaquín, Andrés y Sara juegan a tirar los dados y anotan las veces que obtienen el número 6. Luisa ha lanzado el dado 80 veces y ha obtenido 20 veces el número 6; Joaquín ha lanzado el dado 120 veces y ha sacado 24 veces el número 6; Andrés ha lanzado el dado 250 veces y ha obtenido 48 veces el número 6; y Sara ha lanzado el dado 400 veces y ha sacado 72 veces el número 6. Obtén la frecuencia relativa de cada uno. ¿Identificas alguna regularidad? (Ministerio de Educación, 2016f, p. 185)
Matemática 4. *Texto escolar* Matemática 4. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	<u>Tipo 3</u>: Ordenar-comparar fracciones Sonia preparó dos tortas: en una utilizó $\frac{3}{5}$ kg de duraznos, y en la otra, $\frac{5}{6}$ kg de fresas. ¿En cuál de las tortas empleó menos kilogramos de fruta? (Ministerio de Educación, 2016g, p. 11)

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 4. *Texto escolar* Matemática 4. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	<u>Tipo 4</u>: Ubicar fracciones en la recta numérica Cuatro amigos –Guillermo, Enrique, Pedro y Luis– participan en una carrera de ciclismo organizada por la municipalidad. Se sabe que en un determinado momento de la carrera, Luis ha recorrido los $\frac{6}{11}$ del trayecto; Guillermo, los $\frac{5}{8}$, y Pedro se encuentra a igual distancia de Guillermo y de Enrique. Además, Enrique ha recorrido los $\frac{3}{5}$ de lo que le falta recorrer para llegar a la meta. Si la carrera comprende 20 km, ¿quién va ganando la carrera? ¿En qué orden están los cuatro amigos hasta ese momento?  **6.** Representa en la recta numérica las fracciones que corresponden a las distancias recorridas por Enrique, Guillermo y Luis.  (Ministerio de Educación, 2016g, p. 11) <u>Tipo 9</u>: Operar con fracciones y números decimales (exactos o periódicos) Calcula el resultado exacto de $3 \cdot 1,\widehat{2} + 0,8 \div 2 - 8\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + 0,\widehat{3} - 0,4$. (Ministerio de Educación, 2016g, p. 19) <u>Tipo 11</u>: Aplicar la propiedad de densidad en $\mathbb{Q}$ ¿Cuántos números racionales con denominador 40 hay entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$? (Ministerio de Educación, 2016g, p. 11)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemática 4. Texto escolar
Matemática 4. Cuaderno de trabajo</td><td>Intramatemático</td><td>
<u>Tipo 21</u>: Aplicar la definición de proporcionalidad

Completa la tabla calculando las cantidades de ingredientes para 10 personas.
<table>
<tr><th>Ingredientes</th><th>Para 4 personas</th><th>Para 10 personas</th></tr>
<tr><td>Arroz (taza)</td><td>$1\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Pollo (presa)</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Aceite (taza)</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Cebolla (unidad)</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Dientes de ajo (unidad)</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Ají amarillo (kg)</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Culantro (taza)</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Pimiento (unidad)</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Alverjitas (kg)</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
</table>
(Ministerio de Educación, 2016l, p. 63)
</td></tr>
<tr><td>Extramatemático</td><td>
<u>Tipo 13</u>: Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)

En su taller de mecánica, Andrés tiene un juego de llaves para tuercas con medidas que van desde $\frac{1}{2}$ pulgada hasta $1\frac{1}{2}$ pulgada. Además, las llaves van variando de medida $\frac{1}{16}$ de pulgada cada vez.

1. ⊕ ¿Cuántas llaves tiene Andrés en total?
2. ⊕ Para ajustar cierta tuerca, la llave de $1\frac{1}{4}$ de pulgada es demasiado grande y la de $1\frac{1}{8}$ de pulgada es demasiado chica. ¿Qué tamaño de llave se necesita?
3. ⊕ Julio y Pedro tienen que ajustar tuercas de diferente tamaño. Se sabe que para la tuerca de Julio, la llave de $\frac{1}{2}$ pulgada es demasiado pequeña y la de $\frac{5}{8}$ de pulgada es demasiado grande. Además, para la tuerca de Pedro, la llave de $\frac{3}{4}$ de pulgada es demasiado pequeña y la de $\frac{7}{8}$ es demasiado grande. ¿Cuál es la diferencia entre la medida de la tuerca de Julio y la medida de la tuerca de Pedro?
(Ministerio de Educación, 2016l, p. 18)
</td></tr>
</table>

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 4. *Texto escolar* Matemática 4. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	<u>Tipo 16</u>: Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje José es un trabajador independiente y emite recibos electrónicos por cuarta categoría. Si ha cobrado S/ 3000 al mes durante un año, ¿cuánto tendrá que declarar de impuesto a la renta? ¿José tendrá que pagar a la Sunat o la Sunat tendrá que devolverle algún monto? (Ministerio de Educación, 2016g, p. 43) <u>Tipo 19</u>: Calcular la tasa de interés Elena deposita S/ 4000 en un banco a una tasa de interés simple anual del 5 %. Si cada año retira los intereses obtenidos, ¿cuánto sumarán sus intereses al cabo de 3 años? (Ministerio de Educación, 2016g, p. 42) <u>Tipo 21</u>: Aplicar la definición de proporcionalidad Saúl, cuya estatura es de 1,60 m, proyecta una sombra de 3,84 m. Si a la misma hora y en el mismo lugar un árbol proyecta una sombra de 13,20 m, ¿cuál es la altura del árbol? (Ministerio de Educación, 2016g, p. 31)

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 4. *Texto escolar* Matemática 4. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	<u>Tipo 22</u>: Resolver situaciones de cálculo de probabilidad Se lanza un dado. Calcula la probabilidad de obtener un múltiplo de 3. (Ministerio de Educación, 2016g, p. 182) En la XXIX edición de la Maratón de los Andes, el 35 % de los participantes son varones, el 30 % pertenece a la categoría juvenil, y el 24 % son varones de la categoría menores. Se elige al azar a uno de los participantes y resulta que pertenece a la categoría menores. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? (Ministerio de Educación, 2016g, p. 182) De una baraja de 52 cartas, se extraen dos en forma sucesiva y sin reposición. Calcula la probabilidad de que ambas cartas sean de corazones. (Ministerio de Educación, 2016g, p. 185)
Matemática 5. *Texto escolar* Matemática 5. *Cuaderno de trabajo*	Intramatemático	<u>Tipo 20</u>: Aplicar la definición de razón Expresa mediante una proporción lo siguiente: "Las masas de Luis y Daniel son como 2 es a 3". (Ministerio de Educación, 2016m, p. 89) Sean los segmentos AB = 4 cm, CD = 5 cm, EF = 8 cm y GH = 10 cm. Halla la razón de proporcionalidad entre los segmentos AB y CD, y EF y GH. • Determinamos la razón de proporcionalidad entre los segmentos: (Ministerio de Educación, 2016h, p. 47)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemática 5.
Texto escolar
Matemática 5.
Cuaderno de trabajo</td><td>Intramatemático</td><td><u>Tipo 21</u>: Aplicar la definición de proporcionalidad

Completa esta tabla con la cantidad de kilogramos de cada ingrediente que se deben pedir según el día. Luego, responde la tercera y cuarta pregunta.
<table>
<tr><th>Ingredientes</th><th>Para 2 platos</th><th>Para 80 platos</th><th>Para 150 platos</th><th>Para 250 platos</th></tr>
<tr><td>Pescado</td><td>0,3 kg</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Limón</td><td>0,44 kg</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cebolla</td><td>0,17 kg</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Camote</td><td>0,125 kg</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ají limo</td><td>3 u</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
(Ministerio de Educación, 2016m, p. 85)</td></tr>
<tr><td>Extramatemático</td><td><u>Tipo 13</u>: Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)

Un grupo de 120 estudiantes danzará en la fiesta del Corpus Christi, en el Cusco. De ellos, la octava parte bailará capaq colla; la sexta parte, capaq chuncho; las tres octavas partes, majeño; una sexta parte, dansaq, y el resto bailará una danza puneña. Entre los que bailarán majeño y danza puneña, ¿cuántos más son unos que otros?
(Ministerio de Educación, 2016h, p. 13)

En la industria papelera, los tamaños de papel estándar de la serie A se denominan A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, etc.
Se sabe que el de mayor tamaño tiene una superficie de 1 m² y cada uno de los demás mide la mitad del anterior.
Juan es un estudiante de 5.° grado. Él necesita un estante para colocar papeles A0 y A4. Previamente, debe determinar las medidas exactas y aproximadas de dichos papeles. ¿Cómo lo hará?

(Ministerio de Educación, 2016m, p. 14)</td></tr>
</table>

TEXTO	CONTEXTO MATEMÁTICO	SITUACIONES-PROBLEMAS
Matemática 5. *Texto escolar* Matemática 5. *Cuaderno de trabajo*	Extramatemático	<u>Tipo 16</u>: Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje Un lingote de oro y cobre, cuya ley es del 90 %, tiene un peso de 100 g. ¿Con qué cantidad de cobre se tendrá que fundir para que la ley baje al 75 %? (Ministerio de Educación, 2016h, p. 51) <u>Tipo 17</u>: Aplicar aumentos y descuentos porcentuales. Eduardo va a comprar una lustradora que cuesta S/ 1200, pero por aniversario de la tienda le ofrecen un descuento del 15 %. Además, por realizar la compra al contado, le hacen otro descuento adicional del 10 %. ¿Cuánto pagará por la lustradora? (Ministerio de Educación, 2016h, p. 47) <u>Tipo 19</u>: Calcular la tasa de interés Cristina deposita S/ 1200 en una institución financiera a una tasa de interés del 12 % anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto dinero tendrá en 3 años? (Ministerio de Educación, 2016h, p. 35) <u>Tipo 20</u>: Aplicar la definición de razón El área de *marketing* de una compañía de artículos de limpieza concluyó que el tamaño más comercial de una esponja es aquel que tiene 1,9 como razón entre las medidas de su largo y ancho. Si el nuevo producto que se lanzará al mercado tendrá un ancho de 6,6 cm, ¿cuántos centímetros tendrá de largo? (Ministerio de Educación, 2016h, p. 44)

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr>
<td>Matemática 5.
Texto escolar
Matemática 5.
Cuaderno de trabajo</td>
<td>Extramatemático</td>
<td>
<u>Tipo 21</u>: Aplicar la definición de proporcionalidad
Al finalizar la tercera fecha de un campeonato de balonmano, la comisión notó un curioso detalle: en cada fecha, la razón entre los goles que anotó y recibió el equipo Las Águilas fue la misma. Así, en la primera fecha anotó 3 goles; en la segunda, 6 goles, y en la tercera, 9 goles. Si en total el equipo Las Águilas recibió 12 goles, ¿cuántos recibió en la segunda fecha?
(Ministerio de Educación, 2016h, p. 47)
<u>Tipo 22</u>: Resolver situaciones de cálculo de probabilidad
La distribución porcentual de las brigadas de evacuación formadas por los empleados de la entidad bancaria Ahorro es Progreso se muestra en la siguiente tabla:
<table>
<tr><th></th><th>Varones</th><th>Mujeres</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Contabilidad</td><td>42 %</td><td>28 %</td><td>70 %</td></tr>
<tr><td>Administración</td><td>12 %</td><td>18 %</td><td>30 %</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>54 %</td><td>46 %</td><td>100 %</td></tr>
</table>
Si se elige un empleado al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Sea varón.
b) Sea mujer si se sabe que es de contabilidad.
c) Sea de contabilidad si se sabe que es mujer.
d) Sea de contabilidad y mujer.
(Ministerio de Educación, 2016h, p. 181)
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>TEXTO</th><th>CONTEXTO MATEMÁTICO</th><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Precálculo. Matemáticas para el cálculo</td><td>Intramatemático</td><td>Tipo 8: Expresar una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa

77–78 ■ Repetición de decimales Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Véase la nota al margen en la página 3.)
77. a) $0.\overline{7}$ b) $0.\overline{28}$ c) $0.\overline{57}$
78. a) $5.\overline{23}$ b) $1.3\overline{7}$ c) $2.1\overline{35}$

(Stewart, Redlin & Watson, 2017, p. 11)</td></tr>
<tr><td>Extramatemático</td><td>Tipo 9: Operar con fracciones y números decimales (exactos o periódicos)

DESCUBRIMIENTO: Limitación del comportamiento de recíprocos Complete las tablas siguientes. ¿Qué le ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando x aumenta? ¿Y cuando x disminuye?

<table><tr><th>x</th><th>$1/x$</th></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr><tr><td>100</td><td></td></tr><tr><td>1 000</td><td></td></tr></table>
<table><tr><th>x</th><th>$1/x$</th></tr><tr><td>1.0</td><td></td></tr><tr><td>0.5</td><td></td></tr><tr><td>0.1</td><td></td></tr><tr><td>0.01</td><td></td></tr><tr><td>0.001</td><td></td></tr></table>
(Stewart, Redlin & Watson, 2017, p. 10)</td></tr>
</table>

En el Programa Curricular de Educación Primaria (Ministerio de Educación, 2016c), se declara que el estudio de este objeto matemático, como ‘fracciones’, inicia en el IV Ciclo (4to grado de primaria) de la Educación Básica Regular como parte de la competencia ‘Resuelve problemas de cantidad’, pero que la construcción de los números racionales se va consolidando a lo largo de toda la educación secundaria.

En la tabla 10, se observa que el grueso de tareas relacionadas con las fracciones se aborda en primero, segundo y tercer año de la educación secundaria, y que el uso del número racional y sus aplicaciones (razones, proporcionalidad, tanto por ciento, entre otros) se incrementa en el último ciclo de la educación secundaria (cuarto y quinto año).

Tabla 10

Resumen de análisis de textos según tipo de tarea por contexto matemático

	Texto matemático									
Contexto / **Tipo**	**Matemática 1**		**Matemática 2**		**Matemática 3**		**Matemática 4**		**Matemática 5**	
	I	**E**	**I**	**E**	**I**	**E**	**I**	**E**	**I**	**E**
Tipo 1	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tipo 2	✓	-	-	-	✓	-	-	-	-	-
Tipo 3	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	-	-	-
Tipo 4	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-	-	-
Tipo 5	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Tipo 6	-	✓	✓	✓	✓	-	-	-	-	-
Tipo 7	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
Tipo 8	✓	-	✓	✓	✓	-		-	-	-
Tipo 9	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-	-	-
Tipo 10	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-

Tipo \ Contexto	Texto matemático									
	Matemática 1		Matemática 2		Matemática 3		Matemática 4		Matemática 5	
	I	E	I	E	I	E	I	E	I	E
Tipo 11	-	-	✓	✓	-	-	✓	-	-	-
Tipo 12	-	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
Tipo 13	-	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-	✓
Tipo 14	-	-	✓	-	✓	-	-	-	-	-
Tipo 15	-	-	✓	-	✓	-	-	-	-	-
Tipo 16	✓	✓		✓	-	✓	-	✓	-	✓
Tipo 17	-	✓	✓	✓	-	✓	-		-	✓
Tipo 18	-	-	-	✓	-	✓	-	-	-	-
Tipo 19	-	-	-	-	-	✓	-	✓	-	-
Tipo 20	-	✓	-	✓	-	✓	-	-	✓	✓
Tipo 21	-	✓	-	✓	-	✓	✓	✓	✓	✓
Tipo 22		✓		✓		✓	-	✓	-	✓
Total	**9**	**7**	**11**	**11**	**8**	**8**	**5**	**5**	**2**	**6**

I: Intramatemático, E: extramatemático

Considerando los criterios establecidos para el análisis de los textos, a partir de lo revisado en investigaciones que abordan el estudio de los números racionales, se identificó que existen situaciones-problemas que no están presentes en los textos matemáticos analizados, pero son importantes porque favorecen la comprensión de los números racionales y la construcción del constructo (completitud). Estos tipos de situaciones-problemas, que se presentan a continuación, provienen del análisis de las investigaciones de Llinares (2008), Llinares y Sánchez (1997), Gairín

(2004), Escolano y Gairín (2005), Silva (2005), Millsaps (2005), Fandiño (2009), Rojas, Flores y Carrillo. (2013), y Rojas (2014), las cuales han sido desarrolladas en los antecedentes.

1) Situaciones-problemas que usan modelos de medida, donde se centra la enseñanza del número racional en la medida de cantidades de magnitudes que no contienen un número entero de veces la unidad de medida (la nueva unidad es un submúltiplo de la unidad inicial).

   Ejemplo:

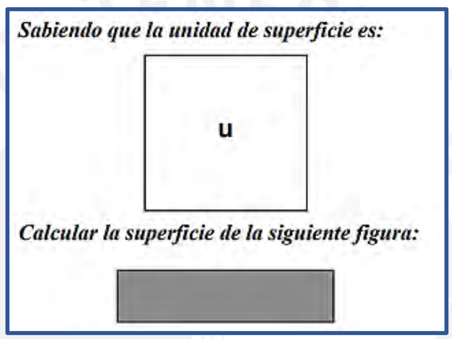


Figura 8. Fracción en contexto de medida
(Escolano & Gairín, 2005, pág. 20)

   Al respecto de este ejemplo, los autores sostienen que, dado que la superficie que se desea medir no contiene un número entero de veces a la unidad de medida, entonces, se hace necesario encontrar una nueva unidad que se obtendría al subdividir la superficie.

2) Situaciones-problemas que abordan el significado de la fracción como medida

   Ejemplo:

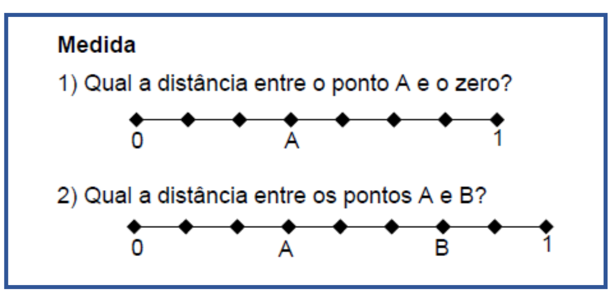


Figura 9. Ejemplo de fracción como medida
(Silva, 2005, pág. 263)

En este ejemplo, se puede asociar la fracción *a/b* a un punto en un segmento de línea (que sería la unidad) que se dividió en '*b*' partes congruentes, de las cuales se toman '*a*' partes.

3) Situaciones-problemas para ubicar los números racionales en la recta usando regla o compás

Ejemplo:

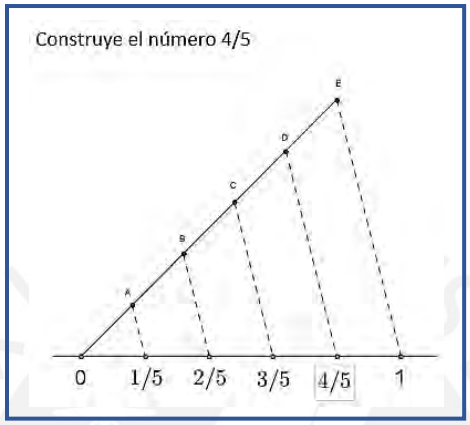


Figura 10. Ejemplo de construcción de un racional
(Junta de Andalucía, 2017)

En esta tarea, para construir el número 4/5, se debe subdividir el segmento de extremos 0 y 1 en cinco partes iguales. Para ello, se traza una recta por el punto 0 diferente a la recta que pasa por el 1. Luego, se ubican sobre ella cinco segmentos iguales *0A*, *AB*, *BC*, *CD* y DE uniendo el punto final *E* con el 1. Finalmente, se trazan líneas paralelas a esta recta que pasen por los puntos *A*, *B*, *C*, *D*. El punto de corte de la recta construida con la recta real, que pasa por *D*, será 4/5.

4) Situaciones-problemas que abordan la demostración de la densidad en $\mathbb{Q}$

Ejemplo:

a.

Justificar que si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a}{b} > \frac{\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}}{2} > \frac{c}{d}$

Figura 11. Ejemplo 1 de densidad en $\mathbb{Q}$
(Escolano & Gairín, 2005, p. 20)

b.

Ejemplo 19. Muestre que entre dos números racionales siempre existe otro número racional.

Figura 12. Ejemplo 2 de densidad en $\mathbb{Q}$
(Ugarte & Yucra, 2014, p.140)

Al respecto de estas tareas, Gairín (2004) sostiene que "razonar sobre la existencia de infinitas fracciones comprendidas entre otras dos posibilita el sentido de la densidad respecto del orden, que es una idea esencial para la comprensión de la estructura topológica del conjunto de los números racionales" (p. 250).

5) Situaciones-problemas que involucran números periódicos

Ejemplo:

Ejemplo a: Enuncia un problema que se resuelva con la operación $0'3\overline{814} + 9'6\overline{29}$

Ejemplo: Encuentra todos las expresiones decimales situadas entre $4'\overline{27}$ y $4'\overline{28}$ justificando la respuesta

Figura 13. Ejemplo de situaciones con números periódicos
(Gairín, 2004, pp. 242-243)

3.1.2. Objeto primario 2: lenguajes

"Son la parte ostensiva de una serie de conceptos, definiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos" (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 6). Así, para resolver las situaciones-problemas, para generalizar su solución o para describirlos a otra persona, se necesitan usar elementos del lenguaje matemático, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. (Godino, 2003).

A partir del análisis, se han identificado diversos sistemas de representación para la enseñanza y aprendizaje de los números racionales. Tomando como referencia la investigación de Rojas (2014) y Gairín (2004), los lenguajes han sido organizados según el uso que se hace de estos: para presentar un concepto y para resolver una situación.

En la tabla 11, se muestran los siete tipos de lenguaje asociados a los números racionales: el lenguaje natural, el numérico, el algebraico, el figural, el gráfico, el tabular y el uso de objetos materiales. Para cada uno de estos, se presentan ejemplos extraídos de los textos.

Tabla 11

Tipos de lenguajes asociados a los números racionales

<table>
<tr><th>TIPO DE LENGUAJE</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Finalidad: presentar un concepto</td></tr>
<tr><td>Natural</td><td>a) Clases de fracciones con relación a la unidad

Para representar una fracción propia se utiliza menos de una unidad o todo; por esta razón, este tipo de fracciones son menores que la unidad.
Para representar una fracción impropia se utiliza más de una unidad o todo; por esta razón, este tipo de fracciones son mayores que la unidad.
Para representar una fracción igual a la unidad se utiliza la unidad completa.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 31)

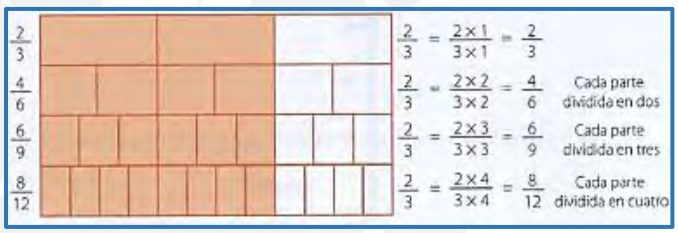
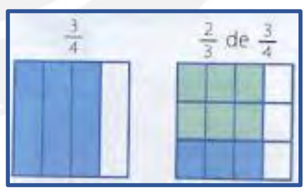
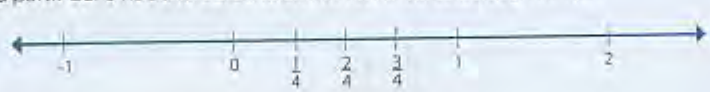
b) Aumentos porcentuales sucesivos

Cuando hablamos de aumentos sucesivos, nos referimos que, al tener una cantidad inicial, se le aumenta un porcentaje. Luego, nuevamente, se aumenta otro porcentaje, pero sobre el nuevo monto, y así un número determinado de veces.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 45)</td></tr>
<tr><td>Numérico</td><td>a) Equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes

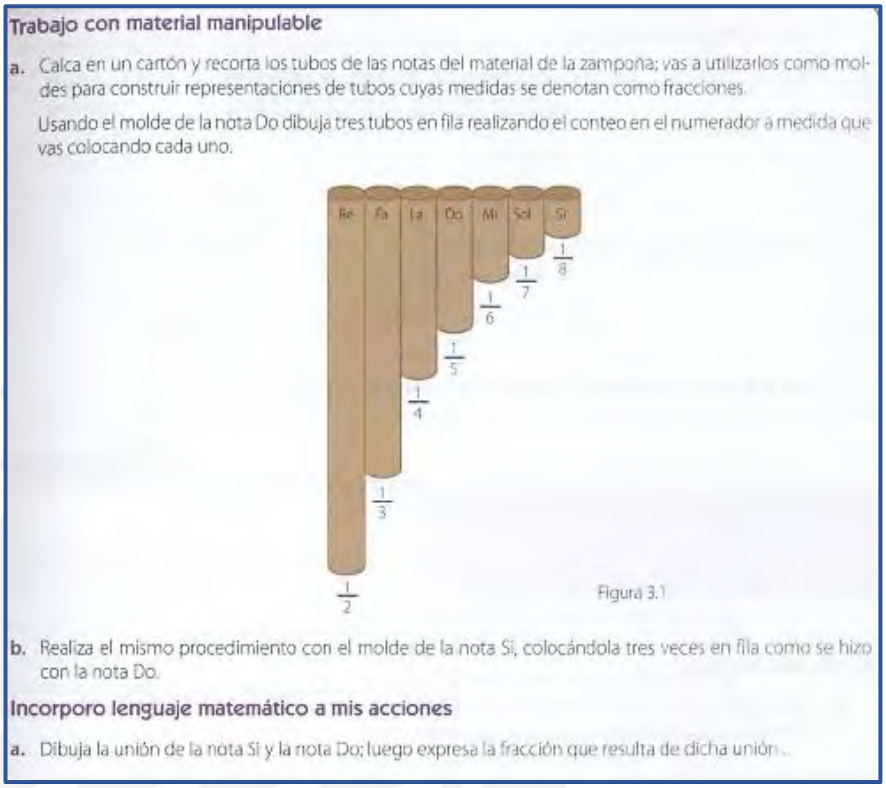
<table>
<tr><td>Fracción</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td></tr>
<tr><td>Decimal</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,25</td><td>0,5</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>Porcentaje</td><td>10 %</td><td>20 %</td><td>25 %</td><td>50 %</td><td>75 %</td></tr>
</table>

(Ministerio de Educación, 2016f, p. 11)</td></tr>
</table>

TIPO DE LENGUAJE	EJEMPLO
Algebraico	a) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición **Propiedad distributiva** $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}; b, d \text{ y } f\neq 0$ (Ministerio de Educación, 2016e, p. 19) b) Exponente negativo Una potencia de base distinta de 0 es igual a otra potencia cuya base es el recíproco de la base anterior y exponente opuesto al anterior: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\frac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ factores}}}; a\neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n; a, b\neq 0$ (Ministerio de Educación, 2016e, p. 28)
Figural	a) Fracciones equivalentes  (Ministerio de Educación, 2016d, p. 32) b) Multiplicación de fracciones  (Ministerio de Educación, 2016e, p. 15)
Gráfico	a) Representación de fracciones en la recta numérica Para representar la fracción $\frac{3}{4}$ en la recta numérica, tomamos la primera unidad positiva de la recta, la dividimos en 4 segmentos de la misma longitud y a partir del 0 hacia la derecha contamos 3 de estos segmentos.  (Ministerio de Educación, 2016e, p. 10)

<table>
<tr><th>TIPO DE LENGUAJE</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>Objetos materiales</td><td>

a) Uso de regletas (representas en los tubos de una zampoña)



Trabajo con material manipulable

a. Calca en un cartón y recorta los tubos de las notas del material de la zampoña; vas a utilizarlos como moldes para construir representaciones de tubos cuyas medidas se denotan como fracciones.

