**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**ESCUELA DE POSGRADO**

**Título**

# UNA ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL CON LA MEDIACIÓN DE LA CALCULADORA GRÁFICA PARA MOVILIZAR LA NOCIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES DE NIVEL SECUNDARIO

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**


**AUTOR:**

Alfredo Henry Manrique Arias

**ASESORA:**

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar


Junio, 2020

# RESUMEN

La presente investigación tiene por objetivo analizar cómo la Orquestación Instrumental promueve que los estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática al desarrollar una secuencia de actividades en la que utilizan la calculadora de pantalla gráfica, para lo cual nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo una Orquestación Instrumental, en la que la calculadora gráfica es un mediador, promueve que estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática?* Utilizamos aspectos de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, como base teórica y metodológica respectivamente. La secuencia de actividades de la investigación está estructurada en dos momentos, los cuales permitieron que los estudiantes realicen esquemas de acción instrumentada y esquemas de acción colectiva instrumentada. En el desarrollo de las actividades, los estudiantes realizaron cambios en algunos elementos de la función cuadrática para generar una transformación en su representación gráfica y, a partir de ello, establecieron conjeturas sobre las traslaciones horizontales y verticales. Señalamos también que utilizaron algunos comandos de la calculadora de pantalla gráfica, que les permitió observar las trasformaciones del objeto representado, relacionar conocimientos y establecer conjeturas.

Finalmente, mediante la articulación de la Génesis y la Orquestación Instrumental, los estudiantes establecieron conjeturas sobre las traslaciones de la función cuadrática al realizar esquemas de acción colectiva instrumentada, un modo de ejecución y un desempeño didáctico.

**Palabras claves:** Función cuadrática, Génesis Instrumental, Orquestación Instrumental, Calculadora gráfica.

# ABSTRACT

This research aims to analyse how the Instrumental Orchestration promotes that first-year students of the International Baccalaureate Diploma Programme mobilize the notion of quadratic function by executing a sequence of activities in which they use the graphing calculator. Therefore, we have decided to answer the following question: *How does an Instrumental Orchestration, in which the graphing calculator is a tool, promote that first-year students of the International Baccalaureate Diploma Programme mobilize the notion of quadratic function?* We use aspects of the Instrumental Genesis and the Instrumental Orchestration, as theoretical and methodological basis accordingly. The activity sequence of the research is organized in two times frames, which allowed students to make schemes of instrumented action and schemes of instrumented collective action. When carrying out the activities, the students made changes on some elements of the quadratic function to generate a transformation in its graphic representation, and based on that, they made conjectures on the horizontal and vertical translations. We also inform that students used some commands of the graphing calculator that allowed them to observe the transformations of the represented object, connect knowledges and make conjectures.

Finally, through the articulation of the Instrumental Genesis and the Instrumental Orchestration, the students made conjectures on the translations of the quadratic function by making schemes of instrumented collective action, an execution mode and a didactic performance.



**Keywords:** Quadratic function; Instrumental Genesis; Instrumental Orchestration; Graphic calculator.

## DEDICATORIA

*A mis familiares, en especial a mis padres Juan y Sabina por darme el regalo de la vida y la motivación permanente de ser mejor persona y profesional cada día. A mi esposa Beatriz Espinoza, por su comprensión, motivación y apoyo permanente en esta aventura de seguir desarrollándome profesionalmente.*

# AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su orientación y apoyo permanente en el desarrollo de la investigación, por las recomendaciones, sugerencias oportunas y su rigurosidad en la asesoría, que me dieron luces para avanzar y mejorar este trabajo en cada una de sus versiones preliminares.

A los miembros del jurado, Dra. Verónica Neira Fernández, por sus valiosas contribuciones y sugerencias realizadas durante las exposiciones de avance de tesis, así como también por sus revisiones y observaciones de la versión final. A la Mg. Daysi Julissa García Cuéllar, por su disposición y tiempo en las revisiones y recomendaciones de la versión final de la tesis.

Al grupo de investigadores de la línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus aportes y recomendaciones en las exposiciones preliminares de la presente investigación.

A todos los docentes de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus valiosas contribuciones académicas y profesionales en mi formación, en especial a los docentes Jesús Flores, Cecilia Gaita y Nélida Medina, quienes fortalecieron en mi la perseverancia y dedicación para afrontar los retos con éxito.

A mis compañeros de estudio de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, con quienes he compartido experiencias académicas en los trabajos colaborativos.

A mis estudiantes del primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional, quienes participaron con total predisposición y responsabilidad en el desarrollo de la investigación, así como también a los directivos de la Institución Educativa por el apoyo y autorización para la aplicación de la investigación.

# ÍNDICE

Resumen ..... ii

Índice ..... iii

Lista de Tablas ..... v

Lista de Figuras ..... vi

Introducción ..... 1

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA ..... 3

1.1. Investigaciones de referencia ..... 3

1.1.1. Investigaciones relacionadas al estudio de la función cuadrática ..... 3

1.1.2. Investigaciones relacionadas con la mediación de la tecnología, la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental ..... 7

1.2. Justificación ..... 12

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación ..... 17

1.4. Génesis Instrumental y Orquestación: aspectos teóricos y metodológicos ..... 18

1.4.1. Aspectos de la Génesis Instrumental ..... 18

1.4.2. Aspectos de la Orquestación Instrumental ..... 20

1.5. Procedimientos metodológicos: ..... 23

CAPITULO II: FUNCIÓN CUADRÁTICA ..... 25

2.1 La función cuadrática ..... 25

2.2 Función cuadrática en libros de texto de matemática nivel superior de Bachillerato Internacional ..... 29

2.3 La calculadora de pantalla gráfica ..... 33

CAPITULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS ..... 38

3.1 Configuración Didáctica ..... 38

3.2 Modo de ejecución ..... 39

3.3 Desempeño didáctico ..... 40

3.3.1 Análisis de la actividad exploratoria ..... 40

3.3.2 Análisis de la Actividad 1 ..... 49
CONCLUSIONES ..... 72
REFERENCIAS ..... 77
ANEXOS ..... 80

# LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Competencia y capacidades de aprendizaje. .....14

Tabla 2. Indicadores de desempeño. .....14

Tabla 3. Unidades del programa de estudios de Matemáticas NS. .....16

Tabla 4. Organización de contenidos de la unidad 2 del programa de estudios. .....17

Tabla 5. Representación y característica de la función cuadrática. .....27

Tabla 6. Secuencia de actividades de la parte experimental .....39

Tabla 7. Resultados de la actividad exploratoria .....48

Tabla 8. Distribución de las duplas .....49

Tabla 9. Resultados de la actividad 1. .....70

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Áreas académicas del programa de Diploma ..... 15

*Figura 2*. Esquemas de utilización ..... 19

Figura 3. El proceso de Génesis Instrumental ..... 20

Figura 4. Elementos de una Orquestación Instrumental ..... 21

Figura 5. Representación de la configuración didáctica ..... 22

Figura 6. Diagrama de flecha de f ..... 25

Figura 7. Clasificación de funciones ..... 26

Figura 8. Traslación vertical de una función cuadrática ..... 28

Figura 9. Traslación horizontal de una función cuadrática ..... 28

Figura 10. Cambio de tamaño de una función cuadrática ..... 29

Figura 11. Representación gráfica de una función cuadrática ..... 30

Figura 12. Elementos de una función cuadrática ..... 30

Figura 13. Representación y elementos de la función cuadrática ..... 31

Figura 14. Representación gráfica de la traslación de una función cuadrática ..... 32

Figura 15. Vista de la pantalla principal y herramientas de la calculadora ..... 34

Figura 16. Pantallas y ventana principal del modo gráfico ..... 35

Figura 17. Reglas de correspondencias de funciones en la pantalla de texto ..... 35

Figura 18. Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en la pantalla de gráficos ..... 36

Figura 19. Ajuste de parámetros en la ventana de visualización ..... 36

Figura 20. Interceptos entre las representaciones gráficas de funciones ..... 36

Figura 21. Pregunta 1 de la actividad exploratoria ..... 40

Figura 22. Continuación de la pregunta 1 de la actividad exploratoria ..... 41

Figura 23. Representaciones gráficas de las funciones cuadráticas en la calculadora presentada por el estudiante Óscar .....41

Figura 24. Respuesta de la pregunta 1 presentado por el estudiante Óscar .....42

Figura 25. Pregunta 2 de la actividad exploratoria .....44

Figura 26. Respuesta de la pregunta 2a) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar .....44

Figura 27. Respuesta de la pregunta 2b) de la actividad exploratoria presentada por el estudiante Óscar .....45

Figura 28. Pregunta 3 de la actividad exploratoria .....46

Figura 29. Respuesta de la pregunta 3a) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar .....46

Figura 30. Respuesta de la pregunta 3b) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar .....47

Figura 31. Respuesta de la pregunta 3e) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar .....48

Figura 32. Representación gráfica de la pregunta 1 ai) de la actividad 1 .....51

Figura 33.Representación gráfica de la pregunta 1 bi) de la actividad 1 .....52

Figura 34. Representación gráfica de a pregunta 1 ci) de la actividad 1 .....53

Figura 35. Respuesta de la pregunta 1 di) de la actividad 1 .....54

Figura 36. Respuesta de la pregunta 2 i) y 2 ii) de la actividad1 .....56

Figura 37. Representación gráfica de la función cuadrática con los valores del vértice .....57

Figura 38. Ítem iv) de la pregunta 2 de la actividad 1 .....57

Figura 39. Representación gráfica de la función f sujeto a una traslación mediante un vector .....58

Figura 40. Representación gráfica de la función f y g mostrando algunos elementos .....58

Figura 41. Ítem v) y vi) de la pregunta 2 de la actividad 1 .....59

Figura 42. Representación gráfica del ítem a) realizada por la dupla **D2**.....60
Figura 43. Respuesta de la dupla **D2** al ítem ai) de la actividad 1.....61
Figura 44. Representación gráfica del ítem b) presentado por la dupla **D2** .....61
Figura 45. Respuesta de la dupla **D2** al ítem bi) de la actividad 1.....62
Figura 46. Respuesta de la dupla D2 al ítem bii) de la actividad 1.....62
Figura 47. Representación gráfica del ítem c) presentado por la dupla D2.....63
Figura 48. Respuesta de la dupla D2 al ítem c) de la pregunta 1 de la actividad 1...63
Figura 49. Respuesta de la dupla D2 al ítem cii) de la pregunta 1 de la actividad 1 .64
Figura 50. Representación gráfica del ítem d) presentado por la dupla D2 .....64
Figura 51. Respuesta de la dupla **D2** al ítem di) de la actividad 1.....65
Figura 52. Respuesta de la dupla D2 al ítem di) de la pregunta 1 - actividad 1 .....65
Figura 53. Representación gráfica de la función cuadrática mostrando por la dupla D2 .....66
Figura 54. Respuesta de la pregunta 2) i y ii) presentado por la dupla D2.....67
Figura 55. Respuesta de la pregunta 2) iii) presentado por la dupla D2 .....67
Figura 56. Representación gráfica del ítem 2 iii) presentado por la dupla D2 .....68
Figura 57. Representación gráfica del ítem 2 iv) presentado por la dupla D2.....69
Figura 58. Respuesta de la pregunta 2 iv) presentado por la dupla D2 .....69
Figura 59. Respuesta de la pregunta 2v) y 2 vi) presentado por la dupla D2.....70

# INTRODUCCIÓN

La presente investigación comprende el estudio de la función cuadrática desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental de Trouche (2014) y la Génesis Instrumental de Rabardel (2011) en el cual se usó la calculadora de pantalla gráfica como herramienta.

Se piensa que la investigación contribuye al estudio de este objeto matemático y su enseñanza, ya que estamos interesados en analizar cómo la Orquestación Instrumental favorece la movilización de la noción de función cuadrática en estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional a través de una secuencia de actividades en la cual harán uso de la calculadora de pantalla gráfica.

Asimismo, es bueno señalar que la presente investigación busca resaltar la importancia de la enseñanza de la función cuadrática, ya que su desarrollo permite comprender otros objetos de mayor complejidad, como la optimización y el cálculo diferencial.

A continuación, se presenta la estructura de la investigación, la cual está compuesta por tres capítulos.

En el primer capítulo, se mostrará la problemática de la investigación en la que se revisó investigaciones que tienen relación con el objeto de estudio función cuadrática, las cuales nos brindan información sobre su enseñanza y las dificultades que presentan los estudiantes en su aprendizaje, la influencia del uso de la tecnología en la enseñanza de la función cuadrática, como lo es la calculadora de pantalla gráfica, así como también se revisó investigaciones en las cuales utilizaron, como base teórica, la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, ya que nos permitirá analizar y comprender cómo la Génesis y la Orquestación Instrumental favorecen la movilización de la función cuadrática en el desarrollo de actividades. También se establece la justificación, se formula la pregunta, los objetivos de la investigación, algunos aspectos de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, así como también los procedimientos metodológicos.

En el segundo capítulo, se abordará el estudio de la función cuadrática desde dos dimensiones: epistemológico, en el que se considera el aspecto formal del objeto matemático función cuadrática, a partir de la definición, elementos, características, representaciones y las transformaciones, como lo son las traslaciones verticales y horizontales y, en segundo término, el didáctico, en el cual se realizará un estudio del texto Mathematics HL, utilizado por los estudiantes de quince años que cursan el primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional.

En el tercer capítulo, se describe la parte experimental del estudio, escenario, sujetos de investigación y la secuencia de actividades. Del mismo modo, se mostrará el análisis de las actividades, relacionadas a las respuestas esperadas y las respuestas realizadas por las acciones de los estudiantes, y los resultados del experimento.

Finalmente, se presenta las conclusiones de la investigación en relación a los aspectos teóricos y metodológicos, la pregunta de investigación y el objetivo general.

# CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente trabajo de investigación, estamos interesados en realizar un análisis sobre como los estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional aprenden la noción de función cuadrática a través de una secuencia de actividades mediada por la calculadora de pantalla gráfica Fx-CG50 y Fx-9860-GII-SD. Para ello, presentaremos algunas investigaciones relacionadas al estudio de la función cuadrática, al uso de tecnologías y a los aspectos de la Génesis Instrumental y a la Orquestación Instrumental. Posteriormente, mostraremos la justificación de la investigación, la pregunta de investigación y los objetivos.

## 1.1. Investigaciones de referencia

En esta sección, abordaremos investigaciones de referencia relevantes para nuestra investigación.

### 1.1.1. Investigaciones relacionadas al estudio de la función cuadrática

Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) realizaron una investigación con el objetivo de estudiar los sucesos de las representaciones de los conceptos en el aprendizaje de la matemática, como las representaciones de conceptos sobre funciones lineales y cuadráticas, todo enmarcado en la teoría de Registros de Representación Semiótica y que fue desarrollada con 109 estudiantes con edades entre 17 y 20 años que cursaron el primer año de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Argentina.

Asimismo, en cuanto a la metodología, la investigación respondió a un enfoque descriptivo y exploratorio, mientras que, en la parte experimental, los autores plantearon un cuestionario de 12 preguntas, dentro de las cuales se encuentran preguntas relacionadas a nuestro objeto de estudio la función cuadrática.

En este trabajo, los investigadores analizaron cuatro de las preguntas vinculadas a representaciones de conceptos sobre funciones lineales y cuadráticas. En ellas, se analizó cómo los estudiantes realizan conversiones en el registro algebraico y gráfico o viceversa.

En el resultado del análisis, los autores mencionan que 76 estudiantes de los 109 asociaron la gráfica de una parábola con la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De mismo modo, 47 de ellos identifican el signo del coeficiente cuadrático y el coeficiente independiente a excepción de un estudiante, mientras que 22 estudiantes identificaron el coeficiente lineal. Por otro lado, mencionan que solo dos estudiantes vincularon la representación gráfica de la función cuadrática con la ecuación $y = a(x - h)^2 + k$.

Finalmente, Díaz, et al (2015) concluyen que una considerable proporción de los estudiantes evaluados no lograron establecer una coordinación entre las representaciones. Esto indica que existen dificultades en la comprensión del concepto de función lineal y cuadrática.

En esta misma línea, Malaspina y Medina (2014) realizaron una investigación desarrollado en un curso de Análisis en la Recta Real en una universidad particular de Lima – Perú, basada en la teoría de Registros de Representación Semiótica. En ella, se realizó el análisis de la función cuadrática en su forma polinómica $P(x) = ax^2 + bx + c$, en un intervalo de -10 a +10 con el objetivo de que los estudiantes elaboren conjeturas a partir de la variación de los parámetros a, b y c de la función cuadrática, los cuales son tratados en la vista gráfica del software GeoGebra.

Los autores utilizaron el comando deslizador del GeoGebra, los cuales permitieron variar los parámetros a, b y c de la función cuadrática, como por ejemplo los cambios en el valor del parámetro c, manteniéndose fijos los parámetros a y b, los cuales, a partir de la observación, estas ocasionan desplazamientos verticales de la representación gráfica de la función cuadrática.

Los investigadores afirman que, al realizar la variación de los parámetros a, b y c de la función cuadrática, se puede evidenciar la conversión del registro gráfico al registro algebraico, y, en este último, se realiza un tratamiento para la verificación de la conjetura realizada por los estudiantes sobre el comportamiento de la función cuadrática al realizar las variaciones de sus parámetros.

En la misma línea de pensamiento, Briceño y Buendía (2015) desarrollaron una investigación que fue desarrollada con 12 estudiantes de un curso intermedio del Bachillerato de México, con edades de entre 13 y 14 años, esta tuvo como objetivo considerar las acciones de los estudiantes como seres humanos haciendo Matemática y que estas puedan ser capitalizadas como fuentes de significados para la Matemática asociada a funciones cuadráticas.

Los autores utilizaron aspectos de la Socioepistemología y como metodología los experimentos de diseño y aplicaron dos actividades basadas en la modelación para resignificar la noción de función cuadrática, lo que implica la argumentación sobre las variaciones de los parámetros y, a partir de ella, inducir nuevos significados sobre esta noción.

Los investigadores, en la primera actividad, se centraron en el estudio del desplazamiento que sufre un automóvil de un punto determinado a otro y, en la segunda actividad, se propusieron analizar el desplazamiento vertical de una pelota. Cada una de las actividades presenta siete preguntas y los investigadores esperaban que los estudiantes movilicen nociones relacionadas con las variaciones de la función cuadrática, como, por ejemplo, el tiempo como variable independiente, la utilización de la gráfica de intervalos, la gráfica de puntos clave, entre otros.

Briceño y Buendía (2015) mencionan que, luego de haberse aplicado las dos actividades, en el análisis de los resultados obtenidos, la mayoría de los estudiantes, al realizar las representaciones gráficas de las relaciones entre las variables, ubicaron los puntos en el plano cartesiano de forma bidimensional y, del mismo modo, identificaron los intervalos y los puntos de quiebre de la representación gráfica de función cuadrática.

Además, los autores observaron que un grupo de estudiantes realizaron las representaciones gráficas en el segundo cuadrante, lo que hace pensar a los investigadores que los estudiantes se centraron en graficar, sin tomar en cuenta las condiciones de las variables para realizar la representación de la función cuadrática. Por tanto, concluyen que la investigación brinda una base de significados, a través del comportamiento de las representaciones gráficas y la articulación de las tablas, en el tratamiento de los aspectos variacionales particulares de la función cuadrática.

Asimismo, afirman que las dos actividades propuestas, ayudaron a los estudiantes a reconocer elementos y características de la función cuadrática por medio de diferentes representaciones, como la gráfica y la tabular.

Por otro lado, la investigación de Alvares (2012) cuya finalidad era comprender e interpretar la incidencia de algunas mediaciones pedagógicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática a través del análisis de los hechos realizados por los estudiantes del noveno grado en una prueba de entrada y salida.

Luego de realizar la experimentación con cuatro grupos, el autor evidencia en los resultados que los estudiantes del grupo 1, correspondientes a la incidencia Tabular – gráfica, muestran mayor avance y mejor disposición al momento de abordar diferentes situaciones. Según el autor, esto se debe a que la incidencia es la forma visual de aprender. En cuanto a las demás incidencias, como la tecnológica-problémica, analítica-abstracta y oral-escrita, muestran un desempeño bajo en los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas en la prueba de entrada y salida.

Como resultado de la aplicación de la prueba de entrada y salida, Alvares (2012) menciona que la relación existente en los procedimientos que se realizan en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática y en la utilización de mediaciones pedagógicas, tiene como resultado que la incidencia tabular-gráfica es la que más favorece a la comprensión de la noción de función cuadrática, seguido de la tecnológica-problémica; sin embargo, las que no lograron una aceptación en los estudiantes fueron la incidencia oral-escrita y analítica-abstracta.

Asimismo, Alvares (2012), a la luz de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, menciona que uno de las dificultades del aprendizaje es hacer que los estudiantes pasen de

una aprehensión local e icónica a la aprehensión cualitativa, porque es aquí donde los estudiantes pueden realizar una coordinación entre el registro algebraico y los gráficos cartesianos, que funcionan como una visualización.

Huapaya (2012), en su investigación, tuvo como objetivo realizar una propuesta basada en experimentos de enseñanza, utilizando como mediador el graficador FUNCIONSWIN32 y EXCEL, el cual favorecerá el aprendizaje del concepto de función cuadrática al transitar entre diversas representaciones cuando modelan situaciones-problema. Cabe mencionar que el autor, para el desarrollo de su investigación, utilizó la metodología de *Design Experiment* de Cobb y, para realizar el análisis de los procedimientos realizado por el estudiante, se basó en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

El autor señala que se realizaron tres experimentos: la primera, referida a la familiarización y apropiación de los recursos tecnológicos; la segunda, al trabajo con lápiz y papel al desarrollar actividades que permiten el tratamiento y conversión entre los registros de representación de la función cuadrática y; el tercer experimento, al uso de la tecnología en el desarrollo de actividades de modelación.

Del mismo modo, el autor menciona que, de acuerdo a los experimentos realizados, el estudiante presento un manejo adecuado de las herramientas tecnológicas, ya que conocen los comandos para realizar operaciones matemáticas. Por otro lado, menciona que el estudiante resolvió las actividades de modelación de situaciones problemas al obtener la función demanda, la función ingreso y la función de utilidad de productos y, finalmente, analizan problemas de variación directa e inversa, relacionándolos con la función cuadrática.

En el experimento 1 parte b, el estudiante relacionó, de manera correcta, la función cuadrática con su representación algebraica y su tabla de valores, al utilizar como estrategia el cálculo de valores al sustituir la variable x con 1, 2, 3 y 4 en la regla de correspondencia de la función, luego los compara con los valores de las tablas propuestas para hallar la respuesta. En tanto, en la pregunta 3, el cual tiene como objetivo que el estudiante determine la regla de correspondencia a partir de un gráfico, el autor menciona que el estudiante no logró hallar la respuesta, a pesar de haber realizado diferentes acciones, tales como identificar pares de valores en la gráfica y usar la regla de correspondencia $f(x) = ax^2 + bx + c$ para calcular los valores de los parámetros $a, b\ y\ c$.

Huapaya (2012) menciona que, en la segunda parte del experimento, sesión 2, en la pregunta 1, el estudiante logró modelar la situación problema a través de la función cuadrática al utilizar el graficador FUNCIONSWIN32. En los problemas *¿Los ingresos del Gym, aumentan o disminuyen?* y en el problema *Optimizando los ingresos en la fábrica de gaseosa*, el autor

menciona que los estudiantes, para resolver estos problemas, utilizaron la herramienta tecnológica para establecer el máximo ingreso y también menciona que desarrollaron sus habilidades para interpretar los gráficos al visualizar máximos, mínimos, tendencia, reconocimiento de patrones entre otros conocimientos.

Asimismo, refiere que el estudiante realiza el tránsito entre los diferentes registros de representación a través del uso de las herramientas tecnológicas, como lo es el graficador FUNCIONSWIN32 y la planilla Excel, al realizar la construcción de la tabla de valores, graficar el plano cartesiano e insertar un diagrama de dispersión. Además, los mismos utilizaron un lenguaje natural al redactar sus conclusiones e interpretaciones sobre lo estudiado, potenciaron sus habilidades en el manejo de comandos para realizar exploraciones sobre las nociones de dominio, rango, crecimiento, decrecimiento, pendiente, punto máximo, punto mínimo, intercepto con los ejes, vértice de la parábola, entre otros.

Una de las conclusiones a la que llega Huapaya (2012) es que la utilización de la tecnología en el desarrollo de los aprendizajes va más allá de manipular y representar objetos, ya que las actividades desarrolladas, mediante estos recursos, debe permitir la reorganización de la estructura conceptual del estudiante.

### 1.1.2. Investigaciones relacionadas con la mediación de la tecnología, Génesis y Orquestación Instrumental

Como en nuestra investigación estamos interesados en realizar secuencia de actividades con la mediación de la calculadora de pantalla gráfica, y realizar el análisis de las mismas, teniendo en cuenta aspectos de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, a continuación, presentaremos referentes relacionados con la mediación de la tecnología, tales como la de Trouche (2014), Trouche y Drijvers (2014) y Salazar (2015), quienes señalan la pertinencia de utilizar la herramienta tecnológica en el desarrollo de las nociones matemáticas. También presentaremos investigaciones relacionadas a la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, tales como la de Orosco, Cuevas, Madrid y Trouche (2019) y la investigación de Suárez y Castro (2017).

Trouche (2014) se centra en el análisis sobre el uso de las calculadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos e indica que el uso de las calculadoras en la enseñanza de las Matemáticas se dio inicio con el currículo de Francia y de Estados Unidos.

Del mismo modo, el autor señala que la evolución de estas herramientas tecnológicas, para el proceso de enseñanza, está vinculada a la evolución que ellas presentan en la sociedad. También menciona que, en la actualidad, existen diversas herramientas tecnológicas, entre ellas las calculadoras, que cumplen papeles específicos como, por ejemplo, en las

transacciones comerciales (cambio de moneda) y que ello hace pensar al autor que algunas técnicas de cálculos aprendidas en el colegio en estos tiempos son obsoletas.

Trouche (2014) menciona la postura de los docentes en cuanto al uso de la calculadora y al respecto señala que un gran porcentaje de docentes no muestran predisposición a incorporar en su labor educativa el uso de esta herramienta. También afirma que, de acuerdo a la evolución institucional (referida a la evolución del currículo, textos escolares, y el problema de la evaluación), se promueve el uso de las calculadoras en los procesos de enseñanza aprendizaje. Para esta afirmación, el autor se basa en la evolución de los currículos de Francia y Estados Unidos, en donde se incorporaron el uso de las calculadoras en actividades de clase y en los problemas propuestos en los textos escolares.

