PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

"MODELO METODOLÓGICO, EN EL MARCO DE ALGUNAS TEORÍAS CONSTRUCTIVISTAS, PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE FUNCIONES REALES DEL CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA EN LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA"

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

AUTORA

María Angelita Aredo Alvarado

ASESOR

Mg. Teódulo Isaías Verástegui chuquillanqui

JURADO

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Mg. Teódulo Isaías Verástegui Chuquillanqui

Mg. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

LIMA – PERÚ

SETIEMBRE 2012

DEDICATORIAS

Dedico:

A Dios todopoderoso, el que me ha dado fortaleza para terminar con satisfacción este anhelado trabajo.

A mí querida madre Francisca por su cariño y apoyo incondicional en todo momento.

A mí querido padre Manuel (en memoria) por su invalorable ejemplo de perseverancia y optimismo para seguir adelante y alcanzar nuestros objetivos.

A mis queridos hermanos:

Manuel, Antonio, Luz, Margarita y Julia por su cariño y constante apoyo moral en cada momento.

A mis sobrinos:

Flor de María, Letticia y Manuelito a quienes quiero mucho.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi sincero agradecimiento:

En primer lugar doy gracias a Dios de todo corazón, por haberme dado fuerza, valor e iluminado mi mente y por haber puesto en mi camino a personas que han sido mi soporte y compañía durante la realización de este trabajo de tesis.

Agradezco infinitamente a mi asesor Mg. Teódulo Verástegui Chuquillanqui por haber aceptado orientarme en la realización de este trabajo y por su voluntad, paciencia, apoyo y comprensión que supo brindarme en todo momento hasta que llegue a su término.

Al profesor Mg. Víctor Agapito Zavala quien tuvo la amabilidad de apoyarme en el inicio de este trabajo.

A los profesores que me enseñaron en la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas a quienes los recordaré siempre y estaré eternamente agradecida por sus enseñanzas y cualidades de maestros.

A mi hermana Luz Elena y a su esposo José Alejandro Avalos por brindarme valiosos aportes y muchas sugerencias para la mejora de este trabajo.

A mi madre, hermanas y hermanos por la confianza y paciencia para escucharme en todo el proceso de este trabajo y por el apoyo moral que he recibido en el momento que lo he necesitado y que han contribuido positivamente para llevar a cabo esta difícil jornada.

Agradezco en general a todas y cada una de las personas que han vivido conmigo la realización de esta tesis de maestría y que me han brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

RESUMEN

El presente trabajo trata de contribuir a la mejora del rendimiento en Matemática Básica para estudiantes que inician sus estudios universitarios. En tal sentido el objetivo general es elaborar y aplicar un modelo metodológico en el tema de funciones reales del curso de Matemática Básica, basado en algunas teorías constructivistas para mejorar el rendimiento académico de estudiantes de la Facultad de Ciencias en la Universidad Nacional de Piura.

El problema del bajo rendimiento académico se evidencia mediante un diagnóstico, del cual se obtienen dos causas relevantes: Formación insuficiente en temas de matemática del nivel de educación secundaria e inadecuadas metodologías en la presentación, desarrollo y evaluación de los contenidos en el curso de Matemática Básica. En este contexto, el objetivo se logra al elaborar y desarrollar contenidos con estrategias metodológicas participativas de los estudiantes, aplicando instrumentos adecuados de evaluación, dando énfasis a la evaluación formativa aplicada en el desarrollo de un tema específico previamente diseñado y elaborado, que permita obtener aprendizajes significativos partiendo de temas elementales de la educación secundaria con orientación hacia los fines formativo e instrumental de la matemática en el nivel universitario.

Para asegurar la confiabilidad de los resultados, el desarrollo se sustenta en el siguiente marco teórico: Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau, Didáctica de los Maestros para las Matemáticas de Juan Godino y otras teorías de aprendizaje y evaluación. Asimismo, como parte de la factibilidad, se aplica el modelo metodológico de desarrollo de contenidos en el tema de función real mediante un plan de clases en una unidad de aprendizaje, considerando contenidos, objetivos específicos, criterios e indicadores de evaluación acompañado de estrategias metodológicas e instrumentos adecuados para obtener una información real del aprendizaje aplicado a un grupo de 40 alumnos.

Finalmente, el trabajo se completa con el análisis de los resultados que proporcionan los instrumentos de evaluación aplicados en el desarrollo de los contenidos de funciones reales con participación activa y colaborativa de los estudiantes, lo que nos permite confirmar el logro de los objetivos específicos y, en consecuencia, del objetivo general planteado en la presente investigación. Se concluye que las estrategias metodológicas participativas constituyen el eje dinamizador del rendimiento académico de los estudiantes, porque desarrollan en ellos niveles de comunicación y participación en un contexto concreto.

I N D I C E

CAPITULO III. FUNCIONES REALES

CAPITULO IV. METODOLOGIA Y ANALISIS DE RESULTADOS

INTRODUCCIÓN

La presente investigación está motivada por el problema del bajo rendimiento en matemática en los niveles de educación básica; el cual es bastante conocido pero que no ha sido examinado ni profundizado en la búsqueda de solución desde la perspectiva participativa de los actores. Dicho problema también se percibe en el nivel universitario con estudiantes del primer ciclo en el curso de Matemática Básica de la Universidad Nacional de Piura.

Considerando tal situación, en la institución indicada se ha tratado de encontrar sus posibles causas. Las que podrían ser la formación previa de los alumnos, la formación académica y metodológica de los docentes, los contenidos de los cursos, las formas de evaluación, etc. que inciden en el aprendizaje de los estudiantes.

Para determinar cuáles son las verdaderas causas que originan el bajo rendimiento académico de los estudiantes de la institución antes mencionada se realizaron encuestas y entrevistas a estudiantes y docentes, mediante las que se obtuvieron información respecto a contenidos del curso, a la metodología que los docentes emplean en el proceso enseñanza-aprendizaje y a las formas y procesos de evaluación que aplican para determinar los avances en el desarrollo del curso de Matemática Básica del primer ciclo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura. Así, los alumnos tienen dificultades en la comprensión y aplicación de conceptos y propiedades básicas de matemática para ser usados o aplicados adecuadamente, dentro de los principios que la lógica establece (razonamiento lógico-matemático), a situaciones reales que se presentan. Para solucionar esta dificultad se diseñó, elaboró y desarrolló una secuencia didáctica de contenidos en el tema de funciones reales basada en una metodología constructivista la que permitió evaluar avances y logros de los aprendizajes a partir de temas elementales de la educación básica con una orientación formativa de la matemática a nivel universitario. Para ello se ejecutaron actividades programadas las que se iniciaron con un diagnóstico situacional del rendimiento académico de los estudiantes que se realizó mediante un informe personal y una evaluación de entrada que permitieron saber en qué condiciones están los estudiantes para iniciar el desarrollo de los contenidos, para superar las dificultades en la comprensión de propiedades y conceptos matemáticos. Asimismo, se desarrollaron motivaciones mediante ejemplos basados en casos concretos.

El presente informe ha sido estructurado en cuatro capítulos. El primer capítulo, referido al planteamiento del problema, el cual surge a partir de un diagnóstico situacional real del rendimiento académico de los estudiantes de la especialidad de Electrónica y Telecomunicaciones del primer ciclo de la Facultad de Ciencias entre los años 2006 al 2010 del curso Cálculo I, con contenidos de Matemática Básica de un curso inicial del primer ciclo en distintas universidades de nuestro medio. Se complementa con entrevistas y encuestas a docentes y a estudiantes de la Facultad de Ciencias y de otras universidades nacionales; detectándose situaciones similares del bajo rendimiento académico de los estudiantes, lo que constituye un problema que merece ser enfrentado buscando y analizando sus causas para presentar una alternativa de mejora.

En el segundo capítulo se consideran algunos trabajos referidos a las estrategias metodológicas para desarrollar ciertos temas, a la evaluación formativa, al rendimiento académico, a la formación matemática, a un análisis de las construcciones mentales desde la perspectiva de la teoría APOE para el nivel universitario, etc. Además se resume algunas teorías constructivistas sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación con diferentes enfoques conceptuales y en contextos filosóficos y psicopedagógicos con metodologías y estrategias que permitan evaluar aprendizajes en educación superior, para conocer los logros y las deficiencias de los alumnos mediante adecuados instrumentos y técnicas evaluativas y obtener evidencias que permitan juzgar, retroalimentar y calificar sus aprendizajes con objetividad en el proceso de enseñanza. Con esto, a los estudiantes, más que aprobar o no un curso, permitirá medir su nivel de aprendizaje, potenciar sus fortalezas y establecer medidas correctivas para superar sus dificultades en sus aprendizajes.

Se resalta que el éxito del proceso de enseñanza está dado por los manejos adecuados de los elementos que la integran: Objetivos, contenidos, métodos, medios y formas de evaluación. Evaluar supone tomar en cuenta el punto de partida, el proceso y el punto de llegada para verificar si los estudiantes alcanzaron los objetivos y cómo lo lograron, enfatizando en la evaluación formativa o de procesos.

En el proceso de evaluación hay que destacar la importancia de los principios de la enseñanza relacionados con las actividades programadas para el logro de los aprendizajes. La enseñanza debe partir siempre de actividades reales que logren integrar los procesos y contenidos subyacentes, procurando de parte de los alumnos una búsqueda activa y continua de los significados y utilidades de los aprendizajes involucrados. Debe considerarse el error como una posibilidad de autoevaluación o autovaloración en el aprendizaje y de necesaria reflexión para continuar avanzando, valorando los elementos motivacionales y el compromiso afectivo y personal del alumno y del docente en el aprendizaje.

El tercer capítulo está referido al desarrollo de función real, como parte de una unidad de aprendizaje del curso; fijando objetivos específicos, se elaboró una secuencia didáctica de la unidad, considerando criterios e indicadores de evaluación, aplicando instrumentos adecuados de evaluación y con una metodología de participación activa de los estudiantes para analizar, relacionar y aplicar los conceptos y propiedades a la solución de situaciones o problemas concretos presentados. Esto promueve y mejora la interacción entre profesor y alumnos, fomenta la habilidad de aprender a aprender y alienta el trabajo en equipo y colaborativo. La evaluación se realiza mediante tres pruebas: una prueba de entrada; otra, de proceso o formativa, destacando en esta la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación, y una prueba final de desarrollo denominada “evaluando nuestro aprendizaje” referida al tema. Los instrumentos de las evaluaciones formativas son elaborados y aplicados con estrategias de dinámica de grupos, preguntas orales y prueba de desarrollo.

El cuarto capítulo se refiere al análisis de resultados, empleándose la metodología de la investigación cualitativa y cuantitativa, para un estudio de tipo descriptivo y pre experimental al universo conformado por los estudiantes de Electrónica y Telecomunicaciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura semestre 2011 – I, con una muestra intencional de 40 estudiantes de 17 años en promedio del primer ciclo matriculados en el curso.

Se finaliza presentando diversas conclusiones con algunas recomendaciones y propuestas hacia la mejora del rendimiento académico en el estudio y aprendizaje de la Matemática Básica para estudiantes que ingresan al nivel universitario.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA: DIAGNÓSTICO SITUACIONAL.

Es conocido y difundido el problema del bajo rendimiento en matemáticas de nuestros estudiantes de la educación básica (primaria y secundaria), que a nivel mundial, están en los últimos lugares; situación que preocupa a los docentes de la especialidad. ¿Este fenómeno es solamente en los estudiantes de la educación básica o también sucede en la educación superior y, particularmente, en los estudiantes de la Universidad Nacional de Piura?

En la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura, como se registran en las actas y registros de evaluación del curso inicial de Matemática Básica correspondientes a los alumnos del primer ciclo de los años 2006 al 2010, en promedio, más del 50 % de los estudiantes han desaprobado el curso y las calificaciones de quienes aprobaron están entre 11 y 14. Muy pocos o ninguno en algunas actas logran calificaciones de 15 o 16. Las mencionadas notas evidencian el bajo rendimiento académico de los alumnos en el curso de Matemática Básica durante tales años o tales notas no reflejan resultados en situaciones reales.

La situación anterior ha inducido a indagar y detectar las causas de este bajo rendimiento. Para ello, a través de sendas encuestas y entrevistas a estudiantes de los referidos años académicos, de las especialidades de matemática, física, biología y electrónica, y a docentes que imparten dicha asignatura, se han obtenido informaciones significativas y confiables respecto a los contenidos del curso, a las metodologías que aplican los docentes en el proceso enseñanza-aprendizaje y a las formas y procesos de evaluación de los logros alcanzados en el desarrollo del curso de Matemática Básica.

Se detecta que al iniciar el desarrollo del curso, la mayoría de docentes no aplican una evaluación diagnóstica (prueba de entrada o de requisitos) y los pocos que la aplican lo hacen mediante preguntas orales, que no reflejan ni facilitan al docente conocer el nivel académico de sus estudiantes.

Los docentes, normalmente durante el semestre y con mayor frecuencia, aplican pruebas escritas o prácticas quincenales tipo desarrollo y con ejercicios tipos operativos. Además, en su totalidad manifiestan desconocer la coevaluación y pocos conocen y aplican la autoevaluación durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así mismo, dan prioridad a la evaluación de salida antes que a la de proceso. Generalmente aplican la heteroevaluación.

Los estudiantes, en su mayoría, consideran que los docentes conocen y dominan los contenidos y tienen suficiente experiencia en el dictado del curso, son matemáticos con estudios de maestría y son exigentes con actitudes que van más allá de lo que enseñan y, al detectar errores en el desarrollo de las pruebas de evaluaciones sólo hacen algunas anotaciones que no son suficientes para que el alumno entienda y supere los errores o las deficiencias que muestran en el aprendizaje del curso; es decir, sólo les interesan los resultados y no lo utilizan como instrumentos que orientan hacia una mejora de los aprendizajes.

De entrevistas realizadas a algunos alumnos que llevaron Matemática Básica, referente al conocimiento que tienen del curso, manifiestan que en el primer ciclo de estudios les pareció complicado entender muchos conceptos y propiedades de matemática debido a la insuficiente formación matemática que tienen de la secundaria. Por su parte los docentes, respecto al aprendizaje de los alumnos en temas de matemática, consideran que muchos de ellos carecen de conocimientos básicos de la matemática por lo que es difícil llegar a desarrollar a plenitud los contenidos programados en el curso de la matemática básica y, por razones de tiempo, no aplican formas adecuadas de evaluaciones conducentes a mejorar aprendizajes y rendimientos en el curso.

Finalmente, respecto a los contenidos, de los análisis comparativos de diversos sílabos de la matemática básica que se ofrecen como cursos iniciales en especialidades similares o afines de otras universidades, resumiendo, se tiene: En el área de ciencias e ingeniería los sílabos del curso de matemática básica del primer ciclo de las universidades nacionales de Huancavelica, Huaraz, Cerro de Pasco, Trujillo, Abancay, Tumbes, Ayacucho y la del Callao se observa que los contenidos de los capítulos de relaciones y funciones son similares. Además a través de entrevistas y encuestas a colegas de estas universidades de provincias coinciden en señalar que los alumnos que estudian el curso de matemática básica del primer ciclo presentan serias deficiencias en cuanto a la realización de operaciones básicas del álgebra, operaciones de fracciones, en factorización, confunden las leyes de los signos, no comprenden contenidos cuando leen problemas, no saben diferenciar conceptos y propiedades, etc. Es por tal motivo que se hace un desarrollo muy superficial, con metodologías no apropiadas y con técnicas de evaluación no conducentes a mejorar el aprendizaje. Este mismo problema se observa en la Universidad Nacional de Piura.

1.2. DELIMITACIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA:

De las informaciones obtenidas, el bajo rendimiento de los estudiantes en el curso de Matemática Básica, fundamentalmente, se considera que es consecuencia de dos causas relevantes: Formación insuficiente en temas de matemática del nivel secundario e inadecuada metodología en la presentación y desarrollo de los contenidos en el curso de Matemática Básica.

Por ello, en el contexto anterior, el presente trabajo está orientado a la propuesta de alternativas de solución al problema del desarrollo de contenidos en el tema de funciones reales, previamente diseñado y elaborado, enmarcado en una metodología constructivista, considerando diversas formas de evaluar sus avances y logros en su aprendizaje, a partir de temas elementales que tiene el alumno de la educación básica con orientación hacia los fines formativo e instrumental de la matemática para el nivel universitario; esto es:

***La elaboración y la aplicación de un modelo metodológico del desarrollo de contenidos con estrategias constructivistas, mejorará el rendimiento académico de los alumnos en el curso de Matemática Básica*.**

Precisando ***¿Qué contenidos, cómo desarrollarlos y cómo evaluar sus logros para mejorar los aprendizajes*?**

Por ser el curso de Matemática Básica dictado en diferentes universidades del país con contenidos similares, nos limitaremos al estudio en la Universidad Nacional de Piura con alumnos del primer ciclo de la especialidad de Electrónica y Telecomunicaciones de la Facultad de Ciencias, en el tema de Funciones Reales.

1.3. FUNDAMENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA:

Para la mayoría de los estudiantes es complicado aprender las funciones reales (específicamente) y las matemáticas de manera general. Así mismo la exposición oral, las operaciones repetitivas y soluciones individuales son las principales actividades de enseñanza. Se observa que la mayoría de los estudiantes no aprenden de manera adecuada a enfrentar los problemas de funciones reales, en muchos casos porque estos están alejados del contexto, las evaluaciones se realizan de manera individual y al final de cada sesión.

Estos hechos han generado preocupación en las formas de enseñanza, en la metodología de enseñanza – aprendizaje, esencialmente. Estas formas abarcan un conjunto complejo de procesos como la evaluación.

Al respecto "muchos son los docentes que señalan que el problema de evaluación de educación superior se centra fundamentalmente en la elaboración, aplicación de instrumentos e interpretación de resultados" (Valdivia. 2000. Pág. 13); es decir, por un lado, existen deficiencias en la elaboración de los instrumentos de evaluación y muchas veces no responden a los objetivos planteados o el número de ítems propuestos en cada una de ellas no son suficientes para evaluar los contenidos desarrollados. Incluso el número de evaluaciones que se aplican no reflejan el real nivel de aprendizaje que alcanzan los alumnos. Por otro lado, se puede afirmar que existen ciertas deficiencias en la aplicación de instrumentos de evaluación. Esto se debe muchas veces al desconocimiento que se tiene acerca de dichos instrumentos.

Así se ha considerado trascendente estudiar el rendimiento académico de los estudiantes en el tema de funciones reales, con el propósito de contribuir a la mejora significativa de esta problemática.

Por otra parte, la investigación, contribuirá con nuevo modelo de enseñanza para poder solucionar problemas matemáticos de manera dinámica, cooperativa, participativa y colaborativa.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. OBJETIVO GENERAL:

Elaborar y aplicar un modelo metodológico en el tema de funciones reales del curso de Matemática Básica, basado en algunas teorías constructivistas, para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de la Facultad de Ciencias en la Universidad Nacional de Piura.