Usando el molde de la nota Do dibuja tres tubos en fila realizando el conteo en el numerador a medida que vas colocando cada uno.

Figura 3.1

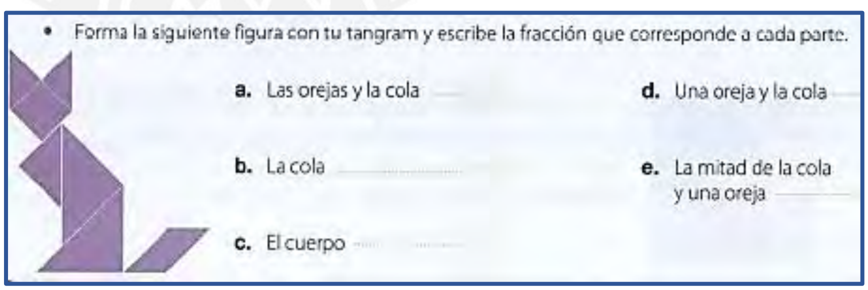
b. Realiza el mismo procedimiento con el molde de la nota Si, colocándola tres veces en fila como se hizo con la nota Do.

Incorporo lenguaje matemático a mis acciones

a. Dibuja la unión de la nota Si y la nota Do; luego expresa la fracción que resulta de dicha unión.

(Ministerio de Educación, 2016i, p. 21)

a) Uso de tangram



- Forma la siguiente figura con tu tangram y escribe la fracción que corresponde a cada parte.

a. Las orejas y la cola ....

b. La cola ....

c. El cuerpo ....

d. Una oreja y la cola ....

e. La mitad de la cola y una oreja ....

(Ministerio de Educación, 2016j, p. 30)

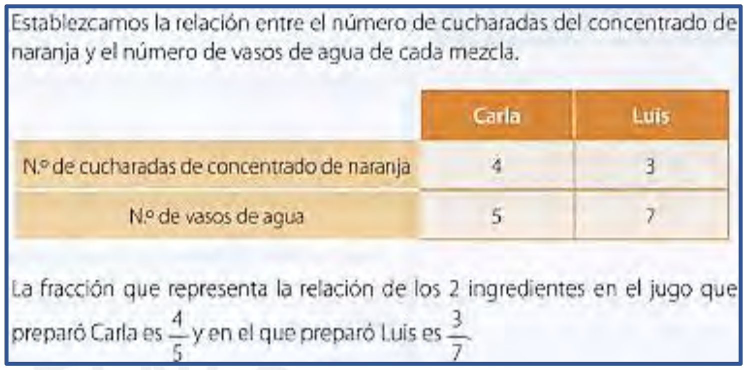
</td></tr>
</table>

TIPO DE LENGUAJE	EJEMPLO
Finalidad: resolver una situación	
Natural-Numérica	a) Resolución de situaciones de razones En las construcciones de las ruinas de Machu Picchu, encontramos que por cada 2 piedras de forma pentagonal hay 5 piedras de forma cuadrangular. Estamos comparando dos cantidades o dos magnitudes. Es decir, comparamos el número de piedras de forma pentagonal con el número de piedras de forma cuadrangular. La relación entre el número de piedras de forma pentagonal y el número de piedras de forma cuadrangular es de 2 a 5, que se puede expresar como $\frac{2}{5}$; $2 : 5$, $2 \div 5$ y significa que el número de piedras de forma pentagonal es $\frac{2}{5}$ del número de piedras de forma cuadrangular. Estamos comparando las cantidades usando razones. (Ministerio de Educación, 2016d, p. 48) b) Resolución de situaciones de multiplicación o división Para conocer el número de habitaciones que pueden ser pintadas debemos dividir la cantidad de pintura que se tiene entre lo que se necesita por cada habitación: $3\frac{3}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{19}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{18}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{72}{15} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$. Por el resultado obtenido, observamos que solo podrían ser pintadas 4 habitaciones en su totalidad. (Ministerio de Educación, 2016e, p. 15) c) Resolución de situaciones de orden-homogenización • Comparamos las fracciones que representan la cantidad de fruta empleada en cada torta. Como son heterogéneas, debemos homogeneizar las fracciones. • Homogeneizamos las fracciones igualando sus denominadores: $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{6}$ ► $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{6} = \frac{18}{30}$ y $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{25}{30}$ • Comparamos las fracciones. Como $\frac{18}{30} < \frac{25}{30}$, entonces $\frac{3}{5} < \frac{5}{6}$. Sonia empleó menos kilogramos de fruta en la torta de durazno. (Ministerio de Educación, 2016g, p. 15)

TIPO DE LENGUAJE	EJEMPLO

Tabular

a) Resolución de situaciones de razones


Establezcamos la relación entre el número de cucharadas del concentrado de naranja y el número de vasos de agua de cada mezcla.

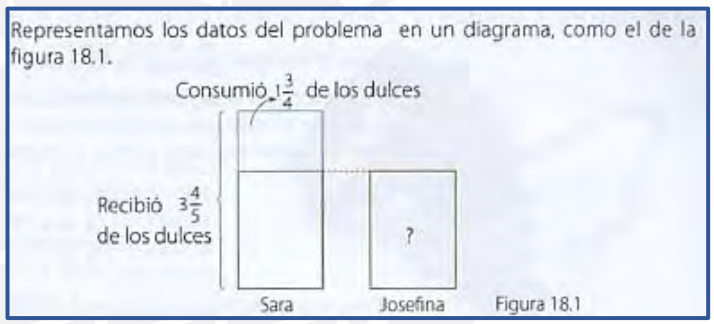
	Carla	Luis
N.º de cucharadas de concentrado de naranja	4	3
N.º de vasos de agua	5	7

La fracción que representa la relación de los 2 ingredientes en el jugo que preparó Carla es $\frac{4}{5}$ y en el que preparó Luis es $\frac{3}{7}$.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 11)

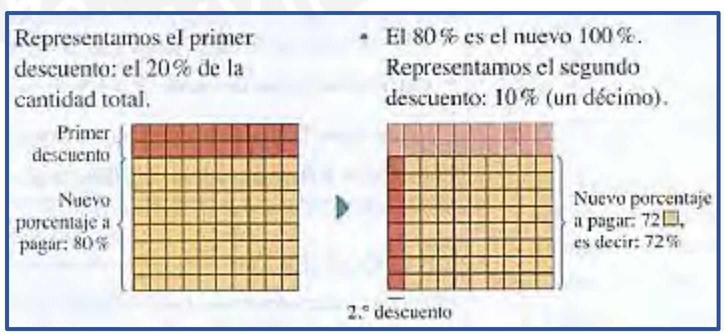
Figural-Numérico

a) Resolución de situaciones aditivas de igualación



(Ministerio de Educación, 2016d, p. 41)

b) Descuentos sucesivos



(Ministerio de Educación, 2016f, p. 48)

Rojas (2014) sostiene que el conocimiento matemático de los sistemas de representación para los números racionales implica conocer las diversas formas de representar dicho objeto. Estos son algunos ejemplos: a) el sistema de representación de tipo verbal o literal, que en la tesis se denomina como lenguaje natural (Godino, 2003); b) la representación simbólica o numérica; c) la representación algebraica; d) la representación gráfica; e) la representación figural; f) la representación tabular; y g) la representación material o concreta, que, en la tesis se denomina como objetos materiales (Godino, 2003).

3.1.3. Objeto primario 3: conceptos-definición

Para resolver una situación-problema, se requiere de diversos conceptos o nociones matemáticas que o bien ya fueron aprendidas o bien serán de apoyo para la resolución de la tarea propuesta. En ese sentido, los conceptos-definición son las descripciones características de las expresiones matemáticas que intervienen en el desarrollo de un objeto matemático; en este caso, en el de los números racionales. "Cada definición proviene de un sistema de prácticas específicas y por tanto involucra una clase de situaciones problemáticas y lenguaje específico que puede dar lugar a un significado idiosincrásico (o sentido)" (Godino, 2003, p. 115). Esto significa que los conceptos-definición en torno a un objeto pueden no ser únicos, sino que son adaptadas a las situaciones-problemas, a la finalidad, a la institución, etc.

Rojas (2014) asocia el conocimiento de los temas matemáticos (números racionales) al dominio de la estructura conceptual de los números racionales (cuerpo conmutativo con las operaciones de adición y multiplicación), a la identificación de $\mathbb{Q}$ como un conjunto que tiene representación decimal finita o periódica y que es denso en $\mathbb{R}$, entre otros (véase tabla 3). Todos estos son indicadores del conocimiento formal del número racional.

Para poder determinar los conceptos-definición que permiten la resolución de las situaciones-problemas que se relacionan con los números racionales (mencionadas líneas arriba), se tomó como referencia los aspectos generales que abordan Rojas (2014), Gairín (2004) y Fandiño (2009). Así, se identificó qué conceptos estarían detrás o implican el conocimiento de a) la estructura conceptual de los racionales; b) de la representación finita o periódica de $\mathbb{Q}$; c) de los significados de la fracción; d) de los temas o áreas que se relacionan con los racionales, tales como proporcionalidad, probabilidad, semejanza de figuras, etc.; y e) de los procedimientos que permiten la resolución de las situaciones-problemas asociadas a los racionales.

En la tabla 12, se muestran los conceptos-definición que se asumen que intervienen en el desarrollo del objeto matemático en estudio. Las definiciones que se presentan han sido tomadas de los textos analizados.

Tabla 12

Conceptos-definición asociados a los números racionales

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Números racionales	• Son aquellos números que pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros a y b, con $b \neq 0$ (Ministerio de Educación, 2016d, p. 33; Ministerio de Educación, 2016f, p. 10; Ministerio de Educación, 2016g, p. 10; Gamarra, 2015, p. 228). Como ejemplos, se tiene $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{7}$; $46 = \frac{46}{1}$; $0{,}17 = \frac{17}{100}$ (la división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}\, y\, \frac{0}{0}$ no están definidas (Stewart, Redlin & Watson, 2017, p. 2). • El conjunto de los números racionales es $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a\,, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$. Además, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^{-}$ (Ministerio de Educación, 2016e, p. 18) (Ministerio de Educación, 2016g, p. 10). • Los números racionales se clasifican así: $\text{Números racionales} \begin{cases} \text{Enteros} \begin{cases} \text{Números naturales: } 0; 1; 2; 3; \dots \\ \text{Enteros negativos: } -1; -2; -3; \dots \end{cases} \\ \text{Decimales} \begin{cases} \text{Decimales exactos: } 0{,}2; 0{,}34; 0{,}75; \dots \\ \text{Decimales periódicos: } 0,\hat{7}; 0{,}49\widehat{63}; \dots \end{cases} \end{cases}$ (Ministerio de Educación, 2016f, p. 10)

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Números racionales	• La definición formal de números racionales ($\mathbb{Q}$) es así: $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$ El conjunto $\mathbb{Q}$ (números racionales) está provisto de cuatro operaciones, de adición, diferencia, multiplicación y división, pero no está provisto de la operación de radicación. Por ejemplo, el resultado de extraer la raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$) no es un número racional. Dicho de otra manera, no existen dos números enteros a y b, tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ y que la fracción $\frac{a}{b}$ sea "irreductible" (Carrión, 2012, pp. 335-336).
Fracción	• Es el cociente indicado de dos números enteros. Se representa de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$ (Ministerio de Educación, 2016d, p. 30). • También, representan la relación de una parte con el todo o unidad; pueden ser vistas como operadores cuando amplían o reducen cantidades, y pueden ser interpretadas como cociente (Ministerio de Educación, 2016e, p. 10).
Fracción propia	• Para representar una fracción propia, se utiliza menos de una unidad o todo; por ello, este tipo de fracciones son menores que la unidad, por ejemplo, $\frac{3}{5}$ (Ministerio de Educación, 2016d, p. 31; Ministerio de Educación, 2016e, p. 12; Gamarra, 2015, p. 228).
Fracción impropia	• Para representar una fracción impropia, se utiliza más de una unidad o todo; por ello, este tipo de fracciones son mayores que la unidad, por ejemplo, $\frac{7}{2}$ (Ministerio de Educación, 2016d, p. 31; Ministerio de Educación, 2016e, p. 12; Gamarra, 2015, p. 228).
Fracción igual a la unidad	• Para representar una fracción igual a la unidad, se utiliza la unidad completa (Ministerio de Educación, 2016d, p. 31; Ministerio de Educación, 2016e, p. 12; Gamarra, 2015, p. 228).
Fracción mixta	• Toda fracción impropia se puede expresar como un número mixto al dividir el numerador entre el denominador, por ejemplo, $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ (Ministerio de Educación, 2016e, p. 14).
Fracciones homogéneas	• Fracciones que tienen el mismo denominador (Ministerio de Educación, 2016d, p. 31; Ministerio de Educación, 2016e, p. 12; Gamarra, 2015, p. 228).

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Fracciones heterogéneas	• Fracciones que tienen diferente denominador (Ministerio de Educación, 2016d, p. 31; Ministerio de Educación, 2016e, p. 12; Gamarra, 2015, p. 228).
Fracciones equivalentes	• Fracciones que representan la misma cantidad, por ejemplo, $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{21}{35}$ (Ministerio de Educación, 2016d, p. 32; Ministerio de Educación, 2016e, p. 11; Gamarra, 2015, p. 229).
Fracción irreductible	• Una fracción es irreductible o irreducible cuando sus términos sean primos entre sí. Las siguientes fracciones son irreductibles: $\frac{14}{15}$ (14 y 15 son números PESI), y $\frac{8}{5}$ (8 y 5 son números PESI) (Gamarra, 2015, p. 229).
Fracciones decimales	• Fracciones en las que el denominador es una potencia de 10. También, hay fracciones decimales cuyo denominador es múltiplo o divisor de una potencia de 10, por ejemplo, 50, 25, 250, 500, etc. (Ministerio de Educación, 2016d, p. 34; Ministerio de Educación, 2016e, p. 16; Gamarra, 2015, p. 228).
Fracciones recíprocas	• Dos numeros fraccionarios son recíprocos si el producto de ambos es uno. Por ejemplo, $\frac{1}{8}$ es recíproco de $\frac{8}{1}$ porque $\frac{1}{8}\times\frac{8}{1}=\frac{8}{8}=1$ (Ministerio de Educación, 2016d, p. 39; Ministerio de Educación, 2016e, p. 15).
Números decimales	• Las fracciones decimales se pueden escribir de otra forma; por ejemplo, $\frac{56}{100}$ se escribe como 0,56. Esta última expresión se denomina número decimal. En un número decimal, la parte que aparece antes de la coma se llama parte entera, y la que está después de la coma parte decimal (Ministerio de Educación, 2016d, p. 34; Ministerio de Educación, 2016e, p. 16). • Los números racionales se pueden representar en forma de número decimal dividiendo el numerador entre el denominador. Los números decimales se clasifican como exactos o periódicos. • Todo número real tiene una representacion decimal. Si el número es racional, entonces, su correspondiente decimal es periódico. Algunos ejemplos son los siguientes números (la barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre): $\frac{1}{2}=0.5000\ldots=0.5\overline{0}$ $\quad\frac{2}{3}=0.66666\ldots=0.\overline{6}$ $\frac{157}{495}=0.3171717\ldots=0.3\overline{17}$ $\quad\frac{9}{7}=1.285714285714\ldots=1.\overline{285714}$ (Stewart, Redlin & Watson, 2017, pp. 2-3)

A continuación, se presentan los conceptos y definiciones que son aplicaciones de las propiedades de los números racionales: razones, proporciones, tanto por ciento (Carranza, 2006, pp. 145-156), y probabilidad (Llinares & Sánchez, 1997, p. 71).

Tabla 13

Conceptos-definición de aplicaciones de los números racionales

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Razón	• El cociente que se utiliza para comparar dos magnitudes o cantidades se denomina razón. Se puede escribir como $a \div b$ o $a\colon b$, para $b \neq 0$. La razón $a\colon b$ se lee a es a b. El primer término de una razón (a) recibe el nombre de antecedente, y el segundo (b), el de consecuente (Ministerio de Educación, 2016d, p. 48; Ministerio de Educación, 2016e, p. 38).
Proporción	• La igualdad de dos expresiones que representan la misma razón se denomina una proporción. Por ejemplo, las razones $\frac{4}{10}$ y $\frac{6}{15}$ forman una proporción, porque $\frac{4}{10} = \frac{6}{15}$. Se lee así: 4 es a 10 como 6 es a 15 (Ministerio de Educación, 2016d, p. 48; Ministerio de Educación, 2016e, p. 38).
Porcentaje	• Un porcentaje es la razón de un número con respecto a 100. La razón $\frac{x}{100}$ se puede escribir como $x\%$ y la fracción tiene un valor decimal. El símbolo % se lee por ciento. El $x\%$ significa que a cada 100 unidades de una magnitud le corresponde x de la otra (Ministerio de Educación, 2016d, p. 50; Ministerio de Educación, 2016e, p. 44; Ministerio de Educación, 2016f, p. 42).
Probabilidad	• La probabilidad de un evento discreto es la medida de la posibilidad de ocurrir que tiene un suceso. Para encontrar la probabilidad de ocurrencia de un suceso, se halla el cociente entre el número de casos favorables *n(A)* y el número total de casos posibles *P(Ω)* (Ministerio de Educación, 2016d, p. 182; Ministerio de Educación, 2016e, p. 183; Ministerio de Educación, 2016f, p. 186). • Si se considera un dado equilibrado, es decir, un dado en forma de cubo perfecto, construido con material homogéneo y con sus seis caras cuadradas numeradas del 1 al 6, y se lana el dado sobre un plano, la razón 1:6 o la fracción $\frac{1}{6}$ se denomina la probabilidad de que ocurra

CONCEPTO	DEFINICIÓN
	el suceso “salir la cara con el número 4” (Ministerio de Educación, 2016e, p. 182). • Si los resultados de un experimento aleatorio finito son equiprobables, la probabilidad de un suceso A se expresa en la Ley de Laplace (Ministerio de Educación, 2016g, p. 182).

3.1.4. Objeto primario 4: procedimientos

Se entiende como procedimientos a las diversas operaciones, algoritmos, técnicas, procesos y estrategias que se usan para resolver las situaciones-problemas (Godino, 2003, p. 111; Godino, Batanero & Font, 2007, p. 7). Godino (2003) sostiene que las acciones o procedimientos llegan a automatizarse, se convierten en propios de un tipo de problema y, por lo tanto, se convierten en objeto de enseñanza.

Rojas (2014) señala que conocer los procedimientos matemáticos asociados a los racionales implica lo siguiente:

a) dominar los procesos relacionados con las fracciones; por ejemplo, simplificación y amplificación de fracciones, operaciones con fracciones, fracciones equivalentes, comparación de fracciones y operaciones con números decimales (p. 84)
b) dominar los procedimientos empleados para realizar las operaciones y resolver las situaciones y problemas asociados a los números racionales; por ejemplo, para dividir fracciones, conocer el algoritmo de los productos cruzados o el de invertir y multiplicar, entre otros. Este dominio abarcaría conocer los algoritmos de las operaciones relacionadas con los temas o áreas asociadas a los racionales, como proporcionalidad, probabilidad, etc. (pp. 84-89)

Considerando los indicadores de Rojas (2014), y lo que plantean Gairín (2004) y Fandiño (2009) en torno a las dificultades de los estudiantes en la gestión de las operaciones con las fracciones, a continuación, en la tabla 14, se muestran los diecisiete procedimientos (denominados así en el EOS), asociados a la resolución de las situaciones-problemas relacionadas con los racionales. Cada procedimiento ha sido categorizado con una frase que describe la operación o tarea por realizarse. Los ejemplos que se presentan para uno de los tipos han sido extraídos de los textos analizados.

Tabla 14

Procedimientos asociados a los números racionales

P1. Procedimiento para comparar fracciones

> Para comparar fracciones:
> - Si tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
> - Si tienen diferente denominador, se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador y luego se comparan.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 11)

P2. Procedimiento para obtener fracciones equivalentes

Por ampliación

> Al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número natural, diferente de cero, se obtienen **fracciones equivalentes**. Este proceso se denomina **amplificación**.
>
> Si multiplicamos por 9 el numerador y el denominador de la fracción $\frac{11}{15}$, estamos amplificándola por 9, como se muestra a continuación:
>
> $\frac{11}{15} = \frac{11 \times 9}{15 \times 9} = \frac{99}{135}$

(Ministerio de Educación, 2016d, pp. 32-33)

Por simplificación

> Al dividir el numerador y el denominador de una fracción entre un mismo número que sea divisor común, se obtienen **fracciones equivalentes**. Este proceso se denomina **simplificación**.

(Ministerio de Educación, 2016d, pp. 32-33)

Ejemplo:

Simplificamos la fracción $\frac{36}{60}$.

Solución

Para simplificar $\frac{36}{60}$, dividimos al numerador y al denominador por el mayor divisor en común que tengan, en este caso, 12:

$$\frac{36}{60} = \frac{36 \div 12}{60 \div 12} = \frac{3}{5}.$$

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 13)

De forma general

Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada, ésta debe ser simplificada al máximo y enseguida se multiplica a sus dos términos por una misma cantidad.

Ejemplo:

Hallar la forma general de las fracciones equivalentes a la fracción $\frac{527}{744}$.

Resolución:

Simplificamos la fracción: $\frac{527}{744} = \frac{17 \times 31}{24 \times 31} \Rightarrow \frac{17}{24}$

Multiplicamos a ambos términos por una misma cantidad:

$$\frac{17}{24} <> \frac{34}{48} <> \frac{51}{72} <> \frac{68}{96} <> \ldots$$

En general, si: $\frac{a}{b} <> \frac{17}{24} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{17n}{24n} \Rightarrow \begin{cases} a = 17n \\ b = 24n \end{cases}$

(Gamarra, 2015, p. 229)

P3. Procedimiento para convertir una fracción decimal a un número decimal

1. Escribir el numerador y una coma después de correr de derecha a izquierda tantas cifras como ceros tenga el denominador.
2. Si la cantidad de cifras en el numerador es menor que la de ceros en el denominador, agregar a la izquierda del numerador tantos ceros como sea necesario para correr la coma decimal la cantidad de lugares que indica el denominador.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 34)

P4. Procedimientos para convertir una fracción decimal a su fracción generatriz

De fracción decimal exacto a fracción común

Regla:
Se escribe como numerador la parte entera seguida de la parte decimal y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

Ejemplo:

- $4,36 = \frac{436}{100} \xrightarrow{\text{simplificando}} \frac{109}{25}$ (fracción generatriz)
- $0,488 = \frac{488}{1000} \xrightarrow{\text{simplificando}} \frac{61}{125}$ (fracción generatriz)

(Gamarra, 2015, p. 230)

De fracción decimal periódico puro a fracción común

Si la fracción decimal periódico puro es de la forma $0,\widehat{ab\ldots c}$, se escribe como numerador la parte periódica y como denominador el número formado por la cifra 9, tantos 9 como cifras tenga la parte periódica.

Ejemplos:

- $0,\widehat{740} = \frac{740}{999} \Rightarrow \frac{20 \times 37}{27 \times 37} = \frac{20}{27}$ (f. generatriz)

Si la fracción decimal periódico puro es de la forma $ab,\widehat{cd\ldots e}$, se escribe como numerador la parte entera seguido de la parte periódica menos la parte entera y como denominador el número formado por la cifra 9, tantos 9 como cifras tenga la parte periódica.

Ejemplos:

- $8,\widehat{27} = \frac{827 - 8}{99} = \frac{819}{99} \Rightarrow \frac{91}{11}$ (f. generatriz)

(Gamarra, 2015, p. 230)

De fracción decimal periódico mixto a fracción común

Regla: Se escribe como numerador la parte no periódica, seguido de la parte periódica menos la parte no periódica y como denominador, por cada cifra periódica un 9 y por cada cifra no periódica (de la parte decimal) un cero.

Ejemplos:

- $0,45\widehat{90} = \frac{4590 - 45}{9900} = \frac{4545}{9900} \Rightarrow \frac{101}{220}$ (f. generatriz)
- $2,5\widehat{36} = \frac{2536 - 25}{990} = \frac{2511}{990} \Rightarrow \frac{279}{110}$ (f. generatriz)

(Gamarra, 2015, p. 231)

P5. Procedimientos para sumar o restar fracciones

Para **sumar o restar fracciones con el mismo denominador** (homogéneas), se suman o restan los numeradores según corresponda y se escribe el mismo denominador.