Asimismo, el autor señala que en las evaluaciones a los estudiantes se permite el uso de la calculadora como, por ejemplo, en el Programa de Bachillerato en Francia. Al concluir la investigación, el autor recomienda que se debe realizar una evolución en los currículos en donde se estipule el uso de las calculadoras desde el nivel primario hasta la universidad. Sin embargo, también hace mención que se puede presentar diversas dificultades en su incorporación, debido al desconocimiento del manejo de las calculadoras, por parte de los docentes, ya que, en su mayoría, en la formación profesional no lo han realizado el uso de esta tecnología. Además, menciona que se debe tener en cuenta la integración de herramientas, como la calculadora, ya que abre nuevas posibilidades de aprendizaje para los estudiantes y plantea nuevos retos para la enseñanza a los docentes.

Por otro lado, la investigación de Trouche y Drijvers (2014) señala el fin de establecer la importancia de las herramientas digitales en la Educación Matemática, es decir, la interacción significativa entre una herramienta tecnológica y su usuario para realizar una actividad específica, para la cual consideran la noción de Orquestación Instrumental.

El tema central de esta investigación es analizar las formas de cómo estas interacciones se desarrollan entre sí, así como también, el impacto que generara en el proceso de enseñanza aprendizaje del futuro.

En la misma línea, los autores mencionan que la noción de Orquestación Instrumental tiene como objetivo describir cómo los estudiantes pueden desarrollar una relación fluida y eficaz con el objeto matemático a través de la tecnología. Los investigadores explican que esto es posible porque existe una Orquestación del docente sobre las configuraciones didácticas que deben realizar los estudiantes, ya sea en forma individual o mediante la conexión en red de los sujetos, mediante la tecnología.

En la parte experimental de la investigación, se trabajó con seis docentes los cuales diseñaron actividades orientados a establecer la Orquestación e Instrumentalización en el cual los estudiantes hicieron uso de una calculadora y fueron desarrollados en un entorno virtual. La aplicación y el resultado de la actividad mostraron que la Orquestación Instrumental favorece la obtención de mejores resultados en la práctica docente.

Los autores concluyen que es importante incluir la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ya que permite potenciar el trabajo en equipo a través de la Orquestación Instrumental.

Con relación a las investigaciones relacionadas al uso de la tecnología en el estudio de la función cuadrática, tenemos la de Salazar (2015), quien realizó un análisis sobre cómo sucede la Génesis Instrumental de la función cuadrática por medio de una secuencia de actividades relacionadas con la traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

Esta investigación fue desarrollada con 15 estudiantes del primer ciclo del curso de Matemáticas en una universidad particular de Lima, Perú. Cabe señalar que para realizar el análisis se consideró el trabajo de un solo estudiante. Además, la misma se basó en la Génesis Instrumental para su análisis y, como metodología, utilizó aspectos de la Ingeniería Didáctica.

Con relación a las actividades, la autora se centra en el análisis de la cuarta actividad, la cual se desarrolló con la mediación del GeoGebra y constó de cuatro ítems, donde los estudiantes, a partir de indicaciones estructuradas, interactuaron con la representación del objeto matemático función cuadrática mediante el uso de deslizadores y, a partir de ello, establecieron conjeturas sobre el comportamiento de la representación gráfica de la función cuadrática a partir de $f(x) = x^2$.

Luego de la fase experimental, en el análisis de los resultados, la investigadora señala que los estudiantes, al realizar una variación de los valores de h (eje de simetría), a (coeficiente del término cuadrático) y k (valor del vértice en el eje Y), por medio del arrastre de los deslizadores, observaron que la representación de la función cuadrática se traslada horizontal y verticalmente.

También señala que los estudiantes comparan funciones cuadráticas y establecen diferencias al afirmar que ambas funciones tienen un punto mínimo en común. Esto hace observar a la investigadora que las acciones del estudiante seleccionado muestran que está instrumentado con las nociones movilizadas en la actividad.

Salazar (2015) señala que la mediación del GeoGebra, como herramienta de aprendizaje, favorece la comprensión de la noción de traslación horizontal y vertical de la función

cuadrática, ya que debido a su dinamismo (arrastre) es una ventaja para realizar exploraciones sobre propiedades de los objetos matemáticos.
Con relación al proceso de Génesis Instrumental, la investigadora afirma que, al analizar el desarrollo de las preguntas de la actividad, sí se desarrolló este proceso, ya que en el sentido de Rabardel, se observó, en varios momentos, la instrumentación e instrumentalización al realizar la traslación vertical y horizontal de la función cuadrática.

Por otro lado, Orosco, Cuevas, Madrid y Trouche (2019), en su informe preliminar de su investigación doctoral sobre el complejo proceso de instrumentación que desarrollan los estudiantes al utilizar diversos artefactos en una situación de enseñanza para introducir los conceptos de valores propios y vectores propios en un curso tradicional de Álgebra lineal e Ingeniería, mencionan que, como utilizarán herramientas digitales y no digitales, se apoyarán en aspectos de la Génesis Instrumental para explicar los procesos de adquisición cognitiva de parte de los estudiantes. Asimismo, mencionan que el docente no solo trabaja con un solo tipo de tecnologías, sino diversas, como, por ejemplo, tecnologías papel – lápiz, tecnologías digitales (calculadoras, pizarras interactivas, programas matemáticas).

Para comprender la complejidad de estas tecnologías, los autores, introdujeron la idea de Orquestación Instrumental, basados en Trouche (2004) en el cual señala que *"introdujo esta noción para mostrar que el profesor debe organizar una configuración didáctica con todos los artefactos que va utilizar y también debe de organizar la manera de explotar esa configuración didáctica"* (p. 6).

Los autores diseñaron cinco Orquestaciones para implementar el curso de Álgebra lineal en una Universidad de México con estudiantes de Ingeniería del tercer año, el cual se desarrolló en un laboratorio con computadoras y utilizaron el software GeoGebra para el desarrollo de la actividad propuesta. Para ello, de las cinco orquestaciones, los autores desarrollaron dos orquestaciones centradas en el profesor y tres en el estudiante.

Luego de la experimentación Orosco, Cuevas, Madrid y Trouche (2019), concluyeron que, *"Aunque se planificó la integración de la tecnología, para disminuir el tiempo de resolución y los errores en los cálculos aritméticos–algebraicos, no se realizó una cuidadosa Orquestación para explicar los procesos de adquisición por parte de los estudiantes"* (p. 7).

En la misma línea de pensamiento, Suárez y Castro (2017) en su investigación titulada *Génesis Instrumental en el proceso de aprendizaje: el software wxMaxima y la función polinómica,* desarrolladas con estudiantes en un curso de Matemáticas Operativas del primer semestre de Ingeniería Agropecuaria en la Universidad de Antioquia, responde a una propuesta para mejorar los porcentajes de aprobación de este curso general, donde se

abordan el estudio de polinomios y funciones elementales de variable real y motivar a los estudiantes para que aprendan Matemáticas de una manera activa, para ello integran a la tecnología como mediación de los procesos de enseñanza–aprendizaje. Los autores señalan que el propósito de su investigación es analizar cómo los estudiantes incorporan el Software wxMaxima a su aprendizaje de temas relacionados con la función polinómica.

Para el desarrollo de la investigación, los autores se basan en aspectos de la Génesis Instrumental, ya que los estudiantes deben aprender a usar el artefacto para resolver problemas.

Los autores señalan que:

> En esta investigación, el proceso de Génesis Instrumental ha permitido identificar varios aspectos esenciales en la incorporación del Software al proceso de aprendizaje de los estudiantes. Inicialmente, se identifica la presencia de un sujeto –docente- que iniciaría el proceso artefactual; es decir, estudia y analiza diferentes artefactos disponibles, identificando sus características y potencialidades para planificar actividades o esquemas de uso, realizando un proceso de instrumentalización. De otro lado se encuentra otro sujeto –estudiante- que, de acuerdo con los esquemas de uso planificados por el docente, realiza acciones sobre el artefacto, explorando e identificando posibilidades o restricciones, configurándose así un proceso de instrumentación (Suárez y Castro 2017, p. 110).

Las actividades aplicadas en esta investigación fueron elaboradas por el docente, quien usó el software durante el desarrollo de la clase y facilitó una guía de trabajo para que los estudiantes realicen operaciones, procesos y análisis para plantear conjeturas y establecer conclusiones.

Suárez y Castro (2017) observaron la actitud de los estudiantes en relación con el uso de los recursos tecnológicos utilizados en el desarrollo de la actividad. En la parte experimental, mencionan que *"El uso continuado del Software permitió que los estudiantes exploraran tanto los conceptos matemáticos como las posibilidades de los comandos para resolver las cuestiones planteadas en los ejercicios"* (p. 118). Adicional a esto, los autores mencionan que algunos estudiantes descubrieron posibilidades y restricciones de los comandos del Software. Finalmente, los autores concluyen que la instrumentación se manifestó por los estudiantes debido a que mostraron diferentes conductas para trabajar las guías y comprender los comandos del Software, configurándose esquemas de acción instrumentada. Asimismo, señalan que, durante el análisis de las actuaciones de los estudiantes, se identificó un nuevo aspecto en el proceso de la instrumentación, el cual lo han denominado *cooperación*.

Luego de haber presentado algunas investigaciones que serán referentes para el desarrollo de nuestro trabajo, tanto como en el estudio del objeto matemático y en el análisis de la experimentación, a continuación, presentaremos la justificación de nuestra investigación.

## 1.2. Justificación

En las investigaciones presentadas en la sección anterior, vale decir las de Malaspina y Medina (2014), Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015), Briceño y Buendía (2015), Alvares (2012), Huapaya (2012), Trouche (2014), Trouche y Drijvers (2014), Salazar (2015), Orosco, Cuevas, Madrid y Trouche (2019) y Suárez y Castro (2017) se muestra la pertinencia de realizarse esta investigación con estudiantes de quince años que cursan el primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional, el cual, en nuestro país, es equivalente al cuarto grado en el nivel secundario, ya que el aprendizaje de la función cuadrática es necesario para desarrollar otras nociones posteriores, como por ejemplo, la optimización mediante la función cuadrática, así como también la importancia del uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática.

Del mismo modo, señalan que el uso de la tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas es importante, ya que permite a los estudiantes interactuar con el objeto matemático en estudio y de esta manera construir sus propios aprendizajes. Además, se puede señalar que la herramienta empleada con mayor frecuencia es el Software GeoGebra, porque permite la experimentación con objetos matemáticos, ya que, por intermedio de la vista gráfica que posee, facilita a los estudiantes la exploración de las características de la función cuadrática, formular conjeturas al observar cómo la representación gráfica cambia a partir de las modificaciones realizadas en las reglas de correspondencia y detectar cómo se modifican los valores independientes con las mismas.

Por otro lado, la *National Council of Teachers of Mathematics* (2000), que en adelante llamaremos NCTM, menciona que la tecnología enriquece el aprendizaje de las Matemáticas, como, por ejemplo, en el uso de las calculadoras los estudiantes pueden examinar representaciones o ejemplos que permiten modificar valores y observar las transformaciones dinámicas y, a partir de ellas, los estudiantes establecen diálogos de discusión entre ellos o con el docente.

Asimismo, el NCTM (2000) señala que el uso eficaz de las herramientas tecnológicas en el desarrollo de contenidos matemáticos depende del profesor, ya que ella puede ser usada de una forma correcta o deficiente. Además, menciona que los docentes deberían aprovechar el uso de la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes al seleccionar o crear tareas matemáticas.

En esa misma línea, Trouche (2014) indica la importancia del uso de las calculadoras en la Enseñanza de las Matemáticas, así como también el uso obligatorio de dicha herramienta en los exámenes de Bachillerato Internacional.

En la misma línea, Trouche y Drijvers (2014) destacan la importancia del uso de las herramientas digitales en la Enseñanza de la Matemática, ya que ella permite la interacción

significativa entre una herramienta tecnológica y su usuario en la ejecución de una actividad específica, para el cual consideran la noción de Orquestación Instrumental.

Consideramos que los aportes de los investigadores son importantes para el desarrollo de nuestra investigación, ya que pensamos realizar el análisis del estudio de la función cuadrática mediada por la calculadora de pantalla gráfica en base al enfoque de Orquestación Instrumental.

Por otro lado, la Guía de Matemáticas Nivel Superior (2014) del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional, en uno de los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, señala que:

> La tecnología es una herramienta poderosa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se puede utilizar para potenciar la visualización y ayudar al alumno a comprender conceptos matemáticos. Puede ser útil en la recopilación, registro, organización y análisis de datos. También permite incrementar el ámbito de los tipos de problemas accesibles a los alumnos. El uso de la tecnología aumenta la viabilidad para que los alumnos trabajen en contextos de problemas interesantes donde reflexionan, razonan, resuelven problemas y toman decisiones (p. 13).

Del mismo modo, en el Programa del Diploma del Bachillerato Internacional, en el curso de Matemática, se recomienda y propicia el uso de la calculadora de pantalla gráfica en el desarrollo de las actividades matemáticas, puesto que los estudiantes, al culminar el Programa de Diploma, serán evaluados con tres pruebas (prueba 1, prueba 2 y prueba 3) y en las pruebas 2 y 3 los estudiantes hacen uso de la calculadora de pantalla gráfica para resolver las preguntas de las pruebas señaladas.

A continuación, presentaremos algunos aspectos del Currículo Nacional de Educación en el Perú y del Bachillerato Internacional, el cual se encuentra inmerso el objeto de estudio función cuadrática.

En el Currículo Nacional de Educación del Perú (2016), señala que los estudiantes en el área de Matemática deben desarrollar diversas competencias de acuerdo a los ciclos en la que se encuentran. En el Currículo Nacional se considera para la Educación Secundaria los ciclos: ciclo VI correspondiente a 1$^{ro}$ y 2$^{do}$ de secundaria y el ciclo VII correspondiente a 3$^{ro}$, 4$^{to}$ y 5$^{to}$ de secundaria.

En la tabla 1, mostramos la competencia y capacidades que los estudiantes deben desarrollar en el ciclo VII, básicamente relacionado con el objeto matemático función cuadrática.

Tabla 1.
*Competencia y capacidades de aprendizaje*.

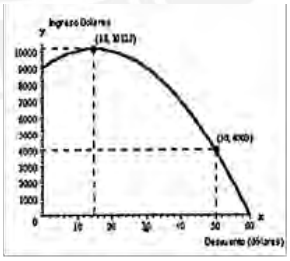
| Ciclo | Competencia | Capacidades |
|---|---|---|
| VII | Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambios. | ✓ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.<br>✓ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.<br>✓ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.<br>✓ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia. |

Fuente: Adaptado de Currículo Nacional de Educación Básica Regular (2016, pp. 62-63)

Cabe señalar que, de acuerdo con el Diseño Curricular de aprendizaje, el grado y objeto de estudio de nuestro interés (función cuadrática) se encuentran ubicados en el VII ciclo en la competencia *Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio*.

En la tabla 2, mostraremos los desempeños de acuerdo con la Guía de Programación Curricular de Educación Secundaria (2016) en el VII ciclo en el área de Matemática relacionada a la función cuadrática.

Tabla 2.
*Indicadores de desempeño.*

| COMPETENCIA | DESEMPEÑOS |
|---|---|
| **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambios.** | ✓ Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen a las **funciones cuadráticas** $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall\, a \neq 0\, y\, a \in Q$.<br>✓ **Sobre el dominio y rango de una función cuadrática,** la relación entre la variación de sus coeficientes y los cambios que se observan en su representación gráfica para interpretar un problema en su contexto y estableciendo relaciones entre dichas representaciones.<br>  <br>Ejemplo: Un estudiante observa la gráfica e identifica que el ingreso mayor se logra con un descuento de 15 dólares. De esta forma, determina que el rango del ingreso en dólares es de 0 hasta 10 125 dólares y que, para descuentos mayores o menores que 15 dólares, el ingreso es menor. **Plantea afirmaciones sobre relaciones de cambio que observa entre las variables de una función cuadrática.** Justifica o descarta la validez de afirmación mediante un contraejemplo, propiedades matemáticas o razonamiento inductivo y deductivo. |

Fuente: Adaptado de Guía de Programación Curricular (2016, pp. 60-61)

Los desempeños mostrados en la tabla 2, según el Currículo Nacional de aprendizaje (2016), se refieren a las descripciones de las acciones que realizan los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias, de acuerdo con los estándares de aprendizaje.

Por otro lado, en la Guía de Programa Curricular de Educación Secundaria (2016), en el área de Matemática, nos describen el nivel de competencia esperado del estudiante al finalizar el VII ciclo. Con respecto a nuestro objeto de estudio Función Cuadrática, indica que los estudiantes deben resolver problemas referidos a funciones cuadráticas y exponenciales. Además, deben analizar y evaluar si la expresión algebraica reproduce las condiciones de un problema determinado; expresar su comprensión sobre la diferencia de una función cuadrática y exponencial y sus parámetros y las aplica en la interpretación de enunciados en fuentes de información al utilizar un lenguaje matemático y gráfico.

Con relación al Bachillerato Internacional, la educación está organizada en cuatro programas: el Programa de la Escuela Primaria (PEP) dirigida a estudiantes de 3 a 12 años; el Programa de Años Intermedios (PAI), dirigida a estudiantes de 11 a 16 años; el Programa del Diploma (PD) dirigidos a estudiantes de 16 a 19 años y el Programa de Orientación Profesional (POP), dirigida a estudiantes de 16 a 19 años.

En nuestra investigación, estamos interesados en trabajar con estudiantes del Programa del Diploma, que ahora en adelante lo llamaremos “PD”, el cual es un curso exigente de dos años de estudio, dirigido a jóvenes de 16 a 19 años que, en nuestro país, el primer y segundo año son equivalentes a cuarto y quinto grado de secundaria respectivamente.

El currículo del PD comprende seis áreas académicas, el cual se muestra en la figura siguiente.

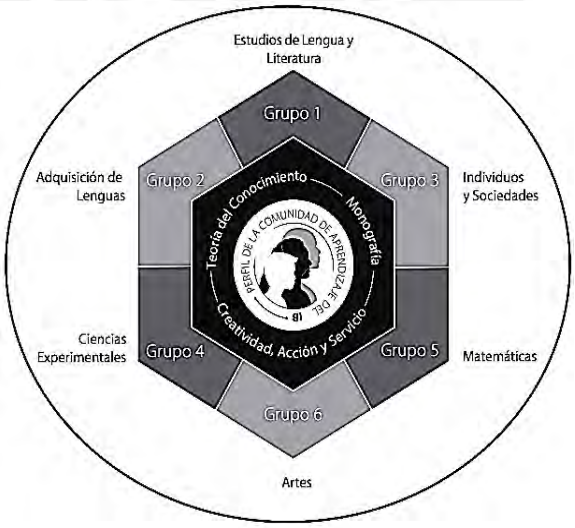



*Figura 1.* Áreas académicas del programa de Diploma
Fuente: tomado de Guía de matemáticas NS (2014, p. 2)

En la figura 1, se observa que el área de Matemáticas se encuentra en el grupo 5. Al interior de esta área académica, se encuentran las siguientes asignaturas y niveles: Estudios Matemáticos en el nivel medio (NM), dirigidos a estudiantes con cierto dominio de la Matemática fundamental; la asignatura de Matemática en el nivel medio (NM), dirigido a estudiantes con habilidades y dominio de la Matemática; la asignatura de Matemática en el nivel superior (NS), dirigidos a estudiantes con amplio dominio de las Matemáticas y; la asignatura de Ampliación de las Matemáticas en el nivel superior (NS) dirigidos a estudiantes con las mismas características a los de Matemáticas NS, pero que su proyección de estudios universitarios se vinculan a la Ingeniería y Matemáticas puras. El objeto de estudio función cuadrática es tratado en las tres primeras asignaturas antes mencionadas.

Como nuestro foco de interés está en desarrollar la investigación con estudiantes que cursan el primer año del Programa del Diploma (PD), en la asignatura de Matemáticas nivel superior, que en adelante llamaremos *Matemáticas NS*, a continuación, mostraremos en la tabla 3, la organización curricular del plan de estudio correspondiente a Matemáticas NS.

Tabla 3.

*Unidades del programa de estudios de Matemáticas NS.*

| **Unidades** | **Contenidos** | **Horas lectivas NS** |
|---|---|---|
| **1** | Álgebra | 9 |
| 2 | **Funciones y ecuaciones** | 24 |
| **3** | Funciones circulares y trigonometría | 16 |
| **4** | Vectores | 16 |
| **5** | Estadística y probabilidad | 35 |
| **6** | Análisis | 40 |
| **Unidades opcionales** | | |
| **7** | Estadística y probabilidad | 48 |
| **8** | Conjuntos, relaciones y grupos | |
| **9** | Análisis | |
| **10** | Matemática discreta | |
| **Exploración matemática** | | 10 |
| **Total de horas lectivas** | | **240** |

Fuente: Adaptado de Guía de Matemáticas NS (2014, p. 11)

A continuación, presentaremos la organización de los contenidos considerados en la unidad 2 del programa de estudios de Matemáticas NS. En esta tabla 4, mostraremos el bloque en el cual se encuentra el objeto de estudio.

Tabla 4.

*Organización de contenidos de la unidad 2 del programa de estudios.*

| Bloque | Contenidos |
|---|---|
| | **Funciones polinómicas y sus gráficos** |
| **5** | Teorema del resto y teorema del factor |
| | Teorema fundamental del álgebra |

Fuente: Adaptado de Guía de Matemáticas NS (2014, p. 24)

Con respecto al objeto matemático de nuestra investigación, función cuadrática, ella se encuentra inmersa en el contenido *Funciones polinómicas*, explícitamente en el bloque cinco de la unidad 2.

De acuerdo a los antecedentes de referencia presentados y las informaciones obtenidas del Currículo Nacional de Perú y del Programa de Bachillerato Internacional, que respaldan la pertinencia de nuestra investigación sobre el estudio de la función cuadrática con el uso de la tecnología, nace el interés de investigar cómo los estudiantes del primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional movilizan la noción de función cuadrática y para ello realizaremos una secuencia de actividades bajo la perspectiva del enfoque de la Orquestación Instrumental con la mediación de la calculadora de pantalla gráfica.

### 1.3. Pregunta y objetivos de la investigación

A continuación, presentaremos la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos de la tesis.

#### Pregunta de la investigación

*¿Cómo una Orquestación Instrumental, en donde la calculadora gráfica es un mediador, promueve que estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática?*

#### Objetivo General

Analizar cómo una Orquestación Instrumental, en donde la calculadora gráfica es un mediador, promueve que estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática.

#### Objetivos específicos

- Identificar, en las acciones de los estudiantes, los esquemas de los estudiantes al manipular la calculadora gráfica en el desarrollo de la secuencia de actividades sobre la función cuadrática.

- Analizar, en la fase modo de ejecución de la Orquestación Instrumental, las acciones de los estudiantes al movilizar la noción de función cuadrática.
- Describir, en la fase desempeño didáctico de la Orquestación Instrumental, las acciones de los estudiantes, luego de las intervenciones y acciones del docente, cuando se desarrolla una secuencia de actividades mediadas por la calculadora gráfica.

A continuación, presentaremos aspectos de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, que serán el sustento teórico y metodológico de la investigación.

## 1.4. Génesis Instrumental y Orquestación: aspectos teóricos y metodológicos

En este apartado, se presentan aspectos de la Génesis Instrumental que fundamenta la ampliación a la Orquestación Instrumental.

### 1.4.1. Aspectos de la Génesis Instrumental

Salazar (2009) señala que las nociones claves del enfoque Instrumental son *esquema, artefacto e instrumento*. A continuación, describiremos cada una de ellas.

Vergnaud (1990) afirma que un **esquema** es la organización invariante de la conducta del sujeto ante una determinada situación.

Asimismo, Rabardel (2011) menciona que se puede distinguir dos clases de situaciones: en la primera clase, el sujeto dispone de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación y; en la segunda clase, el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias para el tratamiento inmediato de la situación y necesariamente debe realizar la exploración y reflexión el cual lo conducirá al éxito o al fracaso.

Además, el autor menciona que los esquemas están relacionados con la utilización de un artefacto, a los que denomina esquemas de utilización, ya que los relaciona con las dimensiones de la actividad. También clasifica las actividades en tareas segundas y primeras.

> Las actividades relativas a las tareas “Segunda”; es decir, a las relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto. En este primer plano, se sitúan, en nuestro ejemplo, los esquemas de utilización elementales de manipulación del botón.
> Las actividades primeras, principales, las que están orientadas hacia el objeto de la actividad y para las que el artefacto es un medio de realización. Es en este segundo plano donde se sitúa el esquema de ajuste de la silla como totalidad, cuya coherencia de conjunto está garantizada, según la fórmula de Piaget, por el significado global del acto: ajustar la silla (Rabardel 2011, pp. 171-172).

De acuerdo con el autor, estas actividades en las tareas nos permiten distinguir dos niveles de esquema:

> Los esquemas de uso relativos a las tareas segundas. Como lo muestra nuestro ejemplo, pueden situarse en el nivel de esquemas elementales (en el sentido de que no pueden descomponerse en unidades más pequeñas susceptibles de

> responder a una sub-meta identificable), pero esto no es necesario: pueden ellos mismos estar constituidos por totalidades que se articulan en un conjunto de esquemas elementales. Lo que los caracteriza es su orientación hacia las tareas segundas, que corresponden a las acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto. Los esquemas de acción instrumentada, que consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global, que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Esos esquemas incorporan, como constituyentes, los esquemas del primer nivel. Lo que los caracteriza es que son relativos a las "tareas primeras". Constituyen lo que Vygotsky llamaba los "actos instrumentales", para los cuales hay una recomposición de la actividad dirigida hacia la tarea principal del sujeto por el hecho de insertar el instrumento. Los esquemas de primer nivel (esquemas de uso) constituyen, según la terminología de Cellerier, módulos especializados, que se coordinan unos con otros y también con otros esquemas, se asimilan y acomodan recíprocamente para constituir los esquemas de acción instrumentada (Rabardel 2011, p. 172).

En la misma línea de pensamiento, Rabardel (2011) señala que:

> Debemos considerar un tercer nivel de esquemas: el de los esquemas de actividad colectiva instrumentada. Éste debería tener en cuenta, por una parte, la especialización de los tipos de acción o de actividad, de los tipos de resultados aceptables, etc., cuando el colectivo comparte un mismo instrumento o trabaja con una misma clase de instrumentos. También debería tener en cuenta, por otra parte, la coordinación de las acciones individuales y la integración de sus resultados como contribución para alcanzar las metas comunes (Rabardel 2011, p. 173).

Es así que, para Rabardel (2011), *"los Esquemas de Acción Colectiva Instrumentada (EACI), Esquema de Acción Instrumentada (EAI), Esquema de Uso (EU), son consideradas dentro de la clase de esquemas de utilización por presentar una relación mutua a partir de los esquemas de uso y de los esquemas de acción instrumentada"* (p. 14).

A continuación, en la figura 2, se muestra un esquema de lo tratado anteriormente.