1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

a. Efectuar un diagnostico situacional del rendimiento académico de los estudiantes.

b. Elaborar un modelo del desarrollo de contenidos, en el tema de funciones reales incluyendo actividades metodológicas que permitan la participación activa de los estudiantes.

c. Elaborar los instrumentos de evaluación para comprobar los avances y logros en los aprendizajes de los estudiantes.

d. Implementar y desarrollar los contenidos del modelo metodológico elaborado aplicando instrumentos de evaluación adecuados.

e. Analizar los resultados obtenidos al aplicar y procesar los instrumentos de evaluación elaborados.

1.5. HIPOTESIS Y VARIABLES

1.5.1. HIPÓTESIS GENERAL:

La aplicación de un modelo metodológico en el tema de funciones reales, elaborado en el marco de algunas teorías constructivistas y utilizando diversos instrumentos de evaluación para percibir logros, mejorará significativamente el rendimiento académico de los estudiantes del curso de Matemática Básica en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura.

Hipótesis Auxiliar:

Con la implementación de las actividades metodológicas se logrará mejores condiciones para un aprendizaje significativo en el curso de Matemática Básica de la Universidad Nacional de Piura.

La aplicación adecuada y oportuna de los instrumentos de evaluación permitirá conocer los avances y logros de los aprendizajes en el tema de las funciones reales.

1.5.2. VARIABLES:

Variable Independiente: Modelo metodológico elaborado en el tema de funciones reales.

Variable Dependiente: Rendimiento académico de los estudiantes de Matemática Básica.

1.6. IMPORTANCIA Y LIMITACIONES:

La labor educativa que realiza el profesor en cualquier nivel del ámbito educativo, se diferencia de cualquier otra actividad por el significado y la importancia que reviste en la formación de los educandos; pues el profesor no solamente se dedica a planificar, implementar, evaluar e interpretar resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje. También debe verificar que los logros alcanzados respondan a lo esperado en un Plan elaborado y para ello debe realizar el proceso de evaluación que reflejen estos logros.

La aplicación de la evaluación en educación superior no sólo debe ser ejecutada al finalizar cada unidad de enseñanza aprendizaje, sino que también debe efectuarse durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que ello permitirá reorientar la enseñanza para obtener mejores logros. Para esto se debe aplicar la evaluación formativa, que poco o nada se aplica en nuestra realidad y, a pesar de la importancia que adquiere este tipo de evaluación, son escasos los trabajos y las investigaciones realizadas en nuestro medio sobre evaluación de aprendizajes para el nivel de educación superior; lo que constituye una limitación para mejorar o continuar resultados establecidos o elaborar resultados alternativos.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES:

Son escasos los trabajos realizados en nuestro medio sobre temas de metodologías para desarrollar contenidos de matemáticas hacia el logro de aprendizajes significativos realizando actividades participativas y efectuando evaluaciones continuas e integrales que aseguren dichos aprendizajes para el nivel de la Educación Superior en las áreas de ciencias e ingeniería. Sin embargo, se han encontrado y analizado algunos trabajos que están referidos a la evaluación formativa, el rendimiento académico, la formación matemática, análisis de las construcciones mentales en estudiantes universitarios, etc., como pasamos a describirlos:

2.1.1. "Influencia de la Evaluación Formativa en el Rendimiento Académico de los Estudiantes de la Asignatura de Electrónica I del V ciclo de Ingeniería de Sistemas e Informática de la Universidad Nacional del Santa", tesis por Herrada Villanueva, 1999 de la Escuela de Post-Grado de la Universidad Nacional de Trujillo.

Se plantea el problema "En qué medida el uso de la evaluación formativa en el proceso de enseñanza- aprendizaje, influye en el rendimiento académico de los estudiantes de la asignatura de electrónica I del V ciclo de Ingeniería de Sistemas e informática de la Universidad Nacional del Santa" y cuya solución está enmarcada en la comprobación de la Hipótesis "El uso de la evaluación formativa en el proceso de enseñanza - aprendizaje influye significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes de la asignatura de electrónica I del V ciclo de ingeniería de sistemas e informática de la Universidad Nacional del Santa".

De los resultados obtenidos infiere las siguientes conclusiones:

-) La evaluación formativa, en el proceso de enseñanza aprendizaje, influye significativamente en el incremento del rendimiento académico de los estudiantes.
-) Los estudiantes a quienes se les aplicó este tipo de evaluación demostraron mejorar progresivamente su nivel académico en el curso mencionado.

-) La evaluación formativa implica una interacción permanente entre docente y alumno, favoreciendo el reforzamiento y la realimentación necesaria y oportuna para un buen aprendizaje, constituyéndose en una alternativa que permite obtener mejores resultados de los educandos.

2.1.2. "La Formación Matemática del Estudiante de Biología en la Universidad Ricardo Palma", tesis de maestría elaborada por Próspero Rojas Lazo, 2004 de la Universidad Nacional de Educación "Enrique Guzmán y Valle".

El problema tratado lo formula a través de las siguientes preguntas:

-) ¿En qué medida los cursos de matemática proporcionan conocimientos suficientes para el aprendizaje de los cursos de Estadística, Física, Química, Bioquímica, a los estudiantes de pregrado de la Universidad Ricardo Palma?

-) ¿Cuál es la relación que existe entre la formación matemática ofrecida por la Escuela Académica de Biología de la Universidad Ricardo Palma y las ofrecidas por la Universidad Nacional de San Marcos, Universidad Cayetano Heredia y Universidad Nacional Federico Villarreal?

-) ¿En qué medida el rendimiento en matemática es indicador de éxito académico?

-) ¿Cuál es la tasa de retención de conocimientos de matemática en medianos plazos?

Enmarca su solución en los resultados de la aplicación de la prueba PRMB y culmina con diversas conclusiones, donde algunas establecen que:

-) Según las evaluaciones internas, correspondientes al quinquenio 94-I / 98-II, los niveles de aprobación desaprobación y deserción, estudiados de los archivos de las oficinas de registro de las universidades en estudio, son diferentes.

-) Hay una diferencia significativa entre los rendimientos en matemática durante el quinquenio 93-97 en la Universidad Ricardo Palma.

-) En relación con la evaluación externa del aprendizaje en el mediano plazo, practicada mediante la administración de la prueba PRMB, considerando temas comunes de los sílabos de matemática de las EAPs en estudio, no se ha establecido de manera concluyente que a un mayor número de créditos en el currículo corresponda un mayor rendimiento. Sin embargo, se aprecia una ligera tendencia en el sentido de que la EAP. de Biología de la Universidad Nacional de San Marcos, que es la que otorga el mayor número de créditos, es también la que alcanza el más alto promedio de aciertos.

-) Se ha verificado la hipótesis que conjetura el rendimiento en los cursos de matemática de los alumnos de las Facultades o Escuelas es un buen indicador de éxito académico.

-) Se ha verificado que los contenidos cubiertos en los sílabos de los cursos de matemática de las Facultades o Escuelas Académicas estudiadas son significativamente diferentes, según el resultado de la aplicación del método de dócimas de homogeneidad.

-) Para la evaluación externa, se ha construido como aporte una prueba de rendimiento en matemática, que hemos denominado PRMB, la misma que es válida y confiable.

2.1.3. "Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios", tesis de doctorado elaborada por Karly B. Alvarenga, 2006 del Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, trabajo que busca responder a las siguientes preguntas.

-) ¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para la comprensión de inecuaciones?

-) ¿Cómo construye o entiende el alumno el concepto de inecuación?

-) ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros contenidos matemáticos necesarios para la comprensión de la idea de inecuación?

-) ¿Cómo puede influir en la resolución de problemas relacionados la interpretación de inecuación?

-) ¿Qué resultados surgen del análisis del desempeño de dos grupos de alumnos: uno que tuvo un aprendizaje bajo la enseñanza tradicional y otro que aprendió bajo la propuesta metodológica de enseñanza aquí adoptada?

Para esto, utilizó la noción de esquema, un instrumento de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y culmina con diversas conclusiones:

-) La enseñanza – aprendizaje del concepto de inecuación en los últimos años de la escuela primaria, secundaria, preparatoria y de la licenciatura debe de abarcar actividades que involucren: resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación con las funciones, aplicaciones prácticas, empleo de las propiedades de los reales, análisis de equivalencias e implicaciones, uso de calculadoras gráficas o computadora.

-) La estructura de los números reales como cuerpo ordenado solo se formalizó en el siglo XIX y esto nos posibilitó emplear sus propiedades en las resoluciones de inecuaciones y ecuaciones.

-) Analizar la manera como los estudiantes construyen sus conocimientos es muy enriquecedor para la planeación de clase, pues observándolos y oyéndolos es posible detectar exactamente lo que es necesario exponer con más claridad, por donde se debe de caminar en esa red de conexiones de conocimientos matemáticos de forma que sea posible diagnosticar más rápidamente las fallas de determinadas estructuras mentales.

-) La utilización del método de Grupo Colaborativo encontró resistencia inicial por parte de los estudiantes, pero, poco a poco, se fueron integrando. La resistencia se manifestaba debido al miedo de trabajar con colegas que no eran responsables y por falta de tiempo para los encuentros fuera del salón de clases.

-) Las evaluaciones tienen un carácter no solo tasador sino también formador y las entrevistas en grupo son ricas en discusiones y proporcionan medios de aprendizaje.

-) Es verdad que una evaluación desde una perspectiva constructivista es más difícil de diseñar e instrumentar, pero de acuerdo con las orientaciones educativas de los parámetros curriculares nacionales del Brasil(2002) y con los principios y estándares del NCTM(2000) la educación necesita resignificar y cuestionar sus metodologías de evaluación, y emplear una que no solo establezca calificaciones a los estudiantes, sino que refuerce el aprendizaje de diversas maneras como el uso de entrevistas, pláticas, conversaciones, autoevaluaciones, observaciones y otras.

-) El uso del lenguaje de programación tuvo momentos de encanto y de pavor. La idea de usar computadora para estudiar matemáticas los entusiasmó de manera que su tiempo de permanencia en el laboratorio de informática fue superior a lo previsto.

-) La cantidad de ejercicios propuestos en la metodología puede y debe ser incrementada, principalmente con ejercicios que proporcionen a los alumnos un panorama claro del orden de los números reales y de su establecimiento en la recta numérica, poniendo énfasis en comparaciones que involucren a los números racionales e irracionales.

-) La enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones es en el ámbito universitario debe incluir a los estudiantes a investigar implicaciones y/o equivalencias entre las inecuaciones por medio del empleo de las propiedades de los números reales.

2.1.4.1."Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOS" tesis de maestría elaborada por Cerapio Nicéforo Quintanilla Cóndor, 2009, Escuela de Graduados de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Se plantea las siguientes interrogantes:

-) ¿Qué concepciones poseen los estudiantes de la especialidad de Matemática y Física, de la Universidad Nacional de Huancavelica respecto al concepto de función desde la perspectiva de la Teoría APOS?

-) ¿Existen distintas concepciones respecto al concepto de función desde la perspectiva de la Teoría APOS en estudiantes de la especialidad de matemática y Física de la Universidad Nacional de Huancavelica?

La investigación radica en el diseño de la Descomposición Genética del objeto función, así como el diseño de diferentes situaciones y la elaboración de módulos para el desarrollo del ciclo ACE (actividades con el programa ISETLW, discusión en clase y ejercicios) y su implementación. Culmina con diversas conclusiones donde establece que:

-) La mayoría de los estudiantes participantes en el ciclo ACE poseen una concepción de acción del concepto de función, con cierto grado de transición al nivel superior de proceso, considerando la descomposición genética de función. Ya que la concepción de acción enfatiza puntos específicos como el acto de sustituir un valor a las variables para obtener otro valor relacionando o imitando con una operación similar, además reconocer las diferentes formas de presentación de una función.

-) Resultó difícil para los estudiantes concebir el concepto de función en situaciones nuevas, pero es necesario enfrentarlos a ellos para poder identificar sus verdaderas concepciones sobre el concepto estudiado. La concepción del concepto de función de cada estudiante difiere de acuerdo a cada situación, así como la capacidad de reflexión.

-) El estudio indica que los estudiantes tienen dificultades en comprender el concepto de función; esto se evidencia en las respuestas dadas para las situaciones planteadas. La mayoría de los estudiantes siguieron patrones preestablecidos, donde la abstracción reflexiva no era necesaria.

-) En el tratamiento instruccional desarrollado en el ciclo ACE se empleó el programa ISTLW. Esto ha permitido a los estudiantes alcanzar un progreso en el desarrollo de su proceso de concepción del concepto de función, evidenciándose mejor en las situaciones clásicas algebraicas. Por tanto, el ciclo ACE ha contribuido que la los alumnos que inicialmente se encontraban en el nivel de prefunción pudieran pasar al nivel de acción, con transito al nivel de proceso.

-) Respecto al concepto de función, los dos estudiantes que fueron entrevistados muestran una fuerte presencia de la definición clásica de función de la forma $f(x) = y$, con una representación en el plano cartesiano.

Luego del análisis de resultados, al realizar las conclusiones del trabajo de investigación se generó ciertas incógnitas, los cuales nos han permitido arribar a conclusiones más generales.

-) Las respuestas de un estudiante que brinda respecto a un determinado concepto matemático, podrían responder a diferentes niveles, según la descomposición genética. Por tanto, se tendría dificultad en asignarle un único nivel. Esto se debe a que el modelo de la Teoría APOS no es lineal. Ante nuevas situaciones el estudiante reformula sus concepciones.

-) La interpretación a las respuestas por parte del investigador, para asignarle un determinado nivel de concepción de un concepto matemático a un estudiante, es subjetiva. Esto ocurre porque el marco teórico elegido es de tipo cognitivo; siendo entonces los resultados discutibles.

2.1.5. "La construcció significativa del coneixement matemátic a I'ESO desd' una perspectiva sociocultural", tesis de doctorado elaborada por Marta Domingo, 2009 de la Universidad de Vic (Cataluña, España).

Domingo, en su investigación de tesis doctoral, señala que "a pesar de la ley, los profesores de Matemáticas tienden a hacer clase explicativa, ejemplos y ejercicios, y se paran poco a dejar que los alumnos construyan, colectiva e individualmente, el significado matemático" (Domingo, 2009) Esta opinión muy centrada es de vital importancia en el trabajo, ya que coincide con este pensamiento (parte diagnóstica), y a partir de ello se ha cambiado algunos aspectos reales, dejando que los alumnos construyan métodos, pasos, procesos de solución de funciones reales, aportando elementos con alto nivel significativo en la práctica de las matemáticas de manera individual y grupal. Como bien recalca la autora estos trabajos "aumentan el grado de motivación y la memoria comprensiva del alumnado".

Domingo, analiza la relación entre docentes y estudiantes, así como la forma de abordar los problemas. Con el aporte de este análisis, se construyeron metodologías que permiten estar en constante interacción, realizando trabajos en equipo, buscando soluciones concretas, contextualizando en situaciones reales. La aplicación de este modelo confirma lo que plantea Domingo, pues se ha logrado, en los estudiantes la capacidad de "construir, enriquecer y diversificar sus conocimientos".

Domingo, luego de haber analizado cada uno de los problemas y en cumplimiento de sus objetivos, llega a las siguientes conclusiones:

-) Es necesario que el profesor tenga una buena formación para obtener un alto grado de idoneidad matemática, interaccional, mediacional y emocional.

-) Es necesario que el profesor tenga un buen conocimiento de la realidad y del contexto del centro, así como también de sus alumnos, para favorecer las idoneidades cognitiva y ecológica.

-) Un grado de idoneidad interaccional alto, favorece y ayuda a que la actividad acontezca bajo una perspectiva sociocultural. Hace falta, pero, analizar cómo tiene que ser esta interacción.

-) Un grado de idoneidad emocional alto, favorece y ayuda a que la actividad acontezca bajo una perspectiva sociocultural.

-) Un grado de idoneidad emocional alto, favorece y ayuda a que el aprendizaje sea significativo.

-) El uso de material manipulativo es positivo también a partir de los 12 años.

-) El uso de material manipulativo aumenta el grado de motivación, y de retruque, aumenta el grado de idoneidad emocional, favoreciendo, pues, otra vez, que la actividad acontezca bajo una perspectiva sociocultural.

-) El hecho de trabajar en grupo, aumenta el grado de motivación, y de retruque, aumenta el grado de idoneidad emocional, favoreciendo, pues, otra vez, que la actividad acontezca bajo una perspectiva sociocultural.

Las conclusiones a las cuales arriba Domingo sirvieron mucho en la estructuración del modelo, en ella se tuvieron en cuenta los grados de interacción, la inteligencia emocional, el grado de motivación y esencialmente los trabajos de grupo.

2.1.6. "Diseño de una Secuencia Didáctica, donde se Generaliza el Método de Factorización en la Solución de una Ecuación Cuadrática", tesis de maestría, elaborada por Elmer Cruz Mendoza, 2008, del Instituto Politécnico Nacional de México.

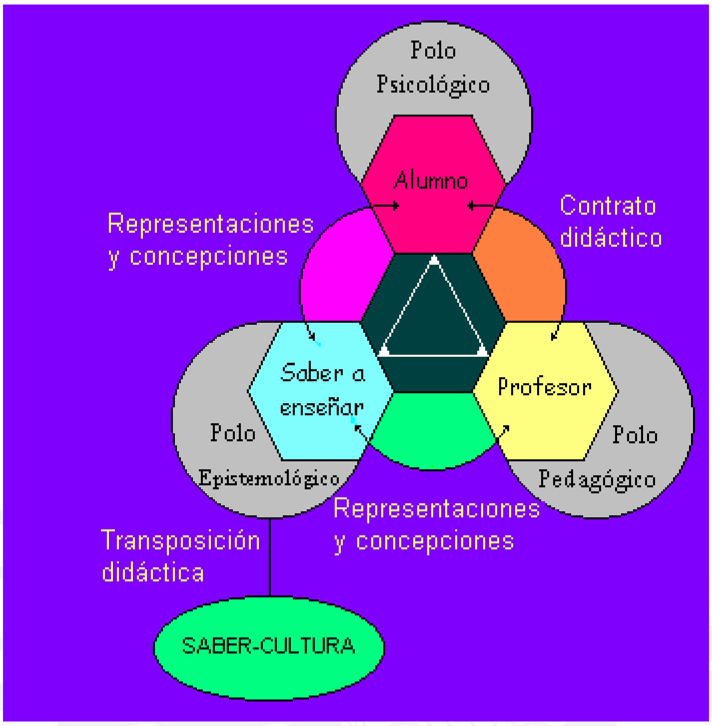
Cruz Mendoza, busca la manera de generalizar el método de factorización en la solución de ecuaciones cuadráticas, con el fin de esclarecer algunas de sus formas, usos e interpretaciones de las ecuaciones, y así, dotar de elementos constructores para el diseño una secuencia didáctica, que permita a los alumnos apropiarse de este conocimiento matemático. En su trabajo describe la ingeniería didáctica y el sistema didáctico, este último es interesante porque orienta, teóricamente, hacia tres componentes que interactúan con las teorías y los resultados obtenidos en la investigación:

Dimensión epistemológica (Polo epistemológico). Asociada a las características del saber matemático puesto en funcionamiento.