Para **sumar o restar fracciones con diferente denominador** (heterogéneas), se buscan fracciones equivalentes a estas, con igual denominador; luego, se suman o restan estas fracciones.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 36)

Ejemplo:

El lunes Carmen compró $\frac{1}{4}$ kg de azúcar y el jueves compró $\frac{2}{3}$ kg. ¿Cuánta azúcar compró más el jueves que el lunes?

Solución

Para resolver el problema, debemos resolver la operación $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$.

Como las fracciones son heterogéneas, debemos buscar fracciones homogéneas que sean equivalentes (ver figura 15.2).

- Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: m. c. m. (3, 4) = 12.
- Amplificamos por 4: $\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12}$
- Amplificamos por 3: $\frac{1}{4}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}$
- Restamos las fracciones: $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$

Por tanto, Carmen compró $\frac{5}{12}$ más el jueves.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 37)

<u>Uso del MCD para sumar fracciones</u>

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la propiedad 4. En cambio reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores) y luego usamos la propiedad 3. Este denominador es el **Mínimo Común Denominador** (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 ■ Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36}+\frac{7}{120}$

SOLUCIÓN Al factorizar cada denominador en factores primos se obtiene

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{y} \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones usando la máxima potencia de cada factor. Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36}+\frac{7}{120}=\frac{5\cdot 10}{36\cdot 10}+\frac{7\cdot 3}{120\cdot 3} \qquad \text{Use el común denominador}$$

$$=\frac{50}{360}+\frac{21}{360}=\frac{7}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

(Stewart, Redlin & Watson, 2017, p. 5)

P6. Procedimientos para sumar o restar decimales

Cuando se van a sumar o a restar números decimales que no tienen el mismo número de cifras después de la coma, se iguala el número de cifras agregando ceros a la derecha de la última cifra del número que lo requiera.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 36)

Ejemplo:

Gilberto obtuvo S/. 28,75 por la venta de dos zampoñas. Patricia ganó S/. 13,5 más que Gilberto por la venta de las suyas. ¿Cuánto dinero obtuvo Patricia?

Para responder la pregunta, sumamos 28,75 y 13,5. Para ello, ubicamos los sumandos, de manera tal que las comas decimales queden alineadas y, con el fin de que las dos cantidades tengan el mismo número de cifras después de la coma decimal, expresamos 13,5 como 13,50 y resolvemos.

$$\begin{array}{r} 2\,8,\,7\,5\ + \\ 1\,3,\,5\,0 \\ \hline 4\,2,\,2\,5 \end{array}$$

Por lo tanto, Patricia ganó S/. 42,25.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 36)

P7. Procedimientos para multiplicar y dividir fracciones

Para multiplicar

La **multiplicación de fracciones** consiste en multiplicar los numeradores y los denominadores entre sí. El producto de los numeradores será el numerador, y el de los denominadores, el denominador de la fracción resultante.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 38)

Ejemplos:

Luis le regaló a su hijo Raúl la mitad de un terreno. Raúl, a su vez, le regaló a su hija $\frac{1}{4}$ de lo que le correspondió. ¿Qué parte de la finca le regaló Raúl a su hija?

$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$ matemáticamente se expresa como $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$. Raúl le regaló a su hija $\frac{1}{8}$ del terreno.

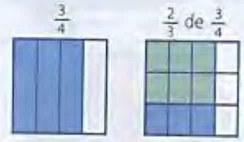
(Ministerio de Educación, 2016d, p. 38)

¿A qué fracción equivalen los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de un área?

La región azul del rectángulo de la figura representa los $\frac{3}{4}$ del área total. La parte sombreada con verde son los $\frac{2}{3}$ de la región azul.

Observemos que 6 de las 12 divisiones de todo el rectángulo corresponden a la región verde. Es decir: $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ equivalen a $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ representan $\frac{1}{2}$ del área.



Lo podemos escribir así:
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times 3}{3\times 4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 15)

<u>Para dividir</u>

Para **dividir dos fracciones**, multiplicamos el dividendo con el recíproco del divisor.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 39)

Ejemplo:

Determinamos cuántos tarros de pintura se necesitan para envasar $6\frac{1}{2}$ galones en tarros cuya capacidad es de $\frac{5}{9}$ de galón.

Solución

Para resolver el problema, realizamos la operación $6\frac{1}{2}\div\frac{5}{9}$.

Para dividir fracciones, multiplicamos el dividendo por el recíproco del divisor.

$$6\frac{1}{2}\div\frac{5}{9}=6\frac{1}{2}\div\frac{9}{5}=$$

Expresamos el número mixto como fracción y efectuamos la multiplicación.

$$\frac{13}{2}\times\frac{9}{5}=\frac{117}{10}=11\frac{7}{10}$$

En conclusión, se necesitan $\frac{117}{10}$ tarros de pintura, es decir, 12 tarros.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 39)

P8. Procedimientos para multiplicar y dividir decimales

<u>Para multiplicar</u>

Para **multiplicar números decimales** se realiza la multiplicación como si se tratara de números naturales y en el producto se cuenta, de derecha a izquierda, tantas cifras decimales como la suma de la cantidad de cifras decimales de los factores.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 38)

Ejemplo:

Calculamos el área del terreno rectangular de la figura.

Figura 15.4

Tiene 2 cifras decimales 2, 3 5 ×
Tiene 1 cifra decimal 6, 4
9 4 0
1 4 1 0
Separamos 3 cifras decimales en el resultado 1 5, 0 4 0

Solución

Para hallar el área del terreno, multiplicamos la longitud del ancho (2,35 m) por la longitud del largo (6,4 m), como se muestra en la figura 15.4.

Como el producto es 15,040, entonces el área del terreno es 15,04 m².

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 38)

Para dividir

Para **dividir dos números decimales** se realiza una división con números naturales que tenga el mismo cociente. Los números naturales que se van a dividir se obtienen multiplicando el dividendo y el divisor por la potencia de 10 necesaria.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 39)

Ejemplo:

Una constructora construirá un edificio de 21,6 m de altura. Si construye departamentos simples, el edificio tendrá 9 pisos. Si hace departamentos dúplex, cada piso tendrá una altura de 3,6 m. ¿Qué altura tendrá cada piso si se construyen departamentos simples? ¿Cuántos pisos tendrá el edificio si se construyen departamentos dúplex?

Solución

Para responder la primera pregunta, dividimos 21,6 entre 9.

$$\begin{array}{r|l} 216 & 90 \\ \cline{2-2} 36 & 2 \end{array}$$

Resolvemos la división entre naturales.

$$\begin{array}{r|l} 216 & 90 \\ \cline{2-2} 36\mathbf{0} & 2, \end{array}$$

Continuamos la división agregando un 0 al residuo y colocando una coma decimal en el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 216 & 90 \\ \cline{2-2} 360 & 2,4 \\ 00 & \end{array}$$

Dividimos 360 décimas entre 90.

Una forma de hacerlo consiste en multiplicar el dividendo y el divisor por 10, como se muestra a la derecha. Así, se trata de una división entre números naturales (216 ÷ 90). Los cocientes de 21,6 ÷ 9 y 216 ÷ 90 son iguales.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 39)

P9. Procedimiento realizar operaciones combinadas en $\mathbb{Q}$

Para realizar operaciones combinadas con números enteros, fracciones, decimales o una combinación de ellos, primero debemos resolver las multiplicaciones y divisiones, y luego, las adiciones y sustracciones. Si hubiera algún signo de agrupación, resolvemos primero las operaciones que aparecen dentro de ellos.

(Ministerio de Educación, 2016g, p. 12)

P10. Procedimiento para calcular la potencia de una fracción

El **numerador** de la potencia es el numerador multiplicado por sí mismo la cantidad de veces que indique el exponente; lo mismo se aplica para el **denominador**. Una potencia elevada a un exponente *n* está elevada a una potencia indeterminada.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 27)

Ejemplo:

$\left(\frac{2}{3}\right)^4$ Elevamos al exponente 4 tanto el numerador como el denominador.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}$$

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 27)

P11. Procedimiento para calcular la potencia de un decimal

Para elevar una expresión decimal a un exponente entero positivo, se eleva la cifra numérica al exponente indicado como si fuese entero, y luego se separa tantas cifras decimales como indique el resultado de la multiplicación del exponente por el número de cifras decimales.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 27)

Ejemplo:

El lado de un cuadrado mide 0,06 cm. ¿Cuál es área de la región cuadrada?

Solución

Para calcular el área de la región cuadrada, elevamos al cuadrado el valor de la longitud del lado.

Por lo tanto, el área de la región cuadrada es 0,0036 cm^2.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 27)

P12. Procedimiento para elevar una fracción a un exponente negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}; a, b \neq 0$$

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 28)

Ejemplo:

Calculemos las siguientes potencias:

a. 5^{-3} b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$ c. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$

Solución

En los tres primeros casos invertiremos las expresiones, de modo que el exponente sea positivo.

a. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 3^5 = 243$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4} = \frac{625}{16}$

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 28)

P13. Procedimiento para hallar la raíz de una fracción

Simplifiquemos las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{50}}$ b. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}$

Solución

a. Expresamos $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{50}}$ como la raíz de un producto.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{50}} = \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{27}{50}} = \sqrt{\frac{54}{150}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

b. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \sqrt[3]{\frac{1^6}{2^6}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 31)

P14. Procedimientos para resolver un problema de proporcionalidad directa

Ejemplos:

x operarios

96 m	
96 m	32 m

x + 4 operarios

1 operario levanta $32 \div 4 = 8$ metros de pared.

$96 \div 8 = 12$ operarios levantan 96 metros de pared.

Un grupo de operarios levanta 96 metros de pared en una semana. Se sabe que si tuvieran que levantar 128 metros de pared, se necesitaría contratar a 4 operarios más. ¿Cuántos operarios hay en el grupo? ¿Cuántos metros de pared levanta un operario en una semana?

- A más metros de pared para construir, más operarios se necesitarán. Se trata de magnitudes directamente proporcionales.
- Planteamos ambas magnitudes a través de una tabla:

Longitud de la pared	96	128
N.° de operarios	x	$x + 4$

- Calculamos el número inicial de operarios:

$$\frac{96}{x} = \frac{128}{x+4} \rightarrow 96x + 384 = 128x \rightarrow 32x = 384 \rightarrow x = 12$$

- Si 12 operarios levantan 96 metros de pared, un operario levantará $96 \div 12 = 8$ metros de pared.

En el grupo hay 12 operarios. En una semana, un operario levanta 8 metros de pared.

(Ministerio de Educación, 2016f, p. 32)

<u>Usando el método de reducción a la unidad</u>

Un grupo de estudiantes de un colegio desean hacer un regalo a sus maestros y forman una comisión. Deciden regalar a cada uno lapiceros grabados con sus nombres. Para ello, la comisión averigua que 3 lapiceros, incluida la grabación, cuestan S/. 18,60. Si en total son 32 maestros, ¿cuánto se paga por los lapiceros grabados?

Para resolver el problema, utilizaremos el **método de reducción a la unidad** y tendremos en cuenta algunos pasos.

Paso 1. Identificamos si las magnitudes son directamente proporcionales.

Podemos observar que por 3 lapiceros, incluida la grabación, se paga S/. 18,60. Como son 32 maestros, necesitamos más lapiceros, y si aumentamos el número de lapiceros, debemos pagar más dinero. Por tanto, podemos afirmar que las magnitudes *lapiceros y dinero* son magnitudes directamente proporcionales.

Paso 2. Precisamos los datos.

El costo de 3 lapiceros es S/. 18,60. Necesitamos lapiceros para 32 maestros.

Paso 3. Reducimos a la unidad.

Como 3 lapiceros cuestan S/. 18,60, es necesario averiguar el costo de un lapicero. Entonces, procedemos a dividir y así obtener el valor unitario por lapicero.

$$\frac{18{,}60}{3} = 6{,}20$$

Por tanto, cada lapicero cuesta S/. 6,20.

Paso 4. Respondemos la pregunta.

Cada lapicero cuesta S/. 6,20. Ahora, necesitamos saber cuánto se debe pagar por la compra de 32 lapiceros.

Entonces, resolvemos el problema de la siguiente manera:

S/. 6,20 x 32 = S/. 198,40

Finalmente, podemos concluir que por los lapiceros grabados que les regalaremos a nuestros maestros tendremos que pagar S/. 198,40.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 51)

<u>Usando regla de tres simple directa</u>

La **regla de tres simple directa** es un método para resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. Consiste en plantear una proporción que presenta tres datos conocidos y uno desconocido.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 52)

Ejemplo:

Un obrero ganó S/. 150 por trabajar 6 días. ¿Cuántos días debe trabajar para ganar S/. 325?

Solución

Las magnitudes *días trabajados y dinero ganado* son directamente proporcionales, entonces la razón $\frac{\text{dinero}}{\text{días}}$ es constante.

Dinero	Días
S/. 150	6
S/. 325	x

Tabla 22.3

$$\frac{150}{6} = \frac{325}{x}$$
$$150 \quad x = 325 \quad 6$$
$$150 \quad x = 1950$$
$$x = \frac{1950}{150} = 13$$

El obrero debe trabajar 13 días.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 53)

El 40 % de los empleados de una empresa es menor de 30 años. Si en la empresa hay 120 empleados, ¿cuántos empleados son menores de 30 años?

Solución

Como 40 % = $\frac{40}{100}$, la situación significa que la razón $\frac{\text{Número de empleados menores de 30 años}}{\text{Número total de empleados}}$ es igual a la razón $\frac{40}{100}$. Por lo tanto, $\frac{x}{120} = \frac{40}{100}$, donde x representa el número de empleados menores de 30 años.

Resolviendo, tenemos $100 \cdot x = 120 \cdot 40$
$$x = \frac{4800}{100}$$
$$x = 48$$

Luego, 48 empleados son menores de 30 años.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 54)

P15. Procedimientos para calcular aumentos y descuentos porcentuales

Para calcular un aumento, se suma al precio inicial la cantidad (N) correspondiente al porcentaje (a) aumentado.

Cantidad: N

Se le aumenta a % de N

Aumento porcentual = $N + a\ \%\ N = (100 + a)\ \%\ N$

$\boxed{\text{Aumento porcentual} = (100 + a)\ \%\ N}$

Para calcular un descuento, se resta del precio inicial (N) la cantidad correspondiente al porcentaje descontado (b).

Cantidad: N

Se le descuenta b % de N

Descuento porcentual = $N - b\ \%\ N = (100 - b)\ \%\ N$

$\boxed{\text{Descuento porcentual} = (100 - b)\ \%\ N}$

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 56)

Ejemplo:

Diana trabaja vendiendo picarones y cobra 200 soles semanales. Un día de la semana se quedó haciendo horas extras, razón por la cual le aumentaron el 5 % de su sueldo. Además, antes del fin de semana, logró una gran venta y la premiaron con un nuevo aumento del 20 %. ¿Cuánto cobró esa semana?

Solución

El sueldo semanal de Diana es S/. 200. Se le aumentó el 5 % de S/. 200, es decir, 10. Por tanto, recibió S/. 210. Sin embargo, Diana logró una gran venta y la premiaron con un nuevo aumento de 20 %: $\frac{20}{100} \times 200 = 40$.

A lo que recibió inicialmente, le sumamos el 20 % de su sueldo; así:

$210 + 40 = 250$.

En la semana mencionada, Diana cobró en total S/. 250.

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 57)

P16. Procedimiento para calcular la probabilidad de un suceso (Regla de Laplace)

De una urna como la de la figura 73.1 se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea...

a. de color rojo, número impar?
b. de cualquier color, número par?
c. de color amarillo o azul, número impar?

Figura 73.1

Solución

Sean A = {conjunto de bolas amarillas}, R = {conjunto de bolas rojas}, Z = {conjunto de bolas azules}, P = {conjunto de números pares} e I = {conjunto de números impares} y $n(\Omega) = 15$.

a. Ri = {bola roja e impar}
$n(Ri) = 5$
$P(Ri) = \frac{5}{15} = 0{,}333 = 33{,}3\ \%$

c. Ai = {bola amarilla e impar}
- $n(Ai) = 2$
$P(Ai) = \frac{2}{15} = 0{,}133 = 13{,}3\ \%$

b. Ap = {bola amarilla y par}
$n(Ap) = 3$
$P(Ap) = \frac{3}{15} = 0{,}2 = 20\ \%$
- Rp = {bola roja y par}
$n(Rp) = 1$
$P(Rp) = \frac{1}{15} = 0{,}067 = 6{,}7\ \%$
- Zp = {bola azul y par}
$n(Zp) = 2$
$p(Zp) = \frac{2}{15} = 0{,}133 = 13{,}3\ \%$

(Ministerio de Educación, 2016d, p. 183)

P17. Procedimiento para calcular la probabilidad condicional

Sea A un suceso cualquiera de un espacio muestral. La probabilidad de que se realice el suceso B habiéndose realizado el suceso A es una probabilidad condicionada, que se simboliza con P(B|A) y se calcula así:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)};\ \text{con } P(A) > 0$$

(Ministerio de Educación, 2016g, p. 182)

Ejemplo:

En la XXIX edición de la Maratón de los Andes, el 35 % de los participantes son varones, el 30 % pertenece a la categoría juvenil, y el 24 % son varones de la categoría menores. Se elige al azar a uno de los participantes y resulta que pertenece a la categoría menores. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

- Construimos una tabla en el margen.

		A		
		Menores	Juvenil	Total
	Varón	24	11	35
B	Mujer	46	19	65
	Total	70	30	100

$(A \cap B)$ $n(A)$

- Hallamos la probabilidad condicional: probabilidad de ser mujer sabiendo que pertenece a la categoría menores. Es decir: P(B|A)

  A = {Persona perteneciente a la categoría menores} B = {Es mujer}

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{46/100}{70/100} = \frac{23}{35}$$

La probabilidad de que sea mujer sabiendo que pertenece a la categoría menores es $\frac{23}{35}$.

(Ministerio de Educación, 2016g, p. 182)

3.1.5. Objeto primario 5: propiedades

Las propiedades se refieren a las condiciones de ejecución de los procedimientos, a las características particulares de las situaciones-problemas. Cada propiedad de un objeto matemático lo relaciona con otros y, de esa manera, favorece a la ampliación del significado del objeto en cuestión. "Es frecuente que los libros o autores usen diferentes definiciones para un mismo objeto matemático, cada una de las cuales enfatizan propiedades específicas del mismo" (Godino, 2003, p. 115).

A continuación, en la tabla 15, se presentan las propiedades de los números racionales que se desprenden de lo declarado por los autores analizados (Rojas, Flores y Carrillo (2013); Rojas (2014); Gairín (2004); y Fandiño (2009)). Cabe resaltar que ninguno de los autores hace referencia, de manera explícita, a la importancia del dominio de las propiedades asociados a los racionales. Sin embargo, sí refieren al conocimiento de la estructura conceptual de $\mathbb{Q}$, lo que implicaría conocer la densidad de este conjunto numérico y de las operaciones asociadas a este, entre otros conceptos. Cabe resaltar que los ejemplos que se presentan han sido tomados de los textos analizados.

Tabla 15

Propiedades asociadas a los números racionales

Propiedad 1. Sobre la densidad de $\mathbb{Q}$

El **conjunto de números racionales** es un conjunto denso, pues si se toman dos números racionales distintos, siempre existirá otro número racional ubicado entre ellos.

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 18)

Propiedad 2. Sobre las cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$

Para la adición son:

Propiedad clausura	Al sumar dos números racionales, el resultado siempre será otro número racional.	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}; b, d \text{ y } f \neq 0$
Propiedad asociativa	Se dice que si se agrupan los sumandos racionales de diferente forma, el resultado no cambia y seguirá siendo un número racional.	$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right); b, d \text{ y } f \neq 0$
Propiedad conmutativa	Si se cambia el orden de los sumandos, el resultado no cambia.	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}; b \text{ y } d \neq 0$
Elemento neutro	Si se suma cero a cualquier número racional, la respuesta será el mismo número racional.	$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}; b \neq 0$
Inverso aditivo o elemento opuesto	Existe un elemento negativo que al sumarlo a otro se obtiene como resultado el cero.	$\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=0; b \neq 0$

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 19)

Para la multiplicación son:

Propiedad clausura	Al multiplicar dos números racionales, el resultado también es un número racional.	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; b, d y $f \neq 0$
Propiedad asociativa	Se dice que si se agrupan los factores de diferente forma no altera el producto.	$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$; b, d y $f \neq 0$
Propiedad conmutativa	El orden de los factores no altera el producto.	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$; b y $d \neq 0$
Elemento neutro	Existe un elemento neutro que es el número uno, cuyo producto con otro número racional dará como resultado el mismo número.	$\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$
Inverso multiplicativo	Existe un elemento que al multiplicarlo a otro se obtiene como resultado el uno.	$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$; a y $b \neq 0$

Para relacionar la adición y la multiplicación:

Propiedad distributiva	Al combinar adiciones y multiplicaciones, el resultado es igual a la suma de los factores multiplicado por cada uno de los sumandos.	$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$; b, d y $f \neq 0$

(Ministerio de Educación, 2016e, p. 19)

Propiedad 3. Sobre la potenciación en $\mathbb{Q}$

Dados a y P $\in \mathbb{Q}$, y $n \in \mathbb{N}$, la potenciación en $\mathbb{Q}$ se define: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}} = P$, donde a es la base, n es el exponente y P es la potencia.

Sean $a, b \in \mathbb{Q}$, y $m, n \in \mathbb{N}$. La potenciación en $\mathbb{Q}$ cumple las siguientes propiedades:

Potencia de un producto $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Potencia de un cociente $(a \div b)^n = a^n \div b^n$; $b \neq 0$
Potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Potencia de exponente 0 $a^0 = 1$; $a \neq 0$
Producto de potencias de igual base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Cociente de potencias de igual base $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $a \neq 0$
Potencia de exponente negativo $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; $a \neq 0$	Exponentes sucesivos $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

(Ministerio de Educación, 2016f, p. 12)

Es importante señalar que, en ninguno de los textos, se identificó la demostración de la propiedad de densidad en los números racionales, aunque sea de suma importancia no solo manejar el concepto o un proceso de cálculo, sino también conocer la justificación conceptual (Gairín, 2004).

Se mencionó, líneas arriba, que los investigadores Llinares (2008); Llinares y Sánchez (1997), Gairín (2004), Escolano y Gairín (2005), Silva (2005), Millsaps (2005), Fandiño (2009), Rojas, Flores y Carrillo (2013), y Rojas (2014) sostienen que una de las situaciones-problemas que favorecen la comprensión de los números racionales es la que aborda la demostración de la densidad en $\mathbb{Q}$**.**

Ejemplo 19. Muestre que entre dos números racionales siempre existe otro número racional.

Solución

Digamos que tenemos dos números racionales a los que vamos a llamar a y b. Supongamos que $a < b$. Como la suma y la multiplicación de dos números racionales es otro número racional, se tiene que $\frac{a+b}{2}$ es un número racional. Además, como $a < b$, tenemos que $a + a < a + b < b + b$; es decir, $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Figura 14. Densidad en $\mathbb{Q}$ (Ugarte & Yucra, 2014, p.140)

Teorema 21. (Densidad de los números racionales)

Dados los números racionales a y b, tales que a < b, siempre existe un número racional c tal que

$$a < c < b.$$

Figura 15. Definición de densidad en $\mathbb{Q}$ (Carranza, 2006, p.124)

Si bien la demostración de esta propiedad no se evidencia en la educación secundaria pública, sí se observa la presencia de esta en la educación superior. Por ejemplo, en la figura 14, se presenta la demostración de esta propiedad, la cual se presenta en el libro de Ugarte y Yucra (2014); en la figura 15, se da a conocer la formalización de la propiedad que se muestra en el libro de Carranza (2006). Ambos son textos de consulta usados por estudiantes que pregado.

3.1.6. Objeto primario 6: argumentos

Godino (2003) menciona que los procedimientos y conceptos se relacionan entre sí mediante argumentos o razonamientos. Es decir, los argumentos permiten verificar, validar, explicar y justificar la solución de las situaciones-problemas, "justificaciones que pueden ser deductivas o de otro tipo" (Godino, 2003, p. 116; Godino, Batanero & Font, 2007, p. 7).

Para determinar los argumentos asociados a los números racionales, se tomó como referencia los que identificó Gómez (2014) para otro objeto matemático. La autora señala que los textos que analizó contenían cuatro tipos de argumentos: uso de ejemplos y contraejemplos, generalización, apoyo gráfico, y razonamiento inductivo (p. 63). Ahora bien, considerando la relación existente entre los conceptos y procedimientos asociados a los números racionales presentados en los apartados anteriores, se establecieron los cuatro argumentos usados por la autora, ya que son pertinentes para validar la resolución de las situaciones-problemas presentadas considerando los conceptos y procedimientos. A continuación, se presentan ejemplos extraídos de los textos para cada uno de los argumentos.

Tabla 16

Argumentos asociados a los números racionales

A1. Razonamiento inductivo

Un grupo de estudiantes quiere construir con materiales actuales una fuente inspirada en la arquitectura inca. Antes de empezar, localizan un punto en el que realizarán la construcción con la condición de disponer de una saliente de agua con bastante fuerza para que atraviese el conducto de rocas. Un ingeniero del grupo calcula que sale con una fuerza de 3 bidones por minuto y comparte con sus compañeros una tabla en la que expresa en bidones y en litros la cantidad de agua.

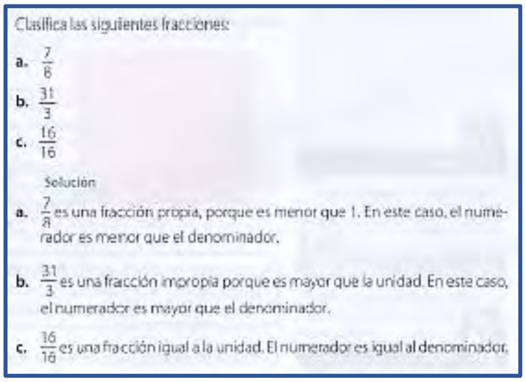
Cantidad de agua (bidones)	0,1	0,2	0,4	0,5	1
Cantidad de agua (litros)	2	4	8	10	20

Tabla 11.1

a. ¿Es correcto afirmar que los datos de la tabla son directamente proporcionales? ¿Por qué?

