PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

EI CASO 0.999...=1 EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: UN ESTADO DEL ARTE DESDE EL ANÁLISIS NO-ESTÁNDAR

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Luis Fernando Lam Pimentel

ASESOR

Elvis Bustamante Ramos

Agosto, 2020

RESUMEN

El análisis no-estándar es una formalización rigurosa del cálculo de Leibniz en la que se definen conceptos clave del cálculo mediante infinitesimales, entre otras nociones. Se trata de un análisis menos difundido que el análisis estándar que usualmente se enseña y que está basado en definiciones epsilon-delta. En ausencia de supuestos del análisis estándar, el símbolo 0.999... es ambiguo y es factible hacer una lectura no-estándar del mismo en donde 0.999...<1. Se postula que en investigaciones realizadas sobre el caso 0.999...=1 los estudiantes pueden no estar familiarizados con los supuestos del análisis estándar necesarios para hacer una lectura estándar de la igualdad 0.999...=1. En ausencia de esos supuestos se hace posible que algunos estudiantes hagan una lectura a partir de concepciones distintas al análisis estándar y próximas al análisis no-estándar, de modo que su rechazo a la igualdad 0.999...=1 podría tener justificación. Esta posibilidad hace necesario un estado del arte, entendido como una investigación con base documental de carácter crítico-interpretativo, en donde se revise investigaciones previas sobre el caso 0.999...=1 tomando de referente el análisis no-estándar. Lo que se busca es evidenciar limitaciones, tanto en los análisis de las concepciones de los estudiantes -ofreciendo análisis alternativos dentro de lo posible- como en los procedimientos empleados para promover la aceptación de la igualdad 0.999...=1. Esto contribuiría a comprender la resistencia que se observa en algunos estudiantes a la igualdad aludida y la ineficacia de algunos procedimientos utilizados para enseñarla. Los resultados muestran la presencia de concepciones similares a las no-estándar en participantes de investigaciones previas a lo largo de varias décadas. También se muestra cómo algunos de los procedimientos utilizados para promover la aceptación de la igualdad 0.999...=1 pueden perder eficacia al ser sujetos a una lectura no-estándar. Se postula la necesidad de considerar las implicancias del análisis no-estándar en futuras investigaciones.

Palabras clave: 0.999..., análisis no-estándar, concepciones

ABSTRACT

Nonstandard Analysis is a rigorous formalization of Leibniz's calculus in which key calculus concepts are defined by means of infinitesimals, among other notions. It is a less known analysis than the Standard Analysis usually taught, based on epsilon-delta definitions. In the absence of presuppositions from Standard Analysis the symbol 0.999… is ambiguous and it is feasible to do a nonstandard interpretation of it in which 0.999...<1. It is postulated that in research on the case of 0.999...=1 students may not be familiarized with presuppositions of Standard Analysis needed to do a standard interpretation of the equality 0.999...=1. In the absence of such presuppositions it is possible for some students to make an interpretation based on conceptions different from Standard Analysis and that are close to Nonstandard Analysis, making justifiable their rejection of the equality 0.999...=1. This possibility makes it necessary to conduct a state of the art, understood as a document-based investigation of critical and interpretive character, in which previous research on the case of 0.999...=1 is revised, taking Nonstandard Analysis as a reference. The aim is to pinpoint limitations in the analysis of student conceptions -offering alternative analysis when possible- and in procedures employed to promote acceptance of the equality 0.999...=1. This would contribute to an understanding of the resistance observed in some students to said equality, and the inefficacy of certain procedures used to teach it. Results show the presence of conceptions similar to nonstandard ones in participants of previous research throughout the decades. It is also shown how some procedures used to promote acceptance of the equality 0.999...=1 may lose efficacy when submitted to a nonstandard interpretation. The necessity to consider the implications of Nonstandard Analysis in future research is postulated.

Keywords: 0.999..., nonstandard analysis, conceptions

DEDICATORIA

Para Ana Paula, mi compañera en la vida, por su paciencia, su amor y su apoyo sin condiciones.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Elvis Bustamante, mi asesor, y a los profesores Cecilia Gaita y Francisco Ugarte, por su apoyo y guía en este proceso.

A los profesores de la maestría, quienes en múltiples formas contribuyeron con mi formación.

A mis compañeros de la maestría, con especial mención para Walter Gonzáles y Morella Théry, por su apoyo y trabajo en estos años y por las lecciones que hemos construido.

A mi querida Ana Paula, sin cuyo amor y soporte no estaría en este camino.

ÍNDICE

Pag.

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

El estudio de las dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje del análisis y el cálculo ha sido, desde hace varias décadas, uno de los campos desarrollados en la didáctica de las matemáticas. Durante ese periodo, se han realizado numerosas investigaciones relacionadas a diversos objetos y nociones, como los números reales, límites, funciones, continuidad, derivadas, integrales, etc., para las cuales se han empleado diversas herramientas teóricas que la didáctica de las matemáticas ha ido ofreciendo a lo largo de su evolución (recuentos de esto pueden encontrarse en Artigue (1991), Artigue (1995), y Oktaç y Vivier (2016)). De este modo, los trabajos acumulados han permitido mejorar nuestra comprensión de las dificultades y retos que implica para los alumnos el aprendizaje del análisis o el cálculo, así como han podido sustentar propuestas que contribuyan con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones relacionadas.

Entre los diversos fenómenos estudiados, y siendo el foco del presente trabajo, se encuentra el caso de la igualdad $0.999... = 1$. Desde hace varias décadas se ha reportado que muchos estudiantes rechazan dicha igualdad, planteando más bien la desigualdad estricta $0.999... < 1$, a menudo apelando a una diferencia infinitesimal incluso a pesar de mostrárseles demostraciones de lo contrario (cf. Sierpińska, 1987). El estudio de este caso ha conducido a plantear explicaciones de dicho rechazo (por ejemplo, Dubinsky et al. 2005), así como diversas propuestas de instrucción para promover una aceptación de la igualdad $0.999... = 1$, denominada *evaluación unital* del símbolo $0.999...$ por Katz y Katz (2010b). No obstante, y como ha ocurrido en el estudio de muchos temas del cálculo o análisis, ocurre que varias de las investigaciones en torno a este caso se han realizado tomando como punto de referencia matemático lo que se conoce como "análisis estándar". Este hecho podría tener repercusiones en la manera en que se ha comprendido el rechazo de los estudiantes a la evaluación unital aludida.

En este capítulo se presentan algunas nociones clave del análisis no-estándar, no sin antes recomendar una lectura del apéndice adjunto al final de este trabajo, en el cual se exponen con más detalle algunos elementos matemáticos fundamentales. Una vez terminada la presentación del análisis no-estándar se hará una presentación de su evolución histórica, así como de su historia en la enseñanza, sin lo cual será difícil comprender la naturaleza de su existencia en simultáneo con el análisis estándar y lo que ello implica para las investigaciones en la didáctica del análisis y el cálculo (y en particular, para el caso $0.999... = 1$). Esto cobra especial importancia a la luz de nuevos trabajos sobre la historia del análisis, en donde se pone en cuestión la historia tradicional y se plantea una historia “dual” del análisis. Esto quiere decir, como se verá, que la evolución del análisis recorrió dos vías paralelas, una de ellas conduciendo al análisis estándar y la otra al análisis no-estándar (Borovik y Katz, 2012).

Después de la revisión histórica se desarrollan las implicancias específicas del análisis no-estándar en relación a la igualdad $0.999...=1$ y se muestra cómo seria posible justificar una desigualdad estricta $0.999...<1$. Se muestra también que las implicancias del análisis no-estándar son más que una posibilidad teórica, al presentar evidencia de concepciones no-estándar en estudiantes, en ocasión del caso $0.999...=1$.

Este capítulo culmina con la justificación del presente trabajo y con la presentación de la pregunta y objetivos de investigación que lo guían.

1.1 Antecedentes

Al hablar de análisis estándar nos referimos al análisis construido sobre definiciones epsilon-delta, las que se utilizan para definir nociones clave como continuidad, derivada, integral, convergencia, etc. Esta versión del análisis es la más conocida y fue resultado de los esfuerzos llevados a cabo a fines del siglo XIX para formalizar el cálculo sin tener que recurrir a los infinitesimales (Vinsonhaler, 2016). Sin embargo, como se verá con detalle, no se trata de la única manera de formalizar el cálculo. En efecto, existe una alternativa llamada “análisis no-estándar”, producto del trabajo de Abraham Robinson en los 60’s, que permite dar un fundamento riguroso al cálculo de Newton y Leibniz. Este análisis no-estándar, como muestran los trabajos de Borovik y Katz (2012) y Błaszczyk, Katz y Sherry (2013), no es simplemente una curiosidad aislada: es, por el contrario, uno de los eslabones más recientes de una cadena evolutiva que transcurrió en paralelo al desarrollo del análisis estándar y que no requirió una eliminación de los infinitesimales. En particular, bajo ciertas condiciones que se detallan luego, el análisis no-estándar permitiría establecer una desigualdad estricta entre $0.999\ldots$ y 1, lo que tiene implicancias para la comprensión del caso objeto del presente trabajo.

1.1.1 Análisis estándar y no-estándar

Se denomina análisis no-estándar al análisis basado en los números hiperreales, mientras que el análisis conocido se denomina estándar. El origen de la denominación, según Keisler (2012), se debe a que:

> Since Skolem's infinite hyperintegers are usually called nonstandard integers, Robinson called the new subject "nonstandard analysis". (He called the real numbers "standard" and the other hyperreal numbers "nonstandard". This is the origin of the name "standard part") (p.904).

En análisis no-estándar se utilizan los números hiperreales -en particular los infinitesimales- para definir conceptos como continuidad, derivada, integral, etc., conceptos que en análisis estándar se basan en definiciones epsilon-delta de la noción de límite. Para ilustrar las diferencias presentamos la definición de continuidad de una función en un punto, en sus versiones estándar y no-estándar. Antes de continuar, debe señalarse que esta breve ilustración del análisis no-estándar se basa en la presentación simplificada que hace Keisler (2012), donde se consideran dos axiomas adicionales a los axiomas conocidos de los números reales: el *axioma de extensión* y el *axioma de transferencia*. Estos axiomas, junto con las definiciones de "infinitamente próximo a" (que se denota ≈), "infinitesimal", "parte estándar" (denotada st), etc., se detallan en el apéndice adjunto al final de este documento. Los lectores que estén familiarizados con el análisis no-estándar pueden continuar con la lectura; a los lectores que no, se les recomienda revisar el apéndice referido antes de continuar.

Existen construcciones más rigurosas del análisis no-estándar aparte de la versión simplificada que aquí usamos, como la original de Robinson (1996) o la ofrecida por Nelson (1977), pero éstas escapan a los propósitos del presente trabajo. Aclarado esto, consideremos los siguientes ejemplos.

En análisis estándar, decir que una función f es continua en un punto a de su dominio equivale a decir que:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, ; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

En análisis no-estándar esto se expresa diciendo que:

$x \approx a \Rightarrow f(x) \approx f(a)$ (i.e., si x es infinitamente próximo a a, entonces $f(x)$ es infinitamente próximo a $f(a)$).

Esto es equivalente a:

$x-a=\delta \Rightarrow f(x)-f(a)=\varepsilon$ (i.e., si la diferencia entre x y a es infinitesimal, entonces la diferencia entre $f(x)$ y $f(a)$ es infinitesimal).

Ejemplos análogos pueden darse para los demás conceptos clave del cálculo. La diferencia no sólo radica en una escritura más intuitiva o con menos cuantificadores, sino en que el análisis basado en infinitesimales permite realizar cómputos y demostraciones más simples, así como desarrollar los conceptos de manera más intuitiva pero sin perder rigor (Artigue, 1991; Artigue, 1995). Błaszczyk, Katz y Sherry (2013) discuten las diferencias de las definiciones basadas en infinitesimales e indican que, mientras que en la versión estándar o epsilon-delta se trabaja "hacia atrás" desde el valor del límite, en la versión no-estándar se puede partir de la expresión original para calcular el límite. Resaltan que en la versión epsilon-delta, y de manera contraintuitiva, el delta corresponde a la variable independiente aunque el valor del mismo depende del epsilon, el cual se asocia a la variable dependiente. Esto se puede ilustrar con un ejemplo sencillo:

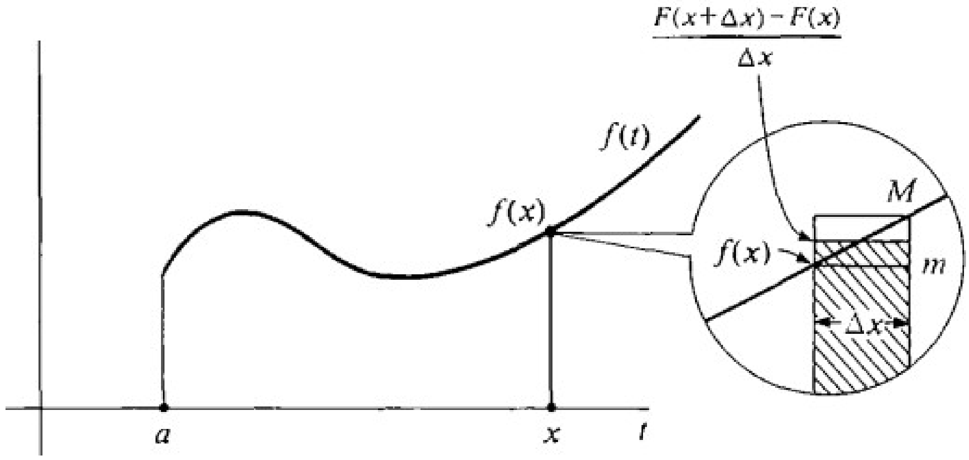
Supongamos que queremos probar que la función $f(x)=x^3+1$es continua en $x=0$. En análisis estándar tendríamos que encontrar un $\delta>0$ de modo que $|x-0|<\delta \Rightarrow |(x^3+1)-1|<\varepsilon$, para ε arbitrario. Podemos escribir $-\varepsilon<x^3<\varepsilon \Rightarrow -\sqrt[3]{\varepsilon}<x<\sqrt[3]{\varepsilon}$. Luego, basta tomar $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}$ y constatar que $|x-0|<\sqrt[3]{\varepsilon} \Rightarrow |(x^3+1)-1|<\varepsilon$. Vemos entonces la necesidad de partir del final y "retroceder" para poder encontrar el δ. En análisis no-estándar podemos proceder en la otra dirección:

Partimos de $x\approx 0$, de donde se tiene que $x-0=x=\delta$ es infinitesimal. Luego, vemos que $f(x)=(\delta)^3+1=(\delta)^3+f(0)$. Se tiene así que $f(x)-f(0)=(\delta)^3$. Como $(\delta)^3$es infinitesimal, resulta que $f(x)\approx f(0)$, lo que demuestra que la función es continua en el punto requerido.

Del mismo modo, los teoremas conocidos pueden trabajarse rigurosamente pero de manera intuitiva, como lo expone Keisler (2012), en donde se observa además una relación clara entre la notación histórica y los conceptos. Por ejemplo, históricamente la expresión $\int_a^b f(x)dx$ representaba la suma de infinitos rectángulos de base infinitesimal dx y altura $f(x)$, donde el signo $\int$ era una "S" alargada, de la palabra "suma" (Stillwell, 2010). En particular, en el texto de Keisler (2012), luego de algunos teoremas necesarios, se ilustra el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) así:

Figura 1

Teorema Fundamental del Cálculo



Fuente: Keisler (2012, p.196)

Donde $m=f(x)$ y $M=f(x+\Delta x)$, siendo la expresión "Δx" utilizada para indicar un incremento infinitesimal de x. Tenemos que $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$ es el área de una tira trapezoidal de grosor infinitesimal $\Delta x=dx$ (por lo que dicha área equivale al área de un rectángulo de igual grosor pero con altura $\frac{m+M}{2}$) y de altura infinitamente próxima a $f(x)$.

Vemos que $m\Delta x\leq F(x+\Delta x)-F(x)\leq M\Delta x$, de modo que $m\leq\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\leq M$. Como $f$es continua en x, se tiene que $x\approx x+\Delta x\Rightarrow m=f(x)\approx f(x+\Delta x)=M$, por lo que m y Mson infinitamente próximos a $f(x)$ y por ende $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\approx f(x)$. Como $st(\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x})=F'(x)$, que es la definición de derivada en análisis no-estándar, se concluye que $F'(x)=f(x)$.

Luego de esta breve presentación del análisis no-estándar procedemos a desarrollar su historia. Esto permitirá comprender la singular situación que supone la existencia de éstos dos análisis en simultáneo, cuyas implicancias para la didáctica de las matemáticas y para el caso $0.999...=1$ se desarrollan luego.

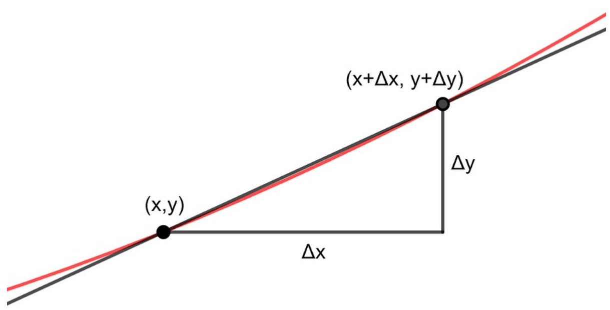
1.1.2 Historia del análisis no-estándar

Dado que el análisis no-estándar se construye a partir de los hiperreales (en particular, los infinitesimales), debemos remontarnos a la evolución de éstos últimos para entender la evolución de aquél. Sabemos que los infinitesimales remontan su historia hasta por lo menos la grecia antigua. Según Vinsonhaler (2016), los infinitesimales fueron utilizados por Arquímedes alrededor del año 200 a.c., bajo la forma de lo que luego se conoció como el "método de los indivisibles", para derivar la relación entre el volumen de una esfera y los volúmenes de un cilindro circular recto y de un cono circular recto. Este resultado fue publicado utilizando como fundamento el método de exhaución de Eudoxo, aunque Arquímedes se valiera primero de infinitesimales para obtener sus resultados.

