PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

MODELIZACIÓN DE LA FUNCIÓN SENO: UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN SOBRE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL DE UN EDIFICIO FRENTE A UN SISMO

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

PERCY LUJAN ROSADIO

ASESORA

CINTYA SHERLEY GONZALES HERNÁNDEZ

Noviembre, 2019

RESUMEN

Esta investigación presenta la implementación de un proceso de modelización de la función seno que se desarrolla por medio de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El diseño del REI parte de un cuestionamiento del mundo, dentro de una institución usuaria, contemplada en la Ingeniería de Estructuras que analiza cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo. El recorrido para responder a esta cuestión vincula los campos de la Física y la Matemática, aborda la reacción de la estructura del edificio como un péndulo correspondiente a un Movimiento Armónico Simple (MAS), el cual al ser descrito matemáticamente brinda una razón de ser a la función seno, pues se articula el MAS como la proyección de un Movimiento Circular Uniforme (MCU) junto con organizaciones matemáticas precedentes relacionadas al seno trigonométrico. Así, en esta experiencia desde la perspectiva de la TAD, se analiza el desarrollo que tiene un dispositivo correspondiente al paradigma de la investigación y cuestionamiento del mundo dentro de una institución escolar en donde prevalece aún el paradigma de la monumentalización del saber. Al evidenciar la presencia de gestos didácticos expresados como dialécticas y la construcción praxeologías, se otorga una consideración favorable del REI realizado.

Palabras clave: Función seno y coseno; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Recorrido de Estudio e Investigación; Dialécticas.

ABSTRACT

This research presents the implementation of a modeling process of the sine functions that is developed by means of a Study and Research Course (SRC) within the framework of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). The design of the SRC starts from a questioning of the world, within a user institution contemplated as the Engineering of Structures, analyzing how the structure of a building reacts against an earthquake. The course to answer this question links the fields of physics and mathematics, addresses the reaction of the structure of the building as a pendulum corresponding to a Simple Harmonic Movement (SHM), which when described mathematically provides a rationale to the sine function, since the SHM is articulated as the projection of a Uniform Circular Movement (UCM), together with previous mathematical organizations related to the trigonometric sine. Thus in this experience from the perspective of the ATD, the development of a device corresponding to the paradigm of research and questioning the world is analyzed, within a school institution where the paradigm of the monumentalization of knowledge still prevails. When evidencing the presence of didactic gestures expressed as dialectics and the construction of praxeologies, a favorable consideration of the SRC made is granted.

Keywords: Sine and cosine functions; Anthropological Theory of the Didactic; Study and Research Courses; Dialectics.

DEDICATORIA

A Dios, que por su infinito amor y misericordia no me desampara, y siempre me brinda una nueva oportunidad

A mis padres Gladys Rosadio y José Salazar, y a mis hermanos Carolina, Josué y Yomaria por su enorme paciencia, su amor, sus enseñanzas y oraciones

Al amor de mi vida Yanella Echevarría, por creer en mí y siempre animarme a seguir adelante

A los maestros del Perú, por su heroísmo y lucha constante por una sociedad que merece ser mejor

AGRADECIMIENTOS

A Dios por otorgarme la bendición de poder desarrollarme personal y profesionalmente.

A mi estimada asesora, la Mg. Cintya Gonzales Hernández, por su apoyo, exigencia constante, que me permitieron desarrollar la tesis.

A la Dra. Avenilde Romo Vázquez, por sus valiosos aportes que me permitieron esclarecer dificultades y concretar con el proyecto.

Al Dr. Francisco Ugarte Guerra, por hacer vivencial la relación entre Matemática y Didáctica.

A la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre por sus enseñanzas con alto nivel académico, que fueron fuente de conocimiento y motivación para emprender y desarrollar mi investigación.

A la Dra. Jesús Flores Salazar, por su alta exigencia y rigor, que me permitió dar el mayor esfuerzo y superar mis limitaciones.

Al Dr. Luis Adolfo Piscoya Hermosa, por enseñarme el valor del estudio, la ciencia y la necesidad de mejorar como docentes y como sociedad.

A mis compañeros de maestría, por compartir sus fortalezas.

.

A mis estimados estudiantes, por sus alegrías y enseñanzas.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CONSIDERACIONES INICIALES

Nuestro interés por estudiar las funciones trigonométricas se enmarca en torno a la problemática de la enseñanza de la Matemática en la escuela. Los aprendizajes se muestran limitados a la reproducción de las técnicas que figuran en los libros, recogidos y expuestos por el docente en clase, y se espera que sea replicado por los estudiantes en las evaluaciones. En ese sentido, nos encontramos en un aprendizaje ficticio, pues en el corto plazo la técnica abordada carece de una razón de ser, de sentido y articulación. Abordar esta problemática desde la investigación, exige un marco teórico que pueda comprender estos fenómenos desde una perspectiva amplia y que contemple el análisis del saber puesto en juego como un aspecto central de los procesos didácticos. Tal es el caso de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual, desde el programa epistemológico de investigación, privilegia el análisis del saber y su transposición institucional que identifica el fenómeno de la visita de obras o monumentalismo del saber como aquel modelo de enseñanza tradicional en donde el centro de la atención como autoridad del conocimiento recae en el docente. Este brinda unas matemáticas como respuestas resueltas sin cuestionamientos, produciendo consecuencia de ello un aprendizaje superficial, el cual es necesario enfrentar desde una nueva propuesta: la pedagogía de la investigación y el cuestionamiento del mundo.

Se propone entonces el marco que ofrece la TAD y dentro de ella dos dimensiones complementarias. Por un lado, está el aspecto estructural de las matemáticas a enseñar, que se describe en términos de praxeologías u organizaciones matemáticas. Por otro lado, está el aspecto funcional, que se ve reflejado por medio de los momentos didácticos u organización didáctica. Dentro de esta última dimensión, la TAD plantea los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), los cuales, a partir de una pregunta generatriz de gran potencial capaz de desarrollar nuevas cuestiones y respuestas de manera progresiva, son capaces de construir organizaciones matemáticas articuladas y con una razón de ser, al superar la enseñanza de solo respuestas.

La presente investigación centra su estudio sobre el aspecto didáctico y organiza el estudio en cuatro capítulos. En el primer capítulo, se presenta la problemática, la cual se expone las investigaciones de referencia, así como la justificación y los objetivos de nuestra investigación.

En el segundo capítulo, se presenta un estudio epistemológico; es decir, aspectos históricos de la función seno, además de un estudio ecológico para ver las condiciones y restricciones institucionales en que se desenvuelve la función seno y coseno.

Luego de tener una mayor comprensión del objeto matemático, en el tercer capítulo, se presentan algunos aspectos del marco teórico y metodológico que brinda la TAD, como el análisis clínico didáctico y las fases metodológicas para el diseño de secuencias de modelización, que incluye además el diseño didáctico y matemático del REI.

Teniendo como base el diseño matemático y didáctico, en el cuarto capítulo, se procede a describir y analizar la implementación del REI. Se enfatiza los gestos didácticos de los estudiantes que son denominados como las dialécticas.

Finalmente, se señala las consideraciones finales de nuestra investigación en el quinto capítulo, así como algunas perspectivas para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo, se plantea un breve recuento de las principales investigaciones encontradas con relación al objeto de estudio del proyecto, la función seno, así como trabajos relacionados a los procesos de modelización e implementación de un REI. Posteriormente, se presentan argumentos que justifica el presente trabajo en el ámbito de la comunidad científica. Finalmente, se formula la pregunta de investigación, acompañada de los objetivos generales y específicos.

1.1. Investigaciones de referencia

Varias investigaciones han despertado interés sobre los fenómenos didácticos que se manifiestan alrededor de las funciones trigonométricas seno y coseno. Esto procura contribuir a una mayor comprensión de su enseñanza en el nivel escolar y universitario, a partir del estudio de las relaciones y elementos que se pueden dar alrededor de este proceso. A continuación, se muestran las principales investigaciones que contribuyen al presente proyecto.

Al respecto Kendal y Stacey (1996), comparan dos procedimientos para introducir la función seno en una experimentación en la que un grupo de estudiantes reciben una enseñanza desde la proporción en el triángulo rectángulo y otro grupo desde la circunferencia unitaria. Los autores afirman que los estudiantes que fueron instruidos mediante la proporción en el triángulo rectángulo obtuvieron significativamente un mejor rendimiento que aquellos estudiantes que abordaron la función trigonométrica a partir de la circunferencia trigonométrica.

En contraste Webber (2005), plantea que las funciones trigonométricas no deben expresarse como fórmulas algebraicas que involucran procedimientos aritméticos, esto referido al significado limitado que adquiere la función trigonométrica al evaluarla como un cociente de dos segmentos en un triángulo rectángulo a partir de un ángulo estático. Por ello, es que en trigonometría se debe desarrollar una comprensión y tratamientos distintos de los procesos aritméticos que suelen ser los que predominan en el contexto escolar. El autor propone la comprensión de las funciones trigonométricas haciendo uso de la circunferencia trigonométrica, y enfatiza la obtención del valor numérico y la justificación de las propiedades que poseen las funciones trigonométricas. Finalmente, de acuerdo al autor, las conclusiones de este estudio favorecen significativamente el uso de la circunferencia unitaria en el grupo experimental que muestra una mayor comprensión de los estudiantes, pues justifican los procedimientos y propiedades al resolver tareas con funciones trigonométricas.

Por su parte Demir (2012), reconoce la problemática de la introducción de la función seno desde el triángulo rectángulo, la circunferencia trigonométrica y desde la revisión de la gráfica sinusoidal. En ese sentido, propone un nuevo marco y una secuencia de aprendizaje apoyada en el uso de geometría dinámica para poder arribar al concepto de funciones seno por medio de la integración de los tres elementos que subyacen en ellas. Estos elementos son la integración del triángulo rectángulo, la circunferencia trigonométrica y la gráfica sinusoidal que utiliza la denominada función enrollado, consistente en aquella que describe la posición horizontal o vertical de un punto sobre la circunferencia trigonométrica en función del arco recorrido. Sin embargo, en este caso, bajo el mismo sistema, en vez de circunferencia, inicia con un cuadrado. Luego, sigue un hexágono, octágono que arriba a la noción de periodicidad y después de realizar el recorrido sobre una circunferencia, aborda la función seno. Las conclusiones de este estudio señalan la efectividad del diseño para promover la comprensión integral de los estudiantes sobre las funciones trigonométricas de forma que se evitaron algunas dificultades como el paso de los grados a radianes.

Estas investigaciones brindan un panorama general de las propuestas didácticas para introducir la función trigonométrica en las aulas, desde el triángulo, la circunferencia trigonométrica o una revisión de la gráfica sinusoidal con ayuda del geogebra. Cada autor señala las fortalezas de su propuesta. Por ejemplo, la simplicidad otorga el trabajar en el triángulo rectángulo una mayor articulación de saberes en la circunferencia trigonométrica, y, en relación a la gráfica sinusoidal, la construcción inductiva que se puede hacer por medio de polígonos que cumplan secuencialmente un rol similar a la circunferencia trigonométrica; no se concede especial atención a un análisis del saber puesto en juego. Esta visión panorámica nos brinda una idea general de que existe una necesidad de articular varios conceptos alrededor del seno trigonométrico, pero la necesidad de estudiar la naturaleza del concepto del seno trigonométrico en sí. De esta manera, se puede obtener las condiciones que facilitan o limitan su transferencia, tarea que se aborda en los siguientes párrafos.

Otras investigaciones plantean, para un mejor proceso de estudio las funciones trigonométricas, la necesidad de poder estudiar las condiciones que posibilitaron la aparición de las funciones trigonométricas.

Montiel (2013) aborda los aspectos epistemológicos en los que surge y se institucionaliza el concepto de función trigonométrica con la finalidad de conformar una base de significados a partir del cual pueda ser considerada su introducción al sistema escolar. En ese sentido, la autora reconoce que es la matematización del movimiento oscilatorio la práctica de referencia en la construcción de la función seno, que surge como respuesta a la necesidad de describir la oscilación y la periodicidad del movimiento. Esta investigación brinda un acercamiento epistemológico a la razón de ser de la función seno, relacionada a la matematización de un fenómeno periódico, la cual contribuye al diseño didáctico del presente proyecto.

Así mismo, Tello (2016), desde una perspectiva epistemológica, busca determinar el origen y desarrollo de la función trigonométrica, particularmente, las funciones seno y coseno. Identifica las condiciones que posibilitaron su surgimiento y el desarrollo conceptual en la transición desde la noción de razón a la de función. Para ello, realiza una revisión histórica que tiene su inicio en la geometría que identifica en el triángulo el carácter estático de los elementos trigonométricos y en donde además se concede mayor énfasis a la noción de razón. Posteriormente, reconoce que con Leonhard Euler y su trabajo *Introductio in Analysin Infinitorum* e *Institutiones Calculi Differentialis* se concede la categoría de funciones al seno y coseno trigonométrico, la cual se muestran propiedades como la periodicidad e identidades de las funciones trigonométricas sin necesidad de referirse a triángulo alguno. El autor indica que Euler planteó la función seno y coseno ante la necesidad de poder desarrollar el método general para la solución de la ecuación diferencial con coeficientes constantes.

Este trabajo contribuye fortalecer una propuesta didáctica con una mayor comprensión de la naturaleza de las funciones seno y coseno. Se tiene en cuenta la transición entre razón y función, las causas que la determinan y las propiedades que surgen.

Teniendo entonces una visión panorámica de los aspectos de enseñanza y de la naturaleza de las funciones seno y coseno, se hace necesario también arribar investigaciones de vanguardia que hayan ofrecido tratamientos con un carácter global, estructural, articulador y epistemológico. Ello implica asumir un marco teórico como referente. En ese sentido, la presente investigación, dentro del programa de investigación en didáctica de las matemáticas, asume como referente a la Teoría Antropológica de lo Didáctico TAD. Es propuesta por el investigador francés Yves Chevallard en la década de los ochentas, pues satisface plenamente los criterios mencionados. A continuación, se mencionan algunos trabajos que desde el ámbito de la TAD han sido desarrollados y que contribuyen a esclarecer y mejorar el proceso del desarrollo del saber en las aulas.

García (2005), plantea el estudio de los procesos de modelización desde el marco epistemológico de las matemáticas y su uso didáctico en la escuela secundaria. Propone que el estudio de las relaciones funcionales debe vincularse a la modelización matemática de sistemas de variación. El autor plantea un proceso de modelización entendida como un proceso de construcción de praxeologías por medio del desarrollo de cuestiones a partir de una cuestión generatriz. Esta formulación se concreta en una propuesta didáctica en aulas de Educación Secundaria en torno a la proporcionalidad y relaciones funcionales, planteando los "Planes de Ahorro" como un recorrido de estudio e Investigación REI. Su puesta en práctica muestra condiciones que favorecen y dificultan la implementación procesos de modelización matemática como actividad central en la enseñanza escolar. Esta investigación brinda información importante sobre la construcción de la secuencia didáctica, así como el análisis *a priori* y la puesta en marcha de la actividad.

Por su parte Barquero (2009) aborda en el segundo capítulo de su trabajo tesis doctoral la problemática en torno a la concepción de modelización. En el ámbito de la investigación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas determina dos posturas respecto a la modelización: concebirla como un contenido, el cual atiende un conjunto de procesos que permiten resolver un problema aplicativo de la realidad, y por otro lado identifica la modelización entendida como un instrumento o vehículo que permite a los estudiantes arribar a conceptos matemáticos, y así mismo, también indica que la modelización puede ser entendida conjugando estas dos posturas. Luego la autora plantea la modelización en el sentido de la TAD, el cual reinterpreta y reformula la concepción clásica de los procesos de modelización para situarlos dentro de un modelo epistemológico general de la construcción y difusión institucional de los conocimientos matemáticos. La autora reconoce que para la TAD la actividad de modelización matemática se encuentra en el corazón de la actividad matemática. En ese sentido se reconoce su capacidad de articulación de organizaciones matemáticas que se van construyendo conforme aparecen y desarrollan dinámicas de cuestionamientos y respuestas. La autora también caracteriza los sistemas, los modelos y las fases de un proceso de modelización matemática, todo ello con el fin buscar y adecuar dispositivos didácticos que posibiliten una integración pertinente de la modelización matemática en la enseñanza universitaria. Este trabajo nos permite comprender y diferenciar los procesos de modelización que se dan en la TAD de otras concepciones ligadas a la resolución de problemas o procesos de matematización, de tal manera que puedan dar solidez al diseño de la actividad didáctica.

Así mismo, Serrano (2013) realiza un estudio acerca de la ecología de la modelización matemática a lo largo de seis cursos académicos en el nivel universitario español en el área económico y empresarial y en el bachillerato para las ciencias sociales. La autora recoge de manera detallada los aspectos teóricos y metodológicos de la TAD para revisar y analizar los procesos transpositivos, la completitud de las organizaciones matemáticas, la modelización matemática y la ecología de los dispositivos de formación, para proponer y ejecutar una organización didáctica basada en los recorridos de estudio e investigación (REI) y determinar las condiciones que favorecen o dificultan la enseñanza de la matemáticas como una herramienta de modelización a nivel institucional. En este trabajo se analiza la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en seis cursos universitarios de economía y empresa. De acuerdo al autor, los resultados obtenidos evidencian que el estudio matemático a partir de cuestiones generatrices permite desarrollar un legítimo proceso de modelización, en el análisis sobre la previsión de ventas toma relevancia la dialéctica de los media medio en el trabajo de obtención de modelos matemáticos. Esta investigación se convierte así en uno de los principales referentes teóricos y metodológicos para desarrollar un Recorrido de Estudio e Investigación, el cual implica a su vez un proceso de modelización matemática.

Parra y Otero (2017): Este trabajo centra su atención en el funcionamiento de las dialécticas, como gestos que emergen al desarrollar un proceso de estudio propuesto desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación (REI) y que procura otorgar un mayor sentido a la enseñanza de la matemática. A partir del análisis de datos obtenidos al implementar un REI en el último año de la secundaria de la escuela argentina y cuyas preguntas de partida se vinculan al equilibrio de mercado de un modelo de oferta y demanda, las autoras proponen una metodología de análisis que se concreta en una serie de indicadores didáctico-matemáticos, los cuales permitirían determinar el funcionamiento de cada una de las dialécticas y además evidenciar y evaluar la implementación de un REI como dispositivo didáctico. Las autoras concluyen respecto al REI abordado que las dialécticas que tienen mayor presencia son la del individuo y del colectivo, la del tema y fuera-de-tema, la del estudio y de la investigación, la del análisis-síntesis praxeológica y la del análisis-síntesis didáctica, así como el de las cajas negras y cajas claras. En ese sentido, este aporte es de mucha utilidad pues mediante una transposición de sus indicadores se podrá identificar las dialécticas emergentes en el REI que se propone para la presente tesis, y analizar el impacto didáctico del dispositivo dentro del nuevo paradigma de la investigación y cuestionamiento del mundo.

Macías y Romo-Vásquez (2014) conceden importancia a la modelización matemática y su intervención en la formación de ingenieros, pues ponen de manifiesto que en la ingeniería existen dos tipos de necesidades matemáticas, las avanzadas para comprender los modelos matemáticos y las básicas para operacionalizar dichos modelos, además a partir del análisis del programa curricular de Álgebra lineal del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, evidencian que la modelización matemática, asociada al uso de modelos lineales, permitirá a los futuros profesionales caracterizar muchos fenómenos de la ingeniería. Teniendo en cuenta ello, las autoras plantean la necesidad que los estudiantes de ingeniería realicen procesos de modelización matemática, las cuales pueden cobrar mayor sentido desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Es así que, se propone una metodología para el diseño de actividades basadas en modelización matemática que consta de cuatro fases y que se apoya en el modelo praxeológico extendido de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). La primera fase corresponde a la elección del contexto extra-matemático de la actividad, seguidamente a caracterizar la naturaleza de la actividad, problema, ejercicio, praxeologías mixta, seguido de ello se procede a elegir y describir el modelo matemático en uso, para finalmente describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad. Esta metodología ha sido adecuada y utilizada posteriormente obteniendo procesos coherentes con los postulados que ofrece la TAD. En ese sentido, para el presente proyecto se toma en cuenta este trabajo y las adecuaciones posteriores para orientar la construcción del diseño didáctico.

1.2. Justificación

En los últimos quince años, se han presentado diferentes documentos normativos a nivel curricular los cuales han procurado mejorar las acciones educativas a nivel nacional, regional y local desde un enfoque cada vez más psicopedagógico centrado en el desarrollo de competencias. Estas propuestas pueden ser alentadoras, pero no ha obtenido aún avances significativos, tal como lo reflejan los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales.

En el caso de PISA 2015, de acuerdo al Ministerio de Educación (Perú, 2017a) se obtuvo una leve mejora en los resultados de las tres áreas comprendidas: Matemática, Comunicación y Ciencia, lo que permitió salir del último lugar del ranking de los países participantes. Nuestro sistema educativo aún se muestra deficiente en sus aprendizajes, tal es así que en el área de Matemáticas de los 6 niveles de desempeño planteados, el nivel superior 6 que describen las capacidades de generalización y conceptualización de situaciones de problemas complejos resulta completamente ajeno a nuestros estudiantes, pues el 0,0% no pudo arribar a este nivel. El 28% se encuentra en el nivel más elemental (el nivel 1) y el 37% se encuentra por debajo inclusive de ese nivel.

Es necesario que los diferentes ámbitos relacionados al sistema educativo y de manera particular desde la comunidad didáctica en el área de Matemáticas en nuestro país aporten científicamente con investigaciones que procuren esclarecer los procesos de prácticas y estudio de las matemáticas en aras de determinar condiciones y restricciones que faciliten el proceso de enseñanza y aprendizaje en la escuela. En ese sentido es que se plantea el presente proyecto, que tiene como objeto principal de estudio las funciones trigonométricas seno y coseno en el quinto de secundaria.

El gobierno del Perú (2016a) por medio del Diseño Curricular se observa que la función seno efectivamente es abordada en la educación básica y está presente en el quinto de secundaria, descrito en el estándar de nivel 6 como función periódica y en el estándar destacado de manera explícita como función seno tal como se puede apreciar en la figura 1.

Ciclo	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
DESTACADO	Resuelve problemas referidos a analizar cambios discontinuos o regularidades, entre magnitudes, valores o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden incluir la regla de formación de sucesiones convergentes o divergentes, funciones periódicas seno y coseno, o ecuaciones exponenciales; que mejor se ajusten al comportamiento. Expresa su comprensión de las propiedades o elementos de los sistemas de inecuaciones lineales, ecuaciones exponenciales y funciones definidas en tramos; usando lenguaje formal y diversas representaciones; y las usa para interpretar información científica, financiera y matemática. Combina e integra un amplio repertorio de recursos, estrategias o procedimientos matemáticos para interpolar, extrapolar valores o calcular el valor máximo o mínimo de sucesiones y sumatorias notables, así como de funciones trigonométricas y evaluar o definir funciones por tramos; optando por los más pertinentes a la situación. Elabora afirmaciones sobre la validez general de relaciones entre conceptos y procedimientos algebraicos, así como predecir el comportamiento de las variables; las sustenta con demostraciones o argumentos que evidencian su solvencia conceptual.
Nivel 7	Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores, o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales, Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial; y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos,

Figura 1. Estándares de aprendizaje del área de Matemática Currículo Nacional 2016.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación, (2016a, p. 74)

La importancia desde el marco curricular del estudio de las funciones seno y coseno radica en la capacidad que tienen las funciones sinusoidales para adecuarse a diversas situaciones de la vida real, sobre todo son aquellas relacionadas con los fenómenos periódicos. De esa manera, se distribuye al desarrollo por competencias enfocado en la resolución de problemas según la propuesta del Ministerio de Educación.

Respecto a las investigaciones realizadas, se ha podido observar en los antecedentes que existe la necesidad de determinar formas eficaces de introducir, articular y dotar de sentido a las funciones trigonométricas. Puede emplearse a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo, la circunferencia unitaria, la circunferencia trigonométrica o al análisis gráfico de la función seno o actividades de modelización.

Además, estas investigaciones coinciden en la importancia que merece este objeto matemático dentro de la matemática misma. Webber (2005) señala por ejemplo que el aprendizaje de la trigonometría resulta de suma importancia pues integra el razonamiento gráfico, geométrico y algebraico. Asimismo, permite la comprensión del pre cálculo y cálculo e incluso brinda herramientas para la física newtoniana y la arquitectura.

Las investigaciones realizadas por Díaz et al. (2010) revelan la presencia de obstáculos y dificultades, en el paso de las razones a las funciones trigonométricas referido a las funciones trigonométricas cuando el argumento se torna de ángulos expresados en grados sexagesimales, luego a radianes y finalmente a números reales.

Como se puede observar en las investigaciones antecedentes, los estudios realizados alrededor de la función seno respecto a la introducción en la escuela no son concluyentes. Se revelan dificultades y obstáculos por superar. Se hace necesario entonces esclarecer aún más sobre los aspectos que generan una mayor comprensión de la enseñanza de la función trigonométrica en la educación básica.

En ese sentido, el presente proyecto desde la perspectiva amplia de la Teoría Antropológica de lo Didáctico propone un análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje que va desde el saber matemático al saber que logra aprender el estudiante. Pasa por las intervenciones institucionales a nivel macro y micro, y estructurando además las organizaciones matemáticas y didácticas. Dentro de la TAD, se reconoce además la presencia de un fenómeno que se mantiene como paradigma.

En la actualidad, aunque está en decadencia, a este fenómeno se le denomina *monumentalización de los saberes* (Chevallard, 2004). Esto es entendido como el aprecio o admiración de los estudiantes hacia las matemáticas como construcciones terminadas, concluidas, sobre la que se realiza una admiración superficial, solo estudiar las respuestas pero no las cuestiones que le otorgan sentido.

Para enfrentar el fenómeno de la *monumentalización del saber*, la TAD propone la *pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo*, dentro de la cual se hace necesaria una visión que permita describir y analizar las organizaciones matemáticas que intervienen en los diferentes niveles de estudio. Además, la TAD plantea dos dispositivos que sirven como herramientas didácticas: las Actividades de Estudio e Investigación AEI y los Recorridos de Estudio e Investigación REI (Chevallard, 2004).

En ese sentido, observando que los requerimientos institucionales, curriculares y científico didácticos, la presente investigación se hace pertinente, importante y necesario, pues pretende dar un primer paso frente al fenómeno de monumentalización de los saberes mediante el análisis de las relaciones que emergen al poner en práctica un REI basado en un modelo epistemológico alternativo para la educación básica de nuestro país.

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación

Pregunta de investigación

¿Cómo se manifiestan los gestos didácticos en los estudiantes al implementar un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) en torno a la función seno, para el quinto grado de educación secundaria?

Objetivo general

Analizar la implementación de un dispositivo didáctico basado en cuestiones que contribuya a recuperar el sentido y la razón de ser de la función seno en el quinto grado de secundaria

Objetivos específicos

- Analizar los lineamientos curriculares propuestos en el Currículo Nacional de Educación Básica respecto al tratamiento de la función seno
- Identificar las praxeologías u organizaciones asociadas a la función seno en el desarrollo del proceso de modelización
- Diseñar, implementar y evaluar el dispositivo didáctico Recorrido de Estudio e Investigación REI para estudiar la función seno
- Describir los gestos didácticos obtenidos y las limitaciones del dispositivo propuesto para abordar la función seno en la educación secundaria.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

El presente capítulo se realiza un estudio histórico epistemológico y ecológico de la función seno, que busca determinar las condiciones que posibilitaron su origen, desarrollo e ingreso a la categoría de funciones trascendentes. Así mismo, se revisa también los aspectos relacionados a la enseñanza de la función seno en la escuela secundaria, por medio de un análisis de los documentos y textos oficiales que imparte el Ministerio de Educación. Conocer estas dimensiones permitirá tener una base sólida para la construcción de una actividad didáctica ligada a un proceso de modelización.

2.1 Aspecto histórico epistemológico

2.1.1 El concepto de función

El concepto de función es considerado uno de los de mayor importancia dentro de la matemática y dentro de su enseñanza. Al respecto, Spivac (1978) señala lo siguiente:

> El concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad (V.1, p.47).

Respecto a los momentos iniciales más destacados en los cuales el concepto de función ha sufrido cambios importantes de acuerdo a las necesidades y condiciones que imponía el lugar, Farfán y García (2005) indican que las civilizaciones de Babilonia y Grecia resaltan en su trabajo con matemáticas. En el caso de los babilonios, los registros indican que manejaron un concepto primitivo de función como respuesta a la necesidad de establecer regularidades de los datos obtenidos por la observación de fenómenos naturales. Un ejemplo de ello es el movimiento de los astros. Por su parte, la matemática de los griegos se sujetaba a su filosofía, la cual consideraba que el cambio y el movimiento no era parte del estudio realizado por las matemáticas, lo que a la postre motivó a poner más atención a las incógnitas que a las variables y en consecuencia a desarrollar ecuaciones y proporciones en detrimento de las funciones.

Según los autores, estas nociones fueron muy negativas pues limitaron el desarrollo del concepto de función al manifestarse una disociación entre número y medida, lo que provocará a su vez que no se cuenten con insumos en la Edad Media que permitan explicar cuantitativamente algunos fenómenos.

En los siglos XV y XVI, aparece una notación importante a nivel algebraico, el cual va a permitir la diferenciación entre variable e incógnita, lo que posibilitará una estructuración del concepto de función. Posteriormente, gracias a Galileo y su necesidad de relacionar causas y efectos en los fenómenos que observaba, se llega a la modelización matemática de fenómenos físicos. Ello genera el concepto de variable dependiente. Sin embargo, aún no se superaba una gran dificultad, la notación que se usaba aún estaba fuertemente enraizada a la de la proporción.

No obstante, en el siglo XVII, con los trabajo de Fermat y Descartes, se impulsa el estudio de la teoría de funciones. Se abandona la concepción excluyente entre número y magnitud dada por los griegos para lograr unificarlos y obtener ecuaciones en x e y relacionando variables dependientes e independientes. Esto, a su vez, permitirá el estudio gráfico de las curvas y de sus correspondientes expresiones algebraicas.

Así mismo, se sientan las bases para formalizar la noción de función y la del análisis, teniendo como eje central el estudio físico del movimiento desde dos frentes: el de Newton y el de Leibnitz. Luego, en el siglo XVIII, se estudian los fenómenos de manera plenamente analítica. Se deja de lado la curva y se estudia como función con la herramienta poderosa del cálculo infinitesimal. Con Bernoulli y Euler, la expresión de función es considerada una expresión analítica asignando el primero <<*fx*>> y luego con Euler la notación *f(x).*

Sobre la intervención de Euler los autores señalan lo siguiente:

> Lo anterior es observable cuando el concepto de función es fundamental en la nueva disciplina que Euler estructura a través de conjuntar al Cálculo Diferencial de Leibnitz con el Método de fluxiones de Newton, de donde emerge el Análisis Matemático, disciplina que estudia los procesos infinitos (Farfán y García, 2005, p. 491).

Además, se indica que *"quien reestructuró el cálculo leibniziano y lo convirtió en un cuerpo organizado fue Leonhard Euler, figura central de la matemática del siglo XVIII"* (Farfán 1997 citado en Farfán y García 2005, p. 492).

Es así que Euler interviene significativamente en el desarrollo del concepto de función, generando las funciones trascendentes e, ln y las funciones trigonométricas, viéndose en la necesidad de generalizar el concepto de función, planteado en su libro *introduction a l´analyse infinitesimale* en 1748:

> una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes..., y las cantidades sobre las que opera: ...Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o, si se quiere, una cantidad universal que comprende todos los valores determinados...,
> Un valor determinado cualquiera puede expresarse por un número, y de aquí se sigue que una cantidad variable comprende todos los números, cualquiera que sea su naturaleza. Sucede con la cantidad variable como con el género y la especie en relación a los individuos; puede concebírsele como abarcando todas las cantidades determinadas. Así, una tal cantidad (variable) abarca todos los números, tanto positivos como negativos, los números enteros y los fraccionarios, los racionales, los irracionales, y los trascendente; incluso no debe excluirse el cero ni a los números imaginarios. (Euler, 1748, citado en Farfán y García 2005, p. 492).

En esta revisión histórica epistemológica, se puede observar que el concepto de función tuvo un proceso de transición, desde aquella ligada a una disociación entre número y magnitud, lo que a su vez refleja un mayor énfasis en un trabajo geométrico y el carácter estático de sus elementos, hasta aquella en la que se supera de este obstáculo. Ello generó una noción de función que podrá permitir el estudio de fenómenos desde la variación de sus elementos cuantitativos y que permitirá también el desarrollo del álgebra, la trigonometría y la física.

2.1.2 El seno y coseno trigonométrico

Morgan (1849), en su libro *Trigonometry and double algebra*, indica, respecto a la definición de trigonometría, que ya en el sexto libro de Euclides se expresa que los ángulos dependen únicamente de las proporciones de los lados y las proporciones de los lados únicamente de los ángulos. En ese sentido, se reconoce que existe una estrecha relación entre los ángulos, y las proporciones de los segmentos. El autor indica que: *“la rama de las matemáticas en la que se examina esta conexión, los modos de expresión adecuados inventados y los resultados obtenidos y aplicados se denomina trigonometría”* (Morgan 1849, p. 1)

Al mismo tiempo, el autor añade que la trigonometría estudia la magnitud ondulante, quizá mejor entendido en la actualidad como oscilante, dado que esta magnitud la define como “*magnitud que se hace alternativamente mayor y menor, sin ninguna terminación a la sucesión de aumento y disminución”* (p. 1, traducción propia). Seguidamente, afirma que su definición alcanza a un tipo particular de función que tiene esta propiedad de ondulante y que no puede ser descrito en el álgebra ordinaria.

> Una función de x es continuamente ondulada, cuando, si x aumenta continuamente, digamos de 0 a ∞, $\emptyset x$ nunca aumenta de manera permanente ni disminuye permanentemente, ni se acerca permanentemente a un límite fijo. El álgebra ordinaria no tiene tales funciones en sus formas finitas y aunque los tiene en su serie infinita, no puede reconocer y establecer fácilmente la propiedad de ondulación. La trigonometría es la rama del álgebra en la que se consideran las funciones onduladas. (p. 1, traducción propia).

De este modo, se parte de una definición de referencia, a partir de la cual se pueda realizar una revisión histórica epistemológica de la trigonometría y, particularmente, del seno y coseno trigonométrico con la finalidad de comprender su proceso de origen y desarrollo.

Antes que la trigonometría se desarrollara de manera explícita, esta se desarrollaba a través de actividades en las que cobraba mayor importancia el resultado que los conceptos y propiedades que estaban subyacentes. Podríamos llamar a estas actividades a las que precedieron la trigonometría y a la aparición de elementos conceptuales tales como el seno y coseno que son materia de estudio del presente proyecto.

El antecedente más remoto del que se tiene referencia es la civilización egipcia y el papiro de Rhind. Garzón afirma lo siguiente (2012):

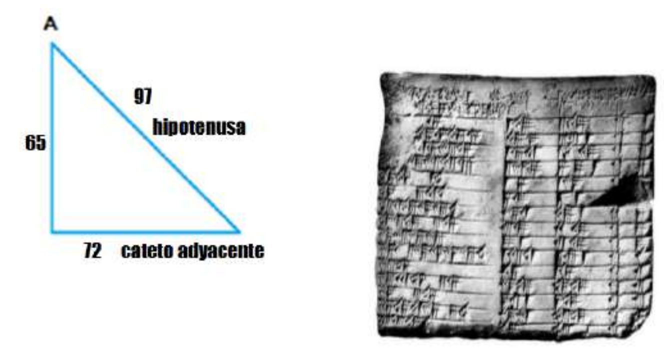
> Ahora bien, la fuente de información más importante sobre la actividad matemática antigua es el papiro del Rhind (1700 a.c. aproximadamente). En este papiro se encuentran algunas reglas para el cálculo de áreas de formas cuadradas, triangulares, circulares y algunos cimientos de trigonometría que se basan en los cálculos necesarios para la construcción de pirámides y monumentos. (p.12)

Esto se vería reflejado por ejemplo en el problema 56 del papiro: ¿Cuál es el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 cubits de lado en la base?. Este problema refleja una necesidad en la construcción de las pirámides el cual pasa por mantener la misma pendiente en cada una de las cuatro caras. Esta pendiente, denominada seqt, está dada por la relación entre el avance vertical y la subida, lo que se puede expresar de la siguiente manera: $se-qet=\frac{Avance}{subida}=\frac{\frac{1}{2}wkha-thebt}{piremus}$ tal como lo señala Tello (2016) la solución del problema se genera a través del siguiente procedimiento:

Calcula 1/2 de 360 que da 180.