(Ministerio de Educación, 2016i, p. 56)

A2. Uso de ejemplos y contraejemplos


Clasifica las siguientes fracciones:

a. $\frac{7}{8}$

b. $\frac{31}{3}$

c. $\frac{16}{16}$

Solución

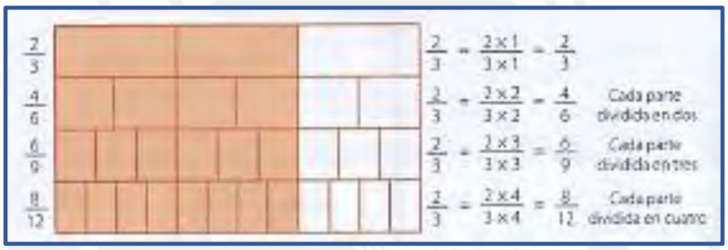
a. $\frac{7}{8}$ es una fracción propia, porque es menor que 1. En este caso, el numerador es menor que el denominador.

b. $\frac{31}{3}$ es una fracción impropia porque es mayor que la unidad. En este caso, el numerador es mayor que el denominador.

c. $\frac{16}{16}$ es una fracción igual a la unidad. El numerador es igual al denominador.

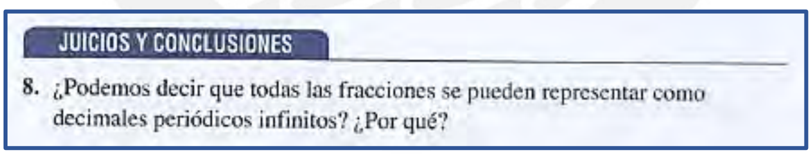
(Ministerio de Educación, 2016d, p. 30)

A3. Apoyo figural para favorecer la comprobación



(Ministerio de Educación, 2016d, p. 32)

A4. Generalización


JUICIOS Y CONCLUSIONES

8. ¿Podemos decir que todas las fracciones se pueden representar como decimales periódicos infinitos? ¿Por qué?

(Ministerio de Educación, 2016k, p. 17)

A modo de síntesis, se presentan, en la siguiente figura, las situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definición, procedimientos, propiedades y argumentos que conforman el significado de referencia institucional construido para los números racionales teniendo en cuenta el sistema educativo de la educación secundaria peruana.

SIGNIFICADO DE REFERENCIA INSTITUCIONAL PARA LOS NÚMEROS RACIONALES (S*istema educativo peruano*)	Situaciones-problemas	Situaciones-problemas que favorecen: la clasificación de fracciones, la determinación de fracciones homogéneas y heterogéneas, el ordenamiento y comparación de fracciones, la ubicación de fracciones en la recta numérica, la ubicación de números decimales en la tabla de valor posicional, la obtención de fracciones equivalentes, la expresión de una fracción impropia como fracción mixta o viceversa, la expresión de una fracción como número decimal (exacto o periódico) o viceversa, las operaciones con fracciones y números decimales (exactos o periódicos), la discriminación de números racionales, la aplicación de la propiedad de densidad en $\mathbb{Q}$, la aplicación de las propiedades asociadas a las operaciones en $\mathbb{Q}$, la resolución de situaciones con fracciones y números decimales (exactos o periódicos), la expresión de la equivalencia entre fracción, decimal y porcentaje, la aplicación de la definición de porcentaje, la resolución de situaciones en las que se aplica la definición de porcentaje, razón y proporcionalidad, la aplicación de aumentos y descuentos porcentuales, el cálculo de la variación porcentual y la resolución de situaciones sobre probabilidad. También, situaciones-problemas que usen modelos de medida, que aborden el significado de la fracción como medida, que favorezcan la ubicación de los números racionales en la recta usando regla o compás y que aborden la demostración de la densidad en $\mathbb{Q}$.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">SIGNIFICADO DE REFERENCIA INSTITUCIONAL PARA LOS NÚMEROS RACIONALES

(Sistema educativo peruano)</td>
<td>Lenguajes</td>
<td>Lenguaje asociados a los números racionales: el natural, el numérico, el algebraico, el figural, el gráfico, el tabular y el uso de objetos materiales.</td>
</tr>
<tr>
<td>Conceptos-definición</td>
<td>Los conceptos-definición que intervienen en el desarrollo de los números racionales son conjunto de los números racionales, fracción, fracción propia, fracción impropia, fracción igual a la unidad, fracción mixta, fracciones homogéneas y heterogéneas, fracciones equivalentes, fracción irreductible, fracciones decimales, fracciones recíprocas y números decimales. Y los que son aplicaciones de las propiedades de los números racionales son razón, proporción, porcentaje y probabilidad</td>
</tr>
<tr>
<td>Procedimientos</td>
<td>Los procedimientos asociados a la resolución de las situaciones-problemas relacionadas con los números racionales lo conforman los procedimientos para comparar fracciones, obtener fracciones equivalentes, convertir una fracción decimal a un número decimal y a su fracción generatriz, operar (sumar, restar, dividir y multiplicar) con fracciones y decimales, operar en $\mathbb{Q}$, calcular la potencia de una fracción y un decimal, elevar una fracción a un exponente negativo, hallar la raíz de una fracción, resolver un problema de proporcionalidad directa, calcular aumentos y descuentos porcentuales, calcular la probabilidad de un suceso y calcular la probabilidad condicional.</td>
</tr>
</table>

	Propiedades	Las propiedades asociadas al conocimiento de la estructura conceptual de $\mathbb{Q}$ lo conforman la densidad de los números racionales, las cuatro operaciones y la potenciación en $\mathbb{Q}$.
	Argumentos	Argumentos que permiten validar la resolución de las situaciones-problemas asociados a los números racionales: el razonamiento inductivo, el uso de ejemplos y contraejemplos, el poyo figural para favorecer la comprobación y la generalización

Figura 16. Significado de referencia institucional para los números racionales

En el siguiente capítulo, se presenta la valoración de las pruebas de matemática aplicadas por el Ministerio de Educación en los concursos de Nombramiento y Ascenso entre los años 2017 y 2019. Esta valoración se realizará considerando los objetos primarios que conforman el significado de referencia institucional construido.

CAPÍTULO IV: VALORACIÓN DE LAS PRUEBAS DE MATEMÁTICA APLICADAS POR EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN

En este capítulo, se analizan algunas preguntas de la Prueba Única Nacional (PUN) del Concurso de Nombramiento 2017-2019 y del Concurso de Ascenso 2017-2019, ambas evaluaciones convocadas por el Ministerio de Educación. En específico, se trabaja con las preguntas de las pruebas correspondientes a los docentes del nivel secundaria del área de Matemática. La valoración de las preguntas consiste en realizar un contraste entre lo que aparece en las pruebas y lo que se ha identificado en el significado de referencia institucional sobre los números racionales presentado en el capítulo anterior.

4.1. Concurso de Nombramiento

El Concurso Público de Ingreso a la Carrera Pública Magisterial en Instituciones Educativas Públicas de Educación –o simplemente Concurso de Nombramiento– convocado por el Minedu está dirigido a todas las personas que cuentan con título de profesor o de licenciado en educación y que desean desempeñarse como docente en alguna de las II. EE. de Educación Básica del sector público. Es decir, este concurso permite a los docentes interesados ingresar a la Carrera Pública Magisterial y determina el cuadro de méritos para el proceso de contratación docente (Ministerio de Educación, 2019b).

Esta evaluación se lleva a cabo en una etapa nacional y en otra descentralizada. La etapa nacional se caracteriza por ser clasificatoria; es decir, el postulante debe alcanzar los puntajes mínimos requeridos en la evaluación de esta etapa para pasar a la siguiente (Ministerio de Educación, 2019b). En esta etapa, todos los profesores postulantes rinden la Prueba Única Nacional (PUN).

Esta prueba está compuesta por tres subpruebas: Comprensión lectora, Razonamiento lógico y Conocimientos pedagógicos de la especialidad. Solo la tercera se aplica de manera diferenciada según el grupo de inscripción del participante; las dos primeras subpruebas son comunes a todas las especialidades (Ministerio de Educación, 2019c, p. 26).

La PUN consta de un total de noventa preguntas. La subprueba de Comprensión lectora y la de Razonamiento lógico constan de un total de 25 preguntas cada una. Cada pregunta correctamente respondida le suma al evaluado dos puntos, de forma que el puntaje máximo es de cincuenta puntos. Para superar estas subpruebas, el participante debe responder correctamente como mínimo quince preguntas (Ministerio de Educación, 2019c, p. 26). La subprueba de Conocimientos pedagógicos de la especialidad, que evalúa los conocimientos pedagógicos relacionados con la didáctica específica de la especialidad y los conocimientos disciplinares de esta, consta de cuarenta preguntas. Cada pregunta correctamente respondida le suma al evaluado dos puntos y medio, de forma que el puntaje máximo es de cien puntos. Para superar esta subprueba, el profesor debe responder correctamente al menos 24 preguntas. Cabe resaltar que las respuestas incorrectas no generan puntos en contra en la calificación de ninguna de las tres subpruebas. (Ministerio de Educación, 2019c, p. 27).

La etapa descentralizada se desarrolla solo para aquellos docentes que superaron los puntajes mínimos de cada una de las tres subpruebas de la PUN. En esta etapa, se evalúan la competencia pedagógica y la trayectoria profesional (formación profesional, méritos, experiencia profesional) de los postulantes.

4.1.1. Prueba Única Nacional de Matemática

La prueba la rinden todos los docentes inscritos al concurso con título de profesor o licenciado en la especialidad de Matemática, Matemática-Física, Matemática e Informática, o similares (Ministerio de Educación, 2019c, p. 41). Cabe resaltar que todos los postulantes del grupo de inscripción ‘EBR Nivel Secundaria Matemática’ rindieron el mismo examen.

Como se mencionó en la introducción, se realizó la revisión de las preguntas del concurso de Nombramiento aplicados desde el año 2017 hasta el año 2019. Los criterios de selección de las preguntas fueron estos:

- Preguntas pertenecientes a la subprueba Conocimientos pedagógicos de la especialidad
- Preguntas en las que el objeto matemático implicado sea el de los números racionales
- Preguntas en las que la resolución dominante en el sistema exige de los números racionales

Estos criterios se relacionan con dos de las dimensiones del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor, propuesto por Godino (2009): la dimensión matemática que incluye el conocimiento común y ampliado del contenido, y la dimensión didáctica que incluye, entre otros aspectos, el conocimiento especializado de la dimensión matemática.

Las preguntas han sido clasificadas en dos tipos. El tipo 1 agrupa aquellas preguntas que evalúan los conocimientos de la didáctica específica de la especialidad necesarios para conducir procesos de aprendizaje. El tipo 2 reúne las preguntas que evalúan el conocimiento solvente de la disciplina o especialidad (centradas en la resolución de una tarea matemática). La revisión de las preguntas permitirá identificar los objetos primarios del significado de referencia institucional presentes en las situaciones-problemas que se han evaluado hasta ahora en los concursos de Nombramiento.

4.1.1.1. Ítems del Concurso de Nombramiento 2017

A continuación, se presentan las diez preguntas (cinco del tipo 1 y cinco del tipo 2) de esta prueba que cumplen con los criterios establecidos. Para cada pregunta, se presenta el indicador de evaluación y una descripción analítica a partir del significado de referencia institucional construido.

- **Ítems del tipo 1 y análisis de las preguntas**

Indicador de evaluación: Analiza una actividad que implica repetir un procedimiento, e identifica que es de baja demanda cognitiva, puesto que no permite establecer conexiones ni genera reflexión.

N17_1_1

A continuación, se presenta una actividad propuesta a los estudiantes de primer grado:

Calcula:

- $\frac{2}{3}$ de $60 = \frac{2}{3} \times \frac{60}{1} = \frac{120}{3} = 40$
- $\frac{3}{5}$ de $90 =$
- $\frac{4}{7}$ de $490 =$
- $\frac{1}{2}$ de $\frac{10}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{10}{6}$
- $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{9} =$
- $\frac{5}{7}$ de $\frac{9}{6} =$

¿La actividad propuesta es de alta demanda cognitiva? ¿Por qué?

a) Sí, porque va más allá de la memorización e implica usar un procedimiento organizado para obtener el resultado correcto.

b) Sí, porque es una actividad que permite diferenciar entre el procedimiento para encontrar la fracción de un número entero y el de la fracción de una fracción.

c) No, porque es una actividad que solo considera fracciones propias e impropias, cuando debió incluir fracciones mixtas.

d) No, porque solo implica repetir el procedimiento propuesto en el ejemplo sin propiciar reflexión sobre tales procesos ni conexión con otras nociones matemáticas.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto intramatemático de tipo 9 (*Operar con fracciones y números decimales exactos o periódicos*). El lenguaje matemático utilizado es numérico y el concepto que subyace es el de fracción como operador. El procedimiento que estaría detrás de la solución de la tarea es el del algoritmo para multiplicar fracciones (P7) y la propiedad identificada es la que se relaciona con las cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$ **(**propiedad de clausura).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda la multiplicación de fracciones. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de fracción como operador y del procedimiento matemático del algoritmo para multiplicar fracciones.

Indicador de evaluación: Analiza el error de un estudiante, que consiste en sumar descuentos sucesivos, e identifica que usar un caso particular para familiarizarse con el problema es la estrategia que favorece la reflexión de su error.

N17_1_2

Un docente lleva a clase un afiche de una de las tiendas de la ciudad, que se muestra a continuación:

Luego de que todos los estudiantes observaron el afiche, uno de ellos mencionó: *"El descuento total que ofrece la tienda por la compra del televisor es de 30%".*

¿Cuál de las siguientes acciones es la más pertinente para brindar ayuda pedagógica al estudiante de modo que reflexione acerca de su concepción errónea?

a Preguntarle: ¿Cómo se calculan los porcentajes de una determinada cantidad? ¿Cómo se calcula el 20% del precio del televisor? ¿Y el 10%?

b Explicarle que estos dos descuentos equivalen a un único descuento del 28% del precio del televisor. Luego, preguntarle ¿cómo crees que se encontró este valor?

c Pedirle que suponga que el precio del televisor es de S/ 100, y preguntar: ¿El 20% se aplicará a los S/ 100? ¿El 10% se aplicará a los S/ 100 o a lo que queda después de haber aplicado el primer descuento? ¿Por qué?

d Preguntarle: Si primero calculas el descuento del 20% y, luego, calculas el descuento del 10%, ¿cuánto costará el televisor después de haber aplicado los dos descuentos? ¿A cuánto dinero equivale el descuento total? ¿Por qué?

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 17 (*Aplicar aumentos y descuentos porcentuales*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico y el concepto que subyace es el de porcentaje en relación con los descuentos porcentuales. En ese sentido, el procedimiento que permite resolver la tarea es la aplicación del algoritmo para calcular descuentos porcentuales (P14).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que implica descuentos sucesivos. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimiento vinculado con los números racionales, como lo es el porcentaje.

Indicador de evaluación: Identifica que una acción docente pertinente para abordar la creencia de que dos sucesos no tienen la misma posibilidad de salir, debido a que involucran cantidades diferentes, consiste en pedir a los estudiantes que organicen el espacio muestral en una tabla y comparen la posibilidad de ambos sucesos.

N17_1_3

Una docente entrega a cada estudiante dos dados para realizar un experimento aleatorio. A continuación, les plantea la siguiente pregunta:

> Al lanzar los dos dados, ¿será cierto que los siguientes sucesos tienen la misma posibilidad de salir?
>
> Suceso A: que la suma de las caras de los dados sea 6
> Suceso B: que la suma de las caras de los dados sea 8

Luego de unos minutos de explorar con los dados, Noelia, una de las estudiantes, respondió:

"No, yo creo que como son dos números distintos no tienen la misma posibilidad de salir".

¿Cuál de las siguientes acciones es pertinente que realice la docente para brindar ayuda pedagógica a Noelia?

a) Pedirle que revise en su libro de texto qué es la probabilidad de un suceso y cómo se calcula. Luego, pedirle que diga si su respuesta es correcta o no.

b) Solicitarle que lance los dados hasta que obtenga ambos sucesos. Luego, pedirle que considere la cantidad de veces que tuvo que lanzar los dados para obtener ambos sucesos.

c) Orientarle en la elaboración de una tabla que organiza todas las posibilidades en las que podrían caer los dados. Luego, pedirle que compare en cuántos casos se podría obtener cada suma indicada.

d) Sugerirle que esté atenta a la explicación de uno de sus compañeros que resolvió correctamente el problema. Luego, pedirle que tome nota del procedimiento realizado por su compañero.

Indicador de evaluación: Identifica que una acción pertinente para que un estudiante reflexione acerca de su concepción errónea al asociar la mayor probabilidad de un evento solo a la cantidad de casos favorables consiste en formular preguntas que permiten establecer la relación entre casos favorables y casos posibles.

N17_1_4

Un docente plantea la siguiente situación en clase:

Se tienen dos cajas con fichas de dos colores, según muestra la tabla. ¿De cuál de las cajas es más probable sacar una ficha roja? ¿Por qué?

	Verde	Roja	Total
Caja 1	200	400	600
Caja 2	300	600	900
Total	500	1000	1500

Un estudiante responde:

"De la caja 2 porque tiene más fichas rojas que la caja 1".

¿Cuál de los siguientes grupos de preguntas es pertinente que formule el docente para brindar ayuda pedagógica a este estudiante de modo que comprenda por qué su respuesta es incorrecta?

a ¿Cuántas fichas en total hay en la caja 1? ¿Cuántas fichas en total hay en la caja 2? ¿En cuál de las cajas hay mayor cantidad de fichas? ¿Cuántas fichas rojas hay en cada caja? ¿Cuántas fichas rojas hay en total?

b ¿Qué parte del total de fichas de la caja 1 son rojas? ¿Qué parte del total de fichas de la caja 2 son rojas? ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja en cada caso? ¿Hay diferencia entre las probabilidades obtenidas? ¿Por qué?

c ¿Cuántas fichas de cada color hay en la caja 1? ¿Cuántas fichas de cada color hay en la caja 2? ¿Cuántas fichas verdes hay en total? ¿Cuántas fichas rojas hay en total? ¿Cuántas fichas rojas hay más que verdes en la caja 1? ¿Y en la caja 2?

d ¿En cuál de las cajas hay más fichas rojas? ¿Cuántas fichas rojas hay en total entre las dos cajas? ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja de la caja 1? ¿Cómo podrías relacionar la cantidad de fichas rojas de la caja 1 con el total de fichas de dicha caja?

Las situaciones-problemas de estas dos preguntas son de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico y tabular. El concepto que subyace es el de probabilidad y su definición como 'razón' o 'el cociente de dos números'. El procedimiento (P15) para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles).

Indicador de evaluación: Identifica que interpretar la probabilidad condicional de sucesos es de mayor demanda cognitiva que definir el concepto de probabilidad condicional, recordar una fórmula para calcular la probabilidad o aplicar la fórmula.
N17_1_5 ¿Cuál de las siguientes tareas que involucran la probabilidad condicional es de **mayor** demanda cognitiva? a Sean A y B dos sucesos con $P(A)$ = 0,5; $P(B)$ = 0,3 y $P(A \cap B)$ = 0,1. Calcular las probabilidades de $P(A \mid A \cap B)$ y $P(A \mid A \cup B)$. b ¿Qué es la probabilidad condicional y cuáles son sus características? ¿Cuál es la expresión que permite calcular la probabilidad condicional de un experimento? ¿Cómo se lee dicha expresión? c En un grupo de amigos, el 80% están casados. Entre los casados, el 75% tienen trabajo. Finalmente, un 5% no están casados y tampoco tienen trabajo. ¿Qué probabilidad hay de que al elegir una persona del grupo de amigos, esta persona tenga trabajo? d En una urna hay tres tarjetas: una de color azul por ambos lados, otra roja por ambos lados y la última, azul por un lado y roja por el otro. Al extraer una tarjeta, mostrando solo uno de sus lados y colocándola sobre la mesa, la cara que se ve es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra cara de la tarjeta que se extrajo también sea roja?
En las alternativas de esta pregunta, se observan cuatro situaciones-problema. De acuerdo con los objetos primarios identificados en el sistema de referencia construido, la primera es de tipo intramatemático y las restantes son de tipo extramatemático. Además, todas son de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural y numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad condicional. El procedimiento para resolver cada problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles), y de los algoritmos para obtener la probabilidad condicional.

Considerando el significado de referencia construido, estos tres ítems (**N17_1_3, N17_1_4 y N17_1_5)** exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problema que implican a las probabilidades. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Algunos de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de las situaciones son la regla de Laplace, en el que subyace la noción de fracción como parte-todo, y el algoritmo para calcular la probabilidad condicional.

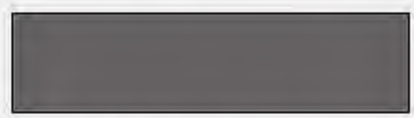
- **Ítems del tipo 2 y análisis de las preguntas**

Indicador de evaluación: Analiza una tarea que consiste en reconocer la equivalencia entre porcentajes y fracciones impropias en su uso como parte-todo, e identifica que la solución de un estudiante es errónea porque considera la fracción como propia.

N17_2_6

Un docente propone el siguiente problema a sus estudiantes de primer grado:

Se sabe que la unidad está representada por:



En el siguiente gráfico, ¿qué porcentaje, con respecto a la unidad, representa la parte sombreada?

Uno de los estudiantes responde diciendo:

"La parte sombreada representa el 70% de la unidad".

¿Es **correcta** la afirmación de este estudiante? ¿Por qué?

a) Sí, porque en la primera unidad se han sombreado 5 partes y esto representa el 50%, mientras que en la segunda unidad se han sombreado 2 partes que representan el 20%; por lo tanto, el porcentaje total es de 70%.

b) Sí, porque se han sombreado 7 partes de un total de 10 partes y eso representa el 70%.

c) No, porque la parte sombreada representa la fracción $\frac{7}{3}$ y esto equivale aproximadamente al 233% de la unidad.

d) No, porque se ha sombreado una unidad y dos partes más de las cinco en las que se dividió otra unidad similar, por lo que todo lo sombreado equivale al 140%.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 7 (*Expresar una fracciones como impropia como fracción mixta o viceversa*) y tipo 14 (*Expresar la equivalencia entre fracción, decimal y porcentaje*). El lenguaje matemático utilizado es natural-figural. El concepto que subyace es el de fracción impropia y el de porcentaje (‘la razón de un número con respecto a 100’). El procedimiento para resolver el problema requiere del uso de la definición de porcentaje.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda la equivalencia entre fracciones y porcentajes. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de las relaciones entre los componentes de la estructura conceptual de los racionales, por ejemplo, la correspondencia entre las fracciones, los decimales y los porcentajes, además del manejo de los conceptos y procedimientos matemáticos vinculados al establecimiento de dicha correspondencia.

Indicador de evaluación: Identifica que la dificultad de un estudiante consiste en extender la validez de relaciones en operaciones con números naturales a los números decimales.

N17_2_7

Una docente plantea a sus estudiantes la siguiente situación:

Carlos prepara 2 kilogramos de mermelada. ¿Cuántas porciones se servirán si piensa colocar 0,25 kilogramos en cada porción?

Uno de los estudiantes afirma:

“Para resolver el problema se debe dividir dos entre veinticinco centésimos y, como es una división, el resultado debe ser menor que dos”.

¿Cuál es la dificultad que se evidencia en la afirmación del estudiante? a No reconoce los elementos de la división. b No sabe dividir usando números decimales. c Considera que el número mayor siempre se debe dividir entre el número menor. d Considera válidas las relaciones que se cumplen para las operaciones con números naturales en operaciones con números decimales.
La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales exactos o periódicos*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de números decimales. El procedimiento para resolver la tarea planteada es la aplicación del algoritmo para dividir decimales (P8). Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda división de un entero entre un número decimal. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de número decimal exacto como una forma de escribir las fracciones decimales, y de las operaciones relacionadas a estos, por ejemplo, conocer el algoritmo de la división de un entero por un número decimal.

Indicador de evaluación: Resuelve un problema que involucra descuentos sucesivos y que demanda determinar el precio inicial a partir del precio final.

N17_2_8

En una tienda se ofrece una *tablet* con un descuento del 20% si se compra con tarjeta de crédito. Además, la tienda cuenta con una Ruleta de la Suerte para descuentos adicionales. Un cliente que va a comprar con tarjeta de crédito gira la ruleta y accede a un segundo descuento del 25%. Entonces, se lleva la *tablet* pagando solamente S/ 330.

¿Cuánto dinero ahorró respecto del precio original?

a S/ 132
b S/ 220
c S/ 270
d S/ 550

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 17 (*Aplicar aumentos y descuentos porcentuales*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico y el concepto que subyace es el de porcentaje en relación con la aplicación de descuentos porcentuales. En ese sentido, el procedimiento (P14) está vinculado con la forma correcta de aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple) y para calcular un descuento porcentual.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que implica descuentos sucesivos. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimiento vinculado con los números racionales, como lo es el porcentaje.

Indicador de evaluación: Analiza dos inversiones, una que involucra interés simple y otra que involucra interés compuesto, con el fin de determinar cuál de estas es más favorable, e identifica la razón.
N17_2_9 Luis tiene 1000 dólares y los quiere depositar en un banco por un plazo de 5 años. A continuación, se presenta la información brindada por dos bancos. **Banco M**: Te ofrecemos una tasa de interés del 12% anual por tu depósito. **Banco N**: Te ofrecemos el 10% de tasa de interés capitalizable anualmente. ¿Cuál de los dos bancos le resulta más favorable a Luis? ¿Por qué? a) El banco N, porque la tasa de interés aumentará 10 puntos porcentuales cada año, mientras que en el banco M la tasa se mantiene fija. b) El banco N, porque al término de ese tiempo recibiría 10,51 dólares más que en el banco M. c) El banco M, porque la diferencia de 2 puntos porcentuales en la tasa lo beneficia hasta el quinto año, después decae con respecto a la tasa del banco N. d) El banco M, porque al término de ese tiempo recibiría 100 dólares más que en el banco N.
La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 19 (*Calcular la tasa de interés*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico y el concepto que subyace es el de porcentaje en relación con el cálculo de una tasa de interés. El procedimiento (P14) que estaría detrás de la solución es la aplicación del algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple). Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda una aplicación de los porcentajes (constructo vinculado a los racionales). Es decir, se pone en evidencia el dominio del concepto (fracción como razón) y procedimientos matemáticos (regla de tres simple) vinculados a los porcentajes.