Más adelante, en el siglo XVII se llevan a cabo cuestionamientos sobre la validez de los infinitesimales, en particular por parte de jesuitas. Esto no eliminó a los infinitesimales pero los hizo más controversiales. No obstante, pensadores como Newton y Leibniz se apoyaron en los infinitesimales para desarrollar el cálculo, siendo sus métodos utilizados posteriormente, en el siglo XVIII, por matemáticos como Euler (Moreno-Armella, 2014; Vinsonhaler, 2016). A manera de ejemplo, Moreno-Armella (2014) cuenta que Leibniz concebía el cálculo de la tangente bajo la idea de dibujar una línea que conecta dos puntos de una curva, estando dichos puntos a una distancia infinitesimal (ver Figura 2).

Figura 2

Tangente según Leibniz



Adaptado de: Moreno-Armella (2014, p.622)

Otra manera era considerar una curva como un polígono de infinitos ángulos e infinitos lados de longitud infinitesimal, tomándose la tangente como la prolongación de uno de dichos lados.

La historia conocida es que durante éstas épocas la noción de infinitesimal comienza a ser objeto de ataques. El más célebre de dichos ataques se manifestó en 1734, con un trabajo del obispo George Berkeley de la iglesia católica (Kanovei et al., 2014; Vinsonhaler, 2016), quien criticó lo que percibió como una incoherencia de los infinitesimales (e.g., considerar dx como distinto de cero para establecer, por ejemplo, el cociente $\frac{dy}{dx}$, pero luego tratar dx como cero al descartar términos), y los acusó de ser misticismo metafísico (Błaszczyk, Katz y Sherry, 2013). Se cuenta que más adelante, a inicios del siglo XIX, la aparición de resultados contradictorios servirían de motivación para que matemáticos como Cauchy y Bolzano busquen ofrecer demostraciones que no hicieran uso de infinitesimales. Esto culminaría en los años 60 del siglo XIX con las definiciones epsilon-delta de Weierstrass, momento en que los matemáticos abandonaron el uso de los infinitesimales por completo (Vinsonhaler, 2016).

Recientemente, esta perspectiva de la historia del cálculo ha sido sometida a revisión. Por ejemplo, Błaszczyk, Katz y Sherry (2013) cuestionan la idea de que los fundadores del cálculo no tuvieran un sistema numérico adecuado para fundamentar sus ideas. Ellos presentan el trabajo de matemáticos anteriores a Newton y Leibniz, como Stevinus, cuyo enfoque podría considerarse un sistema numérico satisfactorio como fundamento del cálculo, visto en su contexto histórico. También someten a examen los ataques de Berkeley, encontrando sus argumentos inadecuados. Los mismos autores, junto con Borovik y Katz (2012) y Tall y Katz (2014), cuestionan la creencia de que los trabajos de Cauchy anticiparon definiciones epsilon-delta del límite y postulan más bien que éste personaje histórico incluía en sus trabajos nociones próximas a los infinitesimales. De manera similar, la idea de que los infinitesimales fueron desterrados de la comunidad matemática por los trabajos de personajes como Weierstrass es puesta en duda al demostrarse una cadena de trabajo matemático vinculado a los infinitesimales. Esta se ilustra en la Tabla 1.

Tabla 1

Línea de tiempo de los infinitesimales modernos desde Cauchy hasta Nelson

Año	Autor	Contribución
1821	Cauchy	Definición infinitesimal de continuidad
1827	Cauchy	Función delta infinitesimal
1829	Cauchy	Definió "orden de infinitesimal" en términos de tasa de crecimiento de funciones
1852	Björling	Trató con la convergencia en puntos "infinitamente cerca" al límite
1853	Cauchy	Clarificó hipótesis del "teorema de suma" requiriendo convergencia en puntos infinitesimales
1870-1900	Stolz, du Bois-Reymond, Veronese, y otros	Sistemas numéricos enriquecidos con infinitesimales definidos en términos de tasas de crecimiento de funciones
1902	Emile Borel	Elaboración del sistema de du Bois-Reymond
1910	G. H. Hardy	Propuso un fundamento firme a los órdenes de infinito de du Bois-Reymond
1926	Artin-Schreier	Teoría de cuerpos cerrados reales
1930	Tarski	Existencia de ultrafiltros
1934	Skolem	Modelos no-estándar de aritmética
1948	Edwin Hewitt	Construcción ultrapotencia de hiperreales
1955	Łoś	Demostró el teorema de Łoś, anticipando el principio de transferencia
1961, 1966	Abraham Robinson	Análisis no-estándar
1977	Edward Nelson	Teoría interna de conjuntos (Internal Set Theory)

Fuente: Borovik y Katz (2012, p.267), Błaszczyk, Katz y Sherry (2013, p.56)

Según Błaszczyk, Katz y Sherry (2013), la historia tradicional no ha podido visibilizar la existencia de perspectivas alternativas de la historia del cálculo. Ellos plantean que esto se debe a la disposición filosófica particular que ha dominado la historiografía, una disposición enfocada en ontologías poco densas que ha distorsionado sistemáticamente la interpretación del desarrollo de las matemáticas.

Sin perjuicio de las historias discrepantes aludidas, queda el hecho que fue necesario esperar hasta el siglo XX, cuando la lógica matemática estuvo lo suficientemente desarrollada, para que Abraham Robinson pudiera ofrecer un fundamento riguroso -de acuerdo a estándares modernos- de los infinitesimales en su tratado de 1966, *Non-standard Analysis* (Vinsonhaler, 2016). Esta obra supone una continuidad con las intuiciones de Leibniz y las hace más rigurosas (Błaszczyk, Katz y Sherry, 2013), permitiendo construir un análisis formal basado en sus infinitesimales (Katz y Katz, 2010b). Luego, en 1977, Edward Nelson propondría una teoría axiomática paralela a la de Robinson pero basada en un enriquecimiento de los axiomas de Zermelo-Fraenkel (Borovik y Katz, 2012), conocida como Internal Set Theory.

Desde entonces el análisis no-estándar se ha ganado un lugar en la comunidad matemática profesional. Evidencia de ello son publicaciones colectivas como *The Strength of Nonstandard Analysis* (van der Berg y Neves, 2007) o *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician* (Loeb y Wolff, 2015), donde se compilan contribuciones del análisis no-estándar a distintos campos de las matemáticas.

1.1.3 El análisis no-estándar en la enseñanza del cálculo

A partir de los trabajos de Robinson el análisis no-estándar empieza a manifestarse en la esfera de la educación matemática, comenzando por la aparición de textos de cálculo orientados a la enseñanza, siendo uno de los más célebres el libro de 1976 de Jerome Keisler *The infinitesimal Approach to Calculus*, rebautizado en futuras ediciones como *Elementary Calculus: an infinitesimal approach* (Keisler, 2012). Artigue (1991) hace un recuento acerca de las resistencias y el poco impacto que el análisis no-estándar tuvo en relación a la enseñanza, así como sus potencialidades, aunque concluyendo que no se tenía conocimiento sobre las implicancias que podría tener el análisis no-estándar en el aprendizaje de los estudiantes. Consideraciones similares se desarrollan en Artigue (1995), aunque con menos optimismo, destacando que un enfoque tan marginal como el del análisis no-estándar difícilmente podría legitimar una enseñanza a nivel de masas, o que dicho enfoque supone complicaciones matemáticas inherentes que tendrían que ser eventualmente atendidas. No obstante, ella afirma:

> Pero sin duda no sería inútil que los profesores supieran que detrás del lenguaje infinitesimal que utilizan constantemente, de manera imprecisa y a veces con un poco de mala consciencia, en sus explicaciones y comentarios informales, hay un rigor accesible que no tiene nada que ver con la metafísica del infinito (p.134).

El paso de los años no parece haber alterado sustancialmente el papel del análisis no-estándar en la educación. En efecto, a pesar de algunos esfuerzos prometedores para incorporarlo a la enseñanza (cf. Sullivan, 1976; Katz y Polev, 2017), en su trabajo de síntesis Oktaç y Vivier (2016) mencionan que *"[d]espite the promising attempts of its introduction in teaching, non-standard analysis remains marginal"* (p.93).

1.1.4 Implicancias del análisis no-estándar para el caso $0.999...=1$

Habiendo presentado brevemente el análisis no-estándar y su historia podemos retomar lo que se mencionó al inicio y mostrar cómo es posible sustentar la desigualdad estricta $0.999...<1$, desarrollando luego lo que ello implica para la investigación en didáctica de las matemáticas.

Es importante considerar que los estudiantes no siempre son expuestos a la expresión $0.999...$ de manera aislada, sino que esta exposición a veces va acompañada de argumentos a favor de su evaluación unital (i.e., $0.999...=1$). Por ello es que debemos considerar estos argumentos como parte del problema. Hay diversas maneras de fundamentar la evaluación unital, pero nos limitaremos, siguiendo a Katz y Katz (2008), a presentar brevemente un argumento típico:

Se evalúa la fórmula $1+r+r^2+...+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$ tomando $r=\frac{1}{10}$ y se obtiene

$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{10^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}$, que se puede escribir $\overbrace{1.11..1}^{n}=\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}$. Multiplicando por $\frac{9}{10}$ se obtiene $0.\overbrace{999...9}^{n}=\frac{9}{10}(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}})=1-\frac{1}{10^n}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Conforme n incrementa indefinidamente, la fórmula $0.\overbrace{999...9}^{n}=1-\frac{1}{10^n}$ se convierte en $0.999...=1$.

Para aquellos que estén familiarizados con el análisis estándar este argumento es perfectamente razonable. De hecho, no hay error. El problema con este tipo de argumento, y con la expresión $0.999...$, radica más bien en la manera en que son abordados en la enseñanza y en la investigación. En efecto, estos abordajes suelen dejar implícitos muchos supuestos. Como señalan Katz y Katz (2008), los estudiantes pueden ser expuestos a la expresión $0.999...$ sin tener una noción rigurosa de los números reales, sin haber considerado la noción de límite, o sin tener consciencia de las distinciones sutiles que pueden haber entre los números racionales, algebraicos, reales e hiperreales. Del mismo modo, algunas convenciones no son siempre explicitadas. Por ejemplo, en análisis estándar la expresión $0.999\ldots$ es entendida como el límite de la expresión finita $0.\overbrace{999\ldots9}^{n}=1-\frac{1}{10^n}$, conforme n crece indefinidamente. También puede ser vista como el límite de la sucesión $(0.9, 0.99, 0.999, \ldots)$. Análogamente, como indica Richman (1999), puede escribirse $0.999\ldots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots$, refiriéndose la notación del lado derecho tanto a la serie como a su límite (cuando dicho límite existe). Sin estar explícitos estos supuestos, la expresión $0.999\ldots$ resulta ambigua. Es esta ambigüedad la que abre las puertas a la posibilidad, por parte de los estudiantes, de entender dicha expresión en otros términos, como los que supone el análisis no-estándar (Katz y Katz, 2008, 2010a).

Para comprender lo se acaba de mencionar es útil hacer una pequeña digresión y considerar la notación decimal que propuso el matemático Lightstone (1972), que permite representar mejor los números hiperreales. En esta notación, un hiperreal en el intervalo abierto $]0,1[$ se escribe $a=0.a_1a_2a_3\ldots;\ldots a_{H-2}a_{H-1}a_H\ldots$, donde H es un hipernetero infinito. Los dígitos a la izquierda del punto y coma son los dígitos estándar, que corresponden a $st(a)$, la parte estándar de a. En esta notación, como proponen Katz y Katz (2010a), el decimal escrito típicamente como $0.999\ldots$ se escribiría $0.999\ldots;\ldots999\ldots$, que sería distinto de $0.999\ldots;\ldots99\hat{9}$. Esta última expresión corresponde a un decimal con H cantidad de nueves, ocupando el $\hat{9}$ la H-ésima posición decimal. Esta distinción no es trivial, pues se tiene que $0.999\ldots;\ldots99\hat{9}<0.999\ldots;\ldots999\ldots=1$, donde $1-0.999\ldots;\ldots99\hat{9}=0.000\ldots;\ldots00\hat{1}=\frac{1}{10^H}>0$, siendo $\frac{1}{10^H}$ un infinitesimal positivo. Por brevedad, podemos escribir $0.\overbrace{999\ldots9}^{H}$ en lugar de $0.999\ldots;\ldots99\hat{9}$.

Dicho lo anterior, sería posible para un estudiante no familiarizado con los supuestos del análisis estándar leer el símbolo $0.999\ldots$ como entendiendo algo similar a $0.\overbrace{999\ldots9}^{H}$, con H decimales. Esta forma de leer la expresión $0.999\ldots$ es compatible con el lenguaje con el que a veces se trabajan estos temas en clase, por ejemplo al decir que la expresión tiene “infinitos 9’s”. En análisis estándar esta forma de hablar se entiende en términos de límites pero en análisis no-estándar puede tomarse de manera literal.

Además de considerar una lectura alternativa de la notación decimal hay que señalar que en análisis no-estándar la toma de un límite se logra mediante dos pasos. Primero, se evalúa una expresión en un hiperentero infinito H. Luego, se toma la parte estándar. Para el caso que nos concierne, y leyendo $0.999\ldots$ como $0.\overbrace{999\ldots9}^{H}$, se puede ilustrar así:

1) $0.\overbrace{999\ldots9}^{H}=1-\frac{1}{10^H}$, con H hiperentero.

2) $st(0.\overbrace{999\ldots9}^{H})=st(1-\frac{1}{10^H})=1-st(\frac{1}{10^H})=1-0=1$, dado que $\frac{1}{10^H}$ es infinitesimal.

Si nos detenemos luego del primer paso, al evaluar la expresión en los hiperreales, se podría escribir, con H cantidad de 9's, que $0.\overbrace{999\ldots9}^{H}=1-\frac{1}{10^H}<1$, una desigualdad estricta.

También podríamos escribir $0.\overbrace{999\ldots9}^{H}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots+\frac{9}{10^H}=1-\frac{1}{10^H}<1$.

En este punto el lector podría argumentar que no es necesario considerar una lectura alternativa del símbolo $0.999\ldots$ y que bastaría para evitar la ambigüedad con comunicar al estudiante las convenciones implícitas a las que se ha aludido. Esto, sin embargo, no puede siempre lograrse mediante un simple acuerdo pues el sentido que tienen tales convenciones depende de nociones complejas, como convergencia, límite, propiedades de los números reales, etc. Se tendría entonces que desarrollar en las aulas una construcción más detallada del análisis estándar. Esto es posible en algunos casos, pero no todos los estudiantes que son expuestos a expresiones como $0.999\ldots$ se encuentran en un nivel educativo en el que sea viable hacer esa construcción. De hecho, en algunos casos pueden aparecer expresiones similares desde muy temprano en la enseñanza, como cuando se trabajan algunas divisiones del tipo $1/3=0.333\ldots$. De manera análoga, algunas investigaciones en las que se busca estudiar o promover la aceptación de la evaluación unital tampoco explicitan a los participantes -y en algunos casos no pueden, dado el contexto- los supuestos requeridos.

Lo que se ha discutido supone una situación difícil para la investigación, pues la posibilidad de interpretar la expresión $0.999\ldots$ en términos del análisis no-estándar (o algo similar) añade a las dificultades que atraviesan los investigadores al buscar comprender las resistencias que tienen los estudiantes para aceptar la evaluación unital. Algunas de esas resistencias podrían tener relación, no sólo con la complejidad misma de los conceptos en juego, o con factores de tipo didáctico, por mencionar algunos, sino también con una lectura alternativa -aunque legítima, mientras no se expliciten los supuestos- de las expresiones y argumentos que los investigadores presentan. Es decir, existe la posibilidad de que algunas de las resistencias de los estudiantes a aceptar la evaluación unital se deban a que éstos están abordando el problema en términos similares al análisis no-estándar, aunque sea de manera intuitiva. Como se verá a continuación, la posibilidad de una lectura alternativa del símbolo $0.999\ldots$ es de interés no sólo en lo matemático: hay evidencia de que los estudiantes pueden exhibir concepciones afines al análisis no-estándar en ocasión del caso $0.999...=1$. Si los investigadores no están al tanto de la posibilidad de dicha lectura alternativa podrían llegar a conclusiones que no reflejan con precisión la realidad de los hechos que les interesan. La difusión marginal del análisis no-estándar -en todos lo niveles, incluyendo a investigadores en didáctica de las matemáticas- sugiere que este podría ser algunas veces el caso.

1.1.5 Concepciones no-estándar en el caso $0.999\ldots=1$

Consideremos el trabajo de Ely (2010). En este trabajo el autor discute la posibilidad de que los estudiantes puedan desarrollar espontáneamente concepciones alternativas y válidas del análisis. Es decir, sería factible que un estudiante posea una concepción que difiera del análisis estándar y que, sin embargo, no sea una concepción errónea: se trataría de una concepción "no-estándar". No se trataría simplemente de una estrategia alternativa, ni de una concepción errónea robusta, sino más bien de una bifurcación del trayecto de aprendizaje y que, como se ha visto más arriba, tiene un paralelo en la historia de las matemáticas. Como ejemplo de esto, el autor presenta un estudio de caso sobre las concepciones no-estándar que posee una alumna, llamada Sarah, de nivel universitario. Este autor afirma que las concepciones de Sarah son no-estándar porque a) son inconmensurables con las concepciones estándar de la recta de los números reales, b) son viables, robustas y aparentemente no perturbables por la instrucción que las contradice, y c) podrían usarse para elaborar una estructura cognitiva tan poderosa y consistente como la estructura conceptual estándar de la recta de los números reales (Ely, 2010).

En su estudio, a partir de dos entrevistas, el autor planteó a Sarah preguntas como: "¿puedes dar un ejemplo de dos puntos que están infinitamente próximos uno al otro, sin tocarse?" o "¿qué se obtendría si se eleva al cuadrado un número infinitamente pequeño?", además de indagar por el caso $0.999\ldots=1$. El análisis de la información recopilada permitió al autor concluir que Sarah había desarrollado un conjunto de concepciones no-estándar, que además tenían un paralelo con las concepciones de Leibniz y Robinson, lo que presentamos a continuación, reproduciendo la tabla de Ely (2010).