- Multiplica 250 hasta obtener 180, que da 1/2 + 1/5 + 1/50.
- Un cubit son 7 palmos. Multiplica ahora 7 por 1/2 + 1/5 + 1/50 que da 5 + 1/25. Luego el seqt es 5+1/25 palmos por codo

En el caso de la civilización babilónica, se dieron actividades ligadas a la astronomía, la predicción de fenómenos celestes, la identificación de constelaciones y su posición. Para ello, era necesario contar con tablas que muestre relaciones entre diferentes medidas de ángulos y altitudes. Una muestra de ello podría estar dada en la tablilla Plimpton 322 con una antigüedad alrededor del 1900 a 1600 a. de C, en la que se usan ternas pitagóricas. En la figura 3, se observa la tablilla Plimpton 322 y su representación en el sistema decimal, además el triángulo con los datos de la fila 5, la relación entre esos mediante ternas pitagóricas y lo que sería equivalente a un trabajo con el cuadrado de la secante.



Interpretación (decimal)				
$(c/b)^2$ C1	a C2	c C3	PRUEBA	b=c/raiz(C1)
1,98340278	119	169	1,98340278	120
1,94915855	3367	4825	1,94915855	3456
1,91880213	4601	6649	1,91880213	4800
1,88624791	12709	18541	1,88624791	13500
1,81500772	65	97	1,81500772	72
1,7851929	319	481	1,7851929	360
1,71998368	2291	3541	1,71998368	2700
1,69277344	799	1249	1,69270942	960
1,64266944	481	769	1,64266944	600
1,58612257	4961	8161	1,58612257	6480
1,5625	45	75	1,5625	60
1,48941684	1679	2929	1,48941684	2400
1,45001736	161	289	1,45001736	240
1,43023882	1771	3229	1,43023882	2700
1,38716049	56	106	1,38716049	90

Figura 2. Tablilla de Plimpton 322.
Fuente: Runza (2013, p.5)

Los griegos también tuvieron un alto nivel de desarrollo en astronomía y procuraron describir los fenómenos celestes. Para ello, era necesario contar con algunas herramientas matemáticas, una necesidad que los obligo estudiar el triángulo rectángulo. En ese sentido, se puede mencionar el trabajo que realiza Aristarco de Samos denominado *Sobre los tamaños y las distancias del sol y la luna,* quien efectivamente encuentra una relación entre las distancias de la Luna a la Tierra y del Sol a la Tierra, relación que tendría un valor alrededor del sen 3°. Al respecto, Runza (2013) indica lo siguiente:

> Para obtener éste resultado, utilizó un teorema geométrico muy famoso en esa época que se expresaría actualmente como: $\frac{sin\alpha}{cos\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tan\alpha}{tan\beta}$ para $o < \beta < \alpha < 90$ permitiéndole deducir que $\frac{1}{20} < sin3 < \frac{1}{18}$. Por esta razón, afirmó que el sol está alejado entre 18 a 20 veces más de la tierra que de la luna. (p.8)

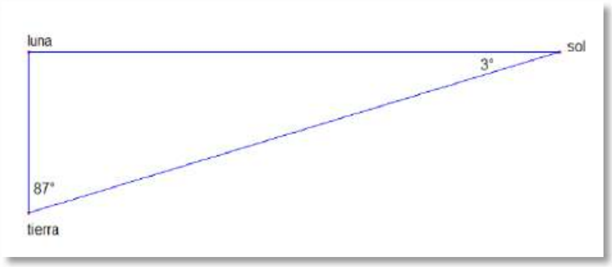


Figura 3. Distancia sol-luna-tierra.
Fuente de Runza (2013, p. 9)

Posteriormente, Grecia tendrá en Hiparco de Nicea al padre de la trigonometría, quien crea una tabla trigonométrica de carácter primitivo pero en función de cuerdas de arco. Tello (2016) menciona que Hiparco no se limitó solo a hallar las relaciones entre las rectas en una circunferencia, sino que también se dedicó a obtener los valores de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos, labor que hasta ese entonces era inédito. Para poder concretar ello realizó, una división de la circunferencia en 360 partes y el diámetro en 120 partes. Estos trabajos más adelante posibilitarán un mayor desarrollo de la trigonometría en manos de Tolomeo.

Por su parte Claudio Tolomeo, destacado astrónomo con estudios en Alejandría alrededor del 125 y 160 d.c., produjo su mayor obra *Sintaxis Matemática*, asumida por los árabes y denominada posteriormente como "El Almagesto", compuesta de 13 libros y que sirvió de base para el estudio de la astronomía hasta finales de la Edad Media. El trabajo de sus predecesores junto con el de Tolomeo tenía como objetivo describir matemáticamente el movimiento y posición de los cuerpos celestes, pero ello se realizaba desde la perspectiva de la geometría y, paulatinamente, con la construcción de tablas que indicaban el valor de cuerdas en función de arcos se iba consolidando una nueva rama de la matemática, ligada en su origen a la astronomía. Con Tolomeo, este trabajo llega a su punto máximo; y, aunque la concepción geocéntrica fue errónea, la sistematización que se presenta en El Almagesto constituye el principal aporte para dar origen a la Trigonometría.

Así, se constituye el origen de la Trigonometría, encabezado por los griegos y siempre ligado a las demandas del desarrollo de la astronomía, en la que para arribar a la solución de un problema era menester conocer las relaciones entre los ángulos y las proporciones de los lados de un triángulo. Ello se obtenía de una herramienta, de una tabla trigonométrica, donde se indicaban valores de cuerdas en función de diferentes arcos.

2.1.3 La medición angular

La puesta en práctica de actividades destinadas al aprendizaje de las funciones trigonométricas revela también algunos obstáculos y dificultades, tales como la transición entre grados, radianes y sexagesimales. Por ello, se hace necesario también realizar una revisión histórica epistemológica sobre la medición angular.

Al respecto, Garzón (2012) considera dos casos en los que el ángulo transita, el ángulo pasa de ser abordado como una forma medible a ser considerado como un giro medible. Respecto a la medición como forma, este caso provenía de la medición que se realizaba al proyectar la sombra de un cuerpo sobre el suelo, la que a su vez generaba dos situaciones.

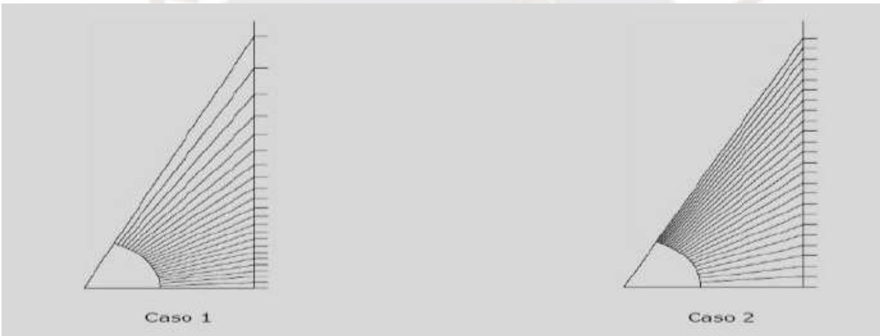


Figura 4. Casos de medición angular.
Fuente de Garzón (2012, p. 22)

Por un lado, los ángulos divididos de manera homogénea que, proyectados sobre una vertical, subtienden segmentos de diferente medida. Por otro lado, los segmentos en la vertical están divididos de manera homogénea correspondientes a ángulos de diferente medida.

Respecto al segundo caso, la división de un círculo en 360 partes, según el autor no hay un argumento concluyente. Sin embargo, otros autores sostienen que la división de un círculo en 360 grados podría venir de la astronomía descrita por los babilonios quienes tenían un calendario de 360 días. Tello (2016), en esa línea, añade lo siguiente:

> Otra sugerencia para esto, es que se descubrió que en cualquier círculo del hexágono inscrito, dividir la circunferencia en seis partes iguales hace que cada uno de sus lados sean iguales al radio, así el sistema sexagesimal muy antiguo vendría naturalmente en

> funcionamiento y cada una de las partes se divide en 60 subdivisiones, dando 360 de estos por todo el círculo. (p.32)

Posteriormente, el astrónomo Hypsicles presentó la división del zodiaco en 360 partes. Luego, como se indicó anteriormente, Hiparco dividió el círculo en 360 partes. Este trabajo es asumido por Claudio Ptolomeo, quien subdivide cada una de estas partes en sesenta *minutae primae*, y, a su vez, cada una en sesenta *minutae secundae,* dando origen a los minutos y segundos. Esta medición es la que denominamos como los grados sexagesimales. Así mismo, aunque su origen no es concluyente, una ventaja que se podría señalar es la de poder subdividirlo de manera exacta hasta por 24 divisores. Sin embargo, entrando al siglo XVIII, se generarían nuevas necesidades que harían emerger una nueva expresión angular: los radianes.

El uso de arcos y los radianes expresados en términos de π, surge desde los problemas de matemática de variación y el cambio. No es hasta el año 1714 d.c. cuando se registra la forma primaria del ángulo expresado como radián, llevada a cabo por el matemático y físico inglés Roger Cotes. Gowing (2002) señala al respecto lo siguiente:

> Cotes consideró que bastante se había dicho sobre las medidas de las proporciones, y que se necesitaba una nueva palabra para el ángulo donde se percibiera el concepto de ángulo como una medida de proporción. El arco circular, interceptado por las rectas que forman un ángulo con centro en el punto de dicho ángulo era la medida natural; pero varía con el tamaño del círculo, por lo que necesitaba de un patrón, la medida de la proporción. El patrón podría ser un círculo estándar o alguna línea estándar que variará con el círculo, por ejemplo el diámetro o el lado de un polígono regular. El radio era la opción más apropiada siempre que la medida de una proporción se cambiara en la medida de un ángulo (percibido como la longitud del arco), el patrón tendría relación con el radio. (Citado por Meneses 2010, p. 83)

De esa manera, se propone a los radianes como una nueva medida del ángulo, la más conveniente por las ventajas en su tratamiento algebraico y funcional.

Respecto al primer uso del término “radián”, Meneses (2010) declara que, el término “radián” aparece por primera vez en el año de 1873 en preguntas de exámenes elaborados por James Thomson en el Queen’s College, más precisamente en el libro “Collected Papers in Physics and Engineering by James Thomson”.

Sobre el ingreso de las funciones trigonométricas al análisis

Según Katz (1987), las funciones trigonométricas ingresaron al análisis en 1669 en *De Analysi* la Obra de Isaac Newton en donde plantea una serie de potencias para el seno, sin embargo, no es hasta 1739 que se trató estas funciones en el análisis gracias a la intervención de Leonhard Euler, movido por la necesidad de solucionar a ecuaciones diferenciales lineales y posteriormente impulsado a generar un método general para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

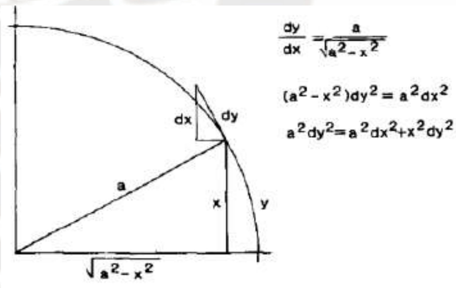
Anteriormente, a esta aparición se registraron usos del seno y del coseno para representar situaciones físicas periódicas, pero se planteaban de manera geométrica, no hubo desarrollo de propuestas en el análisis, tal es el caso de la ley de Hoke publicada en 1678. Esta teoría buscaba describir el movimiento de un peso sobre un resorte estirado por medio de un diagrama en el que la velocidad de este peso es como ciertas coordenadas en un círculo, consideradas como los senos de los arcos cortados.

En 1687, en los Principia de Newton, Proposición XXXVIII, Teorema XII, se aprecia que Newton estaba muy cerca de plantear el cálculo del seno y del coseno.

> Suponiendo que la fuerza centrípeta sea proporcional a la altura o distancia de los lugares al centro, digo que los tiempos de caída, las velocidades y los espacios recorridos son respectivamente proporcionales a los arcos, a los senos rectos y a los senos versos de los arcos. (Newton, 1687 citado en Katz 1987, p. 313)

Otra oportunidad cercana de poder arribar a las funciones seno y coseno la tuvo Leibniz en 1693. Katz (1987, p. 314) indica lo siguiente:

> Leibniz en [1693] deriva desde su método diferencial de relación infinitesimal entre el arco y su seno en un círculo de radio a: $a^2dy^2 = a^2dx^2 + x^2dy^2$. (Fig 1) asumiendo que dy es constante, Leibniz toma el deferencial de esta ecuación para obtener: $2a^2dxd^2x + 2xdxdy^2 = 0$ o $a^2d^2x + x\,dy^2 = 0$. Nosotros podríamos escribir la ecuación como: $d^2x/dy^2 = -x/a^2$ la ecuación diferencial estándar para $x = sen(y/a)$. De hecho, Leibniz deriva esta solución, por su método de coeficientes indeterminados, y la escribe como una serie de potencias. Nuevamente nos preguntamos por qué Leibniz no llegó más allá y discutió las propiedades de esta serie. Pero ni él ni Johann Bernoulli, que discutieron la misma ecuación diferencial y serie de potencias en un artículo del año siguiente, se acercaron más al cálculo de estas funciones.



Se hace mención al problema de la cuerda vibrante, que llevó a una ecuación diferencial y que tuvo también la oportunidad de generar el cálculo de la función seno. Este problema fue tratado en primer lugar por Taylor, quien como explica Katz (1987) necesitaba encontrar la fluxión de $\frac{cy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, y mostró que era la fluxión del arco circular cuyo seno es *y* con radio *c.* Dado que Taylor se mostró más interesado en el tiempo periódico del movimiento de la cuerda. No expresó esta ecuación en términos del seno mismo. Posteriormente, Roger Cotes realiza un importante trabajo que luego es retomado por Thomas Simpson en la resolución de un problema que trata con triángulos esféricos. Cotes demostró el resultado al principio de un tratado "Sobre la estimación de errores" en el que analizó los errores que ocurrieron en las observaciones astronómicas. Logra formular el lema como "*la pequeña variación de cualquier arco de un círculo es la pequeña variación del seno del arco, como el radio del seno del complemento"* (Gowing 1983, citado por Katz, 1987, p. 314).

Cotes siguió este lema con otros dos en los que demostró mediante métodos similares resultados equivalentes a los teoremas que la derivada de la tangente es el cuadrado de la secante y la derivada de la secante es el producto de la secante y la tangente. Sin embargo, no se le daba el nivel de función ni al seno o al coseno, quizá porque aún no se manifestaba una utilidad. Es ya con Leonard Euler en su trabajo *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748 que se consigue este propósito. Al respecto, Tello (2016) menciona:

> En el capítulo VIII titulado On Trascendental Quantities Which Arise from the Circle Euler proporciona un tratamiento de lo que se puede llamar el pre-cálculo de la función trigonométrica, la define numéricamente, no como líneas en un círculo y discute sus diversas propiedades. (p.51)

La importancia del trabajo de Euler recae en él pues es el primero que trata la función trigonométrica como una cantidad adimensional, que otorga la función trigonométrica la misma categoría de las funciones trascendentes y en consecuencia de función matemática.

2.2 Dificultades en la enseñanza de las funciones trigonométricas

Uno de los objetivos que pretende la presente investigación, a través de un proceso de estudio desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, es brindar nuevos alcances a nivel didáctico alrededor de la función seno y coseno en la escuela secundaria. Ello demanda tomar en cuenta también las dificultades que se presentan en la enseñanza de este objeto de estudio, a la luz de otras investigaciones realizadas.

En ese sentido, Díaz et. al. (2010) plantean un estudio relacionado a una de las dificultades más evidentes en la práctica escolar, que se manifiesta en la transición de los grados sexagesimales a los radianes y a los reales. Para ello, hacen un análisis de los textos de matemática escolar e investigaciones relacionadas a esta transición, que busca identificar si se trata de un obstáculo epistemológico, una convención matemática o de un obstáculo didáctico. Luego de una revisión de los textos y programas de estudio, no se encuentra una justificación directa del cambio de radianes por grados sexagesimales cuando se aborda la función, por lo que se podría intuir que la necesidad de esta transición obedece a una convención matemática. Sin embargo, los autores recogen el trabajo de Montiel (2005), quien al revisar los tratamientos en los libros de Hardy, Apóstol y Spivak, se llega a identificar en el tercer caso un argumento, aunque no suficiente de esta transición, la cual indica que es necesario dejar de lado los grados sexagesimales y usar su equivalente en radianes, para homogeneizar las ecuaciones. Sin embargo, no se justifica por qué los radianes sí tienen la capacidad de homogenizar ecuaciones.

Los autores señalan que estos argumentos no son suficientes para explicar la necesidad del porqué de la transición de grados a radianes. Posteriormente, plantean su propuesta y reconocen que las funciones trigonométricas independientemente de su argumento siempre resultan un número real. En ese sentido, no habría mayor necesidad de una transición de grados a radianes; sin embargo, cuando las funciones ingresan a realizar operaciones con otras funciones analíticas como por ejemplo $f(x)= sen(x) + x$ o $f(x)= e^x + cos(x)$ es cuando aparece la dificultad, pues no se pueden efectuar las operaciones y los términos no serían homogéneos; es decir, no se podría aplicar el principio de homogeneidad. Es necesario que todos los términos sean homogéneos, dado que la función trigonométrica arroja un número real. Entonces, los demás términos tendrían que ser también números reales de ahí la necesidad de que el argumento de una función trigonométrica al ingresar a operarse con otras funciones analíticas deba ser un argumento en número real.

Es por ello y apoyado en las definiciones de obstáculo planteadas por Brousseau, que los autores de este documento descartan que esta dificultad se trate de un obstáculo epistemológico o una convención matemática, y más bien se trate de un obstáculo del tipo didáctico pues por medio del propio conocimiento matemático se puede ofrecer una explicación plausible, justificación a la que no apela el docente, ni los planes de estudio ni las instituciones.

2.3 Aspectos del tema a investigar en los libros didácticos

Según Chevallard (1999a), los elementos que constituyen una organización praxeológica u organización matemática representado por la siguiente notación: $[T/\tau;\theta/\Theta]$, conforman dos bloques dentro de ella. El nivel de la práctica o “praxis” consta de tareas y técnicas (T/τ) denominadas también como el saber hacer, y el nivel tecnológico integrado por las tecnologías y las teorías (θ/Θ) conocidas como el “logos”.

Esta formulación permite revisar las matemáticas y el estudio de las matemáticas como actividades humanas que se desenvuelven sujetas a condiciones institucionales. Una de estas actividades lo constituye la producción de textos de matemática destinados a la enseñanza, cuya revisión añade una perspectiva necesaria al momento de realizar una investigación y de manera particular para el presente proyecto. Dicha revisión permite identificar los tipos de tareas realizados en el último año de secundaria, lo que a su vez permitirá construir una organización praxeológica de referencia que sustente el proceso de modelización para el proceso de estudio.

A continuación, se indican algunos elementos de la praxeología de la OM local referida a la función seno que se presentan en los libros de texto que son utilizados en la educación pública. En el caso de los textos que se trabajan en el sistema de educación básica pública, el gobierno del Perú (2017b) por medio del Ministerio de Educación, dispuso la implementación de nuevos textos oficiales.

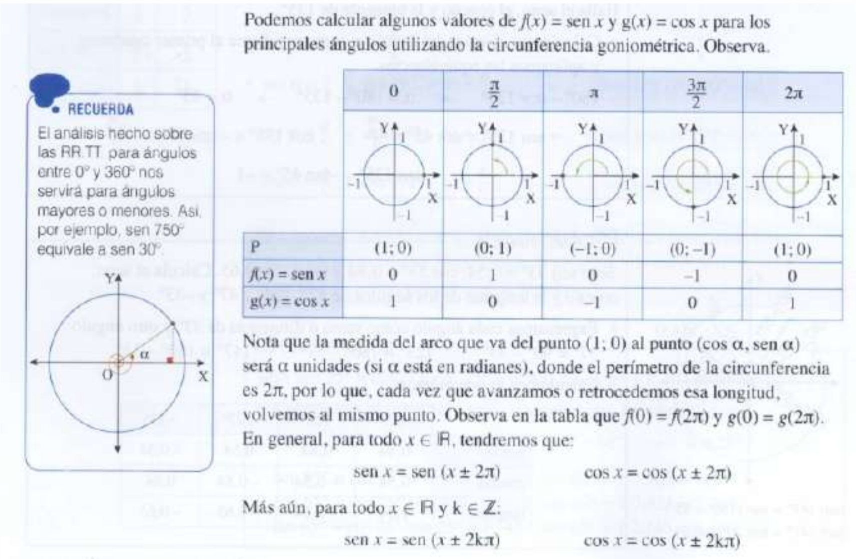
Resolvamos problemas 5: Cuaderno de trabajo de Matemática. Es un texto dirigido al trabajo práctico del estudiante en clase, vale decir un conjunto de actividades que permitan al estudiante desarrollar las capacidades y competencias que plantea el ministerio.

Resolvamos problemas 5: Manual para el docente. Contiene las actividades planteadas en el cuaderno de trabajo, pero con la resolución de ejercicios que son estructurados en sesiones de aprendizaje que se dividen en *Inicio, Desarrollo, Cierre, Reforzamos en casa.* Estos son momentos en los cuales, se originan orientaciones de cómo los estudiantes deberán abordar las situaciones, así como orientaciones para el trabajo en equipos. Respecto a un texto de tipo teórico o de construcción de los conceptos, el Ministerio de Educación (2016b) dispuso continuar con el texto anterior Matemática 5: Texto Escolar, que pertenece a la editorial Santillana.

En esta sección, se busca identificar las tareas que se plantean alrededor de la función seno y coseno, y contribuir a determinar el modelo didáctico dominante, que tiene como referente las organizaciones planteadas en el documentos anexo 1.

Tareas presentes en el libro de texto:

En el libro de texto que presenta el Ministerio de Educación (2016b): *Matemática 5 Secundaria: Texto escolar*; se identifican las siguientes actividades:



RECUERDA

El análisis hecho sobre las RR.TT. para ángulos entre 0° y 360° nos servirá para ángulos mayores o menores. Así, por ejemplo, sen 750° equivale a sen 30°.

Podemos calcular algunos valores de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ para los principales ángulos utilizando la circunferencia goniométrica. Observa.

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
P	(1; 0)	(0; 1)	(−1; 0)	(0; −1)	(1; 0)
$f(x) = \text{sen } x$	0	1	0	−1	0
$g(x) = \cos x$	1	0	−1	0	1

Nota que la medida del arco que va del punto (1; 0) al punto ($\cos \alpha$, $\text{sen } \alpha$) será α unidades (si α está en radianes), donde el perímetro de la circunferencia es 2π, por lo que, cada vez que avanzamos o retrocedemos esa longitud, volvemos al mismo punto. Observa en la tabla que $f(0) = f(2\pi)$ y $g(0) = g(2\pi)$. En general, para todo $x \in \mathbb{R}$, tendremos que:

$\text{sen } x = \text{sen } (x \pm 2\pi)$ $\cos x = \cos (x \pm 2\pi)$

Más aún, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$:

$\text{sen } x = \text{sen } (x \pm 2k\pi)$ $\cos x = \cos (x \pm 2k\pi)$

Figura 5. Ejercicio 1.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 118)

En la figura 5 se observan las siguientes tareas:

$t_{16.1}$: Hallar los valores $f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$ para “x” como valores cuadrantales.

$t_{15.1.}$: Dado $f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$, obtener una función equivalente para arcos coterminales $(x \pm 2\pi)$ equivalentes a x.

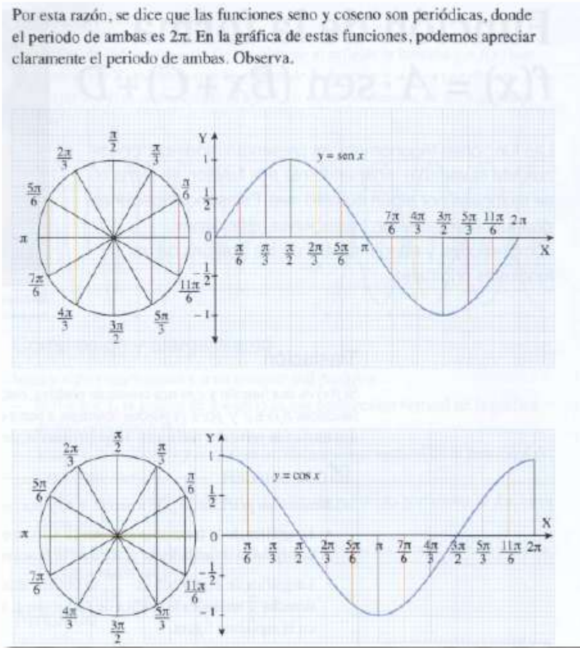


Figura 6. Ejercicio 2.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 119)

Respecto a la figura 6, se observa la siguiente tarea:

$t_{19.1.}$: Describir la gráfica de $f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$, en términos de periodicidad

CÓMO HACER

Analiza la representación gráfica de las funciones seno y coseno.

	y = sen x	y = cos x
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	[–1; 1]	[–1; 1]
Periodo	T = 2π	T = 2π
Paridad	Función impar: sen x = –sen (–x)	Función par: cos x = cos (–x)
Crecimiento y decrecimiento	Crece para valores x del I y IV cuadrante. Decrece para valores x del II y III cuadrante.	Crece para valores x del III y IV cuadrante. Decrece para valores x del I y II cuadrante.

Figura 7. Ejercicio 3.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 119)

De manera similar en la figura 7 se identifica las siguientes tareas:

$t_{19.2}$: Dada la gráfica de $f(x) = senx$ o $g(x) = cosx$, determinar el valor del dominio, rango y periodo.

$t_{20.1}$: Dada la gráfica de $f(x) = senx$ o $g(x) = cosx$, determinar si se trata de una función par o impar.

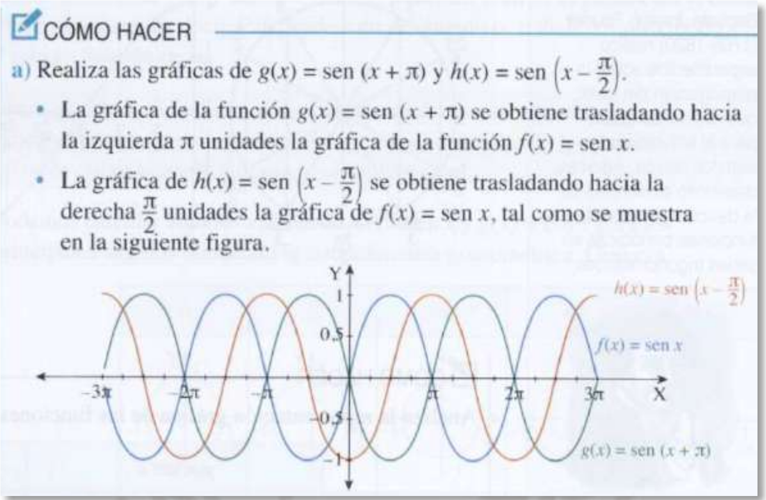


Figura 8. Ejercicio 4.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 120)

Así mismo en la figura 8 se determina las siguientes tareas:

$t_{23.1.}$: Representar gráficamente las funciones $f(x) = sen(x + C)$ para un $C \in \mathbb{R}$

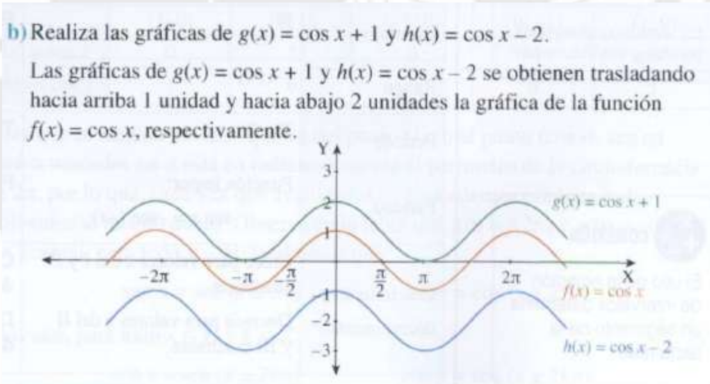


Figura 9. Ejercicio 5.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 120)

$t_{23.2.}$:Representar gráficamente las funciones de la forma $f(x) = cos(x) + D$ para un $D \in \mathbb{R}$.

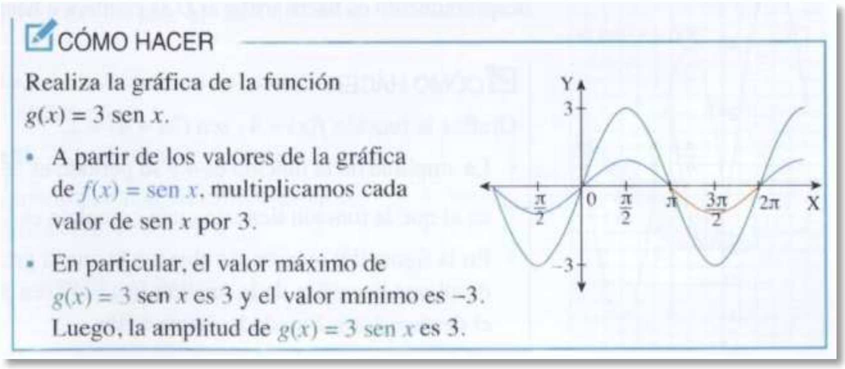


Figura 10. Ejercicio 6.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 121)

Además en la figura 10 se identifican las siguientes tareas:

T_{23}.: Representar gráficamente las funciones $f(x) = Asen(x)$ para un $A \in \mathbb{R}$

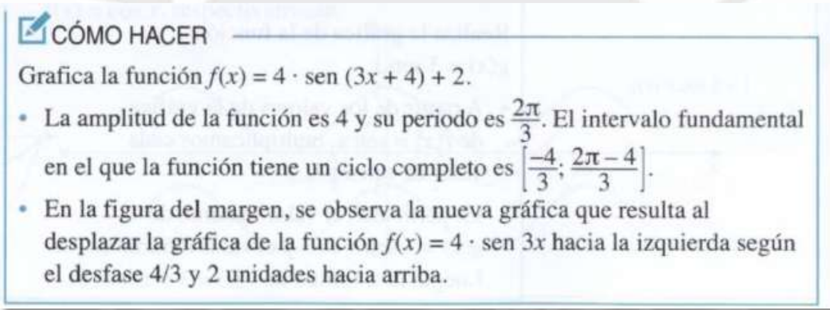


Figura 11. Ejercicio 7.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 122)

Respecto a la figura 11, se identifican el siguiente tipo de tarea:

T_{23}: Representar gráficamente las funciones de la forma: $f(x) = Asen(Bx + C) + D$ para un $A; B; C\ y\ D \in \mathbb{R}$.

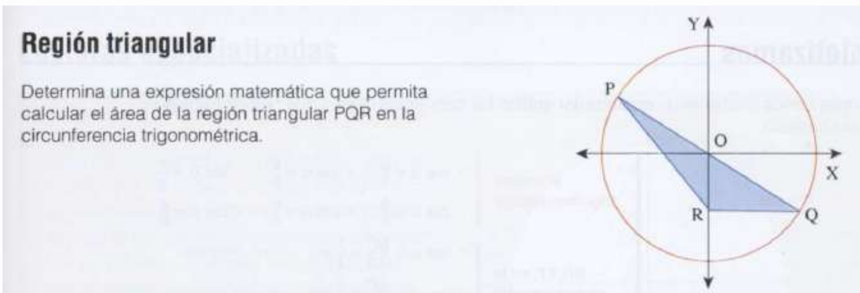


Figura 12. Ejercicio 8.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 123)

En la figura 12 se identifica la siguiente tarea:

$t_{24.1.}$: Determinar el área de la región de un triángulo conociendo las coordenadas de sus vértices ubicadas en la circunferencia trigonométrica o sobre los ejes al interior de una circunferencia trigonométrica, utilizando las expresiones seno y coseno.

La organización matemática alrededor de la función seno planteada de manera general en el libro de texto: Matemática 5: Texto escolar. Se observa en la figura 13:

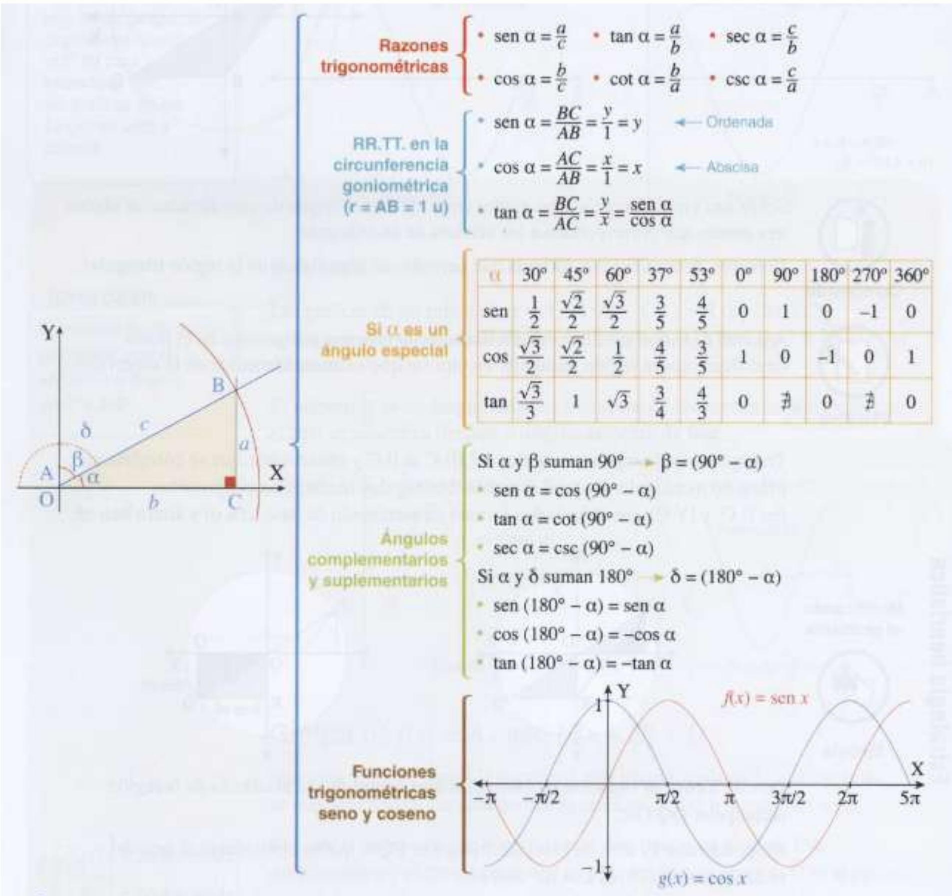


Figura 13. Organizador del saber enseñado.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 124)

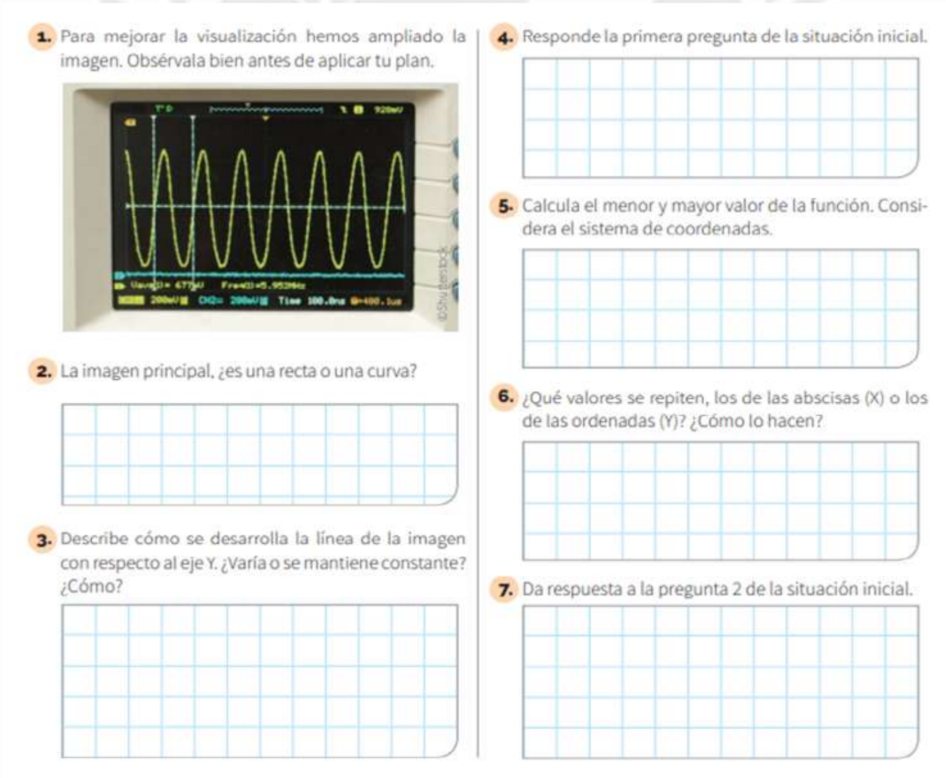
En el libro de texto que presenta el Ministerio de Educación (2017) : *Matemática 5 Secundaria: Texto escolar*; se identifican las siguientes actividades:

El **osciloscopio** es un instrumento que permite visualizar fenómenos transitorios, así como formas de ondas en circuitos eléctricos y electrónicos. Este instrumento se utiliza en diferentes campos del saber humano: medicina, radiocomunicaciones, electrónica, física, industria, etc. Puede medir un gran número de fenómenos, provisto de un elemento que convierte una magnitud física en una señal eléctrica. Será capaz de darnos el valor de una presión, ritmo cardiaco, potencia de sonido, distorsiones eléctricas, afinación, etc.