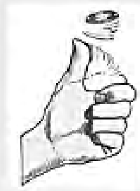
Indicador de evaluación: Identifica que la dificultad de un estudiante consiste en creer que, a partir de un experimento aleatorio, se puede establecer un patrón.

N17_2_10

Un docente plantea la siguiente actividad a sus estudiantes:

Una persona lanza verticalmente una moneda convencional lo más alto posible. La moneda es lanzada con la cara hacia arriba.

¿Cuál de los lados de la moneda tendrá mayor probabilidad de salir? ¿Por qué?



A continuación se muestra la respuesta de un estudiante:

"La cara tiene más probabilidad de salir, porque al lanzar la moneda, esta va a girar y como parte con la cara hacia arriba, a su retorno vuelve a su posición inicial, ya que hay igual cantidad de giros de subida que de bajada. Hubiese sido diferente si la moneda se lanzaba de perfil; en ese caso sí hubiera podido salir cara o sello".

Considerando la respuesta del estudiante, ¿cuál de las siguientes alternativas evidencia su dificultad?

a Ha establecido un patrón con respecto a los giros de la moneda: si lanza la moneda con la cara hacia arriba, termina en cara y sucede lo mismo con el sello.

b No ha considerado que las características del material con el que están hechos ambos lados de la moneda reúnen las mismas condiciones.

c Ha considerado que el experimento se puede predecir debido a la fuerza aplicada en el lanzamiento de la moneda.

d No ha utilizado el algoritmo que permite calcular la probabilidad de que salga cara o sello.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural. El concepto que subyace es el de probabilidad. El procedimiento para resolver el problema requiere del uso de la definición de probabilidad de un suceso.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación que implica a la probabilidad. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto y procedimiento vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Uno de los conceptos asociados a la resolución de la situación es la equiprobabilidad e inclusive el uso de la regla de Laplace.

➢ **Análisis cuantitativo y cualitativo de las preguntas**

En la siguiente tabla, se presenta el resumen de los objetos primarios identificados en los diez ítems analizados de la prueba de Matemática del Concurso de Nombramiento 2017.

Tabla 17

Resumen de objetos primarios - Nombramiento 2017

Situaciones-problemas		**f**
Contexto extramatemático		12
Contexto intramatemático		2
Tipos	Tipo 7 (extramatemático)	1
	Tipo 9 (intramatemático)	1
	Tipo 13 (extramatemático)	1
	Tipo 14 (extramatemático)	1
	Tipo 17 (extramatemático)	2
	Tipo 19 (extramatemático)	1
	Tipo 22 (intramatemático)	1
	Tipo 22 (extramatemático)	6
Lenguaje		
Natural		1
Numérico		1
Natural - Numérico		10
Natural - Figural		1
Numérico - Tabular		1
Concepto-definición		
Fracción	Fracción impropia	1
	Fracción como operador	1
Números decimales	Exactos	1
Porcentaje	Razón de un número respecto de 100	1
	Aumentos y descuentos	2
	Tasa de interés	1

Probabilidad	Razón-cociente entre dos números	1
	Probabilidad condicional	1
Procedimiento		
Multiplicar - dividir fracciones		1
Dividir decimales		1
Uso de definición de porcentaje		1
Resolver problema de proporcionalidad directa		2
Algoritmo para calcular descuentos porcentuales		2
Uso de definición de probabilidad		1
Regla de Laplace		2
Algoritmo de probabilidad condicional		4
Propiedades		
Sobre cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$		1

En general, se observa que, en la prueba de Matemática del concurso de Nombramiento 2017, de las diez preguntas analizadas:

- Doce de las catorce situaciones-problemas se presentan en un contexto extramatemático
- En la mitad de las preguntas (7), es recurrente la situación-problema que se refiere a la resolución de situaciones de cálculo de probabilidad.
- En diez de las catorce situaciones-problemas, predomina el lenguaje matemático natural-numérico.
- No se ha identificado un concepto-definición que prevalezca, aunque la idea de fracción como operador, parte-todo y razón suele estar detrás de los conceptos de porcentaje y probabilidad.
- El procedimiento que está detrás de la solución de los ítems, debido a que siete de las catorce situaciones-problemas son de probabilidad, es el relacionado con la regla de Laplace y el algoritmo de la probabilidad condicional.

4.1.1.2. Ítems del Concurso de Nombramiento 2018

A continuación, se presentan las cinco preguntas (uno del tipo 1 y cuatro del tipo 2) de esta prueba que cumplen con los criterios establecidos. Para cada pregunta, se presenta el indicador de evaluación y una descripción analítica a partir del significado de referencia institucional construido.

- **Ítems del tipo 1 y análisis de las preguntas**

Indicador de evaluación: Identifica acciones pedagógicas para retroalimentar a los estudiantes sobre sus errores en relación con la proporcionalidad.
N18_1_1 Una docente, con el propósito de que sus estudiantes afiancen el concepto de proporcionalidad, les propuso el siguiente problema: Daniel trabaja colocando fluorescentes dentro de cajas. El primer día recibe cierta cantidad de fluorescentes y de cajas; empaqueta en promedio 12 fluorescentes en 1 hora y se demora 6 horas en realizar todo el trabajo. El segundo día empaquetó la misma cantidad de fluorescentes que el día anterior y se demoró 4 horas. ¿Cuántos fluorescentes en promedio empaquetó en 1 hora en el segundo día? Luego de asegurar la comprensión del problema, la docente brinda un tiempo para que los estudiantes busquen estrategias de resolución. Posteriormente, un estudiante responde: "Como en el segundo día se demora menos tiempo en hacer todo el trabajo, también empaquetará menos fluorescentes por hora. Por lo tanto, empaqueta 8 fluorescentes cada hora en promedio". ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para brindar retroalimentación al estudiante con la finalidad de que reflexione sobre su error? a) Solicitar que identifique las magnitudes que se presentan en la situación y que reconozca qué cantidad permanece constante. Luego, preguntar: "¿Qué día empaquetó más rápido los fluorescentes? Y al ser más rápido, ¿debió demorar más tiempo o menos tiempo? ¿Qué relación se debe establecer entre la rapidez y el tiempo?". b) Preguntar: "¿De quién se habla en el problema? ¿Cuántas cajas empaqueta Daniel por hora el primer día?, ¿y cuántas horas demora ese día?". Luego, pedir que identifique el total de horas que demora Daniel en hacer el trabajo el segundo día y que determine la cantidad total de fluorescentes que recibe el primer y segundo día. c) Entregar una tabla para que organice la cantidad de fluorescentes que Daniel empaqueta por hora y el total de horas que demora en ambos días. Luego, comentar que las magnitudes son inversamente proporcionales, por lo que se debe de multiplicar dichas cantidades para obtener el total de fluorescentes y resolver el problema.

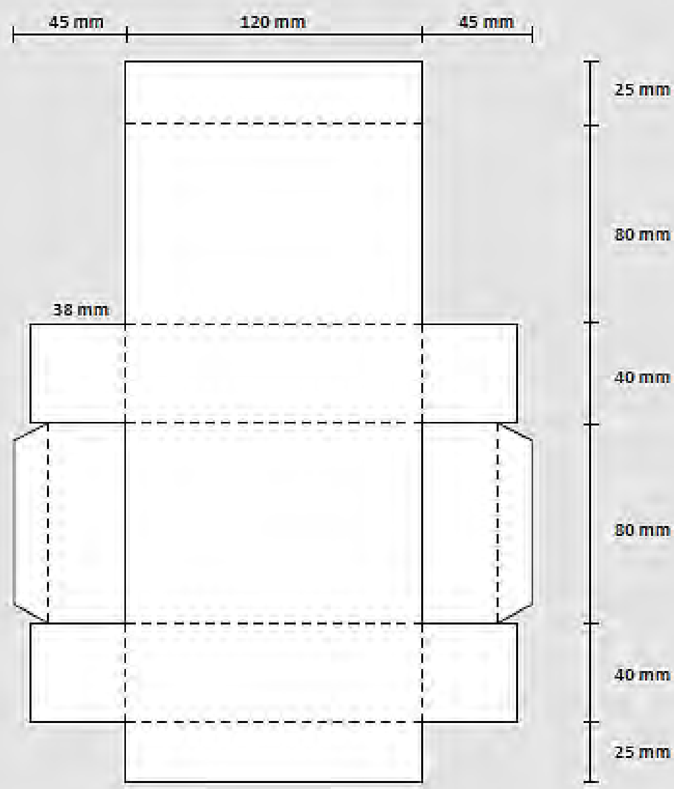
La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 21 (*Aplicar la definición de proporcionalidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de proporcionalidad. El procedimiento que estaría detrás de la solución es el de aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que implica la proporcionalidad. Rojas (2014) señala que, cuando un profesor alude a las concepciones de los números racionales como razón, fomenta el pensamiento proporcional. Es decir, esta pregunta se pone en evidencia el dominio del significado de la fracción como razón y de los procedimientos matemáticos vinculados a la proporcionalidad (p. ej. regla de tres simple).

➢ Ítems del tipo 2 y análisis de las preguntas

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran operaciones con números racionales.
N18_1_2

Los estudiantes del aula de segundo grado están construyendo cajas en forma de paralelepípedo. Las medidas del molde para la caja se muestran a continuación:



Sabiendo que las dimensiones de cada pliego de cartulina son 70 cm y 100 cm, y que los estudiantes dibujarán los moldes en estos pliegos de cartulina, luego cortarán y formarán las cajas, ¿cuántos ejemplares de una sola pieza se podrán obtener como máximo de un pliego de esta cartulina?

a) 9 moldes.

b) 10 moldes.

c) 11 moldes.

N18_1_3

Durante el primer mes de venta, Miguel y Noelia se encargaron de vender estos dulces en los colegios cercanos al suyo.

A Miguel le entregaron $\frac{3}{5}$ del total de cajas y a Noelia el resto. Miguel solo vendió la mitad de la cantidad de cajas que le dieron y Noelia, la cuarta parte.

Si Noelia debe vender la misma cantidad de cajas que vendió Miguel, ¿qué fracción de lo que le queda a ella debe vender?

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

Estas dos preguntas tienen el mismo indicador de evaluación y presentan un contexto extramatemático de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales exactos o periódicos*). El lenguaje matemático es figural para la primera pregunta y natural-numérico para la segunda. El concepto-definición que subyace es el de números decimales y fracción como parte-todo. Además, la solución del problema requiere conocer el procedimiento para operar (adición, sustracción, multiplicación y división) con decimales y fracciones.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de las operaciones con fracciones y decimales. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor, por ejemplo, del algoritmo de la división de un entero por un número decimal, de la noción de fracción como parte todo y las operaciones asociadas a esta.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran el cálculo de probabilidades.
N18_1_4 Manuel tiene una caja con 4 bolas azules y 5 bolas rojas. Todas las bolas son del mismo tamaño, masa y textura. Si extrae una bola de la caja y, sin devolverla, luego extrae otra, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? a) La probabilidad de que haya extraído una bola azul y una bola roja es $\frac{9}{20}$. b) La probabilidad de que haya extraído dos bolas azules es $\frac{12}{25}$. c) La probabilidad de que haya extraído dos bolas rojas es $\frac{5}{18}$.
N18_1_5 La capacidad máxima del ascensor de un hotel es de 4 personas. En un determinado momento Alex, Beatriz, Carla y Diana ingresan al ascensor en el primer piso y se dirigen a sus habitaciones ubicadas en el quinto y décimo piso del edificio (al menos una de estas personas debe bajar en uno de esos dos pisos). En ese momento Erika y Fidel quieren entrar al ascensor cuando este se detenga en el quinto piso y puede ingresar uno de ellos o ambos dependiendo del espacio que haya. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos, Erika y Fidel, puedan subir al ascensor cuando se detenga en el quinto piso? a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{7}$
Las situaciones-problemas de estas dos preguntas (cuyo indicador de evaluación es el mismo) son de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad de sucesos dependientes. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles) y del algoritmo para obtener la probabilidad de sucesos compuestos o dependientes. Considerando el significado de referencia construido, estos dos ítems (**N18_1_4 y N18_1_5)**

exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problema que implican a las probabilidades. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Uno de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de las situaciones es la regla de Laplace, en el que subyace la noción de fracción como parte-todo.

➢ **Análisis cuantitativo y cualitativo de las preguntas**

En la siguiente tabla, se presenta el resumen de los objetos primarios identificados en los cinco ítems analizados de la prueba de Matemática del concurso de Nombramiento 2018.

Tabla 18

Resumen de objetos primarios - Nombramiento 2018

Situaciones-problemas		**f**
Contexto extramatemático		5
Contexto intramatemático		-
Tipos	Tipo 13 (extramatemático)	2
	Tipo 21 (extramatemático)	1
	Tipo 22 (extramatemático)	2
Lenguaje		
Natural - Numérico		4
Natural - Figural		1
Concepto-definición		
Fracción	Fracción como parte-todo	1
Números decimales	Exactos	1
Proporcionalidad		1
Probabilidad	Probabilidad de sucesos dependientes	2
Procedimiento		
Operar con fracciones		1

Operar con decimales	1
Resolver problema de proporcionalidad directa	1
Regla de Laplace	2
Algoritmo de sucesos dependientes	2
Propiedades	
Sobre cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$	2

En general, se puede observar que, en la prueba de Matemática del concurso de Nombramiento 2018, de las cinco preguntas analizadas:

- Las cinco situaciones-problemas se presentan en un contexto extramatemático.
- Los dos tipos de situaciones-problemas más frecuentes han sido las que se refieren a la resolución de situaciones operando con fracciones y decimales, y situaciones de cálculo de probabilidad.
- En cuatro de las cinco preguntas, el lenguaje matemático que predomina es el natural-numérico.
- No se ha identificado un concepto-definición que prevalezca, aunque la idea de fracción, parte-todo y razón suele estar detrás de los conceptos de proporcionalidad y probabilidad.
- Los procedimientos que están detrás de la solución de los ítems son los relacionados con algoritmos para operar con fracciones y decimales, y la aplicación de la regla de Laplace.

4.1.1.3. Ítems del Concurso de Nombramiento 2019

A continuación, se presentan las ocho preguntas (tres del tipo 1 y cinco del tipo 2) de esta prueba que cumplen con los criterios establecidos. Para cada pregunta, se presenta el indicador de evaluación y una descripción analítica a partir del significado de referencia institucional construido.

➢ **<u>Ítems del tipo 1 y análisis de las preguntas</u>**

Indicador de evaluación: Identifica la actividad de mayor demanda cognitiva en relación con los números racionales.

N19_1_1

Un docente propone la siguiente situación a los estudiantes de primer grado.

> Como parte de un tratamiento, a las 8:00 horas una persona recibió una primera dosis de penicilina de 300 miligramos. A partir de entonces, su cuerpo elimina gradualmente la penicilina, de modo que una hora después solo el 60 % de la cantidad de penicilina inicial permanece activo en su sangre. Esta pauta continúa de tal manera que, al final de cada hora, solo permanece activo el 60% de la penicilina que tuvo al inicio de esa hora.

A partir de la situación anterior, el docente propone tres tareas. ¿Cuál de estas tareas es de <u>**mayor**</u> demanda cognitiva?

a) Hallar en qué porcentaje disminuyó la cantidad de penicilina que permanece activa en la sangre de esta persona dos horas después de la aplicación de la primera dosis.

b) Completar una tabla que muestre la cantidad de penicilina que permanecerá activa en la sangre de esta persona en intervalos de una hora desde el momento de la primera dosis hasta las 11:00 horas.

c) Determinar la hora en que se debe administrar la segunda dosis si se sabe que esta se debe suministrar cuando la penicilina activa en la sangre descienda a un valor cercano a la doceava parte de la primera dosis.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 16 (*Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de porcentaje. El procedimiento que estaría detrás de la solución es el de operaciones con fracciones o decimales, y aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (cálculo de un porcentaje).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que implica porcentajes (constructo vinculado a los racionales). Es decir, se pone en evidencia el dominio del concepto (fracción como razón) y procedimientos matemáticos (regla de tres simple) vinculados a los porcentajes.

Indicador de evaluación: Identifica preguntas que promueven la generación de conflicto cognitivo en relación con las operaciones con números racionales.

N19_1_2

Una docente pidió a los estudiantes de tercer grado expresar qué comprenden por la potenciación con números racionales. Uno de los estudiantes afirmó lo siguiente:

> "La potenciación es una operación que consiste en multiplicar la base tantas veces como indica el exponente. Por ejemplo, para calcular dos elevado al cubo, multiplicamos 2 por 2 por 2. Es decir, la base 2 se repite como factor tres veces".

¿Cuál de las siguientes preguntas favorece la generación del conflicto cognitivo en este estudiante?

a) ¿Cómo explicarías la potenciación si tuvieras un número negativo, por ejemplo −3, en lugar del número que has propuesto como exponente?

b) ¿Cuál sería el resultado de la potenciación si en lugar del exponente que has propuesto tuvieras un número de dos cifras, por ejemplo 20?

c) ¿Qué sucedería si tuvieras un número negativo, por ejemplo −2, en lugar del número que has propuesto como base?

La situación-problema de esta pregunta es de contexto intramatemático de tipo 12 (*Aplicar las propiedades de las operaciones en* $\mathbb{Q}$). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El procedimiento que subyace es la aplicación de la potenciación en los racionales cuando se tiene un exponente negativo, y la propiedad detrás de ese procedimiento es la que se asocia a dicha operación (la de potenciación).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda la potenciación con números decimales. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de potenciación en $\mathbb{Q}$ y del procedimiento matemático (algoritmo) asociado a este.

Indicador de evaluación: Identifica acciones pedagógicas para retroalimentar a los estudiantes sobre sus errores en relación con el interés simple o compuesto.

N19_1_3

En una sesión de aprendizaje, los estudiantes resuelven problemas que involucran tasas de interés simple, como el que aparece a continuación:

Hallar el interés producido durante 5 años por un capital de S/ 30 000 colocado a una tasa de interés simple anual del 6%.

Lila, una estudiante, explica su procedimiento de la siguiente manera: "Para calcular el interés solicitado, debo multiplicar el capital que es 30 000 soles por la tasa de interés que es igual a 6 y por el tiempo que es igual a 5. De esta operación, se obtiene que el interés producido es igual a 900 000 soles".

¿Cuál de las siguientes acciones docentes es pertinente para brindar retroalimentación a Lila, de modo que logre superar el error que se evidencia en su procedimiento?

a) En el diálogo con ella, enfatizar que la tasa de interés debe expresarse en notación fraccionaria.

b) Preguntar: "¿La tasa de interés indica que por cada sol de capital se produce una ganancia de 6 soles al año?".

c) Preguntar: "¿La tasa de interés es mensual o anual?, ¿la tasa indicada se aplica a todo el monto de capital o solo a una parte?".

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 19 (*Calcular la tasa de interés*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico y el concepto que subyace es el de porcentaje en relación con el cálculo de una tasa de interés. El procedimiento que estaría detrás de la solución es el de aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda una aplicación de los porcentajes (constructo vinculado a los racionales). Es decir, se pone en evidencia el dominio del concepto (fracción como razón) y procedimientos matemáticos (regla de tres simple) vinculados a los porcentajes.

➢ <u>Ítems del tipo 2 y análisis de las preguntas</u>

Indicador de evaluación: Identifica limitaciones en acciones pedagógicas que promueven la comprensión de la densidad de números racionales.

N19_2_4

En la primera sesión de aprendizaje, para desarrollar la comprensión de la densidad en el conjunto de los números racionales, los estudiantes de segundo grado han resuelto tareas como esta:

> Encontrar algunas fracciones mayores que $\frac{1}{7}$ y menores que $\frac{6}{7}$.

Sin embargo, presentaron dificultades para resolver tareas como la siguiente:

> Encontrar algunas fracciones mayores que $\frac{4}{6}$ y menores que $\frac{5}{6}$.

Para abordar esta dificultad, el docente les propuso buscar fracciones equivalentes a las dadas. Al efectuarla, obtuvieron $\frac{8}{12}$ y $\frac{10}{12}$. Entonces, reconocieron que enfrentaban una situación conocida y dieron como respuesta $\frac{9}{12}$. Luego, en una situación similar, los estudiantes aplicaron el mismo procedimiento, tal como se muestra a continuación.

Encontrar algunas fracciones mayores que $\frac{3}{8}$ y menores que $\frac{5}{6}$.

Solución: $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$

$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$

Respuesta: $\frac{10}{24}, \frac{11}{24}, \frac{12}{24}, \frac{13}{24}, \frac{14}{24}, \frac{15}{24}, \frac{16}{24}, \frac{17}{24}, \frac{18}{24}, \frac{19}{24}$

Al afrontar estas tareas, la mayoría de estudiantes concluyó que siempre es posible encontrar otras fracciones entre 2 fracciones dadas. Esto representa un logro aún limitado.

¿Cuál es la <u>**principal**</u> limitación que se ha evidenciado en la actividad de los estudiantes respecto de la comprensión de la densidad en el conjunto de los números racionales?

a) Haber encontrado una cantidad finita de números entre dos números dados, sin llegar a desarrollar la cualidad de infinitud del intervalo cuyos extremos son esos números.

b) Haberse limitado al uso de fracciones sin incluir a los números decimales; de este modo, no se llega a analizar la densidad en el conjunto de números racionales.

c) Haber prescindido de desarrollar la semisuma de dos números dados como un procedimiento eficaz para encontrar un número racional comprendido entre otros dos cualesquiera.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto intramatemático de tipo 11 (A*plicar la propiedad de densidad en* $\mathbb{Q}$). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de fracción como número racional y fracciones equivalentes. La propiedad identificada o que estaría detrás de la solución de la tarea es la que se refiere a la densidad en $\mathbb{Q}$.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la estructura conceptual de los números racionales, de manera específica de la propiedad de este conjunto de ser denso en $\mathbb{R}$. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de lo que implica esta propiedad.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran operaciones con números racionales.

N19_2_5

Pablo dispone de una receta para 8 porciones de ají de gallina que, entre otros ingredientes, recomienda utilizar $\frac{1}{3}$ de taza de ají amarillo. Él ha decidido preparar solo 2 porciones de este plato y, para medir la cantidad conveniente de cada ingrediente, dispone de un juego de 4 tazas medidoras cuyas capacidades corresponden a 1 taza, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ de taza, respectivamente.

¿Con cuál de las siguientes acciones Pablo puede obtener la cantidad correspondiente de ají amarillo para preparar las 2 porciones?

a) Primero llenar $\frac{1}{2}$ de taza y luego quitar $\frac{1}{3}$ de taza. Repetir este proceso dos veces.

b) Primero llenar $\frac{1}{3}$ de taza y luego quitar $\frac{1}{4}$ de taza.

c) Primero llenar 1 taza y luego quitar $\frac{1}{3}$ de taza.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales exactos o periódicos*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de fracción como medida y el procedimiento que estaría detrás de la solución es el relacionado con los algoritmos de las cuatro operaciones.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda operaciones con fracciones. En específico, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de fracción como razón y de los algoritmos para sumar y restar fracciones.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran probabilidades.

N19_2_6

En una de sus caras, cuatro tarjetas de las mismas características presentan un único número que puede ser 1, 2, 3 o 4. Todas ellas se colocan indistintamente sobre una mesa, de modo que no se observe su respectivo número.

Una a una, Úrsula levanta tres tarjetas, y observa el número que presentan. ¿Cuál es la probabilidad de que los números observados aparezcan en orden decreciente?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{12}$

Indicador de evaluación: Identifica errores de los estudiantes en relación con la probabilidad de un suceso.

N19_2_7 Una docente tiene como propósito que los estudiantes de segundo grado **afiancen** su comprensión de la probabilidad de un suceso. Por ello, ha planteado la siguiente situación: Una persona va registrando si los veraneantes que llegan a una playa son varones o mujeres. Se conoce que la probabilidad de que llegue un varón es $\frac{1}{2}$. Cierto día, se hizo el registro de las primeras seis personas que ingresaron a la playa a partir del mediodía. Si se representa con "V" a cada varón y con "M" a cada mujer, ¿cuál de los siguientes sucesos tiene mayor probabilidad de aparecer en ese registro?, ¿ambos son igualmente probables? O ¿no se puede saber? Suceso A: VMMVMV Suceso B: VVVVMV Un estudiante respondió que el **suceso A** tiene mayor probabilidad de aparecer en el registro. ¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se evidencia en su respuesta? a) Considera la comparación entre los casos favorables del suceso A y del suceso B. b) Considera la aparente simplicidad del ordenamiento entre varones y mujeres que presenta el suceso A a partir de su experiencia personal. c) Considera que el suceso A tiene una composición de cantidades de varones y de mujeres similar a la de la población de veraneantes que llega a esa playa.
Estas dos preguntas presentan situaciones-problemas en un contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad y su definición como 'razón' o como 'el cociente de dos números'. El procedimiento para resolver el problema (sobre todo de la primera situación) requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles).

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran la probabilidad condicional.

N19_2_8

En un estudio médico referido a la incidencia de una enfermedad muy grave en cierta ciudad, se encontró que, del total de sus habitantes, el 10 % cree que está enfermo y realmente lo está. El 60 % cree que está enfermo; sin embargo, no lo está. El 5 % cree estar sano, pero no lo está, y el 25 % cree estar sano y realmente lo está.

Durante uno de los chequeos preventivos, realizado por la municipalidad de esa ciudad, será atendido un habitante que cree estar enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona esté realmente enferma?