Tabla 2

Resumen de las similitudes entre el sistema de Leibniz, el sistema del análisis no-estándar, y las concepciones de Sarah

Sistema fundacional de Leibniz (c. 1690)	Análisis no-estándar (c. 1961)	Concepciones de Sarah
Existen números infinitesimales, finitos e infinitos.	Existen números infinitesimales, finitos e infinitos.	Existen números infinitesimales, finitos e infinitos.
Existe una cantidad infinita de números infinitesimales e infinitos. Operar en ellos produce otros números: por ejemplo, elevar al cuadrado un infinitesimal produce un infinitesimal más pequeño; elevar al cuadrado un número infinito produce un número infinito más grande. Esto se puede hacer indefinidamente. Cualquier número, incluso un infinitesimal, puede ser dividido una infinita cantidad de veces.	Existe una cantidad infinita de números infinitesimales e infinitos. Los números reales no-estándar son una extensión del cuerpo de los números reales y poseen cierre bajo las operaciones aritméticas, lo que da origen a una cantidad infinita de números infinitesimales e infinitos. Un infinitesimal es el inverso multiplicativo de un número infinito.	Las concepciones de Sarah son similares a las de Leibniz. Se puede seguir dividiendo cualquier longitud en segmentos infinitamente más y más pequeños. Se puede operar sobre los números infinitesimales: elevar al cuadrado un infinitesimal produce un infinitesimal más pequeño, y el recíproco de un infinitesimal es un número infinito.
No cualquier infinitesimal está estrictamente definido o representado (aparte de, por ejemplo, dx); una serie infinita tiene un término infinitésimo al final.	Un infinitesimal puede ser representado con precisión por una clase de equivalencia de sucesiones de números racionales positivos $\{a_n\}$ que converge a 0.	Un infinitesimal puede ser representado por una expansión decimal con dígitos que se extienden más allá de la "infinitésima" posición decimal. Por ejemplo, $0.0000\ldots$ (infinitos 0's) con un 1 al final.
Puede encontrarse dos números distintos infinitamente próximos uno al otro. En particular, $f+i \approx f$ (f es un número finito, i es un infinitesimal).	Puede encontrarse dos números distintos infinitamente próximos uno al otro. Cualquier número no-estándar es infinitamente próximo a, pero no necesariamente igual a, su parte estándar ($n \approx st(n)$).	Puede encontrarse dos números distintos infinitamente próximos uno al otro. Por ejemplo, $0.000\ldots1$ y $0.000\ldots01$ son ambos "infinitamente próximos" a 0.
Si uno enfoca lo suficiente a una parte de alguna cosa, verá que esa parte se ve como un microcosmos de la cosa misma. Hay mundos	El "microscopio infinitesimal" de Keisler permite enfocar indefinidamente. Una mónada es definida como un conjunto de todos los	La concepción de Sarah es similar a la de Leibniz, al menos con respecto a la recta de los números reales: "... incluso en este espacio

dentro de mundos. Esto sólo puede hacerse finitamente en el mundo real, pero en el mundo matemático se puede hacer infinitamente, o al menos es una "ficción útil" pretender que es posible. Por otro lado, las mónadas son unidades indivisibles y espirituales, tan diferentes de los infinitesimales (que son infinitamente divisibles) como la ilimitación de Dios lo es de cantidades meramente infinitas.	números infinitamente próximos entre sí (esto no es definible en lógica de primer orden). Esto es una especie de microcosmos de los números reales estándar. (Nótese que esto difiere dramáticamente del uso de Leibniz de la palabra "mónada").	infinitamente pequeño [entre $0.999\ldots$ y 1] se puede cortar también en el infinito y poner números ahí," y esto "se vería exactamente como la recta grande de los números excepto que no serían llamados los mismos números."
No se encontró referencia a racionalidad de números infinitesimales en Leibniz.	Existen infinitesimales racionales e irracionales.	Existen números racionales en todo pequeño espacio, incluídos espacios infinitesimalmente pequeños.
El propósito de los infinitesimales es proveer un método para hacer cálculo.	El propósito es producir un modelo riguroso para el análisis que use infinitesimales.	El propósito de los infinitesimales es dar sentido, no un propósito funcional adicional.
Gradualmente descartado en el siglo XIX en favor de la formulación basada en límites de los números reales estándar.	Establecido en 1961 (Robinson) como lógicamente equivalente a los números reales estándar.	Ella se refiere a sus concepciones como su propia extraña manera de pensar.

Fuente: Ely (2010, p.140-141)

En lo que refiere específicamente al caso $0.999\ldots$, Ely (2010) cuenta que Sarah rechaza la evaluación unital, incluso luego de ver una demostración sencilla (i.e., multiplicando ambos lados de $N=0.999\ldots$ por 10, restando el número original y dividiendo ambos lados entre 9). Ella responde escribiendo $0.000\ldots1$, con infinitos ceros, al preguntársele si habían números entre $0.999\ldots$ y 1. Aunque parece estar refiriéndose a la distancia entre $0.999\ldots$ y 1, esta notación será usada consistentemente por ella para representar cantidades infinitamente pequeñas. Por ejemplo, al preguntársele si habían otros números entre 1 y $0.999\ldots$, ella indica uno "aún más pequeño" y escribe $0.000\ldots01$, con una posición decimal adicional. Estos dos números ($0.000\ldots1$ y $0.000\ldots01$) son señalados por Sarah como infinitamente próximos a cero, siendo el primero mayor que el segundo. Cabe señalar que, según Ely (2010), el lenguaje de Sarah sugiere que ella piensa en los números de los que habla como objetos estáticos y no cantidades dinámicas. Por ejemplo, ella dice que

$0.000...1$ y $0.999...$, *están* infinitamente cerca de 0 y 1, respectivamente, y no que se están *acercando* infinitamente.

A partir de lo presentado queda claro que es posible encontrar en estudiantes concepciones afines al análisis no-estándar en ocasión del caso $0.999...=1$. Sin embargo, esto no quiere decir que toda resistencia a la igualdad $0.999...=1$ se deba a que el estudiante hace una lectura a partir de concepciones no-estándar. Existen otras posibles razones de esta resistencia. Por ejemplo, los estudiantes pueden simplemente no estar familiarizados con la notación y entender $0.999...$ como 0.999 (con decimales finitos) o algo similar, por lo que la resistencia sería trivial.

Como mencionamos al inicio, el rechazo a la evaluación unital de la expresión $0.999...$ se ha reportado repetidas veces en la literatura (cf. Tall, 1977; Sierpińska, 1987; Oktaç y Vivier, 2016), pero se ha interpretado usualmente como un error o, a lo mejor, como un preconcepto o precursor de nociones del análisis estándar. Sin descartar que pueda tratarse muchas veces de un error o preconcepto, y como ya se ha señalado (Katz y Katz, 2010a, 2010b), es plausible considerar que, en ausencia de supuestos explícitos, un estudiante lea la expresión $0.999...$ de una manera alternativa, matemáticamente válida y coherente con el análisis no-estándar, lo que permite entender casos como el de Sarah desde otra perspectiva.

1.2 Justificación del trabajo de investigación

Lo que se ha presentado hasta ahora no carece de interés, pues lo que implica es que las investigaciones sobre el caso $0.999\ldots$ en las que no se considere la posibilidad de que los estudiantes aborden el problema desde una ruta similar al análisis no-estándar corren el riesgo de interpretar las concepciones y resistencias a la evaluación unital de dichos estudiantes sólo en términos del análisis estándar, con lo que se podría ver comprometida la comprensión de este fenómeno. En el caso de las investigaciones orientadas a promover la aceptación de la evaluación unital, se corre además el riesgo de intentar “suprimir” concepciones válidas del análisis no-estándar en favor de concepciones del análisis estándar, lo cual puede repercutir negativamente en los estudiantes al incentivar en ellos actitudes negativas hacia las matemáticas. Sobre este punto, además de lo ya señalado, Ely (2010) mostró cómo la discrepancia entre las concepciones de Sarah y las concepciones oficiales de la institución donde estudiaba parece haberle inducido una actitud negativa acerca de lo que es aprender matemáticas, actitud que este autor denomina *empirista discursiva*. Es decir, ella consideraba que las matemáticas se memorizan sin discutirse, respondiendo como se espera para aprobar los exámenes y satisfacer requerimientos institucionales. El autor hipotetiza que Sarah adoptó esta actitud como consecuencia de la necesidad de mantener consistencia cognitiva en sus concepciones (i.e., no-estándar), que son válidas pero que difieren de las que observa en sus clases de cálculo (i.e., estándar).

Luego de todo lo revisado, no deberá sorprender que la existencia de al menos dos formas de construir un cálculo riguroso, con un desarrollo histórico en paralelo, basados en los trabajos de distintas comunidades de matemáticos, y que además supone nociones distintas y no necesariamente compatibles entre ambas versiones (i.e., los infinitesimales), tenga también repercusiones en la relación de los estudiantes con las matemáticas. En efecto, una cosa es que un estudiante discrepe con las matemáticas de su institución a causa de una preconcepción o concepción errónea, en donde el docente/investigador está legitimado a buscar las maneras de promover en el estudiante un cambio que favorezca su aprendizaje. Pero otra cosa muy distinta es el escenario supuesto por la existencia en simultáneo de dos versiones del análisis (estándar y no-estándar), pues esto implica la posibilidad de que un estudiante y el docente/investigador posean concepciones discrepantes, ¡sin estar ninguno equivocado! En este escenario, se plantea la cuestión sobre la legitimidad que se tendría para promover un cambio en las concepciones del estudiante.

La exposición que se ha venido desarrollando a lo largo de estas páginas nos lleva entonces a interrogarnos acerca de los trabajos realizados sobre el caso $0.999...=1$ y preguntarnos por la necesidad de revisar lo que se plantea a la luz de lo que implica la existencia del análisis no-estándar. Ya se ha mencionado que no considerar las posibilidades que supone el análisis no-estándar puede limitar nuestra comprensión del rechazo a la evaluación unital. Una revisión de lo publicado permitiría evidenciar algunas de esas posibles limitaciones y también contribuir a superarlas, lo que redundaría en una comprensión más precisa del problema y -en la medida en que repercuta en la enseñanza- en una mejora en el aprendizaje de los estudiantes y sus actitudes hacia las matemáticas. Evidenciar estas limitaciones también se hace necesario si consideramos que el análisis no-estándar tiene cerca de medio siglo de existencia, no teniendo mucha repercusión en la enseñanza ni en la investigación en didáctica de las matemáticas, a pesar de sus implicancias. En particular, la fundamentación desde el análisis no-estándar de la desigualdad estricta $0.999...<1$ que se desarrolló más arriba fue ya sugerida por David Tall hace varias décadas (cf. Tall, 1981), y no parece haber tenido mayor impacto.

Proponemos entonces proceder a la revisión de trabajos aludida mediante la realización de un estado del arte. Esta metodología, en la acepción que se desarrolla luego, implica hacer una revisión sistemática del saber acumulado en un campo de interés, con una visión crítica y reflexiva (Gómez Vargas, Galeano Higuita y Jaramillo Muñoz, 2015), por lo que es el camino apropiado para los propósitos de esta tarea. Además, para nuestro conocimiento, no se han realizado trabajos similares en los que se haga una revisión sistemática de las investigaciones acerca del caso $0.999...=1$, pero tomando en consideración lo que supone la existencia del análisis no-estándar. Considerar el análisis no-estándar como referente matemático podría llevarnos a comprender mejor algunas dificultades de los estudiantes, así como a reconsiderar objetivos de enseñanza.

Este trabajo busca ser una contribución a la didáctica del análisis y el cálculo al permitir ver investigaciones previas desde un nuevo enfoque y en términos que permitan darle un nuevo sentido a lo recogido acerca de las concepciones de los estudiantes y las dificultades que pueden tener en relación a su aprendizaje. También se espera que los interesados en trabajar directamente en la enseñanza dispongan de una perspectiva que les permita comprender mejor ciertos aspectos del aprendizaje y las actitudes que sus alumnos tienen respecto a algunos temas de las matemáticas, facilitando así el devenir de su instrucción.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Lo que se ha discutido sugiere la posibilidad de evidenciar limitaciones en investigaciones previas. En particular, se podría evidenciar limitaciones en la manera en que han sido analizadas las concepciones de los estudiantes en relación al caso $0.999...=1$, con lo cual podría comprenderse mejor la naturaleza de dichas concepciones. Asimismo, se podría evidenciar limitaciones en los procedimientos empleados para modificar las concepciones de los estudiantes en dirección a una aceptación de la igualdad $0.999...=1$, con lo que podría entenderse por qué a veces dichos procedimientos no resultan efectivos. La pregunta de investigación que interesa sería:

¿De qué manera tomar de referente el análisis no-estándar permite determinar limitaciones en investigaciones previas relativas al caso $0.999...=1$*?*

En consonancia con esta pregunta, los objetivos general y específicos serían:

Objetivo general:

Determinar, tomando de referente el análisis no-estándar, limitaciones en investigaciones previas relativas al caso $0.999...=1$.

Objetivos específicos:

1. Determinar, tomando de referente el análisis no-estándar, limitaciones en los análisis de las concepciones de los estudiantes en investigaciones previas relativas al caso $0.999...=1$, ofreciendo en lo posible análisis alternativos.
2. Determinar, tomando de referente el análisis no-estándar, limitaciones en los procedimientos orientados a promover la aceptación de la evaluación unital de la expresión $0.999...$ en investigaciones previas relativas al caso $0.999...=1$.

CAPÍTULO II: MÉTODO

Para el presente trabajo se ha optado por realizar un estado del arte. El término “estado del arte” tiene diversas acepciones, por lo que es necesario precisar la definición que se utilizará. Siguiendo la propuesta de Gómez Vargas et al. (2015), entendemos por estado del arte una metodología de investigación cualitativa con base documental, que además es de carácter crítico-interpretativo. Esta metodología consiste en una revisión de fuentes documentales relevantes con respecto a un tema delimitado y puede tener diferentes enfoques. Para el presente trabajo lo pertinente es desarrollar un estado del arte que tenga como objetivo hacer una revisión crítica de investigaciones previas sobre el tema elegido. No se trata solamente de un trabajo descriptivo, pues se desea someter a un examen crítico los resultados y métodos reportados. En particular, lo que se busca es evidenciar limitaciones en investigaciones en didáctica del análisis y el cálculo relativas al caso $0.999... = 1$, a partir de lo que implica el análisis no-estándar.

En este capítulo se detalla la implementación del método descrito, entre lo que se incluye los procedimientos metodológicos, las categorías de búsqueda empleadas para recopilar los documentos necesarios, y los criterios de selección utilizados para delimitar la muestra documental que sirvió de insumo para los análisis con los que se respondió a la pregunta de investigación.

2.1 Procedimientos metodológicos

Para realizar el estado del arte nos basamos en la propuesta de Gómez Vargas *et al.* (2015), quienes proponen un modelo de tres fases, que construyeron como síntesis de las diversas metodologías de estado del arte que revisaron.

La primera fase, *planeación*, inicia con el establecimiento del tema a investigar. En el presente trabajo el tema establecido es el caso $0.999... = 1$, pero tomando de referente al análisis no-estándar. Se sigue con un rastreo de documentos en que se eligen fuentes documentales clave sobre el tema, que son revisadas con miras a proveer al investigador de un panorama general. Trabajos como los de Sierpińska (1987), Ely (2010), Katz y Katz (2010a), y Oktaç y Viver (2016) cumplieron este propósito. Se procede con el planteamiento del objeto de investigación y la definición de la pregunta y objetivos, así como la justificación. Se definen luego las categorías de búsqueda que se utilizarán para recopilar las fuentes documentales y establecer el universo documental y se culmina definiendo los criterios de selección que permiten acotar dicho universo y establecer una muestra documental.

La segunda fase, denominada *diseño y gestión*, supone establecer el universo documental (siguiendo las categorías de búsqueda), establecer la muestra documental (aplicando los criterios de selección), definir las categorías de análisis que se utilizarán al analizar los documentos elegidos, para luego realizar una lectura lineal en la que se extrae la información pertinente y relativa a las categorías de análisis propuestas.

La última fase, llamada *análisis, elaboración y formalización*, requiere someter a un análisis comparativo la información extraída, lo que incluye un análisis crítico y descriptivo. Finalmente se redactan los resultados, tomando las categorías de análisis como base.

2.2 Categorías de búsqueda

Las fuentes documentales que nos interesan son aquellos trabajos de investigación relativos al caso $0.999...=1$. El rastreo preliminar (i.e., paso 2 de la fase de planeación) permite identificar trabajos como el de Sierpińska (1987) y el de Ely (2010) como primeros referentes. En particular, el trabajo de Sierpińska es un estudio en donde se ofrece una clasificación de los obstáculos epistemológicos relativos a límites y en donde se ilustra con ejemplos detallados las concepciones de los participantes. Una primera revisión sugiere que en ese trabajo se encuentran concepciones no-estándar en los participantes, aunque son interpretadas en términos del análisis estándar. Por su parte, el trabajo de Ely corresponde a una perspectiva que reconoce las concepciones no-estándar de los estudiantes como tales. Así, éstos dos trabajos representan perspectivas de investigación distintas en lo que respecta al análisis de las concepciones de los estudiantes sobre el caso $0.999...=1$. Ahora, sabemos que trabajos como estos se basan en trabajos previos, los cuales se consignan en sus referencias. Del mismo modo, los trabajos aludidos pueden haber sido tomados como referencia para investigaciones posteriores. Esto nos permite definir como categorías de búsqueda las siguientes:

1. Trabajos citados por Sierpińska (1987) y por Ely (2010), consignados en sus referencias.
2. Trabajos que han citado a Sierpińska (1987) y a Ely (2010), que los consignan en sus referencias.