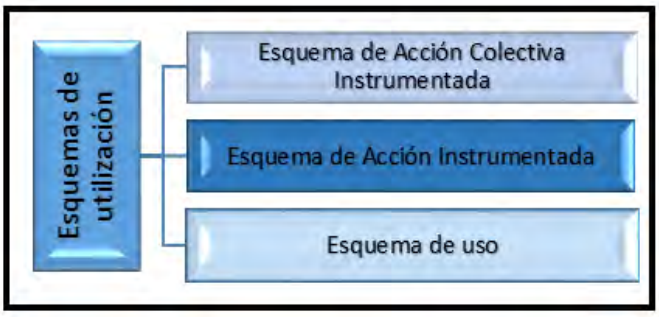



*Figura 2*. Esquemas de utilización
Fuente: Adaptado de Rabardel (2011)

Asimismo, el autor menciona que los esquemas de utilización abarcan dos dimensiones: una privada y otra social. La primera dimensión es propia de un individuo y la segunda es colectiva o grupal.

En relación con el ***artefacto***, el autor se refiere a un objeto material o simbólico, cuya función es dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de la tarea propuesta por el docente y que es independiente de las acciones del sujeto. Por otro lado, señala que el artefacto es un objeto susceptible de uso, con la finalidad de insertarse en actividades con una intención específica.

En cuanto al ***Instrumento*****,** el autor menciona que se refiere a lo que el sujeto construye a partir del uso del artefacto; es decir, una entidad mixta que contiene a la vez a un artefacto y un esquema de utilización realizados por el sujeto en la interacción con el artefacto, en el cual se incluye condiciones preestructuradas del artefacto y el desarrollo de esquemas de uso.

Rabardel (1995) señala que la Génesis Instrumental consta de dos dimensiones: la instrumentalización y la instrumentación (ver Figura 3).

*Figura 3.* El proceso de Génesis Instrumental
Fuente: Adaptado de García - Cuéllar (2018)

Respecto a la instrumentalización, Rabardel (1995) señala que "*ocurre cuando el sujeto inserta el artefacto en su práctica con la intensión de conocer sus propiedades, su interfaz y funcionalidades, desarrollando así esquemas de uso"* (p. 93, traducción propia).

La instrumentación está vinculada al sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de acción colectiva instrumentada, esquema de acción instrumentada y esquemas de uso que realiza el sujeto, referidos a la ejecución de ciertas tareas.

### 1.4.2. Aspectos de la Orquestación Instrumental

A continuación, presentaremos aspectos de la Orquestación Instrumental de Trouche (2004; 2005) y Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010), que amplía el sustento teórico y metodológico de la investigación.

Trouche (2004) introduce la metáfora de Orquestación Instrumental y la define como la organización intencional y sistemática del profesor y el uso de los diversos artefactos disponibles en un entorno de aprendizaje mediado por la tecnología, en el desarrollo de una tarea propuesta, para guiar la Génesis Instrumental de los estudiantes.

El autor señala que la Orquestación Instrumental involucra a los estudiantes, a los artefactos y una situación matemática. Además, menciona que se utiliza la noción de Orquestación con la finalidad de explicar la gestión que realiza el docente de los instrumentos en el proceso de un aprendizaje colectivo, ya que en el sentido de la Génesis Instrumental es necesario que el docente realice el monitoreo de situaciones matemáticas a través de la orquestación.

Es así que Trouche (2005) señala que:

> Una Orquestación Instrumental es el arreglo sistemático e intencional de los elementos (artefactos y seres humanos) de un entorno, realizado por un agente (profesor) con el fin de hacer efectiva una situación dada y, en general, guiar a los estudiantes en las génesis instrumentales y en la evolución y equilibrio de sus sistemas de instrumentos. Es sistemático porque, como método, se desarrolla de un orden definido y con un foco determinado, pudiendo ser entendido con un arreglo integrado a un sistema. Es intencional porque una orquestación no describe un arreglo existente (siempre existe uno), pero apunta a la necesidad de un pensamiento a priori de este arreglo (p. 126, traducción propia).

A continuación, mostraremos un esquema de lo señalado por Trouche (2005) sobre la Orquestación Instrumental.

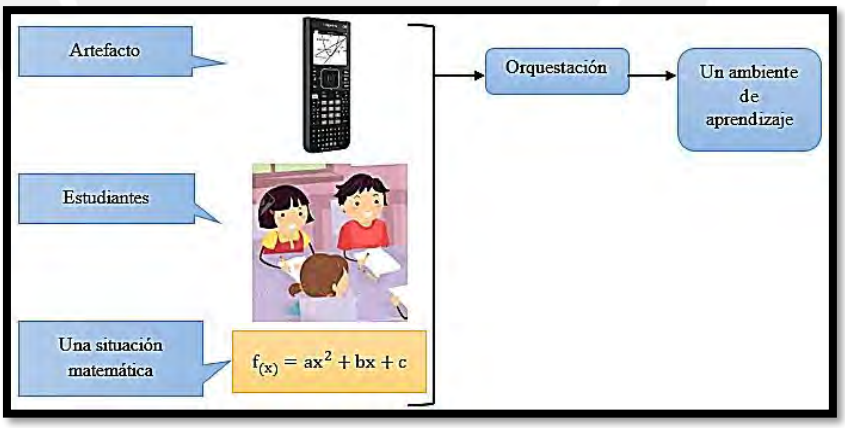



*Figura 4.* Elementos de una Orquestación Instrumental
Fuente: adaptado de Trouche (2005)

Además, Trouche (2004) señala que la Orquestación Instrumental involucran las siguientes fases: una configuración didáctica y un modo de ejecución. En este orden, Drijvers, Kieran y Mariotti (2010) suman una tercera: el desempeño didáctico.

A continuación, se realiza una descripción de cada una de ellas:

### *Configuración didáctica*

Trouche (2004) señala que se refiere al arreglo de los objetos en el medio ambiente. En otras palabras, una configuración del entorno en donde se llevará a cabo los procesos de enseñanza - aprendizaje y los artefactos que participarán en ella mediante un discurso matemático.

El autor compara este elemento con la metáfora de la orquestación musical, en el cual se elige los instrumentos musicales que formarán parte de la banda y la organización de los mismos en un espacio para que resulte una melodía armoniosa.

A continuación, en la Figura 5, se muestra una representación de una configuración didáctica.

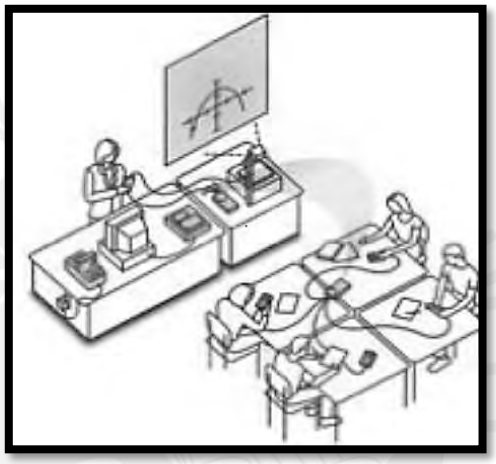


*Figura 5.* Representación de la configuración didáctica
Fuente: Tomado de Trouche y Drijvers (2014, p. 10)

### *Modo de ejecución*

De acuerdo a Trouche (2004), se refiere a la forma cómo el docente decide ejecutar las acciones que permitan lograr la intensión sobre una tarea determinada. Por ejemplo, la planificación de una tarea mediada por un artefacto, en el cual los estudiantes realizarán acciones guiadas por las instrucciones que el docente propone en la tarea con la intención de que los estudiantes analicen y emitan conjeturas.

### *Desempeño didáctico*

Trouche (2004) señala que este aspecto se refiere a las acciones realizadas, tanto por los estudiantes y los docentes, frente a una situación matemática propuesta; es decir, cuando se lleva a cabo el proceso de enseñanza - aprendizaje, se presentan algunas situaciones en el que el docente debe tomar decisiones pertinentes con la finalidad de garantizar el propósito de la tarea.

El autor afirma que "*uno de los elementos clave para una integración exitosa de estos artefactos en un entorno de aprendizaje es la asistencia institucional y social de este proceso de acción individual"* (Trouche 2004, p. 304).

Además, Pierce y Ball (citado en Drijvers, et al., 2010) señalan que *"el proceso de un maestro que desarrolla una Orquestación Instrumental se guía por su conocimiento, experiencia y puntos de vista sobre la Educación Matemática y el papel que cumple la tecnología"* (p. 216).

Por todo lo mencionado anteriormente, se considera pertinente realizar la presente investigación sobre el estudio de la función cuadrática con estudiantes del primer año del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional a través de una secuencia de actividades donde los estudiantes harán uso de la calculadora gráfica.

### 1.5. Procedimientos metodológicos:

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014) y Monje (2011), esta investigación es de corte cualitativo ya que contiene el propósito y/o los objetivos, la pregunta de investigación, la justificación y la viabilidad, una exploración de las definiciones en el conocimiento del problema y la definición inicial del ambiente o contexto.
A continuación, presentaremos los procedimientos que seguiremos para el desarrollo de esta.

1. Revisión de investigaciones de referencia, las cuales se realizaron en tres ámbitos: relacionadas con la función cuadrática, con la mediación de la tecnología y con aspectos teóricos de la Génesis Instrumental y Orquestación Instrumental.
2. Lo anterior permitirá construir la justificación de la investigación, desde lo relacionado a su pertinencia académica, mientras que los documentos oficiales del Currículo Nacional (Guía del Currículo Nacional de Educación Básica Regular y la Guía de Programación Curricular), así como también documentos del currículo del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional (Guía de Matemáticas del Nivel Superior) muestran su pertinencia académica/profesional.
3. Luego de todo esto, se planteará la pregunta, objetivos generales y específicos relacionados con la organización del trabajo en el aula para movilizar la noción de la función cuadrática con la mediación de la calculadora gráfica en estudiantes de nivel secundaria, específicamente estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional, con edades de 14 y 15 años.
4. En relación con los aspectos teóricos y metodológico de la investigación, se presentarán aspectos de la Génesis Instrumental y de la Orquestación Instrumental.

5. Enseguida, se realizará el estudio de la función cuadrática desde el punto de vista matemático y didáctico. Desde el punto de vista matemático, abordaremos la definición, clasificación, representaciones gráficas y transformaciones de la función cuadrática y, desde el punto de vista didáctico, estudiaremos cómo está organizada la enseñanza de la función cuadrática en los libros utilizados por el Programa de Diploma del Bachillerato Internacional en el curso de Matemática Nivel Superior.
6. Después, se elaborará una secuencia de actividades que movilice la noción de función cuadrática, en la que se toma en cuenta todo lo estudiado anteriormente, incluyendo las potencialidades y restricciones de la calculadora gráfica y su respectivo análisis, a la luz de los aspectos teóricos, de lo que se espera. Además, se organizará el entorno en el cual se debe llevar a cabo la aplicación la secuencia de actividades: aula de clase, equipada con los dispositivos necesarios como calculadora, computadora para el docente, emulador de calculadora, proyector, entre otros. (*configuración didáctica*).
7. Con base en lo anterior, se aplicará la secuencia de actividades a estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional (*modo de ejecución*). Se espera que los estudiantes realicen una serie de acciones, orientadas por las sugerencias que el profesor/investigador proponga durante el desarrollo de cada actividad, con la finalidad de que desarrollen las actividades, las analicen y puedan formular conjeturas (*desempeño didáctico*).
8. A continuación, se realizará el análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes basado en los aspectos teóricos explicados anteriormente.
9. Finalmente, se presentarán los resultados, las conclusiones de la investigación y las perspectivas futuras.

Después de los procedimientos metodológicos, en el siguiente capítulo, se presenta el estudio matemático y didáctico de la función cuadrática para conocer sus elementos, características y, a partir de ello, identificar los aspectos que consideramos importante para la elaboración de nuestra secuencia de actividades.

# CAPITULO II: FUNCIÓN CUADRÁTICA

En este capítulo, realizaremos un estudio sobre la función cuadrática en el que se explica el aspecto formal del objeto matemático, tales como la definición de función, clasificación, función cuadrática y transformación de la función cuadrática.

En el aspecto didáctico se mostrará la forma en cómo se propone la enseñanza de la función cuadrática en el libro de texto del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional en el curso de Matemáticas en el Nivel superior. También se señalará aspectos básicos de la calculadora de pantalla grafica para su representación.

## 2.1 La función cuadrática

Para presentar la función cuadrática, utilizaremos como referentes a James (2010) y Thomas (2006).

James (2006), afirma que una función $f$ es una regla que asigna a cada elemento $x$ de un conjunto D, exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E. Otra forma de representar una función es por medio de un diagrama de flechas, tal como se muestra en la Figura 6.

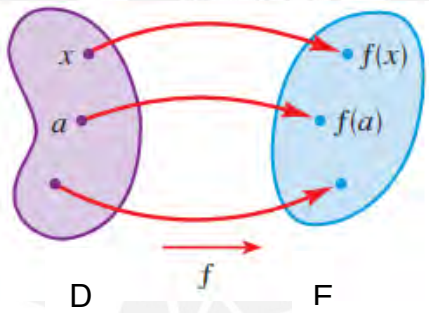



*Figura 6.* Diagrama de flecha de f
Fuente: Adaptado de James (2010, p. 51)

Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que *f(x)* está asociada con *x, f(a)* está asociada con *a* y así sucesivamente.

Se menciona también que, por lo general, se considera funciones para los cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama ***dominio** de la función*, el número $f(x)$ es el **valor de $f$ en $x$** y se lee "$f$ de $x$".

El **rango** de $f$ es el conjunto de todos los posibles valores de $f(x)$ cuando $x$ recorre el dominio.

Por otro lado, menciona que un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función $f$ se llama ***variable independiente.*** Un símbolo que representa un número en el rango de $f$ se llama ***variable dependiente.***

**Clasificación de funciones**

De acuerdo con James (2010), las funciones se clasifican en:

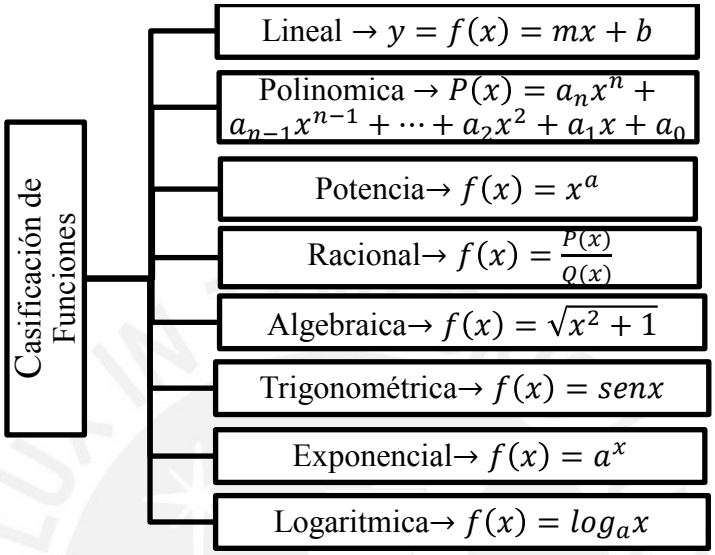



*Figura 7.* Clasificación de funciones

Como el objeto de estudio es la función cuadrática, ella se encuentra inmerso dentro de la función polinómica, de acuerdo con la clasificación presentada en la Figura 7.

**Función polinómica**

Una función P se llama polinomial si:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde *n* es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ son constantes llamadas ***coeficientes*** *del polinomio*. El dominio de cualquier polinomio es $R = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el grado del polinomio es n.

Por ejemplo:

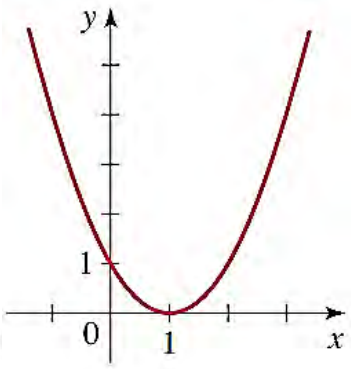
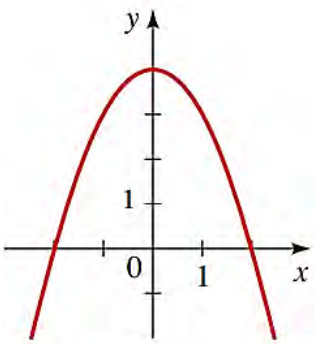
$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

Es un polinomio de grado 6.

**Función cuadrática**

James (2010) define como función cuadrática a un polinomio de grado 2, el cual es de la forma: $P(x) = ax^2 + bx + c$, cuya representación gráfica tiene la forma de una parábola.

Tabla 5. *Representación y característica de la función cuadrática.*

| | | |
|---|---|---|
| *Representación gráfica* |  |  |
| *Representación algebraica* | $P(x) = x^2 + x + 1$ | $P(x) = -2x^2 + 3x + 1$ |
| *Característica* | La representación gráfica de la función cuadrática es cóncava hacia arriba si $a > 0$ y es cóncava hacia abajo si $a < 0$ | |

Fuente: Adaptado de James (2010, p. 80)

En la Tabla 5, se puede observar que la representación gráfica de la función cuadrática depende del coeficiente principal (coeficiente del término cuadrático); es decir, si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero, la representación gráfica de la función es cóncava hacia arriba, caso contrario es cóncava hacia abajo.

**Transformaciones de funciones**

Para explicar esta parte, nos basamos en Thomas (2006) quien considera las siguientes transformaciones: traslación vertical u horizontal; cambio de tamaño vertical u horizontal y reflexión.

**Traslación vertical**

De acuerdo con Thomas (2006), para trasladar hacia arriba la representación gráfica de una función $f$ , se suma una constante positiva al lado derecho de la regla de correspondencia de la función y, para trasladar hacia abajo la representación gráfica de una función $f$, se suma una constante negativa al lado derecho de la regla de correspondencia de la función $f$, tal como se muestra en la Figura 8.

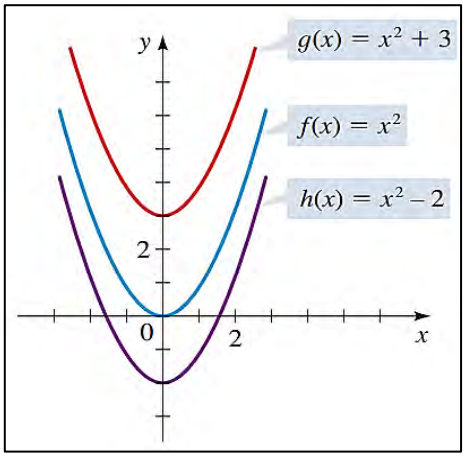



*Figura 8.* Traslación vertical de una función cuadrática
Fuente: Tomado de James, Lothar y Saleem (2012, p. 180)

Asimismo, el autor afirma que para trasladar hacia la izquierda la representación gráfica de $f$ se suma una constante positiva a $x$. Para trasladar hacia la derecha la representación gráfica de la función, se suma una constante negativa a $x$, tal como se muestra en la Figura 9.

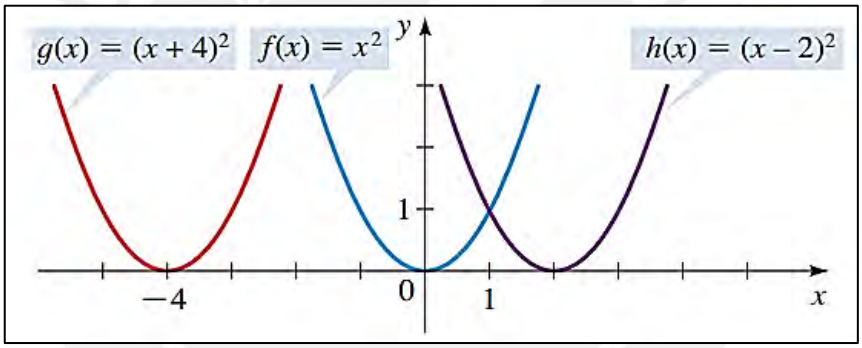



*Figura 9.* Traslación horizontal de una función cuadrática
Fuente: Tomado de James, Lothar y Saleem (2012, p. 181)

**Cambio de tamaño vertical u horizontal de la gráfica de una función**

De acuerdo con Thomas (2006), cambiar de tamaño de la representación gráfica de una función $f$ significa estirar la gráfica o comprimirla, ya sea vertical u horizontalmente. Esto se logra multiplicando *f* o la variable independiente *x* por una constante apropiada $c$.

Por ejemplo:

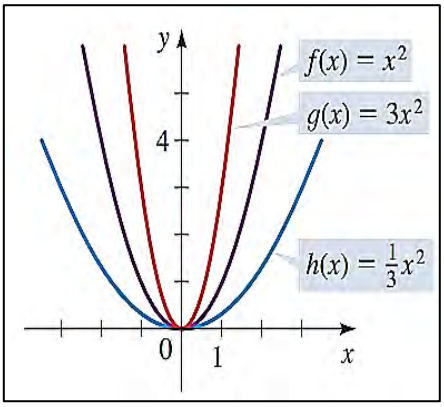



*Figura 10.* Cambio de tamaño de una función cuadrática
Fuente: Tomado de James, Lothar y Saleem (2012, p. 183)

Esto se logra multiplicando *f* o la variable independiente *x* por una constante apropiada $c$, donde $c \in R$.

## 2.2 Función cuadrática en libros de texto de matemática nivel superior de Bachillerato Internacional

En este apartado de la investigación, mostraremos la información del libro de Matemáticas del Nivel Superior de Martin, Haese y Humphries (2012), el cual se utiliza para desarrollar el trabajo didáctico en el aula con estudiantes del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional.

El libro, presenta al objeto matemático función cuadrática a partir de su forma general y su representación gráfica, tal como mostraremos a continuación:

Una función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$.

La función cuadrática más simple es $f(x) = x^2$.

Su representación gráfica puede ser trazada a partir de una tabla de valores.

| $x$ | -3 | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

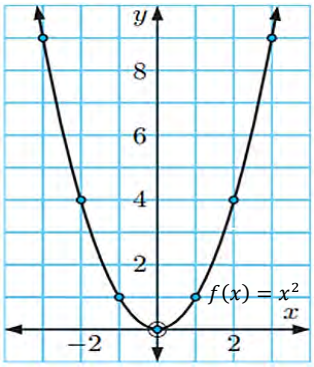



*Figura 11.* Representación gráfica de una función cuadrática
Fuente: Tomado de Matemáticas Nivel Medio (2012, p. 28)

Luego de presentar la función cuadrática, en el texto se señala las terminologías o elementos de una función cuadrática, las cuales detallaremos a continuación:

- La grafica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$ se llama ***parábola***.
- El punto donde gira el gráfico se llama ***vértice***.
- Si el gráfico se abre hacia arriba, la coordenada $y$ del vértice es el ***punto de giro mínimo*** o el ***punto de inflexión mínimo*** y el gráfico es ***cóncava hacia arriba***.
- Si el gráfico se abre hacia abajo, la coordenada $y$ del vértice es el ***punto de giro máximo*** o el ***punto de inflexión máximo*** y el gráfico es ***cóncava hacia abajo***.
- La línea vertical que pasa a través del vértice se llama ***eje de simetría***. Cada parábola es simétrica respecto a su eje de simetría.
- El punto donde la gráfica cruza el eje $y$ es la ***intersección en y***.
- El punto (si existen) donde la gráfica cruza el eje $x$ son las **raíces** de la ecuación $y = 0$.

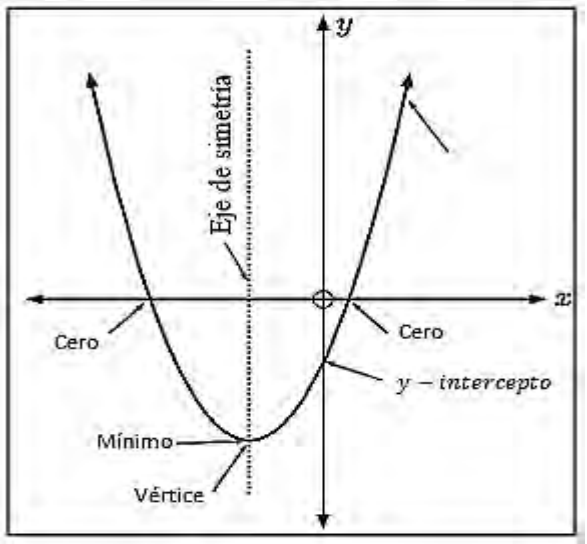



*Figura 12.* Elementos de una función cuadrática
Fuente: Tomado de Matemáticas Nivel Superior (2012, p. 28)

Para una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$:

- $a > 0$ se genera una gráfica de la forma llamada *cóncava hacia a arriba.*
- $a < 0$ se genera una gráfica de la forma llamada *cóncava hacia abajo.*
- Si $-1 < a < 1, a \neq 0$ el gráfico es más ancho que $y = x^2$.
- Si $a < -1,\ o\ \ a > 0$ el gráfico es más angosto que $y = x^2$.

De acuerdo a la teoría de la Orquestación Instrumental, podemos decir que las descripciones realizadas sobre el aspecto formal de la función cuadrática (características, elementos, representaciones, restricciones) corresponden a un aspecto del modo de ejecución que, en adelante, el estudiante los utilizará como esquemas de uso individual o colectivo para afrontar una situación determinada, los cuales se evidencian en las acciones realizadas por ellos.

En el texto, también se observa el resumen sobre función cuadrática, en el cual se muestra la representación algebraica de sus diferentes formas, la representación gráfica y los elementos que se obtienen a partir de cada una de sus representaciones:

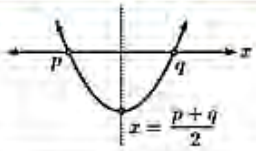
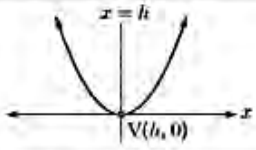
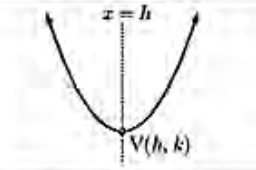
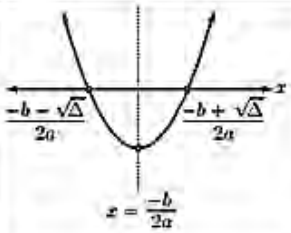
| Forma cuadrática $a \neq a$ | Representación Gráfica | Caraterísticas |
|---|---|---|
| $f(x) = a(x-p)(x-q)$<br>$p, q$ son reales |  | Las intersecciones en el eje $x$ es $p$ y $q$<br>El eje de simetría es $x = \frac{p+q}{2}$<br>El vértice es $\left(\frac{p+q}{2}, f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$ |
| $f(x) = a(x-h)^2$<br>$h$ es real |  | Toca el eje $x$ en $h$<br>El eje de simetría es $x = h$<br>El vértice es $(h, 0)$ |
| $f(x) = a(x-h)^2 + k$ |  | El eje de simetría es $x = h$<br>El vértice es $(h, k)$ |
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ |  | El eje de simetría es $x = \frac{-b}{2a}$<br>El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$<br>Los interceptos con el eje $x$ cuando $\Delta \geq 0$ son<br>$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dónde $\Delta = b^2 - 4ac$ |

*Figura 13.* Representación y elementos de la función cuadrática
Fuente: Tomado de Matemáticas Nivel Superior (2012, p. 30)

El libro de texto de Matemáticas Nivel Superior presenta el tratamiento de la función cuadrática en sus diferentes representaciones, tal como se puede observar en la Figura 13.