1. ¿Qué imagen se presenta en la pantalla del osciloscopio? ¿Qué de particular tiene la imagen? ¿Qué función es?
2. Si cada cuadrícula del osciloscopio corresponde a una unidad, aproximadamente, respecto de la recta horizontal remarcada, ¿cuál es el intervalo que lo acota y cuál es su periodo?

.

Figura 14. Situación introductoria.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p. 143)



1. Para mejorar la visualización hemos ampliado la imagen. Obsérvala bien antes de aplicar tu plan.
2. La imagen principal, ¿es una recta o una curva?
3. Describe cómo se desarrolla la línea de la imagen con respecto al eje Y. ¿Varía o se mantiene constante? ¿Cómo?
4. Responde la primera pregunta de la situación inicial.
5. Calcula el menor y mayor valor de la función. Considera el sistema de coordenadas.
6. ¿Qué valores se repiten, los de las abscisas (X) o los de las ordenadas (Y)? ¿Cómo lo hacen?
7. Da respuesta a la pregunta 2 de la situación inicial.

Figura 15. Cuestionario de la situación introductoria.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p. 145)

Respecto a la figura 15 se pueden observar los siguientes tipos de tareas y tareas:

$T_{18.1.}$: Dada una gráfica sinusoidal determinar la regla de correspondencia de la forma: $f(x) = Asen(Bx + C) + D$ o $f(x) = Acos(Bx + C) + D$ para un $A; B; C\ y\ D \in \mathbb{R}$.

$t_{19.2}$: Dada la gráfica de $f(x) = senx$ o $g(x) = cosx$, determinar el valor del dominio, rango y periodo.

$T_{17.1}$: Describir la variación de la función sinusoidal según la gráfica, conforme se le incrementa los valores en el eje x.

$t_{21.1}$: Dada la gráfica de $f(x) = senx$ o $g(x) = cosx$, calcular el máximo y mínimo valor de la función.

$t_{19.3}$: Dada la gráfica de $f(x) = senx$ o $g(x) = cosx$, determinar el valor del dominio, rango y periodo.

Respecto a la Situación B indicada en la figura 16:

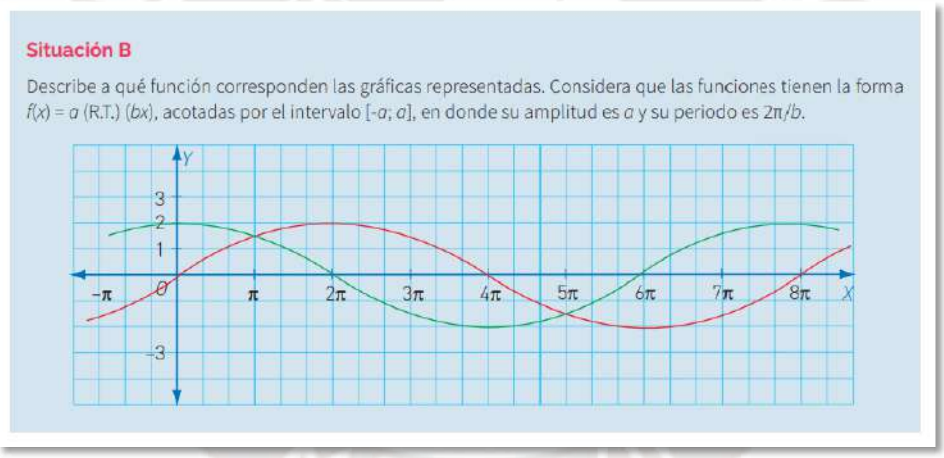


Figura 16. Situación problemática 1.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017 p.147)

Se identifican el siguiente tipo de tareas:

T_{18}: Dada la gráfica de una función sinusoidal hallar su regla de correspondencia.

1. ¿Cómo identificas la amplitud de la función a partir de las gráficas?

Figura 17. Ejercicio 9.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017 p. 147)

Respecto a la figura 17 se reconoce el siguiente tipo de tareas:

T_{19}: Dada la gráfica de una función sinusoidal hallar el valor de la amplitud.

Situación C

Grafica la siguiente función: $f(x) = 3\cos 4x$

Figura 18.Situación problemática 2.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p. 148).

Así mismo respecto a la figura 18 se reconoce el siguiente tipo de tareas:

T_{23}: Dada la regla de correspondencia de una función de la forma f(x)=AcosBx realizar la gráfica.

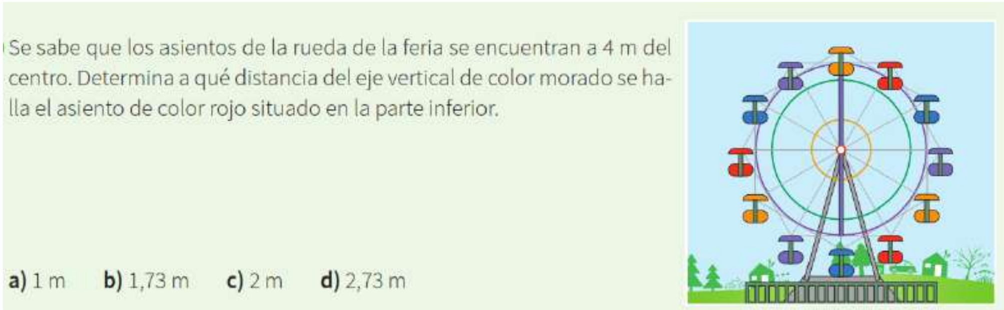
1. Elabora una tabla para verificar la solución.

x	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$
$f(x) = 3\cos 4x$				

Figura 19. Ejercicio 10.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p.)

De manera similar en la figura 19 se manifiesta el siguiente tipo de tareas:

T_{16}: Dada la regla de correspondencia de una función sinusoidal realizar una tabulación de datos.



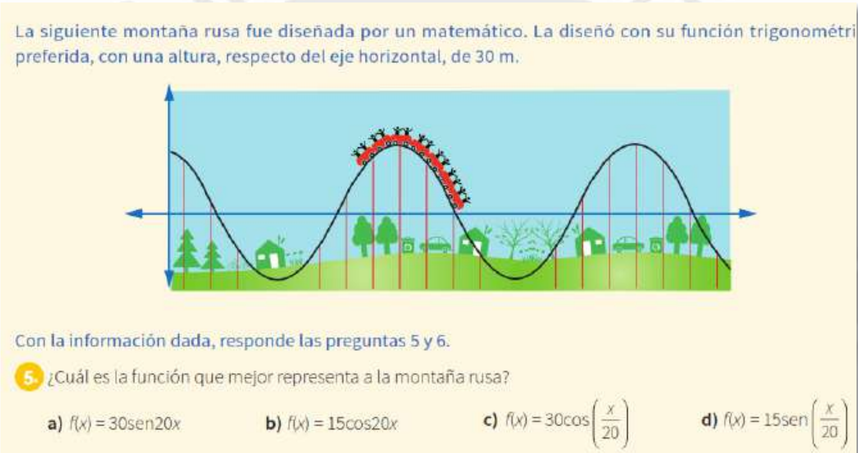
Se sabe que los asientos de la rueda de la feria se encuentran a 4 m del centro. Determina a qué distancia del eje vertical de color morado se halla el asiento de color rojo situado en la parte inferior.

a) 1 m **b)** 1,73 m **c)** 2 m **d)** 2,73 m

Figura 20. Problema planteado 1.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p.150)

Así también, en la figura 20 se reconoce el siguiente tipo de tareas:

T_{11}: Determinar la distancia del vértice de un dodecaedro inscrito en una circunferencia trigonométrica, utilizando las expresiones seno y coseno.



La siguiente montaña rusa fue diseñada por un matemático. La diseñó con su función trigonométri preferida, con una altura, respecto del eje horizontal, de 30 m.

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

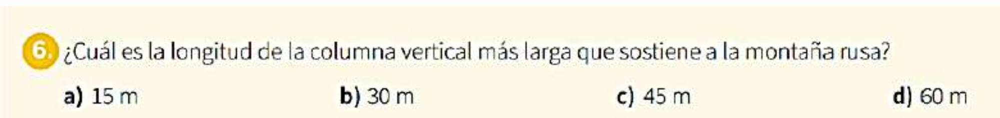
5. ¿Cuál es la función que mejor representa a la montaña rusa?

a) $f(x) = 30\text{sen}20x$ **b)** $f(x) = 15\cos 20x$ **c)** $f(x) = 30\cos\left(\frac{x}{20}\right)$ **d)** $f(x) = 15\text{sen}\left(\frac{x}{20}\right)$

Figura 21. Problema planteado 2.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p. 151)

En la figura 21 se indica el siguiente tipo de tareas:

T_{18}: Dada la gráfica de una función hallar su regla de correspondencia.



6. ¿Cuál es la longitud de la columna vertical más larga que sostiene a la montaña rusa?

a) 15 m **b)** 30 m **c)** 45 m **d)** 60 m

Figura 22. Ejercicio propuesto 11.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p. 151)

En la figura 22 se indica el siguiente tipo de tareas

T_{19}: Dada la gráfica de una función hallar el valor de la amplitud

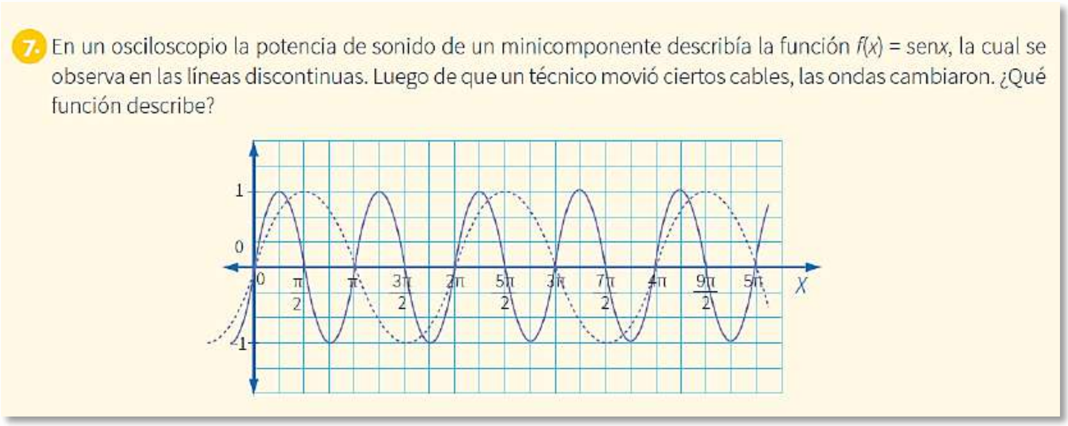


Figura 23. Problema planteado 4.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017, p. 152)

Respecto a la figura 23 se indica el siguiente tipo de tareas:

T_{18}: Dada la gráfica de una función hallar su regla de correspondencia.

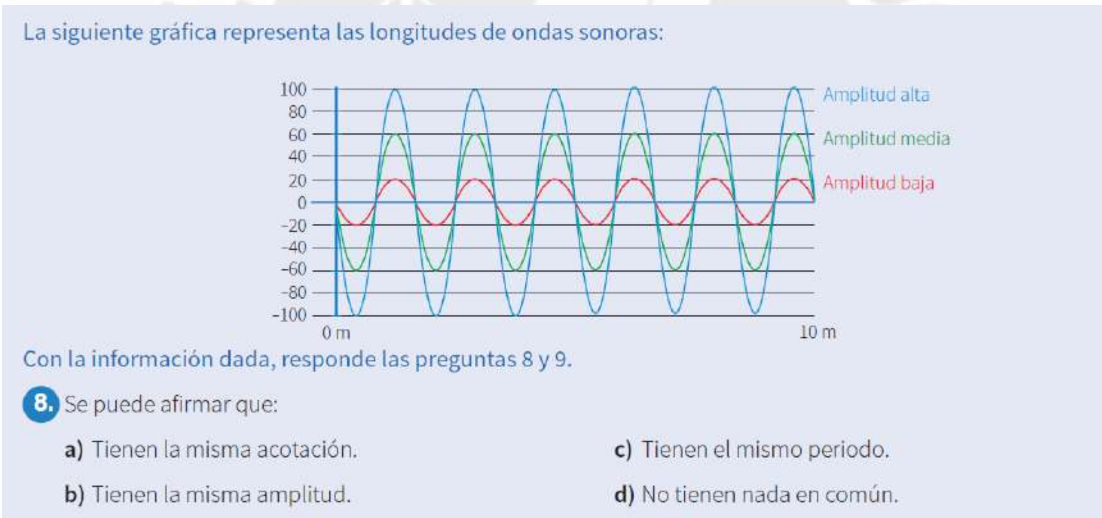


Figura 24. Problema planteado 5.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017 p. 153)

Así mismo, en la figura 24 se reconoce el siguiente tipo de tareas:

T_{19}: Comparar gráficas de diferentes funciones en términos de amplitud, periodo y acotación.

Currículo Nacional

El Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) 2016 muestra la función seno en el quinto grado de secundaria, que corresponde al ciclo VII dentro de la competencia de Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Está ubicada de manera explícita en el nivel Destacado y en el nivel 7 como la resolución de problemas al analizar cambios periódicos.

Estándares de aprendizaje de la competencia Resuelve Problemas de Regularidad, equivalencia y cambio

Ciclo	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
DESTACADO	Resuelve problemas referidos a analizar cambios discontinuos o regularidades, entre magnitudes, valores o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden incluir la regla de formación de sucesiones convergentes o divergentes, funciones periódicas seno y coseno, o ecuaciones exponenciales; que mejor se ajusten al comportamiento. Expresa su comprensión de las propiedades o elementos de los sistemas de inecuaciones lineales, ecuaciones exponenciales y funciones definidas en tramos; usando lenguaje formal y diversas representaciones; y las usa para interpretar información científica, financiera y matemática. Combina e integra un amplio repertorio de recursos, estrategias o procedimientos matemáticos para interpolar, extrapolar valores o calcular el valor máximo o mínimo de sucesiones y sumatorias notables, así como de funciones trigonométricas y evaluar o definir funciones por tramos; optando por los más pertinentes a la situación. Elabora afirmaciones sobre la validez general de relaciones entre conceptos y procedimientos algebraicos, así como predecir el comportamiento de las variables; las sustenta con demostraciones o argumentos que evidencian su solvencia conceptual.
Nivel 7	Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores, o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales, Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial; y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos,

Figura 25. Estándares de aprendizaje del área de Matemática Currículo Nacional 2016.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 74)

Para acercarse a un posible análisis de las organizaciones existentes, Bosch y Gascón (2010) plantean modelos didácticos uni y bidimensionales, los cuales pueden servir como referentes para su determinación. Los unidimensionales entendidos como modelos fundamentales conformados por los del tipo teoricista, tecnicista y modernista, que no son posibles de encontrarlos en la realidad, pero que sirven para poder generar otros tres modelos al integrar dos a dos las dimensiones anteriores. Estos modelos los podemos apreciar de manera esquemática en la figura 21.

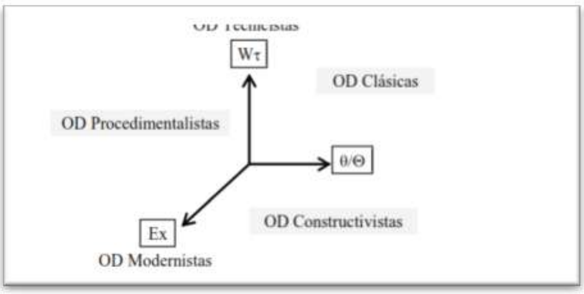


Figura 26. Modelos didácticos.
Fuente: Bosch y Gascón (2010, p. 64)

En el Currículo Nacional 2016, figuran las orientaciones pedagógicas para el desarrollo de competencias. Se declara que están enmarcadas dentro de las corrientes socio constructivistas, entendidas como la construcción del conocimiento por parte del sujeto que aprende y por medio de la interacción con la diversidad de sus pares. A pesar de ser explícito en las bases de sus orientaciones, estas aún son indicaciones generales. En el caso del documento denominado Programa Curricular de Educación Secundaria, en la sección que corresponde al área de Matemáticas, se indica que la base teórica y metodológica que orienta los procesos de enseñanza y aprendizaje corresponde al enfoque centrado en la resolución de problemas.

> al plantear y resolver problemas los estudiantes se enfrentan a retos para los cuales no conocen de antemano las estrategias de solución. Esta situación les demanda desarrollar un proceso de indagación y reflexión social e individual que les permita superar sus dificultades u obstáculos que surjan en la búsqueda de la solución. En este proceso el estudiante construye y reconstruye sus conocimientos al reorganizar ideas y conceptos matemáticos que emergen como solución óptima a los problemas, que irán aumentando en grado de complejidad (Perú 2016, p. 148)

Se puede observar, según la documentación y normativas planteadas por el Ministerio de Educación, que el sistema educativo básico regular peruano promueve el desarrollo por competencias, el cual dentro de los modelos bidimensionales planteados anteriormente se inclinaría por el modelo epistemológico de organización didáctica constructivista, sin embargo, se puede realizar una revisión más cercana sobre el modelo vigente, como la planificación de sesiones pertenecientes a la Jornada Escolar Completa (JEC) el cual constituye un referente de las sesiones en el sistema de Educación Básica Regular (EBR).

En los planes de sesión de aprendizaje relacionado a funciones sinusoidales, se observa que en los momentos iniciales se plantean situaciones de contexto extra matemático, que son relacionadas o trasladadas a una representación gráfica, sobre la cual el estudiante debe realizar descripciones en términos de amplitud, frecuencia y periodo. Se toma en cuenta los parámetros para una regla de correspondencia que es otorgada directamente en el texto para posteriormente resolver problemas que incluyen tipos de tareas relacionadas a tabulación, valor numérico de la función y al análisis de las gráficas según sus parámetros.

Al respecto, se busca el vínculo con situaciones reales. Sin embargo, no se muestra claramente un proceso de construcción del saber de la función trigonométrica seno y coseno, pues no se observa que el concepto trigonométrico responda matemáticamente como necesidad de dar respuesta a alguna cuestión planteada. No se evidencia una articulación a partir de las organizaciones matemáticas precedentes, así como tampoco, se aprecia claramente un proceso de validación, formalización o institucionalización. Quizá se presentan limitaciones que quedan en las acciones del docente por resolver o en el peor de los casos obviar. Se puede señalar también que se brinda mayor énfasis en el carácter geométrico de la gráfica función seno, pero no se repara en la noción de función, la variación de los datos, el carácter periódico de la función seno o de las propiedades que posee. En ese sentido, una conjetura que se puede hacer respecto al modelo didáctico presente en la EBR respecto a la función seno, es que la normativa general indica que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función seno se enmarca dentro del modelo constructivista. Sin embargo, en los referentes de sesiones de aprendizaje JEC, no se hace evidente la consistencia de este modelo, otorgando solo un sentido superficial para abordar las funciones sinusoidales. Se puede afirmar que al revisar el saber enseñado de la función seno y la función coseno, no se otorga una razón de ser de los conceptos.

Esta información permitirá diseñar una secuencia de actividades que tome en cuenta las tareas que se desarrollan en el nivel secundario. Además, se toma en cuenta la necesidad de articularlos con otras organizaciones matemáticas que les otorgará una razón de ser.

Algunas características de la Periodicidad como saber enseñado

Uno de los conceptos que subyace en las funciones seno y coseno es la periodicidad, afirmación que es señalada, entre otros investigadores, por como Buendía y Montiel (2009) indican que la función seno se genera teniendo como práctica de referencia la matematización del movimiento oscilatorio y en un contexto donde la periodicidad y lo acotado toman relevancia lo siguiente:

> La revisión socioepistemológica señalada en nuestro esquema metodológico propone que para que la cantidad trascendente adquiriera un carácter funcional, fue necesario un nuevo escenario, uno donde se desarrollará una concepción matematizable del movimiento. En este escenario es donde se desarrollan significativamente elementos como lo acotado y lo periódico de las funciones trigonométricas. (p.1293).

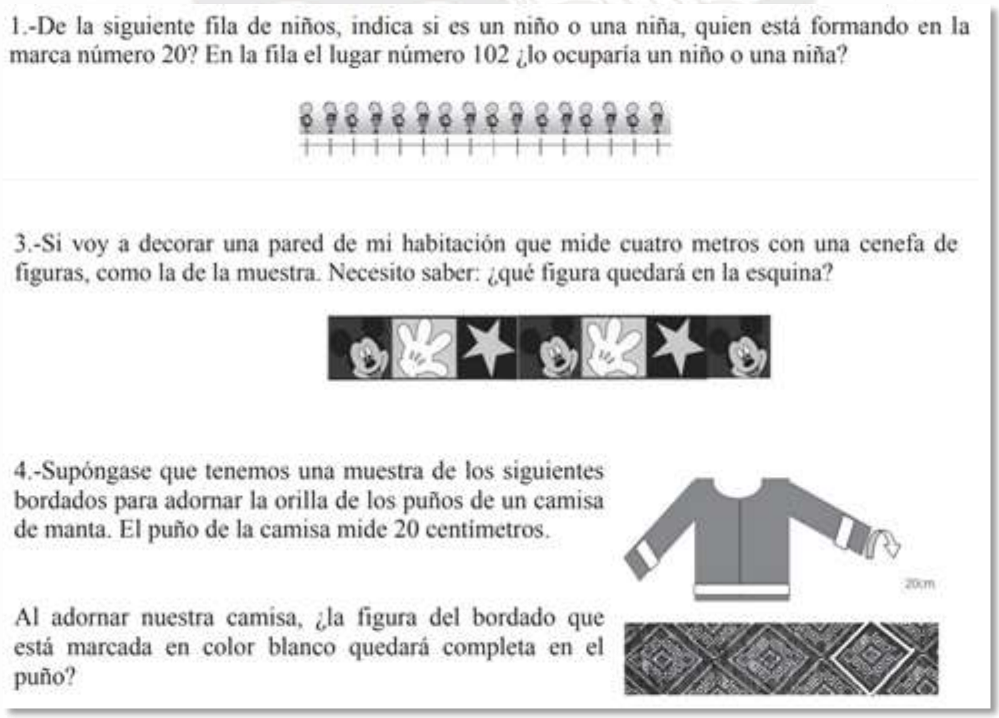
Respecto a saber enseñado, la periodicidad no es exclusiva de las funciones trigonométricas. Durante la etapa escolar, los estudiantes se encuentran con la noción de periodicidad en algunos objetos matemáticos. A continuación, se pueden señalar algunas tareas relacionadas con la predicción y la periodicidad.

Table 1. Different types of prediction tasks.

Prediction task	Examples of grade-level expectation	Examples of prediction tasks
Estimation-prediction task	Predict the relative size of solutions in addition, subtraction, multiplication and division of whole numbers	Predict which result is larger: $23 + 18 + 45$ or $588/102$
Generalization-prediction task	Make reasonable predictions using generalizations about patterns	Predict the number of toothpicks required to make House-10  House-1 House-2 House-3
Extrapolation-prediction task	Make predictions and justify conclusions based on data	Predict the population of rabbits in 10 years using the data in the table that shows the rabbit population of the first 5 years
Visualization-prediction task	Predict the position and orientation of simple geometric shapes under transformations such as reflections, rotations and translations	Predict whether a given scalene triangle would be an identical mapping when it's rotated by 120° around one of the vertices
Concept-application-prediction task	Predict and evaluate how adding data to a set of data affects measures of centre	The average height of a group of 10 students is 150 cm. Predict the new average height when the 11th student whose height is 170 cm joins the group

Figura 27. Preguntas en la etapa escolar sobre predicción.
Fuente: Lim, Buendía, Kim, Cordero, y Kasmer (2010, p. 603)

Así mismo, Vázquez y Buendía (2007) identifican diferentes tareas en el sistema escolar mexicano donde se utiliza lo periódico en tareas con sucesiones de figuras.


1.-De la siguiente fila de niños, indica si es un niño o una niña, quien está formando en la marca número 20? En la fila el lugar número 102 ¿lo ocuparía un niño o una niña?

3.-Si voy a decorar una pared de mi habitación que mide cuatro metros con una cenefa de figuras, como la de la muestra. Necesito saber: ¿qué figura quedará en la esquina?

4.-Supóngase que tenemos una muestra de los siguientes bordados para adornar la orilla de los puños de un camisa de manta. El puño de la camisa mide 20 centimetros.

Al adornar nuestra camisa, ¿la figura del bordado que está marcada en color blanco quedará completa en el puño?

Figura 28. Periodicidad en las sucesiones.
Fuente: Vázquez y Buendía (2007, p. 434,435)

Sin embargo, las autoras sostienen que este tipo de tareas no suelen ser suficientes para reconocer la propiedad periódica. Reflejo de ello, se observa que una estudiante al resolver 7/22 y solicitarle la cifra de lugar 120, escribe todas las cifras tratando de llegar a la cifra indicada, sin reparar que puede arribar a la solución teniendo como soporte el carácter periódico del desarrollo decimal de la fracción dada.

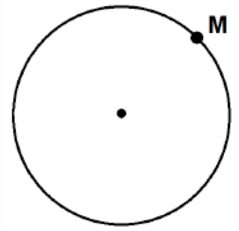
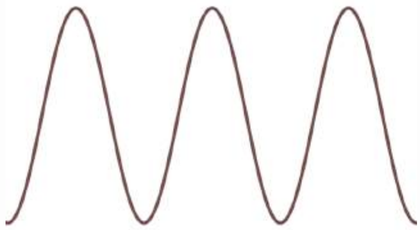
En el trabajo de Nguyen (2011) también se realiza un estudio importante relacionado con la periodicidad y las funciones trigonométricas, donde se compara las modalidades de introducción del concepto de periodicidad en los currículos secundarios de matemáticas y física, en Vietnam y en Francia. El autor concede importancia al proceso de modelización y epistemología de la periodicidad en la matemática y su enseñanza en la escuela. Inicia su estudio a partir del análisis y descripción del tiempo, y desarrolla la investigación sobre el campo de los fenómenos periódicos físicos en donde están estrechamente relacionadas la matemática y la física.

Entre estos fenómenos periódicos, se identifican tres como los más importantes en el estudio de la física: el movimiento circular, el movimiento oscilatorio y el movimiento de las ondas o movimiento de una cuerda vibrante, descritos en un marco denominado espacio-tiempo. En el caso del movimiento de las ondas a diferencia del movimiento circular y el movimiento oscilatorio, se presentan como fenómenos que tienen una doble periodicidad, tanto en el tiempo y el espacio.

En el caso del tiempo se señala que una manera de medir el tiempo es con base en un patrón dado por un hecho que sucede y se repite (por un hecho periódico), el cual puede ser estandarizado y que refleja a su vez la relación entre el tiempo y lo periódico.

La matematización del concepto de periodicidad está presente en las instituciones escolares de ambos países aunque con mayor énfasis en el caso de Vietnam. Este proceso de introducción es enriquecido en el currículo basado en lo que se denomina dos modelos de periodicidad: el movimiento circular uniforme (C) y oscilación armónica (O).

Tabla 1
Dos modelos matemáticos de la periodicidad

Modelo C	Modelo O
 Trayectoria circular de ω constante	 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

Nota. La tabla es tomada de Nguyen Thi, N., 2011, p. 127.

En el análisis epistemológico que realiza el autor, se muestra que para los físicos el movimiento circular uniforme (C) y la oscilación armónica (O) son los modelos elementales del estudio de los fenómenos periódicos temporales. El modelo C, caracterizado por una trayectoria circular y una velocidad angular constante, puede aparecer bajo dos registros: algebraico y gráfico. En cambio, el modelo O, se encuentra presente bajo tres registros: algebraico, vectorial y gráfico (sinusoide). Es un modelo funcional en el sentido de que el objeto matemático central del modelo es una función trigonométrica.

Respecto al modelo C, se observa que se desarrolla teniendo a la mecánica como modelo básico para el estudio de fenómenos cíclicos reducibles a los movimientos de un móvil en una trayectoria. Además, permite trabajar en particular los conceptos de velocidad y aceleración. En el caso del modelo O, es dominante en el estudio de la vibración, oscilación y ondulaciones físicas, de tal manera que este modelo se manifiesta en el origen de muchos desarrollos matemáticos importantes, incluido el Análisis de Fourier, que le da un lugar central a las funciones trigonométricas.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, se presentan algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que permitirán diseñar el dispositivo didáctico y analizar su implementación. Entre los elementos importantes a mencionar, se encuentran las nociones de institución, praxeología, tipos de praxeologías, modelo epistemológico de referencia, momentos didácticos; así como las dialécticas del estudio.

3.1. Elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría antropológica de lo Didáctico, en adelante TAD, remonta sus orígenes dentro del programa epistemológico a la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), para luego estructurarse a partir de la teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991), cuyo eje central de estudio se encuentra establecido por el tránsito de saberes. En el estudio de la difusión institucional del saber y los fenómenos relacionados a este proceso, se ubica la TAD propuesta por Chevallard (1999a), que plantea, como fundamento, ubicar la actividad matemática y la actividad del estudio de las matemáticas en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, las cuales puedan ser descritas mediante un modelo único denominado *praxeología*. En ese sentido, se define la didáctica como el estudio científico del tránsito del saber teniendo como modelo de actividad humana e institucional a las praxeologías. Al respecto, Chevallard (2011) indica:

> La didáctica es la ciencia de la difusión social de las praxeologías (o de las entidades praxeológicas). Es decir, la didáctica es la ciencia de las condiciones y restricciones de la difusión institucional de las entidades praxeológicas. El motor de la difusión praxeológica es lo didáctico: *la didáctica es la ciencia de lo didáctico, de sus condiciones y restricciones*. (p.1)

Esta definición considera, a su vez, otros elementos fundamentales desde la perspectiva de la TAD: el de institución y el de praxeología:

3.1.1. Noción de institución

Castela (2016) define Institución de la siguiente manera:

> Una institución es una organización social estable en el seno de la cual se realizan ciertas actividades sociales, bajo ciertas restricciones. Por un lado, la institución crea un marco vinculante para las actividades que se desarrollan en su seno, por otro, las hacen posibles proporcionando ciertos recursos materiales, organizativos y cognitivos. (p.12)

Dentro de un proceso de difusión del saber, se puede identificar además tres tipos de instituciones. Al respecto, Romo-Vázquez (2014) indicant lo siguiente:

- **Instituciones productoras de saberes** Estas instituciones son las encargadas de producir y validar teóricamente las praxeologías, y de articularlas con otras praxeologías que conforman la disciplina en cuestión.
- **Instituciones de enseñanza**. Son las encargadas de realizar la difusión de las praxeologías, adaptando a las condiciones y restricciones particulares de la enseñanza.
- **Instituciones usuarias.** Son las instituciones que representan a la práctica profesional o a las actividades prácticas.

En el caso del REI que se pretende desarrollar, es necesario enmarcarse en determinadas instituciones; para ello, observamos cómo es usada la Matemática y la Física, instituciones productoras del saber en la ingeniería de estructuras como institución usuaria.

3.1.2. Praxeología

La TAD plantea que las actividades humanas e institucionales pueden ser entendidas mediante un modelo expresado a través de praxeologías, término que etimológicamente une dos componentes: praxis (práctica) y logos (teoría), los cuales se conjugan en las acciones y procesos del sujeto para dar solución a las tareas y para desplegar saberes. Así mismo, dentro de la praxis, se ubican las tareas y técnicas que reflejan directamente el "saber hacer", mientras que en el logos se ubica el "saber" y está dado por la tecnología y la teoría. Chevallard (1999b) afirma que:

> Como mínimo, una praxeología *O* está constituida, por una parte, por un tipo de tareas T y una técnica τ de realización de las tareas del tipo T, que juntas forman la parte praxis de *O*, indicada por [T / τ]; por otro lado, una tecnología θ, un discurso que justifica e ilumina la técnica τ, así como una teoría Θ que, a su vez, justifica e ilumina el discurso tecnológico, y que juntas forman parte de los logos de *O*, denotado [θ/Θ]. (Tenga en cuenta la totalidad O = [T / τ / θ/Θ]). (p.4)

Cabe señalar que algunos diccionarios, como bien dice Chevallard, definen esta noción como el estudio de acciones humanas. Sin embargo, el autor afirma que no es solo qué hacen las personas (y cómo ellos lo hacen), sino qué piensan ellos y cómo piensan. En ese sentido, la didáctica incluye la praxeología, o al menos alguna parte de ésta, porque el saber que pasa a través de la sociedad es sobre formas humanas de hacer y pensar.

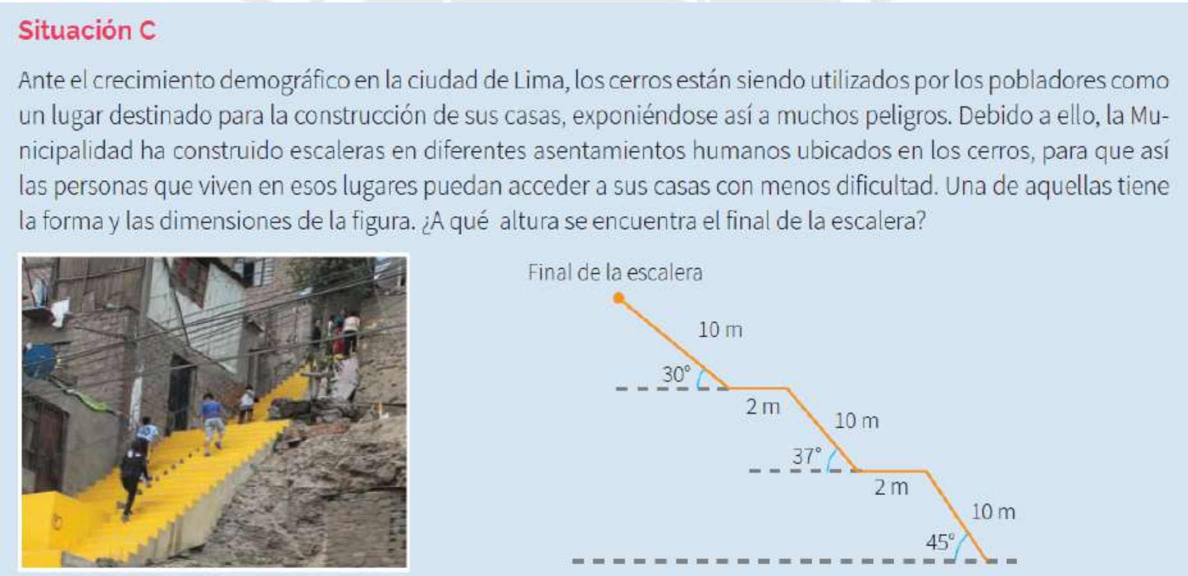
Tipos de tareas (T)

Entonces, el punto de partida para determinar las praxeologías implica el análisis de las tareas y los tipos de tareas, las cuales desde la TAD vienen definidas como aquellas acciones que tienen cierto nivel de especialidad. Chevallard (1999a) al respecto menciona:

> A continuación, la noción de tarea o, mejor, de *tipo* de tareas, supone un objeto relativamente preciso. *Subir una escalera* es un tipo de tarea, pero *subir*, simplemente, *no lo es*. De la misma manera, *calcular el valor de una función en un punto* es un tipo de tareas, pero c*alcular*, simplemente, es lo que se llamará un *género* de tareas, que pide un determinativo. (p. 222)

Para citar un ejemplo, se puede señalar el libro de texto Matemática Resolvemos problemas 5, el cual en la página 100 plantea, defimimos el siguiente Tipo de tarea

T_0: En un triángulo rectángulo, dada la medida de uno de los lados, y la medida de uno de los ángulos agudos. Hallar la medida de los otros lados.


Situación C

Ante el crecimiento demográfico en la ciudad de Lima, los cerros están siendo utilizados por los pobladores como un lugar destinado para la construcción de sus casas, exponiéndose así a muchos peligros. Debido a ello, la Municipalidad ha construido escaleras en diferentes asentamientos humanos ubicados en los cerros, para que así las personas que viven en esos lugares puedan acceder a sus casas con menos dificultad. Una de aquellas tiene la forma y las dimensiones de la figura. ¿A qué altura se encuentra el final de la escalera?

Figura 29. Ejemplo de tipo de tareas.
Fuente: Perú, Ministerio de Educación, (2017, p.100)

Para lo cual la tarea que se debe realizar corresponde a la siguiente:

t_0: En un triángulo rectángulo, dada la medida de la hipotenusa, y la medida de uno de los ángulos agudos. Hallar la medida del cateto opuesto.

Técnicas (τ)

Respecto a las técnicas son aquellas en las que dada una praxeología relativa a un tipo de tareas *T*, se requiere *una manera* de *realizar* las tareas del Tipo, este modo de realizar con eficacia todas o parte del conjunto de tareas de este tipo T se denomina técnica. Una praxeología relativa al tipo de tareas *T* contiene pues, en principio, una técnica τ relativa a *T* y que permite resolver las tareas del tipo T.