Dimensión cognitiva (Polo Psicológico). Asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.

Dimensión didáctica (Polo Pedagógico). Asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Esta clasificación coincide con el objeto de estudio, la tríada: alumno- profesor-saber; y el esquema que presenta es adecuado para este marco teórico y la interpretación teórica que se puede hacer de los resultados.



Fuente: (Cruz Mendoza, 2008)

Este autor describe todo el proceso gráfico del siguiente modo:

Análisis preliminar

En el análisis preliminar, luego de establecer los objetivos específicos de la investigación, se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos.

Para ello, se debe tomar en cuenta:

-) El conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela así como su devenir en saber, esto en la denominada componente epistemológica.

-) Las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego por la secuencia implementada, en la llamada componente cognitiva.

-) La enseñanza tradicional y sus efectos, es decir, cómo vive el contenido matemático al seno de la escuela, dentro de la componente didáctica.

Análisis a priori y diseño de la situación didáctica

En esta fase de la Ingeniería Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. También en esta instancia se establecen las hipótesis de trabajo, es decir qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados, en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador. Es, en consecuencia, una fase prescriptiva como predictiva.

Una vez determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo, es decir, caracterizado el obstáculo que se desea confrontar, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma, la cual debe crear un modo propicio para que el alumno acepte la "invitación" al juego, se sienta desafiado a apropiarse del saber puesto sobre la mesa.

Experimentación

En esta etapa se procede a la "puesta en escena" de la situación diseñada, es decir, se le implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Los medios de perpetuar los sucesos que se desarrollen, para su posterior análisis quedan bajo la responsabilidad y elección del investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

Análisis a posteriori y validación

El análisis a posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma. Esta validación, a diferencia de otros acercamientos tales como los de carácter cuantitativo para los cuales el éxito se mide en tanto el grupo experimental logra mejores resultados que el grupo de control, es decir, entre los resultados externos a la situación planteada en sí misma, en la Ingeniería Didáctica, la validación es interna, pues se confrontan dos fases de la misma, lo esperado y lo que se obtuvo en realidad, entre las conjeturas y expectativas que fueron explicitadas en el análisis a priori y los resultados analizados y categorizados en el análisis a posteriori. De las consideraciones realizadas, y del hecho que la validación de una Ingeniería Didáctica surge de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

2.2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico en este estudio permite: “detectar conceptos claves que no habíamos pensado (situación didáctica, situación a-didáctica, situación de acción, formulación y validación, contextualización y otros), conocer diferentes maneras de pensar y abordar el planteamiento, mejorar el entendimiento de los datos” (HERNANDEZ SAMPIERI, FERNANDEZ COLLADO, & BAPTISTA LUCIO, 2010). Es decir el marco teórico orienta hacia la organización de datos y hechos significativos para descubrir las relaciones de los problemas de funciones reales con las teorías ya existentes.

La redacción del marco teórico se efectúa teniendo en cuenta los resultados del modelo; pero también los datos del diagnóstico o identificación de la problemática, lo que busca el marco teórico es interpretar cada uno de los procesos con las teorías que consideramos más adecuadas porque tienen la flexibilidad de adaptarse al trabajo y que el trabajo se adapte a estas teorías. Para ello utilizamos la teoría de las situaciones didácticas y la didáctica de los maestros para las matemáticas y otras teorías constructivistas.

2.2.1. TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS DE G. BROUSSEAU

2.2.1.1. SITUACIONES DIDÁCTICAS:

Para Brousseau (1988) una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explicita y/o implícitamente entre un alumno y otro o un grupo de alumnos, un medio (formado por instrumentos u objetos) y el profesor que tiene como meta que los alumnos se apropien de un saber. (Fuensanta & Soriano Ayala, 1997), esta contiene varios aspectos:

Contrato Didáctico

Contrato didáctico es lo que espera el alumno del profesor y viceversa (las expectativas que se tienen). Es la relación entre el alumno y el profesor a la hora de enseñar un saber concreto (Fuensanta & Soriano Ayala, 1997),

Situación-Problema

Puede plantearse de dos maneras:

a) **Control:** Donde se solicita la aplicación del propio saber. Esta situación se puede hacer necesaria en un determinado momento para asegurarse que el alumno ha adquirido el aprendizaje que se pide (reforzar).

b) **Aprendizaje**: se debe plantear un problema al alumno y este debe manejar una estrategia de base, ya disponible en el alumno, para poder resolver el problema. Es muy importante que el problema tenga varias estrategias, y que la estrategia inicial no se base en el conocimiento que queremos enseñar.

Situación a-didáctica

Parte de la situación didáctica en que la intención de enseñanza no aparece explícita para el alumno (en el enunciado del problema no aparece explícita la intención del docente).

Debe aparecer ante los alumnos como una interacción con un medio (no didáctico), de modo que sus decisiones se guíen por la lógica de la situación y no por la lectura de las intenciones del profesor. El alumno puede modificar sus decisiones tomando en cuenta la retroacción que le proporciona el medio, y debe realizar un cambio de estrategia para llegar al saber matemático, ya que la estrategia óptima es dicho saber.

Para que se realice el cambio el profesor debe introducir en la situación las variables didácticas.

2.2.1.2. FASES DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Si una situación matemática es específica de un conocimiento concreto, generalmente son reconocibles los estadios, fases o situaciones siguientes:

Situación de Acción

La enseñanza de las matemáticas debe permitir al alumno hacerse cargo de un problema: Emitir hipótesis, elaborar procedimientos, ponerlos en práctica, y según los efectos producidos adaptarlos, rechazarlos o hacerlos evolucionar, automatizar los que son más solicitados y ejercer un control sobre los resultados obtenidos.

Dicho de otro modo, las características de una situación de acción son:

* El alumno actúa sobre el medio, formula, prevé, y explica la situación.
* Organiza las estrategias a fin de construir una representación de la situación que le sirva de modelo y le ayude a tomar decisiones.
* Las retroacciones proporcionadas por el medio funcionan como sanciones de sus acciones.
* Movilización y creación de modelos implícitos.

Situación de Formulación:

Es la etapa de interacción colectiva con el medio y "en la formulación se dan intercambios de informaciones codificadas en el lenguaje sobreentendido, sin debates ni pruebas, sin emitir un juicio y de existir esto indica implícitamente la validez del mismo, se plantean códigos y modelos de control propios a través de dibujos o esquemas" (Santa Soledad Rodríguez Ita UPN). Para esto se realizará una actividad que en un principio tienen forma de acción pero que luego adquiere la forma de formulación, donde los estudiantes tendrán que hallar relaciones entre los datos, para ir manejando un lenguaje que los permita referirse al valor promedio o medio.

Para esta fase los estudiantes ya deberán tener alguna propuesta de solución al problema, por lo tanto se pedirá que por grupos presenten y discutan sobre sus soluciones, es decir, parte del terreno le ha correspondido a cada uno, implícitamente a quienes les corresponde más terreno. En esta discusión deberán llegar a un acuerdo con respecto a la solución del problema, y se les propondrá que por grupos intercambien las soluciones dadas a la situación. Además resolverán una guía propuesta por el docente con el fin de reforzar lo que presentan en el problema. (Molina, 2009).

Situación de validación

En la tercera fase cada equipo elabora y luego propone (por turno), un enunciado útil para llegar a decir 20 o intenta establecer que el enunciado del adversario es falso.

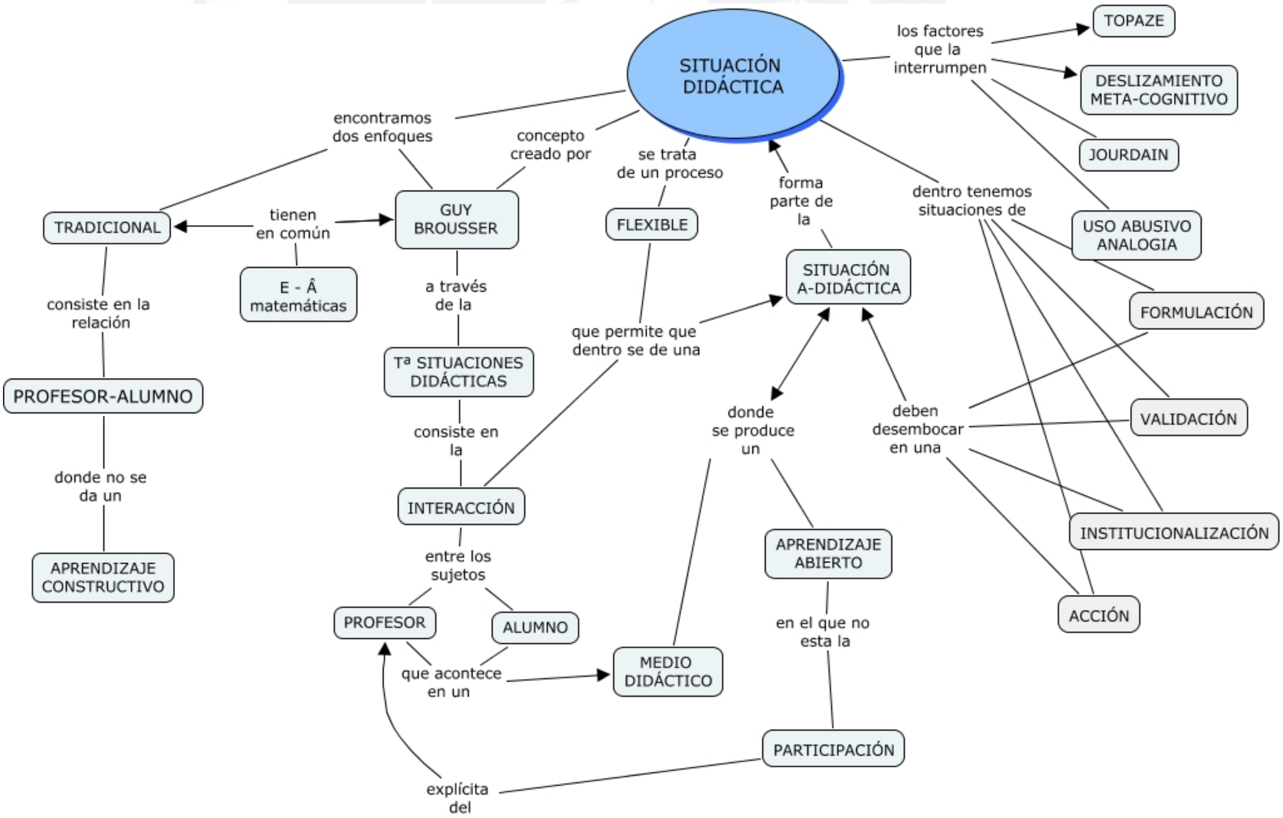
En este nuevo tipo de situación, los alumnos organizan enunciados en demostraciones, construyen teorías en cuanto conjunto de enunciados de referencia y aprenden cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer sin ceder ni a argumentos retóricos ni a la autoridad, la seducción, el amor propio, la intimidación. Las razones que un alumno pueda dar para cambiar de punto de vista, serán elucidadas progresivamente, construidas, puestas a prueba, debatidas y convenidas. El alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración (Brousseau, 2007).

En el presente trabajo se pretende mirar la evaluación como un proceso didáctico, analizando las relaciones que se establecen entre el maestro, el saber y el alumno, en su ambiente natural (aula de clases), en situaciones de validación, es decir, en situaciones que requieren justificar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción (Brousseau, citado por Godino, 1997), como a su vez las normas socio-matemáticas, las cuales son aspectos normativos de las discusiones matemáticas que son específicas de la actividad matemática de los estudiantes y que regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje (Godino, 1997).

Las condiciones requeridas serán:

- El alumno debe hacer declaraciones que se someterán a juicio de su interlocutor.
- El interlocutor debe protestar, rechazar una justificación que él considere falsa, probando sus afirmaciones.
- La discusión no debe desligarse de la situación, para evitar que el discurso se aleje de la lógica y la eficacia de las pruebas.

En el desarrollo de la investigación y del modelo elaborado se ha utilizado muchos elementos de las situaciones didácticas, que al aplicar el modelo del trabajo, encontramos que los estudiantes aprenden de manera dinámica, participativa y sobre todo de acuerdo a la situación real en la que se encuentran, haciendo referencia a la situación como un "conjunto de interacciones entre docentes, estudiantes y situación didáctica" (Brousseau, 2007); y que están representadas en el gráfico siguiente:



Fuente: (wikimusas)

¿Cómo se perciben estas fases en el desarrollo del modelo?

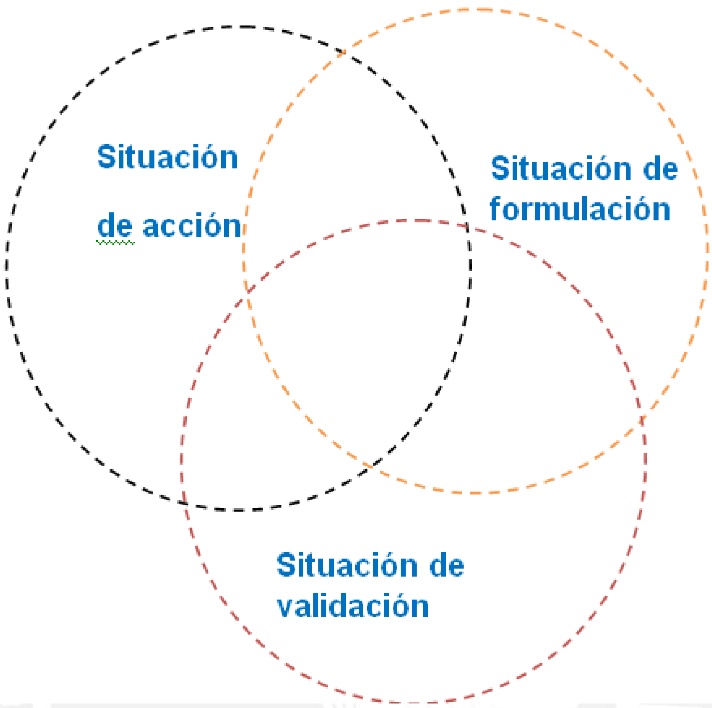
-) En la fase de situación acción, el estudiante trabaja de manera individual en la solución de los problemas de funciones reales, empezando con un informe personal y una evaluación de entrada; se continúa con la presentación de situaciones motivadoras (repaso de requisitos e introducción al tema mediante presentación de casos) para que accionen en grupos hacia la parte formativa y encuentren “la vía para apropiarse del contenido y asimilar el objeto de la cultura, en función de alcanzar un objetivo mediante la solución de problemas de su vida, es por ello que el método a la vez es lúdico, creativo, dinamizador del aprendizaje del estudiante y que dicho proceso sea atractivo, entretenido y placentero para él; debe ser problemático para que el estudiante adquiera las competencias necesarias para vivir de manera autónoma en sociedad; y debe ser efectivo, ya que sin efectos no hay aprendizaje significativo” (Ortiz, 2007); es decir, accionando dentro de una pedagogía lúdica, interactiva y colaborativa, para “proceder a crear sistemas matemáticos” acordes a la realidad, (Maslow, 1991). Aquí, es importante el “trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes, compartir experiencias en la construcción del conocimiento. Por lo que en este proceso es importante el control de la comunicación de las ideas” (Chavarría, 2006, Año 1, Número 2).

-) La fase de formulación se percibe en el modelo, al enfrentar a los grupos con los problemas de funciones reales para llegar al desarrollo y formulación de contenidos con la participación de todos los estudiantes, rescatando así lo que Brousseau denomina “la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso”, con el involucramiento de todos los estudiantes, dando ideas, proponiendo soluciones, compartiendo experiencias, interactuado con el medio didáctico.

En este caso “la naturaleza de la actividad de los alumnos en la clase de matemáticas es una cuestión central en la enseñanza de esta disciplina. El aprendizaje de Matemáticas es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas, es exactamente esto lo que se aprende y lo que va a quedar en los alumnos, fijar las fórmulas en la memoria. Es decir, esa es la imagen que van a adquirir de la matemática” (Flores, 1997), y las actividades grupales de los alumnos hacen que los diferentes problemas de funciones reales sean resueltos inmediatamente.

-) La fase de validación, en el modelo, se ve reflejada con los resultados de la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación. En esta última, “una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal con el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción. Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se discute con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto” (Chavarría, 2006, Año 1, Número 2). También se tiene presente las evaluaciones de intervenciones orales con preguntas contextualizadas y de fácil desarrollo, tendientes a involucrar al estudiante en el desarrollo del contenido.

Esquema de las situaciones



Nota: esquema elaborado por el investigador en base a la información.

Se entiende por autoevaluación "la formulación de juicios de valor que, sobre la base de una información válida, sobre los propios aprendizaje (en los procesos y resultados), le sirve a cada estudiante para tomar decisiones a fin de optimizar sus aprendizajes futuros" (Bonvecchio & Grasso, 2006). Esta actividad tiene que ver con la experiencia individual, aprendizaje, rendimiento y el modo como ellos califican sus aprendizajes, para reflexionar sobre sus habilidades, conocimientos y capacidades en la resolución de los problemas de funciones reales. La autoevaluación permite a los estudiantes y a los responsables de la enseñanza mirar constantemente las debilidades a fin de ir estableciendo pautas de mejoramiento en beneficio de la calidad.

La coevaluación o evaluación en común por su parte, permite la participación de todos los estudiantes en "la toma de conciencia de cómo lograron sus progresos" (Ballester, 2008) de acuerdo a esto los estudiantes mismos podrán emitir juicios de valor, respecto a las observaciones de los demás, preguntándoles, exigiéndoles respuestas y soluciones concretas sobre ciertos problemas planteados en las funciones reales. Cualitativamente aquí hay que resaltar la importancia de las relaciones interpersonales de los estudiantes: Para una buena coevaluación es fundamental adecuadas relaciones interpersonales.

Finalmente la heteroevaluacion, entendida como “valoración del rendimiento escolar por parte del docente” (Bernardo, 2004), valora la situación de acción (individual) y la situación de formulación (colectiva), poniendo en práctica la situación de validación de parte del docente, quien debe tener claridad y pleno conocimiento de qué, cuándo, cómo y para qué evaluar.