A la luz de la teoría de la Orquestación Instrumental, se puede señalar que las diferentes representaciones de la Figura 13 corresponden a conocimientos matemáticos necesarios para identificar y determinar elementos de una función cuadrática que, en adelante, se convertirán en esquemas de uso individual o colectivos para afrontar situaciones mediadas por un artefacto (lápiz-papel, GeoGebra, calculadora, entre otros) al realizar procesos de instrumentalización e instrumentación.

Al mismo tiempo, presenta una serie de ejemplos resueltos y ejercicios propuestos por cada una de las formas de representación de la función cuadrática.

A continuación, presentaremos un ejemplo propuesto en la página 33 del libro Matemáticas Nivel Superior.

**Ejemplo:**

Escriba $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en la forma $f(x) = (x - h)^2 + k$ completando cuadrado. Bosqueje $f(x) = x^2 + 4x + 3$, indicando las coordenadas del vértice.

**Solución:**

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 2^2 + 3 - 2^2$$

$$f(x) = (x + 2)^2 - 1$$

El vértice es $(-2, -1)$ y el $y$ intercepto es 3.

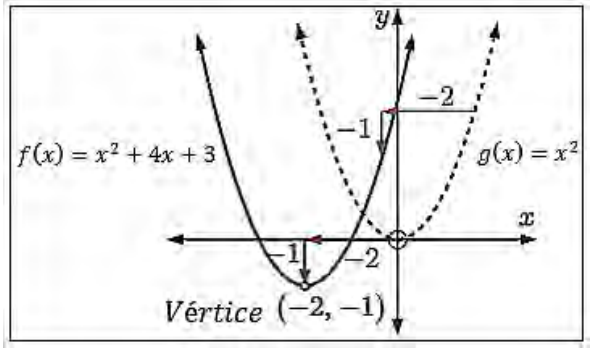



*Figura 14.* Representación gráfica de la traslación de una función cuadrática
Fuente: Adaptado de Matemática Nivel Superior (2012)

El ejemplo presentado muestra el tratamiento de la función cuadrática y la representación gráfica, donde se observa la traslación horizontal y vertical del objeto matemático. En este

ejemplo, se puede evidenciar que el estudiante ha movilizado conocimientos sobre completar cuadrados (esquemas de uso individual) para transformar la expresión algebraica de una función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 3$ a la forma $f(x) = (x + 2)^2 - 1$, mostrándose, de esta manera, el desempeño del estudiante.

Por otro lado, en el texto proponen ejemplos y ejercicios para que los estudiantes puedan reforzar lo aprendido.

A continuación, presentaremos algunos aspectos básicos de la calculadora de pantalla gráfica para trabajar la representación del objeto matemático en estudio.

### 2.3 La calculadora de pantalla gráfica

La calculadora de pantalla gráfica es una herramienta que es utilizada para la enseñanza y aprendizaje de temas diversos de la Matemática.

La elección de la calculadora de pantalla grafica modelo FX-CG50, como mediador en la parte experimental de la investigación, se debe a que su uso es obligatorio en el desarrollo de los contenidos matemáticos del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional en el nivel medio y superior y del mismo modo su utilización es obligatoria para las evaluaciones oficiales. Además, este modelo de calculadora es considerado como el adecuado para los exámenes donde se requiere su uso, ya que cumple con las características específicas señaladas en la guía de uso de las calculadoras del IB, como mostrar tablas, matrices, listas y representaciones gráficas y geométricas, además de tener funciones de calculadoras científicas.

La calculadora gráfica, en su presentación estándar, muestra las distintas herramientas de trabajo, tal como se observa en figura 15.

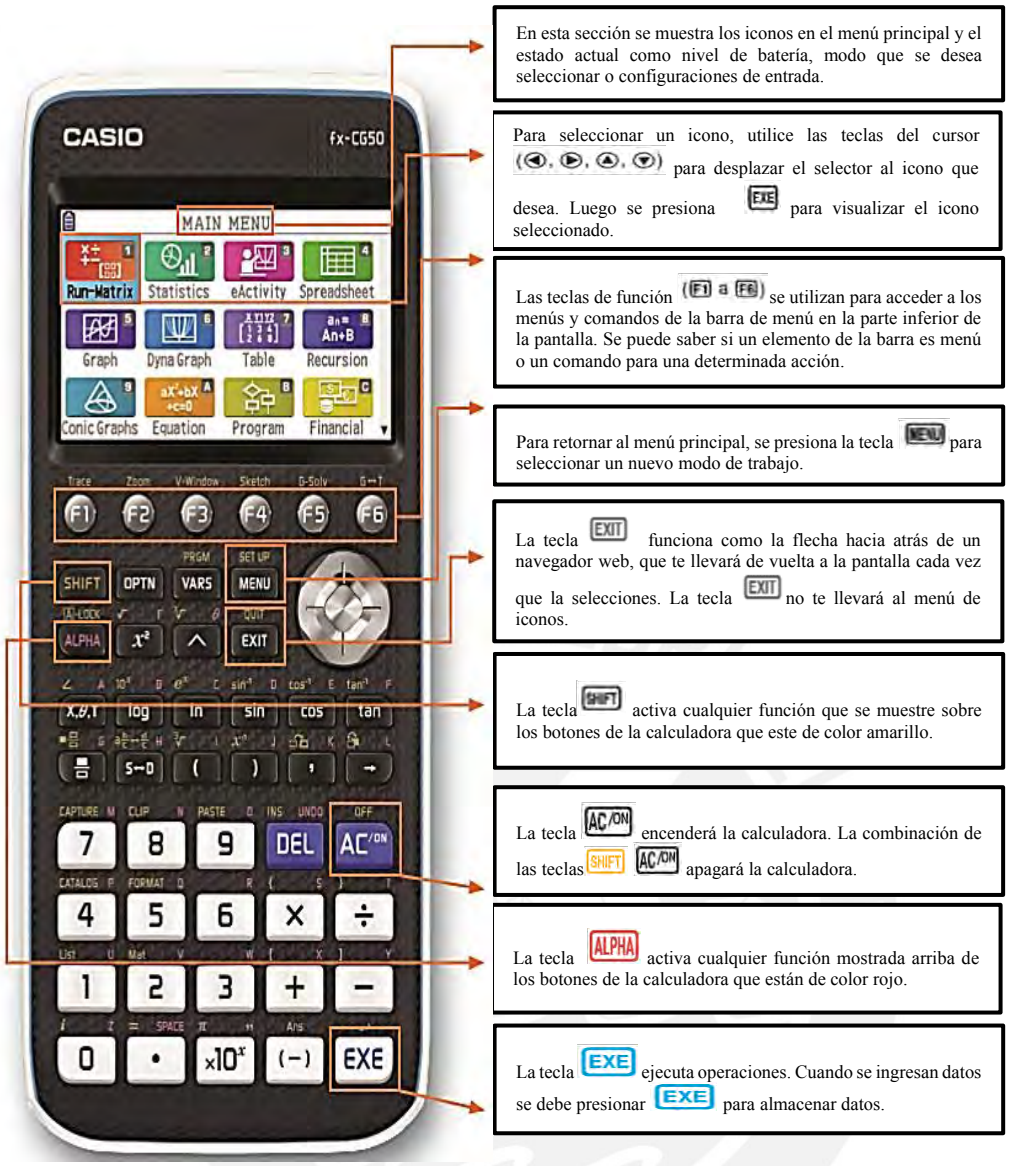



*Figura 15.* Vista de la pantalla principal y herramientas de la calculadora
*Fuente: Adaptado de la Casio fx-CG50 Guía del usuario (2017)*

Cualquiera de los iconos o modos del menú principal pueden ser activadas o desactivadas, según la necesidad del usuario o el tipo de actividades que desea realizar.

La calculadora gráfica, modelo Casio *fx-CG50,* tiene incorporado el ícono o modo Gráfico en la barra de menú para la representación de objetos y que emplearemos para el propósito de nuestro estudio. En el modo gráfico, trabajaremos con dos pantallas y la ventana de visualización, tal como se muestra en la figura 16.

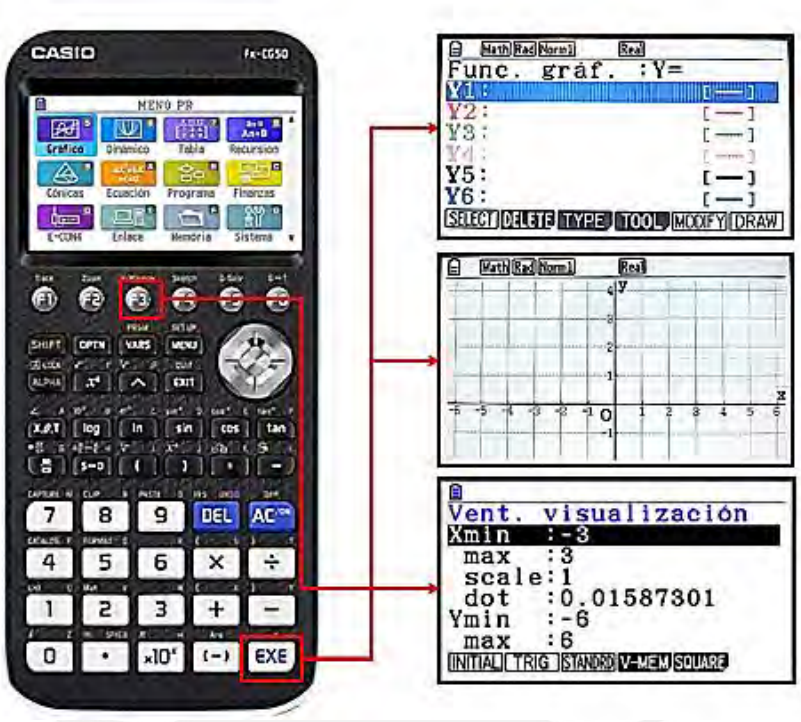



*Figura 16.* Pantallas y ventana principal del modo gráfico

En la Figura 16, podemos observar el modo gráfico, las pantallas principales y la venta de visualización de la calculadora:

- El modo gráfico, ubicada en el menú principal de la calculadora, permite almacenar funciones gráficas y observar sus representaciones mediante las pantallas de visualización.
- La calculadora de pantalla gráfica, modelo *fx-CG50*, utiliza dos tipos de pantalla y una ventana de visualización:

***Pantalla de texto*** permitirá el ingreso de la expresión matemática a trabajar, el cual puede mostrar 21 columnas y ocho líneas de caracteres, con la línea inferior utilizada para el menú de teclas de función.

A continuación, mostraremos un ejemplo y, para ello, ingresamos la siguiente regla de correspondencia de la función cuadrática $f(x) = 2^x + 0.5$ y $g(x) = 4 - x^2$.

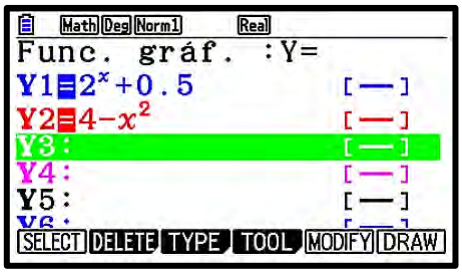



*Figura 17.* Reglas de correspondencias de funciones en la pantalla de texto

***Pantalla de gráficos*** permite la observación de la representación gráfica de diferentes tipos de funciones escritas en la pantalla de texto. Estas representaciones se pueden observar de forma individual o colectiva.

En la Figura 18, mostramos la representación gráfica de las funciones $f(x) = 2^x + 0.5$ y $g(x) = 4 - x^2$ en forma colectiva.

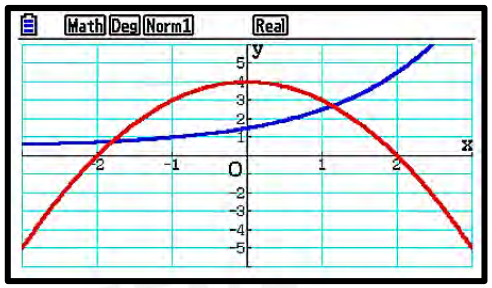



*Figura 18.* Representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en la pantalla de gráficos

***Ventana de visualización*** permite ampliar o reducir los valores de los ejes X e Y, en casos de que no se puedan apreciar la representación gráfica de forma completa.

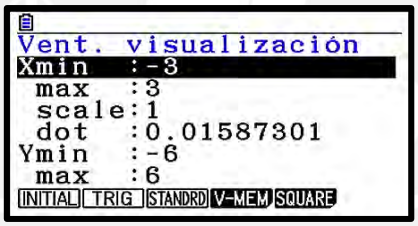



*Figura 19.* Ajuste de parámetros en la ventana de visualización

Además, los comandos F1, F2, F3, F4, F5 y F6 permitirán identificar los elementos de la función representada, como por ejemplo los puntos máximos y mínimos, los interceptos con los ejes, valores de X e Y, entre otros.

En la figura 20, se muestra un ejemplo sobre la utilización del comando F5, el cual permite observar los interceptos entre las representaciones graficas de las funciones mostradas en la figura 18.

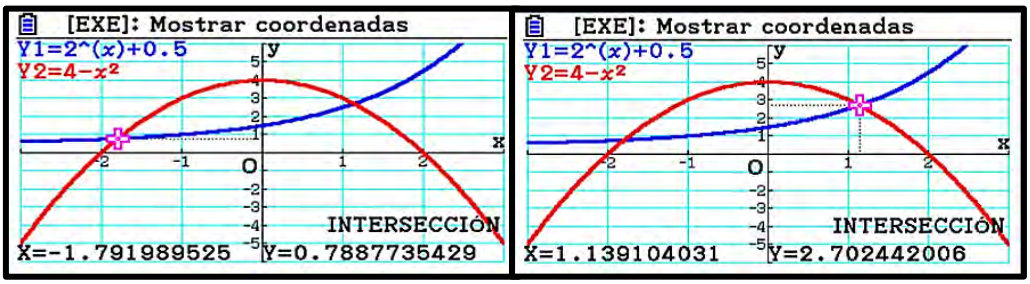



*Figura 20.* Interceptos entre las representaciones gráficas de funciones

Es importante señalar que la calculadora de pantalla gráfica, modelo *fx-CG50,* posee ciertas limitaciones, tales como:

- La pantalla gráfica no es dinámica a comparación de otras tecnologías, como lo es el GeoGebra; es decir, no se puede establecer deslizadores, ni arrastres de objetos matemáticos para observar cambios en las características y elementos de la función cuadrática.
- En la pantalla de texto para las representaciones algebraicas de las funciones, hace uso de las notaciones Y1, Y2, entre otros.
- La configuración del dominio y rango requiere de un procedimiento adicional, cosa que no se presenta con el Software GeoGebra, que son directas; es decir, la representación gráfica de los objetos matemáticos es independiente.

Por otro lado, la calculadora de pantalla gráfica es de fácil portabilidad y es una herramienta que cuenta con la autorización de su uso en el desarrollo de temas matemáticos y en la aplicación de las pruebas oficiales en el Bachillerato Internacional.

A continuación, se detallan los procedimientos y la estructura de la secuencia de actividades de la parte experimental de la investigación.

# CAPITULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo, presentaremos la organización del escenario; describiremos a los sujetos de la investigación; el análisis de las posibles respuestas de los estudiantes; la aplicación de la secuencia de actividades y el análisis de los resultados obtenidos después de la aplicación de los instrumentos y, finalmente, presentaremos las conclusiones de la investigación.

## 3.1 Configuración Didáctica

Trouche (2004) señala que la configuración didáctica se refiere al arreglo de los objetos en el medio ambiente. En otras palabras, una configuración del entorno en donde se llevará a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje, los artefactos que participarán en ella, mediante un discurso matemático.

Para ello, en nuestra investigación, la ejecución de las actividades propuestas (actividad exploratoria y actividad 1) utilizó como escenario un aula de estudio del primer año del Programa de Diploma de un colegio privado de Lima, que brinda una enseñanza enfocada en el Programa de Diploma del Bachillerato Internacional y dicho ambiente estuvo equipado con un proyector multimedia, laptops y calculadoras de pantalla gráfica.

Cabe señalar que la ejecución de las dos actividades propuestas se desarrolló en un taller especial fuera del horario de clases, puesto que los sujetos con quienes se gestionó las actividades se quedan dos veces a la semana para realizar el trabajo colaborativo y el refuerzo o profundización de los temas abordados en clases del horario normal. Esto se realizó debido a que los sujetos llevan el curso de Matemática Nivel Superior.

Debido a que se trata de un taller especial, nuestro escenario estuvo organizado para la participación de nueve estudiantes.

**Sujetos de la investigación**

La secuencia de actividades fue conducida por el docente–investigador y fue realizado con la participación de nueve estudiantes, con edades comprendidas entre 14 y 15 años, del primer año de Programa de Diploma del Bachillerato Internacional que llevan el curso de Matemática Nivel Superior.

Los estudiantes trabajaron en la primera sesión el desarrollo de la actividad exploratoria en forma individual y en la segunda sesión trabajaron la actividad 1 en duplas, donde cada dupla tuvo a disposición una laptop, calculadoras de pantalla gráfica y la ficha de actividades donde registraron sus procedimientos, cálculos y observaciones.

## 3.2 Modo de ejecución

De acuerdo con Trouche (2004), el modo de ejecución se refiere a la forma cómo el docente decide ejecutar las acciones que permitan lograr la intención sobre una tarea determinada.

En esta sección, detallaremos la forma en la cual se llevará a cabo la secuencia de actividades que nos permitirán, analizar cómo una Orquestación Instrumental, en donde la calculadora gráfica es un mediador, promueve que estudiantes de primer año del Programa de Diploma de Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática.

En la tabla 6, mostramos la estructura y organización de las secuencias de actividades.

Tabla 6.

*Secuencia de actividades de la parte experimental*

| Actividad | Sesión | Contenido | Tiempo |
|---|---|---|---|
| **Actividad exploratoria** | I | Noción de función cuadrática | 40 minutos |
| **Actividad 1** | II | Transformaciones de funciones cuadráticas | 60 minutos |

***La actividad exploratoria*** (ver Anexo 1, p. 79) tiene una duración de 40 minutos. El objetivo de esta actividad es identificar y reconocer los saberes previos que los estudiantes tienen sobre la noción de la función cuadrática, más no es objeto de análisis. Para ello, se plantean tres preguntas que nos permitan reconocer los elementos y características de la función cuadrática y para responder las mismas los estudiantes se apoyarán en la utilización de la calculadora de pantalla gráfica. Cabe mencionar que, en esta actividad exploratoria, los estudiantes trabajaran individualmente, sin la gestión del docente-investigador.

Por otro lado, ***la actividad 1*** (ver anexo 2, p. 83) tiene una duración de 60 minutos y su objetivo es analizar cómo los estudiantes movilizan la noción de función cuadrática al realizar traslaciones verticales y horizontales. En esta actividad, los estudiantes trabajarán en duplas y ternas, donde harán uso de una laptop, calculadora de pantalla gráfica y la ficha de actividad 1. La actividad consta de dos preguntas y serán desarrolladas por los estudiantes bajo la orquestación del docente-investigador para guiar sus posibles esquemas de utilización individual y colectiva, así como también evidenciar el modo de ejecución y el desempeño didáctico.

## 3.3 Desempeño didáctico

De acuerdo con Trouche (2004), el desempeño didáctico está relacionado a las acciones realizadas tanto por los estudiantes y los docentes frente a una situación determinada.

Por tanto, realizaremos un análisis sobre el desempeño didáctico realizado en el desarrollo de las secuencias de actividades de la investigación.

### 3.3.1 Análisis de la actividad exploratoria

La actividad exploratoria (ver anexo 1) se aplica con la finalidad de recuperar los saberes previos que tienen los estudiantes sobre el objeto de estudio función cuadrática, para que, al momento de gestionar la clase, durante el desarrollo de la siguiente actividad (actividad 1), emerja la génesis de los estudiantes cuando se trabaja las traslaciones de las funciones cuadráticas con la mediación de la calculadora gráfica.

A continuación, realizaremos una descripción de cada una de las preguntas de la actividad exploratoria y mostraremos, como ejemplo, el trabajo realizado por el estudiante *Óscar, ya que fue uno de los estudiantes que participó en las dos sesiones de forma puntual*.

En la *pregunta 1*, el cual tiene como objetivo que los estudiantes reconozcan las características y elementos de la función cuadrática, se les presentó cuatro representaciones graficas de funciones cuadráticas para que, mediante la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, donde $a \neq 0$ los estudiantes reconozcan los posibles valores de las constantes $a,\ b\ y\ c$. (Ver figura 21).

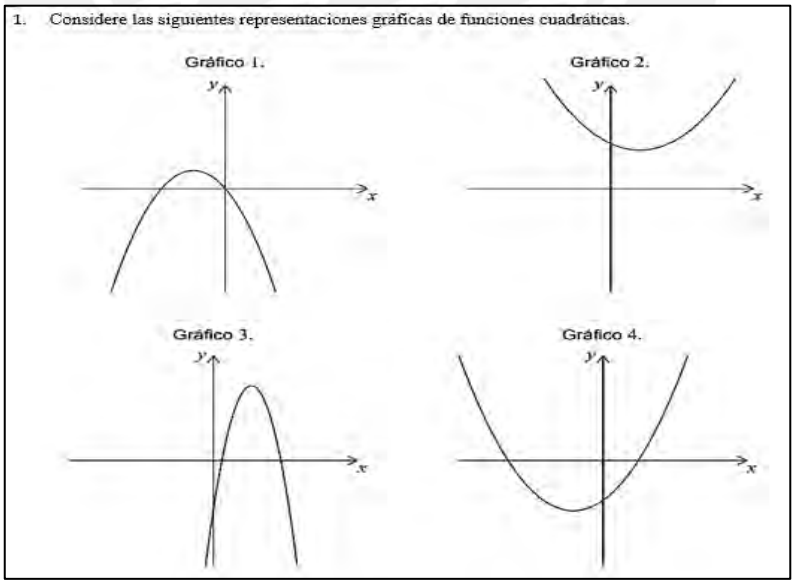



*Figura 21.* Pregunta 1 de la actividad exploratoria

A partir de las representaciones gráficas mostradas en la Figura 21, se espera que los estudiantes relacionen las características de cada representación gráfica con los diferentes valores que pueden tomar las constantes a, b y c, ya que ellos han desarrollado en el año anterior algunos aspectos de la función cuadrática para luego completar la tabla con los datos solicitados (ver Figura 22).

En la siguiente tabla, cada conjunto de condiciones referidas a las constantes $a$, $b$ y $c$, corresponde a uno de los gráficos de la página anterior.

a) Escriba el número del gráfico correspondiente, junto a cada conjunto de condiciones.

| Condiciones | Número del gráfico (justica tu respuesta) |
|---|---|
| $a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0$ | |
| $a < 0, \quad b > 0, \quad c < 0$ | |
| $a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0$ | |
| $a < 0, \quad b < 0, \quad c = 0$ | |

*Figura 22.* Continuación de la pregunta 1 de la actividad exploratoria

De lo esperado en esta pregunta 1, ocho de los nueve estudiantes lograron identificar las características de las funciones cuadráticas, mediante las representaciones gráficas mostradas en la Figura 21, y las relacionaron con las condiciones presentadas en la Figura 22. Cabe señalar que los ocho estudiantes presentaron su justificación en forma similar. Del mismo modo, para responder esta pregunta, los estudiantes se apoyaron en el uso de la calculadora de pantalla gráfica. A continuación, se muestra el trabajo realizado por un estudiante, al quien llamaremos *Óscar*.

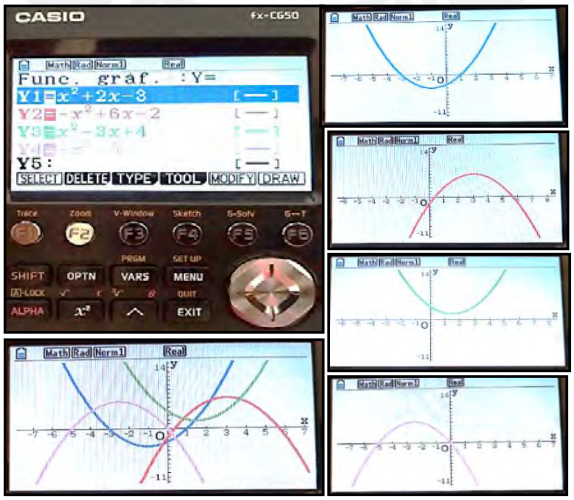



*Figura 23.* Representaciones gráficas de las funciones cuadráticas en la calculadora presentada por el estudiante Óscar

En la Figura 23, observamos la regla de correspondencia de cada función cuadrática que el estudiante *Óscar* ingresó en la ventana de editor de ecuaciones de la calculadora de pantalla gráfica y, a partir de ello, pueda observar las respectivas representaciones gráficas de dichas funciones cuadráticas. Para lograr lo observado en la Figura 23, el estudiante *Óscar* ha realizado una serie de combinaciones de comandos y funciones de la calculadora de pantalla gráfica, como por ejemplo ingresar las reglas de correspondencia en la pantalla de texto, así como también ampliar o reducir los valores de X e Y en la pantalla de visualización, evidenciándose, de esta manera, en sus acciones, la instrumentalización y la instrumentación a la luz de la teoría de la Génesis Instrumental.

A partir de ello, el estudiante *Óscar* realizó sus afirmaciones para responder la pregunta 1, tal como mostramos en la Figura 24.

a) Escriba el número del gráfico correspondiente, junto a cada conjunto de condiciones.

| Condiciones | Número del gráfico (justica tu respuesta) |
|---|---|
| $a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0$ | 4. El gráfico está mirando hacia arriba. El intercepto con el eje Y es negativo. |
| $a < 0, \quad b > 0, \quad c < 0$ | 3. El gráfico está mirando hacia abajo. El intercepto con el eje Y es negativo |
| $a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0$ | 2. El gráfico está mirando hacia arriba. El intercepto con el eje Y es positivo. |
| $a < 0, \quad b < 0, \quad c = 0$ | 1. Tiene intercepto con el eje "Y" en 0. Además, el gráfico mira hacia abajo |

*Figura 24.* Respuesta de la pregunta 1 presentado por el estudiante Óscar

En la Figura 24, se muestra los números de los gráficos en forma correcta, según las condiciones dadas. En la justificación que realizó *Óscar* sobre las respuestas de la pregunta 1, se puede observar que el estudiante no hace uso del término formal (concavidad) al señalar que "*el gráfico está mirando hacia arriba"* o *"el gráfico está mirando hacia abajo"*. También se puede observar que, al brindar su justificación, tampoco hace mención sobre la condición referida a la constante $b$; es decir, su justificación se basa en las condiciones de las constantes $a$ (relacionado a la concavidad) y $c$ (intercepto con el eje Y).