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{7}$

c) $\frac{7}{10}$

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural- numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad condicional. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles) y del algoritmo para obtener la probabilidad condicional.

Considerando el significado de referencia construido, estos tres ítems (**N19_2_6, N19_2_7y N19_2_8)** exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problema que implican a las probabilidades. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Algunos de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de las situaciones son la regla de Laplace, en el que subyace la noción de fracción como parte-todo, y el algoritmo para calcular la probabilidad condicional.

➢ **<u>Análisis cuantitativo y cualitativo de las preguntas</u>**

En la siguiente tabla, se presenta el resumen de los objetos primarios identificados en los ocho ítems analizados de la prueba de Matemática del concurso de Nombramiento 2019.

Tabla 19

Resumen de objetos primarios - Nombramiento 209

Situaciones-problemas		**f**
Contexto extramatemático		6
Contexto intramatemático		2
Tipos	Tipo 11 (intramatemático)	1
	Tipo 12 (intramatemático)	1
	Tipo 13 (extramatemático)	1
	Tipo 16 (extramatemático)	1
	Tipo 19 (extramatemático)	1
	Tipo 22 (extramatemático)	3
Lenguaje		
Natural - Numérico		8
Concepto-definición		
Fracción	Fracción como número racional	1
	Fracción como medida	1
	Fracciones equivalentes	1
Porcentaje	Razón de un número respecto de 100	1
	Tasa de interés	1
Probabilidad	Razón-cociente entre dos números	2
	Probabilidad condicional	1
Procedimiento		
Operar con fracciones		1
Operar con decimales		1
Potenciación de fracciones		1
Resolver problema de proporcionalidad directa		2
Regla de Laplace		2

Propiedades	
Sobre cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$	1
Densidad en $\mathbb{Q}$	1

En general, se puede observar que, en la prueba de Matemática del concurso de Nombramiento 2019, de las ocho preguntas analizadas:

- Seis de las ocho situaciones-problemas se presentan en un contexto extramatemático.
- El tipo de situación-problema más frecuente (tres de ocho) ha sido el que se refiere a la resolución de situaciones de cálculo de probabilidad.
- En todas las preguntas, el lenguaje matemático que predomina es el natural-numérico.
- A diferencia de los ítems anteriores, aparecen el concepto de fracción como número racional y como medida. La noción de fracción como parte-todo aparece detrás del concepto de probabilidad.
- El procedimiento que está detrás de la solución de las situaciones-problemas más frecuentes (resolución de situaciones de cálculo de probabilidad) es el relacionado con la regla de Laplace.
- Solo en uno de los ítems aparece la propiedad de densidad de los números racionales.

En la siguiente sección, se presentan los ítems de la prueba de Matemática del Concurso de Ascenso. Además, se identificarán los objetos primarios que predominan en las preguntas de las pruebas.

4.2. Concurso de Ascenso

El Concurso para el Ascenso de Escala en la Carrera Pública Magisterial –o simplemente Concurso de Ascenso– convocado por el Minedu está dirigido a los docentes de Educación Básica que pertenecen a la Carrera Pública Magisterial (CPM) y que se encuentran ubicados en una de las siete escalas magisteriales. Este concurso les permite acceder a posibilidades de crecimiento profesional para que puedan mejorar su retribución económica sobre la base de su propio mérito, tal como lo establece la Ley de Reforma Magisterial (LRM) (Ministerio de Educación, 2019).

Esta evaluación se desarrolla en dos etapas: nacional y descentralizada. En la etapa nacional, se aplica la Prueba Única Nacional, la cual permite evaluar "la comprensión del desarrollo de procesos formativos y pedagógicos desde los enfoques y principios señalados en los documentos curriculares vigentes, y en las teorías contemporáneas de desarrollo y educación. Asimismo, [valora] los conocimientos de la didáctica específica de la especialidad, necesarios para conducir procesos de aprendizaje de acuerdo con la secuencia típica de desarrollo de las capacidades y nociones involucradas, atendiendo de manera pertinente las dificultades de los estudiantes y asumiendo estrategias eficaces frente a errores típicos en la construcción de los aprendizajes. Finalmente, evalúa el conocimiento solvente de la disciplina o especialidad que se enseña, así como el uso de dicho conocimiento para dar soluciones a situaciones problemáticas propias del contexto educativo" (Ministerio de Educación, 2019a, p. 20).

La PUN consta de sesenta preguntas. Cada pregunta correctamente respondida brinda al evaluado un punto y medio, así el puntaje máximo es de noventa (90) puntos. Cabe mencionar que las respuestas incorrectas no generan puntos en contra al postulante. Para superar esta prueba, el profesor debe "responder correctamente la cantidad de preguntas que corresponde al puntaje mínimo requerido a la escala magisterial que postula" (Ministerio de Educación, 2019a, p. 20). Participan de la etapa descentralizada únicamente los docentes que logren superar el puntaje mínimo requerido de acuerdo con la escala a la que postulan.

4.2.1. Prueba Única Nacional de Matemática

La prueba la rinden todos los profesores de la especialidad de Matemática, inscritos al concurso, pertenecientes a una de las escalas magisteriales de la CPM. Cabe resaltar que todos los postulantes del grupo de inscripción 'EBR Nivel Secundaria Matemática' rindieron el mismo examen.

Como se mencionó en la introducción, se realizó la revisión de las preguntas del concurso de Ascenso aplicados desde el año 2017 hasta el año 2019, dirigido a los docentes de secundaria de la especialidad de Matemática. Los criterios de selección de las preguntas fueron estos:

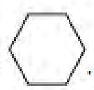
- Preguntas en las que el objeto matemático implicado sea el de los números racionales
- Preguntas en las que la resolución dominante en el sistema exige de los números racionales

Las preguntas han sido clasificadas en dos tipos. El tipo 1 agrupa a aquellas preguntas que evalúan los conocimientos de la didáctica específica de la especialidad necesarios para conducir procesos de aprendizaje. El tipo 2 reúne las preguntas que evalúan el conocimiento solvente de la disciplina o especialidad (centradas en la resolución de una tarea matemática). La revisión de las preguntas permitirá identificar los objetos primarios del significado de referencia institucional presentes en las situaciones-problemas que se han evaluado hasta ahora en los concursos de Ascenso.

4.2.1.1. Ítems del Concurso de Ascenso 2017

A continuación, se presentan las doce preguntas (seis del tipo 1 y seis del tipo 2) de esta prueba que cumplen con los criterios establecidos. Para cada pregunta, se presenta el indicador de evaluación y una descripción analítica a partir del significado de referencia institucional construido.

➢ **<u>Ítems del tipo 1 y análisis de las preguntas</u>**

Indicador de evaluación: Identifica diferencias en la demanda cognitiva de tareas que involucran operaciones con fracciones.
A17_1_1 Un docente tiene como propósito que sus estudiantes de primer grado resuelvan situaciones utilizando operaciones con fracciones. Al revisar diversas fuentes, encuentra tres posibles tareas. ¿Cuál de estas implica **mayor** nivel de demanda cognitiva? a) Resuelve: Leonardo quiere dividir $\frac{3}{4}$ de un kilogramo de queso en porciones de $\frac{1}{8}$. ¿Cuál es el resultado de esta división? b) Encuentra $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{2}$ de la siguiente unidad: . ¿Qué fracción de la unidad encontraste? c) Escribe una situación que sea posible de ser modelada por la operación $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$.
La pregunta contiene en las alternativas tres situaciones-problema. De acuerdo con el sistema de referencia descrito anteriormente, las tres son tareas de contexto extramatemático de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales)*. El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto-definición que subyace es el de fracción como operador, y la solución de los problemas requiere conocer el procedimiento para operar con

fracciones. La propiedad que estaría detrás del procedimiento es la correspondiente a las cuatro operaciones.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problemas que abordan el uso de los significados de la fracción y de las operaciones asociadas a estas. En específico, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de fracción como medida y operador, y del procedimiento para restar y dividir fracciones.

Indicador de evaluación: Identifica diferencias en la demanda cognitiva de tareas que involucran la noción de fracción.

A17_1_2

Un docente está trabajando con sus estudiantes, en equipos, diferentes actividades que involucran números racionales.

¿Cuál de los siguientes equipos está desarrollando una tarea de **menor** demanda cognitiva?

a) Equipo 1: Componen la unidad, a partir de una figura que representa $\frac{1}{5}$ de esta unidad.

b) Equipo 2: Escriben una razón a partir de la expresión "en el equipo del aula por cada 3 mujeres hay 2 hombres".

c) Equipo 3: Hacen diferentes dobleces a tres tiras de cartulina del mismo tamaño para representar 3 fracciones propias equivalentes. Para hacerlo siguen paso a paso las indicaciones orales del docente y observan cómo este dobla la tira de papel.

En esta pregunta, se observan tres situaciones-problema de contexto extramatemático y de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales)*. El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto-definición que subyace es el de fracción como parte todo, como razón y equivalencia de fracciones. Para el caso de las dos primeras situaciones, la solución de los problemas viene dada por la aplicación de la definición de la fracción como parte todo y como razón; para la tercera tarea, debe hacerse uso de la definición de fracciones equivalentes.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la identificación de situaciones que abordan los significados de la fracción como parte-todo y razón. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de dichas nociones de la fracción como razón y de tareas que permiten su estudio.

Indicador de evaluación: Identifica la ayuda pedagógica que favorece la reflexión de los estudiantes sobre sus concepciones acerca de los números racionales.

A17_1_3

Una docente propone la siguiente situación a sus estudiantes de segundo grado:

Encuentren un número entre 0,8 y 0,9.

Uno de los estudiantes inmediatamente responde lo siguiente: "No se puede profesora. No hay ningún número".

¿Cuál de las siguientes acciones es pertinente para brindar ayuda pedagógica a este estudiante de modo que se dé cuenta por sí mismo por qué su razonamiento es erróneo?

a) Preguntar: "¿Cómo se escribe 80 centésimos? ¿Y 90 centésimos? ¿Es posible encontrar un número decimal mayor que 80 centésimos y menor que 90 centésimos? ¿Y entre 800 milésimos y 900 milésimos?". Luego, pedir que explique sus resultados.

b) Solicitar que revise, en su libro de texto, la explicación que se da sobre la propiedad de la densidad en el conjunto de números racionales. Luego, pedir que con esa información resuelva la situación planteada.

c) Presentar una recta numérica en la pizarra y ubicar números racionales, entre 0 y 1, como $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; 0,6; 0,8; y 0,9. Luego, pedir que lean dichos números y tomen nota en sus cuadernos.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto intramatemático de tipo 11 (A*plicar la propiedad de densidad en* $\mathbb{Q}$). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de números decimales (fracción, en su expresión decimal, como número racional). La propiedad identificada detrás de la solución de la tarea es la que se refiere a la densidad en $\mathbb{Q}$.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la estructura conceptual de los números racionales; de manera específica, de la propiedad de este conjunto de ser denso en $\mathbb{R}$. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de lo que implica esta propiedad.

Indicador de evaluación: Identifica acciones del docente que favorecen la comprensión de un problema que involucra porcentajes.

A17_1_4

Un docente ha planificado una sesión de aprendizaje para sus estudiantes de segundo grado, en la cual ha incluido el siguiente problema que involucra porcentajes:

> En un aula, respecto de los estudiantes, por cada 4 varones hay 5 mujeres. Se sabe que en el aula hay, en total, 36 estudiantes, que el 25% de los varones usa anteojos y el 25% de las mujeres usa anteojos. ¿Qué porcentaje del total de estudiantes usa anteojos?

¿Cuál de las siguientes acciones es pertinente para lograr que los estudiantes comprendan el problema?

a) Preguntarles por la forma como se obtiene el porcentaje de una cantidad, qué estrategias de resolución podrían utilizar y qué dificultades se podrían presentar al resolver el problema.

b) Preguntarles de quiénes se habla en el problema, qué porcentajes de varones y mujeres usan anteojos, cuál es la cantidad de estudiantes que hay en total, y cuál es la pregunta del problema.

c) Preguntarles por la relación entre varones y mujeres, y si esta permite saber cuántos varones y mujeres hay en el aula, qué significa el porcentaje de varones y mujeres que usan anteojos, y qué se solicita en el problema.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 16 (*Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje*) y de tipo 20 (*Aplicar la definición de razón*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de fracción como razón y el de porcentaje. El procedimiento que está detrás de la solución está vinculado con el uso de la noción de fracción como razón y con la forma correcta de aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda porcentajes (constructo vinculado a los racionales). Es decir, se pone en evidencia el dominio del concepto de fracción como razón y procedimientos matemáticos (regla de tres simple) vinculados a los porcentajes.

Indicador de evaluación: Identifica dificultades de los estudiantes en relación con la comprensión de situaciones que varían proporcionalmente.

A17_1_5

Un docente propone el siguiente problema:

Si 2 llaveros cuestan 5 soles, ¿cuánto costarían 11 llaveros?

A continuación, se muestra el procedimiento de solución de un estudiante al problema:

+9 (2 llaveros —— 5 soles) +9
11 llaveros —— ? soles

$2 + 9 = 11$

$5 + 9 = 14$

Respuesta: Costarían 14 soles.

¿Cuál es la **principal** dificultad que se evidencia en la respuesta del estudiante?

a) No utiliza el procedimiento de la regla de tres simple para determinar el término que falta y resolver la situación de proporcionalidad.

b) No establece la relación de proporcionalidad en la situación y relaciona de manera aditiva los términos de la proporción.

c) No hace uso de una tabla para organizar la información y expresar la relación de proporcionalidad que se plantea en la situación.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto intramatemático de tipo 21 (*Aplicar la definición de proporcionalidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de proporcionalidad. El procedimiento que está detrás de la solución está vinculado con el uso de la definición de proporcionalidad.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que implica la proporcionalidad. Rojas (2014) señala que, cuando un profesor alude a las concepciones de los números racionales como razón, fomenta el pensamiento proporcional. Es decir, esta pregunta se pone en evidencia el dominio del significado de la fracción como razón y de los procedimientos matemáticos vinculados a la proporcionalidad (p. ej. regla de tres simple).

Indicador de evaluación: Identifica la ayuda pedagógica que favorece la reflexión de los estudiantes sobre sus concepciones en relación con la probabilidad condicional.

A17_1_6

Un docente presenta el siguiente problema a sus estudiantes de cuarto grado:

> De un grupo de amigos, 8 solo juegan fútbol y el resto solo juega básquet. Entre los que solo juegan fútbol 6 trabajan el domingo, mientras que de los que solo juegan básquet 1 trabaja el domingo.
>
> Si se elige al azar a uno de estos amigos y alguien nos dice que trabaja el domingo, ¿cuál es la probabilidad de que solo juegue fútbol?

Uno de los estudiantes registra lo siguiente a partir de la información del problema:

$P(J)$: Probabilidad de que solo juegue fútbol.

$P(W)$: Probabilidad de que trabaje el domingo.

$P(J \mid W)$: Probabilidad de que trabaje el domingo siempre que solo juegue fútbol.

Entonces:

$$P(J \mid W) = \frac{P(J \cap W)}{P(W)}, \text{ siempre que } P(W) > 0.$$

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad condicional. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles) y del algoritmo para obtener la probabilidad condicional.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que implica a las probabilidades. Es decir, pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Algunos de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de la situación son la regla de Laplace, en la que subyace la noción de fracción como parte-todo, y el algoritmo para calcular la probabilidad condicional.

- **Ítems del tipo 2 y análisis de las preguntas**

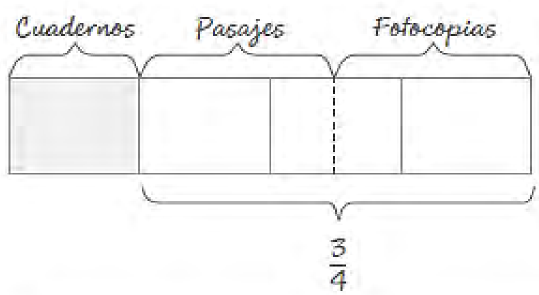
Indicador de evaluación: Identifica dificultades de los estudiantes en relación con la noción de fracción.

A17_2_7

Una docente propone a sus estudiantes la siguiente situación:

José tenía S/ 40 y gastó la cuarta parte en comprar sus cuadernos. El dinero que le quedó debe repartirse equitativamente entre sus gastos de fotocopias y sus gastos de pasajes. ¿Qué fracción del dinero inicial gastará en fotocopias?

A continuación, se muestra parte del proceso de resolución seguido por un estudiante:



La fracción del dinero inicial que gastará en fotocopias se obtiene de $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

Considerando el proceso de resolución mostrado, ¿cuál de las siguientes alternativas evidencia la dificultad que tiene el estudiante?

a) No interpreta el divisor en la operación que representa la gráfica.

b) No establece, en la representación gráfica, una relación apropiada entre el todo y las partes.

c) No expresa, en la representación gráfica, una parte del todo que permita establecer la división.

La situación-problema es de contexto extramatemático de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales)*. El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto-definición que subyace es el de fracción como operador y parte-todo, y la solución de los problemas requiere conocer el procedimiento para operar con fracciones. Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de situaciones en la que se hace uso de la fracción como parte-todo. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de dicho significado de la fracción y del procedimiento para expresar en un diagrama la división de fracciones.

Indicador de evaluación: Identifica errores procedimentales del estudiante en relación con el aprendizaje de las operaciones con fracciones.

A17_2_8

A continuación, se presentan algunos ejemplos del trabajo de un estudiante al multiplicar fracciones:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{3}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{30}{10}$$

¿Cuál de las siguientes alternativas evidencia el mismo patrón de error que el de los ejemplos mostrados?

a) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$

b) $\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{20} \times \frac{15}{20} = \frac{60}{400}$

c) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{24}{12}$

La situación-problema es de contexto intramatemático de tipo 9 (*Operar con fracciones y números decimales exactos o periódicos)*. El lenguaje matemático utilizado es numérico. La solución de la tarea planteada requiere la aplicación del procedimiento para multiplicar fracciones. La propiedad detrás de la tarea es la correspondiente a las cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$. Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda la multiplicación de fracciones. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de fracción como operador y del procedimiento matemático del algoritmo para multiplicar fracciones.

Indicador de evaluación: Identifica operaciones que modelan problemas que involucran fracciones.

A17_2_9

Se tiene el siguiente problema:

Se tienen en total 6 barras de chocolate. Si cada persona recibiera $\frac{2}{3}$ de barra, ¿para cuántas personas alcanzaría el total de chocolate?

¿Cuál de las siguientes operaciones modela este problema?

a) $6 + \frac{2}{3}$

b) $6 \times \frac{2}{3}$

c) $6 \div \frac{2}{3}$

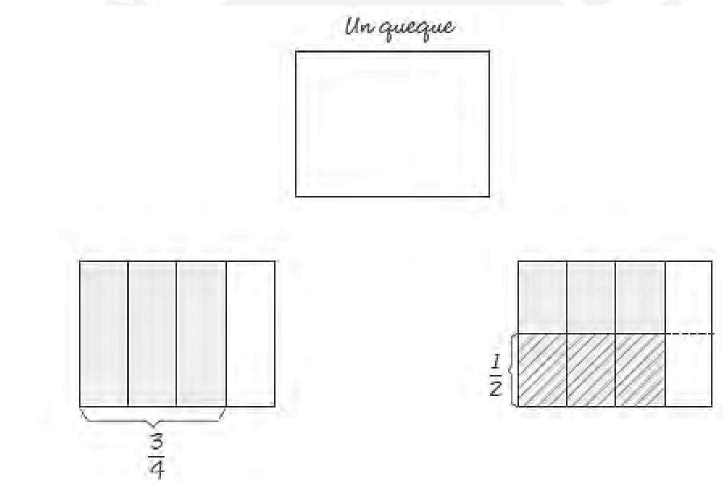
La situación-problema es de contexto extramatemático de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales exactos o periódicos)*. El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. La solución de la tarea planteada requiere la aplicación de la definición de división de fracciones. Considerando el significado de referencia construido, este

ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda la división de fracciones. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de la noción de esta operación con las fracciones y del procedimiento matemático del algoritmo para dividir un entero por una fracción.

Indicador de evaluación: Identifica la correspondencia entre problemas que involucran fracciones y las representaciones gráficas de las operaciones que los resuelven.

A17_2_10

A continuación, se muestra el proceso de solución de un estudiante a un problema que propuso el docente:



Respuesta: Su hermana recibió $\frac{3}{8}$ del queque.

¿Cuál de los siguientes problemas puede ser resuelto correctamente siguiendo el procedimiento mostrado?

a) Carlos tiene $\frac{3}{4}$ partes de 1 queque. Si diera un octavo de las partes que tiene a su hermana, ¿qué parte recibiría ella respecto del total?

b) Carlos tiene $\frac{3}{4}$ partes de 1 queque. Si diera un medio de las partes que tiene a su hermana, ¿qué parte recibiría ella respecto del total?

c) Carlos tiene $\frac{3}{4}$ partes de 1 queque. Si diera dos de estas partes a su hermana, ¿qué parte recibiría ella respecto del total?

La situación-problema es de contexto extramatemático y la estructura no coincide con alguna de los tipos identificado en el significado de referencia. El lenguaje matemático utilizado es figural-numérico. La solución de la tarea planteada requiere de la aplicación de la definición de multiplicación de fracciones.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de situaciones en las que se abordan la multiplicación de fracciones. En específico, permite evidenciar el dominio del profesor respecto del procedimiento para multiplicar fracciones gráficamente.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran la probabilidad condicional.

A17_2_11

En un taller de arte hay 100 estudiantes, de los cuales 45 son mujeres. Además, se sabe que 40 varones y 35 mujeres practican danza. Si entre los estudiantes que practican danza se elige uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

a) 0,47

b) 0,53

c) 0,35

d) 0,75

A17_2_12

Los estudiantes de segundo grado de una IE han vendido 100 boletos numerados de rifa para un evento que están realizando.

A partir de la venta de los boletos de la rifa, un estudiante expresa: "A pesar de que compré dos boletos, puede tocarme o no tocarme el premio de la rifa; entonces, tengo un 50% de probabilidad de ganar".

A partir de lo que dice el estudiante, ¿cuál de las siguientes alternativas expresa su dificultad?

a) Considerar que la probabilidad de ganar o perder es la misma.

b) Considerar un sesgo hacia el determinismo en el análisis de la probabilidad de un fenómeno.

c) Considerar que la probabilidad de un evento se determina por la razón entre la cantidad de boletos que compró y el total de boletos vendidos.

Las dos situaciones-problemas tienen el mismo indicador de evaluación y son de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado en ambos es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad condicional. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles) y de los algoritmos para obtener la probabilidad condicional.

Considerando el significado de referencia construido, estos dos ítems (**A17_2_11 y A17_2_12)** exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problema que implican a las probabilidades. Es decir, pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Algunos de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de las situaciones son la regla de Laplace, en la que subyace la noción de fracción como parte-todo, y el algoritmo para calcular la probabilidad condicional.

- **Análisis cuantitativo y cualitativo de las preguntas**

En la siguiente tabla, se presenta el resumen de los objetos primarios identificados en los doce ítems analizados de la prueba de Matemática del concurso de Ascenso 2017.

Tabla 20

Resumen de objetos primarios - Ascenso 2017

Situaciones-problemas		**f**
Contexto extramatemático		13
Contexto intramatemático		3
Tipos	Tipo 9 (intramatemático)	1
	Tipo 11 (intramatemático)	1
	Tipo 13 (extramatemático)	8

	Tipo 16 (extramatemático)	1
	Tipo 20 (extramatemático)	1
	Tipo 21 (intramatemático)	1
	Tipo 22 (extramatemático)	3
	Ningún tipo (extramatemático)	1
Lenguaje		
Numérico		1
Natural - Numérico		14
Figural - Numérico		1
Concepto-definición		
Fracción	Fracción como parte-todo	2
	Fracción como razón	2
	Fracción como operador	3
	Fracción como número racional	1
	Fracciones equivalentes	1
Números decimales	Exactos	1
Porcentaje	Razón de un número respecto de 100	1
Proporcionalidad	Proporcionalidad directa	1
Probabilidad	Probabilidad condicional	3
Procedimiento		**f**
Uso de definición fracción como parte-todo		1
Uso de definición de fracción como razón		1
Operar con fracciones		5
Uso de definición de multiplicación de fracciones		1
Uso de definición de división de fracciones		1
Uso de definición de proporcionalidad		1
Resolver problema de proporcionalidad directa		1
Algoritmo de probabilidad condicional		3
Propiedades		
Sobre cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$		4
Densidad en $\mathbb{Q}$		1

En general, se puede observar, en la prueba de Matemática del concurso de Ascenso 2017, de las doce preguntas analizadas:

- Trece de las dieciséis situaciones-problemas se presentan en un contexto extramatemático.
- El tipo de situación-problema más frecuente (nueve de dieciséis) ha sido el que se refiere a la resolución de situaciones operando con fracciones y números decimales.
- En catorce de las dieciséis situaciones, el lenguaje matemático usado es el natural-numérico.
- Los conceptos más recurrentes son los de la fracción como operador y la de probabilidad, aunque también aparece la idea de fracción como parte-todo y razón, que suelen estar detrás de los conceptos de porcentaje y probabilidad.
- El procedimiento que está detrás de la solución de la mayoría de los ítems (nueve de las dieciséis situaciones-problemas) es el relacionado con los algoritmos de las operaciones con fracciones, y el algoritmo de probabilidad condicional.
- En uno de los ítems, aparece la propiedad de densidad de los números racionales, y en otro, el referido a la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

4.2.1.2. Ítems del Concurso de Ascenso 2018

A continuación, se presentan las doce preguntas (cuatro del tipo 1 y ocho del tipo 2) de esta prueba que cumplen con los criterios establecidos. Para cada pregunta, se presenta el indicador de evaluación y una descripción analítica a partir del significado de referencia institucional construido.

➢ <u>Ítems del tipo 1 y análisis de las preguntas</u>

Indicador de evaluación: Identifica la actividad de mayor demanda cognitiva en relación con fracciones.