La evaluación que se plantea y aplica en el modelo, tiene en consideración la construcción “de prácticas matemáticas en coordinación, comunicación y diálogo; considerando que el dialogo social intencionado es el elemento clave de la educación efectiva. El diálogo lleva a la comprensión real de los objetos y procesos matemáticos” (Goñi, 2011) En este sentido la heteroevaluación y el diálogo constante sobre los resultados permiten replantear los métodos de solución de las funciones reales, los métodos inductivo y deductivo se trabajan grupalmente en mejora de las estrategias para solucionar los problemas planteados. Además, la heteroevaluación del modelo plantea interrogantes sobre lo que esperan los alumnos del trabajo que van a realizar; “es decir, un mensaje importante de cambio es entender que no hay regulación completa si sólo recae en una elaboración del docente o en la presentación de una buena tarea. Para una buena regulación hay que desarrollar tres pasos: adecuación inicial planificadora, negociación/contrato y toma de decisiones” (Goñi, 2011) La heteroevaluación diseñada y aplicada en este modelo articula la participación docente-estudiante. Este último como interlocutor valida los resultados; pero comunica de inmediato los errores y se busca construir conjuntamente nuevos métodos de solución de problemas.

Brousseau también habla que del paso de la situación didáctica a una situación adidáctica, existe un contrato didáctico, que está presente en el momento de la heteroevaluación, donde el docente observa y evalúa a los estudiantes, que incluye la validación de los comportamientos, procedimientos, capacidades, habilidades y los estudiantes se percatan y aceptan los procedimientos utilizados por el docente para la evaluación.

2.2.2. DIDÁCTICA DE LOS MAESTROS PARA LAS MATEMÁTICAS DE JUAN GODINO.

Para este caso hemos tomado seis principios rectores (descritos en los Principios y Estándares 2000 del NCTM2) sobre los cuales ha basado su trabajo este autor.

1. Equidad: La excelencia en la educación matemática requiere equidad – unas altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes.
2. Currículo: Es más que una colección de actividades coherentes, centrado en unas matemáticas importantes y bien articuladas a lo largo de los distintos niveles.

3. Enseñanza: Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprensión de lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender, y por tanto les desafían y apoyan para aprenderlas bien.
4. Aprendizaje: Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.
5. Evaluación: La evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.
6. Tecnología: La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes (Godino & Font, 2004).

Esta perspectiva también nos dice que la enseñanza-aprendizaje de estas funciones "representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas" (Godino & Font, 2003) partiendo de estos principios el modelo ha establecido diversas estrategias que son aplicadas en las diversas sesiones. Como señala Cámara Sánchez: "Una de las herramientas más útiles que proporciona la matemática a las demás ciencias es la de los análisis gráficos. Es frecuente encontrarse la gráfica de una función, sin que conozcamos la función en sí. La representación gráfica hace el razonamiento intuitivo y de fácil comprensión. Sin embargo, cuenta con una limitación importante: nos restringe a funciones con máximo de dos variables (vivimos en un espacio tridimensional, y son las únicas que somos capaces de dibujar e incluso imaginar)" (Cámara, 2007)

La práctica para Godino es una de los "vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas"; pero estas prácticas tienen que ser entendidas en el contexto propio de los alumnos, estas prácticas implican una cultura con ciertas normas. "Las normas de la práctica matemática regulan determinadas formas de interacción del individuo con un contenido de conocimiento matemático determinado. Las normas de la práctica legitiman estrategias, procesos matemáticos y las formas de pensar en el aula. Cuando el profesor decide qué contenido, procedimiento, tarea o estrategia es apropiado, se basa en los significados de la cultura de los distintos grupos a los que pertenece. Una norma de la práctica matemática podría ser, por ejemplo: en esta clase, las estrategias visuales son estrategias apropiadas para la solución de problemas. El profesor cuando formula esta norma, lo hace a partir de una idea particular de las matemáticas. Sin embargo, sus alumnos pueden pensar que las estrategias visuales no son matemáticamente correctas, también es importante saber que lo que cuenta como matemáticas para los alumnos, puede provenir de la cultura de su hogar o de su experiencia escolar previa" (Goñi, Matemáticas e interculturalidad, 2006).

Hablamos de todo una interacción entre estudiantes, docentes y docentes – estudiantes; sin embargo no hemos hablado de la manera en cómo llegar a articular todas las perspectivas, procedimientos y estrategias. La solución a esta interrogante está en el consenso. "En la matemática el consenso es esencial, la práctica de las matemáticas es social, se construye. ¿Podría habría aritmética sin la coincidencia de los que calculan? ¿Podría calcular un hombre solo? ¿Podría uno solo seguir la regla?" (Medina & Kwiatkowska, 2000).

2.3. MODELO METODOLÓGICO

El modelo metodológico es un plan estructurado que articula la teoría y la práctica de modo interactivo. En su ruta, el modelo metodológico contiene una parte teórica, metodológica y práctica y "todo el trazo del modelo, que considera objetivos, tareas y actividades en cada caso, así como los resultados" (Cuentas, 2010) y evaluación de los mismos.

Como todo modelo metodológico alternativo, este busca "tender un hilo conductor que garantice la relación lógica entre objetivos, acción y resultados" (Concha, 1989)

Las teorías prácticamente permitieron establecer trabajos colaborativos y cooperativos, basados en la comunicación, diálogo, negociación (situaciones didácticas) y la contextualización a través de estos trabajos de equipo (Godino), estos procesos facilitan el aprendizaje significativo.

Como se ha dicho, el aprendiz, protagonista del aprendizaje, utiliza diversos medios y materiales, y el orientador o guía aplica diferentes estrategias para hacer que los aprendizajes sean más atractivos y efectivos.

2.4. APRENDIZAJE ACTIVO O PARTICIPATIVO

Son estrategias para lograr aprendizajes constructivistas con participación directa del aprendiz, con instrucciones establecidas para hacer y pensar sobre lo que el aprendiz hace, a través de actividades que realizan como actores principales, para lograr las fases del aprendizaje, que incluyen desde conferencias activas hasta ejercicios en los que aplican el material elaborado a situaciones de la vida real o a problemas nuevos; con diversos métodos para estructurar la discusión y obtener la respuesta de los estudiantes en cualquier momento de la clase. Algunos son especialmente apropiados cuando el tiempo es limitado o cuando se quiere estimular la participación (Silberman, 1996).

2.5. APRENDIZAJE COLABORATIVO O COOPERATIVO

Son estrategias para lograr aprendizajes constructivistas apropiados para trabajos en grupo o equipos, maximizando sus propios aprendizajes y el de los demás [John 93]; es decir, los estudiantes trabajan colaborando o cooperando hacia el logro de una meta que se puede alcanzar en forma más efectiva que en forma individual; en donde "dos cabezas piensan mejor con menor esfuerzo".

Esta estrategia no se opone al trabajo individual ya que puede observarse como una estrategia de aprendizaje complementaria que fortalece el desarrollo global e integral del aprendiz y se caracteriza por los elementos:

Responsabilidad individual: Todos son responsables de su desempeño individual dentro del grupo.

Interdependencia positiva: Los miembros del grupo deben depender los unos de los otros para lograr la meta común.

Habilidades de colaboración: Los miembros del grupo deben desarrollar las habilidades que permiten que el grupo funcione en forma afectiva: trabajar en equipo, liderar y solucionar conflictos.

Interacción promotora: Los miembros del grupo interactúan para mejorar relaciones interpersonales y establecer estrategias efectivas de aprender.

Proceso del grupo: El grupo reflexiona en forma periódica y evalúa su funcionamiento, efectuando los cambios necesarios para incrementar su efectividad.

Esto tiene relación directa con el aprendizaje significativo. "Cuando se aprovecha los recursos disponibles del propio contexto aumenta la curiosidad y el interés de los alumnos, lo que favorece el aprendizaje significativo" (Planas & Alsina, 2009).

2.6. APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

En los aprendizajes, surgen interrogantes: ¿Cómo se asegura que se ha aprendido?, ¿Es suficiente que se repita el conocimiento aprendido para decir que ha aprendido?, ¿Para mostrar que ha aprendido, tiene que saber aplicarlo a situaciones reales o al menos explicar y comunicar lo aprendido con sus propias palabras o debe saber diferenciar conocimientos en orden de importancia?, etc. es decir, ¿Cuándo los aprendizajes son significativos? y ¿cuándo son relevantes?.

Al respecto, el aprendizaje es significativo cuando el alumno comprende y aplica lo aprendido a la solución de situaciones problemática relacionadas con el tema; y es relevante cuando, además, el alumno sabe valorar y diferenciar los distintos aprendizajes logrados.

"El aprendizaje significativo implica un procedimiento muy activo de la información por aprender. Durante el aprendizaje significativo el alumno relaciona de manera muy arbitraria y sustancial la nueva información con los conocimientos y experiencias previas y familiares que ya posee en su estructura de conocimientos o cognitiva". (Díaz & Hernández, 1998)

J. Capella y G. Moreno, en una recopilación sobre el aprendizaje significativo, afirman: "El término aprendizaje significativo tiene su origen en Ausubel, quien considera que este aprendizaje se refiere a la posibilidad de establecer vínculos sustantivos y no arbitrarios en el nuevo contenido a aprender y lo que se habla en la estructura cognitiva del sujeto". (Capella Riera & Moreno Izaguirre, 1999)

La significatividad de los aprendizajes es una cuestión de grado, tal como señalan Coll y Solé (1989, p.18):

Los conocimientos construidos por los alumnos son siempre incompletos o perfeccionables a través de las reestructuraciones conceptuales sucesivas en situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Para un aprendizaje significativo se requiere del establecimiento de conexiones entre el nuevo contenido de aprendizaje y los aprendizajes previos, el nivel de desarrollo y las estrategias o estilos de aprendizaje del sujeto

Al respecto Dale H. Schunk (1997) afirma: "El aprendizaje significativo consiste en la adquisición de ideas, conceptos y principios al relacionar la nueva información con los conocimientos en la memoria (Ausubel, 1997; Faw y Waller, 1976). Para Ausubel el aprendizaje significativo es un estímulo hacia el entrenamiento intelectual constructivo relacional. El aprendizaje es significativo cuando el nuevo material guarda una nueva relación sistemática con los conceptos pertinentes.

El modelo de Ausubel requiere mucho contacto entre maestros y alumnos. Los maestros presentan el nuevo material, pero continuamente solicitan respuestas de los estudiantes. Las lecciones han de estar bien organizadas; los conceptos, ejemplificados de varias formas y elegidos unos sobre otros de modo que los discípulos posean los conocimientos previos para beneficiarse de la enseñanza. La cognición situada apunta a la noción intuitiva de que muchos procesos interactúan para dar lugar al aprendizaje. La motivación y la enseñanza están vinculadas, la buena enseñanza eleva la motivación y los estudiantes motivados buscan medios educativos eficaces" (Schunk, 1997)

Para Ausubel la resolución de problemas es la forma de actividad o pensamiento dirigido en los que, tanto la representación cognoscitiva de la experiencia previa como los componentes de una situación problemática actual, son reorganizados, transformados o recombinados para lograr un objetivo diseñado que involucra la generación de estrategias que supera la mera aplicación de principios.

2.6.1. TIPOS DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Ausubel (1973) distingue tres tipos básicos de aprendizaje significativo en función del grado creciente de complejidad:

Aprendizaje de representaciones: Aprender los significados de palabras aisladas o de símbolos particulares, qué representan o son equivalentes a los referentes específicos.

Aprendizajes de Conceptos: Los conceptos, como objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo, surgen de relacionar determinados objetos, sucesos, etc. con atributos comunes a todos ellos.

Además presenta dos formas para el aprendizaje de conceptos:

–) **Formación de conceptos**, a partir de las experiencias concretas, similar al aprendizaje de representaciones.

–) **Asimilación de conceptos**, relacionando los nuevos conceptos con los ya existentes en el sujeto formando así estructuras conceptuales.

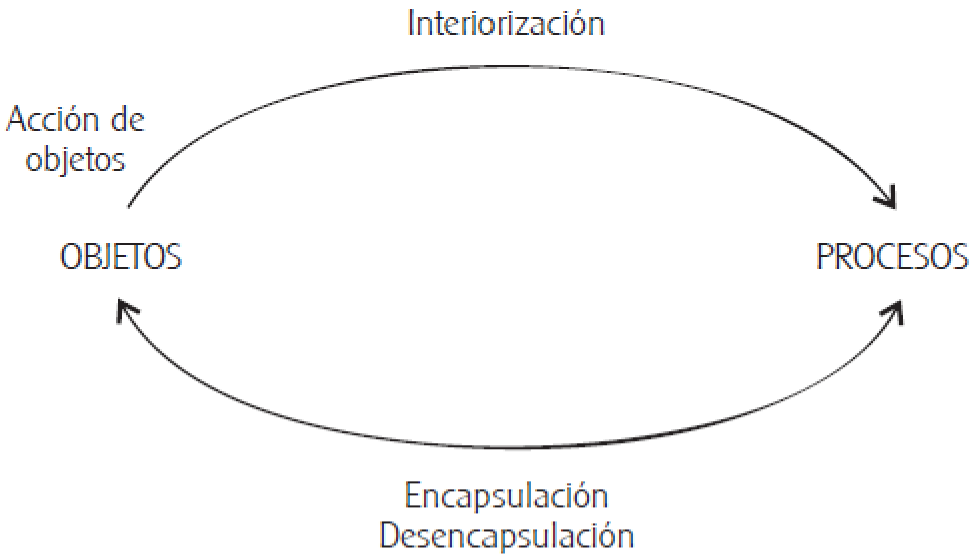
Aprendizaje de proposiciones: Captar el significado de nuevas ideas expresadas en forma de proposiciones (Ausubel, 1973), es decir, expresadas en una frase u oración que contiene varios conceptos.

2.7. TEORÍA APOE (Acción – Proceso – Objeto – Esquema):

Esta teoría constructivista tiene sus orígenes en las investigaciones Estado Unidenses, en donde especialistas en la investigación de matemáticas observaron largos años a los estudiantes, después de dichas observaciones continuas, concluyeron que “para que alguien se apropie de un conocimiento es necesario seguir una secuencia de construcciones mentales” (ITESO, 2003).

En la teoría constructivista APOE el objetivo principal es analizar las construcciones mentales de los estudiantes en el aprendizaje de conceptos utilizando la teoría de Piaget debido a su articulación clara de conexión entre actividad y representación con actividades concretas para desarrollar representaciones adecuadas para conceptos abstractos. Es una teoría para aprender matemáticas a través de un programa o plan de estudios para entender y comprender los procesos del aprendizaje en los intentos de ampliar el nivel de aprendizaje de las matemáticas que establece J. Piaget en la abstracción reflexiva. Los mecanismos para realizar dichas construcciones son las llamadas abstracciones reflexivas e incluyen la interiorización, la encapsulación, la coordinación y la inversión.

En el siguiente esquema se muestran de manera general las estructuras mentales que entran en juego en la construcción de un concepto matemático.



En esta teoría, (Kú, Trigueros, & Oktac, 2008), una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos por seguir. Cabe recalcar que la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la construcción de un concepto. Cuando una acción, o una serie de acciones, se repiten y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Así, el individuo puede pensar en un concepto en términos generales y sin necesidad de hacer cálculos explícitos.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo, realiza las transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces ha encapsulado este proceso en un objeto.

Con respecto al esquema, para un concepto en matemáticas es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas relacionados entre sí, consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, que se pueden utilizar en una situación problemática que tiene relación con ese concepto matemático. La coherencia se refiere a que el estudiante puede decidir si alguna situación matemática puede trabajarse utilizando el esquema.

2.8..EVALUACIÓN

En cuanto a la evaluación, en la Fase de Validación de una Situación Didáctica se han precisado la importancia que juega en el proceso de aprendizaje sus distintas modalidades; y complementaremos la parte conceptual.

Para H. Cerda, evaluación es “la acción de juzgar o inferir juicios sobre cierta información recogida directa o indirectamente de la realidad evaluada, atribuir a negar calidades y cualidades al objeto evaluado o, simplemente, medir la eficacia de un método o los resultados de una actividad" (Cerda Gutiérrez, 2000).

Por su parte J. Mateo considera que: "La evaluación es una actividad compleja y exige trabajo colaborativo, reflexión y organización. Es un proceso de indagación y construcción, de participación y de compromiso cultural en su naturaleza y técnico en su proceso. La evaluación consiste en un proceso de construcción de valores que han de ser asumidos e integrados en la cultura de la persona, del colectivo y de la institución" (Mateo, 2000). En esta linea la investigación se nutre también de elementos colaborativos, cooperativos, dinámicos y se construye nuevos conocimientos, evaluando los avances, de acuerdo al contexto social y cultural del estudiante. Esto coincide con la opinión de Suchman, quien define la evaluación como un proceso para determinar el logro del objetivo de un programa, sin interesar la índole de éste (Ochoa Rafael, 2000); que socialmente se trata de "constatar o certificar el logro de determinados aprendizajes al término de un período, curso o ciclo de formación, para la promoción o no a grados inmediato superiores" (Ballester, Evaluación como ayuda de aprendizaje, 2000).

Además, de la mano con las funciones de evaluación e interactuado con los mismos, están los tipos de evaluación: Evaluación diagnóstica (inicial), evaluación formativa (proceso) y evaluación sumativa (final). La evaluación formativa permite identificar algunos errores y plantear nuevas estrategias de mejoramiento. En este sentido (Ochoa, 2000) plantea que "La evaluación formativa no tiene otro objetivo que conseguir que los estudiantes sean capaces de construir y aplicarse un sistema efectivo de autorregulación de su aprendizaje", y (Giné Frexies & Parmerisa Aran, 2000) expresan que "la evaluación formativa es un medio para conseguir información que permita al profesorado tomar decisiones para regular su acción de enseñanza (en sentido amplio: selección de contenidos, uso de materiales, desarrollo de las sesiones de clase, etc). La evaluación formativa cobra pleno sentido cuando profesorado y alumnado comparten su significado y su función".

CAPITULO III

FUNCIONES REALES

En este capítulo se desarrolla el tema de Funciones Reales, que incluye hasta la función real lineal, del curso Matemática Básica, para estudiantes del primer ciclo de educación superior universitario, fijando objetivos específicos, considerando criterios, indicadores e instrumentos adecuados de evaluación en el proceso enseñanza–aprendizaje. Para este desarrollo son requisitos los conceptos y propiedades básicas de conjuntos, del sistema de números reales y del plano cartesiano, que se presentan en anteriores unidades del curso.

3.1. PLAN DE CLASE:

I. INFORMACIÓN GENERAL:

Facultad	:	Ciencias
Especialidad	:	Electrónica y Telecomunicaciones
Curso-Tema	:	Matemática Básica I – Funciones Reales.
Requisitos	:	Conjuntos, Números Reales y Plano Cartesiano.
Duración	:	Tres semanas de 5 horas cada una.
Condición	:	Obligatorio
Semestre	:	2011-I
Profesora del curso	:	María A. Aredo Alvarado.

II. DESCRIPCIÓN:

El curso de Matemática Básica I, para el estudiante universitario, responde a la necesidad de comprender la matemática como una disciplina formativa e instrumental; por lo que, el tema de Función Real está orientada al desarrollo teórico-práctico de conceptos y propiedades básicas, que resultan de la interdependencia de dos variables (una independiente y otra dependiente de la anterior) en situaciones reales, enfatizando el manejo conceptual y sus aplicaciones a otras áreas del conocimiento que resulta de la constante relación entre el hombre y el medio ambiente que le rodea.