Cabe señalar que los otros siete estudiantes que respondieron según lo esperado esta pregunta 1, justificaron su respuesta de forma similar a lo presentado por el estudiante *Óscar*.

Esto nos hace pensar que los estudiantes a brindar sus respuestas han hecho un uso adecuado del artefacto la calculadora de pantalla gráfica y los esquemas de uso para lograr un desempeño satisfactorio al reconocer las características de las funciones cuadráticas y relacionarlos con sus respectivas representaciones gráficas.

Por otro lado, uno de los nueve estudiantes mostró dificultades al identificar las características de las funciones cuadráticas y establecer relaciones con las representaciones gráficas mostradas. Esto se evidenció cuando dicho estudiante relacionó incorrectamente las condiciones que pertenecen al gráfico 3 con el gráfico 1.

Ante las condiciones de la función cuadrática presentada en la segunda fila de la pregunta 1, mostrado en la Figura 22, $a < 0, \quad b > 0, \quad c < 0$, en esta pregunta, el estudiante respondió lo siguiente: *"Parece ser el gráfico 1, pero su "c" es positivo y no negativo".* También se evidenció que el mismo estudiante no identificó las condiciones correspondientes a la representación gráfica número 1, las cuales se muestran en la fila 4 de la pregunta 1 presentada en la Figura 22. $a < 0, \quad b < 0, \quad c = 0$, donde el estudiante respondió que *"no hay ningún gráfico que tenga su vértice en el intercepto "X".*

Pensamos que los dos errores cometidos por dicho estudiante se deben a que no tiene bien claro las características de la función cuadrática, a pesar de que han abordado la función cuadrática en el año anterior, ya que no identificó ni reconoció en las representaciones gráficas el significado de los valores de las constantes $a, \ b \ y \ c$. Del mismo modo, no identificó que, cuando $c = 0$, el intercepto con el eje Y se encuentra en el origen de coordenadas $(0, 0)$ del plano cartesiano, ya que confundió este valor con la ubicación del vértice. En este caso, se puede señalar que el estudiante no generó un esquema de uso adecuado, evidenciándose en su mal desempeño.

La segunda pregunta presenta dos ítems y tiene como objetivo que los estudiantes reconozcan el eje de simetría y establezcan una relación con el vértice y, a partir ello, realicen la representación canónica de la función cuadrática. Para esto, se les mostró una parte de la representación gráfica de la función cuadrática, cuyo vértice es (4; 2), y el intercepto con el eje Y es (0; 6). A partir de ello, se solicitó a los estudiantes, en el ítem a), escribir la ecuación del eje de simetría, tal como se muestra en la Figura 25.

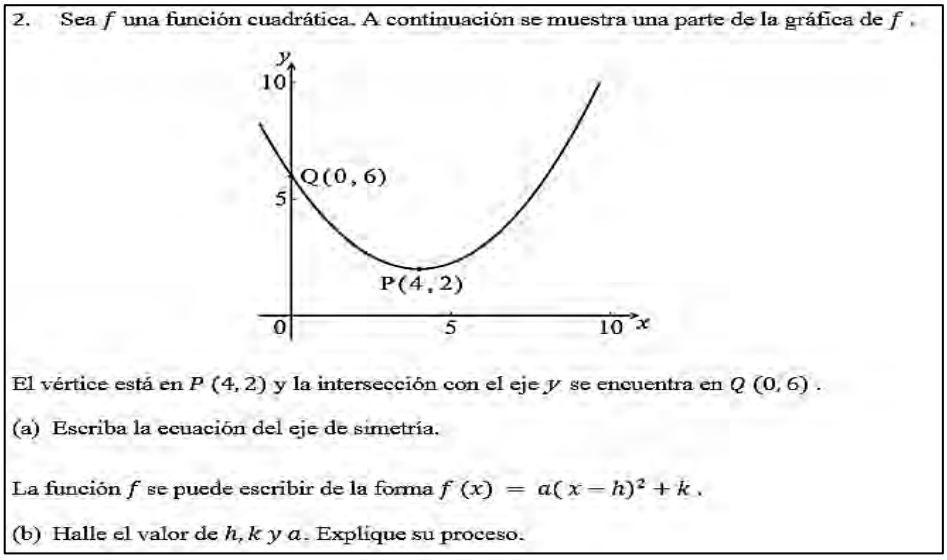



*Figura 25.* Pregunta 2 de la actividad exploratoria

De lo esperado en el ítem a), al realizar el análisis de la pregunta 2, sólo tres de los nueve estudiantes escribieron la ecuación del eje de simetría según lo esperado; es decir, establecieron la relación con el vértice de la función cuadrática. Entre ellos, se encuentra el estudiante *Óscar*, razón por el cual mostramos como ejemplo lo trabajado por él en esta pregunta 2 apartado a), tal como se muestra en la figura 26.

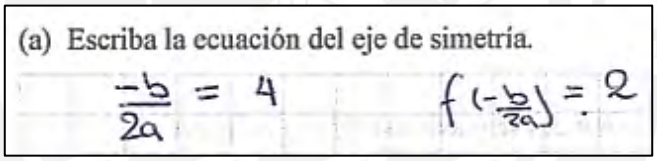



*Figura 26.* Respuesta de la pregunta 2a) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar

En la Figura 26, *Óscar* relaciona la fórmula del eje de simetría con el valor de la abscisa del vértice de la función cuadrática, así como relaciona el valor de la ordenada del vértice con $f(\frac{-b}{2a})$ ; es decir, los tres estudiantes cumplieron el objetivo de la pregunta.

A la luz de los aspectos de la Genesis Instrumental y Orquestación Instrumental, se puede señalar que *Óscar* sí realizó un desempeño satisfactorio al responder el apartado a) de esta pregunta; sin embargo, cinco de los nueve estudiantes escribieron sólo la fórmula de la ecuación del eje simetría $x = \frac{-b}{2a}$ y no establecieron ninguna relación con el vértice. Destacamos además que un estudiante no respondió correctamente la pregunta.

En relación con el ítem b) de la pregunta 2 de la actividad exploratoria, se observa que los nueve estudiantes identificaron los valores de $h\ y\ k$, según lo esperado en el análisis; sin

embargo, de los nueve estudiantes sólo siete calcularon el valor de "$a$", según lo esperado, al reemplazar los valores de $h\ y\ k$ en la forma canónica de la función cuadrática a través del punto $(0, 6)$. En la siguiente figura, mostramos el trabajo realizado por *Óscar* (ver Figura 27).

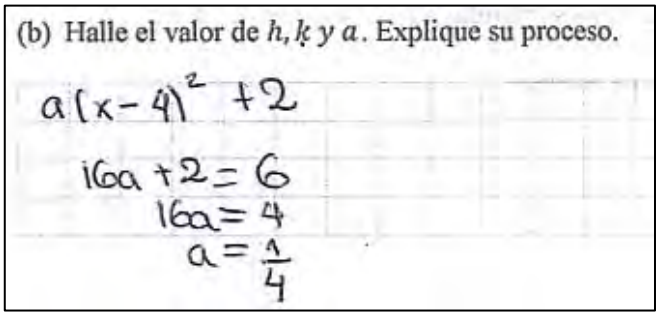



*Figura 27.* Respuesta de la pregunta 2b) de la actividad exploratoria presentada por el estudiante Óscar

En la figura 27, se observa las operaciones que realizó *Óscar* para determinar el valor de la constante "$a$", aunque no escribió explícitamente los valores de $h\ y\ k$, en el proceso mostrado se observa que sí los reemplaza correctamente en la forma canónica de la función cuadrática. Los otros seis estudiantes determinaron el valor de la constante "$a$" al realizar operaciones similares o, en algunos casos, operaciones más extensas a las presentadas por *Óscar*. Es bueno destacar que la mayoría de los estudiantes realizaron acciones adecuadas para desarrollar la situación planteada, al demostrar un desempeño apropiado.

Cabe mencionar también que en el análisis del ítem b) dos de los nueve estudiantes no lograron lo esperado, puesto que presentaron dificultades para determinar el valor de la constante "$a$".

En la pregunta 3, se presenta tres ítems con el objetivo de que los estudiantes, a partir de la representación gráfica de una función cuadrática, identifiquen los elementos de la función cuadrática, determinen los valores de las constantes $a,\ p\ y\ q$ y luego hallen la regla de correspondencia en su forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para ello, se les mostró una parte de la representación gráfica de la función cuadrática, cuyos interceptos con el eje X son $(-1, 0)\ y\ (8, 0)$ y el intercepto con el eje Y es $(0, -4)$. También se les proporcionó la regla de correspondencia de la función cuadrática en la siguiente forma $f(x) = a(x - p)(x - q)$ (ver Figura 28).

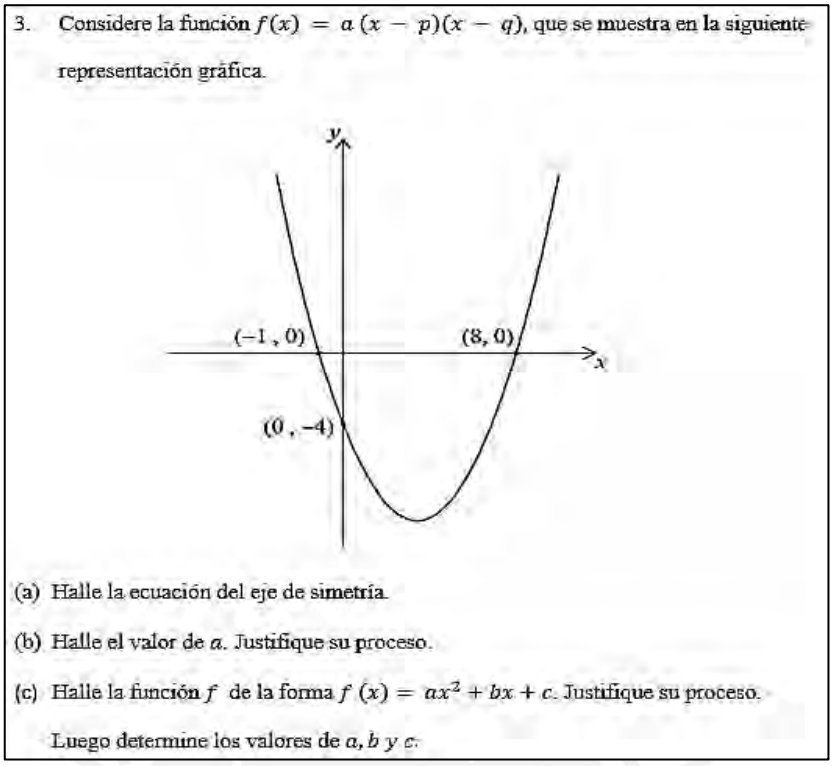



*Figura 28.* Pregunta 3 de la actividad exploratoria

Al realizar el análisis de la pregunta 3, de lo esperado en el ítem a), se tiene que cinco de los nueve estudiantes lograron hallar la ecuación del eje de simetría. En este ítem, el estudiante *Óscar* escribió la ecuación del eje de simetría, pero cometió un error en el signo, ya que escribió el signo “menos” (-) en lugar de escribir el signo “más” (+) en la fórmula.

A continuación, mostramos, como ejemplo, el trabajo realizado por *Óscar* (ver Figura 29).

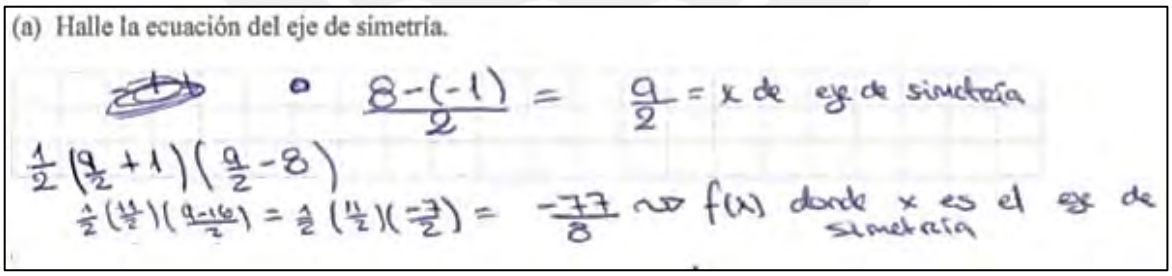



*Figura 29.* Respuesta de la pregunta 3a) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar

En la Figura 29, se observa que *Óscar* cometió un error al escribir el signo “menos” (-) en lugar del signo “más” (+). Esto hace que el estudiante encuentre un valor diferente a lo esperado para el eje de simetría. En forma similar a *Óscar*, otros dos estudiantes cometieron el mismo error en el signo de la fórmula para determinar la ecuación de simetría $x = \frac{p+q}{2}$, ya que escribieron $x = \frac{p-q}{2}$.

Es bueno mencionar que un estudiante no respondió nada en este ítem a). Por lo tanto, se evidencia que la mayoría de los estudiantes, en esta pregunta, no muestran un conocimiento adecuado sobre las nociones de la función cuadrática en cuanto al eje de simetría.

Por otro lado, en el análisis del ítem b) de la pregunta 3, de lo esperado, se tiene que seis de nueve estudiantes hallaron el valor "$a$", dentro de los seis estudiantes se encuentra *Óscar* y, a continuación, presentamos el trabajo realizado por él (ver Figura 30).

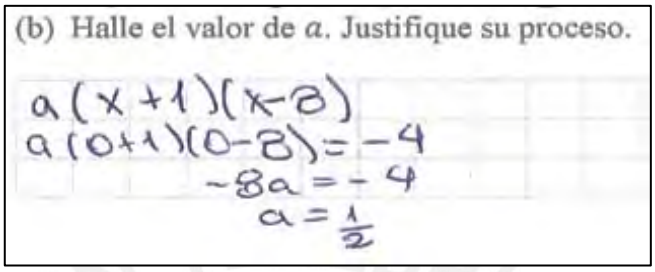



*Figura 30.* Respuesta de la pregunta 3b) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar

En la Figura 30, se observa las acciones realizadas por *Óscar* para determinar el valor del coeficiente del término cuadrático. En forma similar, respondieron los otros cinco estudiantes que determinaron en forma correcta el valor de "$a$", mientras que tres de los nueve estudiantes no respondieron este ítem b). Asimismo, podemos señalar que la mayoría de los estudiantes comprendieron el enunciado de la pregunta y aplicaron procesos válidos para determinar el valor de la constante "$a$". Por lo tanto, *Óscar*, para resolver esta situación, utilizó sus esquemas de uso sobre sus conocimientos matemáticos.

Finalmente, en el análisis del ítem c) de la pregunta 3, de lo esperado, se tiene que cinco de los nueve estudiantes determinaron la regla de correspondencia de la función cuadrática en su forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sólo uno de los estudiantes que respondió correctamente esta pregunta fue el estudiante *Óscar*. A continuación, mostramos, como ejemplo, su trabajo realizado en esta pregunta. (ver Figura 31).

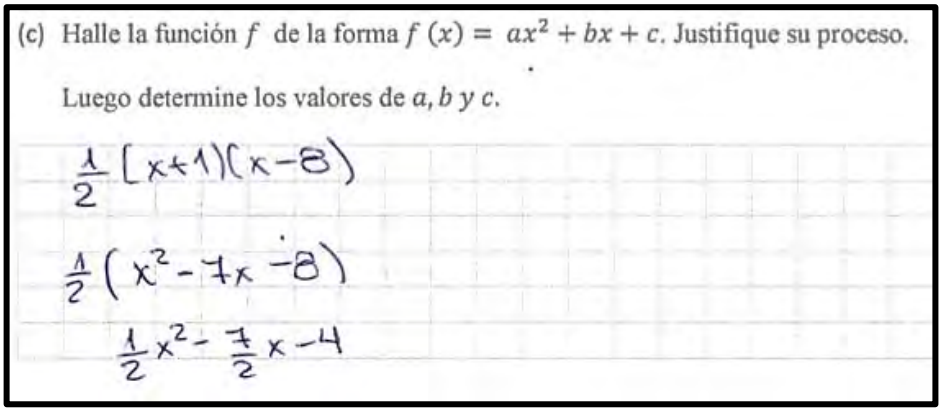



*Figura 31.* Respuesta de la pregunta 3e) de la actividad exploratoria presentado por el estudiante Óscar

En la figura 31, se observa las acciones que realizó *Óscar* para determinar la regla de correspondencia de la función cuadrática en su forma general. Se evidencia, de esta manera, el desempeño didáctico del estudiante.

Por otro lado, en este ítem c) de la pregunta 3, un estudiante presentó dificultades en su proceso, puesto que, a pesar de que se tiene la representación gráfica de la función cuadrática con concavidad hacia arriba, dicho estudiante escribió el valor de coeficiente del término cuadrático "$a$" con signo negativo, el cual hizo que determinara la regla de correspondencia en forma errónea. Del mismo modo, tres de los nueve estudiantes no respondieron este ítem (c) dejando en blanco este apartado.

A continuación, mostramos, en la tabla 7, un resumen que sintetiza los resultados de la actividad exploratoria realizada con nueve estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional (equivalente a cuarto de secundaria-programa nacional, edades entre 14 y 15 años).

Tabla 7.

*Resultados de la actividad exploratoria*

| Pregunta | Ítem | Respuestas de acuerdo a lo esperado | Respuestas diferentes de lo esperado |
|---|---|---|---|
| **1** | a) | 8 | 1 |
| **2** | a) | 3 | 6 |
| | b) | 7 | 2 |
| **3** | a) | 5 | 4 |
| | b) | 6 | 3 |
| | c) | 5 | 4 |

Luego de haber aplicado la actividad exploratoria, podemos concluir que la mayoría de los estudiantes conocen la noción de función cuadrática en lo referente a sus características y elementos, ya que, como se observa en la Tabla 7, la mayoría de los estudiantes respondieron en forma correcta las preguntas planteadas en esta actividad, a excepción de la pregunta 2a), referida a la ecuación del eje de simetría, donde se presentó un problema al dar su respuesta. Pensamos que esto se debe a que la mayoría de los estudiantes no establecieron una relación entre los elementos de la función cuadrática mostrada en la representación gráfica y que, al realizar el cálculo algebraico, no corroboraron el valor obtenido con la representación gráfica mostrada.

La información obtenida en el desarrollo de la actividad exploratoria da insumos para elaborar la configuración didáctica y el modo de ejecución de la actividad 1. Cabe señalar que, como en esta actividad es exploratoria, no se realizó el análisis de las acciones realizadas por el docente, sino que se priorizó las acciones realizadas por los estudiantes.

A continuación, presentaremos la estructura y análisis de la actividad 1.

### 3.3.2 Análisis de la Actividad 1

Para el análisis de esta actividad, se tomarán en cuenta aspectos de la teoría de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental correspondiente a la configuración didáctica, modo de ejecución y desempeño didáctico.

Dentro de la configuración didáctica, hacemos referencia al entorno y la secuencia de actividades mediada por la calculadora gráfica. En cuanto al modo de ejecución, referida a la organización, fue el siguiente: se formarán tres duplas y una terna de estudiantes, los cuales dispusieron de una calculadora de pantalla gráfica, una laptop y un proyector multimedia para proyectar sus resultados obtenidos luego de realizar coordinaciones y socializar sus esquemas de utilización y modos de ejecución colectiva, así como también las génesis instrumentales de cada dupla.

A continuación, en la tabla 8, mostramos la organización de las duplas y una terna con los estudiantes participantes.

Tabla 8.

*Distribución de las duplas*

| Duplas y ternas | D1 | D2 | D3 | T1 |
|---|---|---|---|---|
| Estudiantes | Teodoro<br>Raymundo | Oscar<br>Henry | Fernando<br>Francisco | Rocío<br>Carla<br>Carmen |

En cuanto al desempeño didáctico del docente durante el desarrollo de la actividad, se analizará cómo él orquesta o gestiona la clase para que las duplas muestren sus acciones y coordinaciones y el desempeño didáctico al afrontar las situaciones propuestas.

En tanto, la actividad 1 tiene por finalidad identificar y analizar cómo los estudiantes movilizan la noción de función cuadrática sobre las traslaciones verticales y horizontales al hacer uso de la calculadora de pantalla gráfica, donde el docente investigador gestionará la clase para guiar los posibles esquemas de utilización colectiva de las duplas y terna de estudiantes.

A continuación, presentamos el análisis de lo que se espera que los estudiantes realicen al desarrollar las situaciones propuestas.

**Actividad 1: lo esperado**

**Pregunta 1:**

En la pregunta 1, se espera que los estudiantes realicen la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ y, a partir de ello, haciendo uso de la calculadora de pantalla gráfica, realicen traslaciones verticales y horizontales tomando valores particulares para las constantes $h\ y\ k$. Para esta primera pregunta, se presentan los ítems a), b), c) y d) y cada una de ellas con sub-ítems i) y ii).

El ítem a) i) tiene por finalidad que los estudiantes realicen la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ y, a partir de ello, escriban los interceptos con los ejes X e Y, así como también el dominio y rango de dicha función.

Se espera que los estudiantes, para responder esta pregunta, ingresen a la barra menú de la calculadora gráfica y en ella seleccionen el icono gráfico o *Graf* y sigan los siguientes pasos: presione EXE, seleccione Y1 y, en ella, escriba la regla de correspondencia $x^2$, luego presione EXE para observar la representación gráfica de función cuadrática. De esta manera movilizaran; generaran esquemas de acción instrumentada al identificar los interceptos, dominio y rango de la función cuadrática, a través de las acciones realizadas por el estudiante (ver Figura 32).

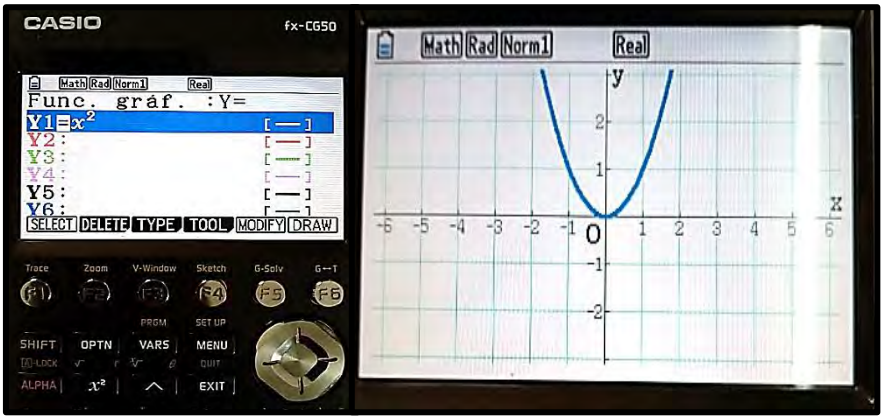



*Figura 32.* Representación gráfica de la pregunta 1 ai) de la actividad 1

A partir de lo mostrado en la figura 32, se espera que los estudiantes den como respuesta lo siguiente:

*Intercepto con el eje* $x$ *en* $(0,0)$

*Intercepto con el eje* $y$ *en* $(0,0)$

$Dom\ f = R$

$Ran\ f = [0, +\infty[$

Al dar estas respuestas, se evidenciará que el estudiante ha desarrollado los procesos de instrumentación e instrumentalización en el proceso del aprendizaje a través de una gestión colectiva.

El ítem b i) tiene como objetivo que los estudiantes realicen, en la calculadora, la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 + k$ para diferentes valores de $k$; es decir, que los estudiantes deben elegir libremente los valores para esta constante $k$ (ya sea positivo, negativo o cero) y a partir de ello respondan la pregunta sobre las diferencias y semejanzas de las representaciones gráficas obtenidas.

Para lograr esto, se espera que los estudiantes ingresen a la barra menú de la calculadora gráfica y en ella seleccionen el icono gráfico o *graf* y sigan los siguientes pasos: presione EXE, seleccione Y1 y en ella escriba la regla de correspondencia, por ejemplo $x^2$ , en Y2 escriba $x^2 + 2$ y en Y3 escriba $x^2 - 2$, luego presione EXE para observar las representaciones gráficas de las tres funciones cuadráticas. De esta manera, se evidenciarán los esquemas de uso empleado en la construcción de las representaciones graficas de las funciones cuadráticas.

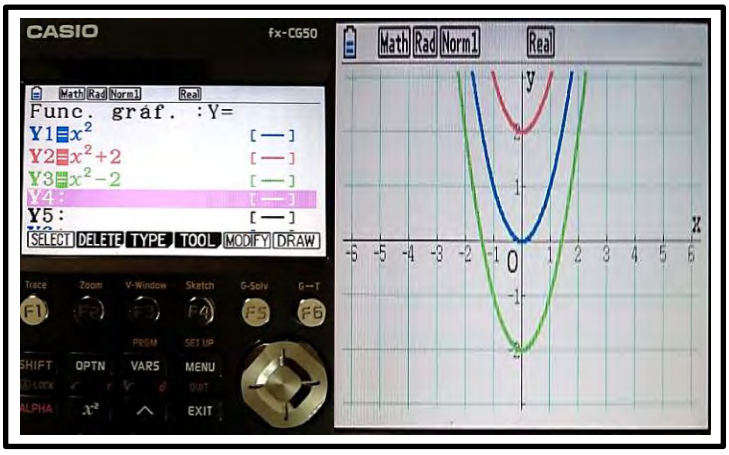



*Figura 33.Representación gráfica de la pregunta 1 bi) de la actividad 1*

De acuerdo con lo que se observa en la Figura 33, esperamos que los estudiantes movilicen los siguientes esquemas de acción colectiva instrumentada:

- *Si $k = 0$, entonces la representación gráfica no se desplaza.*
- *Si $k > 0$, entonces la representación gráfica se traslada verticalmente hacia arriba.*
- *Si $k < 0$, entonces la representación gráfica se traslada verticalmente hacia abajo.*

Al realizar estas afirmaciones las duplas, se evidenciará la construcción de esquema de acción colectiva instrumentada a través de la utilización de los esquemas de uso, al realizar las duplas un desempeño didáctico para afrontar con éxito la situación planteada.

El ítem bii) tiene la finalidad que los estudiantes identifiquen lo que sucede con el valor de la constante $k = 0$. Se espera que los estudiantes, según lo realizado para obtener la representación gráfica mostrada en la Figura 33, respondan lo siguiente:

*Si $k = 0$, entonces la representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ no realiza ninguna traslación vertical, solo lo hace cuando toma valores diferentes de cero.*

El ítem ci) tiene por objetivo que los estudiantes realicen, en la calculadora, la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - h)^2$, al utilizar diferentes valores para $h$ y, a partir de ello, respondan la pregunta sobre las diferencias y semejanzas de las representaciones gráficas obtenidas.