A18_1_1

¿Cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?

a) Si un hexágono representa $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de una unidad, ¿cuántos hexágonos conforman la unidad?

b) Efectúa las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{5} \times \frac{7}{8} \qquad \frac{2}{3} \times 4\frac{4}{5} \qquad 2\frac{5}{30} \times 3\frac{4}{18}$$

c) Sergio está preparando una receta que indica que, por cada porción, se necesita $\frac{1}{4}$ de taza de azúcar. Si él va a preparar 2 porciones, ¿qué parte de taza de azúcar necesitará?

En esta pregunta, se observan, en las alternativas, tres situaciones-problema. De acuerdo con el sistema de referencia descrito, la primera y la tercera son tareas de contexto extramatemático de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales*), y la segunda, de contexto intramatemático de tipo *9* (*Operar con fracciones y números decimales*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto-definición que subyace es el de fracción como parte-todo y operador, y la solución del problema requiere conocer el procedimiento para multiplicar fracciones.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problemas que abordan el uso de los significados de la fracción y de las operaciones asociadas a estas. En específico, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de fracción como parte-todo y operador, y del procedimiento para multiplicar fracciones.

Indicador de evaluación: Identifica acciones pedagógicas para retroalimentar a los estudiantes sobre sus errores en relación con los números racionales.
A18_1_2 Una docente está trabajando con sus estudiantes la representación de fracciones como el cociente de números enteros y les plantea la siguiente pregunta: "¿Cuántas fracciones homogéneas a $\frac{1}{13}$ hay entre $\frac{5}{13}$ y $\frac{8}{13}$?". Un estudiante dijo: "Existen muchas fracciones homogéneas, por ejemplo $\frac{5,1}{13}$; $\frac{5,2}{13}$; $\frac{5,3}{13}$; etc.". ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para brindar retroalimentación al estudiante de modo que reflexione sobre su afirmación? **a** Presentar una recta numérica y pedir que ubique en ella las fracciones $\frac{5}{13}$ y $\frac{8}{13}$. Luego, solicitar que ubique, en esta recta, las expresiones $\frac{5,1}{13}$; $\frac{5,2}{13}$; $\frac{5,3}{13}$ y fracciones homogéneas a $\frac{1}{13}$, cuyo numerador sea un número entero entre 5 y 8. **b** Solicitar que determine la fracción que equivale a 5,1 y preguntar: "Al reemplazar la fracción que equivale a 5,1 en la expresión $\frac{5,1}{13}$, ¿qué fracción se obtendrá? ¿Será homogénea a $\frac{1}{13}$?". Luego, pedir que evalúe si las expresiones $\frac{5,2}{13}$ y $\frac{5,3}{13}$ son homogéneas a $\frac{1}{13}$. **c** Preguntar a la clase: "¿Qué ejemplos de fracciones homogéneas a $\frac{1}{13}$ podrían compartir con su compañero?", de modo que el estudiante anote dichos ejemplos. Luego, solicitarle que seleccione aquellas fracciones que se encuentran entre $\frac{5}{13}$ y $\frac{8}{13}$, y comparta su respuesta con la clase.
La situación-problema de esta pregunta es de contexto intramatemático de tipo 2 y 11 (*Determinar fracciones homogéneas y heterogéneas, y aplicar la propiedad de densidad en* $\mathbb{Q}$). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de fracción como número racional y su definición de "cociente indicado de dos números enteros". La propiedad identificada o detrás de la solución de la tarea es la que se refiere a la densidad en $\mathbb{Q}$. En ese sentido, el ítem explora el conocimiento del profesor respecto del significado de fracción como numero racional y de la estructura conceptual de este conjunto numérico. Es decir, pone

en evidencia el dominio del profesor respecto de propiedades de la densidad de $\mathbb{Q}$ y del procedimiento asociado a su demostración en la recta numérica.

Indicador de evaluación: Identifica indicadores para evaluar el aprendizaje en relación con porcentajes.

A18_1_3

Una docente plantea la siguiente situación para recoger información sobre el aprendizaje de sus estudiantes.

Se ha aplicado una encuesta a un grupo de personas para conocer qué mascotas son de su preferencia. A continuación, se muestran los resultados:

Mascota preferida	Cantidad de personas
Perro	15
Gato	9
Conejo	6

Al preguntarle a Rosa por el porcentaje de personas encuestadas que prefiere el perro como mascota, ella responde que es el 15%.

¿Por qué la respuesta de Rosa no es correcta? Explica tu respuesta.

¿Cuál es el indicador de evaluación que se corresponde con la situación planteada?

a) Describe el procedimiento realizado para calcular porcentajes.

b) Justifica el significado de porcentaje diferenciándolo de una cantidad.

c) Evalúa la validez de una afirmación vinculada a los procesos de variación porcentual.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 16 (*Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de porcentaje y su definición de 'razón de un número con respecto a 100'; el procedimiento que está detrás de la solución está vinculado con la forma correcta de aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple).

Indicador de evaluación: Identifica acciones pedagógicas para retroalimentar a los estudiantes sobre sus errores en relación con la comprensión de porcentajes.
A18_1_4 Un docente plantea el siguiente problema a sus estudiantes: Una tienda ha incrementado, en 20%, el precio de unos zapatos que inicialmente costaban S/ 150. Debido a las pocas ventas, la tienda decide reducir el precio en un 20%. ¿Cuál es el precio final de dichos zapatos? Uno de los estudiantes responde lo siguiente: "El precio final es el mismo, es decir S/ 150. Primero aumentó 20% y eso es S/ 30, pero luego disminuyó 20%, que es S/ 30; entonces, no hubo ningún cambio, y el precio se mantiene". El docente tiene como propósito brindar retroalimentación de modo que el estudiante reflexione sobre su error. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para este propósito? a) Preguntar: "¿Qué porcentajes se han aplicado? ¿Por qué crees que el precio se mantiene igual?". Luego, indicar que, efectivamente, el 20% de S/ 150 es S/ 30 y que por tanto, el nuevo precio de los zapatos, con el aumento, es S/ 180. Después, presentar el procedimiento para calcular el 20% de S/ 180, y concluir que el precio final de los zapatos es S/ 144 y no se mantiene igual como él pensaba. b) Decir que el precio final de los zapatos no es el mismo, ya que se ha aplicado un aumento y un descuento. Luego, indicar que el precio final de los zapatos, considerando ambos porcentajes, es S/ 144. Después, plantear un problema similar indicándole que esta vez se asegure de resolver correctamente el problema y pedir que compare ambos procesos de solución. c) Pedir que identifique a qué cantidad se le aplica el aumento del 20% y que lo calcule. Luego, solicitar que determine el precio con el aumento. Después, preguntar por la cantidad a la que se le aplicará el descuento del 20%, y pedir que analice si es cierto que el 20% de aumento y el 20% de descuento se aplican a la misma cantidad.
La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 17 (*Aplicar aumentos y descuentos porcentuales*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de porcentaje en relación con la aplicación de aumentos y descuentos porcentuales. En ese sentido, el procedimiento está vinculado con la aplicación del algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple-cálculo de un porcentaje), y para calcular aumentos y descuentos porcentuales.

Considerando el significado de referencia construido, estos ítems (**A18_1_3** y **A18_1_4**) exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problemas que implican porcentajes (constructo vinculado a los racionales). Es decir, se pone en evidencia el dominio del concepto de fracción como razón y de los procedimientos matemáticos (regla de tres simple) vinculados a los porcentajes, y a los aumentos y descuentos porcentuales.

➢ <u>**Ítems del tipo 2 y análisis de las preguntas**</u>

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran porcentajes.

A18_2_5

Pedro posee una hacienda en la que se utiliza un terreno rectangular, cuyas dimensiones son 10 m y 20 m, para el cultivo de hortalizas. Él se dio cuenta de que, si retirara piedras y maleza de los linderos de este terreno, podría expandir cada una de sus dimensiones en 20%, lo que le permitiría ampliar su área de cultivo de hortalizas.

Si procediera a retirar las piedras y maleza, ¿en qué porcentaje aumentaría el área de cultivo de hortalizas con respecto a su área inicial?

a) 40%

b) 44%

c) 88%

Indicador de evaluación: Identifica procedimientos que permiten resolver problemas que involucran porcentajes.

A18_2_6

Carlos mezcla 300 mL de un enjuague bucal A, que contiene 16% de alcohol, con 500 mL de otro enjuague bucal B, que contiene 24% de alcohol. Como producto de esta mezcla, se obtiene 800 mL de un nuevo enjuague bucal.

Con respecto al porcentaje de alcohol en el nuevo enjuague bucal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) El porcentaje de alcohol en el nuevo enjuague bucal equivale a la semisuma de los porcentajes de alcohol de los enjuagues bucales A y B.

b) El porcentaje de alcohol en el nuevo enjuague bucal equivale a la suma de los porcentajes de alcohol de los enjuagues bucales que fueron mezclados.

c) El porcentaje de alcohol en el nuevo enjuague bucal equivale al cociente de la suma de la cantidad de alcohol de ambos enjuagues entre la cantidad de mililitros en el nuevo enjuague bucal.

A18_2_7

Durante la temporada de liquidación, una tienda deportiva ofrece descuentos en sus diversos artículos. Elmer desea comprar un par de zapatillas y una camiseta. El precio de venta del par de zapatillas es 156 soles y el de la camiseta es 84 soles. Ambos artículos se ofrecen con el 15% de descuento.

¿Cuál de las siguientes alternativas expresa un procedimiento correcto para saber el monto que se descontará por la compra de ambos artículos?

a) Calcular la suma de los precios de venta de ambos artículos. Luego, calcular el 30% de dicha suma.

b) Calcular el 15% de la suma de los precios de venta de ambos artículos. Luego, calcular la diferencia considerando este resultado y la suma de dichos precios de venta.

c) Calcular el 85% del precio de venta de cada artículo y hallar la suma de estos valores. Luego, calcular la diferencia considerando este resultado y la suma de los precios de venta.

Las situaciones-problema de estas tres preguntas presentan un contexto extramatemático de tipo 16 y 17 (*Resolver situaciones aplicando la definición de porcentaje, y Aplicar aumentos y descuentos porcentuales*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de porcentaje. En ese sentido, el procedimiento está vinculado con la aplicación del algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple-cálculo de un porcentaje), y para calcular aumentos y descuentos porcentuales.

Considerando el significado de referencia construido, estos tres ítems exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problemas que implican porcentajes (constructo vinculado a los racionales). Es decir, se pone en evidencia el dominio del concepto de fracción como razón y de los procedimientos matemáticos (regla de tres simple) vinculados a los porcentajes y a los descuentos.

Indicador de evaluación: Identifica errores de los estudiantes en relación con la comprensión del concepto de probabilidad.

A18_2_8

Una docente propone el siguiente problema a sus estudiantes:

Si se lanzan dos dados no trucados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 en cada uno de los dados?

Un estudiante interviene y se suscita el siguiente diálogo:

Estudiante: "Maestra, dígame, ¿la probabilidad de obtener 4, al lanzar un dado, es $\frac{1}{6}$?".

Docente: "Así es. Si lanzas un solo dado, la probabilidad de obtener 4 es igual a $\frac{1}{6}$; porque solo hay 1 caso favorable de 6 casos posibles".

Estudiante: "Entonces, la probabilidad de obtener 4 en ambos dados será $\frac{2}{6}$".

Con respecto a la última afirmación, ¿cuál de las siguientes alternativas corresponde al error en el que incurre el estudiante?

a) Considerar que la probabilidad de obtener 4 en cada dado se genera a partir de una relación de proporcionalidad.

b) Considerar que la ocurrencia de que se obtenga 4 en un dado es independiente de que se obtenga 4 en el otro.

c) Considerar la probabilidad de obtener 4 en uno de los dados sabiendo que se obtuvo 4 en el otro.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran probabilidades.

A18_2_9

En una caja vacía se han colocado 4 bolas blancas y 3 bolas negras, todas del mismo tamaño, peso y textura.

¿Cuál de las siguientes acciones se debe realizar para que la probabilidad de extraer una bola negra de la caja al azar sea $\frac{3}{5}$?

a) Agregar a la caja una bola blanca.

b) Retirar de la caja dos bolas blancas.

c) Retirar de la caja una bola de cada color.

Las situaciones-problemas de estas dos preguntas presentan un contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad y su definición como razón o el cociente de dos números. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles).

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran probabilidades.
A18_2_10 En una caja vacía se han colocado 4 bolas blancas y 3 bolas negras, todas del mismo tamaño, peso y textura. Al extraer dos bolas de la caja al azar, una a una y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras? a $\frac{1}{7}$ b $\frac{2}{7}$ c $\frac{6}{7}$
A18_2_11 Sara y Miguel están jugando con los naipes. El primero que gane tres partidas se lleva el premio, el cual consiste en una bolsa que contiene 12 canicas. El juego se interrumpió cuando Sara iba ganando 2 partidas y Miguel, 1 partida. Ambos decidieron que el premio debería ser repartido. ¿Cuántas canicas le correspondería a cada uno, considerando su probabilidad de ganar tres partidas si no se hubiera interrumpido el juego? a 6 canicas para Sara y 6 canicas para Miguel. b 8 canicas para Sara y 4 canicas para Miguel. c 9 canicas para Sara y 3 canicas para Miguel.
Las situaciones-problemas de estas preguntas son de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-

numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad de sucesos dependientes. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles) y de los algoritmos para obtener la probabilidad de sucesos compuestos o dependientes.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran probabilidades.

A18_2_12

En un censo realizado en una comunidad, se encontró que la quinta parte de las personas que pertenecen a la población económicamente activa (PEA), no cuenta con estudios superiores y no trabaja. El 35% no cuenta con estudios superiores. Además, 1 de cada 4 personas tiene estudios superiores y trabaja.

Una empresa realizó una convocatoria a miembros de esta comunidad para una entrevista de trabajo. A esta entrevista, se presentaron todas las personas que no trabajan y pertenecen a la PEA. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer entrevistado no cuente con estudios superiores?

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{7}{20}$

Una docente tiene como propósito que sus estudiantes afiancen su comprensión de la probabilidad condicional. Para ello, llevó al aula, como material de trabajo, una baraja de 52 cartas, en la cual cada palo de la baraja (trébol, espada, corazón y diamante) está conformado por 13 cartas.

Utilizando este material, ¿cuál de las siguientes situaciones podría proponer la docente para que los estudiantes hagan uso de la probabilidad condicional?

a) Se han colocado 52 cartas de la baraja sobre una mesa, mezcladas y apiladas. Si se sabe que la primera carta es un número par, calculen la probabilidad de que sea 2.

b) Se han colocado 13 cartas de un mismo palo de la baraja sobre una mesa, mezcladas y apiladas. Calculen la probabilidad de que la primera carta corresponda a un número impar.

c) Se han colocado 2 cartas de espadas y 3 de corazones mezcladas y apiladas sobre una mesa. Al tomar una carta, esta es de corazones. Luego, se devuelve y se vuelve a mezclar. Calculen la probabilidad de que, al tomar nuevamente una carta, esta sea de espadas.

Las situaciones-problemas de estas preguntas son de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad condicional. El procedimiento para resolver el problema requiere la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles) y de los algoritmos para obtener la probabilidad condicional.

Considerando el significado de referencia construido, estos tres ítems (**A18_2_8, A18_2_9, A18_2_10, A18_2_11 y A18_2_12)** exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problema que implican a las probabilidades. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Algunos de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de las situaciones son la regla de Laplace, en la que subyace la noción de fracción como parte-todo, y el algoritmo para calcular la probabilidad condicional.

- **Análisis cuantitativo y cualitativo de las preguntas**

En la siguiente tabla, se presenta el resumen de los objetos primarios identificados en los doce ítems analizados de la prueba de Matemática del concurso de Ascenso 2018.

Tabla 21

Resumen de objetos primarios - Ascenso 2018

Situaciones-problemas		**f**
Contexto extramatemático		13
Contexto intramatemático		3
Tipos	Tipo 2 (intramatemático)	1
	Tipo 9 (intramatemático)	1

	Tipo 11 (intramatemático)	1
	Tipo 13 (extramatemático)	2
	Tipo 16 (extramatemático)	2
	Tipo 17 (extramatemático)	3
	Tipo 22 (extramatemático)	6
Lenguaje		
Natural - Numérico		14
Concepto-definición		
Fracción	Fracción como parte-todo	1
	Fracción como operador	1
	Fracción como número racional	1
	Fracción como cociente de dos enteros	1
Porcentaje	Razón de un número respecto de 100	1
	Aumentos y descuentos	2
Probabilidad	Razón-cociente entre dos números	2
	Probabilidad de sucesos dependientes	2
	Probabilidad condicional	1
Procedimiento		
Multiplicar - dividir fracciones		3
Resolver problema de proporcionalidad directa		3
Algoritmo de aumentos y descuentos porcentuales		2
Regla de Laplace		2
Algoritmo de probabilidad de sucesos dependientes		2
Algoritmo de probabilidad condicional		1
Propiedades		
Sobre cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$		1
Densidad en $\mathbb{Q}$		1

En general, se puede observar que, en la prueba de Matemática del concurso de Ascenso 2018, de las doce preguntas analizadas:

- Trece de las dieciséis situaciones-problemas se presentan en un contexto extramatemático.
- Las situaciones-problemas más recurrentes (trece de dieciséis) son las que se refieren a la resolución de situaciones operando con fracciones y números decimales (tres); situaciones de porcentaje, aumentos y descuentos porcentuales (cinco); y situaciones de probabilidad (seis).
- El lenguaje matemático usado en los doce ítems es el natural-numérico.
- Los conceptos más recurrentes son los de la fracción como razón, que suelen estar detrás de los conceptos de porcentaje y probabilidad, y el concepto de probabilidad de sucesos dependientes.
- El procedimiento que está detrás de la solución de la mayoría de los ítems (trece de dieciséis) es el relacionado con los algoritmos de las operaciones con fracciones, el relacionado con la resolución de situaciones de proporcionalidad directa, y el algoritmo de probabilidad de sucesos dependientes.
- En uno de los ítems, aparece la propiedad de densidad de los números racionales, y en otro, el referido a las cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$.

4.2.1.3. Ítems del Concurso de Ascenso 2019

A continuación, se presentan las ocho preguntas (dos del tipo 1 y seis del tipo 2) de esta prueba que cumplen con los criterios establecidos. Para cada pregunta, se presenta el indicador de evaluación y una descripción analítica a partir del significado de referencia institucional construido.

➢ <u>**Ítems del tipo 1 y análisis de las preguntas**</u>

Indicador de evaluación: Identifica por qué una actividad que involucra números racionales es de alta demanda cognitiva.

A19_1_1

Un docente planteó a los estudiantes de segundo grado la siguiente tarea:

> Lee el siguiente enunciado:
>
> "*a* y *b* son números racionales. Si *a* es un número positivo y *b* es un número negativo, entonces $(a - b)$ es un número positivo".
>
> Analiza si el enunciado es verdadero o falso, y explica por qué.

¿Por qué la tarea propuesta es de <u>**alta**</u> demanda cognitiva?

a) Porque la tarea requiere operar con números racionales, lo que implica un conocimiento más profundo de los conjuntos numéricos para validar el enunciado.

b) Porque la tarea requiere una abstracción, pues implica operar con expresiones literales y no con números específicos para validar el enunciado.

c) Porque la tarea exige analizar, mediante una estrategia, una expresión simbólica para validar el enunciado.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto intramatemático de tipo 12 (*Aplicar las propiedades de las operaciones en* $\mathbb{Q}$). El lenguaje matemático utilizado es natural-algebraico. La propiedad detrás de la solución de esta situación-problema es la correspondiente a las cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$.

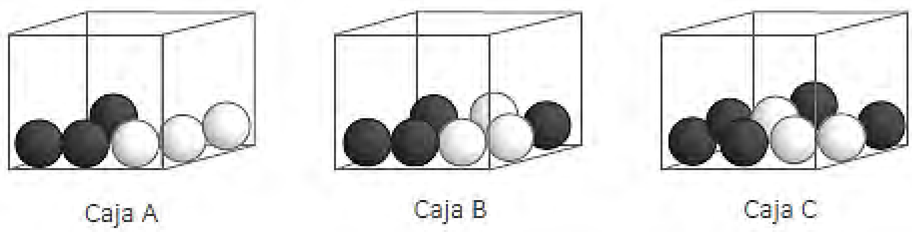
Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones en la que se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de los números racionales, usando para ello las características del conjunto de los números racionales.

Indicador de evaluación: Identifica acciones pedagógicas para retroalimentar a los estudiantes sobre sus errores en relación con las probabilidades.

A19_1_2

Una docente tiene como propósito que los estudiantes calculen y comparen la probabilidad de diferentes sucesos. Para ello, plantea la siguiente tarea:

Tres cajas contienen bolas negras y blancas. Si se extrae al azar una bola de cada caja, ¿en qué caso hay mayor probabilidad de obtener una bola blanca al primer intento?



Felipe, un estudiante, respondió: "En los tres casos hay igual probabilidad porque en todas las cajas hay exactamente 3 bolas blancas".

¿Cuál de las siguientes acciones es <u>**más**</u> pertinente para brindar una adecuada retroalimentación al estudiante, de modo que reflexione acerca de su concepción errónea?

a) Explicarle que la probabilidad se puede representar como una fracción en la que el numerador expresa la cantidad de casos a favor y el denominador, la cantidad total de posibles resultados de un experimento. Luego, pedirle que calcule la probabilidad asociada a cada una de las tres cajas y que determine cuál de las tres fracciones es la mayor.

b) Pedirle que cuente las bolas blancas, las bolas negras y la cantidad total de bolas en cada caja. Luego, preguntarle: "En las cajas, ¿hay la misma cantidad de bolas blancas?, ¿hay la misma cantidad total de bolas?, ¿será lo mismo tener 3 opciones de 6, que 3 de 7 o tener 3 de 8? ¿Esto afectará el valor de la probabilidad en cada caso?, ¿por qué?".

c) Preguntarle lo siguiente: "¿Cómo se calcula la probabilidad en un experimento?, ¿de cuántas formas diferentes se puede representar una probabilidad?, ¿conviene usar la representación porcentual para realizar las comparaciones?, ¿por qué?".

La situación-problema presenta un contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-figural. El concepto que subyace es el de probabilidad, y su definición como razón o el cociente de dos números. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles).

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación que implica a las probabilidades. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Uno de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de las situaciones es la regla de Laplace, en la que subyace la noción de fracción como parte-todo.

➢ **<u>Ítems del tipo 2 y análisis de las preguntas</u>**

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran operaciones con fracciones.

A19_2_3

En enero, una empresa inició sus actividades con cierta cantidad de personal contratado. En julio del mismo año, la empresa contrató a una cantidad adicional de personas igual a la mitad del total de los contratados en enero. Se sabe que, por apertura de una segunda sede de la empresa, al cabo de tres meses, la tercera parte del total de los trabajadores contratados ese año se trasladarán a esta nueva sede.

Con respecto a la cantidad de trabajadores que permanecerán en la primera sede, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) La cantidad de trabajadores que se mantendrá será menor que la que se contrató en el mes de enero.

b) La cantidad de trabajadores que se quedará será la misma que la que se contrató en el mes de enero.

c) La cantidad de trabajadores que permanecerá será mayor que la que se contrató en el mes de enero.

La situación-problema es de contexto extramatemático y de tipo 13 (*Resolver situaciones operando con fracciones y números decimales)*. El lenguaje matemático utilizado es natural. El concepto-definición que subyace es el de fracción como parte todo y operador. La solución del problema requiere de la aplicación de procedimientos para operar con fracciones.

Considerando el significado de referencia construido, este ítem explora el conocimiento del profesor respecto de la resolución de una situación-problema que aborda operaciones con fracciones. En específico, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto del concepto de fracción como parte-todo y de los algoritmos para operar con fracciones.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran aumentos o descuentos porcentuales sucesivos.

A19_2_4

Diego emprendió un negocio de venta de chompas elaboradas con lana de alpaca. Él compró cada chompa a S/ 200 y las vendió con una ganancia del 40 % respecto al precio de compra. Al término de la temporada de invierno, Diego decidió aplicar un descuento del 25 % al precio de venta de cada chompa. ¿Cuánto fue el precio de venta de cada chompa después de aplicar ese descuento?

a) S/ 230

b) S/ 215

c) S/ 210

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 17 (*Aplicar aumentos y descuentos porcentuales*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico y el concepto que subyace es el de porcentaje en relación con la aplicación de aumentos y descuentos porcentuales. En ese sentido, el procedimiento está vinculado con la forma correcta de aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple) y para calcular un descuento.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran interés simple o compuesto.

A19_2_5

Carmen tiene S/ 8000 y quiere colocarlos en el banco como depósito a plazo fijo durante 3 años. Para ello, evalúa la propuesta de dos bancos:

Banco 1	**Banco 2**
Abre una cuenta de ahorros con una tasa de interés simple anual de 9 %.	Abre una cuenta de ahorros con una tasa de interés compuesto anual de 8 %.

Si Carmen quiere obtener la mayor ganancia por su depósito en el plazo mencionado, ¿qué banco debería elegir? ¿Por qué?

a) El Banco 1, porque obtendrá un mayor monto por concepto de interés en comparación con lo que obtendría en el Banco 2.

b) El Banco 2, porque le ofrece una tasa de interés compuesto que siempre es mejor que una tasa de interés simple.

c) Cualquiera de los dos bancos, porque obtendrá el mismo monto por interés al cabo de 3 años.

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 19 (*Calcular la tasa de interés*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico y el concepto que subyace es el de porcentaje en relación con el cálculo de una tasa de interés. El procedimiento detrás de la solución es el de aplicar el algoritmo para resolver un problema de proporcionalidad directa (regla de tres simple).

Considerando el significado de referencia construido, estos dos ítems (**A19_2_4** y **A19_2_5**) exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problemas que implican porcentajes (constructo vinculado a los racionales). Es decir, se pone en evidencia el dominio del concepto de fracción como razón y de los procedimientos matemáticos (regla de tres simple) vinculados a los porcentajes y a los descuentos.