Siguiendo el ejemplo dado anteriormente la técnica de resolución de dicha tarea sería lo siguiente:

τ_0**:** Dibujar tres triángulos rectángulos e igualar la hipotenusa a la medida proporcional del triángulo correspondiente:

$x\sqrt{2} = 10m$, donde: $x = altura\ inferior$

$5y = 10m$, donde: $3y = altura\ intermedia$

$2z = 10m$, donde $z = altura\ superior$

De donde se obtiene: $altura\ inferior = 5\sqrt{2}m,\ \ altura\ media = 6m$ y $altura\ superior = 5m$

Para finalmente sumar: $5\sqrt{2}m + 6m + 5m\ y\ obtener\ (11 + 5\sqrt{2})m$ de altura de la escalera.

Tecnologías (θ**)**

Indicado generalmente por θ, se entiende por tecnología un discurso racional que busca justificar "racionalmente" la técnica τ. Esta "racionalidad" está indicada por la institución.

En el ejemplo que se viene siguiendo, la tecnología que justifica la técnica de igualar los lados a una proporcionalidad determinada es la siguiente:

θ_0: Proporcionalidad en los triángulos notables de 30° y 60° y de 45° y el triángulo notable aproximado de 37° y 53°

Teorías (Θ**)**

A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación, el de la teoría Θ, que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica.

Es así que siguiendo del tipo de tarea, técnica y tecnología realizado en los elementos de la praxeología precedentes, se hace necesario indicar el marco que sustenta las propiedades de los triángulos rectángulos notables, el cual corresponde a:

Θ_0: Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Pues aplicando el teorema de Pitágoras, entre otros teoremas y construcciones geométricas, se demuestra la proporcionalidad en los triángulos notables.

En síntesis se tiene la siguiente praxeología:

T_0: En un triángulo rectángulo, dada la medida de uno de los lados, y la medida de uno de los ángulos agudos. Hallar la medida de los otros lados.	t_0: Dada la medida de la hipotenusa, y la medida de uno de los ángulos agudos. Hallar la medida del cateto opuesto.	τ_0: Dibujar un triángulo rectángulo, igualar la medida del lado dado a la medida proporcional del triángulo correspondiente.	θ_0: Proporcionalidad en los triángulos notables de 30°, 60° y 45°, y el triángulo notable aproximado de 37° y 53°.
			Θ_0: Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Cabe señalar que la técnica puede describirse como un conjunto de pasos y que estos no necesarimente pertenecen a una sola técnica, pues estas pueden formar parte de otras, tal como afirma Gonzales (2014). Además estos pasos pueder corresponder a una tarea en otro tema o sector, por ejemplo, en nuestro caso que no corresponda a la función seno tales como semejanza, proporcionalidad, etc. Esto confirma el carácter dicotómico de los elementos praxeológicos.

A modo de esquematizar los elementos correspondientes a una praxeología la siguiente imagen presenta los componentes organizados en el bloque práctico técnico y el bloque tecnológico teórico.

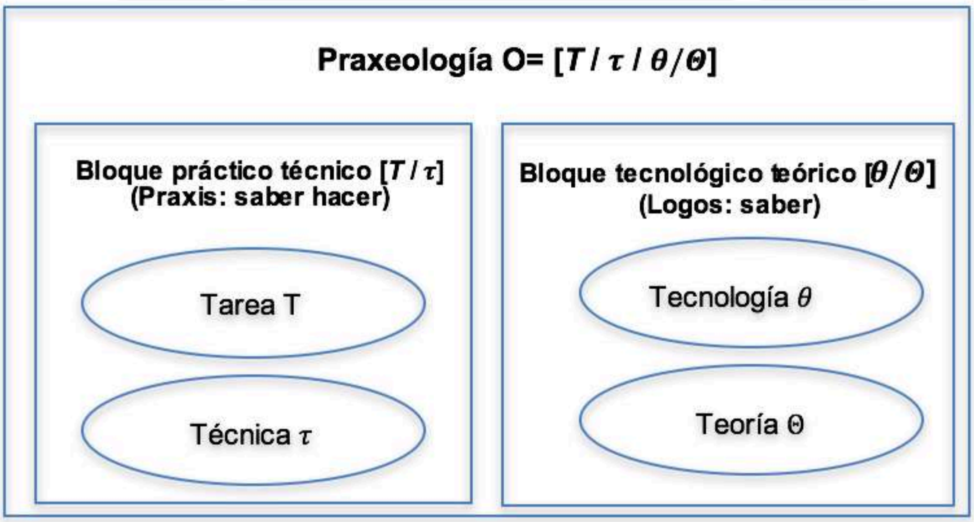


Figura 30. Elementos componentes de una praxeología.

Esta definición de praxeología y sus elementos permitirá más adelante realizar una revisión e identificación de los tipos de tareas presentes en los libros de texto usados en la educación básica pública, así como una organización matemática de referencia alrededor de la función seno.

Desde la perspectiva de la TAD, la actividad humana posee dos dimensiones complementarias: el aspecto estructural, que se describe en términos de praxeologías; y el aspecto funcional, que se ve reflejado por medio de los momentos didácticos. Así, pues, podemos entonces hablar de dos tipos de organizaciones respecto a un saber matemático: la organización matemática y la organización didáctica.

3.1.3. Organización Matemática:

En la TAD, la organización matemática (OM) se expresa mediante la siguiente expresión [T, τ, θ, Θ], la que está conformada por: tipos de tareas (T) dado por situaciones problemáticas; técnicas (τ) mediante las cuales se pueden resolver los tipos de problemas; tecnologías (θ) que sustentan el uso de las técnicas; y la teoría (Θ) que organiza las tecnologías. El bloque conformado por los elementos T y τ constituyen la praxis matemática, mientras que el bloque θ y Θ constituye el "saber" matemático propiamente dicho.

Chevallard (1999a) clasifica las praxeologías en términos de acuerdo al nivel de complejidad creciente:

- Organización matemática puntual (OMP), cuando se constituye alrededor de un solo tipo de tareas [T/ τ / θ/ Θ]
- Organización matemática local (OML) formada por la combinación de varias praxeologías puntuales y en relación a un discurso tecnológico común [T_{ij}/ τ_{ij}/ θ/ Θ]
- Organización matemática regional (OMR), formada por la coordinación de varias praxeologías locales y alrededor de una teoría común [T_{ij}/ τ_{ij}/ θ_j/ Θ]
- Organización matemática global (OMG), conformada por la integración de varias praxeologías regionales correspondientes a varias teorías [T_{ijk}/ τ_{ijk}/ θ_{jk}/ Θ_k]

Para el presente proyecto conocer los niveles de organización matemática permitirá determinar el nivel en que se espera obtener las praxeologías producto de la implementación de un dispositivo didáctico, esto es, la organización matemática local.

3.1.3.1. Completitud de las praxeologías matemáticas locales

Bosch, Fonseca y Gascón (2004) estudian la discontinuidad existente entre la escuela secundaria y la universidad. Para ello, se hace un análisis conjunto mediante criterios de completitud tanto para la construcción como para la estructura de una OM local relativamente completa. Estos criterios son los siguientes.

- La OML debe responder a ciertas cuestiones que no pueden ser respondidas por ninguna OMP y que constituyen sus razones de ser.
- El proceso de reconstrucción de una OML debe contener momentos exploratorios.
- La exploración de una OML debe desembocar inicialmente en un verdadero trabajo de la técnica hasta provocar un desarrollo progresivo de dicha técnica.
- En la reconstrucción de una OML, deben aparecer nuevas cuestiones matemáticas relativas a las diferentes técnicas que van apareciendo.
- En el proceso de reconstrucción de una OML, es necesario institucionalizar aquellos elementos que deben ser considerados por la comunidad de estudio como “componentes explícitos” de la organización.
- Ligada a la institucionalización, también es preciso evaluar la calidad de los componentes de OML construida.

Estructura de las OM locales relativamente completas:

- Integración de los tipos de tareas
- Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas
- Independencia de los ostensivos que integran las técnicas
- Existencia de tareas y de técnicas “inversas”
- Interpretación del resultado de aplicar las técnicas
- Existencia de tareas matemáticas “abiertas”
- Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica

Estas características permitirán al docente orientarse durante el desarrollo de la secuencia didáctica al momento de proponer tareas o gestionar la generación de nuevas cuestiones relacionadas a obtener una OM relativamente completa.

3.1.3.2. Organización praxeológica o matemática de referencia

Los Modelos praxeológicos de Referencia o también llamados Organización Matemática de Referencia surgen de la necesidad de poder dar respuesta a las cuestiones planteadas en alguna situación expresada como problema didáctico relacionado a un proceso de enseñanza y aprendizaje; es decir, el esqueleto matemático referencial consecuencia de la construcción de respuestas iniciales y derivadas a una cuestión problemática inicial, que se amplía y desarrolla conforme se superan las limitaciones de la organización anterior, y que posee además un carácter hipotético y transitorio.

3.1.3.3.Niveles de co-determinación

El carácter antropológico de la TAD se ve reflejado en los niveles de codeterminación, pues se expresa las relaciones sociales y culturales entre los diferentes niveles de comunidad humana. En la figura 26, en la parte izquierda, se muestra los niveles de codeterminación en el paradigma tradicional; y, en el derecho, se observan los niveles del paradigma del cuestionamiento del mundo.

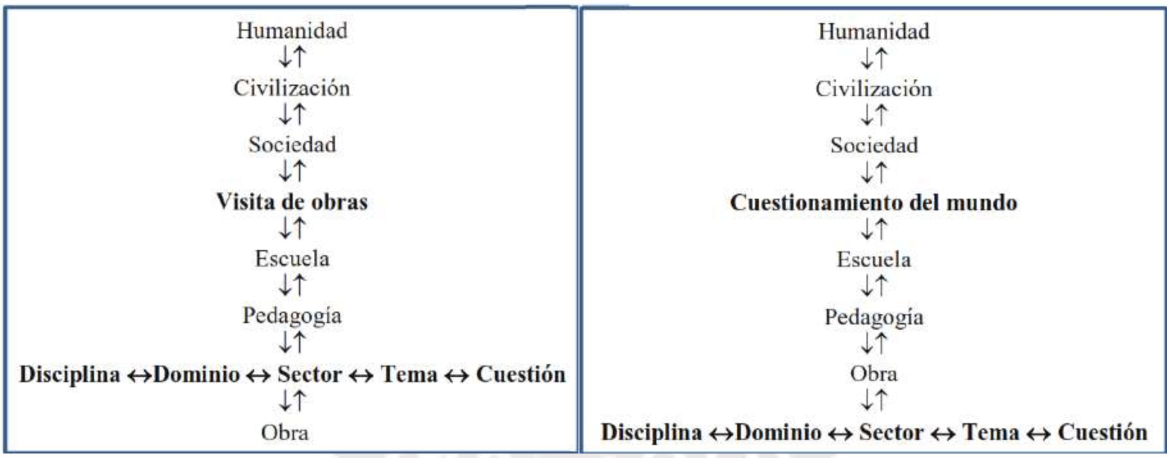


Figura 31. Niveles de codeterminación en los paradigmas de enseñanza.
Adaptado de Parra, 2013.

Chevallard (2013a) sostiene que la visita de obras, a pesar de mantenerse como un paradigma vigente y ser del agrado de muchos docentes y educadores, se encuentra en un proceso de decadencia. Reflejo de ello es la carencia de sentido que tienen las obras, de tal manera que es usual el hecho que los profesores no puedan dar respuesta a la cuestión "¿para qué sirve tal concepto?" El autor sostiene que esta problemática deviene de un problema histórico que se viene arrastrando en razón de mantener una estructura de poder entre dominadores y dominados, reflejando ello en un autoritarismo pedagógico. Consecuencia de este monumentalismo, se observa, también, que a nivel curricular el conocimiento está organizado en trozos y pedazos acabados; por ejemplo, los estudiantes deben visitar un monumento y admirarlo. Además de ello, se reconoce también el carácter efímero que tienen los aprendizajes en este paradigma, y la elección arbitraria de obras en detrimento de otras.

Se hace necesario, entonces, un enfoque funcional al conocimiento basado en su utilidad en el mundo real en términos de Chevallard (2013a, p.168):

> Lo que el nuevo paradigma didáctico tiene como objetivo es crear un nuevo ethos cognitivo, en el cual, cuando surge alguna cuestión Q, x la tome en cuenta y, cuando sea posible, empiece su estudio con el objetivo de aportarle una respuesta valiosa R, en muchos casos con alguna ayuda de algún y.

El enfoque basado en el cuestionamiento del mundo procura que el ciudadano tenga una actitud herbartiana, es decir, que no se oponga sistemáticamente a afrontar situaciones que involucren problemas con los que nunca se haya enfrentado, de tal manera que puedan obtener respuestas que le den sentido funcional y que puedan ser memorables. Además, se plantea también una actitud procognitiva, como aquella que permita entender que el conocimiento está por descubrir, como un "saber hacia adelante", por medio de un proceso de indagación que le permita buscar y obtener herramientas.

3.1.4. Recorrido de Estudio e Investigación (REI)

Los Recorridos de Estudio e Investigación representan un dispositivo didáctico como resultado de la mejora de los Trabajos Personales Encuadrados (TPE) y las Actividades de Estudio e Investigación AEI realizados anteriormente. Los REI recuperan el sentido y la funcionalidad a la matemática escolar y tienen la capacidad de enfrentar los fenómenos de la *monumentalización del saber matemático* y la visita de obras.

Los REI se caracterizan, en primer lugar porque parten de una cuestión generatriz Q, la cual posee un grado de generalidad que es planteada a estudiantes *(X)* bajo la guía de un director de estudio, el cual puede ser un profesor *(y)* o un conjunto de profesores *(Y)* con el objetivo de aportar una respuesta $R^{\heartsuit}$ a Q.

De acuerdo al esquema semidesarrollado herbartiano:

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Se indica que llegar a la $R^{\heartsuit}$ implica la construcción de un medio didáctico M, en donde (➡) indica construcción y organización del medio *M* mientras que (➥) indica que a partir de ese medio M se producirá la respuesta $R^{\heartsuit}$.

Para precisar, las implicancias del REI se ha propuesto el esquema desarrollado herbartiano representado como:

$[S(X; Y; Q)$ ➡ $\{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, R_3^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}]$ ➥ $R^{\heartsuit}$

En tal fórmula, tal como lo describe Parra (2013), se observa que M= $\{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, R_3^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}$ constituye el *medio didáctico* o *medio para el estudio* de cuestión Q compuestos por subconjuntos del tipo $R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, R_3^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}$ que representan un conjunto de respuestas resueltas, vale decir un libro, la Web, el curso de un profesor, etc, en las que habrá que extraer los necesarios para contribuir a la respuesta $R^{\heartsuit}$. Así mismo, $Q_{n+1}, \ldots, Q_m$ constituye un subconjunto de cuestiones derivadas, mientras que $O_{m+1}, \ldots, O_p$ corresponden a otras obras, como teorías, montajes experimentales, praxeologías, etc, consideradas útiles para construir las respuesta $R^{\heartsuit}$.

3.1.5. Organización didáctica

3.1.5.1. Momentos didácticos

De acuerdo con Chevallard (1999a), la organización didáctica (OD) describe las situaciones que se generan al poner en práctica una organización matemática. Estas circunstancias pueden ser muy variables, pero se manifiestan necesariamente en momentos. A estos momentos o situaciones se les denomina *momentos didácticos* y son seis:

- El primer momento está dado por el primer encuentro con la organización matemática, la cual se puede dar de distintas maneras y en varias oportunidades. Sin embargo, necesariamente, encontrará al objeto matemático con alguna de la obra *O*, a través de, por lo menos, uno de los tipos de tareas que plantean el objeto de estudio dado.
- El segundo momento es el de la exploración de un tipo de tarea y de la construcción de una técnica respecto a resolver dicha tarea.
- El tercer momento es el de la formación de un entorno tecnológico-teórico relacionado a la técnica y al tipo de tarea propuesta. Este comienza a construirse desde el primer

encuentro con el tipo de tarea, considerando que, al escoger una técnica, ésta estará ligada al bloque tecnológico-teórico, para que pueda ser explicada y justificada.

- El cuarto momento es el del trabajo con la técnica en diferentes tareas. En ese momento, se debe mejorar la puesta en práctica de la técnica, buscando perfeccionarla para que sea más eficaz y confiable
- El quinto momento, el de la institucionalización, es el momento en que la organización matemática es oficializada, distinguiendo los elementos que, habiendo formado parte de su construcción, no le hayan sido integrados y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la organización matemática considerada.

El sexto momento, el de la evaluación, tiene como finalidad evaluar lo que fue aprendido con la OM en juego. Se hace un balance tanto de lo que se ha aprendido como de la validez de la razón de ser de los elementos de la praxeología matemática.

3.1.5.2. Sobre las dialécticas

El estudio de los momentos didácticos puede ser abordado desde una serie de gestos denominados *dialécticas* en un primer momento propuestos en número de seis (Chevallard, 2007) y actualmente conformando nueve dialécticas (Chevallard, 2013b). A continuación, se indican estas dialécticas recogidas y traducidas por Parra (2017, p. 26):

> La primera dialéctica es la *del estudio y de la investigación.* Una investigación supone – así se la ha apuntado – una “buena combinación” de estudio (de respuestas $R_i^◊$ de cuestiones Q_j y de otras obras O_k) y de investigaciones para pasar de obras precedentes a la respuesta $R^♥$.
> La segunda dialéctica es la del *individuo y del colectivo* (o de la autonomía y de la sinonimia), según la cual ningún miembro x de X sabría considerarse libre de perseguir estudio e investigar relativamente a Q tanto que una respuesta $R^♥$ no ha producido y validada por X bajo la dirección (o la supervisión) de Y. Cada $x \in X$ debe saber renunciar a crear su propia ley (autonomía) y contribuir a construir y a asumir una ley del grupo X (sinonimia).
> La tercera dialéctica es *la del análisis (y la síntesis) praxeológica y del análisis (y la síntesis) didáctica.* Si todo análisis didáctico supone un análisis praxeológico (de juegos didácticos), la recíproca es igualmente cierta: para comprender una realidad praxeológica (de cualquier naturaleza: práctica, técnica, tecnológica, teórica) es a menudo útil, incluso indispensable realizar un análisis didáctico (de dónde viene, como se ha “aprendido” por la institución donde se ha descubierto, etc.).
> La cuarta dialéctica es la *del tema y fuera de tema*. Contra el postulado escolar del camino más corto, que no conduce más que a un objetivo conocido y determinado de antemano, crece, en una investigación en principio abierta, el riesgo del fuera de tema tanto en materia de investigación documental, por ejemplo (se trata particularmente de $R_i^◊$) en la elección de las cuestiones de Q_j engendradas por el estudio de Q, y de las que se decidirá o no empezar o perseguir el estudio.
> La quinta dialéctica es la *del paracaidista y de las trufas*. Contra el doble hábito escolar de la *rareza documental* y de la investigación de la adecuación *inmediata* del documento

al proyecto de estudio y de investigación, conduce a “rastrillar” vastas zonas. Se cree saber a priori que no se encontrará gran cosa, pero donde podrá ocurrir lo inesperado. Además, se aprenderá a reparar en las raras “pepitas” – las “trufas” – a menudo poco visibles, que harán progresar la investigación. (…).

La sexta dialéctica es la de las *cajas negras y cajas claras*. Contra la primacía dada al conocimiento ya disponible (*retrocognición),* esta dialéctica invita a dar primacía al conocimiento *pertinente*, por descubrir (*procognición*), cualquiera que sea a priori su estatus según las disciplinas enseñadas, a limitar a lo estrictamente necesario el trabajo de clarificación (las cajas renombradas “claras” son *siempre* cajas grises). Sobre todo, permite asumir, entonces, el riesgo, puntualmente, a) de clarificar las cajas negras situadas fuera del currículo oficial, b) de dejar en la oscuridad lo que, en el currículo familiar tal disciplina enseñada, lo pretendemos clarificar por otro lado, c) de acorralar las cajas “invisibles” porque “transparentes”, para *deconstruir las evidencias* de la cultura de la institución *cada vez que esta es útil*.

La séptima dialéctica es la hemos denominado, clásicamente, dialéctica *de la conjetura y de la prueba*, pero que, desde una perspectiva más amplia, denominamos *de los medias y de los medios*: contra la puesta a prueba más o menos organizada de antemano por aserciones consideradas seguras en virtud sobre todo de la autoridad de la institución enseñante. Esta dialéctica se compromete a someter las aserciones obtenidas a la crítica de diversas dialécticas y a evaluar el *grado de incertidumbre* de una aserción dada, cualquiera sea la institución o la persona que la emite.

La octava dialéctica es la de *la lectura (de la “excripción”) y de la escritura (de la inscripción)*: contra la transcripción (la copia) formal de textos donde se han encontrado inscriptas las respuestas R_i° que su inclusión en el texto ha “desvitalizado”. Esta dialéctica invita a entrar en la dialéctica de la lectura “excriptrice”, que le devuelve vida a las respuestas R_i° depositadas en los documentos disponibles, y de la escritura “inscriptrice” de una respuesta propia $R^\heartsuit$, que toma forma poco a poco por el crecimiento de diversos niveles de escritura (diario de clase, notas de síntesis, glosarios, producción final).

La novena dialéctica es la de la difusión y de la recepción: contra la tentación de no defender su respuesta $R^\heartsuit$, supuesta de antemano conocida y reconocida por la institución donde ha sido producida, contra el oportunismo respecto a $R^\heartsuit$ con el objetivo de complacer a quién se dirige, esta dialéctica invita a *defender* $R^\heartsuit$ sin infidelidad en el trabajo realizado, pero con atención en lo que otro puede recibir.

Por su parte, Parra y Otero (2017) plantean, como principales resultados de su estudio, indicadores didácticos matemáticos de las dialécticas que se desarrollan en un proceso de estudio y que sirven para poder describir los momentos didácticos. A continuación, se presentan tales indicadores adaptados a criterios más generales, de tal manera que posteriormente servirán para poder analizar la puesta en práctica de la actividad de estudio e investigación.

Tabla 2
Indicadores de las dialécticas como gestos didácticos

Dialéctica	Indicadores
Dialéctica del estudio y de la investigación	• Búsqueda constante en Internet, en textos de diversas disciplinas, consultas a profesores de diferentes disciplinas, consultas a profesionales y/o cualquier otra búsqueda en distintos medias ajenos al profesor del curso. • El estudio de obras que son útiles en la construcción de la respuesta a la pregunta generatriz o sus derivadas.

	• La formulación de preguntas derivadas de la generatriz en los diferentes grupos y acciones de búsqueda de respuestas a las mismas.
Dialéctica del individuo y colectivo	• Toma de decisiones del grupo de estudiantes • Algún integrante menciona que la producción que ha realizado no es de él sino del grupo, y viceversa. • Cada grupo acuerda cómo difundir y defender su respuesta, entendiendo que es una producción grupal, colectiva, no individual, y asignando tareas y responsabilidades individuales en esa difusión. • El profesor y/o los estudiantes deciden qué cuestiones estudiar. • El docente gestiona las puestas en común en función de las necesidades de avanzar en el proceso de estudio. • Los estudiantes incorporan cuestionamientos durante las puestas en común, para redireccionar el proceso de estudio según la producción de su grupo
Dialéctica del análisis (síntesis) praxeológica y del análisis (síntesis) didáctico:	• Un análisis de las diferentes respuestas *Ri* que requiere decidir qué parte estudiar de estas obras para construir la respuesta *R* ♥. • Un análisis de las preguntas formuladas dentro de cada grupo de estudio. • Una síntesis de las técnicas, tecnologías y teorías que componen las diferentes respuestas *Ri.* • Una síntesis de la información obtenida en los diferentes media, priorizando lo que es necesario y adecuado para aportar respuestas a las preguntas. • Una síntesis de las respuestas a las preguntas derivadas de la generatriz.
Dialéctica del tema y fuera-de-tema:	• Una salida a una disciplina diferente de las matemáticas. • Dentro de las matemáticas, una salida a la misma disciplina.
Dialéctica del paracaidista y de las trufas	• Esta dialéctica se pone en funcionamiento cuando es introducida por primera vez una pregunta "nueva", alguna pregunta derivada, alguna respuesta, cualquier obra que, habiendo realizado una búsqueda en diferentes media y sin un análisis exhaustivo, pareciera ser útil a la construcción de la respuesta *R* ♥. • Los grupos de alumnos no logran determinar cómo comenzar a responder las preguntas, y las producciones entregadas no aportan una respuesta parcial a las mismas. • La búsqueda en Internet es ampliada y comienzan a enfocarse en lo que les podría ser útil. • La búsqueda en los libros los lleva a descartar diferentes capítulos que no servirán para aportar repuestas.
Dialéctica de las cajas negras y cajas claras	• Identificamos el funcionamiento de esta dialéctica si en algún momento de la clase se produce un estudio "incompleto", parcial, de una obra. Es decir, cuando ocurre un estudio en un "nivel de gris". • Estudiar solo un caso de resolución de una tarea. • Construir alguna(s) representaciones del concepto sin utilizar otras.
Dialéctica del media-medio (o la de la conjetura y de la prueba):	• Se realizan preguntas en términos de *¿Por qué?*, o sea, cuestionando un resultado obtenido o propuesto en algún media (fuente de información). Por ejemplo *¿Cuál de los dos modelos obtenidos es el correcto?* • Se estudia una obra obtenida en algún media diferente al profesor de la clase. • Se hacen preguntas en términos de *¿Cómo?*, cuestionando *¿Cómo probar que efectivamente el modelo elegido es el correcto?*
Dialéctica de la lectura y de la escritura	• Subrayan o resaltan lo que consideran importante de las búsquedas en Internet, o bien cuando copian en sus carpetas lo que puede serles útil de esas búsquedas y de las lecturas en los libros o de las consultas al profesor de economía y matemáticas. • Elaboran la síntesis de su propio trabajo, o bien una síntesis de la información obtenida en algún media.

Dialéctica de la difusión y de la recepción:	• Es identificada cuando en algún momento de la clase los grupos de estudio comunican y defienden cada una de las respuestas construidas. Es decir, al compartir las producciones

Nota. Adaptado de Parra (2017, p. 33)

3.2. Marco metodológico

Desde la perspectiva científica de la TAD, la metodología que se desarrolla dentro de un proyecto de investigación debe ser coherente con el marco teórico que se propone. En ese sentido, desde el marco teórico desarrollado en la primera parte del segundo capítulo se observan dos dimensiones: la primera referida a la concepción epistemológica de la matemática y la segunda relacionada con la dimensión didáctica, la cual es abordada desde las organizaciones praxeológicas y didácticas.

El presente proyecto brinda mayor énfasis a la dimensión didáctica, haciendo uso del esquema herbartiano para el desarrollo de un REI y buscando observar los gestos didácticos de los estudiantes hacía un nuevo paradigma: la pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo. Este trabajo demanda, entonces, una estructura metodológica que permita diseñar de manera consistente la actividad. Luego de aplicarla, intenta obtener datos, sistematizarlos y analizarlos a profundidad, buscando obtener relaciones, explicaciones o significados de ciertos logros, dificultades, atributos emergentes, gestos didácticos, acciones correspondientes a momentos, etc. Sin embargo, esta ardua se hace viable mediante de la metodología cualitativa y los métodos que se han planteado dentro de la misma TAD, que se sustentan a continuación.

3.2.1. Metodología y procedimientos

La metodología cualitativa ofrece, desde su sólida capacidad de análisis, la posibilidad de poder concretar los objetivos propuestos en el presente proyecto. Además, aunque el campo de la didáctica es de reciente desarrollo científico, se viene estructurando un cuerpo metodológico desde los distintos marcos teóricos, los cuales a su vez proporcionan diferentes métodos, técnicas, estrategias y procedimientos; y cuya organización conjunta, acompañada del rigor científico, permiten el estudio a profundidad de una realidad compleja. Al respecto Biklen y Bogdan (1994) señala:

> Las cuestiones para investigar no se establecen mediante la operacionalización de variables, (siendo, además, formuladas con el objetivo de investigar los fenómenos en toda su complejidad y en contexto natural). Aunque los individuos que hacen investigación cualitativa puedan elegir cuestiones específicas a medida que recogen los datos, el enfoque a la investigación no se realiza con el fin de responder a cuestiones previas o de prueba hipótesis. Privilegian, esencialmente, la comprensión de los comportamientos a

> partir de la perspectiva de los sujetos de la investigación. Las causas externas se consideran de importancia secundaria. Recogen normalmente los datos en función de un contacto profundo con los individuos, en sus contextos ecológicos naturales. (Traducción propia, p.16)

Biklen y Bogdan (1994) plantean que, a pesar de la variedad de formas en las que se puede abordar los estudios cualitativos, éstas manifiestan rasgos comunes que las enmarcan como una investigación de tipo cualitativa, expresándolas en las siguientes cinco características:

1. En la investigación cualitativa la fuente directa de datos es el ambiente natural, constituyendo el investigador el instrumento principal.
2. La investigación cualitativa es descriptiva.
3. Los investigadores cualitativos se interesan más por el proceso que por los resultados o productos.
4. Los investigadores cualitativos tienden a analizar sus datos de forma inductiva.
5. El significado es de vital importancia en el enfoque cualitativo.

Estas características son coherentes con el marco teórico desarrollado y con el objetivo de investigación del proyecto, que busca no solo diseñar y construir un REI, sino describir, analizar y buscar significados que se generan en el proceso de estudio mediante la implementación de un nuevo dispositivo didáctico. En ese sentido, cabe reflexionar también, que la tarea del investigador es de suma importancia dentro de esta metodología, pues entre sus principales acciones debe procurar una amplia obtención de datos, los cuales deben provenir de las acciones directas de los sujetos en su forma más natural para luego precisar de minuciosidad al describirlos, analizarlos y obtener significados para algún proceso, gesto, u otras acciones que dentro de la investigación se abordan.

Asumida entonces la metodología cualitativa, se hace necesario también definir un método. Para ello, se toma como referente el trabajo de Serrano (2013), quien recoge en su proyecto de investigación, el método definido desde la TAD denominado *análisis clínico de la didáctica* (Chevallard, 2009), el cual involucra, aunque no de manera secuencial, los siguientes procedimientos:

a. Diseño matemático. Es equivalente al Análisis a priori, realizado en función de una organización matemática de referencia, expresadas como probables preguntas y respuestas, como praxeologías generadoras de nuevas preguntas. A esto se le denomina “esqueleto matemático del REI”.

b. Diseño didáctico. En ese punto se construye la secuencia de enseñanza, el planteo de la pregunta generatriz, la asignación de los equipos de alumnos, la asignación de roles y la previsión de las respuestas de los estudiantes. Esta etapa se podría denominar como organización didáctica a priori.

c. Experimentación y observación clínica. Es la ejecución del REI en el aula, dirigido por un docente y en la medida de lo posible con la participación de un investigador-observador. De ser necesario, se debe coordinar con el docente buscando consensos para la toma de decisiones y el uso de nuevos dispositivos de estudio.

d. Selección de información. Se debe discriminar la información a partir de diferentes instrumentos, como las anotaciones del observador, anotaciones de los estudiantes, filmación de las sesiones, cuestionarios y entrevistas con los estudiantes, y similares.

e. Análisis y evaluación. Se traduce como el análisis de los datos obtenidos junto con la evaluación del desarrollo en términos de herramientas praxeológicas movilizadas, momentos didácticos vivenciados, las dialécticas topogénesis, mesogénesis, y cronogénesis. Finalmente, se evaluará el mismo REI, su aplicación en la clase basada en la adecuación entre la organización didáctica a priori y los reacondicionamientos movilizados por el docente.

f. Desarrollo. Se trata de la organización didáctica a posteriori, destinada a la revisión y mejora de la propuesta del REI frente a nuevas experimentaciones, mejoras como sugerir la modificación del MER que respalda al REI.

Por su parte, Macías y Romo-Vásquez (2014) plantean una metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelación matemática, que obtuvo resultados eficientes al momento de aplicarlo. Posteriormente, es aplicado también por García (2016) y por Siero y Romo-Vásquez (2017). Finalmente, para el presente trabajo será de utilidad para sistematizar la construcción del diseño didáctico. Conjugando estas experiencias, la metodología presenta las siguientes fases:

1. Elección del contexto extramatemático de la actividad

2. Análisis praxeológico e identificación del modelo matemático

3. Análisis del modelo matemático identificado y su relación con la enseñanza de la matemática

4. Diseño del REI: definiendo la cuestión generatriz

Se observa que el análisis clínico posee una mayor amplitud y componentes similares a la ingeniería didáctica, mientras que la propuesta de diseño metodológico brinda mayor claridad para construir el diseño didáctico a partir de los elementos contextuales. Estos últimos implican, a la vez, tener presente las relaciones institucionales involucradas; además, determinar el modelo matemático sobre el que se enfoca el diseño y las tareas que se pueden generar, para poder a partir de ello concebir la cuestión generatriz.

En ese sentido, a continuación, se desarrollan los siguientes elementos teniendo como referente general el análisis clínico y en particular la propuesta metodológica para la construcción del diseño didáctico.

Dado que la estructura del análisis clínico no establece un orden en particular, se inicia primero por la construcción del diseño didáctico, pues permitirá la formulación de la pregunta generatriz y, a partir de ella, una probable organización matemática de referencia.

3.2.2. Diseño didáctico

3.2.2.1. Elección del contexto extramatemático de la actividad

Para el presente proyecto, se ha determinado una problemática que pone atención sobre el movimiento de los edificios como respuesta frente a un sismo, correspondiente dentro del campo de la ingeniería estructural, teniendo en cuenta además que esta situación forma parte del contexto geográfico y social de las escuelas de nuestro país, pues el Perú forma parte del Cinturón de Fuego del Pacífico. Por lo tanto, no es extraño que se presenten sismos de distinta magnitud, algunos más intensos, lamentablemente con consecuencias trágicas, a causa de una falta de cultura preventiva en cuanto a las acciones a tomar antes, durante y después de un sismo.

Lo anterior también se debe a la improvisación y negligencia en las estructuras al momento de haber realizado construcciones de casas y edificios, o de haberse ubicado en zonas más vulnerables, de tal manera que en la actualidad se debe atender esta problemática para que se generen nuevas normativas de construcción, así como, campañas de prevención, sobre todo en las escuelas, las cuales incluyen varios simulacros durante el año. Estas características, entre otras, permiten proponer este contexto de manera pertinente dentro de la formación escolar básica, donde los estudiantes puedan desarrollar un proceso de estudio, arribando a un modelo matemático, el cual permitirá se vincule con praxeologías matemáticas de tipo local.

Para esclarecer de manera más puntual el contexto se toma como referente el estudio realizado por Dominguez (2014) acerca del periodo de vibración de las edificaciones durante un sismo. El autor menciona al respecto que los edificios se mantienen de en movimiento constante, pues siempre están interactuando con el viento, la vibración del paso de vehículos, la marcha de un desfile de personas, etc, sin embargo, es frente a un sismo donde el movimiento del edificio se hace perceptible y sus estructuras se ponen a prueba, siendo, los desplazamientos horizontales los más críticos.

En el caso de que los edificios poseen un solo nivel y actúen como una sola unidad, vibran desplazándose a cada lado del eje vertical.

Figura 32. Vibración de un pórtico de un piso o péndulo simple.
Fuente: Domínguez (2014, p.2)

En el caso de tres péndulos con diferentes longitudes y del mismo material se puede observará que cada péndulo tiene su propio periodo de vibración, en donde dicho período será aquel que también lo hace entrar en resonancia provocando la máxima deformación.

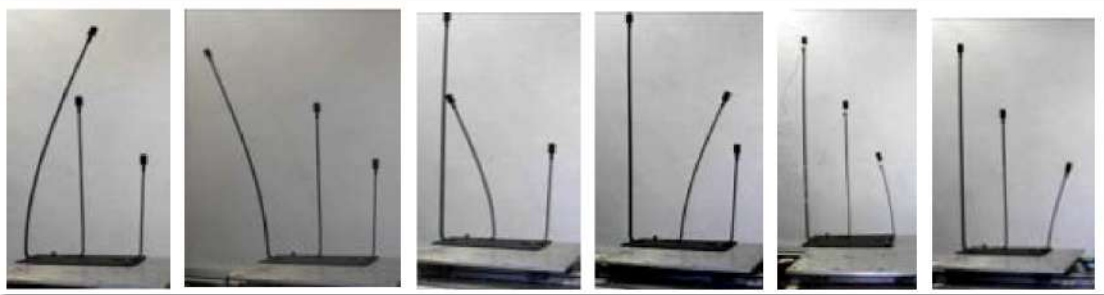


Figura 33. Resonancia de péndulos de diferentes alturas.

Fuente: Domínguez, 2014, p.3.

Por otro lado también existen edificaciones con varios pisos o niveles, en ese caso la primera reacción de la estructura es conjunta oscila como si fuera una sola unidad de un lado a otro de la vertical, sin embargo, de manera paulatina la estructura se va deformando hasta que algunos segmentos se encuentran a un lado de la vertical mientras otros se encuentran al otro lado.