En este tema se pretende que los estudiantes, partiendo de situaciones reales, planteen y resuelvan problemas usando y aplicando los conceptos y las propiedades básicas de las funciones reales a presentarse, incluyendo representación e interpretación gráficas, ejercitando sus capacidades de reflexión, de ordenar y de formalizar situaciones dadas, llegando a la formalización algorítmica, para obtener soluciones adecuadas y confiables.

III. CONTENIDOS DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE:

1) MOTIVACIÓN:

-) Repaso de requisitos: Identificar puntos por pares ordenados en el plano y gráfica de algunas ecuaciones simples.

-) Planteamiento y solución algebraica y gráfica de situaciones dadas.

2) CONTENIDO:

-) Definición de función: Representación sagital. Dominio y rango de una función. Expresión simbólica de una función. Cálculo de valores de una función: Valores numéricos y ecuaciones. Aplicaciones.

-) **Gráfica de una función**: Representación gráfica de una función real en el plano cartesiano rectangular. Aplicaciones.

-) **Función lineal**: Función constante, función identidad, función lineal, función lineal afín. Funciones definidas por secciones. Aplicaciones.

3) OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Al finalizar el desarrollo de la unidad, los alumnos estarán en condiciones de:

-) Formalizar o modelar situaciones presentadas referidas a funciones.

-) Reconocer cuándo una relación o expresión de dos variables es una función, identificando su dominio y rango.

-) Dado el gráfico de una función, determinar dominio y rango.

-) Dada la expresión algebraica de una función real de variable real, encontrar valores de la función para valores dados a la variable independiente.

-) Dada la expresión algebraica, representar gráficamente una función y determinar dominio y rango de la gráfica obtenida.

-) Explicar cómo se modifican las gráficas de ecuaciones de primer grado para obtener otras

-) Dada la gráfica de una función que representa a una figura, determinar dicha función.

4) SECUENCIA DIDÁCTICA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE: PARA EL DESARROLLO DE FUNCIONES REALES:

SESIONES	ACTIVIDADES	RECURSOS Y ESTRATEGIAS	TIPO DE EVALUACION	INSTRUMENTOS DE EVALUACION	TIEMPO
SESION 01	• Informe personal • Evaluación de entrada (Prueba 01)	• Recurso verbal • Material impreso • Pizarra y plumones o tizas. Técnica: • Interrogatorio	Diagnóstica	• Ficha personal • Prueba escrita	1 Hora
SESION 02	• MOTIVACIÓN: - Repaso de requisitos - Introducción al tema mediante presentación de casos	• Recurso verbal • Material impreso • Pizarra y plumones o tiza Técnica: • Trabajo grupal • Interrogatorio	Formativa	Escala de estimación verbal (ficha 02)	4 Horas
SESION 03	• PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN TEÓRICA (desarrollo de contenidos) • COMPROBACIÓN DE DE LO APRENDIDO Evaluación de proceso (Prueba 01)	• Recurso verbal • Material impreso (Práctica, fichas, evaluaciones) • Pizarra y plumones o tiza Técnica: • Interrogatorio. • Observación sistemática. • Resolución de problemas. • Trabajo grupal. Método: • Inductivo- deductivo	Formativa: (autoevaluación, coevaluación, intervenciones orales y heteroevaluación)	Escala de estimación verbal (ficha 05, 06 y 07) Escala de estimación numérica(ficha 03 y 04) Prueba escrita	9 Horas
SESION 04	• EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE Reflexión sobre el aprendizaje Evaluación Final (prueba 02: Evaluando Nuestro aprendizaje).	• Recurso verbal • Material impreso (prueba 02)	Sumativa	Escala de estimación numérica (ficha 08) Prueba escrita	1 Hora

5) CRITERIOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN:

CRITERIOS	INDICADORES
1. Utiliza el lenguaje matemático en diversos contextos	• Presentada situaciones reales, puede formalizarlas y hacer algunas evaluaciones empíricas que cumplan. • Analiza e interpreta correctamente gráficos de datos reales en el plano cartesiano. • Comunica oralmente y por escrito conceptos de funciones individualmente y en grupo. • Explica con sus propias palabras, conceptos de funciones, relacionándolo con casos reales. • Representa y formaliza conceptos de funciones, indicando dominio y rango. • Diferencia ejemplos de funciones a partir de un contenido conceptual.
2. Realiza correcta-mente cálculos para la resolución de problemas.	• Traduce a lenguaje matemático situaciones reales en forma verbal y escrita. • Usa diversas estrategias en el planteamiento de soluciones en las diferentes actividades. • Interpreta y comprueba resultados obtenidos de una actividad presentada. • Aplica algoritmos en la resolución de problemas, describiendo la secuencia de pasos seguidos. • Presenta sus respuestas empleando unidades adecuadas. • Plantea preguntas que propician exploración y análisis con respecto al tema de clase.
3. Se involucra en el razonamiento matemático y demostración adecuada.	• Ejecuta el razonamiento inductivo para reconocer situaciones reales. • Aplica el razonamiento deductivo para verificar una conclusión. • Clasifica objetos matemáticos de acuerdo con diferentes criterios. • Analiza situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes. • Establece relaciones entre conceptos de funciones. • Identifica o deriva propiedades de un concepto determinado.

IV. METODOLOGÍA.

Con la participación en el desarrollo de las clases, individualmente o en grupo, el alumno desarrollará una actitud crítica, razonando en base a los conceptos y propiedades analizados en clases, y podrá relacionar y aplicar lógicamente dichos temas a la solución de situaciones o problemas concretos que se le presenten.

Se promoverá la mejor interacción posible entre profesor y estudiantes: El profesor, en su labor de orientador, fomentará en los estudiantes la habilidad de aprender a aprender y alentará el trabajo grupal y colaborativo en el desarrollo a través de actividades, trabajando en grupos o en forma individual.

V. EVALUACIÓN.

La evaluación en la unidad de aprendizaje se realizará mediante las evaluaciones de entrada, de proceso o formativa, incluyendo la autoevaluación y coevaluación, como partes de la evaluación del curso, y la heteroevaluación; considerando los criterios e indicadores con escala de calificación de 0 a 20.

La evaluación formativa se aplicará mediante estrategias como dinámica de grupos, preguntas orales y pruebas de rendimiento de desarrollo.

VI. BIBLIOGRAFÍA.

1. De Guzmán Miguel Bachillerato 1 de Matemáticas. España. 1987.
2. Leithold Louis Matemáticas previas al Cálculo. México. 1997.
3. Elon lages Lima La Matemática de la Enseñanza Media. IMCA. 2000.
4. Larson Roland Cálculo 1. México. 2010.
5. Stewart James Cálculo. México. 1998.

3.2. CONOCIMIENTO DE SABERES PREVIOS

Para el desarrollo de esta unidad, consideramos que los alumnos conocen los conceptos u propiedades de Conjuntos, del Sistema de los Números Reales y de un Sistema Cartesiano Rectangular del Plano. Sin embargo y a manera de motivación, se hará un repaso sumario de tales temas, enfatizando en la importancia que van a tener en el desarrollo de funciones reales y que serán aplicados a casos concretos.

El desarrollo del proceso se inicia buscando información acerca de la actitud y desempeño de los alumnos en las actividades programadas, qué y cuánto conocen los alumnos de funciones reales. Se aplican diversos instrumentos elaborados (ver anexos):

-) Ficha N^{o} 01. Formulario de Informe Personal: ¿Cuánto conocen del tema?

El formulario de informe personal o ficha N^{o} 01, llenaron individualmente los 40 alumnos, aplicado antes de la evaluación de entrada, donde se consideran: La columna a), si conocen o no el tema de función real, y la columna b), el grado de conocimiento o de comprensión que tienen del tema, expresados como:

1= No conozco

2 = Tengo un conocimiento parcial

3 = Lo conozco, pero lo comprendo parcialmente

4 = Tengo un buen conocimiento y una buena comprensión

5 = Lo puedo explicar a un compañero o compañera

Las informaciones acerca del nivel de conocimiento de función real que tienen los alumnos antes de desarrollar el contenido de funciones reales, se resume en:

CUADRO 1

Enunciados	**a) Estudio Previo**		**b) Grado de Conocimiento**				
	Si	**No**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
• Función	37	03	01	20	17	02	00
• Dominio de una función	32	08	03	17	17	03	00
• Rango de una función	34	06	04	19	14	03	00
• Gráfica de una función	27	13	06	16	16	02	00
• Función Lineal	19	21	17	14	08	01	00
• Función Constante	11	29	23	15	02	00	00
• Función Lineal afín	04	36	30	09	01	00	00

Fuente: Información proporcionada por los propios alumnos

En conclusión, Estos resultados reflejan que los alumnos conocen los conceptos de función, dominio, rango, y gráfica de una función; y no conocen función lineal, función constante ni función lineal afín y el grado de conocimiento que tienen respecto a los enunciados, expresan que lo conocen pero lo comprenden parcialmente los conceptos de función, dominio, rango y gráfica de una función; interactuando en una situación de acción, pensando y reaccionando a algo externo.

-) Prueba 01: Evaluación de Entrada: ¿Qué saben del tema?

Esta evaluación diagnóstica, aplicada antes de iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones reales y para saber en qué condiciones están los alumnos para iniciar el proceso, proporciona información para la planificación y la toma de decisiones respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje y subsecuentes acciones evaluativas.

Para tomar decisiones hay que considerar dos aspectos:

-) Ubicación del alumno en el nivel adecuado al inicio del proceso educativo.

-) Determinación de las causas básicas de las deficiencias en el aprendizaje, durante el proceso.

Para efectos de análisis o calificación, se muestran algunos desarrollos que son comunes en sus respuestas:

Pregunta 1): Se pide definir términos.

Entre algunas respuestas se tienen:

① Definir los sgtes términos.

a) Relación binaria: Cuando se relacionan dos funciones.
b) Función:
c) Dominio y Rango: Es la forma de representar en gráfico una función.

---

② Definir los siguientes términos:

a) Relación binaria: Cuando esta en relación de 2 valores.
b) funsión: Cuando una ecuación esta en funsión de un valor.
c) Dominio y Rango: Determina el valor de los ordenados y los absizas. (ejes "y" y "x").

---

① Definir los sgtes. términos:

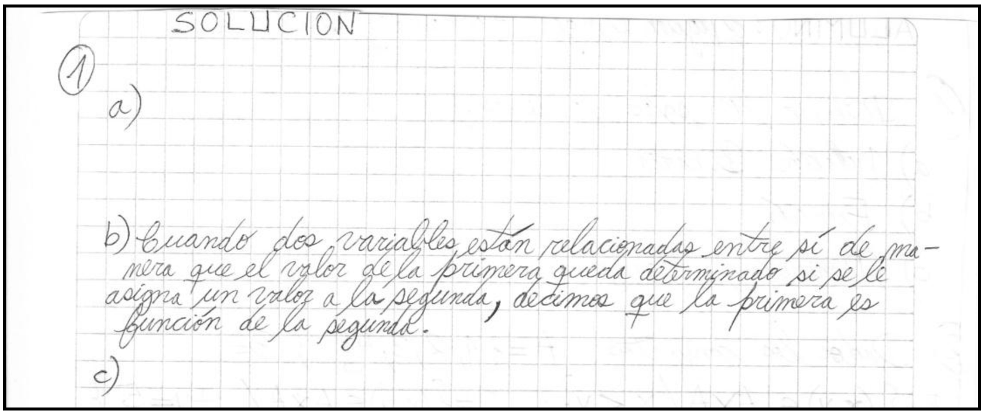
a) Relación Binaria: Es aquella nexo de 2 ó más conjuntos en el cual se van a interlazar lo que se parece.
b) Función: Son expresiones que manifiestan condiciones de un conjunto.
c) Dominio y Rango: Son aquellos elementos de un determinado conjunto que son expresada, en base a "x" e "y" respectivamente.

---

① Definir los sgtes términos

a) Relación Binaria:
b) Función:
c) Dominio y Rango:

✓ Dominio: Es el conjunto de términos de los primeros números de un par ordenado
✓ Rango: Es el conjunto de términos de los segundos números de un par ordenado.



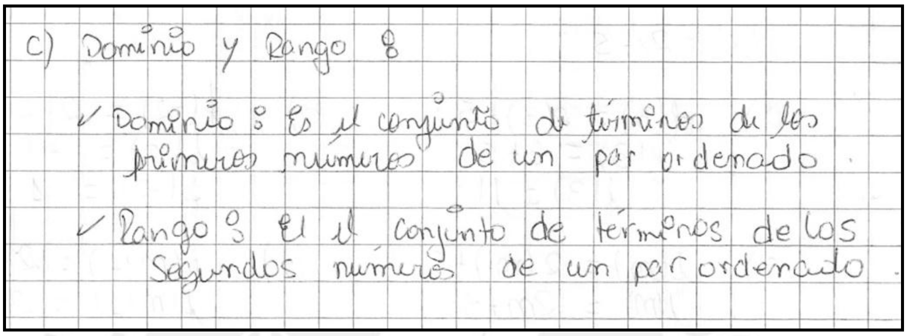
SOLUCION

1

a)

b) Cuando dos variables están relacionadas entre sí de manera que el valor de la primera queda determinado si se le asigna un valor a la segunda, decimos que la primera es función de la segunda.

c)



c) Dominio y Rango :

✓ Dominio : Es el conjunto de términos de los primeros números de un par ordenado.

✓ Rango : El el conjunto de términos de los Segundos números de un par ordenado.

a) **Relación binaria** es:

- Relación entre dos conjuntos;
- cuando está en relación de 2 valores;
- es el nexo entre dos o más conjuntos en el cual se van a interlazar lo que se parece;
- relación entre dos personas;
- cuando se relacionan dos funciones;
- relación entre dos familias;
- relación entre elementos de un conjunto;
- relación entre la correspondencia de elementos de dos conjuntos diferentes;
- comparación de conjuntos;
- relación necesariamente tiene que darse entre dos elementos;
- relación es cuando tiene dos grados.

b) **Función** es:

- Toda relación donde un conjunto de partida tiene su respectivo punto de llegada;
- cuando una ecuación está en función de un valor;
- la encargada de aplicar una definición;
- conjunto de elementos en donde cada elemento tiene su propio correspondiente;
- expresiones que manifiestan condiciones de un conjunto;
- lo que realiza una persona en un trabajo;

- un evento en un teatro, cine, etc. una regla que relaciona a dos conjuntos;
- una gráfica; una curva en el plano;
- la que va de un elemento de un conjunto a otro elemento de otro conjunto;
- f: A $\rightarrow$ B, es una regla que relaciona dos conjuntos diferentes A y B.

c) Dominio y Rango de una Función:

- Determina el valor de las ordenadas y de las abscisas;
- es la manera de representar en gráfico una función; dominio es tener el control sobre la función que desempeña en el trabajo;
- dominio son los valores límites que puede tener una función;
- dominio es la suma de los valores de x;
- dominio es la parte emisora o dominante de una función;
- dominio son los primeros elementos de un conjunto de partida;
- dominio y rango es estar en un buen lugar para ver una función teatral;
- dominio es el eje de las Y;
- Dominio = A y Rango = B;
- dados dos conjuntos A y B el dominio es A y el rango es B;
- dominio son los elementos de A y rango los elementos de B;
- rango es aquel que va al final de dicho subconjunto;
- rango es la suma de los valores de y;
- rango es la parte receptora de la función;
- rango es el valor dado en el eje vertical para una función.

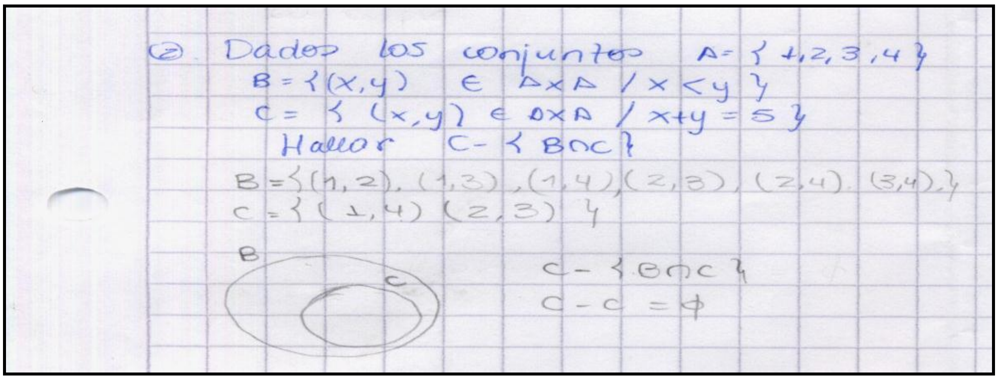
En resumen:

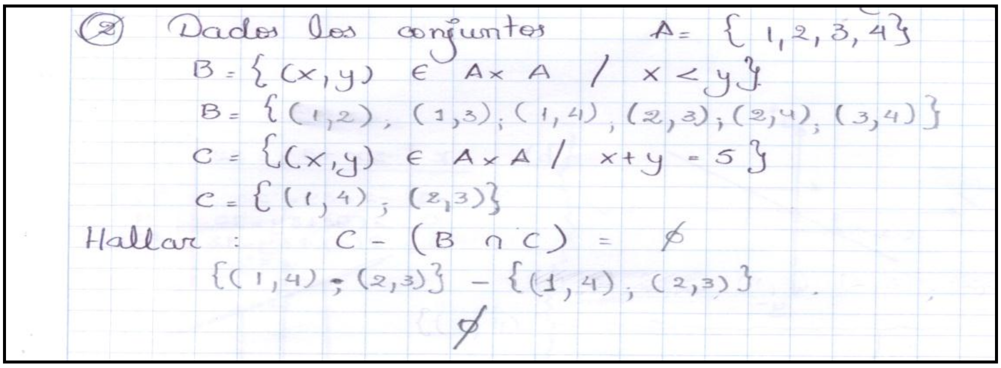
-) Los alumnos tratan de recordar o crear los conceptos de los términos indicados de una manera libre y expontanea, algunos responden a los tres términos, otros lo hacen parcialmente o con gráficos pero la mayoría no la responden. Además, las respuestas son poco consistentes y nada formales.

-) Los alumnos manifiestan conocer o tener idea muy poco o casi nada acerca del concepto de función.

Pregunta 2): Cálculo de elementos y operaciones entre conjuntos.