Indicador de evaluación: Identifica errores de los estudiantes en relación con las probabilidades.
A19_2_6 Una docente planteó el siguiente problema a los estudiantes de segundo grado: Se tienen tres dados no cargados de seis caras. Si se lanzan los tres dados simultáneamente, ¿cuál de los siguientes sucesos es más probable que ocurra? S_1: Obtener el número 4, el 5 y el 6. S_2: Obtener en dos dados el número 4 y en el otro, el número 5. S_3: Obtener el número 4 en los tres dados. Un estudiante respondió así: "Los tres sucesos son igualmente probables porque cada uno tiene un solo caso favorable". ¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se evidencia en la respuesta del estudiante? a) Asume que cualquiera de las caras de un dado tiene la misma probabilidad de salir. b) Obvia considerar todas las posibilidades que corresponden a cada suceso. c) Considera que los tres sucesos tienen el mismo espacio muestral.
La situación-problema presenta un contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad y su definición como razón o el cociente de dos números. El procedimiento para resolver el problema requiere la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles).

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran probabilidades.
A19_2_7 Una docente presenta a los estudiantes la siguiente situación: Dentro de una urna hay tres pelotas: dos de color rojo y una de color blanco; todas ellas son de igual tamaño, textura y masa. Cecilia extrae, al azar y de manera consecutiva, dos pelotas, sin devolver ninguna de ellas a la urna.

A partir de esta situación, tres estudiantes realizaron afirmaciones. ¿Cuál de los estudiantes realizó una afirmación correcta?

a) Katherine: "Después de sacar dos pelotas, la probabilidad de que en la urna quede la pelota blanca es el doble de la probabilidad de que quede una pelota roja".

b) Laura: "La probabilidad de sacar solo pelotas rojas en las dos extracciones, resulta ser mayor que la probabilidad de sacar una pelota blanca en la primera extracción".

c) Mery: "La probabilidad de obtener una pelota roja en la primera extracción es igual a la probabilidad de obtener una pelota roja en la segunda, independientemente de lo obtenido en la primera".

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural. El concepto que subyace es el de probabilidad de sucesos dependientes. El procedimiento para resolver el problema requiere la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles), y de los algoritmos para obtener la probabilidad de sucesos compuestos o dependientes.

Indicador de evaluación: Resuelve problemas que involucran la probabilidad condicional.

A19_2_8

En cierto país, hace unos años, se publicó un estudio realizado con una muestra de 100 000 personas entre 40 y 50 años de edad que no presentaban síntomas de cierta enfermedad. Se encontró que la probabilidad de que una de ellas tuviera esta enfermedad era 1 %. Cuando una persona que tenía la enfermedad se realizaba una prueba médica, existía un 95 % de probabilidad de que la prueba médica resulte positiva. También, se informó que el resultado de la prueba médica del 5 % de las personas sanas del mencionado grupo de edad indicaba erróneamente positivo. Lo señalado indica que si bien los chequeos preventivos son muy importantes y valiosos, no son exactos en **todos** los casos.

En la situación presentada, si al realizarse la prueba una persona de la muestra obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente padezca de esta enfermedad?

a) 16,1 %

b) 5,90 %

c) 0,95 %

La situación-problema de esta pregunta es de contexto extramatemático de tipo 22 (*Resolver situaciones de cálculo de probabilidad*). El lenguaje matemático utilizado es natural-numérico. El concepto que subyace es el de probabilidad condicional. El procedimiento para resolver el problema requiere de la aplicación de la regla de Laplace (número de casos favorables entre el número total de casos posibles) y de los algoritmos para obtener la probabilidad condicional.

Considerando el significado de referencia construido, estos tres ítems (**A19_2_6, A19_2_7 y A19_2_8**) exploran el conocimiento del profesor respecto de la resolución de situaciones-problema que implican a las probabilidades. Es decir, se pone en evidencia el dominio del profesor respecto de un concepto-definición y procedimientos vinculados con los números racionales, como lo es la probabilidad. Algunos de los procedimientos matemáticos asociados a la resolución de las situaciones son la regla de Laplace, en el que subyace la noción de fracción como parte-todo, y el algoritmo para calcular la probabilidad condicional.

- **Análisis cuantitativo y cualitativo de las preguntas**

En la siguiente tabla, se presenta el resumen de los objetos primarios identificados en los ocho ítems analizados de la prueba de Matemática del concurso de Ascenso 2019.

Tabla 22

Resumen de objetos primarios - Ascenso 2019

Situaciones-problemas		**f**
Contexto extramatemático		7
Contexto intramatemático		1
Tipos	Tipo 12 (intramatemático)	1
	Tipo 13 (extramatemático)	1
	Tipo 17 (extramatemático)	1

	Tipo 19 (extramatemático)	1
	Tipo 22 (extramatemático)	4
Lenguaje		
Natural		2
Natural - Numérico		4
Natural - Figural		1
Natural - Algebraico		1
Concepto-definición		
Fracción	Fracción como parte-todo	1
	Fracción como operador	1
Porcentaje	Aumentos y descuentos	1
	Tasa de interés	1
Probabilidad	Razón-cociente entre dos números	2
	Probabilidad de sucesos dependientes	1
	Probabilidad condicional	1

Procedimiento	**f**
Operar con fracciones	1
Resolver problema de proporcionalidad directa	2
Algoritmo de aumentos y descuentos porcentuales	1
Regla de Laplace	4
Algoritmo de probabilidad de sucesos dependientes	1
Algoritmo de probabilidad condicional	1
Propiedades	
Sobre cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$	1

En general, se puede observar que, en la prueba de Matemática del concurso de Ascenso 2019, de las ocho preguntas analizadas:

- Siete de las ocho situaciones-problemas se presentan en un contexto extramatemático.
- La mitad de las situaciones-problemas (cuatro de ocho) se refieren a la resolución de situaciones de probabilidad.
- El lenguaje matemático usado en la mitad de los ítems es el natural-numérico, aunque, a diferencia de los otros ítems, ha aparecido el lenguaje figural y algebraico.
- Los conceptos más recurrentes son los de la fracción como parte-todo y razón, que suelen estar detrás de los conceptos de porcentaje y probabilidad.
- El procedimiento que está detrás de la solución de la mitad de los ítems (cuatro de ocho) es el relacionado con los algoritmos para calcular la probabilidad (regla de Laplace).

4.3. Análisis general

A continuación, se presenta, a modo de síntesis, una descripción de lo que ha aparecido con mayor regularidad en las preguntas de las pruebas de Ascenso y Nombramiento del año 2017 hasta el 2019. En total se analizaron un total de 55 ítems. De este total, 21 (38,2%) eran del tipo 1; es decir, pertenecían a un ítem que evaluaba conocimientos de la didáctica específica de la especialidad necesarios para conducir procesos de aprendizaje. Por su parte, 34 (61,8%) son del tipo 2; es decir, estaban dentro de una pregunta que evaluaba el conocimiento solvente de la disciplina o especialidad (centradas en la resolución de una tarea matemática).

En la tabla 23, se presenta un resumen cuantitativo de las entidades primarias identificadas en el análisis de los ítems. Dicho análisis se realizó a partir del significado de referencia institucional sobre los números racionales, construido en el capítulo 3.

Tabla 23

Resumen de objetos primarios - Nombramiento y Ascenso del 2017 al 2019

Situaciones-problemas		**f**
Contexto extramatemático		56
Contexto intramatemático		10
Tipos	Tipo 2 (intramatemático)	1
	Tipo 7 (extramatemático)	1
	Tipo 9 (intramatemático)	3
	Tipo 11 (intramatemático)	3
	Tipo 12 (intramatemático)	2
	Tipo 13 (extramatemático)	15
	Tipo 14 (extramatemático)	1
	Tipo 16 (extramatemático)	4
	Tipo 17 (extramatemático)	6
	Tipo 19 (extramatemático)	3
	Tipo 20 (extramatemático)	1
Tipos	Tipo 21 (intramatemático)	1
	Tipo 21 (extramatemático)	1
	Tipo 22 (intramatemático)	1
	Tipo 22 (intramatemático)	24
Lenguaje		
Natural		3
Numérico		2
Natural - Numérico		54
Natural - Figural		3
Natural - Algebraico		1
Numérico - Figural		1
Numérico - Tabular		1
Concepto-definición		
	Fracción Impropia	1

Fracción	Fracción como parte-todo	5
	Fracción como razón	2
	Fracción como operador	6
	Fracción como cociente de dos enteros	1
	Fracción como número racional	3
	Fracción como medida	1
	Fracciones equivalentes	2
Números decimales	Exactos	3
Proporcionalidad	Proporcionalidad directa	2
Porcentaje	Razón de un número respecto de 100	4
	Aumentos y descuentos	5
	Tasa de interés	3
Probabilidad	Razón-cociente entre dos números	7
	Probabilidad de sucesos dependientes	5
	Probabilidad condicional	7
Procedimiento		
Uso de definición fracción como parte-todo		1
Uso de definición de fracción como razón		1
Operar con fracciones		12
Uso de definición de multiplicación de fracciones		1
Uso de definición de división de fracciones		1
Operar decimales		3
Potenciación de fracciones		1
Uso de definición de proporcionalidad		2
Resolver problema de proporcionalidad directa		11
Uso de definición de porcentaje		1
Algoritmo de aumentos y descuentos porcentuales		5
Regla de Laplace		12
Algoritmo de sucesos dependientes		5
Algoritmo de probabilidad condicional		9

Propiedades	
Sobre cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$	10
Densidad en $\mathbb{Q}$	3

De la tabla, se identifica lo siguiente:

- Del total de situaciones-problemas, el 91% de ellas se presentaban en un contexto extramatemático y solo 9%, en un contexto intramatemático.
- Las situaciones-problemas más frecuentes han sido las referidas a la resolución de situaciones de probabilidad (38%), situaciones para operar con fracciones y números decimales (27%), situaciones de aumentos y descuentos porcentuales (11%), y situaciones de porcentaje (7%). En general, de los 22 tipos de situaciones-problemas asociadas a los números racionales en el significado de referencia institucional, 13 de ellas (59%) se han abordado en las preguntas de las pruebas de Matemática de Nombramiento y Ascenso.
- El 83% del lenguaje matemático usado en las 66 situaciones-problemas ha sido el natural-numérico y solo el 6%, el lenguaje figural.
- Los conceptos más recurrentes que han estado detrás de las situaciones-problemas analizadas han sido los de probabilidad (asociado a su definición como razón, a los sucesos dependientes y a la probabilidad condicional): el de fracción (asociado a su noción de operador, parte-todo y como número racional); y el de porcentaje (asociado a los aumentos y descuentos porcentuales).
- Los procedimientos más frecuentes están vinculados con las situaciones-problemas más recurrentes. Es decir, han sido los algoritmos de las operaciones con fracciones (adición, sustracción, multiplicación y división); la regla de Laplace; la regla de tres simple (sobre todo para el cálculo de porcentajes); y el algoritmo de probabilidad condicional.

- Finalmente, las dos propiedades que han aparecido como sustento de las situaciones-problemas han sido las relacionadas con las cuatro operaciones en $\mathbb{Q}$ y la propiedad de la densidad en $\mathbb{Q}$.

Pero ¿qué se está dejando de lado en estas pruebas? Como se puede evidenciar, en los ítems analizados, ninguna ha evaluado situaciones-problemas que, según lo revisado en los antecedentes, no deben dejar de abordarse cuando se trabaja con los números racionales porque favorecen la comprensión de estos. Las situaciones-problemas no abordadas son:

- Situaciones-problemas donde se aborde al número racional en la medida de cantidades de magnitudes que no contienen un número entero de veces la unidad de medida (la nueva unidad es un submúltiplo de la unidad inicial)
- Situaciones-problemas que favorecen la comprensión de la densidad en $\mathbb{Q}$; por ejemplo, ubicar los números racionales en la recta usando regla y/o compás
- Situaciones-problemas que aborden la noción de fracción como medida
- Situaciones-problemas que favorecen la comprensión demostración de la densidad en $\mathbb{Q}$
- Situaciones-problemas que involucren números periódicos

Surge la siguiente pregunta: ¿en qué medida los ítems de las pruebas exploran determinados aspectos del conocimiento del profesor sobre los números racionales? El EOS sostiene que el significado de un objeto matemático siempre está asociado al sistema de prácticas que realiza o una persona o que se comparten en una institución para resolver las situaciones-problemas vinculadas al objeto (Godino et al., 2007). Considerando ello, los ítems hasta ahora aplicados (en los que se ha abordado los números racionales) no están abarcando todos los elementos del conocimiento que debería tener un profesor sobre los números racionales.

Un primer criterio o indicador de este conocimiento está dado por conocer los sistemas de representación o lenguajes asociados a los números racionales. Sin embargo, el 83% de los ítems aborda las situaciones-problema desde un lenguaje natural-numérico. Esto deja de lado la presencia más notoria del lenguaje figural, gráfico,tabular y algebraico. Esta carencia no permite explorar el conocimiento del profesor sobre dicho aspecto.

Un segundo criterio o indicador de este conocimiento está dado por conocer la estructura conceptual de los números racionales (qué es un número racional, cómo se relaciona con los números enteros, qué propiedades que se cumplían en los números naturales ya no son posibles en los racionales, etc.). El 38% de las situaciones tomadas en los ítems han referido a probabilidades, que ciertamente es un constructo que se asocia con los números racionales. Sin embargo, para poder caracterizar el dominio de un profesor en torno a la estructura de un racional, las situaciones-problemas deberían responder a ello.

Un tercer y último criterio o indicador de este conocimiento, como se mencionó líneas arriba, está dado por la comprensión del número racional en la medida de cantidades de magnitudes que no contienen un número entero de veces la unidad de medida.

CONSIDERACIONES FINALES

Respecto de las investigaciones de referencia y la justificación

Sobre la base de los antecedentes y los documentos presentados en la justificación, se puede afirmar que las situaciones-problemas que, desde el 2017 hasta la actualidad, se han evaluado en las pruebas de los concursos de Nombramiento y Ascenso del Ministerio de Educación guardan relación con el significado institucional; es decir, las situaciones-problemas se encuentran en el sistema de prácticas incluidas en los libros de texto de educación secundaria, en el currículo nacional y en la programación curricular. Sin embargo, existen situaciones que investigadores, tales como Llinares (2008), Llinares y Sánchez (1997), Gairín (2004), Escolano y Gairín (2005), Silva (2005), Millsaps (2005), Fandiño (2019), Rojas, Flores y Carrillo (2013), y Rojas (2014) consideran necesarias en la enseñanza de los racionales (que forman parte del sistema de referencia institucional construido), y que no se han identificado en los ítems de las pruebas de matemática analizados.

Respecto del marco teórico y metodológico

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), y las herramientas teóricas 'sistemas de prácticas' y 'configuración ontosemiótica' han permitido, en primer lugar, comprender que el significado o representación de un objeto matemático siempre estará asociado al sistema de prácticas que realiza o una persona (significado personal) o que se comparten en una institución (significado institucional) para resolver las situaciones-problemas vinculadas al objeto (Godino et al., 2007). Considerando este marco, se realizó la construcción del significado de referencia institucional sobre el objeto matemático 'números racionales' en la educación secundaria peruana. Para esto, se realizó, en primer lugar, la *revisión* y análisis *de los* *documentos oficiales* de la educación peruana, es decir, del currículo nacional, del programa curricular de educación primaria y secundaria, de los textos escolares del nivel secundaria, y de diversos textos matemáticos. En segundo lugar, se identificó, mediante la herramienta de configuración ontosemiótica, las situaciones-problemas (tablas 9 y 10), lenguajes (tabla 11), conceptos-definiciones (tablas 12 y 13), procedimientos (tabla 14), propiedades (tabla 15) y argumentos (tabla 16), presentes en los textos matemáticos asociados al objeto matemático de estudio.

Respecto de la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos

Respecto de la pregunta de investigación "¿Qué elementos del significado de referencia institucional de los números racionales están presentes en las pruebas de Matemática aplicadas por el Ministerio de Educación?", se afirma lo siguiente: se logró identificar cada una de las entidades primarias (situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos) en relación con los números racionales presentes en las 55 preguntas analizadas de las pruebas de Nombramiento y Ascenso aplicadas en los años 2017, 2018 y 2019.

En cuanto al cumplimiento del objetivo general "Valorar las pruebas de Matemática de los concursos de Nombramiento y Ascenso del Ministerio de Educación a partir del significado de referencia institucional de los números racionales en la educación secundaria peruana", se encontró que esto se logró mediante el cumplimiento de los dos objetivos específicos planteados: el primero, 'Construir el significado de referencia institucional del objeto matemático números racionales a partir de investigaciones previas, los documentos curriculares y los textos de la educación secundaria peruana', y el segundo 'Organizar y clasificar las preguntas de las pruebas de Matemática de los concursos de Nombramiento y Ascenso del Ministerio de Educación'.

Para lograr el primer objetivo específico (*Construcción del significado de referencia institucional*), se siguieron los siguientes pasos. En primer lugar, se realizó la revisión de los documentos oficiales de la educación peruana, es decir, del currículo nacional, del programa curricular de educación primaria y secundaria, de los textos escolares del nivel secundaria, y de textos matemáticos. El segundo paso fue el análisis de investigaciones y de textos matemáticos en los que se aborden los números racionales. Esto se realizó con el propósito de identificar enunciados verbales, definiciones, gráficos, justificaciones, etc., y toda información que se relacione con los números racionales. El tercer paso consistió en la clasificación y organización de la información que permita la caracterización de los objetos matemáticos primarios asociados al objeto en estudio. En el cuarto paso, se identificaron las situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos sobre los números racionales que se consideran en las investigaciones y textos matemáticos, aunque no tengan presencia en los textos escolares. En este paso se evidenció la existencia de situaciones-problemas consideradas relevantes o claves por las investigaciones y que no estaban siendo abordadas en los textos matemáticos analizados. Estos tipos de situaciones-problemas provienen de las investigaciones de Llinares (2008), Llinares y Sánchez (1997), Gairín (2004), Escolano y Gairín (2005), Silva (2005), Millsaps (2005), Fandiño (2009), Rojas et al. (2013) y Rojas (2014), los que han sido mencionados en los antecedentes. Finalmente, con los insumos mencionados, se construyó el significado de referencia institucional sobre los números racionales en la educación secundaria peruana.

Para lograr el segundo objetivo específico *(Organización y clasificación de las preguntas de las pruebas de Matemática de los concursos de Nombramiento y Ascenso),* se siguieron los siguientes pasos. En primer lugar, se determinaron criterios para seleccionar las preguntas de las pruebas de Ascenso y Nombramiento del 2017 al 2019 a considerar en el análisis. En segundo lugar, se procedió a identificar las preguntas que cumplían con los criterios establecidos (55 preguntas). En tercer lugar, se resolvieron las preguntas seleccionadas con la participación de dos integrantes del equipo de la Dirección de Evaluación Docente (equipo de instrumentos) para identificar procedimientos y propiedades presentes en la solución de estas situaciones.

Para realizar la valoración de las preguntas (objetivo general), se realizó la descripción analítica de cada una de las 66 situaciones-problemas presentes en los ítems, y para cada concurso, se construyeron tablas que contenían un resumen con los elementos de los objetos primarios identificados en los ítems. Luego, se realizó un análisis general de todas las preguntas valorando lo que se ha presentado con mayor frecuencia, lo que se ha evaluado con mayor recurrencia y lo que se está dejando de lado en las preguntas de los concursos mencionados. En ese sentido, se ha encontrado que aparecen con mayor frecuencia (91%) situaciones-problemas en un contexto extramatemático. Además, el 38% de estas se refieren a la resolución de situaciones de probabilidad: 27%, a la resolución de situaciones para operar con fracciones y números decimales, y 11%, a la resolución de situaciones de aumentos y descuentos porcentuales. Cabe resaltar que, de los 22 tipos de situaciones-problemas asociadas a los números racionales identificados en el significado de referencia institucional, 13 de ellas (59%) se han abordado en las preguntas de las pruebas de Matemática de Nombramiento y Ascenso.

Sobre lo que se está dejando de lado, se ha encontrado que no se han evaluado i) situaciones-problemas que aborden el número racional en la medida de cantidades de magnitudes que no contienen un número entero de veces la unidad de medida; ii) situaciones-problemas que favorecen la comprensión de la densidad en $\mathbb{Q}$, (p. ej. ubicar los números racionales en la recta usando regla y/o compás, y demostrar la densidad en $\mathbb{Q}$; y iii) situaciones-problemas que involucren números periódicos.

Sugerencia de investigación futuras

Partiendo del significado de referencia institucional construido, y considerando el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor que se sustenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, se puede evaluar la construcción de instrumentos que permitan valorar los otros conocimientos del significado de referencia.

REFERENCIAS

Carranza, C. (2006). *Tópicos de aritmética y álgebra.* Lima: IANAS.

Carrión, M. L. (2012). *Matemática Básica.* Lima: Moshera S.R.L.

D'Amore, B. (2004). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilón: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"* (60), 413-434.

Escolano, R. & Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática* (1), 17-35.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá, DC Colombia: Cooperativa editorial Magisterio.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gairín, J. (1998). Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción. *Aula, 10*, 41-64.

Gairín, J. (2004). Estudiantes para maestros: Reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. *Contextos educativos: Revista de educación* (6), 235-260.

Gallegos, M. & Pérez, S. (2013). Aportes "realistas" a la educación matemática. *Revista de la Patagonia. Difundiendo saberes, 10* (16), 12-19.

Gamarra, H. (2015). *Aritmética. Teoría y práctica.* Lima: San Marcos.

García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática, 17* (2), 153-166.

Giné de Lera, C. & Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y creencias en torno a la Resolución de Problemas de profesores y estudiantes de profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28* (48), 191-208.

Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (20), 13-31.

Godino, J. (2014). *Síntesis del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas.* España: Universidad de Granada.

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. *Actas del Segundo Congreso International virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. España: Universidad de Granada, 1-20

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. & Batanero, C. (2009). Formación de profesores de Matemática basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica*, 9-33.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31* (57), 90-113.

Gonzalez, J. & Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de educación matemática* (54), 25-45.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Doctoral dissertation, Universidad de Granada.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). México D.F.: McGraw-Hill/Interamericana.

Junta de Andalucía. (2017). *Junta de Andalucía - Consejería de Educación*. Obtenido de Representación de la recta real: http://agrega.juntadeandalucia.es/repositorio/ 23062017/71 /es-an_2017062313_9123620/2_representacin_de_la_recta_real.html

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 162-181). Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematic*s

Llinares, S. (2008). Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. *Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación*, pp. 1-19. Bogotá.

Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (Síntesis conceptual). *Revista IIPSI, 9* (1), 123-146.

Millsaps, G. (2005). *Interrelationships between teachers' content knowledge of rational number, their instructional practice, and students' emergent conceptual knowledge of rational number.* Doctoral Dissertation, The Ohio State University.

Ministerio de Educación. (2015). *Marco de fundamentación de las pruebas de rendimiento de la Evaluación Censal de Estudiantes de 2.° de Secundaria 2015.* Lima: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (2016a). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Lima: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (2016b). *Programa curricular de Educación Secundaria.* Lima: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (2016c). *Programa Curricular de Educación Primaria.* Lima: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (2016d). *Matemática 1. Texto escolar.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016e). *Matemática 2. Texto escolar.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016f). *Matemática 3. Texto escolar.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016g). *Matemática 4. Texto escolar.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016h). *Matemática 5. Texto escolar.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016i). *Matemática 1. Cuaderno de trabajo.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016j). *Matemática 2. Cuaderno de trabajo.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016k). *Matemática 3. Cuaderno de trabajo.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016l). *Matemática 4. Cuaderno de trabajo.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (2016m). *Matemática 5. Cuaderno de trabajo.* Lima: Norma.

Ministerio de Educación. (Octubre de 2019). *Evaluación Docente*. Obtenido de Ascenso 2019 - Educación Básica: http://evaluaciondocente.perueduca.pe/ascenso2019/

Ministerio de Educación. (2019a). Resolución Viceministerial N°. 115-2019-MINEDU. *Norma Técnica que Regula el Concurso Público para el Ascenso de Escala de los Profesores de Educación Básica en la Carrera Pública Magisterial*.

Ministerio de Educación. (Octubre de 2019b). *Evaluación Docente*. Obtenido de Nombramiento 2019: http://evaluaciondocente.perueduca.pe/nombramiento2019/

Ministerio de Educación. (2019c). Resolución Viceministerial N°. 033-2019-MINEDU. *Norma que regula el concurso público de ingreso a la Carrera Pública Magisterial 2019 y que determina los cuadros de mérito para la contratación docente 2020-2021en instituciones educativas públicas de educación básica*.

Ministerio de Educación. (2019d). *Evaluación Docente*. Obtenido de Presentación: http://evaluaciondocente.perueduca.pe/evaluacion-docente/

Nóblega, M., Vera, Á., Gutiérrez, G. & Otiniano, F. (2018). *Criterios homologados de Investigación en Psicología (CHIP). Investigación Cualitativa.* Lima.

Pino-Fan, L., & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. *Paradigma, 36* (1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matematico de futuros profesores sobre la derivada. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matematica, 8* (2), 1-49.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN* (33), 11-27.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos.* Doctoral dissertation, Universidad de Granada.

Rojas, N., Flores, P. & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 4*, 47-64.

Sanz, I. & Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto de Evaluación Educativa (INEE). (M. Gonzáles, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega, Edits.) *Investigación en Educación Matemática XVIII*, 67-81.

Secretaría de Educación Pública. (2004). *Libro para Maestro - Secundaria.* México: Secretaría de Educación Pública.

Silva, M. F. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fraccionários para a quinta série.* São Paulo: Tese doutorado em Educação Matemática - PUC/SP.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2017). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (Séptima edición). México D.F.: CENGAGE Learning.

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarollar la teoría fundamentada.* España: Editorial Universidad de Antioquía.

Treffers, A. & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education–the Wiskobas program. En *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (2), 97-121.

Ugarte, F. & Yucra, J. (2014). *Matemáticas para arquitectos.* Lima: Facultad de Arquitectura y Urbanismo - PUCP.

Zakaryan, D. & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké, 24* (3), 301-321.