Se espera que los estudiantes realicen acciones como, presionar el botón *Exit* para retornar a la barra de editor de ecuaciones en el icono gráfico y, a partir de ello, desactiven las reglas de correspondencias de las funciones anteriores y escriban la regla de correspondencia de las siguientes funciones cuadráticas en la pantalla de texto, como por ejemplo, en Y1, escriban $x^2$; en Y2 escriban $(x - 2)^2$ y; en Y3 escriban $(x + 2)^2$, luego presionen EXE para observar

las representaciones gráficas de las tres funciones cuadráticas con los valores elegidos, evidenciándose en ellos la instrumentación y la instrumentalización en el aprendizaje de traslaciones horizontales del objeto.

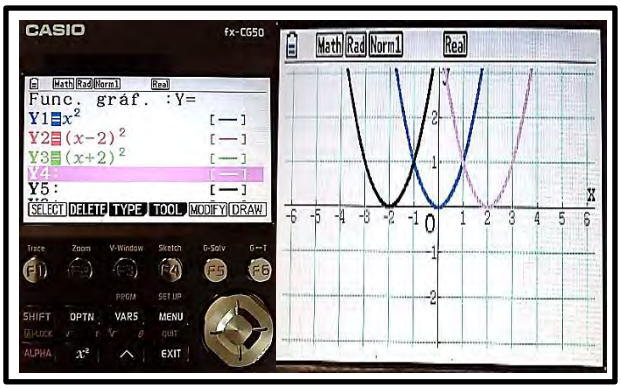



*Figura 34.* Representación gráfica de a pregunta 1 ci) de la actividad 1

Se espera que los estudiantes, luego de haber mostrado las representaciones gráficas de la Figura 34, según los valores que ellos escriban para $h$, en coordinación con su dupla, movilizan los siguientes esquemas de acción colectiva instrumentada:

- *Si $h > 0$, entonces las representaciones gráficas se trasladan hacia la derecha.*
- *Si $h < 0$, entonces las representaciones gráficas se trasladan hacia la izquierda.*
- *Si $h = 0$, entonces la representación gráfica no se traslada ni a la derecha ni a la izquierda.*

Al realizar estas afirmaciones, la dupla evidenciará la construcción de esquema de acción colectiva instrumentada al realizar acciones para afrontar con éxito la situación planteada.

El ítem cii) tiene por finalidad que los estudiantes identifiquen el tipo de traslación que realizan para diferentes valores de h.

Se espera que los estudiantes, luego de realizar la representación y observación de las gráficas de la función cuadrática $f(x) = (x - h)^2$ para diferentes valores de h, generen el esquema de acción colectiva instrumentada.

*No lo hace para todos los valores de $h$, porque si $h = 0$, entonces la representación gráfica no se traslada ni a la derecha ni a la izquierda.*

Con ello, la dupla de estudiantes pone en evidencia la instrumentación y la instrumentalización que les permitió realizar conjeturas sobre las traslaciones horizontales de acuerdo a los valores que asignaron a la constante $h$.

El ítem di) tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen las traslaciones horizontales y verticales a partir de una misma representación algebraica, al tomar diferentes valores para

las constantes $a, h\ y\ k$, según la regla de correspondencia $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde $a$, $h\ y\ k \in \mathbb{R}, a \neq 0$, para luego identificar el tipo de traslación.

Se espera que los estudiantes realicen las siguientes acciones: presionar el botón *Exit* para retornar a la pantalla de texto y en ello desactiven las reglas de correspondencias de las funciones anteriores al seleccionar con la tecla direccional y presionar la tecla F1. Luego, escriban la regla de correspondencia de las siguientes funciones cuadráticas: en Y1 escriban $x^2$, en Y2 escriban $2(x-2)^2+1$ y en Y3 escriban $2(x+2)^2-1$, presionen EXE para observar las representaciones gráficas de las tres funciones cuadráticas (ver Figura 35) con los valores elegidos por la dupla de estudiantes y, de esta manera, se evidenciará la construcción de esquemas de acción colectiva instrumentada.

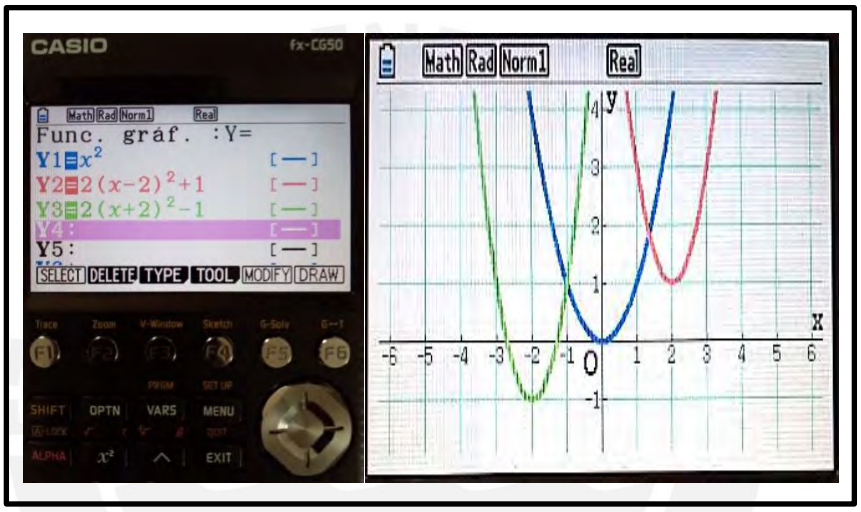



*Figura 35.* Respuesta de la pregunta 1 di) de la actividad 1

Al observar las representaciones graficas de las funciones cuadráticas en la Figura 35, esperamos que los estudiantes, en coordinación con su dupla, identifiquen el tipo de traslación, según los valores de las constantes $a,\ h\ y\ k$ y generen los esquemas de acción colectiva instrumentada.

*Cuando la función cuadrática toma valores diferentes para las constantes $a, h\ y\ k$, se puede observar que la representación gráfica de la función cuadrática realiza una traslación vertical (hacia arriba o hacia abajo) y una traslación horizontal (hacia la derecha o izquierda).*

El ítem dii) tiene la finalidad que los estudiantes generen los esquemas de acción colectiva instrumentada a partir de los casos particulares de las representaciones gráficas que han gestionado con la calculadora de pantalla gráfica. Estos esquemas de acción colectiva instrumentada son referidos a la concavidad, el vértice y los interceptos con los ejes.

Esperamos que los estudiantes generen los esquemas de acción colectiva instrumentada.

- *De acuerdo al valor de "$a$". Si $a > 0$, entonces la representación gráfica es cóncava hacia arriba. Si $a < 0$, entonces la concavidad es hacia abajo.*
- *El vértice depende de los valores que tome $h$ y $k$. Si $h > 0$ y $k > 0$, entonces el vértice se encuentra en el primer cuadrante.*
- *Sobre los interceptos con los ejes, se puede señalar lo siguiente: Si los tres valores son positivos, entonces no hay interceptos con el eje X, pero sí con el eje Y. Si a es positivo y los valores de h, k son negativos, entonces sí existe intercepto con los dos ejes.*

De esta manera, se evidenciará que las duplas realizan la construcción de esquema de acción colectiva instrumentada al realizar un desempeño didáctico para afrontar con éxito la situación planteada.

**Pregunta 2**

Esta pregunta es usada por el Bachillerato Internacional y tiene como finalidad que los estudiantes relacionen lo trabajado en la actividad exploratoria y en la pregunta 1 de esta actividad.

En la pregunta 2 ítem i) y ii) se tiene como objetivo que los estudiantes realicen la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x - 7$ y, a partir de ello, identifiquen y escriban los interceptos con los ejes X e Y.

Para responder a esta pregunta, se espera que los estudiantes ingresen a la barra menú de la calculadora de pantalla gráfica y en ella seleccione el icono gráfico o *graf* y siga los siguientes pasos: presione EXE para ingresar a la pantalla de texto, luego seleccione Y1 y en ella escriba la regla de correspondencia $x^2 - 6x - 7$, luego presione EXE para observar la representación gráfica de función cuadrática, tal como se muestra en la Figura 36.

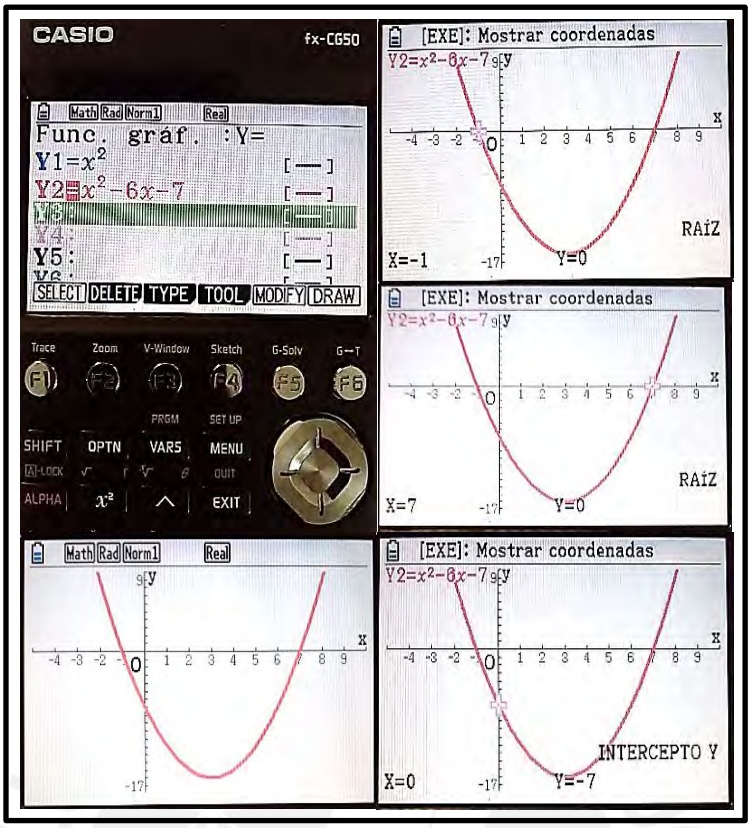



*Figura 36.* Respuesta de la pregunta 2 i) y 2 ii) de la actividad1

A partir de lo mostrado en la Figura 36, se espera que las duplas de estudiantes generen los esquemas de acción colectiva instrumentada.

- *Los interceptos son:* $(-1, 0)$ *y* $(7, 0)$ *en el eje* $X$.
- *En el eje* $Y$ *el intercepto es* $(0, -7)$.

De esta forma, se evidenciará que las duplas realicen acciones que reflejen la instrumentalización e instrumentación, ya que pondrán en juego los esquemas de uso colectivo, el modo de ejecución y el desempeño didáctico al afrontar la situación propuesta.

En el ítem iii) de la pregunta 2, se tiene como objetivo que los estudiantes realicen un tratamiento en la regla de correspondencia de la función cuadrática en su forma general y luego lo represente en su forma canónica.

Se espera que los estudiantes realicen las siguientes acciones y operaciones algebraicas para lograr dar una respuesta a la situación propuesta.

$$f_{(x)} = x^2 - 6x - 7$$

$$f_{(x)} = x^2 - 6x + (3)^2 - (3)^2 - 7$$

$$f_{(x)} = (x - 3)^2 - 9 - 7$$

$$f_{(x)} = (x-3)^2 - 16$$

Entonces el vértice es $(3, -16)$

Asimismo, en la pantalla gráfica de la calculadora, se puede observar el vértice de la función (ver Figura 37).

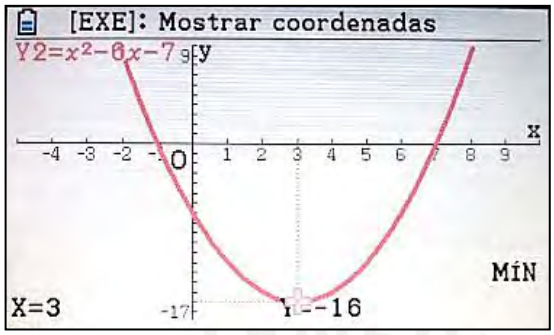



*Figura 37.* Representación gráfica de la función cuadrática con los valores del vértice

Al realizar estas acciones esperadas, se puede señalar que las duplas han generado los esquemas de acción colectiva instrumentada y esquemas de acción instrumentada, así como también se evidenciará acciones realizadas de acuerdo al modo de ejecución propuesto por el docente y el desempeño didáctico de parte de las duplas, según lo esperado.

El ítem iv) de la pregunta 2 (ver Figura 38) tiene por finalidad que los estudiantes puedan realizar traslaciones verticales y horizontales mediante un vector y, a partir de ella, pueda determinar la regla de correspondencia de otra función cuadrática.

**iv) A partir de la representación gráfica de la función $f$ realice una traslación mediante el $vector\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$, y represente gráficamente la nueva función cuadrática, denominándolo como función $g$ .**

**Luego observa y responde:**

**¿Qué sucede con la representación gráfica de la función $g$ con relación a la función $f$?**

*Figura 38.* Ítem iv) de la pregunta 2 de la actividad 1

Se espera que los estudiantes, al realizar un tratamiento en el registro algebraico de la función cuadrática, obtengan la regla de correspondencia de la nueva función cuadrática g. Del mismo modo, se espera que la regla de correspondencia obtenida sea ingresada a la calculadora de pantalla gráfica.

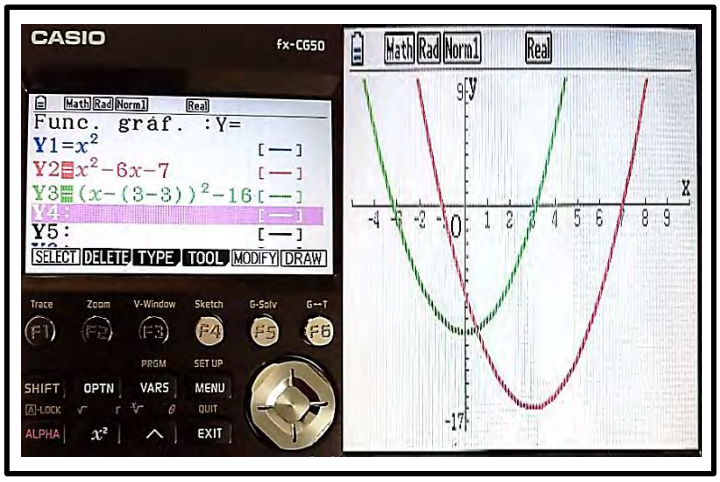



*Figura 39.* Representación gráfica de la función f sujeto a una traslación mediante un vector

En la Figura 39, se puede observar las acciones que realizan las duplas, como por ejemplo los esquemas de acción colectiva instrumentada. Por tanto, en estas acciones realizadas, se puede evidenciar los procesos de instrumentación e instrumentalización puestos en juego al desarrollar la situación propuesta. Por otro lado, se puede evidenciar el modo de ejecución y el desempeño didáctico puesto en juego por parte del docente al realizar orientaciones a los estudiantes para afrontar la situación propuesta sobre las traslaciones horizontales y verticales de la función cuadrática.

A continuación, en la figura 40, se muestran los elementos de la función cuadrática que se pueden señalar mediante el uso de la calculadora de pantalla gráfica.

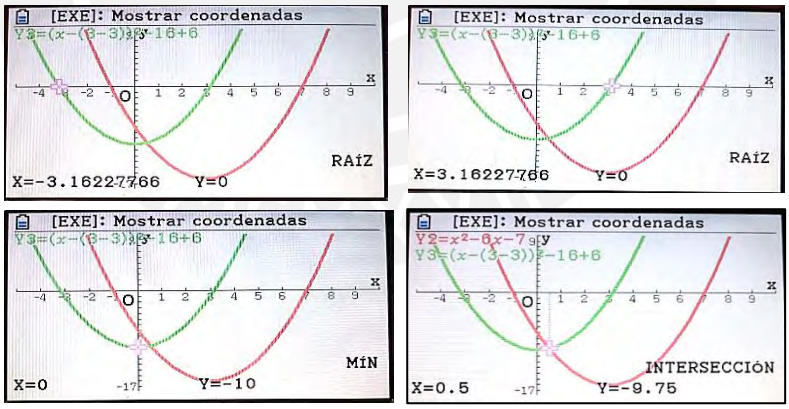



*Figura 40.* Representación gráfica de la función f y g mostrando algunos elementos

A partir de las representaciones mostradas en la Figura 40, se espera que las duplas respondan las preguntas propuestas: *¿Qué sucede con la representación gráfica de g con relación a la gráfica de f?* Al realizar las acciones y coordinaciones al interior de cada dupla para generen los esquemas de acción colectiva instrumentada.

- *La representación gráfica de la función $g$ se traslada horizontalmente tres unidades hacia la izquierda.*
- *La representación gráfica también se traslada seis unidades verticalmente hacia arriba.*

El ítem v) y vi) de la pregunta 2 (ver Figura 41) tiene por finalidad que los estudiantes puedan identificar el vértice y la regla de correspondencia de la nueva función cuadrática generado a partir de la traslación propuesta.

**v) Escribe las coordenadas del vértice de la representación gráfica de la función $g$.**

**vi) Determina la regla de correspondencia de la función $g$. Explique su proceso.**

*Figura 41.* Ítem v) y vi) de la pregunta 2 de la actividad 1

A partir de las representaciones gráficas mostradas en la Figura 40, se espera que las duplas escriban las siguientes respuestas:

*Para el ítem v)*

$$V(0,-10)$$

*Para el ítem vi)*

$$g_{(x)} = f_{(x)} + T\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$$

$$g_{(x)} = (x-3)^2 - 16 + T\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$$

$$g_{(x)} = (x-(3-3))^2 - 16 + 6$$

$$g_{(x)} = (x-0)^2 - 16$$

$$g_{(x)} = x^2 - 16$$

Las duplas, al realizar acciones y coordinaciones, esquemas de uso individual y colectivo al utilizar el artefacto la calculadora de pantalla gráfica, pondrán en evidencia la instrumentalización e instrumentación. A partir de ello, podemos señalar que las duplas se apropian de la noción de función cuadrática, en lo referente a las traslaciones verticales y horizontales, haciendo uso del artefacto la calculadora de pantalla gráfica.

Al culminar el desarrollo de la actividad 1, se espera que el docente intervenga para realizar la institucionalización del objeto matemático, la función cuadrática, es decir, que ponga en

acción su desempeño didáctico para verificar el logro de las fases de la Orquestación Instrumental: configuración didáctica, el modo de ejecución y el desempeño didáctico y, de ser necesario y oportuno, su intervención durante la aplicación de la actividad 1, ya que debe realizarlo con la finalidad de garantizar los objetivos propuestos de la actividad y de la investigación.

Luego de haber realizado el análisis de lo que se espera en esta actividad 1 (preguntas 1 y 2), procedemos a realizar el análisis del trabajo realizado por la **dupla D2**, integrada por los estudiantes *Óscar* y *Henry*. Todo ello se realizará a la luz de los aspectos teóricos y metodológico presentado en nuestra investigación.

**Actividad 1: análisis de las producciones de la dupla D2**

Para el análisis de esta actividad, tomaremos el trabajo realizado por la dupla D2, integrado por los estudiantes *Óscar* y *Henry*, ya que en la actividad exploratoria hemos mostrado como ejemplo el trabajo realizado por el estudiante *Óscar* y, en esa misma línea, consideramos pertinente analizar el trabajo realizado por esta dupla de estudiantes, ya que fue una de las duplas que ha mostrado mayor interés y coordinación en el desarrollo de la actividad 1.

A continuación, presentaremos el análisis de las producciones presentado por la dupla D2, integrada por los estudiantes *Óscar* y *Henry*. Para ello, realizaremos el análisis de cada pregunta y sus respectivos ítems.

**Pregunta 1: análisis de la producción - D2**

En relación con lo previsto en el análisis esperado de la pregunta 1 de esta actividad, la dupla **D2** sí realizó la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ , haciendo uso de la calculadora de pantalla gráfica, tal como se muestra en la Figura 42.

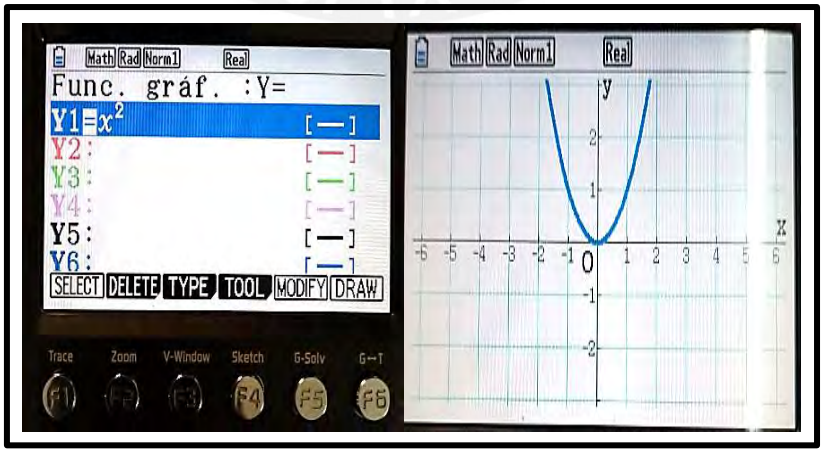



*Figura 42.* Representación gráfica del ítem a) realizada por la dupla **D2**

A partir de lo mostrado en la Figura 42, se puede señalar que la dupla **D2** realizó acciones y coordinaciones al utilizar la calculadora de pantalla gráfica al identificar los intercepto con los ejes X e Y, así como también identificaron y mostraron el dominio y rango de la función cuadrática, generándose los esquemas de acción colectiva instrumentada.

A continuación, presentamos la producción de la dupla **D2** (ver Figura 43).

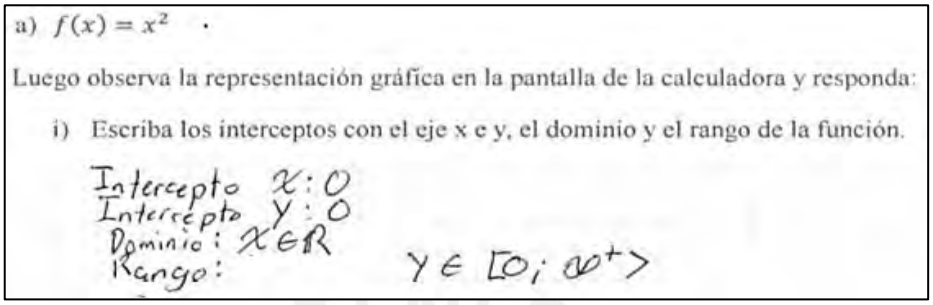



*Figura 43.* Respuesta de la dupla **D2** al ítem ai) de la actividad 1

Desde la teoría de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, pensamos que la dupla **D2** sí realizó acciones y coordinaciones para realizar esquemas de utilización colectiva y el modo de ejecución, ya que mostraron en sus representaciones gráficas y resultados coherencia, según lo esperado para esta pregunta; es decir, que han seguido los procedimientos indicados por el docente gestor de la clase y han generado los esquemas de acción colectiva instrumentada, lo cual se evidencia en la respuesta.

Respecto al ítem bi), la dupla **D2** realizó diferentes representaciones gráficas de la función cuadrática $f(x) = x^2 + k$, tomando diferentes valores para $k$. En este caso, la dupla tomó los valores $k = 1$, $k = -3$ y $k = 4$ (ver Figura 44).

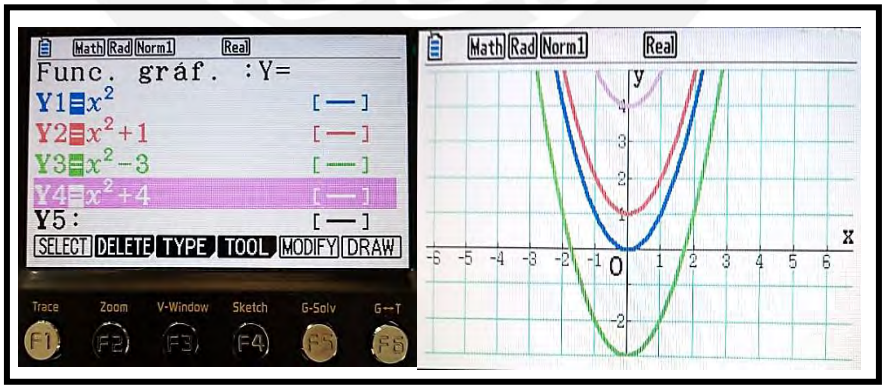
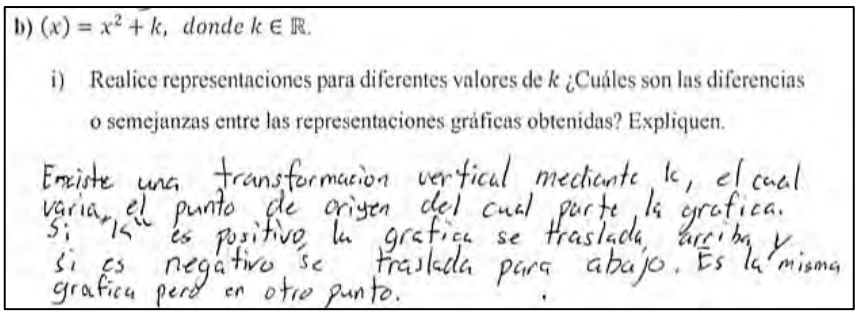



*Figura 44.* Representación gráfica del ítem b) presentado por la dupla **D2**

Luego de realizar las representaciones graficas de la función cuadrática, al tomar diferentes valores para $k$, la dupla **D2** escribió una respuesta que guarda relación con lo esperado para esta pregunta, ya que, ante la consigna propuesta, la dupla señaló como respuesta lo

siguiente: *Existe una transformación vertical mediante $k$, el cual varía el punto de origen del cual parte la gráfica*. *Si "$k$" es positivo, la gráfica se traslada arriba y, si es negativo, se traslada para abajo*. También señala que *es la misma gráfica, pero en otro punto* (ver Figura 45).


b) $(x) = x^2 + k$, *donde* $k \in \mathbb{R}$.

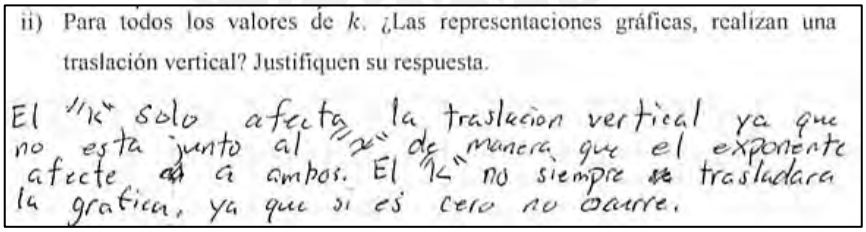
i) Realice representaciones para diferentes valores de $k$ ¿Cuáles son las diferencias o semejanzas entre las representaciones gráficas obtenidas? Expliquen.

Existe una transformacion vertical mediante "k", el cual varia el punto de origen del cual parte la grafica. Si "k" es positivo la grafica se traslada arriba y si es negativo se traslada para abajo. Es la misma grafica pero en otro punto.