Entre algunos desarrollos se tienen:


② Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$
$B = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x<y\}$
$C = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x+y = 5\}$
Hallar $C - \{B \cap C\}$
$B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
$C = \{(1,4) (2,3)\}$
B
C
$C - \{B \cap C\}$
$C - C = \phi$



(2) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{(x, y) \in A \times A \ / \ x < y\}$

$B = \{(1,2), (1,3); (1,4), (2,3); (2,4); (3,4)\}$

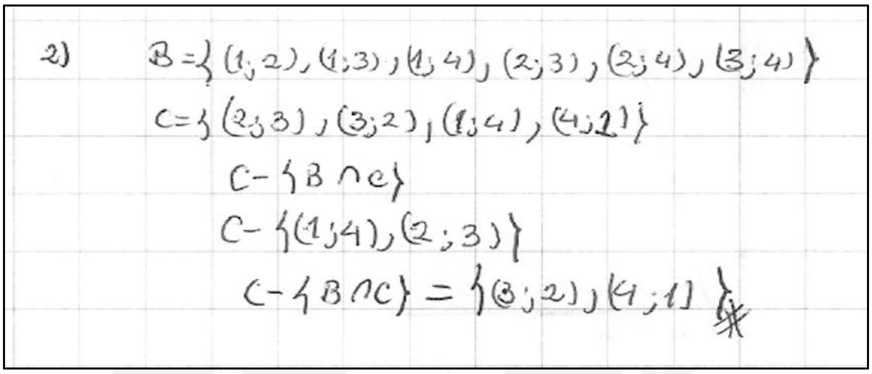
$C = \{(x, y) \in A \times A \ / \ x + y = 5\}$

$C = \{(1,4); (2,3)\}$

Hallar : $C - (B \cap C) = \emptyset$

$\{(1,4); (2,3)\} - \{(1,4); (2,3)\}$

$\emptyset$



2) $B = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;4)\}$

$C = \{(2;3), (3;2), (1;4), (4;1)\}$

$C - \{B \cap C\}$

$C - \{(1;4), (2;3)\}$

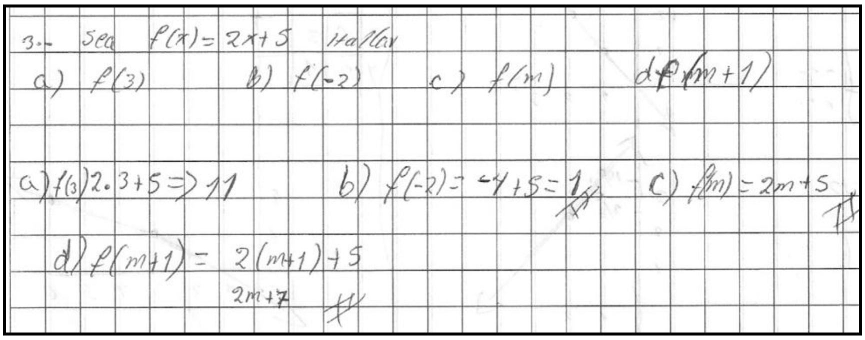
$C - \{B \cap C\} = \{(3;2), (4;1)\}$

En resumen:

- Algunos hallaron bien el producto cartesiano de A×A y los conjuntos B y C;
- otros sólo consideraron la intersección de B y C o sólo el conjunto C o sólo consideraron ciertos elementos B o del conjunto C; y
- pocos fueron que hallaron la respuesta correcta o no contestaron.
- Las respuestas de la mayoría han sido muy breve y algunos dejaron en blanco, sin considerar los elementos como pares ordenados y las operaciones básicas.
- Los alumnos que han desarrollado la prueba están en una comprensión aún limitada para realizar acciones acerca de funciones.

Pregunta 3): Cálculo de valores de una función:

Se tienen algunos desarrollos:



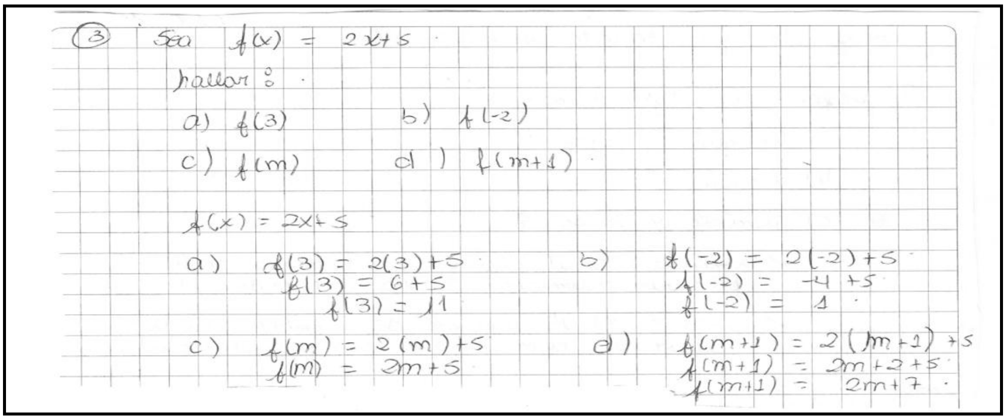
3.- Sea $f(x) = 2x + 5$ Hallar

a) $f(3)$ b) $f(-2)$ c) $f(m)$ d) $f(m+1)$

a) $f(3)\ 2.3+5 \Rightarrow 11$ b) $f(-2) = -4+5 = 1$ c) $f(m) = 2m+5$

d) $f(m+1) = 2(m+1)+5$

$2m+7$



(3) Sea $f(x) = 2x+5$.
hallar :
a) $f(3)$ b) $f(-2)$
c) $f(m)$ d) $f(m+1)$.

$f(x) = 2x+5$
a) $f(3) = 2(3)+5$
$f(3) = 6+5$
$f(3) = 11$

b) $f(-2) = 2(-2)+5$
$f(-2) = -4+5$
$f(-2) = 1$

c) $f(m) = 2(m)+5$
$f(m) = 2m+5$

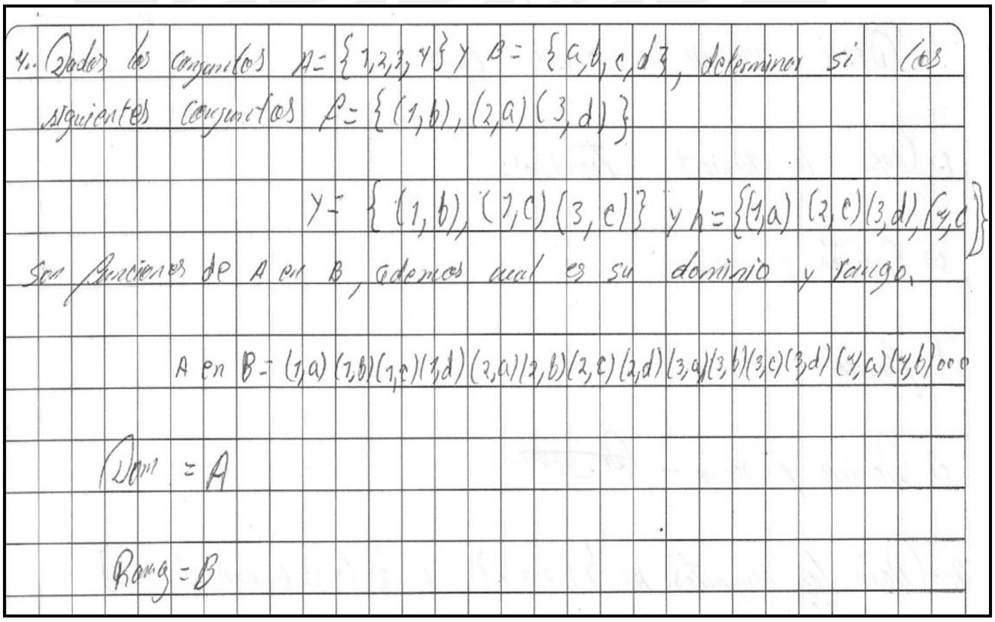
d) $f(m+1) = 2(m+1)+5$
$f(m+1) = 2m+2+5$
$f(m+1) = 2m+7$.

En resumen:

- Algunos evaluaron bien: *f* (3) = 11, *f*(-2) = 1, *f*(m) = 2m+5, *f*(m+1) = 2(m+1)+5 = 2m+7 y manejan bien las fórmulas al evaluar los valores dados en la función.
- otras, como *f*(–2) = 2(–2) + 5 = –4 + 5 = 9, *f*(–2) = 2(–2) – 5 = –9, *f*(m) = *m* = 2*x* + 3, *f*(m+1) = 2(m+1) +5 = 2m+5, donde falta dominio de la ley de signos.
- pocos son los que dejan en blanco.

Pregunta 4): Se les pide que determinen si los conjuntos *f*, *g* y *h* son funciones de A en B.

Algunos desarrollos son:



4.- Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$, determinar si los siguientes conjuntos $f = \{(1,b),(2,a)(3,d)\}$
$y = \{(1,b),(2,c)(3,c)\}$ y $h = \{(1,a)(2,c)(3,d),(4,c)\}$
son funciones de A en B, además cual es su dominio y rango.

A en B = (1,a) (1,b) (1,c) (1,d) (2,a) (2,b) (2,c) (2,d) (3,a) (3,b) (3,c) (3,d) (4,a) (4,b) ...

Dom = A

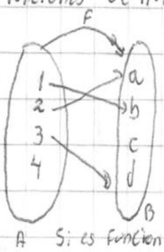
Rang = B

4: Dados los conjuntos
A = {1,2,3,4}
B = {a, b, c, d} determinar si
los siguientes conjuntos:
f = {(1,b), (2,a), (3,d)}
g = {(1,b), (1,c), (3,c)}
h = {(1,a), (2,c), (3,d), (4,c)}
Son las funciones de A en B.
además cual es el rango y
dominio
Funciones de A en B = {(1,a) (1,b), (1,c),
(1,d) (2,a) (2,b) (2,c) (2,d) (3,a) (3,b) (3,c)
(3,d) (4,a) (4,b) (4,d) (4,c)}

4) f : Si es función
Dom = {1, 2, 3}
Ran = {b; a, d}

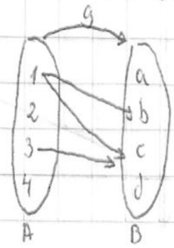
g : No es función
h : Si es función
Dom = {1, 2, 3, 4}
Ran = {a, c, d}

4 Dados los conjuntos A = {1,2,3,4} y B = {a,b,c,d}, determinar si los siguientes conjuntos F = {(1,b), (2,a) (3,d)} g = {(1,b), (1,c), (3,c)} y h = {(1,a) (2,c), (3,d) (4,d)}
Son funciones de A en B, ademas cual es su dominio y rango.

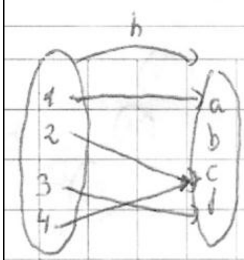


Dom = {1,2,3}
Rang = {a,b,d}

Si es funcion



Don = {1,3}
Ran =



Dom = {1,2,3,4}
Ran {a, c, d}

Se tienen algunas respuestas:

- Están mal expresados los conjuntos, porque no guardan relación sus elementos;

- ningún conjunto es función,

- escriben (1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (5, d) y dicen que si es función el dominio es A y el rango es B;

- f y g son funciones y h no porque algunos de los primeros elementos de los pares ordenados de h son iguales a los de f; f y h son funciones su dominio es 1, 2, 3 y 4 y rango = B;

- solo el conjunto f es función porque cumple con el concepto y su dominio son los elementos 1, 2 y 3 y rango los elementos b, a y d.

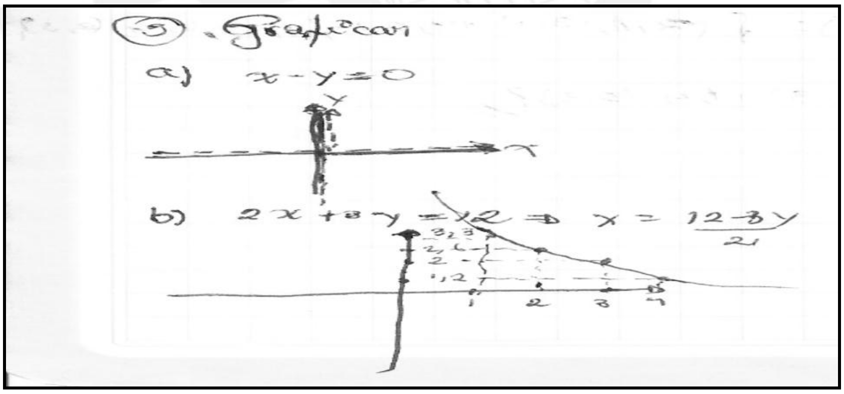
En resumen:

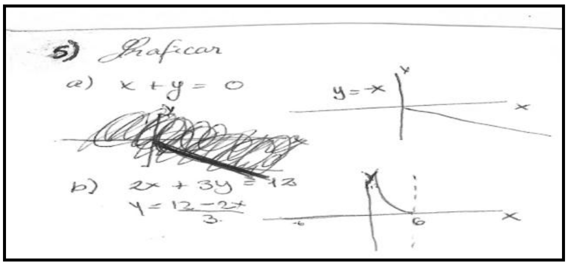
- La mayoría no responden o no responden bien, algunos de los que responden no explican si los conjuntos dados son funciones, definen otro conjunto, otros responden de una manera breve o realizan gráficos sin nombrar a los conjuntos y hacen la correspondencia de los elementos pero no responde si *g* y *h* son funciones pero si determina dominio y rango.

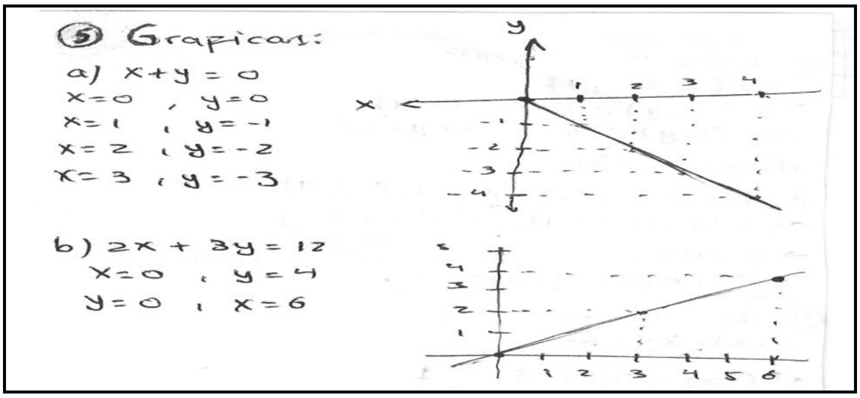
- Los alumnos no tienen claro el concepto de función.

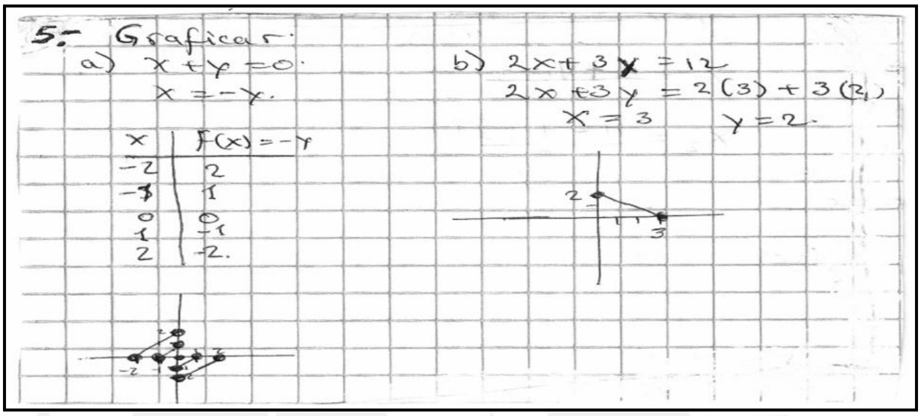
Pregunta 5): Se les pide que grafiquen algunas ecuaciones.

Ellos responden:









En resumen:

- La mayoría, en el plano ubican los puntos y trazan líneas rectas porque han ubicado dos puntos en el plano, o lo dejan en blanco.

- otros ubicaron más puntos y los unen con una línea recta o curva, resultando gráficos diversos.

- algunos despejan la variable *x* o *y* para asignarle valores y obtener puntos que los ubican en el plano cartesiano y luego los unen mediante una línea curva.

-) No tienen claro lo que es gráfica de una función real lineal en el plano cartesiano. o desconocen el tema de gráfica de funciones lineales y lineales afines.

En conclusión: Las respuestas reflejan falta de accionar en el proceso de aprendizaje, que se inician con los saberes previos; es decir, que la comprensión al accionar sobre términos matemáticos es de sentido común y no son capaces de emitir respuestas lógicas.

-) Ficha N^{o} 08: ¿Qué grado de conocimiento muestra el alumno en la evaluación de entrada indicado por el docente?

Luego de la evalución de entrada, el docente indica el grado de conocimiento que el grupo de alumnos muestran en el tema correspondiente, usando la Ficha N^{o} 08 y marcando el casillero adecuado, con los siguientes valores.

5. Muy bueno 4. Bueno 3. Regular 2. Deficiente 1. Muy deficiente

CUADRO 2

N°	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función	00	01	05	14	20
2	Variable dependiente e independiente	00	01	02	15	22
3	Dominio y rango de una función	00	03	03	18	16
4	Gráfica de una función	00	00	01	08	31
5	Cálculo de valores de una función	00	13	13	08	06
6	Función lineal	00	01	02	18	19
7	Función constante	00	00	01	19	20
8	Función lineal afín	00	00	00	18	22

Fuente: Información proporcionada por el docente

En resumen: Considerando que los estudiantes actuaron en sentido común, al responder a las preguntas sin antes haber recordado y analizado los conceptos de funciones reales, siguiendo el criterio e indicadores de evaluación se obtuvo que la mayoría, tienen una valoración de muy deficiente, ningunos obtienen muy bueno y también se observa un grado de conocimiento deficiente y muy pocos obtienen regular y bueno.

3.3. DESARROLLO DE CONTENIDOS:

- Concepto de Función;
- Función real;
- Gráfica de una función; y
- Función lineal y función lineal afín.

3.3.1. MOTIVACIÓN:

3.3.1.1. REPASO DE REQUISITOS: ACTIVIDAD GRUPAL

Considerando el bajo nivel en la evaluación de entrada y a manera de motivación para repasar requisitos, se presentan las siguientes actividades para ser trabajados en grupos, durante 30 minutos:

a) Jugar con un dado dos veces: ¿cuáles serán los posibles resultados?

Se espera tener resultados de pares ordenados diferenciando el primer lanzamiento y el segundo lanzamiento. Los alumnos realizan sus soluciones por escrito.

b) Jugar con dos dados, uno de color blanco y otro de color verde; ¿cuáles serán los posibles resultados?

Se espera que los alumnos decidan ordenar sus resultados a través de pares ordenados, diferenciando el primer dado y el segundo para obtener la pareja.

c) En el plano cartesiano rectangular, ubicar los siguientes puntos, indicando abscisas y ordenadas, y los puntos que para un valor de la abscisa, el valor de su ordenada es único.