Con la primera categoría se pudo iniciar un proceso de rastreo y reunir varios de los trabajos que sirvieron de influencia a los trabajos referente (algunos no estaban disponibles debido a su antigüedad y no pudieron ser recopilados). A este primer conjunto de trabajos se aplicaron los criterios de selección -que presentamos luego- y se obtuvieron así más trabajos referente, con los cuales se repitió el proceso hasta agotar las fuentes bibliográficas tempranas accesibles.

De manera similar, para la segunda categoría de búsqueda se partió de los trabajos de Sierpińska (1987) y de Ely (2010), buscándose, con apoyo de portales web y bases de datos que proveían la información, las investigaciones que los tomaron de referencia. Éstas fueron reunidas y se les aplicaron los criterios de selección hasta obtener un conjunto de trabajos, con los que se repitió el proceso hasta agotar fuentes y llegando a los trabajos más recientes en lo relacionado a nuestros objetivos.

Lo señalado implica que la aplicación de las categorías de búsqueda lleva a definir nuevas categorías de búsqueda en cada iteración. Podemos entonces definir las categorías de manera más general, considerando las previamente señaladas como un caso particular:

1. El conjunto de trabajos T_{i-1}, formado por los trabajos citados por un trabajo t_i relacionado al caso $0.999...=1$.
2. El conjunto de trabajos T_{i+1}, formado por los trabajos que citan a un trabajo t_i relacionado al caso $0.999...=1$.

Tomamos como primer trabajo t_i de referencia alguno revelado por el rastreo preliminar, como el de Sierpińska (1987) o el de Ely (2010), y recopilamos los trabajos T_{i-1} y T_{i+1}. Hecho esto, tomamos cada trabajo $t_{(i-1)j} \in T_{i-1}$ y $t_{(i+1)k} \in T_{i+1}$, los consideramos como un nuevo trabajo t_i de referencia y repetimos el proceso hasta agotar los trabajos disponibles.

Luego de aplicar este procedimiento se buscó recopilar otros trabajos que pudieran no estar vinculados a los trabajos así reunidos. Para esto se utilizó buscadores de portales web y bases de datos, mediante palabras clave como $0.9\ldots$, $.999\ldots$, $.999...=1$. Al finalizar esta primera búsqueda se lograron reunir cerca de 260 trabajos, entre artículos, capítulos de libros y tesis de maestría y doctorado. A este conjunto se aplicaron los criterios que a continuación se detallan, con miras a establecer la muestra documental.

2.3 Criterios de selección

Por la naturaleza del proceso de búsqueda, la aplicación de criterios de selección estuvo incluida como una parte del proceso de aplicación de las categorías de búsqueda, como se evidencia en el apartado previo. No obstante, eso no hace menos necesario precisarlos. Dados los objetivos planteados, nos interesaba reunir solamente los trabajos que consideraban explícitamente el caso $0.999\ldots=1$. Luego de recopilados estos trabajos, se seleccionaron de entre ellos los que satisfacían el criterio a) o el criterio b), como se ve a continuación:

1. La investigación consideraba explícitamente el caso $0.999\ldots=1$.
   a) La investigación reportaba y/o analizaba las concepciones que los participantes tenían respecto al caso $0.999\ldots=1$.
   b) La investigación reportaba procedimientos para promover la aceptación de la evaluación unital del símbolo $0.999\ldots$.

El primer criterio fue aplicado revisando uno a uno los abstracts de cada documento, además de utilizar software de búsqueda que permitiera encontrar en el documento palabras clave, como .999.... Al finalizar esta selección se obtuvo una muestra documental de 43 documentos, entre artículos y capítulos, no incluyéndose tesis de maestría o doctorado. Esto último limitaría los alcances del presente trabajo, pero a la vez permitiría, considerándose los plazos disponibles, una revisión más detallada de los documentos recopilados. Esta muestra documental se detalla en una tabla en el Anexo al final del documento, consignándose la referencia, el idioma y ordenando los trabajos por año de publicación.

Definida la muestra documental, se procedió a una lectura de cada uno de sus 43 documentos, donde se extrajo la información de los trabajos que satisfacían los criterios a) y b) mencionados. Conforme procedía esta lectura se vió necesario aplicar una restricción complementaria al criterio a), relativa a la información que se consideraría para el presente estudio. En efecto, no todos los trabajos emplearon métodos de recojo de datos que permiten concluir si las resistencias de los estudiantes a la evaluación unital se deben a un abordaje desde concepciones no-estándar y no a otros factores. Por ejemplo, Tall (1977) encontró que, de 36 estudiantes de matemáticas de primer año que respondieron un cuestionario, 13 estudiantes afirmaron que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}\right)=2$ y que $0.\overline{9}<1$ al mismo tiempo. A primera vista se podría hipotetizar que estos 13 estudiantes están haciendo una distinción similar a la que se trató más arriba, cuando se señaló que en análisis no-estándar el límite se toma en dos pasos. Así, la afirmación de la desigualdad $0.\overline{9}<1$ correspondería al paso 1 (evaluación de la expresión en un hiperentero H) y la afirmación $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+...+\frac{9}{10^n})=2$ correspondería al paso 2 (tomar la parte estándar). No obstante, cuando se pidió a los estudiantes que expresen algunos decimales como fracciones en su forma más simple, y tras explicarse que $0.\overline{3}=0.333...$ y $0.\overline{9}=0.999...$, hubo un cambio y los 13 estudiantes afirmaron $0.\overline{9}=1$ o $0.\overline{9}=1/1$. Esto parece indicar que algunos estudiantes no estaban entendiendo el símbolo $0.\overline{9}$ como equivalente a $0.999...$. El cambio en sus respuestas parecería indicar que no estaban haciendo una lectura desde concepciones no-estándar. No obstante, como se evidenció en sus protocolos, este cambio no es consistente. Por ejemplo, Tall (1977) señala que algunos de éstos estudiantes escribieron cosas como:

"$0.\overline{9}=3\times 0.\overline{3}=3\times\frac{1}{3}=\mathit{rubbish}$" o "$0.\overline{9}\approx 1.$"

Este tipo de información, recogida mediante cuestionarios de opción múltiple, es muy ambigua y no permite verificar ni descartar que en este grupo de estudiantes existan concepciones no-estándar. Por ello, para el presente estado del arte se consideraron solamente investigaciones en donde se ofreció suficiente información acerca de las concepciones de los estudiantes en relación al caso $0.999...=1$. Pudieron considerarse informaciones obtenidas por cuestionarios en la medida en que incluyeron espacios para que los estudiantes escriban con más detalle sus ideas. La información que sea obtenida sólo mediante cuestionarios de opción múltiple, aunque adecuada en otras circunstancias, es muy limitada para los objetivos de este trabajo.

Después de aplicar la restricción indicada, se procedió a extraer la información relativa al caso $0.999...=1$. Luego se analizó la información recogida, definiéndose categorías de análisis, y se redactaron los resultados. Las categorías de análisis definidas fueron:

1. Concepciones no-estándar.
    a) Diferencias infinitamente pequeñas.
    b) Notación ad hoc para representar cantidades infinitesimales.
2. Procedimientos empleados para promover la aceptación de la evalución unital.

CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE INVESTIGACIONES PREVIAS

A continuación se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis de documentos, distribuidos en un período que va desde 1977 hasta el 2018.

En primer lugar, se presenta lo relativo a las limitaciones en los análisis de las concepciones sobre el caso $0.999...=1$ en participantes de investigaciones previas, mostrándose análisis alternativos que evidencian la existencia de concepciones similares a las no-estándar. Esta sección se divide en dos partes, donde la primera se enfoca en concepciones acerca de diferencias infinitamente pequeñas y la segunda en el uso de notación ad hoc por parte de los participantes para representar cantidades infinitesimales. Debe señalarse que no siempre fue posible concluir de manera definitiva que los participantes de las investigaciones revisadas poseían concepciones no-estándar, pues los investigadores originales no siempre persiguieron sus interrogatorios con detalle, como en el caso de Ely (2010), o no reportaron datos suficientes. En dichos casos, no obstante, la información disponible permitió al menos poner en duda las conclusiones originales acerca de las concepciones de los estudiantes, al mostrar hipótesis alternativas plausibles.

En segundo lugar, se desarrolla lo relativo a las limitaciones en los procedimientos que los investigadores utilizaron o propusieron utilizar con el propósito de promover una aceptación de la evaluación unital del símbolo $0.999\ldots$. Estos procedimientos, si bien son válidos en el análisis estándar, se apoyan en supuestos que no siempre son explicitados (e.g., tomas de límite implícitas, propiedades de los números reales, etc.), sin los cuales se da una ambigüedad que posibilita usar los mismos procedimientos para rechazar la evaluación unital.

3.1 Concepciones no-estándar

La revisión de los trabajos permitió reunir indicios de que algunos estudiantes conciben la existencia de diferencias infinitamente pequeñas. Estas diferencias son utilizadas por algunos estudiantes para justificar la desigualdad $0.999... < 1$. Incluso algunos estudiantes que admiten la igualdad lo hacen aduciendo que, al tratarse de una diferencia tan pequeña, es prácticamente nula. También pudo verificarse que algunos hicieron uso de una notación decimal ad hoc como la que reportó Ely (2010). Es decir, escriben algo como $0.000...1$ para referirse a la diferencia entre $0.999...$ y 1. Debemos señalar que en varios casos las concepciones incluían referencias a números con cantidades infinitas de posiciones decimales. Esto último no será considerado como una categoría aparte debido a su estrecha relación con las otras concepciones, pero será tratado en los análisis de los casos en que se manifiesta.

3.1.1 Diferencias infinitamente pequeñas

Ya desde temprano en la investigación hay indicios de que algunos estudiantes conciben la existencia de diferencias o números infinitamente pequeños, de manera similar al caso de Sarah, reportado por Ely (2010). Algo que resalta es que esas diferencias infinitamente pequeñas pueden ser usadas por algunos para rechazar la igualdad $0.999...=1$, pero también para aceptarla, sosteniéndose que la diferencia es tan pequeña que es negligible. Esto parece tener un paralelo con los dos pasos para tomar el límite en el análisis no-estándar, donde se afirma la desigualdad al evaluar una expresión en un hiperentero, para luego tomar la parte estándar y "negligir" la diferencia. Veamos algunos ejemplos.

En su trabajo con estudiantes universitarios de primer año, Tall (1977) reporta lo que denomina "infinitesimal ideas", recogidas mediante cuestionarios. Algunas de esas ideas eran relativas a la evaluación de $0.999\ldots$. En particular, el autor señala que algunos estudiantes dicen cosas como "It is just less than one, but the difference between it and one is infinitely small" o "Just less than one, because even at infinity the number though close to one is still not technically equal to one". (p.11)

En el primer caso se habla explícitamente de diferencias infinitamente pequeñas. En el segundo caso lo que dice el estudiante recuerda lo que se mencionó sobre evaluar una expresión en un hiperentero H, por ejemplo $0.\overbrace{999\ldots9}^{H}$, con H decimales. Resalta que este mismo estudiante diga que se trata de un *número* cercano a 1. Como en el caso de Sarah, podría entenderse que no está pensando en un proceso en curso sino en un objeto estático.

De manera similar, Tall y Schwarzenberger (1978) reportan que se preguntó a estudiantes universitarios de primer año "Is $0.999\ldots$ (nought point nine recurring) equal to one, or just less than one?" (p.44). Indican que muchas respuestas tenían conceptos infinitesimales como: "The same, because the difference between them is infinitely small" o "The same, for at infinity it comes so close to one it can be considered the same" (p.44)

En estos casos vemos que se habla también de diferencias infinitamente pequeñas. No obstante, en el primer caso se concluye que $0.999\ldots$ es igual a 1 precisamente porque la diferencia es infinitamente pequeña, mientras que en lo reportado por Tall (1977) una diferencia infinitamente pequeña conducía al estudiante a concluir la desigualdad. Podría plantearse como hipótesis que cada uno de estos dos estudiantes está considerando algo similar a alguno de los dos pasos con que se toma el límite en análisis no-estándar. En el primero la diferencia infinitesimal no es aún "negligida" y por ello hay desigualdad, mientras que en el segundo ya se toma la parte estándar y se “neglige” la diferencia.

En su trabajo clásico con estudiantes de humanidades, Sierpińska (1987) reporta que algunos no aceptan una demostración de que $0.999... = 1$ (i.e., hallando la fracción generatriz). Una de las estudiantes, llamada Ewa, rechaza la igualdad afirmando:

> “Arithmetically or algebraically, it’s all right, but in reality… It will be close to one but will not equal one. There will be a slight, very slight difference, but a difference all the same… It’s like the asymptote of a hyperbola: they will never touch each other… The difference is getting smaller and smaller but it will not turn into zero… It makes me think of the bound, you remember? Last year…” (p. 378)

Sobre Ewa, la autora señala: “Ewa’s concept of infinity seems to be that of “potential infinity”, something that cannot ever be completed. Therefore, $0.999...$ is not really a number, and thus cannot be said to equal one.” (p.379) No obstante, desde el análisis no-estándar podría entenderse lo que Ewa dice como indicando que, incluso con H nueves, siendo H infinito, siempre habrá una diferencia $\frac{1}{10^H}$. No queda claro, sin embargo, si ella concibe la situación en términos de un proceso en curso o como algo estático. Se podría sostener que, como ella señala que la diferencia “is getting smaller and smaller”, se trata de lo primero. Pero también podría interpretarse como queriendo decir que puede tomarse hiperenteros (infinitos) cada vez más grandes, $H, H+1, H+2$, etc. y conservarse diferencias infinitesimales cada vez más pequeñas, $\frac{1}{10^H}, \frac{1}{10^{H+1}}, \frac{1}{10^{H+2}}$, etc., respecto de 1. Dado que es posible, como se ha señalado, tomar hiperenteros cada vez más grandes, pero sin dejar de tratarse de *números* (infinitos), la distinción entre un proceso en curso y un proceso acabado podría suponer, desde el análisis no-estándar, matices antes no considerados. Como se señaló más arriba, en este caso es difícil dirimir la cuestión con la información reportada, pero al menos se puede poner en duda el análisis del trabajo original. Algo similar podría decirse sobre otro estudiante del mismo estudio, de nombre Jack, que dice: “There is a limit that these nines will not surpass. They will go on growing and growing, but… What we add is getting smaller and smaller” (p. 378).

Sacristán (1991), en su trabajo con estudiantes de preparatoria y universidad, obtiene mediante cuestionarios que algunos de sus participantes conciben la existencia de una diferencia infinitesimal entre $1.999...$ y 2, pero además recoge al menos dos tipos de respuesta. Unos piensan que mientras haya una diferencia entre $1.999...$ y 2, sin importar lo pequeña que sea, no puede haber igualdad. Para otros esa diferencia infinitesimal es tan pequeña que se puede considerar como nula. Se podría plantear de nuevo, como se hizo antes con los casos reportados por Tall (1977) y Tall y Schwarzenberger (1978), un paralelo con los dos pasos que se realizan en análisis no-estándar para tomar el límite. El primer tipo parece referir al primer paso, al evaluar la expresión en un hiperentero H, donde efectivamente hay una desigualdad estricta. El segundo tipo podría referirse a algo similar a lo que ocurre cuando se toma la parte estándar y se "neglige" la diferencia infinitesimal.

Arrigo y D'Amore (1999) buscaron estudiar obstáculos relativos al infinito y recogieron las respuestas de casi 300 estudiantes entre 15 y 18 años. A dichos estudiantes se les presentó en video una demostración de que $0,3\bar{9}=0,4$. Luego se les plantearon algunas preguntas mediante un cuestionario, incluyendo la pregunta por la evaluación unital. Estos autores atribuyen el rechazo a la evaluación unital a un obstáculo epistemológico e incluso a obstáculos didácticos. Presentan como ejemplos algunos de los protocolos, donde los estudiantes responden a la pregunta "cómo explicarías que $0,\bar{9}=1$ a un alumno más joven que tú?" (p.20). Uno de los participantes dice:

> "Me apoyaría en la realidad: si medimos indirectamente un objeto, o un espacio, podemos obtener un número periódico. Pero un número periódico es un número infinito y visto que en la realidad no existen objetos infinitos, entonces no existe el número periódico. Y para verlo, o se hace una medición directa, o se toma el número finito más cercano a aquel periódico. El número más cercano a $0.999999\ldots$ es 1". (p.20)

Otro alumno responde "Diciéndole que la diferencia es tan pequeña que $0,999\ldots$ y 1 son casi iguales" (p.20). Arrigo y D'amore (1999) señalan que probablemente se necesite adquirir conceptos como densidad e infinito actual para poder entender las infinitas cifras decimales como un todo único y dominar los números periódicos. Desde el análisis no-estándar se podría leer estos protocolos de otra manera, similar a lo que se ha señalado arriba. Así, vemos que el segundo protocolo es un caso semejante a los que ya se reportó en los trabajos de Tall y Schwarzenberger (1978) y Sacristán (1991). Por su parte, el primer protocolo indica que "el número más cercano a $0.999999\ldots$ es 1", lo que podría leerse, en términos del análisis no-estándar, como diciendo que para el hiperreal $0.999999\ldots$, el único número real infinitamente próximo es 1 (ver "principio de la parte estándar" en el Apéndice). No obstante, vemos que el estudiante también afirma que "no existe el número periódico". Esto podría indicar que no concibe el número periódico como un número, sino tal vez como un proceso en curso. Pero también podría ser que el estudiante esté haciendo una distinción entre conjuntos de números, como la que hay entre números estándar y no-estándar. Entonces, podría tomarse lo que dice como indicando que “el número periódico no existe en el mismo sentido en que existe un número finito” o que “ el número periódico es no-estándar y debe tomarse el número estándar más próximo”. Por supuesto, esta lectura es hipotética y no se puede zanjar la cuestión con la información disponible.