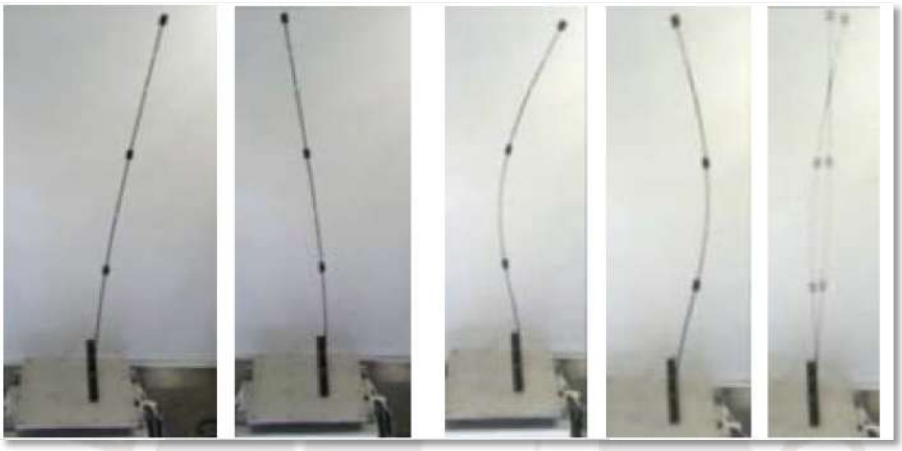


Figura 34. Resonancia de péndulos con diferentes periodos de vibración.
Fuente: Domínguez (2014, p.4)

Esta primera respuesta del edificio como una unidad corresponde al modo fundamental para el cual las fuerzas que actúan sobre él tienen la misma dirección y es sobre dónde se enfoca abordar la presente investigación.

Así pues la respuesta estructural de un edificio en el momento de su modo fundamental puede ser registrada gráficamente en donde el movimiento vibratorio se caracteriza por los valores de la Amplitud A y del período T siendo A el mayor valor del registro de desplazamiento y T el tiempo en segundos de una oscilación.

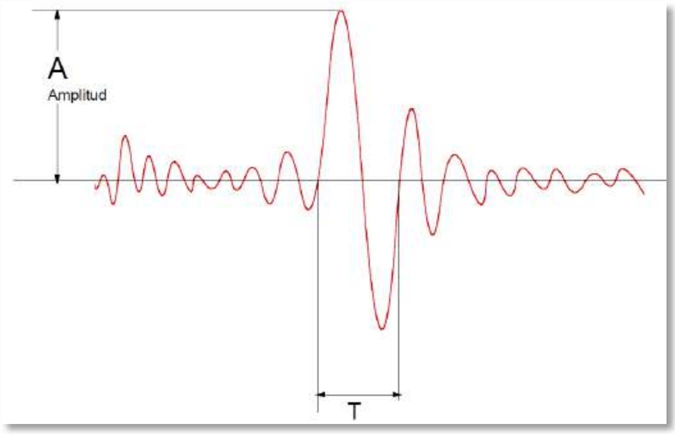


Figura 35. Amplitud y Período del movimiento sísmico.
Fuente: Domínguez, 2014, p.6.

Según Dominguez (2014), la relación entre la vibración de las edificaciones y la vibración de un sismo se puede expresar de la siguiente manera:

> La respuesta dinámica de una edificación durante un sismo depende de la relación entre el período de vibración de las ondas sísmicas y su propio periodo de vibración. En la medida en que los dos períodos igualen sus valores y su relación se acerque a la unidad la edificación entra en resonancia, aumentando significativamente las deformaciones y aceleraciones de la edificación y en consecuencia los esfuerzos en sus elementos estructurales. (p. 2)

En virtud de lo mencionado, se puede observar que el contexto planteado corresponde al campo de la ingeniería estructural, referido a la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo, si bien es cierto que intervienen también otros factores como la composición del suelo, la cercanía al epicentro, entre otros.

Para los fines del presente proyecto, el contexto se enfoca alrededor del movimiento oscilatorio referida a la primera reacción estructural del edificio frente a un sismo, denominada “modo fundamental” y en el análisis gráfico en una oscilación homogénea.

3.2.2.2 Naturaleza de la actividad, praxeología mixta

En este apartado, se describe algunos elementos considerados necesarios para abordar praxeologías en el contexto de a la ingeniería estructural, dentro del cual se estudia la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo. Ello implica, a su vez, abordar el movimiento oscilatorio en el campo de la física.

En ese sentido, a continuación, se presenta el bloque tecnológico-teórico desde algunos elementos de la física que se consideran suficientes para poder identificar los modelos matemáticos presentes, descritos a partir de las publicaciones de Medina (2009) y Silva y Farina (2016) sobre el movimiento oscilatorio, correspondientes también al ámbito de la enseñanza.

El primero de ellos indica que *"El contenido de temas de la Física General que son desarrollados en este texto se ajusta al programa de estudios de la PUCP. El desarrollo de cada tema incluye ejemplos bien seleccionados que son desarrollados con un detalle muy esmerado"* Medina (2009, p. 2). El segundo caso corresponde a un texto perteneciente al repositorio de la Universidad de Rosario, de Argentina, cuyo material está dirigido para estudiantes de quinto de secundaria, para la secundaria técnica y la formación técnica universitaria.

El movimiento oscilatorio

Se puede entender el movimiento oscilatorio como aquel movimiento que se produce cuando un cuerpo es apartado de su posición de equilibrio estable y tiende a recuperarse alrededor de esta posición. Cuando las oscilaciones se repiten cada cierto tiempo, se dice que el movimiento oscilatorio es periódico.

Este tipo de movimiento es posible casi siempre si el desplazamiento es suficientemente pequeño; entonces se denomina movimiento periódico o movimiento armónicos simple MAS. Al respecto Medina (2009, p. 35) menciona:

> Si, por ejemplo, tenemos un resorte la fuerza ejercida sobre el mismo cuando el desplazamiento respecto al equilibrio es "x" puede describirse en la forma:
>
> $$F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \cdots) \ ,$$
>
> donde k_1, k_2, k_3, etc., son una serie de constantes, y siempre podremos encontrar un margen de valores de x dentro del cual sea despreciable la suma de términos correspondientes a x_2, x_3, etc., de acuerdo con cierto criterio previo en comparación con el término - k_1x, a no ser que el mismo k_1 sea nulo. Si el cuerpo tiene masa m y la masa del resorte es despreciable, la ecuación del movimiento del cuerpo se reduce entonces a:
>
> $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x$ o bien: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1}{m}x = 0$
>
> Si por definición hacemos $\omega^2 = \frac{k_1}{m}$, la ecuación anterior se transforma en:
>
> $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0 \ ,$$
>
> que en notación corta es: $x + \omega_0^2x = 0$
>
> Esta ecuación corresponde a una ecuación de tipo diferencial cuya solución puede expresarse de las siguientes maneras:
>
> $x(t) = Asen(\omega_0t - \varphi)$; $x(t) = Acos(\omega_0t - \phi)$
>
> donde las fases iniciales, ϕ y φ difieren en $\frac{\pi}{2}$.

Así pues estas ecuaciones obtenidas corresponden al movimiento armónico simple, en donde *A* viene a ser **amplitud,** ω_0 la **frecuencia angular** con unidades de radianes por segundo y φ la **constante de fase**

De manera similar, Silva y Farina (2016) proponen por su parte la ecuación

$$x(t) = Acos(\omega_0 t - \theta_0)$$

como solución de la ecuación diferencial y la verifican para luego indicar que, a partir de esta ecuación, se pueden obtener la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo del móvil que describe un movimiento armónico simple.

Además de ello los autores añaden la relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme el cual puede ser visualizado en la siguiente gráfica:

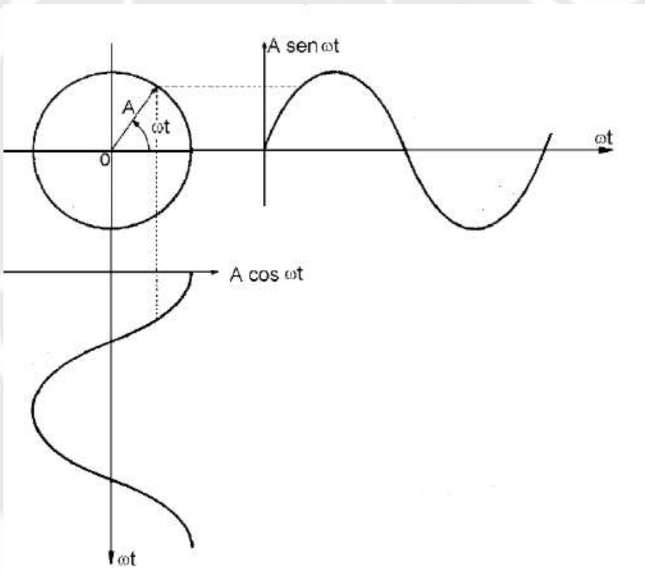


Figura 36. Relación entre el MAS y el MCU.
Fuente: Silva y Farina (2016. p. 5)

Esta relación permite describir una oscilación vertical u horizontal haciendo uso de las funciones seno y coseno respecto al tiempo.

Al analizar la proyección de la posición de un cuerpo que posee un movimiento circular uniforme al analizar sobre el eje de abscisas se obtiene que el desplazamiento horizontal viene dado por $x = Acos\theta$

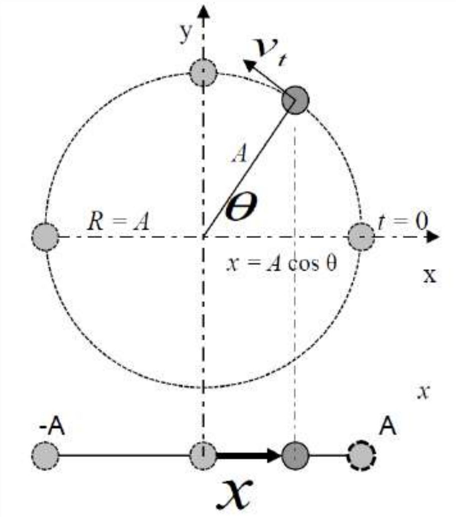


Figura 37. Relación entre el MAS y el MCU.
Fuente: Silva y Farina (2016. p. 5)

Sin embargo, dado que $\theta = \omega t + \theta_0$, es decir la posición angular θ equivale a la velocidad angular ω multiplicada por el tiempo t; la componente x del vector que describe el movimiento de la partícula está dada por:

$$x = Acos\theta = Acos(\omega t + \theta_0)$$

Donde:

A: Amplitud o elongación máxima

θ_0: Fase inicial, su valor determina la posición en x para t= 0

Silva y Farina (2016) indican que una representación más sencilla se obtiene cuando $x = f(t)$ se expresa como $x = f(\omega t)$ además tal como se puede observar en la Figura 30, la función coseno se repite cuando ωt aumenta en 2π, es decir, la posición de la partícula se repite después de un intervalo 2π/ω, por lo tanto el período es T=2π/ω

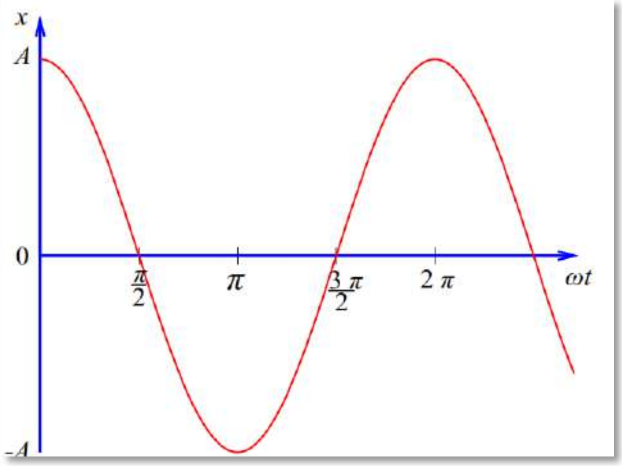


Figura 38. Gráfica de x(wt).
Fuente: Silva y Farina (2016. p. 6)

El elemento que encontramos en común, junto con las praxeologías matemáticas, se genera a partir de la relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular, la que, de manera implícita, está relacionada a la circunferencia trigonométrica y su paso hacia las funciones seno y coseno para describir la posición de un cuerpo en relación al tiempo, e inclusive mediante la aplicación de derivadas obtener funciones que describen la velocidad y la aceleración. En ese sentido, también se propone como probable recorrido de investigación tareas relacionada a la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo que se mueve de manera circular o equivalentemente de manera armónica simple.

3.2.2.3 Elegir y describir el modelo matemático en uso

En este apartado, se procura elegir el modelo matemático alrededor del cual se podrá desarrollar el proceso de estudio e investigación; además, describir este modelo teniendo en cuenta los elementos que validan y motivan su uso y en qué condiciones. Esto último permitirá analizar la manera en que podrían ser considerados en el diseño de la actividad didáctica.

De acuerdo con el apartado anterior, y teniendo en cuenta el análisis curricular y la revisión de textos analizados en el capítulo II, se eligen, como modelos pertinentes para describir el desplazamiento de un movimiento oscilatorio de un edificio como respuesta estructural frente a un sismo, en función del tiempo, las ecuaciones

$x(t) = Asen(\omega_0 t - \varphi)$; $x(t) = Acos(\omega_0 t - \phi)0$.

Estas ecuaciones sustentan su validez y motivación de uso al articular, en el campo de la física, el Movimiento Armónico Simple y el Movimiento Circular Uniforme; y a su vez, al campo de la matemática, la cual se pueda aplicar desde la matemática escolar a través del uso de la circunferencia trigonométrica. Alternativamente, esto también puede ejecutarse en la matemática superior como una solución de ecuaciones diferenciales. En el caso de la formación a nivel secundario, se observa que en la relación del MCU, el MAS y la Circunferencia Trigonométrica se otorga una sólida razón de ser a la función seno, la cual puede adquirir un mayor sentido, desde la perspectiva de la TAD, en tanto pueda involucrarse en un proceso de modelización a través de un Recorrido de Estudio e Investigación.

3.2.2.4 Diseño del REI: definiendo la cuestión generatriz

Los análisis realizados en las tres etapas anteriores permiten proponer una cuestión central capaz de generar un cuestionamiento cada vez más profundo, a partir de las cual se obtengan una secuencia de cuestiones derivadas. Las respuestas deberían movilizar a los estudiantes a desarrollar un proceso de investigación que otorgue sentido a los elementos praxeológicos que afloran como posibles respuestas a las cuestiones.

La cuestión generatriz se formula de la siguiente manera:

Q_1: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?

La simpleza y relativa generalidad de la cuestión no resulta una limitación. Por el contrario, permite desenvolverse en los contextos de la ingeniería estructural, la física y la matemática, conforme se vaya desarrollando el Recorrido de Estudio e Investigación REI.

3.2.3. Diseño matemático

Para poder analizar el proceso de estudio de la función seno dentro de una organización didáctica OD, es necesario considerar la organización matemática OM en torno a la función seno. Para ello, y conforme lo expresa Chevallard (1999a), se propone un modelo descriptivo que sirva de referencia denominado Organización Praxeológica u Organización Matemática, el cual indica de manera hipotética y provisoria el probable recorrido matemático que emprenderán y abordarán los estudiantes durante el proceso de investigación.

La secuencia de enseñanza aprendizaje que se plantea en el proyecto articula el seno trigonométrico desde la circunferencia trigonométrica hacia la función seno por medio de un proceso de modelización. A continuación, se indica una organización praxeológica de referencia.

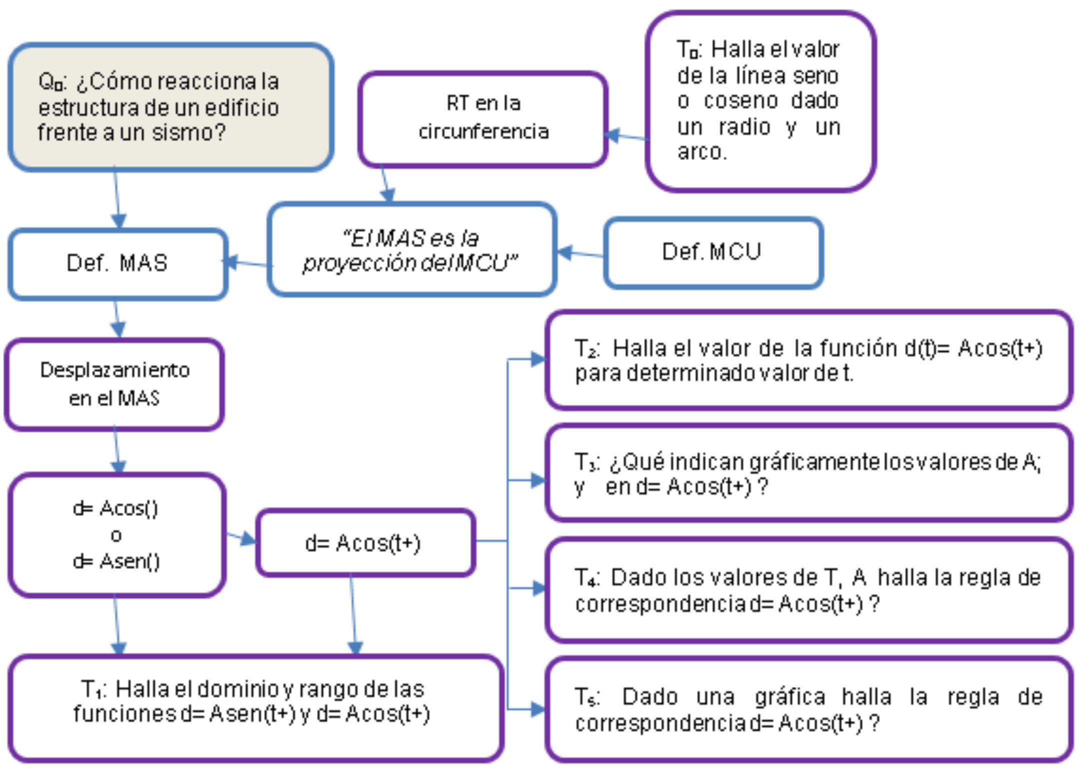


Figura 39. Esquema de la organización matemática local de referencia prevista para el REI.

Dentro del análisis previo del desarrollo del REI, se espera que los estudiantes aborden la cuestión generatriz a partir del movimiento armónico simple MAS, el cual es descrito mediante el Movimiento Circular Uniforme.

Es en esta relación del MAS como proyección del MCU que se hace necesario abordar la Circunferencia Trigonométrica o Circunferencia Unitaria, recuperando una de las obras perteneciente a la cultura de los estudiantes.

Posterior a esta recuperación, los estudiantes ya pueden describir el desplazamiento de un móvil en MAS, a partir del cual pueden abordar distintos tipos de tareas al estudiar la regla de correspondencia desde el significado contextual hasta el análisis gráfico de sus parámetros.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo, se presentan la propuesta del diseño, el análisis a priori, la puesta en práctica del proceso de modelización del REI, los gestos didácticos observados expresados mediante las dialécticas, por medio de una breve descripción de las funciones didácticas; y, finalmente, el análisis a posteriori.

4.1 Propuesta del diseño

Se presenta, a continuación, el diseño para abordar el estudio de la función seno y coseno mediante un Recorrido de Estudio e Investigación referido al movimiento de los edificios durante un sismo. Este dispositivo didáctico permitirá desarrollar un proceso de modelización sobre el fenómeno físico periódico dado en un péndulo invertido, cuya cuestión generatriz y cuestiones derivadas permitirán emerger un conjunto de praxeologías referidas a las funciones seno y coseno.

4.2 Análisis a priori de un recorrido de estudio e investigación

De acuerdo a García (2005), la actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización sobre una parte de la realidad y caracterizada por una sucesión de cuestiones, que hacen emerger como respuesta un conjunto de praxeologías de complejidad creciente. Para caracterizar el proceso de desarrollo a priori del REI, se indicarán seis etapas que no pretenden definir momentos didácticos, pero sí expresar partes del proceso de investigación dadas las circunstancias particulares que posee. Estas etapas son las siguientes:

1. Exploración de la problemática
2. La relación entre el MAS y el MCU como una razón de ser para la función seno
3. Construcción de una regla de correspondencia para el movimiento armónico simple
4. Simulación y validación de la regla de correspondencia
5. Estudio de la regla de correspondencia
6. Transferencia a otras situaciones
7. Presentación del proyecto

El punto de partida del REI corresponde a la formulación de la cuestión generatriz, el cual, en coherencia con lo desarrollado en los antecedentes y reconociendo que el estudio de la variación permite la modelación de las funciones, se plantea en un entorno físico y de ingeniería estructural. El centro de la investigación sería la relación entre el movimiento armónico simple MAS y el movimiento circular uniforme MCU, y el análisis de las relaciones entre el movimiento y el tiempo.

Respecto a la importancia del carácter "real" del entorno o de la posibilidad de concretar un proceso de modelización, García (2005) señala:

> Consideramos de suma importancia destacar que la relevancia de este *entorno* no radica en su carácter más o menos "real", sino en las posibilidades que brinde como motor de una actividad matemática fecunda o, en los términos expresados en el capítulo 2, de un *proceso de modelización*. Este proceso, en la mayoría de los casos, acabará por independizarse del entorno que posibilitó su nacimiento (p. 344).

En ese sentido, el entorno donde se plantea la cuestión generatriz corresponde a la ingeniería civil. Es en esta institución usuaria donde se atiende el problema de poder comprender el movimiento del edificio durante un sismo. El objetivo es desarrollar un proceso de modelización, el cual dará sentido a las funciones sinusoidales a través de la relación entre el MAS y el MCU.

La elección del contexto relacionado a la ingeniería estructural se muestra relevante para los estudiantes de secundaria, pues atiende un problema latente para el país y la ciudadanía. El Perú se encuentra en zona sísmica, donde buena parte de las edificaciones son proclives a desplomarse por su antigüedad o negligencia al momento de construir. Además, carecemos de una cultura de seguridad y prevención. Sumado a ello, y como consecuencia del daño al medio ambiente, se generan cambios climáticos a nivel de todo el planeta produciendo a su vez desastres naturales de diferente tipo; entre ellos, terremotos en diferentes países y latitudes.

El REI que se propone se desenvuelve en un entorno de tipo físico matemático y el proceso de estudio inicia a partir de la siguiente cuestión generatriz:

Q_1: ¿Cómo reacciona la estructura de un edifico durante un sismo?

Respuesta estructural de un edificio: descripción de un posible recorrido

En este apartado, describiremos un posible recorrido de estudio e investigación (en adelante REI) en torno al cuestionamiento acerca de la reacción estructural de los edificios durante un sismo según las decisiones que se vayan tomando. La dinámica praxeológica de este REI puede ser sintetizada mediante los momentos didácticos.

Previamente, los estudiantes han recibido la indicación respecto a los equipos formados, los cuales están conformados por 7 equipos de 4 integrantes y dos equipos de 5 integrantes.

Primero etapa: Exploración de la problemática

El docente presenta la actividad que van a emprender los estudiantes como un trabajo de investigación, el cual servirá para conocer a profundidad un fenómeno en la realidad.

El docente indica que el trabajo de investigación que van a emprender los estudiantes debe ser un trabajo desarrollado fundamentalmente por ellos mismos con la guía docente y teniendo como consignas:

- Ver más allá de lo que usualmente se ve
- Sistematizar la información
- Buscar aportar o resaltar algún conocimiento de utilidad
- Tomar decisiones

Luego, el docente presenta la cuestión generatriz a partir de la cual podrán los estudiantes iniciar su investigación.

Q1: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?

El desarrollo de la primera sesión se dará en el aula de clases: se formarán equipos de 4 estudiantes y cada uno de ellos tendrá acceso a una computadora, además de un texto de física y un diccionario enciclopédico. Se indica también que la presentación del trabajo se dará en un portafolio donde se colocará las evidencias de sus avances en cada sesión.

Se espera que los estudiantes quieran brindar una respuesta concluyente y que no involucre mayor estudio.

- Los edificios reaccionan desplomándose o temblando
- Los edificios reaccionan moviéndose de un lado a otro
- La estructura de los edificios realiza un movimiento oscilatorio

Para poder profundizar el estudio el docente pregunta a los estudiantes:

¿Cuál es la característica de la investigación que van realizar?

¿Sus primeras respuestas satisfacen las consignas?

¿Se comprenden todos los elementos de la respuesta?

Los estudiantes, al realizar la revisión de las consignas de la investigación, mejoran sus respuestas y primeros pasos.

Se espera que los estudiantes busquen validar sus respuestas con el docente, reconociéndolo como autoridad como parte del paradigma de la monumentalización del saber.

Se espera que los estudiantes logren desarrollar el siguiente recorrido en esta primera etapa:

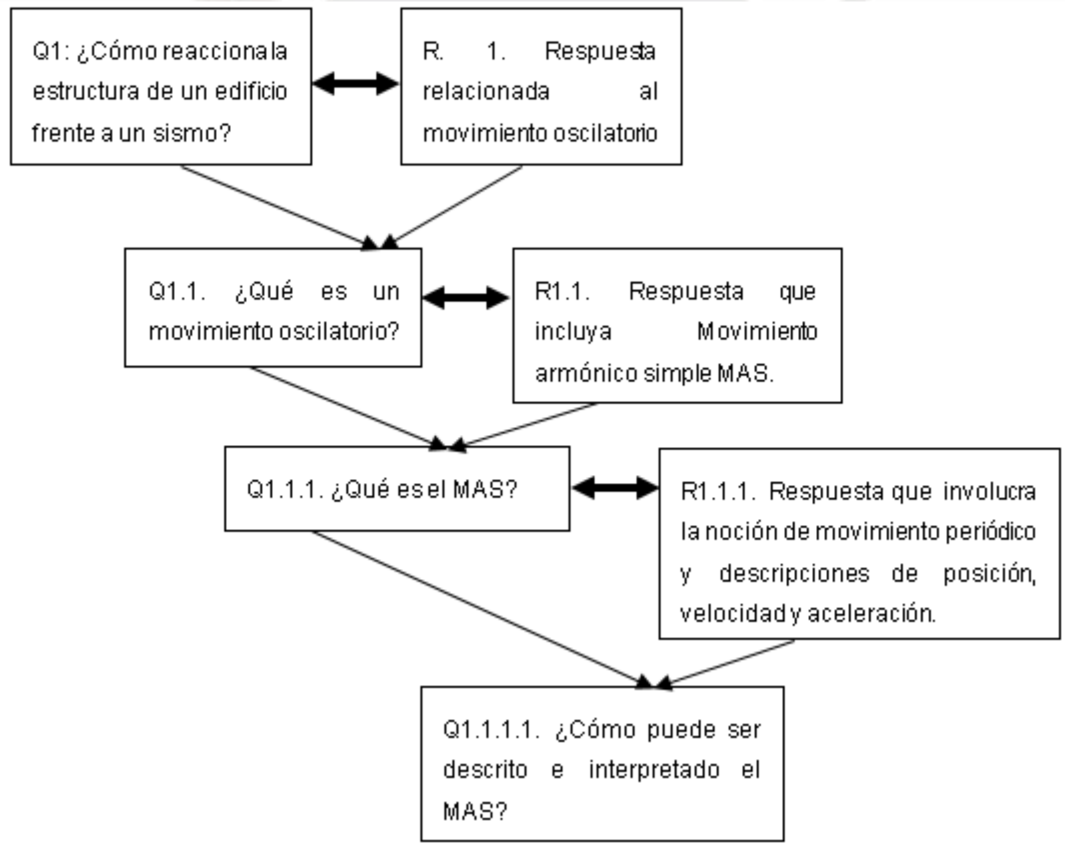


Figura 40. Esquema de cuestiones a priori

Se plantea como tarea que los estudiantes busquen información para la siguiente sesión para generar una respuesta a la siguiente cuestión:

Q1.1.1.1. ¿Cómo puede ser descrito e interpretado el MAS?

Segunda etapa: La relación entre el MAS y el MCU como una razón de ser para la función seno

En esta etapa se espera que emerjan dialécticas como la del *medio-media*, dialéctica del individuo colectivo y la de difusión y recepción, como gestos de investigación que permitan a los estudiantes identificar la relación que existe entre el MCU y el MAS, es decir que los estudiantes arriben a la descripción del Movimiento Armónico Simple MAS como una proyección del Movimiento Circular Uniforme.

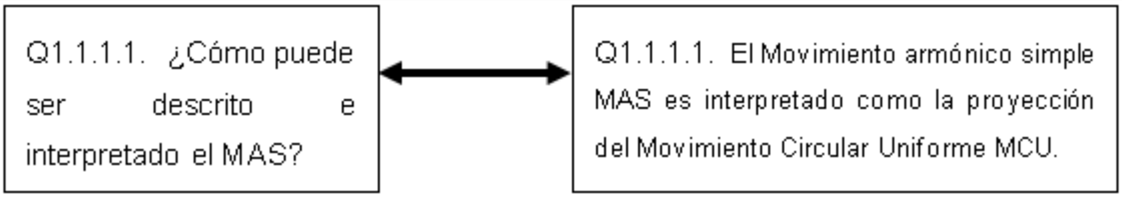


Figura 41. Relación entre el MAS y el MCU

Tercera etapa: Construcción de una regla de correspondencia para el movimiento armónico simple.

Los estudiantes desarrollan la ficha entregada por el docente, donde figuran un conjunto de tareas que les servirán para reconstruir la regla de correspondencia entre la relación entre el MAS y el MCU.

El conjunto de tareas que pertenecen a la cultura de los estudiantes y que se pretende retomar son:

T_{01}: Hallar el valor de un cateto conociendo un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo

T_{02}: Hallar el valor de la distancia del extremo de un vector al eje x, conociendo el ángulo de rotación del vector y el módulo del vector

T_{03}: Hallar el valor de la distancia de un punto de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas, al eje x o al eje y, conociendo la medida del ángulo en radianes para el punto dado y el radio

T_{04}: Hallar el valor de la distancia de un punto de la circunferencia trigonométrica al eje x o al eje y, conociendo la medida del ángulo en radianes para el punto dado, y el radio

Finalmente, en esta etapa dentro de la hoja de trabajo se plantea las siguientes cuestiones:

Q1.1.1.1.1.: ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS en términos de datos provenientes del MCU?

Q1.1.1.1.2.: ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS en términos de datos provenientes del MAS?

La intención de estas dos cuestiones es movilizar los saberes de los estudiantes, sus procesos de indagación y el desarrollo de dialécticas, de tal manera que puedan ingresar dentro del paradigma de la pedagogía de la investigación y obtener la regla de correspondencia del desplazamiento “d” en función del tiempo.

Cuarta etapa: Simulación y validación de la regla de correspondencia

El docente plantea la siguiente situación a los estudiantes:

Teniendo en cuenta que las edificaciones durante un sismo reaccionan con un movimiento oscilatorio, es posible estudiar el movimiento de las edificaciones por medio de movimiento armónicos de simuladores como péndulos invertidos. En ese sentido, a continuación, ustedes van a proceder a analizar el movimiento de un péndulo invertido.

El docente indica a los estudiantes construyan su péndulo invertido.

Actividad: Obteniendo relaciones por medio de un péndulo invertido

Los estudiantes construyen un simulador de edificaciones mediante un péndulo invertido para luego abordar la siguiente pregunta planteada por el docente:

¿Cuál es la relación que existe entre el desplazamiento horizontal del extremo superior del péndulo y el tiempo?

El docente recoge las propuestas de los estudiantes de acciones que serían necesarias para poder dar respuesta a la cuestión planteada en la sesión. El fin es que se plantee como necesario realizar una tabulación, una gráfica y se formule una regla de correspondencia entre el desplazamiento horizontal del extremo superior del péndulo y el tiempo.

Para analizar la posición extrema del péndulo en un tiempo determinado, los estudiantes utilizan las capturas de sus fotogramas por medio de su aplicación de celular.

Realizan una tabla donde relacionan el tiempo y la distancia del punto extremo del péndulo respecto a la vertical.

Luego de realizar la tabla, se espera que los estudiantes grafiquen los puntos obtenidos y formulen posibles respuestas a la cuestión planteada al inicio de la sesión a partir de la relación existente entre el MAS y el MCU

Además, se solicita a los estudiantes indiquen características que corresponden a la gráfica como, tramos crecientes y decrecientes, acotación, etc.

Quinta etapa: Estudio de la regla de correspondencia

En esta etapa los estudiantes realizan tareas inversas sobre las reglas de correspondencia obtenidos en los otros equipos de trabajo. Es decir, a cada equipo se les ofrece las reglas de correspondencia de otros equipos y tienen que interpretarlas en términos de la oscilación del péndulo.

Sexta etapa: Transferencia a otras situaciones

Los estudiantes reciben una hoja de trabajo donde ponen a prueba las técnicas abordadas. Se espera que los estudiantes se desarrollen la técnica y manifiesten el uso de tecnologías de la información.

Séptima etapa: Presentación del proyecto

Los estudiantes presentan su proyecto en portafolios o carpetas de trabajo, donde muestran las evidencias de su proceso de investigación y sus resultados.

4.3 Desarrollo del REI e identificación de dialécticas

En el desarrollo del REI, se observa el proceso de modelización a partir de la pregunta generatriz, la cual impulsa el desarrollo de respuestas y nuevas cuestiones, traducidas luego en praxeologías. A continuación, se indica el desarrollo de las sesiones, poniendo énfasis además en los gestos didácticos que emanan de la incursión por parte de los estudiantes en la pedagogía de la investigación.

Primera etapa: Exploración de la problemática

Tabla 3
Presentación del proyecto de investigación

Sesión 1:	**Presentación del proyecto de investigación y la cuestión generatriz**
Momento didáctico:	Primer encuentro con la organización matemática
Duración:	30 minutos
Desarrollo de la sesión	En esta primera sesión, se organizaron los equipos de trabajo. Se formaron 8 equipos de 4 estudiantes y un equipo de 5 integrantes. El entorno institucional, en ese momento, era referido a la conmemoración de científicos peruanos que aportaron a la ciencia en una actividad realizada en el patio general frente a todos los estudiantes. Algunos identificaron personajes destacados como Pedro Paulet (cuyos principios fueron base para el lanzamiento de cohetes aeroespaciales), y, de manera particular, a Daniel Alcides Carrión, quien, inoculándose la bacteria de la denominada “Verruga peruana”, desarrolló un proceso de investigación sobre esta enfermedad. Fue registrando clínicamente el avance de la enfermedad en su cuerpo, llevándolo incluso al sacrificio de su vida y a ser considerado posteriormente como el mártir de la medicina peruana. Aprovechando este escenario, el docente planteó a los estudiantes, una nueva manera de abordar el curso, mediante un trabajo de investigación. El docente preguntó a los estudiantes: ¿cómo actúo Daniel Alcides Carrión para estudiar la verruga peruana? El objetivo fue hacer un símil entre el registro clínico que desarrollaba, el cual le permitía cuestionar y profundizar cada vez más en el estudio, con el proceso de investigación y estudio que iban a desarrollar en el curso. Como un motor del trabajo de investigación, se planteó además cuatro consignas, estas son: Ver más allá de lo que usualmente se ve y cuestionarse Sistematizar la información Buscar aportar o resaltar algún conocimiento de utilidad Tomar decisiones El docente dialogó con los estudiantes respecto a: ¿Qué quiere decir cada consigna dentro de un proyecto de investigación? Parte del diálogo fue el siguiente: : ¿Qué quiere decir cada consigna dentro de un proyecto de investigación No conformarnos con una simple información, sino tratar de profundizar más. Docente: ¿Cómo se puede profundizar más? Estudiantes: Buscando más información sobre algo que aún no nos queda claro. Para mí. sistematizar la información quiere decir por ejemplo resaltar las ideas principales. Profesor: Muy bien ¿y qué hacemos luego con esas ideas principales? Estudiantes: Podemos organizarlas. Profesor: ¿Cómo? Estudiantes: Por ejemplo, construyendo, mapas, organizadores.

	: Muy bien, esa es la idea, ir desarrollando la investigación, profundizando, preguntándonos para entenderlo mejor, ir sistematizando la información e ir tomando decisiones. Dado que el REI se iba a desarrollar dentro de la programación institucional, se indicó también que como evaluación se iba a recoger sus avances en un portafolio, acompañado de cuestionarios grupales e individuales. Seguidamente, el docente presentó la cuestión generatriz, mediante la problemática de la prevención de sismos; y cómo un país, en zona sísmica como el Perú, está sometido a constantes movimientos sísmicos, de ahí que se realicen simulacros en forma periódica. Luego, muestra el proyecto de investigación como una manera de poder contribuir al conocimiento sobre cómo reacciona un edificio frente a un sismo. La pregunta generatriz es: **Q1: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?** El docente indicó como tarea para la siguiente clase traer información referente a todo lo que tenga que ver con esta pregunta.

Nota. Elaboración propia

Tabla 4
Cuestión generatriz

Sesión 2:	**Abordamos la cuestión generatriz**
Momento didáctico:	Primer encuentro con la organización matemática
Duración:	60 minutos
Desarrollo de la sesión .	En esta segunda sesión, el aula se organiza en equipos (A, B, C, D, E, F, G, H, I) de cuatro estudiantes por equipos (A1, A2, A3, A4, B1, B2, … I3, I4). Los estudiantes muestran su información y se disponen a compartirla al interior de cada equipo para luego realizar una puesta en común, socializar las ideas con los demás equipos e intentar llegar a un consenso. Dada la pregunta generatriz: **Q1: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?** Los estudiantes llegan a un consenso como respuesta en común: **R_1: Que un edificio reacciona mediante un movimiento lateral, un movimiento oscilatorio** Además, se registra el siguiente diálogo: Profesor: Si queremos seguir con la investigación y de acuerdo a nuestra consigna: “Ver más allá de lo que usualmente se ve” ¿Qué deberíamos hacer ahora? H1: Averiguar sobre ese movimiento lateral, el movimienH1: ¿Cómo es el movimiento oscilatorio de un edificio? Se formula, entonces, una cuestión derivada. **$Q_{1.1}$: ¿Cómo es el movimiento oscilatorio de un edificio?** El docente asigna como tarea traer información sobre todo lo referido a movimiento oscilatorio.