-) $(-2 , 5)$, $(5 , -2)$, $(-3 , -4)$, $(-4 , 2)$ y $(-3 , 5)$.

-) $(x, 3)$, donde $x \in \{-1, 2, 3, -2\}$.

-) $(4, z)$, con $z \in \{-1, 2, 3, -2\}$.

-) (x, y), para $x \in \{-1, 2, -2\}$ e $y \in \{1, -3\}$.

d) En el plano cartesiano, graficar los siguientes conjuntos:

-) $\{(x, y) \ / \ x = 3$ e $y \in [-1, 5]\}$.

-) $(x, y) \ / \ x \in [-2, 5]$ e $y = -4\}$.

-) $\{(x, y) \ / \ x \in [-1, 2]$ e $y = x + 1\}$.

-) $\{(x, y) \ / \ y \in [-2, 1]$ y $x = y - 2\}$.

¿Cómo actuaron?

-) Para los casos a) y b), a modo de juego imaginario del grupo, van anotando sus posibles resultados obteniendo resultados parecidos en los dos juegos;

-) En el caso c) tratan de ubicar los puntos en el plano cartesiano de acuerdo a los pares ordenados que se establecen, la mayoría de ellos ubicaron los pares ordenados definidos correctamente pero en los pares ordenados que se establecen con una variable no lo definieron todos y en algunos casos confundieron al ubicar los puntos en el plano cartesiano ubicando la primera componente en el eje Y y la segunda componente en el eje X.

-) En el caso d) la mayoría de los alumnos al graficar los conjuntos dados no consideraron los intervalos de dominio y rango para graficar.

Se concluye la actividad de repaso con la explicación o aclaración de los procesos a seguir en el accionar de tales actividades conceptuales.

Con esta actividad grupal inicial, los alumnos intentan accionar, manejar o manipular conceptos básicos.

3.3.1.2. INTRODUCCIÓN AL TEMA: PRESENTACIÓN DE CASOS.

A continuación se presentan casos de situaciones reales, que permitirán relacionarlo con el concepto de función real, para analizar y discutir en forma individual o grupal.

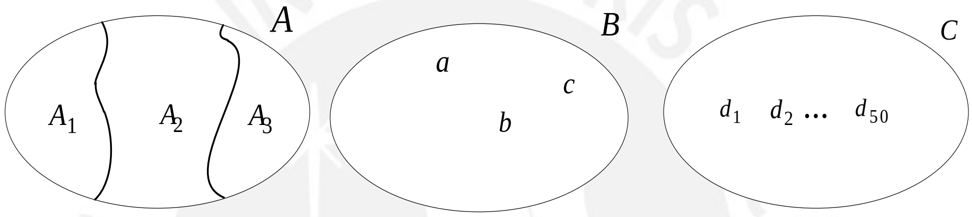
Caso A: En una actividad de la Facultad, 50 alumnos se distribuyeron en grupos de 15 con camisa de color azul, 20 con camisa de color blanca y 15 con camisa de color celeste, y cada uno con una etiqueta en el pecho con su respectivo código.

En un tiempo de 20 minutos, a través de representaciones y conceptos previos, analizan y discuten para responder a las interrogantes:

-) ¿Qué conjuntos pueden identificarse y definirlos?

Se tiene tres conjuntos: A, el conjunto de los 50 alumnos, los subconjuntos A_1, alumnos con camisa azul, A_2, alumnos con camisa blanca y A_3, alumnos con camisa celeste; esto es, $A = \{a_1, a_2, \ldots.., a_{15}, b_1, b_2, \ldots., b_{20}, c_1, c_2, \ldots., c_{15}\}$;

$B = \{a, b, c\}$, los colores de camisas, y $C = \{d_1, d_2, \ldots., d_{50}\}$ el conjunto de códigos; con una representación:

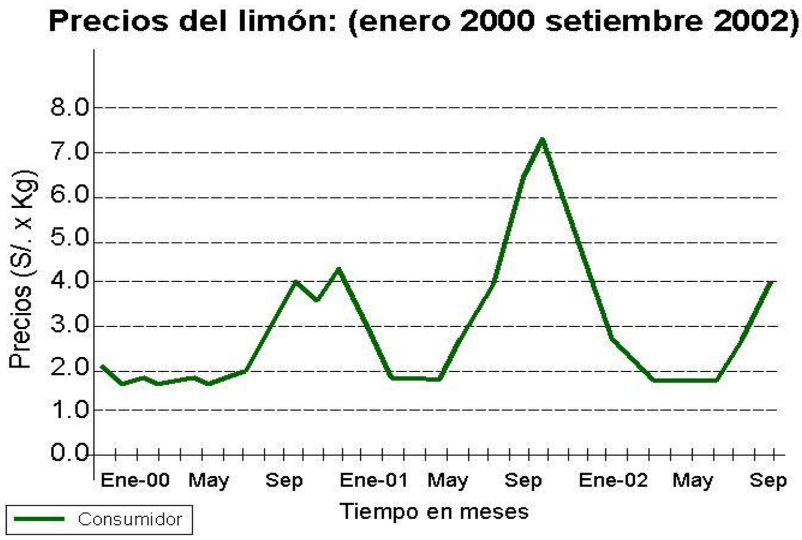


-) También surgen otras interrogantes que relacionan a los alumnos con los colores de camisa que llevan puesto, alumnos con los códigos o los colores de camisas con los códigos; para ser tratadas en forma grupal, justificando respuestas:

- ¿Hay dos o más alumnos con el mismo color de camisa?
- ¿Cada alumno tiene puesto un solo color de camisa?
- ¿Un determinado color de camisa lleva puesto solamente un alumno?
- ¿Habrá algún alumno que lleve puesto camisas de dos colores a la vez?
- ¿Un mismo color de camisa puede ser usada por dos o más alumnos?
- ¿Cada color de camisa le corresponde a un único alumno?
- ¿Dos alumnos pueden tener el mismo código?,
- ¿Un alumno puede tener dos códigos?,
- ¿Los códigos de dos alumnos son diferentes?

Con sus respuestas a estas situaciones, identificaron con más precisión que hay tres conjuntos que representan los colores de camisas dentro de un conjunto (universal) de los 50 alumnos; dando poco énfasis a los conjuntos de los colores y de los códigos, ya que ellos los ubican en la situación real que se presenta.

Caso B: La siguiente gráfica describe la variación del precio del limón al consumidor en la ciudad de Lima-Perú, en cada uno de los meses de ene 2000 a set. 2002:



Fuente: Minag-Digia-Elaboración: AgroData-CEPES (Setiembre 2002)

Para llegar al concepto de función en una dinámica grupal de trabajo, se le entrega a cada alumno de cada grupo el enunciado del caso con la gráfica respectiva y se les pide que lean el enunciado, observen la gráfica y hagan comentarios al respecto. Luego, se les entrega las interrogantes para ser discutidas y respondidas en un tiempo de 40 minutos.

- ¿Qué se representan en el eje horizontal y en el eje vertical?
- A mediados del mes de diciembre del 2000 ¿cuál fue el precio del kg de limón, aproximadamente?
- ¿Entre qué valores varía aproximadamente el precio del limón entre los meses de Mayo y Julio del 2001?
- ¿En qué mes y en qué año alcanza el mayor precio el kg de limón? y ¿en qué mes y año alcanza el menor precio?; ¿Y qué precio alcanzan?
- En un determinado mes ¿a tenido dos precios distintos el limón?
- ¿Un cierto precio pudo haber sido el mismo para meses diferentes?
- ¿El precio del limón varía según el mes del año en que se hace referencia?
- ¿En cada mes de cada año el kilo de limón tiene un único precio?

Observando la gráfica, analizaron algunos aspectos que se presentan, de los meses y de los precios del limón. Las respuestas se resumen en las siguientes:

-) El precio del limón a mediados del mes de diciembre varia aproximadamente de 3.80 a 4.00 soles el kg;
-) El mayor precio del limón para algunos es en el mes de octubre del 2001 y para otros en el mes de setiembre del 2001 debido a que hay escasez, por efecto del clima, mayor consumo y menor producción;
-) En cada mes el precio varía debido a la producción, según la temporada, debido al consumo, debido a la estación que nos encontremos;
-) Las variables son el eje horizontal con el tiempo en meses y el eje vertical con el precio por kg.;

-) El precio en soles por kg depende del tiempo en meses, algunos dicen que el eje vertical depende del eje horizontal, etc.

Para este caso se tienen respuestas diversas, que surgen de una manera natural dándole una interpretación común, ya que ellos relacionan la situación que se presenta con la realidad de la región Piura, es decir actúan sobre el medio para explicar la situación.

Caso C: Se dispone de 360 nuevos soles para la compra de dos artículos *A* y *B*, cuyos precios unitarios son de 3 y 4 nuevos soles, respectivamente. Se trata de presupuestar posibles compras, siempre gastando todo el monto disponible.

Para un trabajo grupal en un tiempo de una hora y media.

Se inicia con comentarios y análisis libre entre los integrantes de los grupos, en algunos casos se les orientaba con la finalidad que se sitúen en un contexto real. Luego, se les presenta las interrogantes a resolver para que al final reporten un informe escrito:

1) ¿Es posible comprar 8 unidades de A?
2) ¿Es posible comprar 29 unidades de A?
3) ¿Es posible comprar 89 unidades de B?
4) ¿Es posible comprar tantas unidades de A como de B?
5) Si se compra x unidades de A e y unidades de B ¿Cuál es la expresión que relaciona estas dos variables?
6) Si de la expresión, se despeja la variable y en términos de la otra variable x, se dice que la variable despejada y, es variable dependiente de x o esta en función de variable independiente x. Halle la expresión resultante.
7) Analice para qué valores de x se obtiene un valor y, que indica una compra posible (x, y).
8) Usando la expresión hallada, completa los espacios que faltan en la siguiente tabla, de manera que cada par (x , y) es una compra posible:

x	6			15					36
y		16				27			

La dinámica de trabajo se realiza en dos momentos:

i) Trabajo individual: Se entrega a cada uno el enunciado con las respectivas preguntas. Analizan, leen y responden algunas de las preguntas, y responden por escrito las cuatro primeras preguntas en 30 minutos.

Las respuestas, en resumen, son las siguientes:

Pregunta 1):

Si es posible, porque:

-) el resultado no excede a la cantidad disponible;
-) la cantidad utilizada está dentro de la cantidad disponible;
-) al comprar 8 unidades de A solo se gasta 24;
-) al multiplicar las 8 unidades con el precio unitario de A y a este resultado restarlo con 360.00 el resultado es divisible por 4 el precio de B;
-) con lo que queda se puede comprar 82 artículos de B;
-) el valor de estos están muy por debajo de lo que se dispone;
-) tengo S/. 360.00 y solo gastaría S/.24.00; pero no se cubriría todo el monto disponible.

No es posible, porque:

-) del monto disponible no se gasta todo;
-) no se gasta el monto disponible.

Pregunta 2):

Si es posible, pues:

-) la cantidad utilizada está dentro de la cantidad disponible;
-) de los S/.360.00 solo se gastaría 87;
-) la unidad de A es 3.00;
-) al multiplicar 29 por 3.00 nos da 87 y es menor que 360.00; pero no se cubriría todo el monto disponible.

No es posible, porque:

-) no se gasta todo el monto;
-) no se gastaría todo el monto disponible me sobraría un sol;
-) si compramos 29 unidades de A con lo que queda se puede comprar artículos de B pero no se gasta todo el monto queda un residuo;
-) si quiero comprar artículos de B me va a faltar o sobrar dinero.

Pregunta 3):

Si es posible, porque:

-) la cantidad que se va a utilizar esta dentro de la cantidad disponible;
-) mi gasto sería mucho menor del total de dinero que tengo;
-) al multiplicar $4.00 \times 89 = 356.00$ y es menor que 360.00;
-) si sería posible comprar 89 unidades de B, pero no se cubriría todo el monto disponible.

No es posible, porque:

-) al comprar esa cantidad pasa el límite disponible de 360.00 soles;
-) no se gasta todo el monto disponible;
-) de los S/.360.00 no es suficiente para comprar las 89 unidades de B porque el precio es de 4.00 soles;
-) si compramos 89 unidades de B nos quedaría 4 soles y al comprar un artículo de A no se gastaría todo el monto, sobraría un sol.

Pregunta 4):

La mayoría responde que si es posible comprar tantas unidades de A como de B ya que 3 y 4 son múltiplos de 360; otros dicen que se podría comprar para un artículo pero para el otro artículo faltaría o sobraría dinero; y algunos responden que depende de las unidades que se compre para el artículo A y para el artículo B para emplear todo el monto disponible, y consideran que se puede comprar 8 artículos de A y 84 artículos de B o también 84 artículos de A y 27 artículos de B y también contestan que se puede comprar 16 unidades de A y 28 unidades de B.

En resumen, muy pocos son los que trabajan en el contexto de las situaciones planteadas; es decir, pocos comprenden el enunciado de las interrogantes.

ii) **Trabajo grupal**: comentando y respondiendo a todas las preguntas en 1hora.

Las repuestas a cada pregunta son las siguientes:

Pregunta 1): Si se puede comprar,

-) pero no se llega a gastar todo el monto;
-) porque si compramos 8 unidades de A, con lo que queda se puede comprar 84 unidades de B, sin que nos quede residuo;
-) porque la cantidad que se utilizaría está dentro de lo que se dispone;
-) pero no se cubriría todo el monto disponible;
-) gastaría S/. 24.00, pero no se cubriría todo el monto disponible.

No es posible comprar, porque solo se gastaría S/. 24.00 y sobraría S/. 336.00 y en este caso nos piden gastar todo el monto.

Pregunta 2): Si se puede comprar,

-) pero el monto disponible no se gasta todo;
-) pero no se cubriría todo el monto disponible;

No es posible comprar,

-) porque si compramos 29 unidades de A, con lo que queda al comprar unidades de B no gastaríamos todo el monto nos quedaría un sol;
-) porque si compramos esta cantidad entonces sobraría o faltaría dinero para la compra del otro artículo;
-) ya que gastaríamos S/. 87.00 y no podríamos comprar un número exacto de unidades de B;
-) porque solo se gastaría S/.87.00 y nos sobraría S/.273.00.

Pregunta 3): Si es posible comprar,

-) pero no se gasta todo el monto disponible;
-) pero tampoco cubriría todo el monto disponible

No es posible,

-) porque si compramos 89 unidades de B, con lo que nos queda se puede comprar una unidad de A pero nos sobraría S/1.00;

-) porque la cantidad que sobra no es dable para comprar un artículo de A porque sobraría y en 2 artículos faltaría;

-) porque gastaríamos S/. 356.00 y no se podría comprar un número exacto de unidades de A;

-) porque solo se gastaría S/. 356.00 y sobraría S/. 4.00 y al querer comprar un artículo de A nos sobraría 1 sol.

Pregunta 4): Las respuestas son similares a las que dan cuando trabajan individualmente.

Pregunta 5): Todos los grupos responden con la expresión que relaciona a las dos variables: $3x + 4y = 360$.

Pregunta 6): Algunos grupos despejan $y = \frac{360-3x}{4}$, otros despejan $x = \frac{360-4y}{3}$, así como también despejan las dos variables $y = \frac{360-3x}{4}$, $x = \frac{360-4y}{3}$

Pregunta 7): Algunos dejan en blanco, un grupo responde que si a x le damos un valor múltiplo de 4 obtendremos un valor exacto para y, otro grupo responde que x tiene que ser múltiplo de 4, otros grupos obtienen algunos pares ordenados (28,69), (12,81), (8,84), (24,72), (24,72), (80,30).

Pregunta 8): Los grupos han llenado las tablas de las siguientes maneras:

x	6	-	12	15	16	84			36
y	-	16	81	-	78	27			

x	6	48,6	10	15	86,6	84	81,3	32	36
y	85,5	16	82,5	78,7	25	27	29	66	63

x	6	no	20	15	60	84	30	25	36
y	no	16	75	no	45	27	no	no	63

x	6	no	8	15	20	84	31	44	36
y	no	16	84	no	75	27	no	57	63

x	6	132	10	15	16	84	20	60	36
y	no	16	no	no	28	27	75	45	63

En resumen, muchos responden sin considerar el contexto del enunciado de la situación que se presenta, con poca comprensión de sus contenidos. Así, las respuestas a las cuatro primeras preguntas son más analizadas y comentadas por ellos mismos, también determinan y manejan la expresión $3x + 4y = 360$, tienen dificultad en despejar la variable indicada, lo que se percibe que no diferencian la variable independiente y la dependiente.

En la dinámica de trabajo se analizaron preguntas y se discutieron posibles respuestas con las actividades programadas; y en algunos casos una orientación les guiaba a concebir la idea del concepto de función, produciéndose una reacción que transforma un objeto que se percibe como algo externo.

-) Ficha N° 02. Observación Grupal: ¿Qué está ocurriendo con la actitud de los integrantes de cada grupo?

Al inicio de las actividades no estaban muy habituados a trabajar en equipo, pues no se conocían bien, había falta de confianza, de sentimientos, de cooperación, de colaboración, etc. En algunos grupos, sus integrantes trabajaban solos sin compartir sus conocimientos dentro del grupo y, al pasar el tiempo, se daban cuenta que trabajando en equipo mejoraban sus aprendizajes.
Con la ficha N° 02, llenada por los coordinadores de los grupos al término de las actividades programadas, se muestra aspectos actitudinales observados en cada grupo según participación que tuvieron sus integrantes; cuyos resultados se resumen en el siguiente cuadro:

CUADRO 3

Aspectos a Observar	Siempre	A veces	Nunca
1. Respeta las ideas de las demás	35	05	00
2. Aporta y comparte conocimientos a la actividad programada	18	22	00
3. Aporta y comparte materiales	23	17	00
4. Cumple con la tarea asignada dentro del grupo	27	13	00

Fuente: Información proporcionada por los propios alumnos

En resumen: La mayoría ha respetado las ideas de los demás; a veces aportaron y compartieron conocimientos en las actividades, siempre aportaron y compartieron sus materiales y siempre cumplieron con la tarea asignada dentro del grupo. Siendo lo esencial el desarrollo del contenido temático y la participación de los integrantes de cada grupo en ese desarrollo, Brousseau denomina “la necesidad que cada integrante del grupo participe del proceso”.

A parte de los casos anteriores, hay muchas situaciones en nuestro entorno que relacionan dos variables, donde una depende de la otra. Presentamos algunas variables para completar con otras según criterios individuales o grupales:

a) El salario de un operario depende de_______________

b) La producción total de una fábrica depende de______________
c) El precio del transporte depende de _________________
d) El espacio que recorre Juan depende de ____________________
e) La presión atmosférica depende de__________________
f) El área de un rectángulo depende de ___________________
g) El volumen de un cilindro depende de_________________; etc.

Antes de iniciar el desarrollo de contenidos, se considera el caso que sigue para una actividad grupal y al término de 1 hora, cada grupo debe presentar un informe escrito de sus avances y conclusiones.