Más adelante, Hitt y Páez (2001) analizaron, mediante entrevistas clínicas, obstáculos relacionados al concepto de límite en estudiantes de primer semestre universitario. Ellos presentaron a los estudiantes el gráfico de una función y una tabla con algunos puntos de la misma. La función era $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}$, con asíntota horizontal $y=1$. A partir de esto preguntaron a los estudiantes, entre otras cosas, “What is the value of the difference $1-0.999\ldots$?” (p.172). Los autores señalaron que los estudiantes evidenciaron dificultades con ese tipo de preguntas y se refirieron a trabajos como los de Sierpinska (1987), indicando que se trata de resultados similares. Por ejemplo, el estudiante EC dijo:

> When this $0.999\ldots$ is infinite, an infinite of nines, then this $0.999\ldots$ you could say that is equal one. What happen is that $0.999\ldots$ is not going to be one, … then, this $0.999\ldots$ is different of one, even though it be nearer, nearer, but different to one. (p.173)

Por su parte, el estudiante EM afirmó:

> This $0.999\ldots$ is a number with infinite decimals and it is in accordance with the geometric idea because the curve never will touch in this case the horizontal line $y=1$, never is going to touch it, however, is approaching more and more, there are going to appear more and more nines in this decimal representation. (p.173)

Vemos nuevamente la idea de diferencias infinitesimales ya reportadas décadas antes, además de alusiones a números con infinitos decimales.

Por su parte, Hitt (2003) realizó entrevistas clínicas a estudiantes que empezaban estudios de ingeniería, para estudiar obstáculos en el aprendizaje de límites. El autor cuenta que se preguntó a los estudiantes: “¿Es verdad que 1/2 = 0.5 = 0.4999…?” (p.15), a lo que un estudiante identificado como S contestó: “Bueno aquí 0.5, no, 0.4999…, no es igual que 0.5, aquí 0.4999 es un valor cercano a 0.5” (p.15). Cuando se le preguntó qué tan cercano sería a 0.5, S respondió: “No pues sería… es muy lejano el 0.4999… de 0.5 porque si continuamos desarrollando esto va a ver una infinidad de nueves y no vamos a llegar exactamente al 0.5” (p.15). Vemos nuevamente la idea de una infinidad de nueves. Podría ser que, como se ha discutido previamente, el estudiante S esté considerando un proceso en curso -como en el ejemplo de Sierpińska (1987) visto más arriba- y que esto le impida aceptar la igualdad. No obstante, como ya se ha visto, queda la posibilidad de que esté viendo las cosas en términos similares al análisis no-estándar, de modo que esa “infinidad de nueves” pueda referir a, por ejemplo, una cantidad hiperentera H de nueves. En este caso tampoco es posible ser concluyentes debido a la ambigüedad de la información reportada.

Oehrtman (2009) estudió, mediante cuestionarios, entrevistas y observaciones de aula, las metáforas de límite de un grupo de estudiantes de cálculo de primer año. Cuenta que al discutir la igualdad $0.\overline{9}=1$, los estudiantes se enfocaron en describir diferencias negligibles o irrelevantes, o errores infinitamente pequeños que no importaban. La mayoría rechazó la igualdad $0.\overline{9}=1$ a pesar de habérseles presentado varios argumentos a favor de la misma en clase. Al explicar por qué $0.\overline{9}=1$, la mayoría usó la terminología “arbitrariamente pequeño”, mientras que otros describieron una diferencia infinitamente pequeña o infinitesimal o sostuvieron que $0.\overline{9}$ sería el “siguiente número” o que “tocaría a uno”. Es importante señalar que estas concepciones no estaban aisladas, ya que algunos estudiantes usaron el infinito como un número. Por ejemplo, usaban el infinito como input y output de funciones o como un número muy grande. Según el autor, al dividir entre infinito los estudiantes consideraban cantidades infinitesimales, las que describían como inexistentes en tamaño pero distintas de cero. El autor afirmó que, para un estudiante de nombre Jared, dividir un número finito entre un infinito no da cero sino un número extremadamente cercano a cero, para luego afirmar que el límite era cero. Esto guarda semejanza con el caso que trabajó Ely (2010) y con el análisis no-estándar, donde $\frac{a}{H}$ es infinitesimal cuando a es finito.

Burroughs y Yopp (2010) investigaron las concepciones sobre $0.999...$ en cinco estudiantes de la carrera de educación primaria, mediante entrevistas. Una de las preguntas planteadas fue: “Some people think that 1 is equal to .9 repeating and some people don’t. I’d like to hear what you think about it and why” (p.30). Ante la pregunta, un participante llamado Barry dijo:

> … umm, in my opinion, point nine repeated is equal to [one], just with the uh, x going to zero, um, but it doesn’t work out on paper like this. Mathematically they are not equal, but when you get down to numbers so small, point nine repeating is so small, that I think you could uh, determine it is one (p.31).

Aparece otra vez la idea de que existe una diferencia entre $0.999...$ y 1, pero que dicha diferencia es tan pequeña que puede ser ignorada.

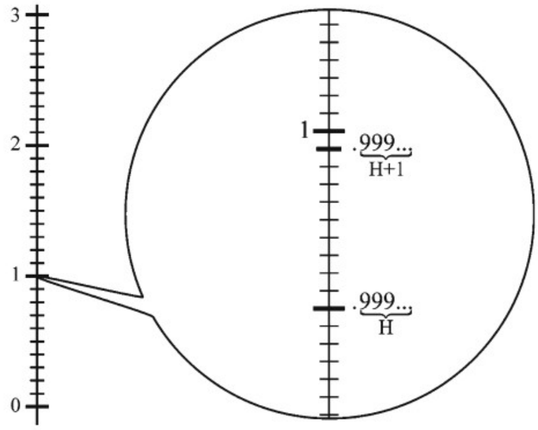
Weller, Arnon y Dubinsky (2011) realizaron entrevistas para recopilar información nueva y para determinar la fuerza y estabilidad en el tiempo de las creencias de algunos estudiantes de la carrera de educación que participaron en un estudio previo. Uno de los intercambios que tuvieron con una estudiante, denominada Carrie, transcurrió así:

> "I: Do you think that .9 repeating is equal to 1?
>
> S: No.
>
> I: Did you think that during the class, even when you were given the algebra stuff?
>
> S: Yes.
>
> I: You did?
>
> S: Well, you're given the algebra, and I mean, that's the algebra that we used, and then there's also like the denseness property that says there is always something in the middle.
>
> I: So if we draw a number line here, and we put 0 and 1, where do you see .9 repeating in relation to 1?
>
> S: right next to it -real close" (p.150).

En este caso Carrie parece concebir $0.999...$ como un número distinto de 1 al que además le corresponde una posición distinta, aunque muy cercana, en la recta. Esto es similar a la manera en que Katz y Katz (2010b) representan, siguiendo el ejemplo de Keisler (2012), números hiperreales infinitamente próximos (ver Figura 3):

Figura 3

Tres números hiperreales infinitamente próximos uno al otro



Fuente: Katz y Katz (2010b, p.264)

Vemos entonces que las ideas de Carrie pueden tener algo de sentido, en coherencia con su uso algo idiosincrásico de la propiedad de densidad.

Dubinsky, Arnon y Welle (2013) reportan que una participante, de nombre Rita, dijo: “But in the case of 1 minus .9 repeating, the 0 would just continue on forever until the 9s stopped, which then would make those two numbers not equal to each other so you’d have a 1 at the very end” (p.246). Más adelante, Rita añadió: “You can give me an equation and I will believe the equation. You can give me the numbers to prove that they are equal, but the way I see it, the simplest way, is 1 minus .9. As long as the 9 doesn’t stop, the difference is going to be point zero repeating” (p.246). Los autores concluyen que Rita tenía dificultades para hacer una encapsulación o que la encapsulación era “very tenuous”, por lo que la clasificaron como “Emerging conception of $0.\overline{9}$ as an objetct or number”.

Como en casos anteriores, es posible reconocer en lo que dijo Rita la idea de una diferencia entre 1 y $0.\overline{9}$, que además parece manifestarse como una cantidad que tendría un 1 “at the very end”. No obstante, no parece que esa idea se haya consolidado y por momentos Rita habla del $0.\overline{9}$ como un proceso en curso. Dubinsky et al. (2013) podría tener razón al indicar que Rita no ha logrado una encapsulación. Podríamos cuestionar, no obstante, si dicha encapsulación necesariamente conduciría a la igualdad $0.\overline{9}=1$, como proponen los autores. Como señaló Vivier (2011) (cf. la siguiente sección), sería posible que la encapsulación conduzca a una desigualdad, al encapsularse un objeto como $0.\overline{0}1$.

En el mismo trabajo, Dubinsky et al. (2013) reportan un intercambio con la participante de nombre Maria:

"I: So, if you were going to draw a number line and put 0 and 1, where do you put .9 repeating?

María: I would say, according to the way where it says .9 repeating equals one, that you could put it on the one mark.

I: Is that what you really think, though?

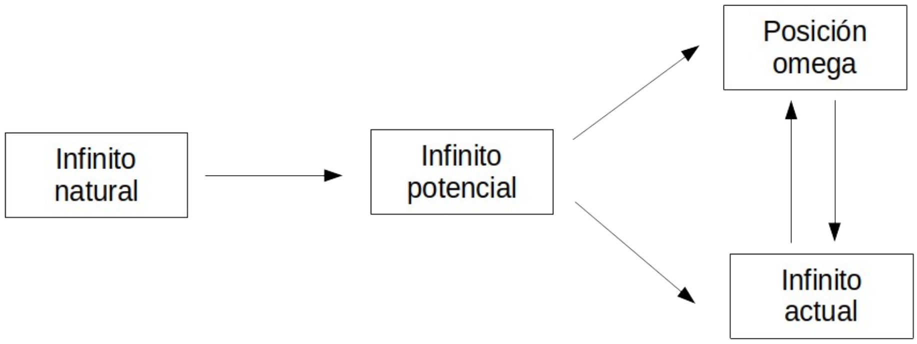
María: No, I think it's before" (p.250).

Aquí puede verse algo similar a lo que ya se discutió sobre el caso de Carrie en el trabajo de Weller et al. (2011).

Cihlar, Eisenmann y Krátká (2015) realizaron un estudio cualitativo mediante entrevistas a una veintena de estudiantes universitarios, como parte de un proyecto de investigación mayor. El estudio cualitativo surgió debido a que, en trabajos previos, algunos conjuntos de respuestas que se encontraron parecían conformar una nueva fase del desarrollo en la comprensión del infinito, que era necesario describir con detalle. Los autores propusieron entonces extender la categorización de las concepciones de infinito. Además de *infinito potencial* e *infinito actual*, incluyen el *infinito natural* y una fase que denominan *posición omega*. En esta última, el conjunto de números naturales incluye un número natural impropio mayor que los demás números naturales. Según los autores, los estudiantes lo llaman "infinito", y posee algunas cualidades de los números naturales (e.g., designar el número de elementos de un conjunto) pero no otras (e.g., poder ser adicionado a otro número). Los autores señalan que algunos estudiantes en la posición omega anticipan ideas de otras disciplinas, entre las que está el análisis no-estándar de Robinson (1996). Señalan, no obstante, que estos estudiantes usualmente trabajan con la idea de un único infinito en dos formas: infinitamente grande e infinitamente pequeño. Esto tiene similitudes con las concepciones no-estándar pero se mantiene la diferencia de que en éstas últimas hay muchos infinitos e infinitesimales distintos, además de que las operaciones, como multiplicar por diez, sí tienen efecto en estos números. Los autores señalan explícitamente que se trataría de una alternativa a conceptos no-estándar. Como parte de la conclusión, Cihlar et al. (2015) proponen que el desarrollo de las ideas del infinito de los estudiantes puede seguir el siguiente esquema:

Figura 4

Posibles transiciones entre fases de ideas del infinito



Fuente: Cihlar et al. (2015, p.70)

Este es uno de los pocos trabajos recogidos en donde se reconoce explícitamente y como tales un conjunto de concepciones que no se alínean al análisis estándar. Aunque los autores consideraron estas ideas como distintas a las concepciones no-estándar, podemos plantear la hipótesis de que éstas ideas representan una fase intermedia en el camino hacia un sistema más robusto, como en el caso de Sarah, reportado por Ely (2010). La información brindada, no obstante, es insuficiente para concluir con precisión. Se necesitaría un estudio longitudinal para determinar si éstas ideas eventualmente desembocan en un sistema próximo al análisis no-estándar o si desembocan en un sistema diferente.

3.1.2 Notación ad hoc para representar cantidades infinitesimales

En algunos trabajos, además de reportarse concepciones relativas a cantidades infinitamente pequeñas, también se evidenció un uso de notación ad hoc similar al que reportó Ely (2010) en el caso de Sarah (i.e., escribir $0.000...1$ para representar una diferencia infinitesimal). Esta notación no suele enseñarse y parece ser un producto original de los estudiantes. Veamos algunos ejemplos.

En su trabajo con estudiantes de secundaria, Margolinas (1988) aplicó cuestionarios y entrevistó a parejas para indagar por la manera de razonar de los estudiantes en relación a los números reales. La autora afirma que los estudiantes dieron respuestas infinitesimales ante algunas preguntas. Dichas respuestas resistieron intentos de desestabilización de parte de la investigadora e incluyeron la producción de escrituras originales. Por ejemplo, al preguntar por la suma $1,\bar{4}+3,\bar{7}$ la pareja Irène/Sandrine respondió que era $5,\bar{2}1$. Cuando se les preguntó qué significaba el 1, Sandrine dijo que “Il sera toujours en dernier, il viendra après le 2”. Luego Irène añadió: “Ben oui, il y aura une infinité de 2 et toujours 1 à la fin”. Finalmente, Sandrine dijo: “Y aura toujours une infinité de 2, et toujours un 1 qui suivra les 2” (p.60). De manera similar, al preguntar por la diferencia $3-2,\bar{9}$, la pareja Bruno/Christian respondió $0,\bar{0}1$. Cuando se les preguntó dónde está el 1, Christian dijo: “Après les zéros”. Bruno añadió que “Il est à l’infini, il est tout à la fin” y que “Il se placera après l’infinité de zéros”. Por último, Christian afirmó “Ça dépend quand on pose l’opération combien on met de chiffres après” y que “Il se trouve à la fin, en dernière position” (p.60). El caso de Christian es menos claro y no podría afirmarse que él compartía las ideas de sus compañeros. No obstante, con Sandrine, Irène y Bruno tenemos con más claridad un paralelo con lo reportado por Ely (2010). Este paralelo no se da sólo por la notación sino también por la idea explícita de una infinidad de posiciones decimales seguidas de un dígito “al final”. Cabe resaltar además que es posible traducir lo señalado por estos estudiantes en términos de la notación de Lightstone (1972). Por ejemplo, $5,\bar{2}1=5.222...;...22\hat{1}$ o $0,\bar{0}1=0.000...;...00\hat{1}$.

En su trabajo ya reportado, Arrigo y D’Amore (1999) cuentan que, un año después de estudiar análisis, se permitió a algunos de los alumnos encuestados revisar sus respuestas. Entre éstas los autores resaltan un protocolo:

> “a $0,\bar{9}$ le falta un pedacito para llegar a 1
>
> pedacito = $0,000.$..............1
>
> hasta el fin del infinito

fin del infinito?!?!

$\Rightarrow 0,\overline{9}=1$" (p.25)

Es interesante ver que el estudiante escribe explícitamente que $0{,}000.$..............1 es lo que le falta a $0,\overline{9}$ para llegar a 1. Esta notación no es típica del análisis estándar y llama la atención su presencia luego de un año de haber estudiado análisis. Es también muy similar a lo que reportó Sarah en el trabajo de Ely (2010), aunque no basta para saber si, por ejemplo, el estudiante concibe que se trata de una cantidad infinita de ceros. Por otro lado, lo que sigue del mismo protocolo, cuando señala "hasta el fin del infinito", "fin del infinito?!?!" y luego concluye en la evaluación unital, se asemeja más a la toma del límite que se conoce en análisis estándar. Se podría pensar que en este estudiante coexisten de manera poco articulada concepciones estándar y no-estándar, pero no es posible ser concluyentes debido a la vaguedad del protocolo.

En el trabajo ya señalado de Hitt y Páez (2001), los autores reportan que, al preguntarle al estudiante con pseudónimo EM por la comparación entre $0.999\ldots$ y 1, este señaló: "we must add $0.000\ldots1$ in the infinite to obtain 1, something is missing a little gap" (p.173). Los autores señalaron que EM demostró algebraicamente que $0.999\ldots=1$, pero luego afirmó: "I accept that the algebraic process gives $0.999\ldots=1$ as a result, something is missing, a little bit, I accept the result but I do not feel satisfied" (p.173). De este modo reaparece la notación ad hoc para referirse a la diferencia $1-0.999\ldots$, pero además se observa un conflicto en el estudiante, que dice aceptar el argumento por la evaluación unital pero sin sentirse convencido. Algo similar ocurrió con Sarah en el caso de Ely (2010). Al mostrarle una demostración simple de la evaluación unital, ella expresó rechazo. Luego afirmó que "ahora" sabía que eran iguales pero que igual pensaba en un espacio infinitamente pequeño.

Eisenmann (2008) reporta haber preguntado a estudiantes que, si $0.999\ldots<1$, ¿a qué es igual $1-0.999\ldots$? Indica que es usual que los estudiantes discutan vivamente y luego sugieran cosas como $0.000\ldots1$ (con infinitos zeros y un 1 al final) o, lo que es igual, diez elevado a menos infinito.