*Figura 45.* Respuesta de la dupla **D2** al ítem bi) de la actividad 1

En la respuesta dada para este ítem bi) por la dupla **D2**, podemos observar que confunde el vértice con un punto de origen de la gráfica. Esto nos hace pensar que la dupla no recordó el nombre del punto mínimo (vértice) y lo denominó *punto de origen,* del cual, según dicha dupla, parte la gráfica; sin embargo, consideramos que la dupla **D2** sí realizó un uso adecuado del artefacto, ya que se puede evidenciar acciones realizadas para obtener las diferentes representaciones de la función cuadrática. Ello refleja la instrumentalización e instrumentación, el modo de ejecución, el desempeño didáctico y la configuración didáctica puestos en juego por el docente para observar y analizar cómo los estudiantes afrontan la situación propuesta.

Respecto a la respuesta del ítem bii), podemos señalar que la dupla **D2** respondió con cierta aproximación a lo esperado para este ítem, ya que ha señalado lo siguiente: *El "$k$" solo afecta la traslación vertical, ya que no está junto al "x", de manera que el exponente afecte a ambos. El "$k$" no siempre trasladará a la gráfica, ya que si es cero no ocurre* (ver Figura 46).


ii) Para todos los valores de $k$. ¿Las representaciones gráficas, realizan una traslación vertical? Justifiquen su respuesta.

El "k" solo afecta la traslacion vertical ya que no esta junto al "x" de manera que el exponente afecte a ambos. El "k" no siempre se trasladara la grafica, ya que si es cero no ocurre.

*Figura 46.* Respuesta de la dupla D2 al ítem bii) de la actividad 1

Pensamos que la dupla sí realizó las acciones y coordinaciones al generar los esquemas de acción colectiva instrumentada para brindar la respuesta según lo esperado.

En cuanto al ítem c), la dupla **D2** realizó diferentes representaciones gráficas de la función cuadrática $f(x) = (x - h)^2$ al tomar diferentes valores para $h$. En este caso, la dupla tomó los

valores $h = 2$, $h = 4$, $h = -2$, $h = -4$ y es así que, con la mediación de la calculadora de pantalla gráfica, observaron las siguientes representaciones (ver Figura 47).

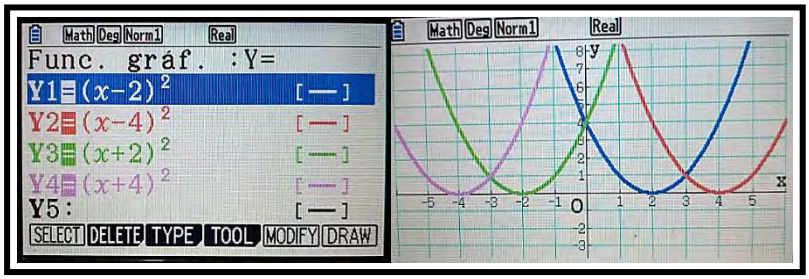
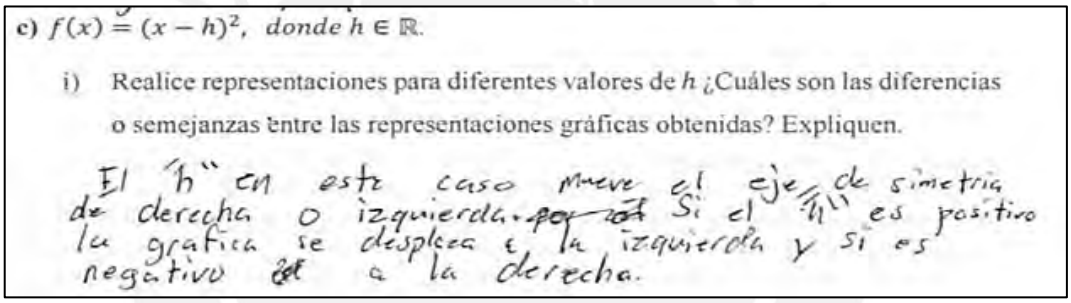



*Figura 47.* Representación gráfica del ítem c) presentado por la dupla D2

Luego de haber realizado las diferentes representaciones gráficas de la función cuadrática $f(x) = (x - h)^2$ para diferentes valores para $h$, la dupla **D2** dio una respuesta que guarda relación con lo esperado en esta pregunta, ya que señalaron como respuesta que *el "h", en este caso, mueve el eje de simetría de derecha o izquierda. Si el valor de $h$ es positivo, la gráfica se desplaza a la izquierda y, si es negativo, a la derecha* (ver Figura 48).


c) $f(x) = (x - h)^2$, *donde* $h \in \mathbb{R}$.

i) Realice representaciones para diferentes valores de $h$ ¿Cuáles son las diferencias o semejanzas entre las representaciones gráficas obtenidas? Expliquen.

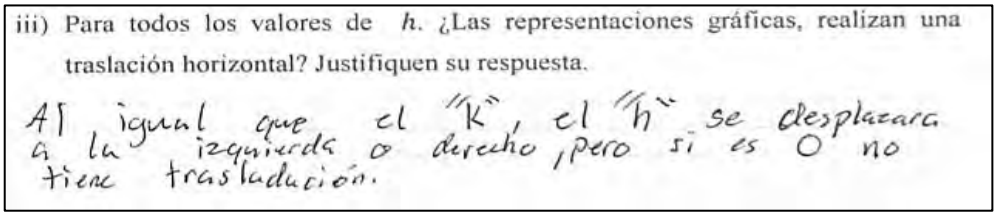
El "h" en este caso mueve el eje de simetría de derecha o izquierda. Si el "h" es positivo la grafica se desplaza a la izquierda y si es negativo a la derecha.

*Figura 48.* Respuesta de la dupla D2 al ítem c) de la pregunta 1 de la actividad 1

Luego que la dupla **D2** realizó las acciones y coordinaciones al generar los esquemas de acción colectiva instrumentada para dar la respuesta al ítem c), tal como se muestra en la Figura 48; sin embargo, de la respuesta dada, podemos observar que la dupla **D2** cometió un error, ya que confundió el sentido de la traslación horizontal según el valor de $h$, ya que si $h$ es positivo, entonces la representación gráfica se traslada a la derecha y, si $h$ es negativo, entonces la representación gráfica se traslada a la izquierda. Esto nos hace pensar que la dupla **D2** sí instrumentó adecuadamente el artefacto (calculadora de pantalla gráfica) en lo referente a la representación gráfica de las traslaciones horizontales, sin embargo, no realizó esquemas de acción colectiva instrumentada en este ítem, ya que la interpretación para la traslación horizontal no guarda relación con lo esperado.

Por otro lado, respecto al ítem cii) de la pregunta 1, la dupla **D2** brindó una respuesta equivalente a lo esperado; sin embargo, consideramos que esta respuesta es parcial, puesto

que solo indica que "*Al igual que el "k", el "h" se desplazará a la izquierda o derecha, pero si es 0, no tiene traslación*". (Ver Figura 49)


iii) Para todos los valores de $h$. ¿Las representaciones gráficas, realizan una traslación horizontal? Justifiquen su respuesta.

Al igual que el "k", el "h" se desplazara a la izquierda o derecho ¡pero si es 0 no tiene traslación.

*Figura 49.* Respuesta de la dupla D2 al ítem cii) de la pregunta 1 de la actividad 1

Tal como se observa en la Figura 49, la respuesta no es explícita en el sentido de las condiciones para realizar el traslado. Por ello, consideramos que es importante señalar el sentido de las traslaciones correspondientes a los valores que toma $h$, por lo que pensamos que la dupla **D2** ha dado esta respuesta sin tener en cuenta el error que cometieron en el apartado i) del ítem c).

En ese sentido, pensamos que no realizaron una coordinación adecuada para dar su respuesta; es decir, sus esquemas de acción colectiva instrumentada han sido limitado.

Respecto al ítem d) en el apartado i) y ii), la dupla **D2** siguió las indicaciones gestionadas por el profesor de aula para esta actividad 1; es decir, cumplieron con el modo de ejecución propuesto por el docente para responder este ítem, al realizar el uso del artefacto (calculadora de pantalla gráfica) y a través de sus esquemas de uso, mostraron las siguientes representaciones gráficas de la función cuadrática $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para distintos valores de las constantes a, h y k (ver Figura 50).

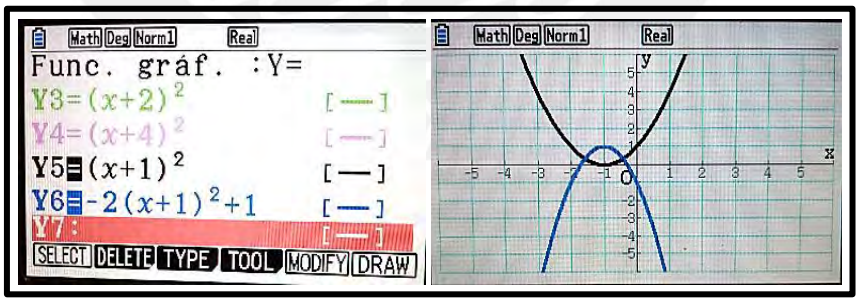
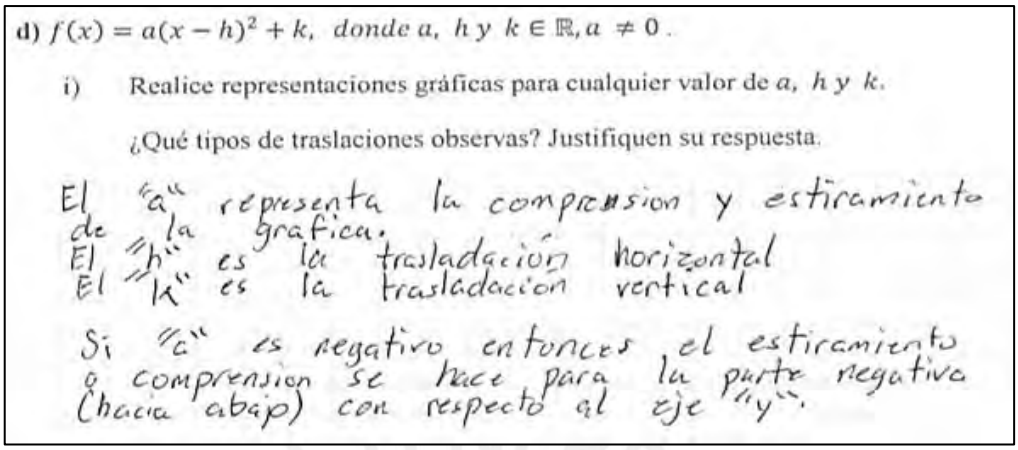



*Figura 50.* Representación gráfica del ítem d) presentado por la dupla D2

Luego de haber mostrado las diferentes representaciones gráficas de la función cuadrática $f(x) = a(x-h)^2 + k$, la dupla **D2** respondió lo siguiente: *El "a" representa la comprensión y estiramiento de la gráfica. El "h" es la traslación horizontal. El "k" es la traslación vertical. Si "a" es negativo, entonces el estiramiento o compresión se hace para la parte negativa (hacia*

*abajo) con respecto al eje "y".* La respuesta brindada por la dupla **D2** se aproxima a la respuesta esperada, donde además hacen mención sobre el valor de la constante $a$ de la función cuadrática (ver Figura 51).


d) $f(x) = a(x-h)^2 + k$, *donde* $a$, $h$ y $k \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

i) Realice representaciones gráficas para cualquier valor de $a$, $h$ y $k$.

¿Qué tipos de traslaciones observas? Justifiquen su respuesta.

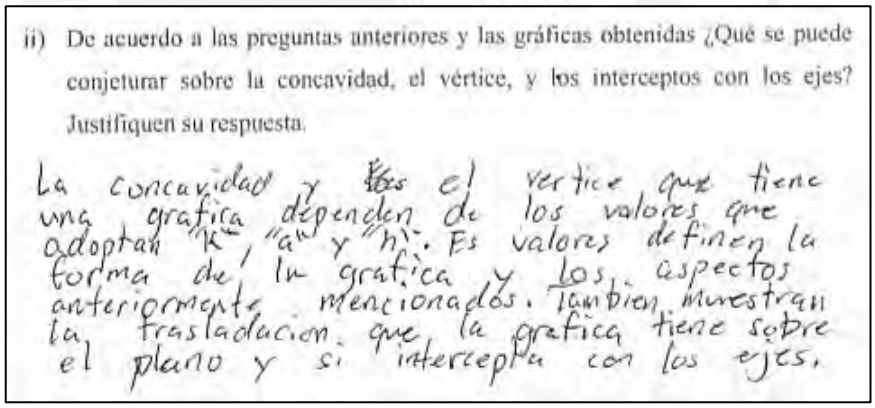
El "a" representa la compresion y estiramiento de la grafica.
El "h" es la trasladación horizontal
El "k" es la trasladacion vertical

Si "a" es negativo entonces el estiramiento o comprension se hace para la parte negativa (hacia abajo) con respecto al eje "y".

*Figura 51.* Respuesta de la dupla **D2** al ítem di) de la actividad 1

Pensamos que la dupla **D2,** al dar su respuesta, realizaron configuraciones de esquemas de acción colectiva instrumentada.

En cuanto al ítem dii), la dupla **D2** presentó su respuesta, tal como se muestra en la Figura 52.


ii) De acuerdo a las preguntas anteriores y las gráficas obtenidas ¿Qué se puede conjeturar sobre la concavidad, el vértice, y los interceptos con los ejes? Justifiquen su respuesta.

La concavidad y los el vertice que tiene una grafica dependen de los valores que adoptan "k", "a" y "h". Es valores definen la forma de la grafica y los aspectos anteriormente mencionados. Tambien muestran la trasladacion que la grafica tiene sobre el plano y si intercepta con los ejes.

*Figura 52.* Respuesta de la dupla D2 al ítem di) de la pregunta 1 - actividad 1

Tal como se muestra en la Figura 52, podemos señalar que la respuesta guarda cierta relación con lo esperado, al señalar que la concavidad y el vértice de la representación gráfica de la función cuadrática dependen de los valores que adopten $k$, $a$ y $h$ y que estos valores definen la forma de la gráfica, así como también muestran la traslación de la gráfica y si hay intercepto con los ejes.

Aunque la respuesta dada por dupla **D2** no se encuentra estrictamente en el orden de lo que esperábamos, esto nos hace pensar que la dupla **D2** sí realizó un uso adecuado del artefacto (calculadora de pantalla grafica) al gestionar acciones y coordinaciones al interior de la dupla, teniendo en cuenta el modo de ejecución y el desempeño didáctico realizado por el docente; para generar los esquemas de acción colectiva instrumentada sobre el comportamiento de la función cuadrática de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Por otro lado, luego de culminar con el desarrollo de la pregunta 1, el docente gestor de la clase realizó el modo de ejecución y el desempeño didáctico al absolver algunas dudas sobre el manejo de algunos comandos del artefacto y validar las acciones de los estudiantes en esta secuencia de actividades y específicamente en esta pregunta 1.

**Pregunta 2: análisis de la producción - D2**

En relación a lo previsto en el análisis esperado de la pregunta 2 de la actividad 1, la dupla **D2** sí realizó la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x - 7$ mediante el uso de la calculadora de pantalla gráfica, tal como se muestra en la Figura 53.

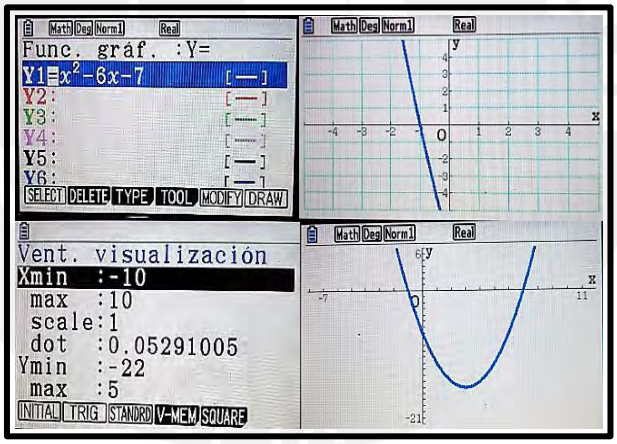


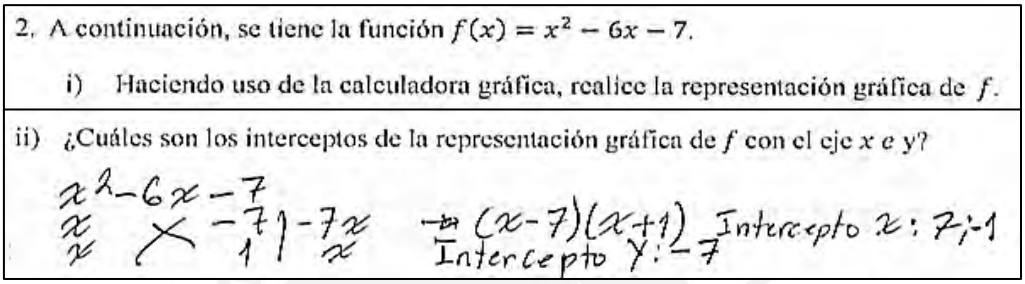

*Figura 53.* Representación gráfica de la función cuadrática mostrando por la dupla D2

A partir de lo observado en la Figura 53, podemos señalar que la dupla **D2**, al observar la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x - 7$, mostró dificultades para identificar el intercepto en el eje Y y el vértice de la función, ya que no podían observar la representación gráfica completa. Ante esta situación, el docente realizó acciones para realizar un modo de ejecución que les permitiera observar la representación gráfica a una escala menor y mayor para que puedan observar la representación gráfica completa o parte de ella

para identificar algunos elementos de la función, es decir el docente puso en juego su desempeño didáctico.

A partir de ello, las duplas realizaron coordinaciones al interior de cada dupla, para mostrar la representación adecuada. De acuerdo a la Orquestación Instrumental, podemos señalar que los estudiantes integrantes de las duplas realizaron nuevas configuraciones con relación a los esquemas de acción colectiva instrumentada.

A continuación, mostramos los resultados presentados por la dupla **D2** correspondientes a las preguntas 2 i) y 2 ii) (ver Figura 54)


2. A continuación, se tiene la función $f(x) = x^2 - 6x - 7$.

i) Haciendo uso de la calculadora gráfica, realice la representación gráfica de $f$.

ii) ¿Cuáles son los interceptos de la representación gráfica de $f$ con el eje $x$ e $y$?

$x^2-6x-7$

$x \times -7 \quad 1 \quad -7x$ → $(x-7)(x+1)$ Intercepto $x$: $7; -1$

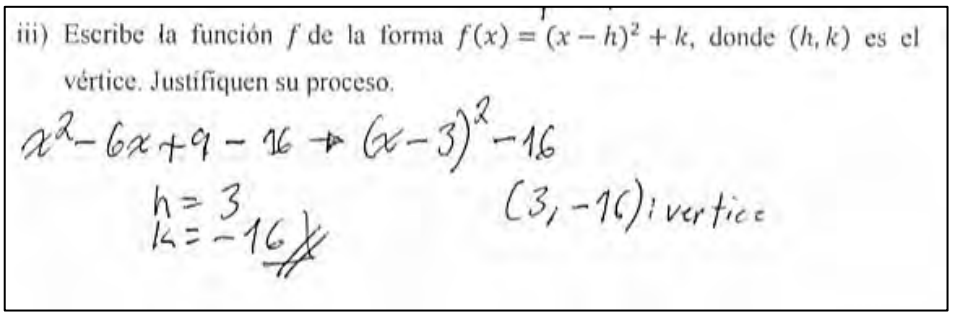
Intercepto $y$: $-7$

*Figura 54.* Respuesta de la pregunta 2) i y ii) presentado por la dupla D2

A partir de lo mostrado en la Figura 54, podemos señalar que la dupla **D2** ha realizado un tratamiento algebraico en la regla de correspondencia de la función cuadrática en su forma general, para expresarlo en su forma factorizada e identificar los interceptos con el eje X, tal como se observa en la figura 54.

Pensamos que la dupla **D2**, para responder esta pregunta, realizó acciones de cálculo algebraico para determinar elementos de la función cuadrática, para luego corroborar la representación gráfica de la función cuadrática mediante el uso del artefacto (calculadora de pantalla gráfica). Estas acciones y coordinaciones realizadas por la dupla **D2** nos hacen pensar que se ha generado esquemas de acción colectiva instrumentada adecuado.

A continuación, mostramos los resultados presentados por la dupla **D2** correspondiente a la pregunta 2 iii) (ver Figura 56).


iii) Escribe la función $f$ de la forma $f(x) = (x-h)^2 + k$, donde $(h,k)$ es el vértice. Justifiquen su proceso.

$x^2-6x+9-16 \rightarrow (x-3)^2-16$

$h = 3$

$k = -16$

$(3, -16)$: vertice

*Figura 55.* Respuesta de la pregunta 2) iii) presentado por la dupla D2

De la Figura 55, podemos señalar que la dupla **D2** ha presentado su respuesta y justificación según lo esperado. Esto nos hace pensar que sus miembros han realizado una coordinación adecuada, tanto en el uso del artefacto (calculadora de pantalla gráfica) y en el tratamiento algebraico, ya que se evidencia una adecuada construcción de esquemas de acción instrumentada.

A continuación, presentamos las representaciones gráficas de la función cuadrática (ver Figura 56).

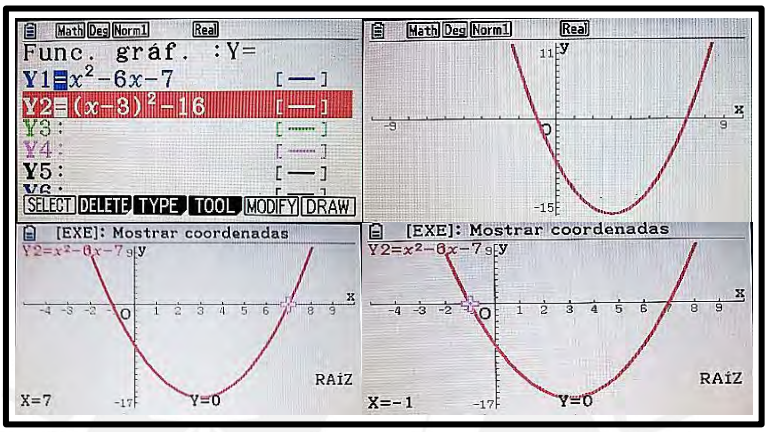



*Figura 56.* Representación gráfica del ítem 2 iii) presentado por la dupla D2

De acuerdo a lo que se observa en la Figura 56, mediante el uso de la calculadora de pantalla gráfica, los integrantes de la dupla **D2** corroboraron los valores de los componentes del vértice (*h, k*) de la función cuadrática. A luz de la Orquestación Instrumental, podemos señalar, que, las acciones y coordinaciones realizadas por la dupla **D2** genera los esquemas de acción colectiva instrumentada adecuado, de acuerdo a los modos de ejecución y el desempeño didáctico orquestado por el docente.

En relación a la 2 iv), podemos mencionar que la dupla **D2** respondió según lo esperado y se apoyó en el uso de la calculadora de pantalla gráfica (ver Figura 57).

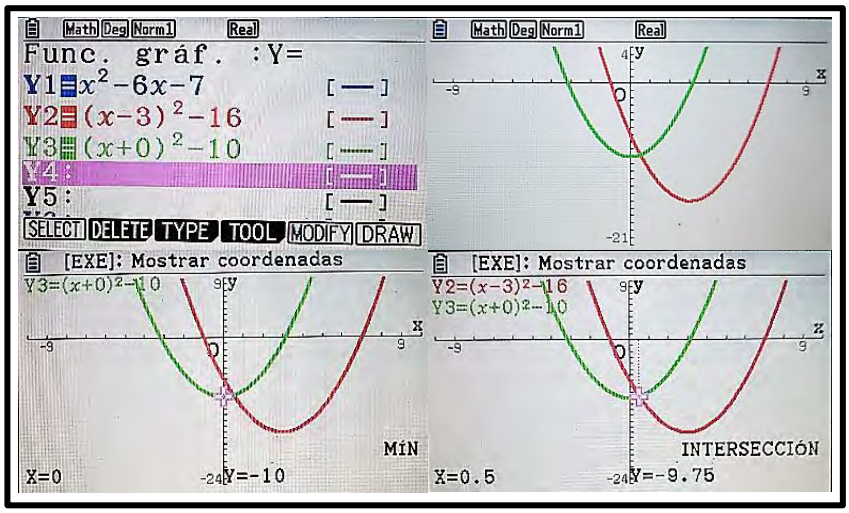



*Figura 57.* Representación gráfica del ítem 2 iv) presentado por la dupla D2

A partir de lo mostrado en la Figura 57 y un tratamiento algebraico, la dupla **D2** presentó la siguiente respuesta (ver Figura 58).

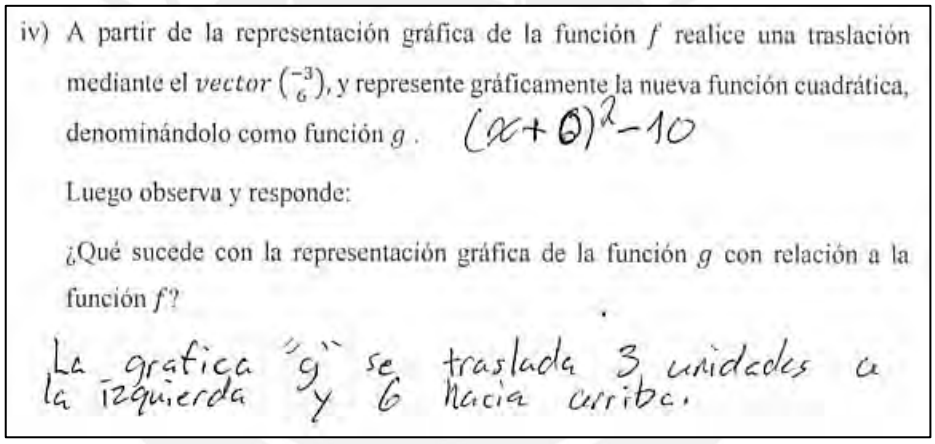



*Figura 58.* Respuesta de la pregunta 2 iv) presentado por la dupla D2

En relación con la respuesta de este ítem 2 iv) de la actividad 1, podemos mencionar que la dupla **D2** dio una respuesta según lo esperado en nuestro análisis.

Asimismo, a partir de la representación gráfica mostrada en la Figura 57, la dupla **D2** presentó sus respuestas de las preguntas 2 v) y 2 vi) de la actividad 1 (ver Figura 59).