Dialécticas encontradas	Los estudiantes, para poder dar respuesta a la pregunta generatriz, indagan posibles obras en un área de gran alcance como la física. En el equipo 8, se registró el siguiente diálogo: H1: “Yo encontré que depende de varios factores, el suelo, la distancia al epicentro”. H2: “Yo leí, por ejemplo, lo que pasó en México, los edificios más altos sufrieron más, y los más bajos fueron menos afectados” H3: Es que se mueve como un péndulo que lo sacude de lado a lado.  *Figura 42.* Dialéctica del individuo colectivo H1: Sí, pero ese movimiento, puede depender de muchas cosas. H2: Entonces, nuestra respuesta sería que se mueve como un péndulo, o sea lateralmente debido a muchos factores, la distancia al epicentro, el suelo y el tamaño del edificio. En este diálogo y de manera similar en los diferentes equipos, se pone de manifiesto la **dialéctica del individuo y colectivo**, pues, a partir de lo que comparten y dialogan, construyen de manera colaborativa su respuesta de equipo. Los estudiantes, habiendo revisado y compartido información proveniente de distintas páginas de internet, arriban a primeras respuestas las que indican en la puesta en común. Estas respuestas son declaradas por un estudiante y de manera sucinta, la reacción de un edificio frente a un sismo se expresa como: Movimiento oscilatorio de la estructura del edificio Movimiento de la estructura del edificio expresado en tres fases, el primero oscilatorio Movimiento como torsión del edificio La reacción del edificio depende del peso en la parte superior del edifico, del suelo. El edificio reacciona moviéndose en vaivén. La reacción de la estructura del edificio depende de la cercanía al epicentro. Esta reacción puede ser un movimiento lateral o un movimiento hacia arriba y abajo. En el momento en el que los equipos estudian la información obtenida y tienen una idea panorámica del problema, y a la vez identifican algunas *“semillas”* que pueden colaborar en dar respuesta a la cuestión y posteriores cuestiones, se está manifestando **la dialéctica del paracaidista y de las trufas.** Por ejemplo, frente a la primera cuestión y durante la puesta en común, los estudiantes encontraron diversa información referente a la reacción de la estructura de un edificio frente a un sismo, el movimiento, los conceptos asociados, las ecuaciones que intervienen, las funciones para la posición su gráfica, la velocidad y aceleración, etc. sin tener una idea precisa de ello. Observan un panorama cuyo centro es el movimiento vibratorio, oscilatorio o movimiento lateral; y respecto a las trufas se observa, por ejemplo, aquella relacionada a los componentes de la gráfica de una función sinusoidal, la definición de periodo, etc. Además, constantemente se ha puesto de manifiesto **la dialéctica de la difusión y recepción**, pues la respuesta elaborada por cada equipo de estudiantes emana de un consenso entre los aportes individuales de sus integrantes. Una vez

	consensuada la respuesta en cada equipo se procedió a la puesta en común de las respuestas donde difunden y defienden su planteamiento para con el resto de sus compañeros (dialéctica de la difusión y recepción), pero no de manera competitiva sino colaborativa.

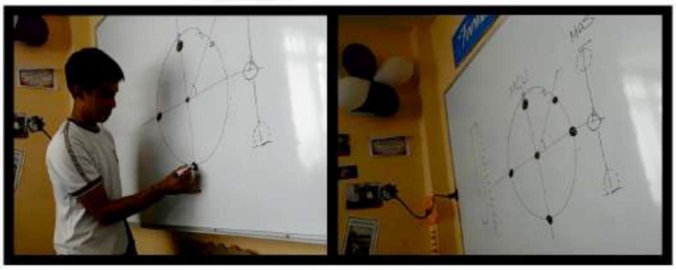
Nota. Elaboración propia

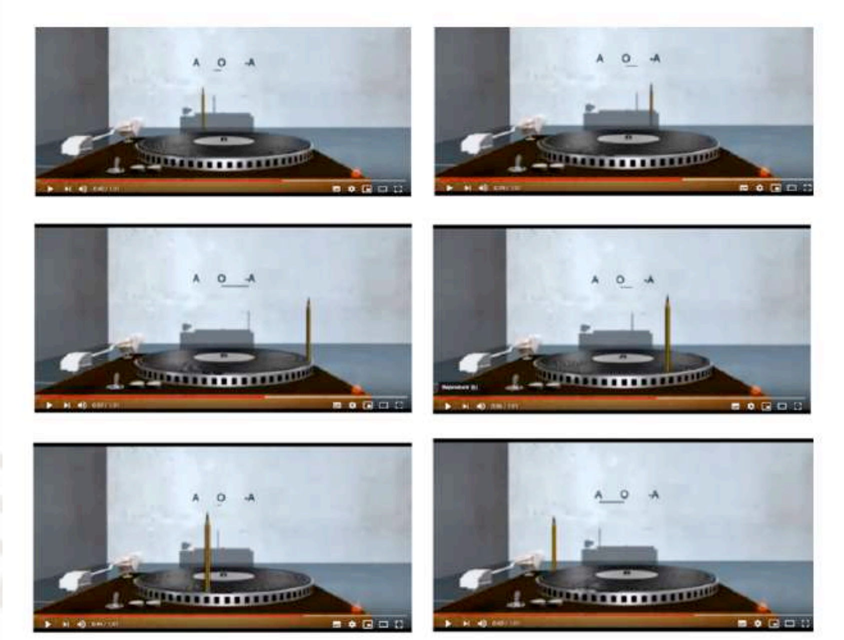
Tabla 5
Movimiento oscilatorio de un edificio.

Sesión 3:	**Abordamos la cuestión: ¿Cómo es el movimiento oscilatorio de un edificio?**
Momento didáctico:	Primer encuentro con la organización matemática
Duración:	60 minutos
Desarrollo de la sesión	Los estudiantes se organizan en equipos y comparten su información para luego realizar una puesta en común de sus ideas encontradas e intentar llegar a un consenso. Frente a la cuestión: **$Q_{1.1}$: ¿Qué es el movimiento oscilatorio?** El consenso al que llegan los estudiantes no es muy claro, pues las obras que provienen de internet plantean en varias ocasiones al movimiento oscilatorio y movimiento armónico como equivalentes; en otros casos, el movimiento oscilatorio como un tipo de movimiento armónico simple, o inclusive viceversa, además en algunos otros casos la información contiene tecnicismos y elementos de matemática superior, que los estudiantes no logran comprender. Sin embargo, ante ello, el docente interviene para resaltar dos de las obras de las encontradas, una proveniente de Wikipedia, y la otra proveniente del repositorio de la PUCP: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/7140/Medina_Fisica2_Cap2.pdf?sequence=3, el cual consiste en el capítulo II del libro electrónico de Física II (Medina, 2014). Entonces, los estudiantes establecen la siguiente conclusión: **$R_{1.1.}$: El movimiento oscilatorio de un edificio es un tipo de movimiento que puede ser descrito mediante un movimiento armónico simple MAS.** Seguido de ellos los estudiantes, ahora formulan una nueva cuestión derivada: **$Q_{1.1.1.}$: ¿Qué es el movimiento armónico simple?** Los estudiantes, además de la información que trajeron, disponen del internet de sus celulares y establecen, de una dinámica interna y luego colectiva, definiciones y características del movimiento armónico simple MAS Finalmente, el docente establece una nueva cuestión. **$Q_{1.1.1.1.}$: ¿Cómo puede ser descrito o interpretado el MAS?**
Dialécticas encontradas	En este caso podremos señalar como dialéctica más resaltante la dialéctica del medio media. Los estudiantes, luego de revisar distintos medias, encuentran información que no es clara para formular una respuesta. Por ello, deben decidir qué medias o que elementos de ellos pueden integrarse al medio de estudio. Los estudiantes consideran que la información proveniente de universidades o páginas de prestigio pueden ser las más aceptables. Por eso, deciden tomar los medias provenientes de Wikipedia, del repositorio de la PUCP, arribados en conjunción otras dialécticas, como la *dialéctica del individuo colectivo*, así como la *dialéctica de la difusión y recepción* proporcionan una respuesta aceptable y consensuada.

Nota. Elaboración propia

Tabla 6
Descripción e interpretación del MAS

Sesión 4:	**Abordamos la cuestión: $Q_{1.1.1.1.}$: ¿Cómo puede ser descrito o interpretado el MAS?**
Momento didáctico:	Primer encuentro con la organización matemática
Duración:	60 minutos
Desarrollo de la sesión	Los estudiantes se organizan en equipos y comparten su información para luego realizar una puesta en común de sus ideas encontradas e intentar llegar a un consenso. Frente a la cuestión: **$Q_{1.1.1.1.}$: ¿Cómo puede ser descrito o interpretado el MAS?**, los estudiantes manifiestan no tener muy clara la pregunta, y el docente trata de esclarecerla: E1: Profe, ¿Qué quiere decir la pregunta? ¿Qué piden? Profesor: ¿Qué observan cuando se describe el MAS? ¿Qué información tienen respecto al MAS?' E1: Definición, ejemplos, características, gráficas, ecuaciones, … Profesor: Ok, esas ecuaciones son algunas descripciones que se desprenden de una interpretación del MAS, de una relación con el MAS. ¿Cuál es esa interpretación o esa relación? E2: Asu, profe, pero díganos, pues, esas ecuaciones son feas (con derivadas, otras con raíces), ¿de dónde vendrán? Profesor: Bueno, por ejemplo, la ecuación del desplazamiento de un movimiento armónico, ¿de dónde se desprende, de que interpretación, de qué relación? Ya con una idea de la cuestión un poco más entendible, los estudiantes, y con la disposición de varios medios, indagan, información de internet, además libros de física y diccionarios enciclopédicos facilitados por el docente. Los estudiantes encuentran que: **$R_{1.1.1.1.}$: El MAS es interpretado y relacionado con el Movimiento Circular Uniforme MCU** El media en el que se basan es la información proveniente de un video de internet, el que posteriormente es respaldado en los libros de física, realizando una construcción en pizarra mediante la participación de dos representantes del equipo H, acompañado de la participación oral de otros estudiantes.  *Figura 43*. Muestra de la relación entre el MCU y el MAS
Dialécticas encontradas	Las dialécticas del *medio media*, la *dialéctica del individuo colectivo*, así como la dialéctica de la difusión y recepción, se concatenan para poder dar respuesta a la cuestión planteada. En esta oportunidad toma relevancia en primer lugar el video

	proveniente de YouTube propuesto por el equipo B: https://www.youtube.com/watch?v=Cw9eFeVY74I video que brinda información muy ilustrativa referente a la relación entre el MAS y el Movimiento Circular Uniforme MCU. En la fig. 35 se observa una aplicación de esta relación, mediante la simulación de un sistema donde un lápiz está colocado sobre un tocadiscos que al girar proyecta una sombra sobre la pared. Se observa que mientras el lápiz sobre el tocadiscos se encuentra dentro de un MCU, su sombra sobre la pared, en otras palabras, su proyección oscila en MAS.  *Figura 44*. Video que relaciona el MAS con el MCU Cobra importancia la capacidad de poder compartir obras encontradas por parte de los estudiantes, en un primer momento al interior de cada equipo y luego en la puesta en común con los demás grupos. La dialéctica del individuo colectivo cobra aquí un significado valioso pues potencia el involucramiento de los integrantes y equipos y la capacidad de acceder a una mayor cantidad de información y puntos de vista.

Nota. Elaboración propia

Segunda etapa: La relación entre el MAS y el MCU como una razón de ser para la función seno

Tabla 7
Revisamos obras anteriores

Sesión 5:	**Revisamos obras anteriores**
Momento didáctico:	Exploración del tipo de tareas Ti y de la elaboración de una técnica ti
Duración:	**60 minutos**
Desarrollo de la sesión	Para el desarrollo de esta cuestión fue necesaria una "salida" y retomar una obra que pertenecía a la cultura de los estudiantes, mediante la aplicación de una hoja de trabajo en la que se encontraba los siguientes tipos de tareas: T_{01}: Hallar el valor de un cateto conociendo un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
T_{02}: Hallar el valor de la distancia del extremo de un vector al eje x, conociendo el ángulo de rotación del vector y el módulo del vector
T_{03}: Hallar el valor de la distancia de un punto de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas, al eje x o al eje y, conociendo la medida del ángulo en radianes para el punto dado y el radio
T_{04}: Hallar el valor de la distancia de un punto de la circunferencia trigonométrica al eje x o al eje y, conociendo la medida del ángulo en radianes para el punto dado, y el radio
Esto permitió a los estudiantes retomar parte de sus saberes (el seno y coseno trigonométrico) y, en combinación con obras obtenidas en sesiones anteriores, elaborar una técnica para hallar el valor de una semicuerda vertical u horizontal como una expresión del seno o coseno.
Finalmente, se plantea dos interrogantes:
$Q_{1.1.1.1.1.}$: ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS en términos datos provenientes del MCU?

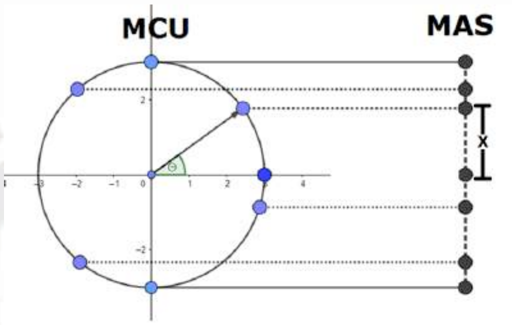


Figura 45. MAS como proyección del MCU.
Q1.1.1.1.2.: ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS en términos de datos provenientes del MAS?
Para poder arribar a dicha respuesta, los estudiantes de este equipo H tuvieron que retomar algunas de las semillas encontradas en sesiones anteriores y profundizar en el estudio del significado de Θ para el MAS y para el MCU, así como las equivalencias de la velocidad angular ω y el período T.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dialécticas encontradas</td>
<td>
En este trabajo, resaltó la dialéctica del individuo colectivo. Los estudiantes, luego de retomar tareas similares desarrolladas anteriormente en el triángulo rectángulo y en la circunferencia trigonométrica (que conformaran parte de su cultura), realizan una transposición al movimiento circular uniforme y logran establecer una relación para el desplazamiento x de un móvil en MAS: $x = R\operatorname{sen}\theta$.
Aunado a esto, el docente interviene de manera significativa al plantear una cuestión que representará un problema retador a los estudiantes y que impulsará una relación funcional entre el desplazamiento y el tiempo; y, en consecuencia, el desarrollo de la investigación.
Q1.1.1.1.2.: ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS en términos de datos provenientes del MAS?
En términos de la dialéctica del paracaidista y las trufas, los estudiantes tenían que revisar semillas de las primeras sesiones, en las cuales obtuvieron información relacionada con la descripción del desplazamiento de un cuerpo en MAS; además, se pudo investigar equivalencias entre el MAS y el MCU, y estudiar estas descripciones. Ello genera, a su vez, la necesidad de seguir profundizando en el estudio, por ejemplo, en torno a las equivalencias de la velocidad angular ω, estudiar estas equivalencias, investigar sobre aquellas que surgen a partir de datos desprendidos del MAS y tomar decisiones para poder abordar una respuesta. En este proceso, se pone de manifiesto la dialéctica del estudio-investigación.
</td>
</tr>
</table>

Los estudiantes habían obtenido una relación para el desplazamiento “d” en MAS: d = Rsenθ, pero en términos de datos provenientes del MCU donde: R representa el radio y θ el desplazamiento angular.

La primera equivalencia que obtienen los estudiantes, es respecto a R, la cual gráficamente, la relacionan como el máximo desplazamiento en el MAS denotado como A en las distintas fuentes de información:

$d = Asen\theta$ donde A= amplitud; θ= desplazamiento angular

Posteriormente, el equipo H realiza una cuestión previa que le permite acercarse a la respuesta
H1: ¿Qué tienen en común el MAS y el MCU?
H2: El tiempo

Mientras el equipo A recoge de sus informaciones previas que $\theta = \omega t$ donde θ es el desplazamiento angular, ω es la velocidad angular y t el tiempo, otros estudiantes de los demás equipos manifiestan:

E1: Mejor díganos cuál es la fórmula, profe.

Sin embargo, el docente reitera que la respuesta está en sus manos y que tienen las condiciones para responder esta y otras cuestiones, es decir, que se encuentran en un proceso de construcción.

Luego, los estudiantes ya cuentan con “d” en función del tiempo,
$d = Asen\omega t$

Sin embargo, el docente también les encargó que dicha expresión debe de partir de los datos que ofrece el MAS. En ese sentido, se hace necesario encontrar una equivalencia para la velocidad angular ω.

Toma relevancia aquí las dialécticas del medio media, cuando los estudiantes buscan equivalencias para el desplazamiento angular θ y posteriormente las equivalencias de la velocidad angular ω en distintos medias, e incorporan al medio de estudio aquellas que le ofrecen la posibilidad de abordar una respuesta a la cuestión, en este caso el equipo H ingresan a la web https://sites.google.com/a/colegiocisneros.edu.co/fisica10y11/home/eventos-ondulatorios/movimiento-circular-uniforme-mcu y disponiendo de:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

Figura 46. Búsqueda de equivalencias para el desplazamiento angular en internet

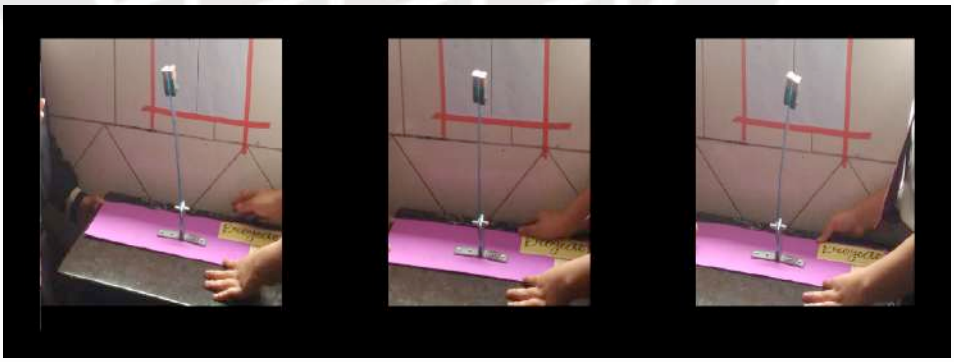
Incorporan al medio de estudio la ecuación $\omega = \frac{2\pi}{T}$ teniendo como argumento que esta ecuación posibilita hallar la velocidad angular exclusivamente con los datos que brinda el MAS.

	Así es que obtienen: $d = Asen(\frac{2\pi}{T})t$ con datos exclusivamente provenientes del MAS A: Amplitud del MAS T: Período de oscilación de un MAS t: tiempo transcurrido En esta etapa, se evidencia gestos de un proceso de investigación de parte de los estudiantes donde toma relevancia la dialéctica del estudio-investigación. Los estudiantes asumen la búsqueda de nueva información como necesidad frente a una nueva cuestión, la cual se encuentra accesible con la condición de requerir indagación, desde la información recogida en sesiones anteriores, donde encontraron trufas, con una visión panorámica del paracaidista. En otras palabras, los estudiantes se involucran y se sienten capaces de insertarse en el proceso de investigación, a partir de la visión panorámica inicial, donde se identifica información particular que se prevé pueda ser usado posteriormente y se empieza a construir elementos de la investigación que dan respuesta a la cuestión generatriz.

Nota. Elaboración propia

Tercera etapa: Construcción de una regla de correspondencia para el movimiento armónico simple.

Tabla 8
Actividad de matematización de un movimiento pendular

Sesión 6:	**Actividad de matematización de un movimiento pendular**
Momento didáctico:	Exploración del tipo de tareas Ti y de la elaboración de una técnica ti
Duración:	**200 minutos**
Desarrollo de la sesión	Para el desarrollo de esta sesión, los estudiantes construyeron un simulador de edificio utilizando una regla de plástico o un paliglobo y una base de madera para poder obtener datos de la oscilación. Se utilizó, además, la aplicación *Frame player* que captura fotogramas por unidades de tiempo cortas.  *Figura 47.* Construcción de péndulo invertido Se observó que los estudiantes se mostraron más participativos al momento de la construcción del péndulo y el registro en video de la oscilación, a pesar que algunos equipos tardaron en la construcción del péndulo, primero mediante el uso de un paliglobo y luego el de una regla fijada con ángulos de metal a la base de madera. La construcción del péndulo invertido y registro en video del mismo tomó una clase de 80 minutos, en la siguiente tabularon y representaron gráficamente; y en la subsiguiente, analizaron los datos y arribaron a las siguientes preguntas planteadas por el docente:

$Q_{1.2}$: ¿Cuál es el valor de una distancia "d", distancia entre el extremo superior del péndulo y su eje vertical, dado un tiempo "t" cualquiera?

Los estudiantes tabulan alrededor de 20 a 30 datos, y luego realizan una gráfica, para posteriormente conjeturar una posible respuesta a la cuestión planteada. Algunos equipos se dispusieron a tabular y graficar sus datos obtenidos, utilizando Geogebra, un equipo utilizó Excel, y otro equipo utilizó la aplicación Chartgo.

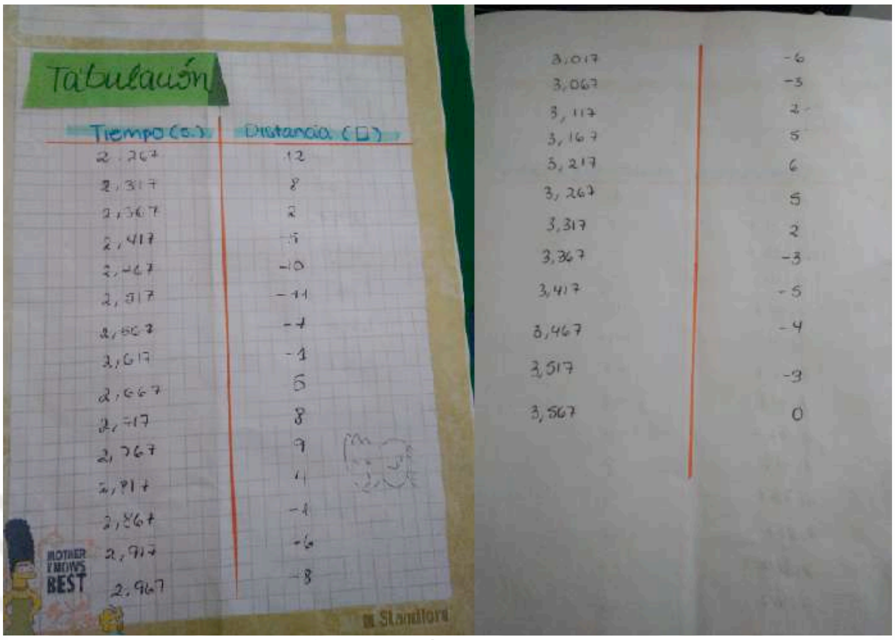


Figura 48. Tabulación de datos obtenidos

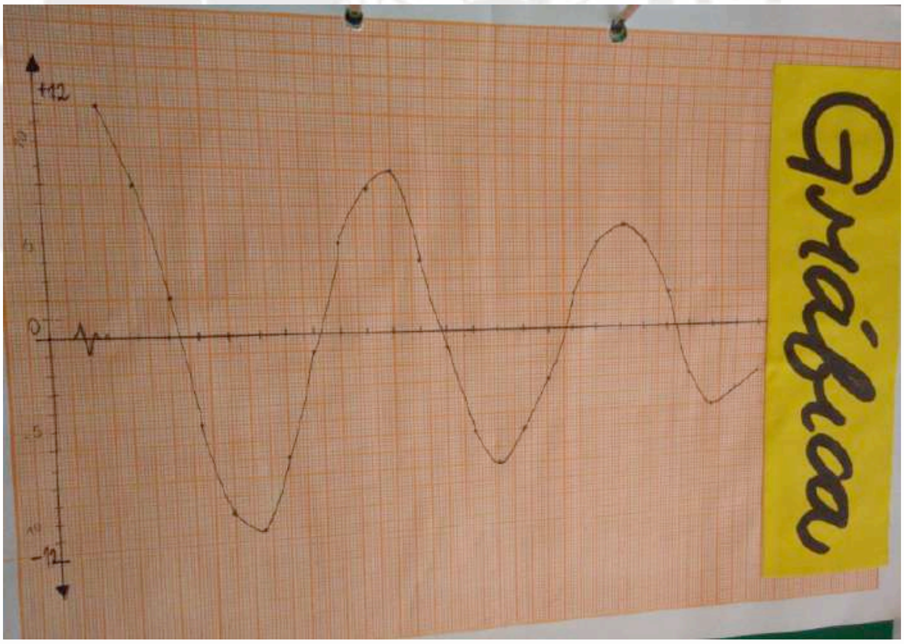


Figura 49. Representación gráfica de la tabulación

Figura 50. Oscilaciones del péndulo

Llamó la atención en la mayoría de los equipos que consultaran cómo representar o diferenciar la distancia a un lado del eje y al otro lado. Su primera opción no fue los números negativos y positivos. Uno de los grupos no realizó tal diferenciación mientras que otro grupo utilizó flechas tal como se muestra en la figura:

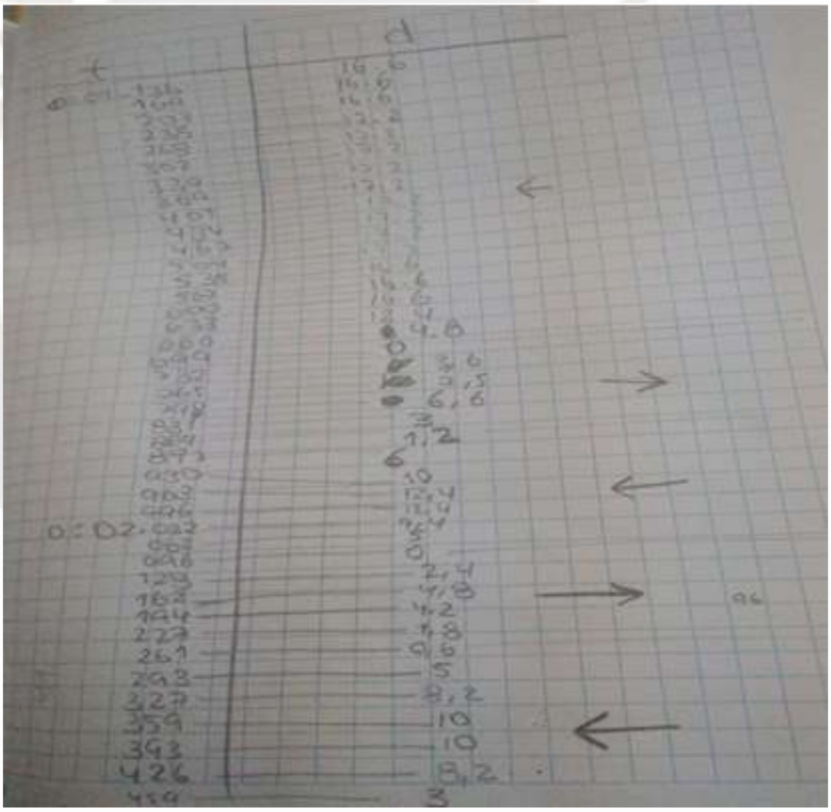


Figura 51. Uso de símbolos para representar números positivos y negativos

Fue por intervención del equipo 1 y 8 que los demás grupos tomaron la decisión de utilizar los números positivos y negativos para representar distancias a un lado y al otro del eje vertical.
Los equipos, en su mayoría, se mostraron algunas interrogantes en el uso de la aplicación Frame Player, pero por su carácter intuitivo pudieron manejarlo posteriormente sin dificultad.

Finalmente, el docente plantea a los estudiantes las siguientes cuestiones:

	Q1.2.1.: ¿Cómo varían las distancias conforme se incrementa el tiempo? **Q1.2.2.: ¿Qué características tiene la gráfica obtenida?** En este punto, se aborda, de manera general, a la noción de función y a la noción de periodicidad.
Dialécticas encontradas	Nuevamente toma relevancia la dialéctica del individuo colectivo, el trabajo en equipo el compartir opiniones de manera personal, complementar ideas y arribar a consensos hicieron posible que los equipos 1 y 8 puedan dar respuesta a la cuestión planteada. En el siguiente diálogo, se manifiesta la conversación que tuvo el equipo A: A1: Ya ¿cómo varían las distancias conforme se incrementa el tiempo? A2: Hay que ver la tabla, cuando aumenta el tiempo la distancia aumenta A1: Pero hay partes donde pasa el tiempo y la distancia disminuye. A2: Pero si ves la tabla son negativos que siguen aumentando A3: ¿Qué? A ver… A2: O sea aquí el negativo aumenta, se hacen negativos más grandes. No sé… ¿Disminuye o aumenta? A3: Disminuye porque se hace más negativo. A2: Pero son distancias: son siempre positivos. A1: Pero si te fijas el péndulo sin ver la tabla, te vas a dar cuenta que la distancia aumenta y disminuye A2: Entonces, ¿cómo respondemos la pregunta? A3: Hay que buscar más características, por ejemplo, en la gráfica se ve que hay topes que se van achicando. A1: Por eso, cuando crece el tiempo la distancia aumenta y disminuye, pero a su vez esta distancia máxima va disminuyendo. A4: En la gráfica, también se ve que hay momentos en que la distancia es cero. Eso puede ser una característica también. A2: Claro es que va oscilando y cada cierto tiempo llega a cero. A3: ¿Y lo de los extremos? Cada cierto tiempo se alcanzan los topes A1: ya entonces qué podemos decir. Que cuando el tiempo aumenta la distancia aumenta y disminuye A2: ¿Eso no es directa e inversamente proporcional? A3: Mejor eso no mencionamos. Está bien si decimos que la distancia aumenta y disminuye, pero la distancia máxima va disminuyendo a su vez. A1: Y que también existen tiempos donde la distancia es cero o la distancia es máxima. Ya está. Notamos que esta cuestión cumple su cometido al tratar de analizar el cambio que sufre la distancia al transcurrir el tiempo, y acercar a los estudiantes a la noción de función. Ellos analizan los cambios teniendo en cuenta esta relación arribando a conclusiones interesantes, sin embargo, se presentan algunas dificultades en la comparación números negativos, y el hecho de considerar la distancia como una magnitud siempre positiva. A pesar de ello, la dialéctica del individuo colectivo resulta beneficiosa para el equipo pues contrastan ideas basándose en la cultura de los estudiantes y en los medios elegidos que brinda la representación tabular y gráfica. Posteriormente, cuando los estudiantes plantean sus conclusiones en la puesta en común el docente procede a esclarecer algunas de ellas basándose en las ideas vertidas por los demás equipos mediante un diálogo cuestionador y mediador. Por ejemplo, el comportamiento creciente y decreciente de la función, que junto con la identificación de que cada cierto tiempo la distancia llega a un extremo o pasa por cero, se indica la periodicidad de la función, además de la amplitud y el periodo. Este conjunto de acciones refleja la dialéctica de la difusión y recepción.

Nota. Elaboración propia

Cuarta etapa: Simulación y validación de la regla de correspondencia

Tabla 9
Obtención de una regla de correspondencia

Sesión 7:	**Obteniendo una regla de correspondencia**
Momento didáctico:	Exploración del tipo de tareas Ti y de la elaboración de una técnica ti
Duración:	**80 minutos**
Desarrollo de la sesión	El docente indica que para esta actividad deben focalizarse en un intervalo de tiempo donde las amplitudes sean lo más similar posible, y luego les plantea la siguiente cuestión: **$Q_{1.2}$: ¿Cuál es el valor de una distancia “d”, distancia entre el extremo superior del péndulo y su eje vertical, dado un tiempo “t” cualquiera?** El equipo E manifestó que no tenía clara la cuestión planteada: E3: Profesor no entiendo la pregunta Profesor: ¿Y qué dice la pregunta? E3: ¿Cuál es la distancia “d” para un tiempo “t” cualquiera? Profesor: O sea, para un tiempo de 0, 09s ¿a qué distancia del eje vertical está la cabecita del péndulo?, ¿para un tiempo 0,8s? ¿para un tiempo 0,3? ¿y para un tiempo “t” cualquiera? E3: ¿Qué necesito saber? Profesor: Esa es una buena pregunta, para dar respuesta a esta situación, ¿qué necesitas saber? E3: ¿Una fórmula? Profesor: ¿Qué más? E3: ¿Una fórmula, una ecuación? Profesor: Y una “fórmula” o ecuación en la que relacionas el tiempo para obtener la distancia es una… E3: ¡Una función! Profesor: ¡Correcto! Los estudiantes, al principio, muestran dudas sobre cómo dar respuesta a la cuestión, porque, al parecer, no se entiende muy bien la pregunta. Luego de explicar la cuestión, los estudiantes asumen que deben buscar una fórmula para la distancia “d” en cuestión. Luego de dialogar al interior de los equipos, los estudiantes retoman la relación entre el MAS del péndulo invertido y MCU asociado, bajo el cual se puede expresar “d” como una función del tiempo utilizando el coseno y la velocidad angular o el periodo. $d = Acos\omega t$ $d = Acos(\frac{2\pi}{T})t$ donde: A: Amplitud del MAS ω: Velocidad angular T: Período de oscilación de un MAS t: tiempo transcurrido
Dialécticas encontradas	Toma relevancia aquí las dialécticas del medio media, del individuo colectivo y del estudio investigación. Los estudiantes, previamente, ya han integrado en su proceso de investigación la interpretación del MAS como una proyección del MCU. Sin embargo, esto es realizado sobre lápiz y papel. Ahora corresponde a los estudiantes reflejar este mismo procedimiento sobre la oscilación de un péndulo invertido. Esta tarea la logran concretar sin mayor dificultad, excepto porque los estudiantes habían previamente obtenido una regla de correspondencia utilizando el seno. Ahora se les hace necesario describir un movimiento armónico horizontal. Cuando los estudiantes logran superar esta dificultad, amplían su alcance para poder representar movimientos oscilatorios, ya no solo verticales sino también horizontales.

Nota. Elaboración propia

Tabla 10
Verificación de la regla de correspondencia

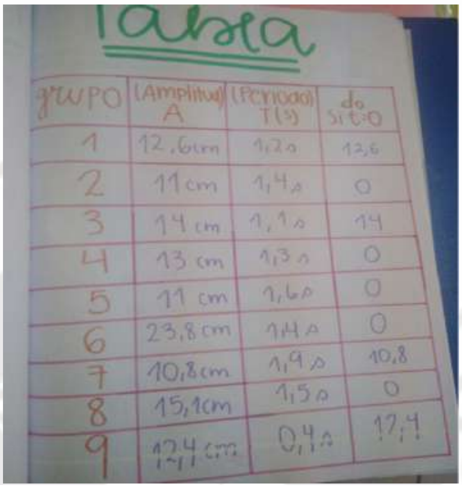
Sesión 8:	**Verificamos la regla de correspondencia**
Momento didáctico:	Verificación del tipo de tareas Ti y de la elaboración de una técnica ti
Duración:	**40 minutos**
Desarrollo de la sesión	Una vez encontrada la regla de correspondencia para un período de tiempo, los estudiantes se proponen verificar la regla hallando la distancia para un tiempo dentro del intervalo estudiado. Los estudiantes se disponen a verificar su “fórmula” y los que lo encuentran como el equipo A se muestran satisfechos al obtener valores muy cercanos a los realizados en la toma de datos. Sin embargo, otros equipos como el E y el H no logran verificar sus datos a pesar de que los procedimientos son los correctos. Lo anterior se debe a que no se ha considerado el valor de la distancia inicial en el instante inicial del movimiento. Es decir, algunos equipos consideraron modelar un intervalo en el que la posición inicial del móvil se encontraba a un extremo del movimiento pendular mientras otros consideraron la posición inicial en el eje vertical del péndulo. Los estudiantes se ven en la necesidad de hacer un reajuste, revisan la información, pero no logran establecer por sí solos cómo realizar el reajuste. Por ello, el docente interviene y plantea la siguiente cuestión: **La expresión** $\boldsymbol{x = Acos(\omega t + \theta_0)}$ **para un tiempo t = 0 equivale a:** $\boldsymbol{x = Acos(\theta_0)}$ **Si la distancia inicial fuera A ¿Cuál debe ser el valor de de** $\boldsymbol{\theta_0}$**?** **Si la distancia inicial fuera 0 ¿Cuál debe ser el valor de de** $\boldsymbol{\theta_0}$**?** Las cuestiones planteadas resultan interesantes para los equipos incluso que llegaron a la validación de su regla de correspondencia. Posteriormente, los estudiantes logran validar su regla de correspondencia y se muestran satisfechos por sus logros. Dentro de este proceso, se observa que los estudiantes buscan saber si llegaron a la respuesta correcta. Para ello, acuden al docente y le preguntan si está bien o no, su regla de correspondencia. El docente, sin embargo, no les brinda una respuesta final. Profesor: Pues no sé, ¿Cómo podrían saber ustedes si la fórmula es válida? Los estudiantes se muestran insatisfechos y asumen la nueva pregunta, dialogan entre ellos y con el docente llegando a la conclusión que la forma en que pueden saber si la regla de correspondencia es correcta entonces deben verificar algunos valores de la tabla de datos. Los estudiantes proceden a ello, incorporando la tabla de datos para verificar si su fórmula es válida. Luego, logran obtener resultados muy cercanos y finalmente se sienten satisfechos por el logro obtenido
Dialécticas encontradas	En esta sesión, se ve reflejada la dialéctica del *medio media,* en tanto se busca una fuente de información como las tablas con los datos recogidos para validar una conjetura. También puede ser comprendida como la dialéctica de *la conjetura y la prueba*. Tal como lo señala Parra y Otero (2017), involucra también cuando durante la clase se hacen preguntas similares a *¿cómo probar que efectivamente el modelo elegido es el correcto?* Si bien hay luego una intervención del docente, esta intervención otorga la oportunidad de que los estudiantes nuevamente se cuestionen y busquen incorporar nuevos medios. Para ello, revisan su información y encuentran los valores del argumento, para el cual el coseno equivale a cero o a uno. Esta búsqueda y posterior selección del medio otorgará la posibilidad de que los estudiantes puedan arribar a la respuesta a la cuestión.