En su trabajo con estudiantes de preparatoria y universidad, Vivier (2011) administró un cuestionario en el que se enseñaba un algoritmo para sumar decimales ilimitados. El autor señala que la mitad de los 14 estudiantes universitarios que participaron propone la igualdad $0.\overline{9}=1$ y que los que justifican la desigualdad lo hacen mediante una concepción tipo proceso y no objeto, a falta de una encapsulación, tomando de referencia la teoría

APOS. No obstante, indica que un estudiante escribió $1=0,\bar{9}+0,\bar{0}1$ (en el texto original se usó un "cuadro" para rodear el dígito que aquí lleva una barra horizontal) para concluir la desigualdad entre $0.\bar{9}$ y 1. El autor indica que en ese caso parece haber una encapsulación. En ocasión de este resultado, el autor alude al análisis no-estándar y menciona que "podría desarrollarse un sistema semiótico para el análisis no-estándar a partir de las escrituras *infinitesimales*" (p.106). Vivier (2011) no hace referencia a la notación de Lightsonte (1972), que se describió más arriba, pero creemos que dicha notación podría cumplir el papel del sistema semiótico que hipotetiza. Vale la pena también señalar que Vivier (2011) sugiere que la explicación del rechazo a la evaluación unital propuesta por la teoría APOS (Dubinsky et al., 2005) no sería aplicable al caso del estudiante que escribió $1=0,\bar{9}+0,\bar{0}1$. En dicha explicación, Dubinsky et al. (2005) indican que un rechazo a la evaluación unital podría deberse a que se concibe el $0.999...$ como un proceso y al 1 como un objeto. Mientras el primero no sea encapsulado como objeto no sería posible la comparación con el 1. Por el contrario, al encapsularlo, se podría hacer la comparación y constatar que difieren en un valor menor a cualquier número real positivo, por lo que la diferencia debería ser cero. Viver (2011) señala que este argumento es relativo a un conjunto de números particular. En efecto, en otro conjunto, como en los hiperreales del análisis no-estándar, es perfectamente posible tener una diferencia distinta de cero y menor que todo número real positivo (ver Apéndice). Sería entonces posible encapsular decimales periódicos sin que ello conduzca a la evaluación unital, a diferencia de lo que señalan Dubinsky et al. (2015).

Finalmente, en su trabajo ya citado, Cihlar et al. (2015) preguntaron a los estudiantes "It holds that $0.\bar{9}<1$ or $0.\bar{9}=1$? Explain why" (p.65). La mayoría optó por la desigualdad, ante lo cual se preguntó "You say that $0.\bar{9}$ is smaller than 1. What is then the difference between 1 and $0.\bar{9}$, what does therefore the number $1-0.\bar{9}$ equal?" (p.65). Los autores reportan que la mayoría respondió "Zero point, and infinite number of noughts and at the end of that the digit one" (p.65). Ante esto se preguntó por lo que se obtendría si se multiplicaba ese número por diez. Algunos estudiantes respondieron diciendo "Zero point, zero and the digit one will be shifted by one position to the left" (p.65). Previamente, Cihlar et al. (2015) habían planteado una pregunta relacionada: "What is the smallest number bigger than zero?" (p.64). Algunos estudiantes respondieron $0.00...1$ o $0.\bar{0}1$, ante lo cual se les preguntó qué pasaría si multiplicaban ese número por dos, por diez o si lo dividían por diez. Tres cuartos indicaron $0.00...2$, o que el punto decimal se movería una posición a la derecha o que se añadiría un cero. La mitad, sin embargo, cambió su postura en el transcurso de la discusión y afirmaron que las operaciones referidas no influían en el resultado.

En este último trabajo vemos, además de un uso de notación ad hoc para representar cantidades infinitesimales, que algunos estudiantes conciben la posibilidad de aplicar operaciones a dichas cantidades. También pueden representar, de manera consistente con la notación que usan, el resultado de tales operaciones, lo que tiene similitud con el caso reportado por Ely (2010). Como se hizo anteriormente, no sería difícil traducir las respuestas dadas por los estudiantes de Cihlar et al. (2015) en términos de la notación de Lightstone (1972).

Finalmente, como último trabajo a revisar en este capítulo, consideramos el trabajo de Yopp (2018), un estudio de caso detallado donde se evidencian con más claridad tanto concepciones afines al análisis no-estándar como el uso de notación ad hoc. El estudio de caso tuvo de protagonista a Andrew, un estudiante de 8vo grado al que se entrevistó y observó durante sus clases. Andrew afirmó en clase que $0.333\ldots$ no podía ser un número racional porque no era igual a $\frac{1}{3}$. Específicamente, dijo: “Because you can add up one-third three times and get a whole. But, if you add up point three repeating three times it will equal point nine repeating and point nine repeating isn’t equal to one whole. You can get very, very, very close – just a small, tiniy bit there in the difference, but it won’t equal it” (p.49). También dijo “There’s no true exact number that can be represented as one third. There’s always going to be that little tiny bit of error” (p.50). Además, en clase Andrew había indicado que $0.333\ldots$ era usado para representar un tercio pero que “it technically isn’t equaling one third” (p.50).

Vemos que las concepciones de Andrew tienen cierta coherencia. Así, su rechazo a la igualdad $0.999\ldots=1$ es usado como fundamento de su rechazo a la igualdad $0.333\ldots=1$. Podría hipotetizarse que Andrew lee $0.999\ldots$ como $\overbrace{0.999\ldots9}^{H}$ y $0.333\ldots$ como $\overbrace{0.333\ldots3}^{H}$, lo que daría sentido a sus afirmaciones. Aquí hay una semejanza con el caso de Sarah. Como señaló Ely (2010), Sarah rechazó que $\frac{1}{3}$ fuese igual a $0.333\ldots$, indicando que nunca lo había creído aunque fuese lo que le hicieran memorizar.

Cuando Yopp (2018) pidió a Andrew que describa la distancia entre $0.999\ldots$ y 1, Andrew escribió $0.000\ldots1$, lo que describió como un número infinito de ceros a la derecha del punto decimal y un uno en lo que denominó la posición “one-infiniteth”. El autor resaltó el paralelo con el caso reportado por Ely (2010), aunque señala que Andrew oscilaba entre una perspectiva de objetos y procesos. Por ejemplo, a veces se refería a la distancia entre $0.999...$ y 1 como un número, pero también como un proceso que se acerca a un número muy pequeño pero sin llegar a él. Cuando se le pidió representar $1-0.999...$ en una recta de números, Andrew afirmó al inicio no poder hacerlo, pero luego aludió a subdivisiones repetidas de la línea. Se refirió a esto como un proceso sin fin que eventualmente ilustraría la representación de $1-0.999...$. También dijo que la diferencia entre $0.999...$ y 1 era tan pequeña que no se podía representar. Esta dificultad para representar sus ideas se haría presente en varias ocasiones en la entrevista de Andrew, llevándolo eventualmente a reportar un cambio en sus concepciones. Así, durante el transcurso de la entrevista Andrew reportó cambios en sus creencias acerca de $1-0.999...$. Aunque aún veía a $0.000...1$ como una representación de $1-0.999...$, no lo consideraba como un número. Cuando Yopp (2018) le preguntó: “Is it possible to create a number with an infinite number of zeros behind the decimal point and a one at the end like you just created?” (p.50), Andrew dijo que se lo podía aproximar pero que no se podía obtener uno exacto. Sobre $0.000...1$ dijo:

> “It’ more of a-almost an approximation. But then again… would we consider-consider the square root of three an exact number but we couldn’t exactly write out what the square root of three is. Like, if you write the square root symbol with three in it we call that the exact number, but the decimal version we would call an approximation because it doesn’t end. It’s irrational. But would we call point three exact compared to that [writes $0.333...$]? Or is that still not exact?” (p.50).

Sobre $0.000...1$ no siendo un número, Andrew dijo que no podía ser creado porque si se sustraían $1-0.999...$ se obtendría algo imperceptible, demasiado pequeño para verse en una recta de números “no matter how many times you “zoom” in” (p.50). Yopp (2018) reporta que luego de intentar colocar $0.999...$ y 1 en posiciones diferentes de una recta de números, y luego de admitir que $0.000...1$ no es un número, Andrew cambió sus creencias y entonces veía $0.999...$ y 1 como iguales. El autor resume este proceso de cambio como “because $1-0.999...$ is not a non-zero number, $0.999...$ y 1 are equal” (p.51).

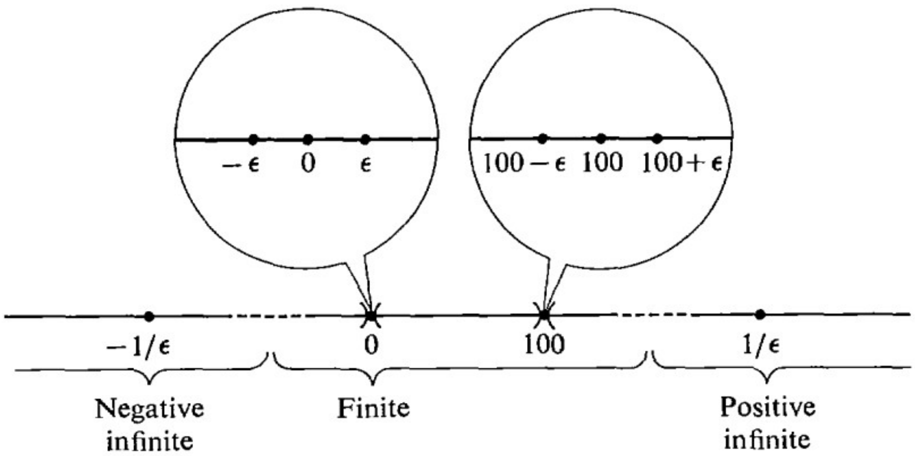
Es importante resaltar que Yopp (2018) realizó su trabajo tomando de referente la teoría de Registros de Representación de Duval. En coherencia con dicha teoría, su trabajo planteó que las concepciones erróneas sobre decimales periódicos se debían a una comprensión limitada acerca de cómo se referencian los conceptos matemáticos. Así, señaló que “the intervention made attempts to persuade Andrew that a number exists only if it can be represented in each representation system for that notion of ‘number’” (p.54). En el caso de

Andrew, éste concebía números que no podían ser representados en ninguno de sus sistemas de representación (i.e., cocientes de enteros, decimales, posiciones en una recta de números), lo que jugaria un papel en su cambio de concepciones.

No entraremos a debatir aquí sobre la legitimidad de las condiciones que plantea Yopp (2018) para la existencia de un número. Lo que podemos decir es que, incluso aceptando tales condiciones, y a diferencia de lo que planteó Yopp (2018), sí sería posible representar los números de Andrew en diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, $1-0.999...=0.000...1$ podría ser representado como cociente de enteros con $\frac{1}{10^H}$ y como decimales con $0.000...;...00\hat{1}$, usando la notación de Lightstone (1972). En lo que respecta a la representación como posiciones de una recta, ya hemos visto algo similar con lo señalado por Katz y Katz (2010b) en la Figura 3. Pero también podemos apuntar a la representación propuesta por Keisler (2012) de la recta hiperreal, tomando $\epsilon=\frac{1}{H}$:

Figura 5

Recta de los números hiperreales



Fuente: Keisler (2012, p.25)

Cabe preguntarse si las ideas de Andrew habrían cambiado en el curso de la entrevista si hubiese tenido a su disposición estas representaciones. No debe sorprender que Andrew tuviera dificultades para representar sus ideas, pues las representaciones típicas que se enseñan en la escuela, siendo más afines al análisis estándar, no permitirían fácilmente representar los números hiperreales.

Lo que se ha visto en este apartado puede no ser suficiente para concluir en la presencia de un sistema robusto de concepciones no-estándar en todos los participantes de investigaciones previas. En parte esto se debe a que las investigaciones previas no siempre han reportado con detalle las respuestas de los estudiantes o no han perseguido los interrogatorios a profundidad. Sería posible, sin embargo, que algunos de los estudiantes ejemplificados posean rudimentos de concepciones no-estándar, menos consistentes y menos articuladas que en el caso de reportado por Ely (2010), pudiendo incluso coexistir con concepciones estándar. Lo que se ha mostrado debería al menos sembrar dudas con respecto a la manera en que se han analizado las concepciones de los participantes. La presencia repetida de notación ad hoc (i.e., $0.000...1$) y la referencia a través de las décadas a diferencias infinitamente pequeñas o negligibles tienen paralelos con el análisis no-estándar que difícilmente se pueden ignorar.

3.2 Procedimientos para promover la aceptación de la evaluación unital

Varios autores han empleado argumentos de distinto tipo para promover una aceptación de la evaluación unital. Tal como se señaló más arriba, los argumentos utilizados son válidos en el contexto del análisis estándar, pero sin explicitar los supuestos necesarios los estudiantes pueden hacer una lectura diferente de símbolos como $0{,}999\ldots$ o $0{,}\bar{9}$. Esto podría explicar, al menos en algunos casos, que los argumentos que apuntan a promover la aceptación de la evaluación unital no hayan sido siempre exitosos. En particular, sin explicitarse los supuestos necesarios, el mismo argumento por sí solo puede llevar a conclusiones diferentes en el análisis estándar y el no-estándar.

A continuación se detallan algunos de los procedimientos aludidos y se presenta también de qué manera una lectura desde el Análisis no-estándar vuelve el argumento ineficaz para demostrar lo que se pretende. En particular, se observó que muchos de los argumentos se apoyan en la aceptación implícita de procedimientos como $10 \times 0.999... = 9.999\ldots$, donde se conserva la “cantidad” de decimales luego de la multiplicación. Procedimientos de este tipo no necesariamente se sostienen cuando se lee $0.999...$ como $0.\overbrace{999...9}^{H}$ en análisis no-estándar. De manera general, los procedimientos que se reportan a continuación se apoyan en una toma de límite implícita, lo que supone un salto tácito entre una sucesión y su límite. Como ya se vió, en análisis no-estándar existe un momento en el que una expresión finita puede ser evaluada en un hiperentero infinito, previo a la toma de la parte estándar. Es decir, se puede considerar el H-ésimo elemento a_H de una sucesión (a_n), antes de tomar el límite. Este salto al límite, sin pasar por la evaluación en hiperentero, no necesariamente será compartido por los estudiantes.

Por ejemplo, en su trabajo Sierpińska (1987) propone una prueba por reducción al absurdo, pensada para estudiantes que señalaron que siempre hay una diferencia pequeña entre $0.999\ldots$ y 1. Supóngase que $1-0.999...=e, e>0$. Nótese que $0.999...>0.9 \Rightarrow e<10^{-1}$. También, $0.999...>0.99 \Rightarrow e<10^{-2}$. En general, se tiene $0.999...>0.\overbrace{9...9}^{n}$, por lo que $e<10^{-n}$ para todo n. Por lo tanto, e es un número real positivo menor que todo número real positivo, lo que sería absurdo. Este argumento no es aceptado por un estudiante, Jack, quien responde: “there will always be that number epsilon between 1 and zero nine nine nine” (p.380). Lo que dice Jack tiene sentido si se hace una lectura desde el análisis no-estándar. En efecto, en análisis estándar es absurdo plantear la existencia de un número real positivo menor que todo número real positivo. En análisis no-estándar, no obstante, un infinitesimal positivo es -por definición- un número (hiperreal) positivo menor que todo número real positivo. Así, este procedimiento no sería efectivo para promover la aceptación de la igualdad $0.999...=1$ en quienes manifiesten una comprensión desde el análisis no-estándar, ya que para ellos no habría absurdo. En efecto, en el argumento se indica que $0.999...>0.\overbrace{9...9}^{n}$. Como se mencionó previamente, sin explicitar algunos supuestos del análisis estándar es posible leer las expresiones mostradas en términos afines al análisis no-estándar. Se podría así leer la expresión del lado derecho como teniendo H cantidad de nueves y la expresión del lado izquierdo como teniendo una cantidad K de nueves, donde H y K son hiperenteros infinitos pero $K>H$. Para ilustrar, si tomamos $K=H+1$, vemos que es posible escribir $1-0.\overbrace{999...9}^{H}>1-0.\overbrace{999...99}^{H+1}=e$, donde el número de nueves del lado izquierdo de la desigualdad es H y el del lado derecho es $H+1$. Así, $0.\overbrace{999...99}^{H+1}>0.\overbrace{999...9}^{H}\Rightarrow e=\frac{1}{10^{H+1}}<\frac{1}{10^{H}}$, para cualquier hiperentero H.

Otro procedimiento empleado es el de Bagni (1998), quien solicitó a 50 alumnos de 17-19 años de un Liceo optar por $0,\overline{9}=1$ o por $0,\overline{9}<1$. El autor reporta que se les volvió a plantear la misma pregunta luego de mostrar a los alumnos un argumento, la Forma A, y de nuevo tras mostrarles otro argumento, la Forma B. La Forma A era una demostración conocida:

$$0,\overline{9}\cdot 10=9,\overline{9}$$

$$0,\overline{9}\cdot 10=9+0,\overline{9}$$

$$0,\overline{9}\cdot 10-0,\overline{9}=9$$

$$0,\overline{9}\cdot(10-1)=9$$

$$0,\overline{9}\cdot 9=9.$$

$$0,\overline{9}=9/9$$

$$0,\overline{9}=1$$

La Forma B consistió en un procedimiento para hallar un número entre otros dos números dados. Se parte de un número a positivo menor a 1 escrito en forma decimal. Se pide escribir un número b en forma decimal que sea menor que 1 pero mayor que a. Se razona que si $1>a\Rightarrow 1-a>0$. Basta añadir a a un número positivo menor a $1-a$ para obtener el número b buscado. Se concluye que basta que a sea menor a 1 para poder encontrar b. Se ilustró la construcción con un ejemplo. Basta tomar un b que tenga una cifra decimal que sea mayor a la cifra en la posición correspondiente del número a. Por ejemplo, si $a=0{,}68422432763$, basta considerar $b=0{,}7$ o $b=0{,}69422432763$ o $b=0{,}688$. Luego se pide considerar $a=0{,}99999999999\ldots$, que es $0{,}\bar{9}$. Se muestra que si a fuese menor que 1 se podría aplicar el procedimiento ejemplificado. No obstante, esto es imposible por ser todos los decimales 9. Se concluye que a no es menor que 1. Como tampoco es mayor, se concluye la igualdad. Conforme se mostraban las formas A y B el porcentaje de aceptación de la igualdad aumentó (20% al inicio, 48% luego de la forma A y 70% luego de A y B), aunque al final un 22% persistía en elegir la desigualdad $0{,}\bar{9}<1$.