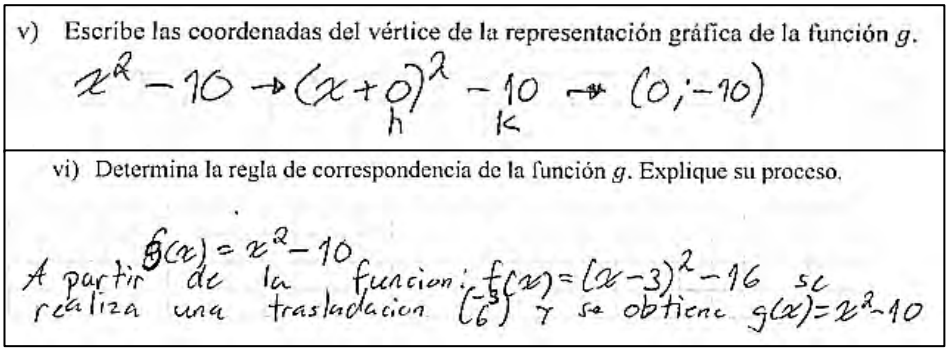



*Figura 59.* Respuesta de la pregunta 2v) y 2 vi) presentado por la dupla D2

De acuerdo con lo observado en la Figura 59, la respuesta de la dupla **D2** es según lo esperado en nuestro análisis, ya que, de acuerdo a la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, podemos afirmar que los miembros de la dupla **D2** realizaron una coordinación entre sus esquemas de uso y generaron esquemas de acción colectiva instrumentada para dar respuesta a la actividad propuesta.

Luego de haber realizado el análisis de los resultados de la actividad 1, a continuación, mostramos en la Tabla 9 un resumen que sintetiza los resultados de la actividad 1.

Tabla 9.

*Resultados de la actividad 1.*

| Pregunta | Ítem | Sub ítem | Duplas y terna | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | **Respondieron según lo esperado** | **Respondieron diferente a lo esperado** | **Total** |
| 1 | a) | i) | 4 | 0 | 4 |
| | b) | i) | 3 | 1 | 4 |
| | | ii) | 4 | 0 | 4 |
| | c) | i) | 2 | 2 | 4 |
| | | ii) | 4 | 0 | 4 |
| | d) | i) | 4 | 0 | 4 |
| | | ii) | 4 | 0 | 4 |
| 2 | | i) | 1 | 3 | 4 |
| | | ii) | 4 | 0 | 4 |
| | | iii) | 4 | 0 | 4 |
| | | iv) | 4 | 0 | 4 |
| | | v) | 4 | 0 | 4 |
| | | vi) | 4 | 0 | 4 |

Luego de haber realizado el análisis de los resultados de la actividad 1, podemos concluir que los estudiantes, formados en duplas, en su mayoría, realizaron acciones individuales y luego realizaron coordinaciones colectivas para dar una respuesta en consenso. Del mismo modo, realizaron el uso adecuado del artefacto al establecer sus esquemas de acción colectiva instrumentada bajo el modo de ejecución y el desempeño didáctico del docente, para realizar las conjeturas según los ítems propuestos.

Por otro lado, en el desarrollo de la pregunta 1 apartado ci) de la actividad 1, se evidenció que algunas duplas presentaron dificultades en determinar la traslación horizontal, según los valores particulares de h. Pensamos que ello se debe a que no identificaron, de manera clara, el valor de $h$ cuando reemplazan en la regla de correspondencia de la función cuadrática. $f(x) = (x - h)^2$.

También, en la pregunta 2 i) de la actividad 1, se evidenció que dos duplas y una terna de estudiantes mostraron dificultad al observar parte de la representación gráfica de la función cuadrática, ya que desconocían el procedimiento para ampliar la ventana de visualización grafica de la calculadora; es decir, realizar cambios en los valores de Xmin, Xmax, Ymin y Ymax, los cuales permiten la observación completa de las representaciones gráficas. En este caso, fue necesario la gestión del docente para guiar al estudiante en la construcción de los esquemas de acción colectiva instrumentada a través de ejemplos. A partir de ello, los estudiantes, en coordinación con su dupla, establecieron los valores para X y Y, de acuerdo a sus preferencias.

Por otro lado, luego de finalizar con el desarrollo de la actividad 1, el docente dio la indicación de que las duplas de estudiantes proyectaran, en la pantalla multimedia, los trabajos realizados con la calculadora de pantalla gráfica para observar las representaciones de cada dupla y, a partir de ello, gestionar la institucionalización del objeto de estudio función cuadrática.

Luego de los resultados del experimento de nuestra investigación, podemos señalar que la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental nos brindan aspectos importantes para el análisis de las acciones realizadas por el estudiante (esquemas de acción colectiva instrumentada) y el docente (modo de ejecución y desempeño didáctico) en la resolución de la secuencia de actividades propuestas.

# CONCLUSIONES

Como nuestro interés es investigar cómo una Orquestación Instrumental, en el que la calculadora de pantalla gráfica es un mediador, promueve que estudiantes de primer año de edades entre 14 y 15 años del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional de un colegio privado en el Perú movilizan la noción de función cuadrática, se trabajó en un aula de clase y equipos como computadoras portátiles, calculadoras de pantalla gráfica, proyector con conexión a Internet. El aspecto teórico de referencia se construyó a partir de la Génesis Instrumental (la instrumentación y la instrumentalización) y la Orquestación Instrumental (Configuración Didáctica, Modo de Ejecución y Desempeño Didáctico). Esta Investigación fue de corte cualitativo y, en ella, participaron nueve estudiantes del curso Matemática Nivel Superior.

En ese sentido, la secuencia de actividades fue diseñadas para trabajarlo en forma individual y colectiva, bajo la mediación de la calculadora de pantalla gráfica, los cuales permitieron a los estudiantes realizar conjeturas sobre la noción de función cuadrática en relación a las traslaciones horizontales y verticales al construir un esquema de utilización, ya sea en su dimensión privada (individual) y dimensión social (colectivo).

Asimismo, el desarrollo de las actividades permitió evidenciar los esquemas de uso, ya que los estudiantes realizaron cambios en algunos elementos del objeto función cuadrática al lograr la transformación de la representación gráfica a través de los esquemas de utilización del artefacto, como la calculadora de pantalla gráfica.

También estas actividades permitieron evidenciar en los estudiantes la instrumentalización, al mostrar diferentes acciones al desarrollar la secuencia de actividades a través del uso de diferentes comandos de la calculadora de pantalla gráfica, configurándose, de este modo, esquemas de acción colectiva instrumentada. Todo esto favorece también a las fases de Modo de ejecución y desempeño didáctico de la Orquestación Instrumental, cuando el docente interviene para orientar a los estudiantes, en el desarrollo de la actividad.

Algunas de las dificultades que mostraron los estudiantes se relacionan con los conocimientos previos sobre el objeto matemático, específicamente con las condiciones de los parámetros h y k para determinar el sentido de la traslación vertical y horizontal, así como también se evidenció el desconocimiento operativo de algunos comandos de la calculadora de pantalla gráfica para mostrar la representación gráfica de un objeto en diferentes escalas. Este tipo de acciones dieron paso a la actuación del docente, como parte de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, puesto que le permite realizar algunas modificaciones o incluir otras actividades que promuevan en el estudiante el surgimiento de nuevos esquemas de uso

sobre el artefacto (calculadora de pantalla grafica), a la luz de la teoría corresponde a la fase de Desempeño Didáctico, en el cual se evidencia las interacciones entre el docente, los estudiantes y el artefacto para dar solución a un problema o situación propuesta.

Para identificar los elementos y determinar las traslaciones de la función cuadrática, los estudiantes utilizaron cálculos algebraicos e hicieron uso del artefacto (calculadora de pantalla gráfica) a través de comandos que les permitieron el ingreso de expresiones matemáticas (regla de correspondencia de la función cuadrática) y luego, a partir de la combinación de los comandos F3 y EXE, pudieran obtener y observar la representación gráfica de la función cuadrática.

Estas acciones nos muestran la instrumentación, por parte de los estudiantes, con relación al artefacto, ya que lo utilizaron no solo para dar respuesta a una situación propuesta, sino que también lo utilizaron para validar sus conjeturas.

A continuación, mencionaremos las consideraciones finales con respecto a nuestros objetivos específicos propuestos en la investigación.

Con respecto a nuestro primer objetivo específico, **"Identificar, en las acciones de los estudiantes, los esquemas de los estudiantes al manipular la calculadora gráfica en el desarrollo de la secuencia de actividades sobre la función cuadrática."**, podemos mencionar que si se logró realizar el objetivo propuesto, puesto que en las acciones de la dupla **D2**, conformada por los estudiantes Oscar y Henry, se evidencio el uso de sus esquemas de acción colectiva instrumentada ya que realizaron la representación gráfica de la función cuadrática al hacer uso de teclas específicas que les permitan ingresar las reglas de correspondencia solicitadas en la secuencia de actividades correspondientes a la calculadora de pantalla gráfica, así mismo los estudiantes para responder las preguntas con respecto a las nociones de función cuadrática ( identificar elementos de la función cuadrática) y realizar conjeturas sobre las traslaciones horizontal y vertical de las funciones cuadráticas a partir de los valores que ellos le asignan a las constantes $a, h\ y\ k$ , realizaron coordinaciones entre los esquemas de uso individual correspondientes a las nociones sobre funciones cuadráticas y lograr concertar para emitir una respuesta en coordinación de ambos y lograr de esta manera establecer esquemas de acción colectiva instrumentada.

Esto se puede comprobarse por ejemplo en la pregunta 1 de la actividad1, en la solución de los estudiantes de la dupla **D2**, como se puede observar en las figuras 42 y 43 (página 69).

Con respecto al segundo objetivo específico, ***"Analizar, en la fase modo de ejecución de la Orquestación Instrumental, las acciones de los estudiantes al movilizar la noción de función cuadrática."*** Tanto en la actividad exploratoria como en la actividad 1, las preguntas

fueron diseñadas para que los estudiantes a través del uso de la calculadora de pantalla gráfica, al seguir procedimientos indicados por el docente como gestor y orquestador de la clase, puedan establecer conjeturas a partir de las representaciones gráficas observadas en la pantalla de su calculadora.

En el desarrollo de las actividades, los estudiantes realizaron la representación gráfica de la función cuadrática a partir de ello, identificaron los interceptos con el eje X y el eje Y, el dominio y rango de la función, realizaron cambios en los valores de la constante *"k"* en la regla de correspondencia de la función cuadrática, realizaron la representación gráfica de cada una de ellas para luego conjeturar para que valores de la constante *"k"* la gráfica se traslada verticalmente hacia arriba o hacia abajo. También realizaron cambios de valores para la constante *"h"* y a partir de las representaciones gráficas obtenidas en la pantalla de su calculadora conjeturen sobre las traslaciones horizontales. Así mismo realizaron conjeturas sobre la concavidad de las funciones cuadráticas. Estas acciones se pueden evidenciar a lo largo del análisis de las producciones de los estudiantes (paginas 69 – 78).

Por último, en nuestro tercer objetivo específico, "**Describir, en la fase desempeño didáctico de la Orquestación Instrumental, las acciones de los estudiantes, luego de las intervenciones y acciones del docente, cuando se desarrolla una secuencia de actividades mediadas por la calculadora gráfica.",** se pudo observar algunas dificultades que mostraron los estudiantes en relación con los conocimientos previos sobre el objeto matemático, específicamente con las condiciones de los parámetros h y k para determinar el sentido de la traslación vertical y horizontal, así como también se evidenció el desconocimiento operativo de algunos comandos de la calculadora de pantalla gráfica para mostrar la representación gráfica de un objeto en diferentes escalas. Este tipo de acciones dieron paso a la intervención y actuación del docente, al realizar algunas modificaciones o incluir otras actividades que promuevan en el estudiante el surgimiento de nuevos esquemas de uso sobre el artefacto (calculadora de pantalla grafica), a la luz de la Orquestación instrumental corresponde a la fase de Desempeño Didáctico, en el cual se evidencia las interacciones entre el docente, los estudiantes y el artefacto para dar solución a un problema o situación propuesta, como por ejemplo cuando el docente interviene para mostrar un ejemplo sobre la ampliación o reducción de escala de una representación de la función cuadrática.

Al lograr los objetivos específicos de la investigación, podemos afirmar que se logró realizar el objetivo general:

***"Analizar cómo una Orquestación Instrumental, en la que la calculadora gráfica es un mediador, promueve que estudiantes de primer año del Programa de Diploma del***

***Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática"*** y por ende se pudo responder a la pregunta de investigación:

***¿Cómo una Orquestación Instrumental, en el que la calculadora gráfica es un mediador, promueve que estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática?***

En ese sentido, para responder la pregunta de investigación podemos afirmar que la Orquestación Instrumental mediante la mediación de la calculadora de pantalla gráfica en el desarrollo de la secuencia de actividades fue importante para la investigación, ya que todo ello, favoreció la movilización de esquemas de utilización de la calculadora gráfica al desarrollar actividades sobre función cuadrática referidas a la identificación de los elementos y las traslaciones de la función. Puesto que, al evidenciarse las fases de la Orquestación Instrumental, principalmente la fase de modo de ejecución y el desempeño didáctico, ellas permitieron que los estudiantes generen los esquemas de acción colectiva instrumentada al desarrollar la actividad propuesta, así como también la instrumentalización del artefacto la calculadora gráfica. Por ello, afirmamos que es importante la Orquestación Instrumental en el diseño de actividades mediadas por la calculadora gráfica ya que permiten al estudiante interactuar con el objeto matemático y de esta manera lograr la instrumentación para el desarrollo de sus esquemas de utilización.

**Perspectivas futuras**

Pensamos que la investigación presentada debe ser ampliada y aplicada en las acciones realizadas por el docente cuando diseña y desarrolla actividades de aprendizaje, tanto en estudiantes de educación secundaria, pre grado y en formación de docentes con el uso de artefactos, como lo es la calculadora de pantalla gráfica, ya que esta tecnología permite al estudiante realizar conjeturar sobre características y propiedades de los objetos matemáticos al igual que el GeoGebra, ya que no necesita la conexión a internet, es de fácil portabilidad y permite desarrollar un modo de ejecución y un buen desempeño didáctico, con la finalidad de que, en el futuro, se incluya el uso de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje en el campo de las Matemáticas.

En ese sentido es importante señalar que trabajar en clase, actividades mediadas por la tecnología permite que los estudiantes interpreten y articulen distintas representaciones del objeto matemático en estudio y los relacione con sus esquemas de uso para emitir una conjetura que pueda ser válida o no. Así mismo, cabe resaltar la interacción entre el docente y los estudiantes, es más dinámica y activa en el desarrollo del aprendizaje.

Por otro lado, creemos que se podría trabajar con otros objetos matemáticos, como funciones polinómicas, trigonométricas, optimización a través de las derivadas, áreas y volumen de cuerpos geométricos a través del cálculo integral, mediadas por algún tipo de tecnología para analizar las fases de la Orquestación Instrumental.

# REFERENCIAS


Álvarez, R. (2012). *Incidencia de las mediaciones pedagógicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática*. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http:// http://bdigital.unal.edu.co/9102/1/8410501.2012.pdf

Briceño, O. A., y Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* (45), 65-83. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/viewFile/656/1189

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F., y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (41), 20-38. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo1.pdf

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. *et al.* The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educ Stud Math* **75,** 213–234 (2010). Recuperado de https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

García-Cuéllar, D. J. (2018). Enfoques Teóricos en Investigación con Tecnología en Educación Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31 (2) 1405-1406. Recuperado de https://clame.org.mx/uploads/actas/alme31_2.pdf

Guía de Matemáticas NS (2014). *Programa del Diploma Guía de Matemática NS*. Ginebra, Suiza. Recuperado de https://resources.ibo.org/dp/subject-group/Mathematics-SL/resource/11162-occ-file-d_5_matsl_gui_1203_1_e/data/d_5_matsl_gui_1203_2_s.pdf

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. D. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). México D.F., México: McGraw-Hill/Interamericana.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5º de secundaria.* (Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/755/browse?

James, S., (2010). *Cálculo de una variable conceptos y contextos,* México DF, México: Cengage Learning Editores, S. A. de C.V.

James, S., Lothar, R. y Saleem, W. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. México DF, México: Cengage Learning Editores, S. A. de C.V.

Malaspina, U., y Medina N. (2014). GeoGebra y conjeturas. Casos con la función cuadrática. *Revista sobre Docencia Universitaria 4*(2), 7–11. Recuperado de http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/8929/9337

Monje A. (2011). *Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa*. Colombia. Recuperado de: www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf.

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática,* Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación matemática Thales.

Orosco, J., Cuevas, A., Madrid, H. & Trouche, L. (2019). Una propuesta para la enseñanza de valores y vectores propios en un primer curso de álgebra lineal para estudiantes de Ingeniería a través de una Orquestación Instrumental. *REDIEM*. Volumen (1): 5 – 8. Recuperado de http://148.217.50.37/index.php/REDIEM/article/view/558/505

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria.* Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies : une approche cognitive des instruments contemporains.* Université Paris. Armand Colin. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr>hal-01017462>document

Rabardel, P. (2011) *Los hombres y las tecnologías visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* Edición traducida

Ruiz, J. (2010). *Una Secuencia didáctica desde la Orquestación Instrumental: la función cuadrática en Grado Noveno de Educación Básica*. Encuentro Colombino de Matemática Educativa. 582-590. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1133/1/582_Una_Secuencia_Didctica_desde_la_Orquestacin_Asocolme2010.pdf

Salazar, J. V. F. (2015). Génesis Instrumental*:* El caso de la función cuadrática*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (41), 57-67. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo3.pdf

Suárez-Restrepo, L. F. & Castro-Gordillo, W. F. (2017). Génesis instrumental en el proceso de aprendizaje: el software wxMaxima y la función polinómica*. Revista Virtual Universidad*

*Católica del Norte*, 50, 106-125. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/815/1333

Thomas, G., (2006). *Cálculo una variable. Undécima edición,* México: Pearson Educación de México, S. A. de C.V.

Trouche L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A Rapid Evolution of Tools, with Differential Effects. In: Guin D., Ruthven K., Trouche L. (eds). The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library, vol 36. Springer, Boston, MA. Recuperado de: https://link.springer.com/chapter/10.1007/0-387-23435-7_2

Trouche, L. (2005). Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Didactique des mathématiques* v. 25, pp. 91-138, 2005.

Trouche, L. y Drijvers, P. (2014). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, Vol 33, Issue 3, pp. 193–209, Recuperado de: https://doi.org/10.1093/teamat/hru014

Vergnaud, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Didactique des Mathemátiques,* 10(23): pp. 133–170. Recuperado de : https://www.scirp.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkposzje))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1850123

# ANEXOS

| Estudiante | Grado | Fecha |
|---|---|---|
| | | 30/10/19 |

**Anexo 1.**

## ACTIVIDAD EXPLORATORIA

1. Considere las siguientes representaciones gráficas de funciones cuadráticas.

Gráfico 1.

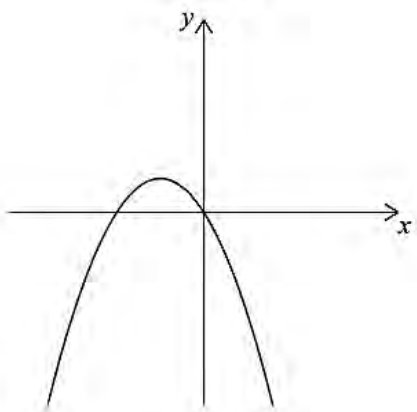



Gráfico 2.

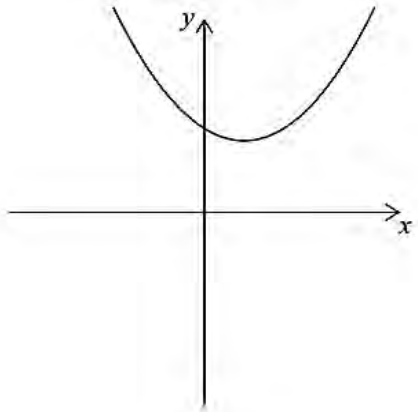



Gráfico 3.

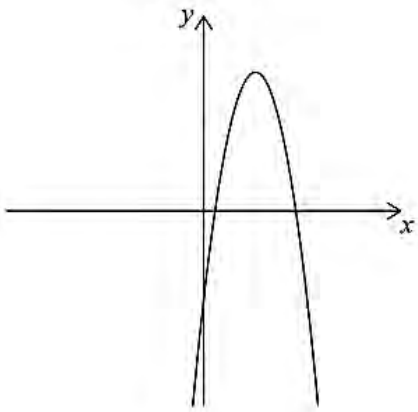
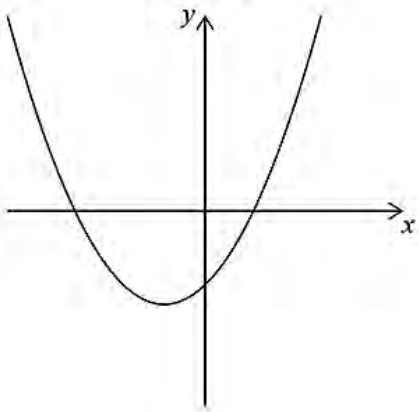



Gráfico 4.




La ecuación de cada una de esas funciones cuadráticas se puede escribir de la forma:

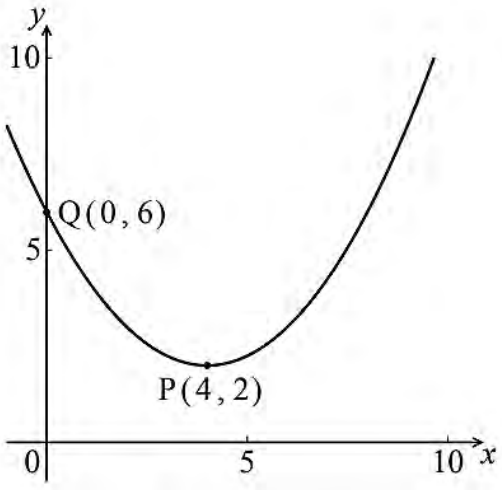
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad donde\ a \neq 0.$$

En la siguiente tabla, cada conjunto de condiciones referidas a las constantes $a, b\ y\ c$ corresponde a uno de los gráficos de la página anterior.

a) Escriba el número del gráfico correspondiente junto a cada conjunto de condiciones.

| Condiciones | Número del gráfico (justifica tu respuesta) |
|---|---|
| $a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0$ | |
| $a < 0, \quad b > 0, \quad c < 0$ | |
| $a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0$ | |
| $a < 0, \quad b < 0, \quad c = 0$ | |

2. Sea $f$ una función cuadrática. A continuación, se muestra una parte de la gráfica de $f$ .



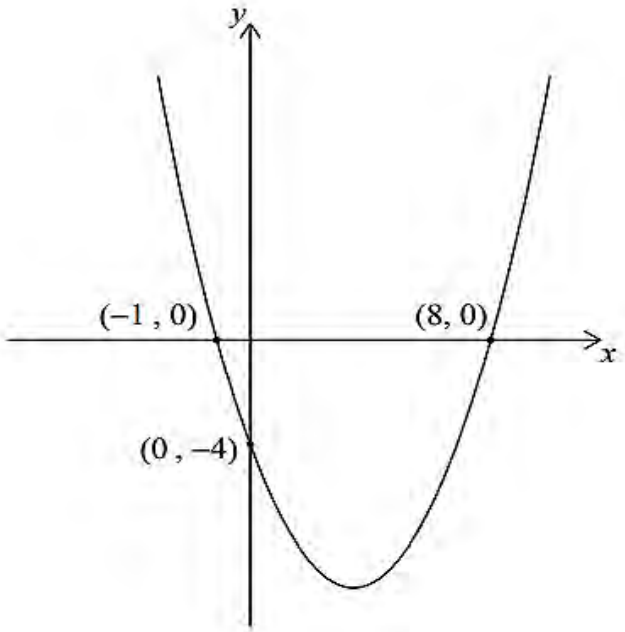

El vértice está en $P\ (4, 2)$ y la intersección con el eje $y$ se encuentra en $Q\ (0, 6)$ .

(a) Escriba la ecuación del eje de simetría.

La función $f$ se puede escribir de la forma $f\ (x)\ =\ a(\ x-h)^2+k$ .

(b) Halle el valor de $h, k\ y\ a$. Explique su proceso.

3. Considere la función $f(x)\ =\ a\ (x\ -\ p)(x\ -\ q)$, que se muestra en la siguiente representación gráfica.




(a) Halle la ecuación del eje de simetría.

(b) Halle el valor de $a$. Justifique su proceso.

(c) Halle la función $f$ de la forma $f\ (x) = \ ax^2 + bx + c$. Justifique su proceso y luego determine los valores de $a, b\ y\ c$.

**Anexo 2.**

## ACTIVIDAD 1

1. Realice la representación gráfica de las siguientes funciones cuadráticas mediante el uso de la calculadora de pantalla gráfica.

a) $f(x) = x^2$

Luego, observa la representación gráfica en la pantalla de la calculadora y responda:

i) Escriba los interceptos con el eje x e y, el dominio y el rango de la función.

**b)** $(x) = x^2 + k, \ \ donde\ k \in \mathbb{R}$.

i) Realice representaciones para diferentes valores de $k$ ¿Cuáles son las diferencias o semejanzas entre las representaciones gráficas obtenidas? Expliquen.

ii) Para todos los valores de $k$, ¿Las representaciones gráficas realizan una traslación vertical? Justifiquen su respuesta.

**c)** $f(x) = (x - h)^2, \ \ donde\ h \in \mathbb{R}$.

i) Realice representaciones para diferentes valores de $h$ ¿Cuáles son las diferencias o semejanzas entre las representaciones gráficas obtenidas? Expliquen.

ii) Para todos los valores de $h$, ¿Las representaciones gráficas realizan una traslación horizontal? Justifiquen su respuesta.

**d)** $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ \ donde\ a,\ h\ y\ k \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

i) Realice representaciones gráficas para cualquier valor de $a,\ h\ y\ k$.

¿Qué tipos de traslaciones observas? Justifiquen su respuesta.

ii) De acuerdo a las preguntas anteriores y las gráficas obtenidas, ¿Qué se puede conjeturar sobre la concavidad, el vértice y los interceptos con los ejes? Justifiquen su respuesta.

2. A continuación, se tiene la función $f(x) = x^2 - 6x - 7$.

i) Haciendo uso de la calculadora gráfica, realice la representación gráfica de $f$.

Luego, observa y responda las siguientes preguntas.

ii) ¿Cuáles son los interceptos de la representación gráfica de $f$ con el eje $x$ $e$ y?

iii) Escribe la función $f$ de la forma $f(x) = (x - h)^2 + k$, donde $(h, k)$ es el vértice. Justifiquen su proceso.

iv) A partir de la representación gráfica de la función $f$, realice una traslación mediante el $vector\ \binom{-3}{6}$ y represente gráficamente la nueva función cuadrática, denominándolo como función $g$ .

Luego, observa y responde: ¿Qué sucede con la representación gráfica de la función $g$ con relación a la función $f$?

v) Escribe las coordenadas del vértice de la representación gráfica de la función $g$.

vi) Determina la regla de correspondencia de la función $g$. Explique su proceso.