Nota. Elaboración propia

Quinta etapa: Estudio de la regla de correspondencia

Tabla 11
Practicando con la regla de formación

<table>
<tr><td>Sesión 9:</td><td>Practicando con la regla de formación</td></tr>
<tr><td>Momento didáctico:</td><td>Trabajo de la técnica ti</td></tr>
<tr><td>Duración:</td><td>80 minutos</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de la sesión</td><td>
Los estudiantes, una vez obtenida y verificada la regla de formación para relacionar sus datos a partir de la amplitud A, el periodo T y el reajuste con θ_0, trabajan la técnica, pero ahora con los datos de los demás equipos.



Tabla

<table>
<tr><td>grupo</td><td>(Amplitud) A</td><td>(Periodo) T(s)</td><td>do Si t:0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12,6cm</td><td>1,2s</td><td>12,6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>11cm</td><td>1,4s</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>14 cm</td><td>1,1s</td><td>14</td></tr>
<tr><td>4</td><td>13 cm</td><td>1,3s</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>11 cm</td><td>1,6s</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>23,8cm</td><td>1,4s</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>10,8cm</td><td>1,9s</td><td>10,8</td></tr>
<tr><td>8</td><td>15,1cm</td><td>1,5s</td><td>0</td></tr>
<tr><td>9</td><td>17,4 cm</td><td>0,4s</td><td>17,4</td></tr>
</table>

Figura 52. Tabulación a partir de la regla de correspondencia.

Los estudiantes logran establecer sin mayor dificultad la regla de formación para los demás casos.
Luego los estudiantes desarrollan el siguiente problema planteado por el docente:

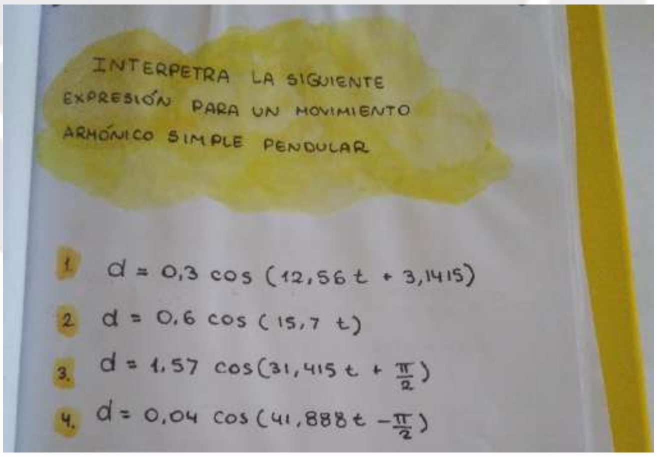
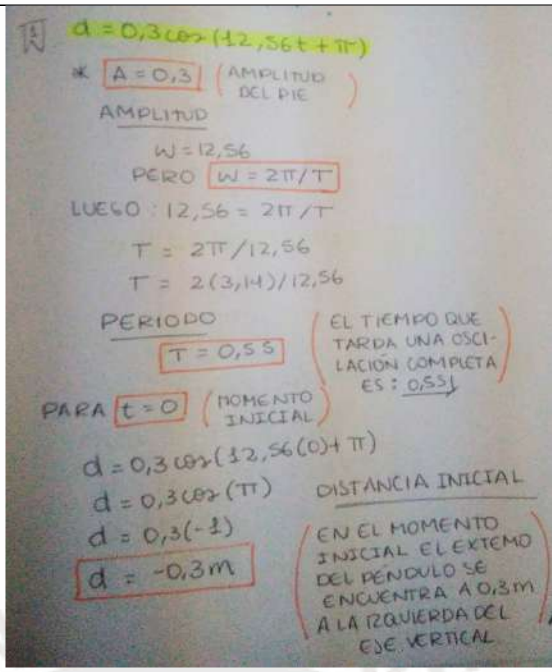


Figura 53. Regla de correspondencia de los demás equipos

Para la solución, los estudiantes proceden de la siguiente manera:
</td></tr>
</table>

	 *Figura 54*. Descripción de la regla de correspondencia De manera similar, los estudiantes proceden a desarrollar los demás ejercicios, quedando como tarea que los estudiantes grafiquen cada uno de los cuatro casos con ayuda de un graficador y lo traigan impreso para la siguiente clase.
Dialécticas encontradas	En esta sesión, se pone de manifiesto con mayor notoriedad el trabajo colaborativo al interior de los equipos expresado como la dialéctica del individuo colectivo. Los estudiantes, habiendo reconstruido la regla de correspondencia para el desplazamiento en el MAS, luego se habitúan a la técnica para obtener la regla de correspondencia: Tipo de tarea: Obtener la regla de correspondencia del desplazamiento del MAS, dada la amplitud de oscilación, el periodo y la distancia inicial respecto al punto de equilibrio. Técnica: Los estudiantes identifican el periodo T, y lo reemplazan en $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Obtenido el valor de ω e identificado la amplitud A y la distancia inicial θ_0 respecto al punto de equilibrio, se reemplazan los valores en: d(t)= $Acos(\omega t + \theta_0)$. Finalmente, el docente plantea actividades donde se presentan tareas inversas, es decir, a partir de la regla de correspondencia los estudiantes deben interpretar los parámetros en función de sus significados en el MAS.

Nota. Elaboración propia

Tabla 12
Análisis de los parámetros en la gráfica

Sesión 10:	**Analizando los parámetros en la gráfica**
Momento didáctico:	Trabajo de la técnica
Duración:	**80 minutos**
Desarrollo de la sesión	En esta sesión los estudiantes analizaron la gráfica de las cuatro funciones mediante la siguiente cuestión planteada por el docente: **¿Qué representan los parámetros A; ω; θ_0 en la gráfica de $d(t) = Acos(\omega t + \theta_0)$?**

	Para ello, utilizaron gráficas impresas y también disponían del app Geogebra en sus celulares y de la versión en línea de Geogebra en una laptop. Al momento de revisar las gráficas no causó mayor dificultad relacionar la amplitud en la gráfica A1: "Mira A es lo que le va a limitar arriba y abajo" Sin embargo, lo que si se ve aún por mejorar es el uso de un lenguaje matemático Profesor: ¿Y cómo se denomina A? A2: Amplitud Profesor: ¿y gráficamente que sería la amplitud? A1: Lo que va a limitar arriba y debajo de la gráfica, por ejemplo, este 0,3 está indicado a la altura de 0,3 en el eje "y" y también abajo se ve que la gráfica va hasta -0,3. Profesor: Muy bien, y si la gráfica con las mismas dimensiones se traslada una unidad más hacia arriba y ya no estuviera sobre el eje x ¿la amplitud sería lo que limitara arriba y abajo? A1: humm… no Profesor: ¿Qué representaría entonces la amplitud? A2: ¿el grosor de la gráfica? Profesor: ¿Cómo? A2: O sea la amplitud podría ser la mitad del grosor de la gráfica. Profesor: Muy bien, es una manera de decirlo, indícalo por favor ahora de manera un poco más formal. La amplitud es la mitad de la longitud vertical de la gráfica. A1: Profe, pero yo veo que es la distancia del centro a un extremo de la gráfica. Profesor: Está bien lo que dicen, pero si el péndulo está oscilando de extremo a extremo ¿qué sería ese centro que mencionas en la oscilación? A2: ¿El punto medio?, ¿El punto inicial?, ¿El punto final? Profesor: ¿Es punto inicial o final porque el cuerpo está en…? A2: ¡En equilibrio! El docente quería arribar a una noción quizá más precisa de la amplitud, entendida como la distancia del punto de equilibrio al extremo inferior o superior de la gráfica. Sin embargo, esto generaba tedio en los estudiantes e incluso en el mismo docente, motivo por el cual no se extendió más el diálogo. Sin embargo, lo arribado por los estudiantes no es incorrecto, dado que para una función de la forma $d(t)=A\cos(\omega t+ \theta_0)$ al no haber traslación vertical de la gráfica, el valor de A indicaría el máximo y le mínimo valor de la función. Para identificar el comportamiento gráfico de ω los estudiantes de manera similar procedieron a evaluar las gráficas impresas, además también utilizaron el aplicativo de Geogebra en sus celulares. Al observar los cambios en los valores de ω y sus correspondientes cambios en la gráfica, los estudiantes mencionaron: A1: Lo que se observa es que mientras cuando se disminuye el valor de ω la gráfica se ensancha y cuando aumentamos la gráfica se "acerca más". A2: ¿Qué quiere decir se acerca más? A1: O sea que las curvas son más cercanas entre sí. A3: ¿Qué los puntos mínimos y máximos están cada vez más cerca? A1: Si aumenta la velocidad angular, se observa que los puntos máximos y mínimos están más cerca. El equipo H también llega a similares conclusiones; sin embargo, aquí el docente interviene: Profesor: ¿Y en qué eje se está estrechando la gráfica? H1: ¿En el eje? Profesor: Y el eje x ¿qué representa?

H2: El tiempo.
H1: Ah ya! O sea que cuando la velocidad angular aumenta, los tiempos son más cortos entre cada corte
Profesor: ¿Y qué es ese corte?
H2: El punto de equilibrio
H1: Claro, o sea cuando la velocidad angular aumenta, el tiempo es más corto la gráfica se estrecha y los puntos de equilibrio son más cercanos.

Los estudiantes no tuvieron dificultad en analizar el comportamiento de T en la gráfica. Arribando a que su significaba la longitud de onda.
Para analizar el caso del comportamiento a θ_0 se tuvo cierta dificultad.
Las gráficas de:
d = 0,3 cos(12,56t +3,1415)
d = 0,6cos(15,7t)
d = 1,57cos(31,415t $+\frac{\pi}{2}$)
d = 0,04cos(41,888t - $\frac{\pi}{2}$)
fueron planteadas por los estudiantes:

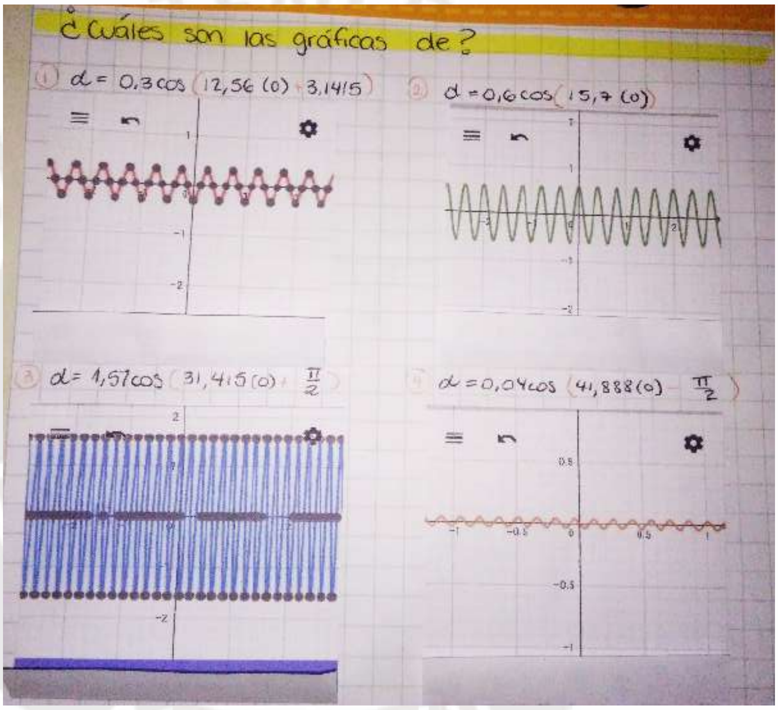


Figura 55. Representaciones gráficas de las funciones obtenidas

No fueron suficientes para intuir alguna respuesta.
Dado que los estudiantes disponían de la aplicación geogebra en sus celulares, lo utilizaron como medio para poder dar respuesta a la cuestión sobre qué representa gráficamente el valor de "θ_0".
A1: Ya. ¿Qué representa ω en la gráfica?
A2: ¿Representa la posición inicial?
Profesor: ¿Cómo?
A2: Es que en la información que buscamos dice que es fase inicial en radianes…
A1: O sea, es la distancia al "equilibrio" justo al iniciar el movimiento.
A3: A ver, comprueba,
A2: No, no sale.
A2: ¿Y si lo vemos en geogebra? Cambiamos los valores y vemos cómo se comporta.
A1: Ok.
…

A2: Sale que se adelanta cuando sumo.

	A1: ¿Y si restas? A2: Si restas, se va para atrás. … A3: A ver, comprueba. A2: No, no sale. A1: Profe, estamos analizando con geogebra y no nos sale. Profesor: Humm… A ver. Profesor: Bueno, aparentemente (viendo el app del celular) si sumas se mueve a la derecha y si restas se mueve a la izquierda… ¿Pero será así? ¿En el mismo sentido? A2: Profe, pero así se ve. A1: Podría ser también que se haya adelantado. Profesor: ¿Por qué? A2: Porque la gráfica es igual. Profesor: ¿Cómo igual? A2: O sea la gráfica como que se repite y puede ser que esté adelante o se haya ido atrás y estemos viendo otra parte de la gráfica… Profesor: Claro A2: Entonces no podremos determinar nada. Profesor: ¿Recuerdan qué pasa con otras funciones cuando sumas dentro del paréntesis? A1: Ahí sí se mueve en sentido contrario. Profesor: Vamos a usar geogebra, pero con mi Tablet. El docente inserta un deslizador “a” y los estudiantes insertan la regla de correspondencia colocando θ_0 = a, luego los estudiantes visualizan el desplazamiento arribando a la siguiente conclusión: A1: Ahora sí pues. profe, entonces se mueve de manera contraria. Profesor: Claro. A2: ¿Profesor, y es para todas las funciones cuando se suma dentro del paréntesis? Profesor: Cuando se suma dentro del paréntesis, ¿qué? A2: ¿Cuándo se suma dentro del paréntesis se mueve horizontalmente, pero contrario al signo? Profesor: Pues sí, pero habría que analizar por qué. En esta última situación, si bien es cierto se ha validado una hipótesis haciendo uso de Geogebra, aún no se ha institucionalizado el significado de θ_0 en la gráfica. Ello se verá más adelante en el estudio de un problema. De manera espontánea, de parte de los estudiantes, se hizo la consulta de si la expresión d(t) podría ser equivalente utilizando el seno y ya no el coseno. Para solucionar esa cuestión, los estudiantes tuvieron que buscar algunas obras anteriores propias de su cultura, indicando: A2: El seno es la co razón del coseno, o sea habría que, restarle de 90° A3: Pero aquí estamos en radianes, o sea que deberíamos restar $\frac{\pi}{2}$ Profesor: ¿y gráficamente eso como se vería? A2: Como un desplazamiento de la gráfica A3: La gráfica se movería $\frac{\pi}{2}$ a la derecha.
Dialécticas encontradas	En esta tarea se puso de manifiesto sobre todo la dialéctica individuo colectivo: Se ponen en juego de manera resaltante las siguientes dialécticas: La dialéctica del individuo colectivo, evidenciada en el trabajo intergrupal, al cuestionarse cuál es el comportamiento gráfico de los parámetros de la regla de correspondencia $x = Acos(\omega t + \theta_0)$, remplaza a los estudiantes a movilizar opiniones, ideas, conjeturas respecto al comportamiento gráfico de los parámetros, que luego contrastan con sus pares, reajustando sus ideas y tomando acuerdos dentro del proceso de estudio.

	En la dialéctica del medio media, los estudiantes disponen como medio de la representación gráfica de las funciones, esto les es suficiente al determinar el comportamiento gráfico de la amplitud y de la velocidad angular, sin embargo, no es suficiente en el caso del desfase θ_0. Por ello, los estudiantes en necesidad de incorporar de un media que les brinde acuden a un graficador dinámico, en ese caso la aplicación para Android Geogebra, aun así, el software no esclarece la cuestión. Por el contrario, la percepción resulta confusa, el docente al ver ello, proporciona un nuevo medio, el mismo graficador dinámico, pero ahora desde una laptop y utilizando la versión en línea Geogebra Classsic, las cual permite a los estudiantes finalmente arribar a una respuesta.

Nota. Elaboración propia

Sexta etapa: Transferencia a otras situaciones

Tabla 13
Aplicación de la técnica

Sesión 11:	**Trabajo de la técnica**
Momento didáctico:	Evaluación de la técnica
Duración:	**80 minutos**
Desarrollo de la sesión	Los estudiantes reciben una hoja de trabajo que contiene problemas de contexto extramatemático, referido al estudio de la oscilación de un edificio y otras situaciones, algunas de ellas extraídas de los libros de texto de educación básica. Se observa que los estudiantes del equipo A, E e H no tuvieron dificultades al resolver las situaciones planteadas en la hoja de trabajo, incluso aquellas que no era de un contexto familiar. Sin embargo, cuando se les planteó la siguiente situación, mostraron dificultad inicial al resolver el problema.  Una noria es una rueda que gira verticalmente sobre un eje central horizontal, permitiendo que las cabinas ocupadas por personas suban y bajen alrededor de ella. Supón que la rueda llega hasta una altura de 32 m y que su circunferencia, cuya medida es de 94,20 m, demora 3 minutos en dar una vuelta completa. Si la rueda gira en sentido antihorario, determina la función trigonométrica del movimiento que permite hallar la altura que alcanza la cabina que está en la parte baja en función del tiempo que transcurre. *Figura 56.* Problema de la Noria Luego de poder intercambiar opiniones para poder enfrentar el problema los estudiantes, identifican las variables en juego, en este caso identifican la altura como una magnitud que se puede expresar en función del tiempo, los estudiantes retoman la obra en la que pueden describir un fenómeno oscilante a partir de parámetros vinculados a los datos que se obtiene de la amplitud y el periodo. En ese sentido, los estudiantes intentan hallar el equivalente a la amplitud que en este

	caso sería el diámetro de la noria y el período cuyo equivalente sería el tiempo que tarda en dar una vuelta un vagón. En un primer momento, consideran el diámetro como 32m y 180s el tiempo que tarda en dar una vuelta la noria. Sin embargo, los estudiantes también se cuestionan sobre la medida de la circunferencia y buscan verificarlo con el docente. G2: ¿Profesor medida de la circunferencia quiere decir de la longitud de la circunferencia, ¿verdad? Luego de que el docente responde afirmativamente. Los estudiantes vienen con una nueva interrogante A1: ¿Profesor, están bien los datos? A2: Profesor, cambie de datos porque no coincide. Los estudiantes contrastan el diámetro de 32 m, que supuestamente brinda el problema con el diámetro de 30 m, consecuencia de haber obtenido el radio de 15m, a partir de una longitud de circunferencia de 94, 20m. El docente indica que describan como es una Noria, si el vagón inferior está al ras del piso o tiene alguna altura. Los estudiantes logran identificar entonces los 2 metros de diferencia entre el nivel del suelo y el vagón ubicado en el extremo inferior. Para enunciar la regla de correspondencia los estudiantes se preguntan *¿de dónde corresponde estos dos metros?;* sin embargo, uno de sus integrantes logra abordar sin mayor dificultad la respuesta enunciando que la regla de correspondencia es la misma solo que ahora habría que añadir dos metros a lo obtenido, porque es la altura del vagón de la noria más la altura de la noria en sí.
Dialécticas encontradas	Se debe reconocer que constantemente los estudiantes buscan la respuesta a sus dudas en el docente, luego de una escueta discusión entre ellos; este caso no es la excepción y el docente interviene, pero sin brindarles la respuesta directamente, sino para que ellos mismo puedan retomar sus dudas y tratar de esclarecerlas. En ese sentido ponen de manifiesto, la dialéctica del medio media, cuánto encuentran supuestas contradicciones en el problema, y luego cuando buscan esclarecer la situación se expresa la dialéctica del individuo colectivo, para finalmente en la puesta en común de resultados, aflorar la dialéctica de la difusión y recepción.

Nota. Elaboración propia

Sétima etapa: Presentación del proyecto

Tabla 14
Explicación del proyecto

Sesión 11:	**Presentación del proyecto**
Momento didáctico:	Trabajo de la técnica ti
Duración:	**80 minutos**
Desarrollo de la sesión	Los estudiantes, presentan el proyecto de investigación, mediante un portafolio que recoge todas las actividades realizadas.

Nota. Elaboración propia

La siguiente tabla sintetiza el desarrollo de las cuestiones a lo largo del REI

Tabla 15
Desarrollo del Recorrido de Estudio de Investigación

Cuestión generatriz	**Cuestiones derivadas Sub cuestiones**		**Sub respuestas**	**Respuestas formuladas**
Q_1: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?			R_1: Que un edificio reacciona mediante un movimiento lateral, un movimiento oscilatorio.	
	$Q_{1.1}$: ¿Cómo es el movimiento oscilatorio de un edificio?			$R_{1.1.}$: Definición de Movimiento Oscilatorio.
	$Q_{1.1.1.}$: ¿Qué es el movimiento armónico simple?			$R_{1.1.1.}$: Definición de MAS
		$Q_{1.1.1.1.}$: ¿Cómo puede ser descrito o interpretado el MAS?		$R_{1.1.1.1.}$: El Movimiento armónico simple MAS es interpretado como la proyección del Movimiento Circular Uniforme MCU
		$Q_{1.1.1.1.1.}$: ¿Cuál es valor del desplazamiento "d" de un cuerpo en del MAS en términos de datos provenientes del MCU?		$R_{1.1.1.1.1.}$: $d = Rsen(\theta)$ R: Radio en el MCU θ: Desplazamiento angular en el MCU
		$Q_{1.1.1.1.2.}$: ¿Cuál es valor del desplazamiento "d" de un cuerpo en del MAS en términos de datos provenientes del MAS?		$R_{1.1.1.1.2.}$: $d = Asen(\frac{2\pi}{T}t)$ Donde: A: Amplitud T: Periodo t: Tiempo
		$Q_{1.1.1.1.2.1.}$:¿Cuáles son las equivalencias para "θ"	$R_{1.1.1.1.2.1.}$: $\theta = \omega t$	
		$Q_{1.1.1.1.2.1.1.}$:¿Cuáles son las equivalencias para "ω"	$R_{1.1.1.1.2.1.1.}$: $\omega = \frac{\theta}{t}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\omega = 2\pi f$	
	$Q_{1.2}$: ¿Cuál es el valor de una distancia "d", distancia entre el extremo superior del péndulo y su eje vertical, dado un tiempo "t" cualquiera?			$R_{1.2.5.}$: La distancia "d"entre el extremo superior del péndulo y su eje vertical, dado un

	$Q_{1.2.1.}$: ¿Cómo varían las distancias conforme se incrementa el tiempo?		$R_{1.2.1.}$: Noción general de función	tiempo "t" cualquiera puede ser representado mediante: $d=A\cos(\omega t+\theta_0)$
	$Q_{1.2.2.}$: ¿Qué características tiene la gráfica obtenida?		$R_{1.2.2.}$: Noción de periodicidad	
	$Q_{1.2.3.}$: La expresión $x=A\cos(\omega t+\theta_0)$ para un tiempo $t = 0$ equivale a: $x=A\cos(\theta_0)$ Si la distancia inicial fuera A ¿Cuál debe ser el valor de θ_0?		$R_{1.2.3.}$: $\theta_0 = 0$	
	$Q_{1.2.4.}$: La expresión $x=A\cos(\omega t+\theta_0)$ para un tiempo $t = 0$ equivale a: $x=A\cos(\theta_0)$ Si la distancia inicial fuera 0 ¿Cuál debe ser el valor de θ_0?		$R_{1.2.4.}$: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$; $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$	
	$Q_{1.2.5.}$:¿Qué representa gráficamente los parámetros A; ω;T; θ_0 en la gráfica de $d(t)=A\cos(\omega t+\theta_0)$?			
		$Q_{1.2.5.1.}$:¿Qué representa gráficamente el parámetro A en la gráfica de $d(t)=A\cos(\omega t+\theta_0)$?	$R_{1.2.5.1.}$: Distancia del punto de equilibrio al extremo inferior o superior de la gráfica.	
		$Q_{1.2.5.2.}$:¿Qué representa gráficamente el parámetro ω en la gráfica de $d(t)=A\cos(\omega t+\theta_0)$?	$R_{1.2.5.2.}$: Cuando la velocidad angular aumenta, el tiempo es más corto y la gráfica se estrecha; y viceversa.	
		$Q_{1.2.5.3.}$:¿Qué representa gráficamente el parámetro T en la gráfica de $d(t)=A\cos(\omega t+\theta_0)$?	$R_{1.2.5.3.}$: T representa la longitud de onda.	
		$Q_{1.2.5.4.}$:¿Qué representa gráficamente el parámetro θ_0 en la gráfica de $d(t)=A\cos(\omega t+\theta_0)$?	$R_{1.2.5.4.}$ θ_0 indica una traslación horizontal de la gráfica	

			contraria al signo del valor de θ_0	
	¿Se podría escribir d(t) en términos de seno? ¿Cómo sería esta equivalencia?		$R_{1.2.6.}$: sen(x)= Cos(x-$\frac{\pi}{2}$)	

Nota. Elaboración propia

4.4 Análisis del desarrollo del REI

Tal como señala García (2005), para realizar el análisis del REI que ha sido efectuado, se debe tomar en cuenta las funciones didácticas planteadas por Chevallard (2009):

> *Cronogénesis:* evaluar su capacidad para reproducir el tiempo didáctico, que permita la emergencia, según la programación establecida, de las diferentes organizaciones matemáticas que se desea reconstruir
> *Mesogénesis:* evaluar la posibilidad y el coste de fabricar el medio necesario (recursos didácticos, teóricos, experimentales, humanos, etc.) para la creación en clase del conjunto de organizaciones matemáticas pretendidas
> *Topogénesis:* evaluar el lugar que se ofrece al profesor y al alumno en el proceso de reconstrucción de las diferentes organizaciones matemáticas. García (2005, p.485).

A continuación, se procede a realizar el análisis del desarrollo del REI tomando en cuenta las etapas desarrolladas, las funciones didácticas, las dialécticas desarrolladas en el marco de la aplicación de dispositivo didáctico perteneciente al nuevo paradigma de la pedagogía de la investigación, dentro del paradigma vigente de la monumentalización del saber o la visita de obras.

Primera etapa: Exploración de la Problemática

En esta etapa, los estudiantes inician el proceso de estudio y entran en contacto con el contexto, en el cual se desenvuelve la situación problemática. Abordan la cuestión generatriz y los conceptos en el entorno físico, como el Movimiento Armónico Simple y el Movimiento Circular, con una topogénesis limitada, y caracterizada en primer lugar por las dudas al tomar decisiones ante las cuestiones y posibles respuestas que van encontrando, las consultas son constantes al docente buscando validar los pasos que comienzan a emprender. A su vez, el docente también muestra una topogénesis orientada a la búsqueda de nuevas formas en las cuales pueda orientar las consultas de los estudiantes sin caer en la pedagogía de la monumentalización del saber, evitando brindar obras de carácter absoluto, sino más bien tratando de resaltar los medias que poseen los estudiantes y encaminándolos con las respuestas e información que ellos mismos obtienen.

A pesar de ello, en el trabajo al interior de los equipos se pone de manifiesto la dialéctica del individuo colectivo, como gesto que permite compartir obras entre los estudiantes del equipo y la mejora de posibles respuestas. Esta dialéctica a su vez permitió la participación de los estudiantes en el proceso de investigación y la aparición de líderes por equipo, que se involucraban más en la organización y desarrollo del proceso de estudio al interior de los equipos y también en la dialéctica de la difusión y recepción durante la puesta en común con los demás equipos de trabajo. Una interpretación de este análisis ofrece reconocer el potencial que poseen los estudiantes para emprender procesos de indagación e investigación, pero limitados aún por la dependencia del docente considerado aún como máxima autoridad del saber.

Respecto a la Mesogénesis, los estudiantes contaban principalmente con tres medias: el libro de física, la información proveniente de internet que imprimieron previamente como tarea y el internet en tiempo real por medio de sus equipos celulares. De esta manera, se incorporó al proceso de estudio principalmente los medios dispuestos dentro de las impresiones con información previamente indagada por los estudiantes y del internet de sus celulares. La disposición del proceso de estudio mediante trabajos por equipos también conformó un media capaz de emerger dialécticas del individuo colectivo y difusión recepción, que favorecieron el discernimiento y la integración de medios al proceso de estudio. Se reconoce entonces como principal media el internet pues puede favorecer el proceso de indagación e investigación. Sin embargo, se evidencia también que los consensos a los que abordan los estudiantes por sí solos interna y externamente a sus equipos de trabajo a partir de este media, pueden generar confusión o algunas conclusiones erróneas. Por tanto, se hace necesario que el director del estudio vigile la pertinencia de medios incorporados al proceso de estudio.

Por otro lado, la función Cronogénesis, en el análisis a priori, no pudo ser delimitada por el carácter abierto que posee el REI, aun así la duración de las sesiones para poder explorar la problemática demandó mayor tiempo del habitual dentro de la enseñanza tradicional.

Segunda etapa: La relación entre el MAS y el MCU como una razón de ser para la función seno

En esta segunda etapa, se pone de manifiesto la pertinencia de las cuestiones para poder desarrollar el proceso de modelización, es decir, de reconstrucción de praxeologías de manera creciente a partir de una pregunta generatriz que provoca respuestas y nuevas cuestiones derivadas.

En este caso, la cuestión planteada por el director del proceso de estudio, el docente:

Q1.1.1.1.: ¿Cómo puede ser descrito o interpretado el MAS?

Provoca en los estudiantes que puedan encontrar una relación valiosa para el desarrollo del proceso de investigación, una respuesta que va a otorgar sentido a la función seno, y que se encuentra en el corazón de todo el proceso de estudio: la interpretación del Movimiento Armónico Simple como una proyección del Movimiento Circular Uniforme.

La topogénesis del docente y del estudiante cobra relevancia en esta situación, a pesar de que se mantiene como paradigma el docente como la autoridad del saber. En el trabajo interno de los equipos, los estudiantes logran indagar y obtener medios que al incorporarse pueden aportar a la constitución de una respuesta plausible. Sin embargo, esto no se puede esclarecer por la mayoría de los equipos en el trabajo interno, y es necesario apelar a la puesta en común y el desarrollo de la dialéctica de la difusión recepción.

Se puede interpretar que a pesar de que el paradigma de la monumentalización es dominante. Se puede abordar dentro de ella procesos de investigación que otorgan momentos caracterizados por gestos que reflejan y aproximan la pedagogía de la investigación, condicionado por cuestiones pertinentes, elaboradas con anticipación y dentro de un análisis a priori.

Tercera etapa: Construcción de una regla de correspondencia para el movimiento armónico simple

En esta etapa, destaca la topogénesis del docente para poder plantear cuestiones que movilicen las habilidades de los estudiantes y el desarrollo del proceso de estudio.

A continuación, las cuestiones:

Q1.1.1.1.1.: ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en del MAS en términos de datos provenientes del MCU?

Q1.1.1.1.2.: ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en del MAS en términos de datos provenientes del MAS?

Impulsan de manera retadora la capacidad investigativa de los estudiantes y el desarrollo de dialécticas, pues además de las dialécticas expresadas anteriormente como la del individuo colectivo y la de difusión recepción. Ahora también, se pone de manifiesto la dialéctica del estudio investigación y la del medio media, no vista como la fuente de información a partir de la cual se debe seleccionar ciertos contenidos útiles, sino más bien, a partir del recurso didáctico del docente, que permite a través de cuestiones pertinentes, buscar una serie de equivalencias en la relación entre MAS y MCU para poder arribar a la regla de correspondencia. Sin embargo, se manifiesta también una adecuación drástica en la cronogénesis, lo que evidencia una limitación para la pedagogía de la investigación dentro del paradigma dominante tradicional.

A pesar de este último señalamiento, esta etapa se puede interpretar como una evidencia de la incursión del paradigma de la investigación frente a la monumentalización del saber, haciendo visible que se pueden seguir procesos de estudio con la participación activa de los estudiantes y la gestión del docente como director del proceso.

Cuarta etapa: Simulación y validación de la regla de correspondencia

En esta etapa, se pone de manifiesto una actividad experimental que va a propiciar la emergencia de dialécticas que reflejen la incursión dentro de la pedagogía de la investigación. La topogénesis del estudiante se torna más activo y aunque buscan en menor grado que las decisiones y acciones sean validadas por el docente, los estudiantes logran involucrarse en la experimentación y en el proceso de estudio. El topo del docente se va adecuando de mejor manera como director del estudio, sus intervenciones son menos transcendentes, y la actividad colaborativa se hace funcional para la construcción del péndulo invertido, el registro de datos, la tabulación, la construcción de la gráfica y la obtención de la regla de correspondencia.

Respecto a la mesogénesis, se ha procurado que el docente no figure como media dominante, lo que obligaba a su vez a los estudiantes a dedicar mayor tiempo a la interacción con otros media, afectando, en consecuencia, el cronogénesis y haciendo nuevamente necesario considerar mayor margen de tiempo respecto al trabajo usual para poder desarrollar los recorridos de estudio e investigación.

Quinta etapa: Estudio de la regla de correspondencia

En esta etapa, los estudiantes se habitúan a la obtención de la regla de correspondencia a partir de datos del MAS y su MCU asociado, para luego realizar tareas inversas, es decir, dada una regla de correspondencia describir, sus parámetros en términos de periodo y amplitud del MAS y velocidad angular para el MCU.

Si bien es cierto las cuestiones en esta etapa fueron planteadas por el docente, los estudiantes no manifestaron inconvenientes en el desarrollo de actividades. Por el contrario, mostraron una actitud más independiente del docente para abordar resultados o posibles respuestas, apelando al trabajo al interior y exterior del equipo reflejando las dialécticas del individuo colectivo y las de difusión recepción.

No se podría afirmar una autonomía absoluta de parte de los estudiantes, ni tampoco una falsa autonomía de tipo superficial, pero sí un trabajo propio de los estudiantes que les ha permitido intervenir, dentro del proceso de modelización, resolver cierto tipo de tareas y construir al menos parte de una praxeología local. Esta situación se puede interpretar como un acercamiento al paradigma de la investigación y cuestionamiento del mundo, donde se reconoce como director de estudio al docente, pero también el estudiante puede ser su propio director de estudio respecto a una obra o saber.

Sexta etapa: Transferencia a otras situaciones

Los estudiantes pudieron adecuarse a otros contextos en donde se hace uso de las funciones sinusoidales, y se analizan los parámetros de la regla de correspondencia de la forma: $\boldsymbol{d(t) = Acos(Bt + C)}$ **,** pero tuvieron dificultades para adecuarse a una tarea que exigía hacer uso de $\boldsymbol{d(t) = Acos(Bt + C) + D,}$ la que tuvieron que interpretar con ayuda del docente. Esto reflejaría que aún los estudiantes no han desarrollado una aptitud y actitud procognitiva, la cual les permita enfrentarse sin mayor dificultad a situaciones articuladas con las obras que ya poseen, pues los estudiantes ya tenían dentro de sus obras el saber de las traslaciones gráficas de las funciones y recientemente el trabajo con la función seno, aunque el primer saber asumido de manera superficial, lo que podría explicar este inconveniente.

Séptima etapa: Presentación del proyecto.

Los estudiantes asumieron el proceso de modelización como un proyecto de investigación, relacionado a la problemática de los sismos con un entorno físico, pero con tareas matemáticas. Luego, mostraron sus resultados y evidencias en un portafolio.

CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro trabajo de investigación se realizó con estudiantes del quinto grado de secundaria de educación básica, en donde el modelo educativo plantea el desarrollo de competencias a través de la resolución de problemas el cual, sin embargo, en la práctica manifiesta una serie de limitaciones y se condice más con un modelo de enseñanza tradicional. El docente es considerando como la fuente principal del conocimiento y el encargado de llevar a los estudiantes a visitar saberes de manera superficial, relegando desde este paradigma nuevas formas de construir los saberes matemáticos, en particular mediante los procesos de modelización.

En nuestro trabajo se ha propuesto un nuevo dispositivo didáctico denominado *Modelización de la función seno: un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo*, el cual fue diseñado, implementado, analizado. Sus resultados nos permiten afirmar que el proceso de modelización desarrollado brinda sentido a las organizaciones praxeológicas arribadas por los estudiantes alrededor de la función seno y coseno y los acerca a una nueva forma de estudio *la pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo.*

En primer lugar, se destaca la solidez que ha brindado como marco teórico y metodológico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), pues ha permitido analizar y comprender institucionalmente al seno trigonométrico como objeto de investigación, articulando la matemática y la física como instituciones disciplinarias, y la ingeniería estructural como institución usuaria, mediante la formulación de organizaciones praxeológicas. En ese mismo sentido, la TAD ha permitido concretar el desarrollo metodológico del proyecto mediante el *análisis clínico didáctico,* pues permitió sistematizar las etapas de diseño, aplicación y análisis, además la propuesta metodológica para el diseño de actividades didácticas basadas en modelación matemática, implementada también en este trabajo contribuyó significativamente al momento de formular el diseño didáctico y de manera particular concebir la cuestión generatriz.

Se ha logrado concretar el objetivo general de la investigación. Hemos analizado la implementación de un dispositivo didáctico basado en cuestiones que contribuye a recuperar el sentido y la razón de ser de la función seno y coseno en el quinto grado de secundaria, lo que se evidencia a su vez a través del cumplimiento de los objetivos específicos. Respecto al primer y segundo objetivo, hemos logrado analizar los lineamientos curriculares propuestos en el Currículo Nacional respecto a la función seno y coseno. Podemos señalar que, a partir de la revisión del Currículo Nacional de Educación Básica y el Programa Curricular de Educación Secundaria, se propone modelo constructivista que busca desarrollar competencias centradas en la resolución de problemas. Sin embargo, las orientaciones pedagógicas planteadas tienen limitaciones y los modelos referentes de sesiones de aprendizaje planteados en la JEC reflejan aún una visita superficial de los saberes, y, como consecuencia de ello, aún existe la necesidad de articular y dar mayor sentido los conceptos matemáticos, en este caso particular, para la función seno y coseno.

Además, se identificó los tipos de tareas presentes en los textos oficiales de enseñanza en la educación básica, en los cuales, a pesar de atravesar por un periodo de cambio, se pueden reconocer un variado número de situaciones donde la función seno se adecúa para resolver problemas en distintos contextos. Sin embargo, dichas tareas muestran solo aspectos superficiales de la noción de la función seno, además de mostrarse desarticuladas y aisladas respecto a las demás organizaciones matemáticas.

Por otro lado, se identificó praxeologías u organizaciones matemáticas y físicas, así como, praxeologías dentro de la ingeniería estructural como institución usuaria, alrededor de la función seno y coseno, lo que permitió una comprensión institucional del objeto y posibilitó un diseño didáctico consistente.

Respecto al tercer y cuarto objetivo, logramos diseñar e implementar el REI para estudiar la función seno y coseno, y describir los gestos didácticos obtenidos, indicando también algunas limitaciones del dispositivo propuesto.

El REI propuesto se desarrolla como un proceso de modelización a partir de la cuestión generatriz: ¿cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?, la cual ha evidenciado una gran capacidad para generar nuevas cuestiones y estas a su vez respuestas. Estas últimas constituyen, en conjunto y de manera progresiva, un modelo que finalmente arribó a organizaciones praxeológicas alrededor de la función seno, donde podemos resaltar que el REI involucró un desarrollo bidisciplinar y que la funciones seno y coseno emergen al articular el Movimiento Armónico Simple, el

Movimiento Circular Uniforme, los saberes precedentes en torno al triángulo y a la circunferencia trigonométrica, la noción de función y periodicidad, involucrados dentro del contexto de la ingeniería de estructural como institución usuaria. Todo ello nos permite afirmar que el diseño didáctico del REI otorga sentido y le da una razón de ser a las funciones seno y coseno.

A pesar de que el paradigma de la *visita de obras* o *monumentalización del saber* es dominante, el REI ha permitido a los equipos de estudiantes acercarse a una nueva forma de estudio, el de la *pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo*. No obstante, no se puede afirmar que todos los estudiantes de la clase desarrollaron una autonomía cognoscitiva de su parte, pues la mayoría de las veces la dirección de la investigación fue liderada por algunos equipos o en su defecto por el docente, quien también se vio modificada su topos y no brindó obras resueltas a las cuestiones, sino que actuó como gestor de la actividad. Sí se puede afirmar que los estudiantes llegaron a desarrollar una serie de gestos propios de la pedagogía de la investigación, evidenciadas en una serie de dialécticas descritas desde el marco de la TAD. Es por estas razones que podemos afirmar que la aplicación del REI resulta auspiciosa y conforma un aporte significativo para la investigación en didáctica de la Matemática.

Nuestro estudio sobre el REI, al ser uno de los primeros en nuestro país, deja abierta la posibilidad para que futuros trabajos puedan tomarlo como un referente. Además, dado que este dispositivo tuve que ser finalizado por razones institucionales, puede, sin embargo, seguir desarrollándose, al haber obtenido el modelo del desplazamiento en función del tiempo. El REI puede para abordar otras organizaciones matemáticas, como la función derivada en torno a la velocidad y aceleración. Así mismo, dentro del contexto de la ingeniería estructural, pueden arribarse a otras praxeologías relacionadas que impliquen modelos con operaciones más complejas entre seno y coseno y otros modelos con logaritmos. De forma similar, también se puede replicar el trabajo y profundizar el análisis de las dificultades que presenta el REI como dispositivo de la pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo al ser aplicado dentro del modelo tradicional vigente. Dado que se trata de un objeto matemático correspondiente a las funciones trascendentes, puede analizarse su aplicación también en el nivel universitario, así también, por la fortaleza del diseño didáctico a nivel de la formación profesional docente o dentro de los programas formación continua.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas.* (Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona: España). Recuperado de https://www.tdx.cat/handle/10803/3110 [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Biklen, S. & Bogdan, R. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). *Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación.* Recuperado de http://www.atd-tad.org/documentos/bosch-m-gascon-j-2010-fundamentacion-antropologica-de-las-organizaciones-didacticas-de-los-talleres-de-practicas-matematicas-a-los-recorridos-de-estudio-e-investig/ [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares.* Recuperado de http://www.atd-tad.org/documentos/incompletitud-de-las-organizaciones-matematicas-locales-en-las-instituciones-escolares/ [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthode de la didactique des máthematiques. *Recherches en didactique des máthematiques*, 7(2), 33-115.

Buendía, G. & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En Lestón, P. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, .* (pp.1287-1296.). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación matemática, 28(2)*, 9-29.

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica . *Del saber sabio al saber enseñado.* Aique. Grupo Editor S. A., Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1999a). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2)*, 221-266.

Chevallard, Y. (1999b). *À propos des TICE : transmission et appropriation du savoir, nouveaux rôles de l'enseignant, organisation de l'établissement.* Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/. [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/. [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/ [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. IUFM Toulouse, Francia. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161 [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Chevallard, Y. (2011). *Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD.* [Presentación para las jornadas de trabajo del grupo de investigación Bahujama en homenaje a Josep Gascón]. Barcelona: Universidad de Barcelona.

Chevallard, Y. (2013a). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2(2)*, 161-182.

Chevallard, Y. (2013b). *Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement.* Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-1.pdf [Consulta: 28 de mayo de 2019].

De Morgan, A. (1849). *Trigonometry and double algebra.* Recuperado de https://archive.org/details/trigonometrydoub00demoiala/page/iv. [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Demir, Ö. (2012). *Students' concept development and understanding of sine and cosine functions.* (Tesis de Maestría, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam: Holanda). Recuperado de https://esc.fnwi.uva.nl/thesis/centraal/files/f107257570.pdf [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Díaz, M., Salgado, G. & Díaz, V. (2010). La transición: grados→ radianes→reales. Un obstáculo didáctico. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74.*, 37-97.

Díaz, M., Salgado, G., & Díaz, V. (2010). La transición: grados→ radianes→ reales. Un obstáculo didáctico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74*, 29-37.

Dominguez, M. (2014). Períodos de vibración de las edificaciones. . *Revista Arquitectura e Ingeniería, 8(2)*, 1-8.

Farfán, R. & García, M. (2005). El concepto de función. Un breve recorrido Epistemológico . *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol 18*, (pp. 489-493). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5974/ [Consulta: 28 de mayo de 2019].

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* (Tesis doctoral, Universidad de Jaén, Jaén: Perú). Recuperado de http://www.atd-tad.org/documentos/la-modelizacion-como-herramienta-de-articulacion-de-lamatematica-escolar-de-la-proporcionalidad-las-relaciones-funcionales/ [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Garzón, G. (2012). *Elementos básicos de la trigonometría desde el paso de la razón trigonométrica a la función trigonométrica.* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá: Colombia). Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/11057715.pdf [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. (Tesis de maestría, Pontificia universidad Católica del Perú, Lima, Perú).

Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros.* (Tesis doctoral, Instituro Politécnico Nacional, México, D. F.: México). Recuperado de https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/26322. [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Katz, V. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica, 14(4)*, 311-324. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086087900644?via%3Dihub [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Kendal & Stacey. (1996). Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods. En: P. Clarkson (Ed.). *In Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics education Research group of Australasia*, (pp. 322-329).

Lim, K., Buendía, G., Kim, O. & Cordero, F. (2010). *The role of prediction in the teaching and learning of mathematics*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/45164949_The_role_of_prediction_in_the_teaching_and_learning_of_mathematics [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Macías, M. y Romo, A. (2014). Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en la modelación matemática. . *En Lestón, Patricia (Ed.), Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa, (pp. 461,469). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Medina, H. (2009). *Física 2.* Recuperado de http://biblioteca.pucp.edu.pe/fisica-1-y-fisica-2-de-hugo-medina-en-version-digital/ [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Meneses, H. (2010). *La transición grados-radianes-reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistémico.* (Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.: México). Recuperado de http://tesis.ipn.mx/handle/123456789/9477. [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.* Recuperado de https://www.cecytejalisco.mx/documentos/academicos/vol2gmontiel.pdf. [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Morgan, A. (2013). *Trigonometry and double Algebra.* Recuperado de https://books.google.com.pe/books?id=Dlab2yFf_hMC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Nguyen Thi, N. (2011). *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Vietnam: une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation.* (Tesis doctoral, Université de Grenoble, Grenoble: Francia).

Otero, M., Llanos, V. (2011). La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones. . *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)*, (pp. 15-23). Núcleo de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología. Tandil, Argentina.

Parra, V. & Otero, M. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didácticos matemáticos de las "dialécticas". *Educación matemática, 29(3)*, 9-49.

Parra, V. (2013). *Diseño, implementación y evaluación de un REI para el último año del nivel secundario: funcionamieento de las dialécticas.* (Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires, Buenos Aires: Argentina). Recuperado de http://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/897/Tesis%20Parra%2C%20Ver%C3%B3nica%20Ester.pdf?sequence=1&isAllowed=y [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Perú, Ministerio de Educación. (2016a). *Currículo Nacional de Educación Básica Regular.* Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Perú, Ministerio de Educación. (2016b). *Matemática 5: Textos Escolar.* Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación. (2017a). *El Perú en PISA 2015 : informe nacional de resultados.* Lima. Recuperado de ahttp://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/MINEDU/5896/El%20Per%C3%BA%20en%20PISA%202015%20informe%20nacional%20de%20resultados.pdf?sequence=1&isAllowed=y [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Perú, Ministerio de Educación. (2017b). *Resolvamos Problemas, Cuaderno de Trabajo de Matemática.* Lima: Minedu.

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación matemática, 26(1)*, 314-338.

Runza, G. (2013). *Las Razones Trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas.* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá: Colombia) Recuperado de http://bdigital.unal.edu.co/18810/1/1186829.2014.pdf

Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. . (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16.*, 141-155.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisi ecológicoy propuesta didáctica.* (Tesis doctoral, Universitat Ramon Llull , Barcelona: España). Recuperado de https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/101204/Tesis_LidiaSerrano_2013.pdf?sequence=1[Consulta: 28 de mayo de 2019].

Shílov, G. E. (2004). ¿ Qué es una función?. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria, (25)*, 137-147.

Siero y Romo-Vázquez. (2017). . Didactic sequences teaching mathematics for engineers with focus on differential equations. In M. S. Ramírez & M. A. Domínguez (Eds.). *Driving STEM learning with educational technologies*, 129–151.

Silva, C., & Farina, J. . (2016). *7501-16 FÍSICA Oscilaciones Mecánicas.* Recuperado dehttps://rephip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/5674/7501-16%20FISICA%20Oscialaciones%20Mec%C3%A1nicas%20.pdf?sequence=2 [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Spivak, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

Tello, J. (2016). *Surgimiento de la función trigonométrica: Aspectos histórico-epistemológicos.* (Tesis doctoral, Universidad del Valle, Santiago de Cali: Colombia).Recuperado de http://hdl.handle.net/10893/11616 [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Vázquez, I. y Buendía, G. . (2007). Estudio de lo periódico en diferentes contextos: identificación y uso de la unidad de análisis. *En C. Crespo Crespo (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 432-437). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17(3)*, 91-112.

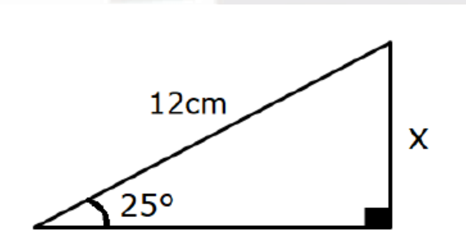
ANEXO 1. HOJA DE TRABAJO

RECUPERACIÓN DE SABERES LIGADOS AL SENO Y COSENO TRIGONOMÉTRICO EN EL CONTEXTO MATEMÁTICO

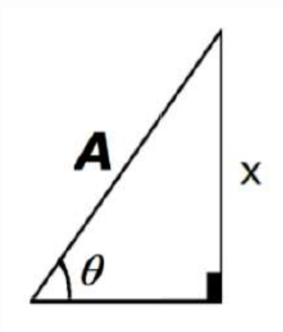
I. Halla el valor aproximado de "x" en cada figura. Puedes hacer uso de la siguiente tabla y/o la calculadora.

sen(25°) = 0.422618	**sen(31°) = 0.515038**
sen(26°) = 0.438371	sen(32°) = 0.529919
sen(27°) = 0.45399	sen(33°) = 0.544639
sen(28°) = 0.469472	sen(34°) = 0.559193
sen(29°) = 0.48481	sen(35°) = 0.573576
sen(30°) = 0.5	sen(36°) = 0.587785

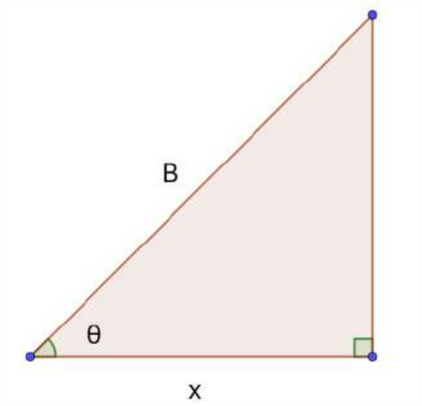
1.1.



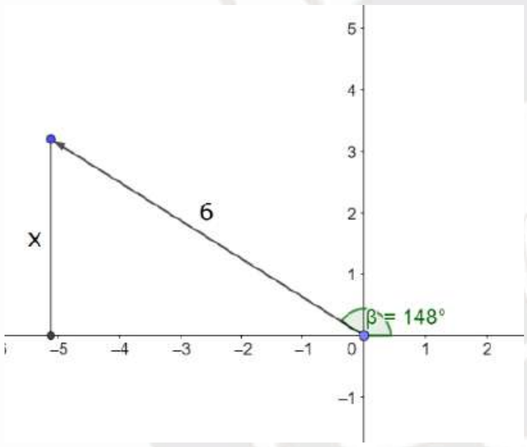
1.1.



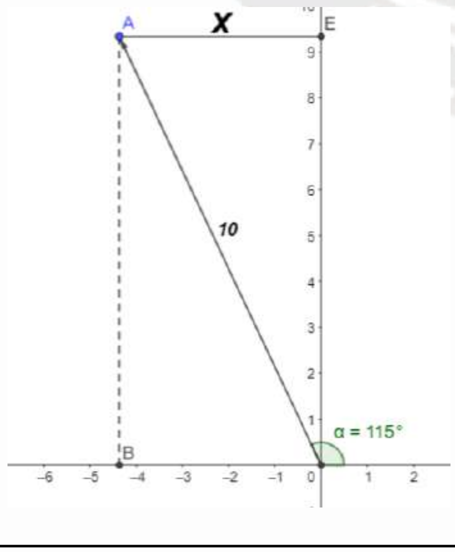
1.2.



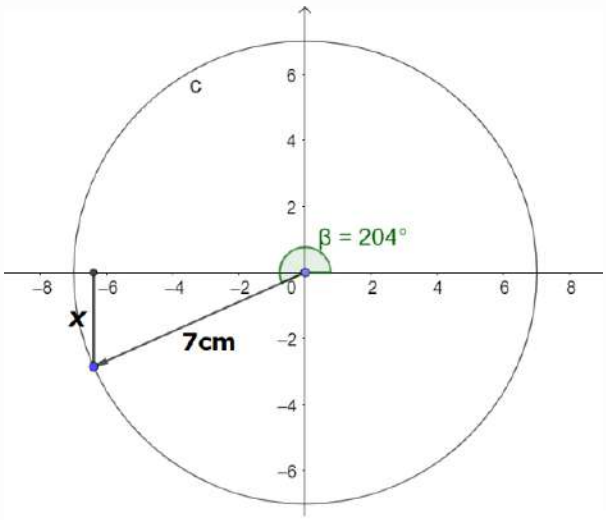
1.3.



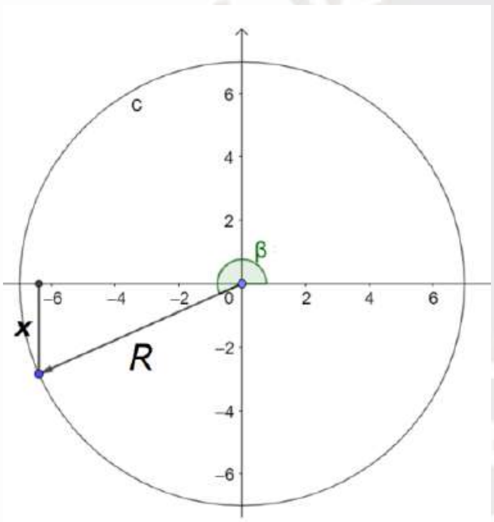
1.4.



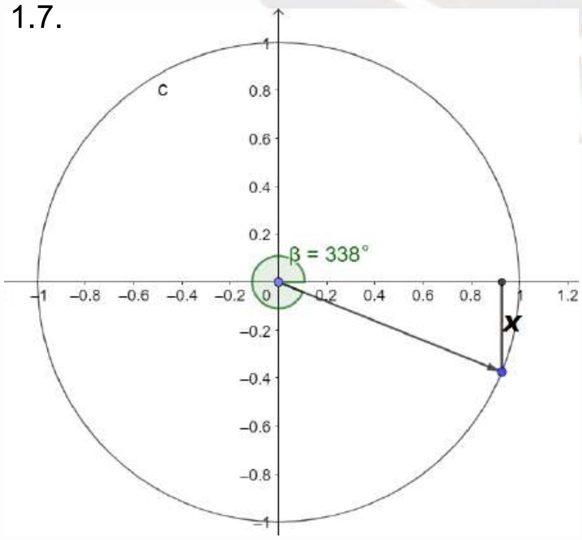
1.5.



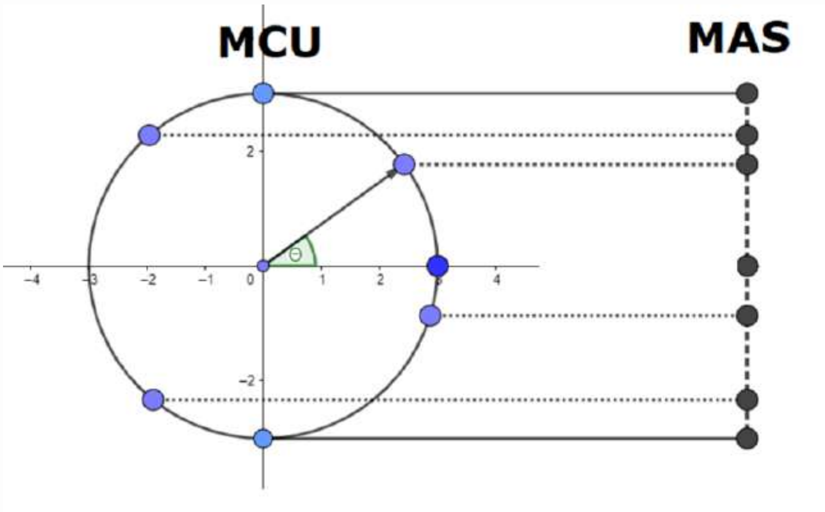
1.6.



1.7.



II. ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS en términos datos provenientes del MCU?



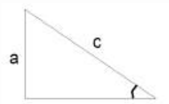
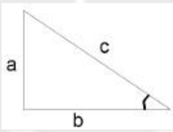
III. ¿Cuál es valor del desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS en términos de datos provenientes del MAS?

ANEXO 2. ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS ALREDEDOR DE LA FUNCIÓN SENO

SENO DEPENDIENTE DE UN ÁNGULO ESTÁTICO EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

$$sen(\theta) = \frac{C.O}{h}$$

Tipos de tareas	Técnicas	Tecnologías	Teorías
T_1: En un triángulo rectángulo dado el valor de la hipotenusa y del cateto opuesto respecto a un ángulo. Hallar el valor del seno de determinado ángulo.	τ_1: Igualar el seno del ángulo dado a la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa: $sen(\theta) = \frac{C.O}{h}$	θ_1: Definición del Seno en un triángulo rectángulo.	Θ_1: Razones trigonométricas en el Triángulo rectángulo
T_2: En un triángulo rectángulo dado el valor de dos lados, el cateto adyacente e hipotenusa. Hallar el valor del seno de determinado ángulo.	τ_2: Primero hallar el cateto opuesto mediante: $(C.O.)^2 + (C.A.)^2 = h^2$ Luego añadir τ_1	θ_2: Teorema de Pitágoras	
T_3: Dada una R.T. diferente del seno. Hallar el valor del seno de determinado ángulo.	τ_3: Identificar la R.T. y asigna valores a los lados correspondientes, luego añade: τ_2 y τ_1	θ_3: Definición de las R.T.	
T_4: Dado el seno de un ángulo dado y la hipotenusa de un triángulo. Hallar el valor del cateto opuesto.	τ_4: Establecer la proporción entre el valor del seno y, el cociente entre en cateto opuesto del triángulo y la hipotenusa $sen(\theta) = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ Despejar la incógnita del cateto opuesto y halla su valor.	θ_4: Semejanza de triángulos	Θ_2: Semejanza de triángulos
T_5: Dado el seno de un ángulo dado y el cateto opuesto de un triángulo. Hallar el valor de la hipotenusa.	τ_5: Establecer la proporción entre el valor del seno del ángulo dado y, el cociente entre en cateto opuesto del triángulo y la hipotenusa.	θ_4: Semejanza de triángulos	

	$sen(\theta) = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ Despejar la incógnita de la hipotenusa y halla su valor.		Θ_3: Teoría de proporciones
T_6: Dado el seno de un ángulo dado, y el cateto adyacente del triángulo. Hallar el valor de la hipotenusa o del cateto opuesto del triángulo.	τ_6: A partir del seno del ángulo dado asignar valores correspondientes al cateto e hipotenusa de un triángulo rectángulo:  , luego utilizando Pitágoras o Triángulos notables determinar el valor correspondiente al cateto adyacente.  Establecer una proporción entre los lados de este triángulo y el triángulo del problema dado. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ Determinar los valores de la hipotenusa o del cateto opuesto del triángulo solicitado.	θ_5: Semejanza de triángulos	
SENO DEPENDIENTE DEL ÁNGULO DINÁMICO EN EL PLANO CARTESIANO $sen(\theta) = \frac{Ordenada}{Distancia\ al\ origen}$			
T_7: Hallar el valor del seno para cualquier ángulo que pasa por el punto (x; y) en el plano cartesiano	τ_7: Construir geométricamente en el plano cartesiano el ángulo en posición normal dado un	θ_6: Teorema de Pitágoras	Θ_4: Relaciones métricas en el

	punto (x; y), luego halla la distancia “r” del origen al punto dado (x,y) mediante : $x^2+y^2=r^2$ Luego evaluar el valor del seno de un ángulo que pasa por el punto (x;y) aplicando la definición: $sen(\theta)=\frac{Ordenada}{Distancia\ al\ origen}$	θ_7: Definición de Seno en un ángulo en posición normal.	triángulo rectángulo. Θ_5: Razones trigonométricas de en un ángulo en posición normal Θ_6: Plano cartesiano
T_8: Evaluar si el valor del seno es positivo o negativo.	τ_8: Ubicar el ángulo en un cuadrante y evaluar si el valor del seno es positivo o negativo correspondiendo al valor positivo o negativo de la ordenada.	θ_7: Definición de Seno en un ángulo en posición normal.	
T_9: Hallar el valor del seno para cualquier ángulo que pasa por el punto (x; y) en el plano cartesiano	τ_9: Reconocer gráficamente que el valor de la ordenada es el mismo que la distancia al origen. Luego evaluar si el valor del seno es positivo o negativo correspondiendo al valor positivo o negativo de la ordenada.	θ_7: Definición de Seno en un ángulo en posición normal.	
T_{10}: Expresar el seno de cualquier ángulo como el seno positivo o negativo de un ángulo en el primer cuadrante.	τ_{10}: Construir gráficamente un triángulo rectángulo cuyo ángulo referente sea adyacente al eje de las abscisas, trazar un segmento perpendicular desde el punto (x; y) al eje de las abscisas y desde esa intersección un segmento al origen. Evaluar el valor del seno como si fuera un ángulo en el primer cuadrante,	θ_7: Definición de Seno en un ángulo en posición normal.	

	determinar además si es positivo o negativo dicho valor según el cuadrante donde se ubique el punto (x; y).		
SENO DEPENDIENTE DEL ARCO EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA $sen(\theta) = y$ Donde "y" es la ordenada del punto de intersección del lado terminal con la circunferencia trigonométrica.			
T_{11}: Dado un arco en la C.T. expresado en radianes, hallar el valor del seno para dicho arco.	τ_{11}: Aplicar la definición: $sen(\theta) = y$	θ_8: Definición de seno en la circunferencia Trigonométrica.	Θ_7: Funciones trigonométricas
T_{12}: Representar gráficamente la línea seno para cualquier arco.	τ_{12}: En la circunferencia trigonométrica trazar desde el punto de intersección de la circunferencia unitaria con el lado terminal del ángulo en radianes, un segmento vertical al diámetro horizontal.		
T_{13}: Comparar si es >; < o =, los senos de dos arcos de distinta longitud.	τ_{13}: Dibujar en la circunferencia trigonométrica las líneas seno y las compara según su longitud y considerar además si son positivos o negativos.	θ_9: Definición de seno en la circunferencia Trigonométrica. θ_{10}: Definición de función creciente o decreciente	
T_{14}: Determinar el crecimiento o decrecimiento del seno en cualquier cuadrante	τ_{14}: Gráficamente determinar si es creciente o decreciente el seno en un cuadrante y comparar los valores de la línea seno según va aumentando el arco.		
T_{15}: Dado $f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$, obtener una función equivalente variando solo el	τ_{15}: Evaluar ángulos de la forma $(x \pm 2\pi)$.	θ_{11}: Ángulo en posición normal.	

argumento para arcos coterminales.			
SENO DEPENDIENTE DE CUALQUIER NÚMERO REAL $\boldsymbol{f(x) = \pm A\ sen\ (Bx + C) + D}$			
T_{16}: Hallar los valores numéricos de f(x) para funciones de la forma: $f(x) = Asen(Bx + C) + D$ o $f(x) = Acos(Bx + C) + D$ para un $A; B; C\ y\ D\ \in \mathbb{R}$.	τ_{16}: Reemplazar el valor del módulo dado y operar.	θ_{12}: Definición de función seno y función coseno.	Θ_7: Funciones trigonométricas
T_{17}: Describir la variación de la función sinusoidal según la gráfica, conforme se le incrementa los valores en el eje x.	τ_{17}: Comparar gráficamente los valores de la función seno, conforme se incrementa los valores de x.	θ_{13}: Definición de función seno	
T_{18}: Dada la gráfica de una función determinar la regla de correspondencia de la forma: $f(x) = Asen(Bx + C) + D$ o $f(x) = Acos(Bx + C) + D$ para un $A;\ B;\ C\ y\ D\ \in \mathbb{R}$.	τ_{18}: Identificar gráficamente el valor de los parámetros y asignarlos a la regla de correspondencia.	θ_{14}: Caracterización gráfica de los parámetros $A; B; C\ y\ D$ para : $f(x) = Asen(Bx + C) + D$ o $f(x) = Acos(Bx + C) + D$	
T_{19}: Dada la gráfica de la función $f(x) = \pm Acos(Bx + C)\ + D$ determinar el valor del dominio, rango, periodo y amplitud.	τ_{19}: Identificar gráficamente el valor de los parámetros en relación al dominio, rango, periodo y amplitud.		
T_{20}: Dada la gráfica de $f(x) = senx$ o $g(x) = cosx$, determinar si se trata de una función par o impar.	τ_{20}: Evaluar gráficamente si la función tiene simetría respecto al eje vertical (función par) o si tiene simetría respecto al origen del plano cartesiano (función impar).	θ_{14}: Gráfica de funciones pares e impares	Θ_8: Funciones de variable real
T_{21}: Dada la gráfica de $f(x) = Asen(Bx + C) + D$ o $f(x) = Acos(Bx + C) + D$ para un $A;\ B;\ C\ y\ D\ \in$	τ_{21}: Evaluar gráficamente la amplitud de la función y determinar su valor máximo y mínimo.	θ_{15}: Gráfica de : $f(x) = Asen(Bx + C) + D$	Θ_7: Funciones trigonométricas

$\mathbb{R}$, calcular el máximo y mínimo valor de la función.		$f(x) = Acos(Bx + C) + D$	
T_{22}: Describir el comportamiento de la gráfica de la función $f(x) = \pm A\ sen\ (Bx + C)\ + D$ conformen se le asignan valores significativos a: A, B, C y D en términos de amplitud, frecuencia y periodo.	τ_{15}: Comparar la gráfica de la función f(x)= Senx Con la gráfica de la función: $f(x) = \pm A\ sen\ (Bx + C)\ + D$ dando distintos valores a los parámetros y observar el comportamiento de la función, para luego describir los parámetros en términos de amplitud, frecuencia y periodo.	θ_{11}: Propiedades de la función Seno	
T_{23}: Graficar la representación de la función $f(x) = \pm A\ sen\ (Bx + C)\ + D$ conformen se le asignan valores a los parámetros o características a la amplitud, frecuencia y periodo.	τ_{16}: Identificar los parámetros A, B, C y D en términos la amplitud, frecuencia y periodo y traslación. Y conforme indiquen estos parámetros realizar la gráfica.		

ANEXO 3. FICHA DE PROBLEMAS EN EL CONTEXTO EXTRAMATEMÁTICO

1. El Ministerio de Salud ha iniciado una campaña de chequeo médico. Uno de los exámenes de este chequeo consiste en medir la presión sanguínea. Se sabe que la presión sanguínea medida en mm de Hg) de cierta persona se modela matemáticamente mediante la función

   $f(x) = 30\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right) + 110,$

   donde x es el tiempo en segundos. Determina los valores máximos y mínimos de $f(x)$ y el número de latidos por minuto de dicha persona.

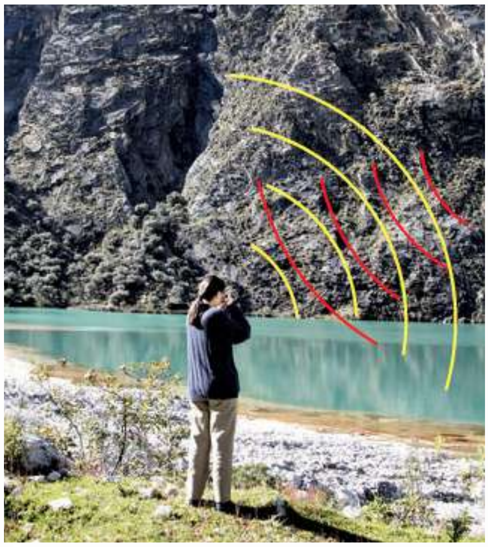
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016b, p. 238)

2. Una noria es una rueda que gira verticalmente sobre un eje central horizontal, permitiendo que las cabinas ocupadas por personas suban y bajen alrededor de ella.

Supón que la rueda llega hasta una altura de 32 m y que su circunferencia, cuya medida es de 94,20 m, demora 3 minutos en dar una vuelta completa. Si la rueda gira en sentido antihorario, determina la función trigonométrica del movimiento que permite hallar la altura que alcanza la cabina que está en la parte baja en función del tiempo que transcurre.

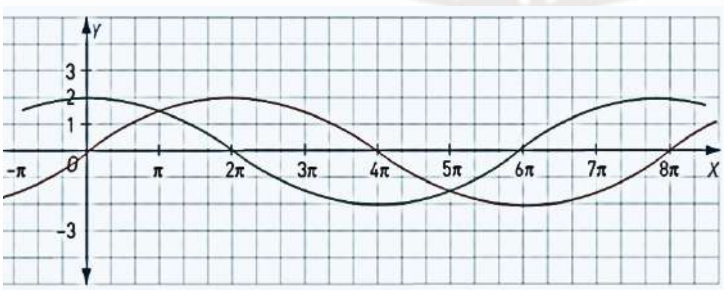
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016b, p. 240)

3. María visita la laguna Chinancocha, en la región Áncash.n un determinado momento, ella lanza un grito en dirección a las rocas y casi al instante siente una vibración del sonido. Esta situación nos recuerda que las ondas sonoras no se pueden ver, pero cuando escuchamos un sonido, significa que este se ha transmitido desde la fuente que lo produce hasta nuestros oídos mediante la vibración de las moléculas del aire a través de ondas. Es raro escuchar el eco de un sonido, pero nos encanta provocarlo cuando nos encontramos en un lugar donde se produce. La función $y = 4 \text{ sen } x + 1$ representa las ondas que determinan el sonido antes de llegar a una montaña, y la función $y = 1/2 \cos (x - 2)$, el sonido después de reflejarse en dicha montaña (eco). ¿Cómo sería la gráfica de cada función en un mismo sistema de coordenadas?



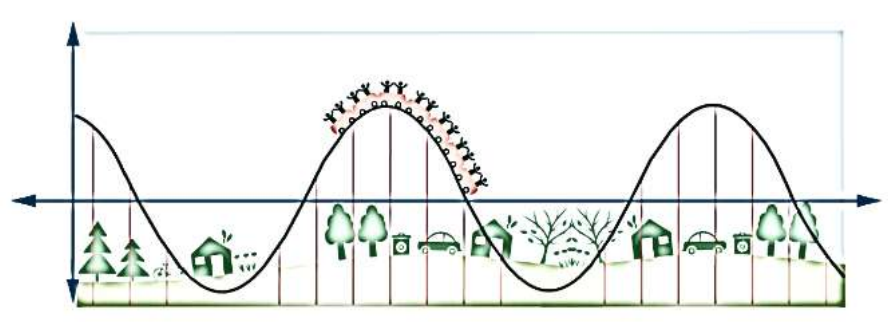
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016b, p. 242)

4. Describe a que función corresponden las gráficas representadas. Considera que las funciones tienen la forma $f(x) = a$ (R.T.) (bx), acotadas por el intervalo $[-a; a]$, en donde su amplitud es a y su periodo es $2\pi/b$.



Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017b, p. 147)

5. La siguiente montaña rusa fue diseñada por un matemático. La diseñó con su función trigonométrica preferida, con una altura, respecto del eje horizontal, de 30 m.



   a. ¿Cuál es la función que mejor representa a la montaña rusa? ¿Por qué?

   b. ¿Cuál es la longitud de la columna vertical más larga que sostiene a la montaña rusa?6.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2017b, p. 151)

6. La cooperativa pesquera del muelle de Chorrillos, con el apoyo del Servicio Meteorológico, determina que la marea sobre su nivel medio está representada por la expresión $f(t) = 1{,}2 \cos 0{,}45\, t$, donde $f(t)$ es la altura en metros y t es el tiempo en horas. Para fines de hacerse a la mar, los pescadores están interesados en averiguar el comportamiento de la marea a determinadas horas.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016b, p. 242)