De manera similar a lo señalado sobre el trabajo de Sierpińska (1987), en las formas A y B usadas por Bagni (1998) se pueden hacer lecturas alternativas desde el análisis no-estándar. En la Forma A, si se lee $0{,}\bar{9}=0{,}\overbrace{999\ldots9}^{H}$, con H nueves del lado derecho, el razonamiento se ve alterado y, si se prosigue, lleva a una conclusión trivial. En efecto, a diferencia de la Forma A original, quedaría una cantidad $0{,}\overbrace{0\ldots9}^{H-1}$ en el quinto paso por el hecho de poder distinguirse $0{,}\overbrace{9\ldots99}^{H}$ de $0{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}$, con H y $H-1$ posiciones decimales respectivamente. Lo que se tendría es lo siguiente:

$$0{,}\overbrace{9\ldots99}^{H}\cdot10=9{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}$$

$$0{,}\overbrace{9\ldots99}^{H}\cdot10=9+0{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}$$

$$0{,}\overbrace{9\ldots99}^{H}\cdot10-0{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}=9,\text{ donde } 0{,}\overbrace{9\ldots99}^{H}\cdot10=\left(0{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}+0{,}\overbrace{0\ldots09}^{H}\right)\cdot10$$

$$0{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}\cdot(10-1)+0{,}\overbrace{0\ldots9}^{H-1}=9$$

$$0{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}\cdot9+0{,}\overbrace{0\ldots9}^{H-1}=9$$

$$0{,}\overbrace{9\ldots9}^{H-1}+0{,}\overbrace{0\ldots1}^{H-1}=9/9$$

$$1=1$$

En cuanto a la Forma B, si los alumnos interpretan $a=0,\bar{9}=0,\overbrace{999...9}^{H}$, con H hiperentero infinito, se podría tener $1-a=1-0,\bar{9}=\frac{1}{10^H}>0$. Bastaría añadir $\frac{1}{2\cdot 10^H}$ a $0,\bar{9}$ para obtener el número b deseado, que es mayor que a y menor que 1. En decimales, esto se podría pensar como añadiendo $0,\overbrace{000...05}^{H+1}$ a $0,\overbrace{999...9}^{H}$, obteniéndose $0,\overbrace{999...95}^{H+1}<1$.

Por su parte, Arrigo y D'Amore (1999) emplearon en su estudio una demostración de que $0,3\bar{9}=0,4$. Esta es similar a la Forma A del trabajo de Bagni (1998) referido:

$x=0,3\bar{9}$

$100\cdot x=39,\bar{9}$

$10\cdot x=3,\bar{9}$

$90\cdot x=36$

$x=0{,}4$

Si se lee $0,3\bar{9}=0,399...999$, con H posiciones decimales, el argumento cambia:

$x=0,\overbrace{399...999}^{H}$

$100\cdot x=39,\overbrace{999...9}^{H-2}$, con $H-2$ posiciones decimales

$10\cdot x=3,\overbrace{999...99}^{H-1}$, con $H-1$ posiciones decimales

$90\cdot x=36-0,\overbrace{000...09}^{H-1}$, con $H-1$ posiciones decimales

$x=0,4-0,\overbrace{000...001}^{H}$, con H posiciones decimales, de modo que no se logra la igualdad esperada.

Arrigo y D'Amore (1999) reportan que 45.6% de los 287 encuestados no estuvieron convencidos de la igualdad $0,3\bar{9}=0,4$. Del mismo modo, al preguntarse por las igualdades $0,\bar{3}=\frac{1}{3}$, $2,7\bar{9}=2,8$ y $0,\bar{9}=1$, los estudiantes señalaron no estar convencidos, respectivamente, un 34.5%, 45% y 41,8% de las veces. La lectura alternativa que hemos propuesto podría justificar este rechazo, además de dar cuenta, tal vez en algunos casos, de la falta de convencimiento.

En su trabajo teórico, Beswick (2004) plantea varias propuestas distintas para promover una aceptación de la igualdad $0.999...=1$. Por ejemplo, la autora plantea mostrar que $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ y $\frac{1}{3}=0.333...$. Señala que los estudiantes pueden ser convencidos de la última igualdad usando una calculadora para dividir 1 entre 3 o dividiendo a mano. Luego, $0.333...+0.333...+0.333...=0.999...$, de modo que $0.999...=1$. El problema en este caso es que, como fue reportado en el caso de Sarah (Ely, 2010), no todos los estudiantes aceptan que $0.333...=\frac{1}{3}$. Katz y Katz (2010a) señalan que dividir 1 entre 3 no conduce al decimal infinito $0.333...$ sino a la sucesión $(0.3, 0.33, 0.333, ...)$, siendo esta una distinción no trivial. El paso de la sucesión al decimal infinito, señalan, supone construir el sistema de los números reales y la noción de límite, que son presupuestos no necesariamente compartidos por los estudiantes.

Otra propuesta de Beswick (2004) consiste en usar una modificación del algoritmo de división y obtener que $4/4$ es igual a $0.999...$. La idea es que $4.0/4$ es 0.9 con residuo 0.4, repitiendo indefinidamente. La autora señala que entender esto es difícil y que los estudiantes con dificultades pueden tener un déficit de "number sense". Aquí debemos considerar los argumentos de Woo y Yim (2008), que indican que un decimal periódico como $0.999...$ es una expresión impropia inconsistente con el argoritmo de división y el sistema de numeración estándar que están a la base de la notación decimal en las matemáticas escolares. En efecto, mientras que el algoritmo de división estándar consiste en encontrar enteros únicos q y r tales que $a=bq+r\ (0\leqslant r<b)$, para obtener $0.999...$ mediante división se necesita otro algoritmo, que consiste en encontrar enteros únicos q y r tales que $a=bq+r\ (0<r\leqslant b)$, y que no es consistente con la matemática escolar.

Otro argumento de Beswick (2004) es considerar una sucesión de decimales recurrentes y sus equivalencias en fracciones:

$$\frac{1}{9}=0.111..., \frac{2}{9}=0.222..., \frac{3}{9}=0.333..., ..., \frac{8}{9}=0.888..., \frac{9}{9}=0.999...=1.$$

Como en el caso anterior, el algoritmo de división no conduce por sí mismo a un decimal infinito sino a una sucesión, por lo que estos procedimientos requieren la aceptación de supuestos no necesariamente compartidos. Siguiendo con el trabajo de Beswick (2004), vemos que otro argumento es considerar la sustracción $1-0.999...$ usando el algoritmo estándar de sustracción. La autora señala que “if there were an end, there would be a 1 to write down there. This fact can cause some debate!” (p.3). Como se ha visto en el apartado anterior, no se puede excluir que algunos estudiantes piensen en la diferencia como $0.000...1$, por lo que este procedimiento tampoco puede garantizar una lectura exclusiva del símbolo $0.999...$ en términos del análisis estándar.

Finalmente, la misma autora propone considerar la suma de términos de una progresión geométrica infinita $0.999...=0.9+0.09+0.009+...$. La fórmula a usar para la suma al infinito de una progresión geométrica $a, ar, ar^2, ...$ es: $S_\infty=\frac{a}{(1-r)}$, de donde $S_\infty=\frac{0.9}{(1-0.1)}=1$. La autora señala que esto puede bastar con estudiantes inclinados a creer en fórmulas sin preguntar o con aquellos que hayan estudiado series, pero queda la duda de si creerán el resultado. Señala que para los estudiantes que quieran más explicaciones se puede derivar la fórmula mediante límites. Las aclaraciones de la autora pueden suponer dificultades, pues requerirían apoyarse en la aceptación crédula de los estudiantes de alguna fórmula. Para los estudiantes que deseen obtener una justificación, será necesario haber estudiado supuestos del análisis estándar, lo que, nuevamente, no siempre es posible en todos los contextos. Para ser precisos, se debe indicar que la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica es $S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}$, y que la fórmula propuesta por la autora supone tomar un límite de antemano, con $r=0.1$, de modo que en el infinito $r^n \to 0$, lo que da la fórmula indicada. Pero se podría escribir $S_H=a\frac{1-r^H}{1-r}=0.9\frac{1-\frac{1}{10^H}}{0.9}=1-\frac{1}{10^H}=0.\overbrace{999...9}^{H}$, con H posiciones decimales, por lo esta fórmula tampoco garantiza una igualdad por sí sola, en ausencia de presupuestos del análisis estándar.

En el trabajo de Burroughs y Yopp (2010) ya mencionado, luego de presentarse el argumento por multiplicación de que $0.999...=1$ (i.e., partiendo de $1/3=0.333...$ y multiplicando por 3 ambos lados), la participante de nombre Linda primero admitió creer en la equivalencia, pero al preguntarle si estaba convencida dijo: “I think it convinces me more that point three is never going to actually equal to one third” (p.33). Por su parte, Heidi mencionó: “Oh, okay. Hmm. I guess this algorithm just does not work for every problem then” (p.34). Aquí se pueden plantear los argumentos que acabamos de indicar en ocasión de las propuestas de Beswick (2004). También debemos resaltar la semejanza con los casos reportados por Ely (2010) y por Yopp (2018), donde se observa coherencia entre el rechazo a la igualdad $0.999...=1$ y el rechazo a la igualdad $1/3=0.333\ldots$.

Como se ha visto, una lectura desde el análisis no-estándar es viable cuando no se comparten los supuestos y convenciones necesarios con el estudiante, lo que podría dar cuenta de parte de la ineficacia de los argumentos con que se busca promover la evaluación unital. En particular, una lectura desde el análisis no-estándar del símbolo $0.999\ldots$ podría llevar a rechazar razonamientos del tipo $10\times 0.999...=9.999\ldots$, pues se esperaría que la cantidad de posiciones decimales disminuya luego de la multiplicación, sin dejar de haber infinitas posiciones decimales, H del lado izquierdo y $H-1$ del derecho. Por supuesto, no afirmamos que cada vez que un estudiante rechaza un argumento sea porque está considerando una lectura alterna del mismo. Son diversos los factores que podrían jugar un papel en la explicación del fenómeno que nos concierne (e.g., contrato didáctico, factores institucionales, factores de motivación, etc.). Lo que buscamos ilustrar al desarrollar los argumentos desde una perspectiva no-estándar es que por sí mismos, sin el contexto requerido para una lectura estándar, no puede esperarse de tales argumentos que conduzcan a una conclusión única. En concordancia con lo mencionado en el capítulo previo, no es posible saber si las resistencias a los argumentos se deben siempre a lecturas no-estándar: las investigaciones revisadas no ofrecen suficiente evidencia para ser concluyentes. Pero al menos sabemos que los argumentos no son auto-contenidos, lo que debilita su poder de persuasión.

3.3 Conclusiones

El panorama general que nos dan los trabajos revisados en este capítulo es que hay evidencia de concepciones similares a las no-estándar en diversas investigaciones a lo largo del tiempo. Estas concepciones han aparecido bajo la forma de referencias explícitas a diferencias o cantidades infinitamente pequeñas, pero también en la forma de escrituras propias de los participantes, que además guardan similitudes a través de épocas y contextos. También se observa diferencias en la estabilidad de las concepciones: dependiendo del caso se puede dar un cambio luego de la instrucción o persistirse en un rechazo a la igualdad $0.999... = 1$, aunque es difícil saber si, cuando hubo un cambio, fue real o sólo el producto aparente de, por ejemplo, un contrato didáctico.

También se observa que, en general, el análisis no-estándar ha estado ausente en las investigaciones y que han sido pocos los trabajos en que se hace siquiera una mención del mismo. Esta ausencia es más marcada en los trabajos más antiguos y en los trabajos más recientes es que se observa una referencia más explícita al análisis no-estándar. Parece ser que la publicación del trabajo de Ely (2010) tuvo una influencia en ello, dado que es referenciado en algunos de los trabajos más recientes.

Resaltamos también que ha sido, en términos generales, más fácil reunir evidencia sobre la presencia de concepciones no-estándar en la medida en que los investigadores emplearon métodos menos estructurados. Los cuestionarios, por su naturaleza, suelen restringir la diversidad de respuestas posibles que los participantes pueden ofrecer. Por el contrario, los trabajos que incluyeron alguna forma de entrevista fueron más aptos para visibilizar concepciones similares a las no-estándar.

CONSIDERACIONES FINALES

La revisión de documentos realizada pone en evidencia que la existencia de concepciones no-estándar entre participantes de investigaciones previas es más que una mera posibilidad. Hemos visto cómo, a lo largo de varias décadas, diversas investigaciones han reportado comportamientos que son difíciles de comprender si se toma como único referente matemático al análisis estándar. ¿Cómo entender los reportes de diferencias infinitesimales, la notación ad hoc infinitesimal, las afirmaciones de que $0.999...=1$ porque la diferencia es "casi" nula, etc., sin la perspectiva que ofrece algo como el análisis no-estándar?

Debemos señalar que la naturaleza del presente trabajo no nos permite determinar en qué proporción de estudiantes se manifiestan estos comportamientos, ni en qué proporción de la literatura sobre el tema se ha tomado de referente matemático sólo al análisis estándar. Lo que se puede afirmar es que hay razones para pensar que concepciones no-estándar han aparecido en trabajos previos y que ha sido difícil reconocerlas sin otro referente matemático.

Por otro lado, no pretendemos afirmar que toda resistencia a la evaluación unital se deba únicamente a que los estudiantes hacen una lectura a partir de concepciones no-estándar. Dichas concepciones no son simples y con seguridad siguen una secuencia evolutiva propia, tal vez con puntos de encuentro con las concepciones estándar, pero sin duda con puntos de divergencia. Es posible entonces que algunas de las concepciones señaladas en este trabajo no estén al nivel de desarrollo que evidenció Sarah en el estudio de Ely (2010), ni posean la misma estabilidad. No obstante, las concepciones exhibidas no son menos reales por ser más rudimentarias.

En lo que respecta a los procedimientos utilizados para promover una aceptación de la evaluación unital, se ha visto que una gran parte consiste en presentar argumentos, como demostraciones o algoritmos, de los que se esperaba derivar un convencimiento en los participantes de la igualdad $0.999...=1$. Procedimientos de este tipo no son la única manera de enseñar y sería posible hacer un análisis de, por ejemplo, secuencias didácticas extensas que busquen promover la aceptación de la evaluación unital. A diferencia de una mera demostración, que hemos visto no es siempre auto-contenida y puede ser leída en términos no-estándar, una secuencia didáctica extensa podría cumplir con homologar los supuestos del análisis del investigador y del estudiante, por lo que se esperaría menos rechazo a la evaluación unital. Sin embargo, esto no quiere decir que las secuencias didácticas no puedan ser sujetas a crítica, en especial si no consideran en su diseño la posibilidad de que los participantes posean de antemano concepciones no-estándar, como las que se reconocen en ideas sobre diferencias infinitamente pequeñas o en el uso de notación ad hoc para representar cantidades infinitesimales (i.e., $0.000...1$). Esta cuestión, sin embargo, es de una magnitud que requeriría una investigación adicional, lo que escapa a los alcances del presente estudio.

En la medida en que las concepciones no-estándar pueden llegar a constituir un sistema robusto y, eventualmente, ser formalizadas matemáticamente, se hace necesario para los investigadores y docentes estar alerta a su presencia. La historia de las matemáticas atestigua una dualidad en la evolución del análisis que parece tener paralelos en el aprendizaje de los estudiantes. Recalcamos, no obstante, que no es posible ofrecer ahora una explicación del origen de este paralelo, que podría deber su existencia a procesos espontáneos en el aprendizaje de los alumnos, como a factores didácticos, institucionales u otros. En todo caso, queda claro que sin tomar en cuenta esta realidad será difícil comprender algunas de las dificultades que tienen los estudiantes con respecto al cálculo, así como será difícil comprender por qué no siempre son persuadidos por los argumentos que se usan para promover una aceptación de, por ejemplo, la igualdad $0.999...=1$.

Esto último tiene especial importancia dada la situación algo anómala que supone la evolución paralela de dos versiones del análisis. Podríamos sentirnos inclinados a considerar las distintas geometrías y decir que ocurre algo similar. Así, se podría decir que una demostración del Teorema de Pitágoras supone una geometría particular y que no cabría esperar que por sí sola, en ausencia de los axiomas de base, la demostración convenza a todos. No obstante, hay una diferencia importante. La geometría euclidiana es más o menos intuitiva y parece que las concepciones que espontáneamente desarrollan los estudiantes se alínean con ella. Es, también, la primera geometría axiomatizada que aparece en la historia. Además, no suelen trabajarse otras geometrías a nivel escolar y universitario (al menos no para la mayoría de estudiantes). El caso del análisis no-estándar es distinto porque las ideas que le son afines son las más intuitivas, mientras que pensar en términos epsilon-delta no, y esto tiene un paralelo histórico. Además, el análisis no-estándar, en cierto sentido, “compite” con el análisis estándar como versión formalizada del cálculo. En efecto, es posible traducir resultados del análisis estándar en términos del análisis no-estándar y vice-versa (cf. Katz y Katz, 2010a, sobre la demostración no-estándar de Bernstein y Robinson de un caso de una conjetura de Halmos y su subsecuente traducción estándar), situación que no siempre tiene un símil entre diferentes geometrías.

El trabajo que se ha realizado en éstas páginas puede servir como base a investigaciones posteriores, en las que puedan emplearse los métodos de entrevista y observación requeridos para esclarecer la presencia o ausencia de concepciones no-estándar en estudiantes, así como determinar la secuencia evolutiva que podrían seguir tales concepciones. Hemos visto que los métodos de recojo de datos han tenido limitaciones, en parte debido a que no se ha considerado lo que hemos desarrollado. Es necesario perseguir las implicancias del presente estado del arte con investigaciones más atentas a las posibilidades del análisis no-estándar.

Sobre la metodología del estado del arte, las categorías de búsqueda empleadas aquí podrían servir de referente para la realización de otros estados del arte sobre temas análogos. En particular, elaborar el universo documental mediante la recopilación reiterada del conjunto de trabajos citados por -y que citaron a- un trabajo de referencia resultó muy valioso para la obtención de los datos necesarios y el logro de los objetivos.

Como corolario señalamos que, además de ayudarnos a comprender el pensamiento de los estudiantes en relación al infinito, la existencia del análisis no-estándar invita a explorar sus posibilidades en la instrucción. Como se mencionó al inicio, son pocas las veces en que se ha empleado el análisis no-estándar en la enseñanza. Se necesitan investigaciones que indaguen con mayor detalle sobre la posibilidad -y las dificultades- de ofrecer una instrucción a partir del análisis no-estándar. Tal vez sea posible aprovechar las concepciones no-estándar de los estudiantes y optimizar la enseñanza de algunos temas importantes del cálculo, tales como el concepto de derivada o la regla de la cadena, entre otros. Este es un reto que investigaciones futuras deberán afrontar.

Quisiéramos acabar este trabajo con una anécdota, contada por Abraham Robinson (1996) en el prefacio a la segunda edición de su *Non-standard Analysis*. Robinson dió una charla en Princeton en 1973, al final de la cual el célebre Kurt Gödel comentó lo siguiente:

> "I would like to point out a fact that was not explicitly mentioned by Professor Robinson, but seems quite important to me; namely that non-standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result; and it is true in an even higher degree in other cases. This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of non-standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future" (p.x).

Qué papel debe jugar el análisis no-estándar en la didáctica de las matemáticas es algo que la investigación determinará. Puede que las palabras de Gödel sean proféticas. El veredicto final lo tendrá la historia.

APÉNDICE: ÁLGEBRA DE LOS HIPERREALES

En este apartado se presenta una descripción matemática de los números hiperreales, siguiendo el planteamiento axiomático de Keisler (2012). Hay maneras de construir los números hiperreales, mucho más detalladas, pero para los propósitos de este trabajo nos limitamos a presentar axiomas y teoremas básicos. Para esta descripción asumimos como conocidos los axiomas de los números reales (i.e., axiomas algebraicos, de orden y de completitud). También se presentan definiciones y teoremas, omitiéndose las demostraciones de estos últimos por brevedad. Para mayor detalle ver Keisler (2007) y Keisler (2012).

Axioma de extensión

a) El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un subconjunto del conjunto $\mathbb{R}^*$ de los números hiperreales.

b) Hay una relación $<^*$ en $\mathbb{R}^*$ tal que la relación de orden $<$ en $\mathbb{R}^*$ es un subconjunto de $<^*$, $<^*$ es transitiva y satisface la ley de tricotomía.

c) Existe un número hiperreal ε tal que $0<^*\varepsilon$ y $\varepsilon<^*r$ para todo real positivo r.

d) Para toda función real f, hay una función hiperreal f^* con el mismo número de variables, llamada la extensión natural de f.

Axioma de transferencia

Toda proposición real válida para todos los números reales es válida para todos los números hiperreales.

Mediante esta axioma todos los axiomas conocidos de los números reales se hacen válidos para los hiperreales, lo que permite realizar cómputos con los hiperreales de la misma manera que con los reales. Antes de ilustrar estos cómputos, debemos listar algunas definiciones.

Definición

Se dice que un número hiperreal b es:

Infinitesimal positivo, si b es positivo pero menor que cualquier número real positivo.

Infinitesimal negativo, si b es negativo pero mayor que cualquier número real negativo.

Infinitesimal, si b es infinitesimal positivo, infinitesimal negativo, o cero.

Finito, si b está entre dos números reales

Infinito positivo, si b es mayor que cualquier número real

Infinito negativo, si b es menor que cualquier número real.

Reglas para números infinitesimales, finitos e infinitos

Sean ε, δ infinitesimales; b, c números hiperreales finitos pero no infinitesimales; y H, K números hiperreales infinitos.

I. Números reales:
El único número real infinitesimal es 0.
Todo número real es finito.

II. Productos:
$\delta \cdot \varepsilon$ y $b \cdot \varepsilon$ son infinitesimales.
$b \cdot c$ es finito pero no infinitesimal.
$H \cdot b$ y $H \cdot K$ son infinitos.

III. Negativos:
$-\varepsilon$ es infinitesimal.
$-b$ es finito pero no infinitesimal.
$-H$ es infinito.

IV. Cocientes:
$\varepsilon / b, \varepsilon / H$ y b / H son infinitesimales.
b / c es finito pero no infinitesimal.
$b / \varepsilon, H / \varepsilon$ y H / b son infinitos, siempre que $\varepsilon \neq 0$.

V. Recíprocos:
si $\varepsilon \neq 0, 1/\varepsilon$ es infinito.
$1/b$ es finito pero no infinitesimal.
$1/H$ es infinitesimal.

VI. Raíces:
si $\varepsilon > 0$, $\sqrt[n]{\varepsilon}$ es infinitesimal.
si $b > 0$, $\sqrt[n]{b}$ es finito pero no infinitesimal.
si $H > 0$, $\sqrt[n]{H}$ es infinito.

VII. Sumas:
$\varepsilon + \delta$ es infinitesimal.
$b + \varepsilon$ es finito pero no infinitesimal.
$b + c$ es finito (posiblemente infinitesimal).
$H + \varepsilon$ y $H + b$ son infinitos.

Existen también formas indeterminadas, que se detallan en la siguiente tabla:

Tabla 3

Formas indeterminadas y ejemplos

Forma indeterminada	infinitesimal	finito (igual a 1)	infinito
ε/δ	$\varepsilon^2/\varepsilon$	ε/ε	$\varepsilon/\varepsilon^2$
H/K	H/H^2	H/H	H^2/H
$H\cdot\varepsilon$	$H\cdot(1/H^2)$	$H\cdot(1/H)$	$H^2\cdot(1/H)$
$H+K$	$H+(-H)$	$(H+1)+(-H)$	$H+H$

Fuente: Keisler (2012, p.32)

Para culminar con esta exposición, presentamos algunas definiciones adicionales y el llamado principio de la parte estándar, junto con algunas de sus consecuencias. Este principio será indispensable para la construcción del cálculo basado en infinitesimales.

Definición

Se dice que dos números hiperreales b y c están infinitamente próximos uno al otro, $b\approx c$, si su diferencia $b-c$ es infinitesimal.

Principio de la parte estándar:

Para todo número hiperreal finito b, existe un único número real r que es infinitamente próximo a b.

Definición

Sea b un número hiperreal finito. La parte estándar de b, denotada por $st(b)$, es el número real que es infinitamente próximo a b. Los números hiperreales infinitos no tienen partes estándar.

Teorema

Sean a y b números hiperreales finitos. Entonces:

I. $st(-a)=-st(a)$.

II. Si $st(b)\neq 0$, entonces $st(a/b)=st(a)/st(b)$.

III. $st(a+b)=st(a)+st(b)$.

IV. $st(a^n)=(st(a))^n$.

V. $st(a-b)=st(a)-st(b)$.

VI. Si $a\geq 0$, entonces $st(\sqrt[n]{a})=\sqrt[n]{st(a)}$.

VII. $st(ab)=st(a)\cdot st(b)$.

VIII. Si $a\leq b$, entonces $st(a)\leq st(b)$.

Para ilustrar el uso del axioma de transferencia y la naturaleza de los números hiperreales, Keisler (2012) ofrece algunos ejemplos. Entre ellos tenemos:

Sea f la función real dada por la ecuación $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. El gráfico de esta función es el semicírculo con centro en el origen. Según el axioma de transferencia, proposiciones reales válidas para todos los reales x, como

si $1-x^2\geq 0, f(x)=\sqrt{1-x^2}$ o

si $1-x^2<0, f(x)$ es indefinida,

son válidas para los todos los hiperreales x. La extensión natural f^* de f es dada por la misma ecuación $f^*(x)=\sqrt{1-x^2}$. Por brevedad, se puede escribir f simplemente, en lugar de f^* (la extensión natural de f).

REFERENCIAS

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167–198). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In A. Michèle, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140). Mexico: Grupo Editorial Iberoamerica.

Bagni, G. T. (1998). Dimostrare e convincere. *Bollettino dei docenti di matematica*, 36, 53-60.

Beswick, K. (2004). Why does 0.999...= 1?: A perennial question and number sense. The *Australian Mathematics Teacher*, *60*(4), 7.

Błaszczyk, P., Katz, M. G., & Sherry, D. (2013). Ten Misconceptions from the History of Analysis and Their Debunking. *Foundations of Science*, *18*(1), 43–74. https://doi.org/10.1007/s10699-012-9285-8

Borovik, A., & Katz, M. G. (2012). Who Gave You the Cauchy–Weierstrass Tale? The Dual History of Rigorous Calculus. Foundations of Science, 17(3), 245–276. https://doi.org/10.1007/s10699-011-9235-x

Burroughs, E. A., & Yopp, D. (2010). Prospective Teachers' Understanding of Decimals with Single Repeating Digits. *Investigations in Mathematics Learning*, *3*(1), 23–42. https://doi.org/10.1080/24727466.2010.11790299

Cihlar, J., Eisenmann, P., & Krátká, M. (2015). Omega Position – a specific phase of perceiving the notion of infinity. *Scientia in Educatione*, *6*(2), 51–73. https://doi.org/10.14712/18047106.184

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An Apos Analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253–266. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0

Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the

Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(3), 232–258. https://doi.org/10.1080/14926156.2013.816389

Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999…< 1. *Teaching of Mathematics*, *11*(1), 35-40.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 117–146. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/20720128

Gómez Vargas, M., Galeano Higuita, C., & Jaramillo Muñoz, D. A. (2015). El estado del arte: una metodología de investigación. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, *6*(2), 423–442.

Hitt, F., & Páez, R. (2001). The notion of limit and learning problems. *Proceedings PME-NA XXIII*, 1, 169-176.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *Matemática educativa: Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica.

Kanovei, V., Katz, K. U., Katz, M. G., & Schaps, M. (2015). Proofs and Retributions, Or: Why Sarah Can’t Take Limits. *Foundations of Science*, *20*(1), 1–25. https://doi.org/10.1007/s10699-013-9340-0

Katz, K. U., & Katz, M. G. (2008). A strict non-standard inequality. 999...< 1. *arXiv preprint arXiv:0811.0164*.

Katz, K. U., & Katz, M. G. (2010a). When is .999... less than 1?, *7*(1), 3–30. Retrieved from http://arxiv.org/abs/1007.3018

Katz, K. U., & Katz, M. G. (2010b). Zooming in on infinitesimal 1–.9.. in a post-triumvirate era. Educational Studies in Mathematics, 74(3), 259–273. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9239-4

Katz, M., & Polev, L. (2017). From Pythagoreans and Weierstrassians to True Infinitesimal Calculus. *Journal of Humanistic Mathematics*, *7*(1), 87–104. https://doi.org/10.5642/jhummath.201701.07

Keisler, J. H. (2007). *Foundations of infinitesimal calculus*. On-line Edition. Se recupera en: https://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html

Keisler, H. J. (2012). *Elementary Calculus: an infinitesimal approach* (3rd ed.). New York: Dover Publications.

Lightstone, A. H. (1972). Infinitesimals. *The American Mathematical Monthly*, *79*(3), 242–251. https://doi.org/10.1080/00029890.1972.11993024

Loeb, P. A., & Wolff, M. P. H. (Eds.). (2015). *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician*. https://doi.org/10.1007/978-94-017-7327-0

Margolinas, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x*, *16*, 51-66.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM*, *46*(4), 621–633. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0580-4

Nelson, E. (1977). Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *83*(6), 1165–1198. Retrieved from https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183539849

Oehrtman, M. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(4), 396-426. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/40539345

Oktaç, A., & Vivier, L. (2016). Conversion, Change, Transition… in Research About Analysis. In B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 87–121). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_5

Richman, F. (1999). Is 0.999…= 1?. *Mathematics Magazine*, *72*(5), 396-400.

Robinson, A. (1996). *Non-standard analysis* (Rev. ed). Princeton, N.J: Princeton University Press.

Sacristán, A. I. (1991). Los Obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. *Educación matemática*, *3*(01), 5-18.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371–397. https://doi.org/10.1007/BF00240986

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History* (3rd ed.). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6053-5

Sullivan, K. (1976). The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis

Approach. *The American Mathematical Monthly*, *83*(5), 370–375. https://doi.org/10.2307/2318657

Tall, D. (1977). Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics. *Mathematical Education for teaching*, *2*(4), 2-18.

Tall, D. (1981). Intuitions of Infinity. *Mathematics in School, 10*(3), 30-33. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/30214290

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9531-9

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, *82*, 44-49.

van den Berg, I., & Neves, V. (Eds.). (2007). *The Strength of Nonstandard Analysis*. https://doi.org/10.1007/978-3-211-49905-4

Vinsonhaler, R. (2016). Teaching Calculus with Infinitesimals. *Journal of Humanistic Mathematics*, *6*(1), 249–276. https://doi.org/10.5642/jhummath.201601.17

Vivier, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. *El cálculo y su enseñanza*, *3*.

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2011). Preservice Teachers' Understandings of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion: Strength and Stability of Belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(2), 129–159. https://doi.org/10.1080/14926156.2011.570612

Woo, J., & Yim, J. (2008). Revisiting 0.999... and (-8) ⅓ in School Mathematics from the Perspective of the Algebraic Permanence Principle. *For the Learning of Mathematics*, *28*(2), 11-16.

Yopp, D. A. (2018). When an argument is the content: Rational number comprehension through conversions across registers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 42–56. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.001

ANEXO: MUESTRA DOCUMENTAL

N°	Referencia	Año	Idioma
1	Tall, D. O. (1977). Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics. Mathematical Education for teaching, 2(4), 2-18.	1977	inglés
2	Tall, D. O., & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. Mathematics Teaching, 82, 44-49.	1978	inglés
3	Tall, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. In short communications, Fourth International Congress on Mathematical Education (p. C5).	1980	inglés
4	Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. Educational Studies in Mathematics, 11(3), 271-284.	1980	inglés
5	Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. In Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME (pp. 322-326).	1981	Francés
6	Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. Mathematics in School, 10(3), 30-33.	1981	inglés
7	Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, 12(2), 151-169.	1981	inglés
8	Sierpinska, A. (1985). Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en didactique des mathématiques, 6(1), 5-67.	1985	Francés
9	Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational studies in Mathematics, 18(4), 371-397.	1987	inglés
10	MARGOLINAS, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. Petit x, 16, 51-66.	1988	Francés
11	Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. Focus on Learning Problems in mathematics, 12(3), 49-63.	1990	inglés
12	Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. For the learning of mathematics, 11(3), 20-24.	1991	inglés
13	Sacristán, A. I. (1991). Los Obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. Educación matemática, 3(01), 5-18.	1991	Castellano
14	Bagni, G. T. (1998). Dimostrare e convincere. Bollettino dei docenti di matematica, 36, 53-60.	1998	Italiano
15	Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 22B, 5, 465-494.	1999	Italiano
16	Richman, F. (1999). Is 0.999…= 1?. Mathematics Magazine, 72(5), 396-400.	1999	inglés

17	Szydlik (2000) - Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function	2000	inglés
18	Hitt, F., & Páez, R. (2001). The notion of limit and learning problems. Proceedings PME-NA XXIII, 1, 169-176.	2001	inglés
19	Cornu B. (2002) Limits. In: Tall D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht	2002	inglés
20	Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice (pp. 232-257). Springer, Dordrecht.	2002	inglés
21	Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. Matemática educativa: Aspectos de la investigación actual. México: Fondo de Cultura Económica.	2003	Castellano
22	Beswick, K. (2004). Why does 0.999...= 1?: A perennial question and number sense. Australian Mathematics Teacher, The, 60(4), 7.	2004	inglés
23	Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. The American Mathematical Monthly, 111(5), 411-424.	2004	inglés
24	Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. Educational Studies in Mathematics, 55(1-3), 103-132.	2004	inglés
25	Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M., & Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. Notices of the AMS, 51(7), 741-750.	2004	inglés
26	Bagni, G. T. (2005). The historical roots of the limit notion: Cognitive development and the development of representation registers. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5(4), 453-468.	2005	inglés
27	Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. Educational Studies in Mathematics, 58(3), 335-359.	2005	inglés
28	Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. Educational Studies in Mathematics, 60(2), 253.	2005	inglés
29	Pemantle, R., & Schneider, C. (2007). When Is 0.999… Equal to 1?. The American Mathematical Monthly, 114(4), 344-350.	2007	inglés
30	Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999…< 1. Teaching of Mathematics, 11(1), 35-40.	2008	inglés
31	Woo, J., & Yim, J. (2008). Revisiting 0.999... and (-8) ⅓ in School Mathematics from the Perspective of the Algebraic Permanence Principle. For the Learning of Mathematics, 28(2), 11-16.	2008	inglés

32	Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 9(1), 5-28.	2009	inglés
33	Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. Journal for Research in Mathematics Education, 396-426.	2009	inglés
34	Navarro, A., & Carreras, P. P. (2010). A socratic methodological proposal for the study of the equality 0.999…= 1. The Teaching of Mathematics, 13(1), 17-34.	2010	inglés
35	Burroughs, E. A., & Yopp, D. (2010). Prospective teachers' understanding of decimals with single repeating digits. Investigations in Mathematics Learning, 3(1), 23-42.	2010	inglés
36	Vivier, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. El cálculo y su enseñanza, 3.	2011	Castellano
37	Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2011). Preservice teachers' understandings of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11(2), 129-159.	2011	inglés
38	Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality. 999…= 1. The Journal of Mathematical Behavior, 30(4), 304-318.	2011	inglés
39	Le Thai, B. A. O. (2012). Notion de limite et décimalisation des nombres réels: une ingenierie didactique.	2012	Francés
40	Norton, A., & Baldwin, M. (2012). Does 0.999... Really Equal 1?. The Mathematics Educator, 21(2).	2012	inglés
41	Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.9 and 1. Canadian Journal of science, mathematics and Technology education, 13(3), 232-258.	2013	inglés
42	Cihlar, J., Eisenmann, P., & Krátká, M. (2015). Omega Position–a specific phase of perceiving the notion of infinity. Scientia in educatione, 6(2), 51-73.	2015	inglés
43	Yopp, D. A. (2018). When an argument is the content: Rational number comprehension through conversions across registers. The Journal of Mathematical Behavior, 50, 42-56.	2018	inglés