Caso D: De una lámina metálica de forma rectangular de 50 cm. de largo y 20 cm. de ancho, se quiere construir una caja sin tapa, cortando cuadrados de dimensiones iguales en las cuatro esquinas de la lámina y doblando los pliegues que quedan. Determinar el volumen o la capacidad de la caja resultante.

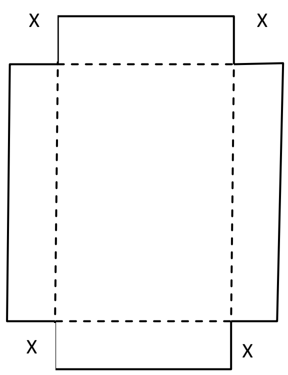
En el desarrollo de este caso, algunos grupos ensayaron con hojas de papel y observaron que el tamaño de la caja dependía del tamaño de las esquinas a cortar. Luego presentaron respuestas al caso, tales como:

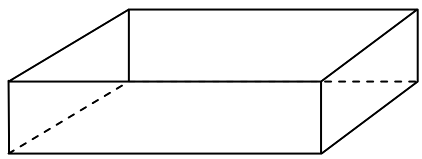
-) Cortando cuadrados de 5 cm de lado, la caja tendrá base de 50-10 = 40 cm por 20-10 = 10 cm y altura de 5 cm. Su volumen es: V = $40 \times 10 \times 5 = 2000$ cm^3.

-) Cortando cuadrados de 2 cm. de lado, queda la caja con base de 46 cm por 16 cm y su altura de 2 cm. Su volumen es: V = $46 \times 16 \times 2 = 1472$ cm^3.

-) Cortando cuadrados de 8 cm de lado, la caja tiene base de 34 cm por 4 cm y su altura de 8 cm. Su volumen es: V = $34 \times 4 \times 8 = 1088$ cm^3.
-) Luego, con la orientación del profesor, consideran: Cortando cuadrados de x cm de lado, resulta caja de base $(50 – 2x)$ cm por $(20 – 2x)$ cm y altura x cm; y su volumen es

   $V = (50 – 2x)$ cm $\times$ $(20 – 2x)$ cm $\times$ x cm $= (1000x – 140x^2 + 4x^3)$ cm^3, que depende de x.





En esta respuesta, no consideran los valores que puede tomar x. Comparando con los casos anteriores, consideran $0 < x < 10$; es decir, $x \in]0,\ 10[$.

Se aclara que este resultado se denota:
$V(x) = (50 - 2x)(20 - 2x)\,x = 1000x - 140x^2 + 4x^3$, para $x \in]0,\ 10[$; y significa: Tomando un valor $a \in]0,\ 10[$, el volumen se calcula reemplazando x por a en la expresión $V(x)$, esto es
$V(a) = 1000a - 140a^2 + 4a^3$,
efectuando luego las operaciones indicadas; cuyo resultado es único.

En la tabla, con algunos valores para x se tiene el volumen V de las cajas:

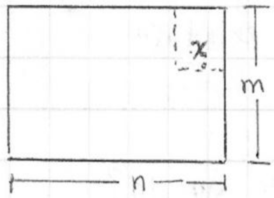
x (cm)	1	2	3	4	4.5	6	7	8	9	10	11..
V (cm^3)	864	1472	1848	2016	2029.5	1824	1512	1088	576	0	-616

Se les presenta las siguientes interrogantes:
- Si el lado del cuadrado es 0.45 cm. ¿Cuál es el volumen de la caja?
- ¿Podemos dar valores negativos a x?
- ¿Qué sucede si x asume valores mayores que 10?
- ¿Qué sucede si $x = 0$ o $x = 10$?

Al finalizar la actividad presentaron un informe de los resultados con sus análisis que hacen, como:

Grupo 01

OPINIONES:



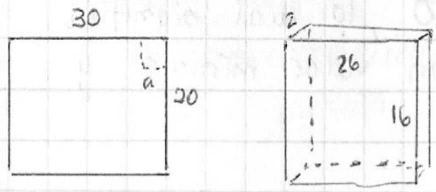
Para construir una caja de $m \times n$ dimensiones, debe cumplir lo sgt:

- $m > n \lor m < n$
- $m > n > x$

→ A mayor área, menor altura

Ejm:

- Si $x = 2$



$V = 26 \cdot 16 \cdot 2 = 832\ cm^3$.

$x = 5 \rightarrow V = 1000\ cm^3$

$x = 7 \rightarrow 672\ cm^3$

$x = 8 \rightarrow 448\ cm^3$

$x = 9 \rightarrow 216\ cm^3$.

∴ V = volumen

l = largo

a = ancho

h = altura

$V = h \cdot a \cdot l$

$V = x(50-2x)(20-2x)$

$V = 4x^3 - 140x^2 + 1000x$

x (cm)	1	2	3	4	4.5	6	7	8	9	10	11..
V (cm^3)	864	1472	1848	2016	2029.5	1824	1512	1088	576	0	-616

Cuestionario:

1º Si el lado del cuadrado es 0.45 cm. ¿Cuál es el V. de la caja?

$V = 4a^3 - 140a^2 + 1000a$

$V = 4(0.45)^3 - 140(0.45)^2 + 1000(0.45)$.

$V = 422.0145$

2: ¿Podemos dar valores negativos a "x"?

En la ecuación sí podemos reemplazar un x negativo, pero en la realidad el volúmen no existiría.

3: ¿Qué sucede si x asume valores mayores que 10?

El volumen es negativo por lo tanto no existe en la realidad.

4: ¿Qué sucede si $x=0$ o $x=10$?

Sus vólumenes son iguales a 0, lo cual significa que la ecuación alcanza un valor mínimo y un valor máximo.

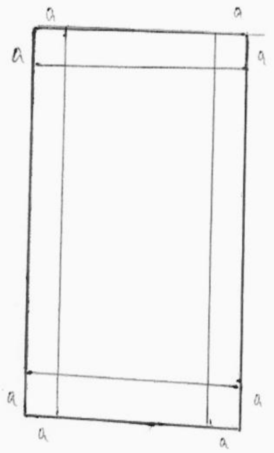
- Si el lado del cuadrado es 0.45 cm. ¿Cuál es el volumen de la caja?
- ¿Podemos dar valores negativos a x?.
- ¿Qué sucede si x asume valores mayores que 10?
- ¿Qué sucede si $x = 0$ o $x = 10$?

En el informe se observa que:

-) Construyeron cajas de diferentes tamaños, calcularon el volumen para la altura que le asignaron; es decir, el volumen en términos de su altura.

-) A las preguntas que se les presentó respondieron analizando en un contexto real, lo que permite apreciar que van teniendo más claro el concepto de función.

Grupo 02



$l = (50 - 2a)$ cm.

$A = (20 - 2a)$ cm.

$h = a$ cm.

$V = (50 - 2a)(20 - 2a)a.$

CONCLUSIONES.

✓ Hemos obtenido diferentes tamaños en las cajas, debido a que cada uno dio diferentes medidas para construir la caja, pues analizamos de forma diferente la información.

✓ Cuando dimos valores diferentes se obtuvo una caja rectangular.

✓ Cuando dimos valores iguales, nos resultó una caja cuadrada.

a (cm)	1	2	3	4	4.5	6	7	8	9	10	11..
V (cm^3)	864	1472	1848	2016	2029.5	1824	1554	1088	576	0	

Explicaron las formas de las cajas que ellos obtuvieron y determinaron el volumen para los valores indicados en la expresión que ellos consideraron.

Grupo 03

Medidas de la Caja Silva Girón.

Largo: 17,7

Ancho: 9 cm

Altura: 6 cm

$V = (17,7)(9)(6)\ cm^3$

$V = 955,8\ cm^3$

Largo: 19,70 cm Fernández Zapata.

Ancho: 11 cm

Altura: 5 cm

$V: 1083,5\ cm^3$

largo: 21.65 Sullón Chero

ancho: 13

Altura = 4

$V: 1125.80\ cm^3$

Largo: 15.7 Armijos Ruiz.

Ancho: 7

Altura: 7

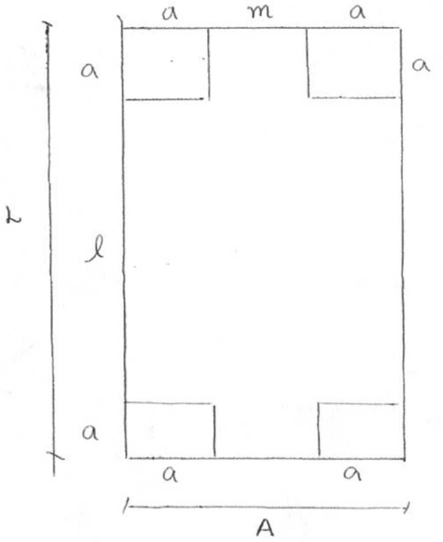
$Vo: 769.3\ cm^3$.

Cada uno, hizo las mediciones y construyó su caja, luego determinó su volumen y compararon sus resultados.

Grupo 04

Al construir las diferentes cajas se ha determinado:

Caja 1 : V_1: 4x4x22 : 352 cm^3
Caja 2 : V_2: 5x5x10 : 250 cm^3
Caja 3 : V_3: 7x7x16 : 784 cm^3



l : $L-2a$
m : $A-2a$
h : a

$V = (L-2a)(A-2a)a$

→ Si dimensiones hoja : 30 x 12

$V = (30-2a)(12-2a)a$

x (cm)	1	2	3	4	4.5	6	7	8	9	10	11..
V (cm^3)	280	416	432	352	283,5						

→ Si dimensiones hoja: 20 x 15

$V = (20-2a)(15-2a)(a)$

x (cm)	1	2	3	4	4.5	6	7	8	9	10	11..
V (cm^3)	234	352	378	336	297	144	42				

→ Si dimensiones hoja :

x (cm)	1	2	3	4	4.5	6	7	8	9	10	11..
V (cm^3)	526.3										

En este grupo, cada uno construyó su caja y determinó su volumen, luego llenó los espacios en blanco para el volumen según los valores asignados; y compararon sus resultados.

Grupo 05

Comentario :

- La medida de una caja, Tiene h= 7 , l= 7 , a = 7 y hallando el Volumen se obtiene :

$V = 7 . 7 . 7$

$V = 343\ cm^3$

- La medida de otra caja, Tiene l = 15.5 ; h= 7 ; a = 7

El Volumen será :

$V = 15.5 . 7 . 7$

$V = 759,5\ cm^3$

- La medida de otra caja, Tiene l : 14 , h = 7 , a = 7

el volumen será :

$V = 14 . 7 . 7$

$V = 686\ cm^3$

- La medida de otra caja, Tiene l : 7 ; h = 4 , a = 4

$V = 7 . 4 . 4$

$V = 56\ cm^3$

Los integrantes de este grupo construyeron su caja con las medidas asignadas por cada uno, luego comentaron el resultado del volumen que determinaron.

En conclusión: Cada grupo tuvo su manera de construir la caja sin tapa, lo que se percibe como acciones diversas al determinar el volumen de acuerdo a las medidas asignadas. Los integrantes de algunos grupos avanzaron en construir la caja y determinar el volumen, luego respondieron a las interrogantes planteadas; mientras que otros grupos dilataron el tiempo en la discusión de las medidas y no les alcanzó el tiempo para responder a las interrogantes, según los informes que presentaron del trabajo realizado.

-) Ficha N° 06. La coevaluación en el proceso de aprendizaje:

Esta evaluación es aplicada en los grupos de trabajo: Cada integrante de grupo llena la ficha Nº 06 de acuerdo al desempeño de cada integrante después de haber concluido la actividad del caso D. Los resultados de la coevaluación se resume en el siguiente cuadro:

CUADRO 4

CURSO: **GRUPO:** **ESPECIALIDAD**			
Aspectos Observados	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
1. Analiza la situación problemática que se le presenta.	19	21	00
2. Construye la caja sin tapa con las medidas que él asigna.	27	13	00
3. Responde correctamente a las preguntas que se le formula.	20	17	03
4. Obtiene una expresión que le permita determinar el volumen	29	11	00
5. Halla el volumen de la caja de acuerdo a las medidas asignadas.	31	07	02
6. Determina el menor y mayor valor numérico para la altura de la caja.	19	18	03
7. Explica el proceso que siguió para construir la caja sin tapa.	26	14	00

Fuente: Información proporcionada por los propios alumnos

En este cuadro se resume que la mayoría cumplieron con los aspectos observados.

En conclusión, la coevaluación en el proceso de aprendizaje orienta a la reflexión y valoración de los aprendizajes logrados en los grupos. Así como la mayoría a veces analizan la situación problemática que se le presenta y considerando el análisis del diagnóstico real que se hizo, la formalización de situaciones, permiten comprender el problema en una situación real. También es importante la toma de conciencia de cómo lograron sus progresos (Ballester, 2008) y las relaciones interpersonales de los integrantes de grupo.

3.3.2. DESARROLLO DE CONTENIDOS:

3.3.2.1. IDEA INTUITIVA DE UNA FUNCIÓN:

Del caso A:

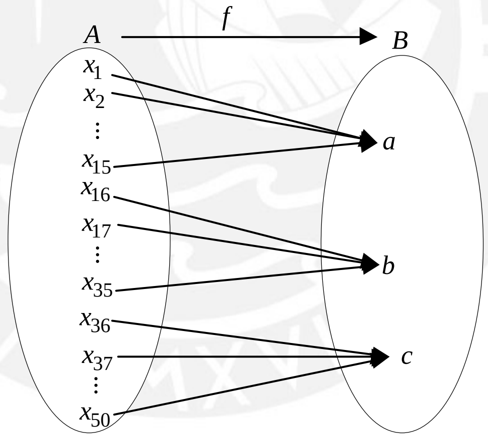
Si A es el conjunto de 50 alumnos, *B* es el conjunto de tres colores de camisas (azul, blanca y celeste) y *C* es el conjunto de los códigos de los alumnos.

Se analiza la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, individualmente:

-) A cada alumno le corresponde un único color de camisa; esto es, a cada x de A le corresponde un único y de B.

Es verdad, pues mirando a cada alumno se comprueba que tiene un determinado color de camisa: azul, blanca o celeste; es decir, a cada alumno le asignamos el único color de camisa que lleva.

En tal situación, gráficamente la correspondencia denotamos por f y la asignación a x le corresponde y se representa por flechas: $x \to y$, y se tiene:

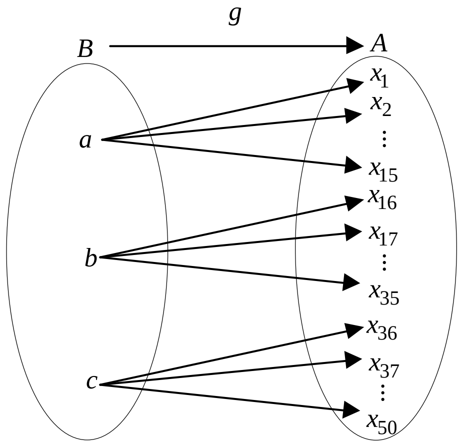


-) A cada color de camisa le corresponde un único alumno.

Además, ¿Cómo se expresa esta afirmación, relacionando elementos de A con elementos de B? y ¿cómo se representa por flechas?

Es falsa, pues hay varios alumnos con el mismo color de camisa; esto es, como los colores son a, b o c, es fácil observar que hay 15 alumnos con camisa de color a, 20 con color b y 15 con color c; es decir, al color a se le asigna 15 alumnos, a b se le asigna 20 y a c se le asigna 15 alumnos.

Gráficamente, tal correspondencia denotamos por g y la asignación de que a un color z le corresponde el alumno a, representamos por flechas: $z \to a$; y se tiene:



De estas dos situaciones, la correspondencia *f*, como el proceso de asignar o hacer corresponder a cada alumno el color de camisa que lleva puesto, es único; y se dice que *f* define o es una función de *A* a *B*. En cambio, la correspondencia *g* de asignar a cada color un alumno que lleva puesto dicho color, que hay varios, no define o no es una función de *B* a *A*.

-) Encuentre una expresión que relacione elementos de *A* con elementos de *C*, y viceversa. Además, representar cada expresión usando flechas.

Del caso B:

Si *M* es el conjunto de meses de Enero del 2000 hasta setiembre del 2002 y *P* el conjunto de precios en nuevos soles por kilogramo.

-) Expresar *M* y *P* en términos de sus elementos.

Observando la gráfica, analiza la verdad de las siguientes afirmaciones:

-) A cada mes desde enero del 2000 a setiembre del 2002 o elementos de *M*, le corresponde un único precio o elemento de *P*; es decir, esta correspondencia define o es una función de *M* a *P*.

-) A cada precio o elemento de *P* no le corresponde un único mes o elemento de *M*; es decir, esta correspondencia no define una función de *P* a *M*.

Haga un bosquejo de representar por flechas las situaciones anteriores.

Del caso C:

Si *X* es el conjunto de las cantidades de artículos de A e *Y* es el conjunto de las cantidades de artículos de B, que pueden comprarse.

-) ¿Quiénes son los elementos de los conjuntos *X* e *Y*, respectivamente?

-) Se afirma: Para cada cantidad de artículos A que se compra se le asigna o hace corresponder una única cantidad de artículos de B, gastando 360 nuevos soles.

Analice si esta afirmación es verdad y compruebe con algunos resultados; luego, determine si tal correspondencia es una función de X a Y.

En el estudio del caso C, se ha determinado la expresión $3x + 4y = 360$, de donde $y = 90 - \frac{3}{4}x$, para x en X. ¿Qué indica o significa esta expresión?; y si se despeja x, ¿qué expresión resulta y qué indica?

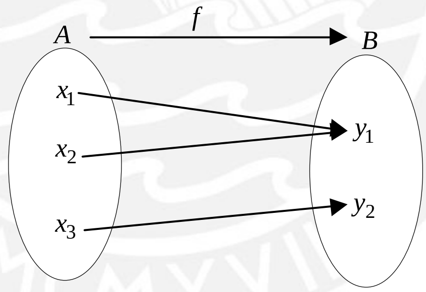
Represente por flechas, las correspondencias dadas por las expresiones obtenidas.

3.3.2.2. DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN:

Generalizando los casos anteriores: Dados los conjunto A y B; una función f de A a B, es una propiedad , una regla o una correspondencia que a cada elemento x de A le asigna o le hace corresponder un único elemento y de B, llamado el valor de x por f o la ***imagen*** de y por f y se denota $y = f(x)$.

Esto es, "f es una función de A a B" significa o equivale a decir que "Para cada x de A, hay o existe un único y de B tal que $y = f(x)$"

En forma gráfica, representamos:



Donde, $y_1 = f(x_1)$, $y_1 = f(x_2)$, $y_2 = f(x_3)$, etc.

Notación: Una función f de A a B se denota por:

$f : A \rightarrow B \;/\; y = f(x)$.

Se lee: "f es la función de A a B, definida por la **regla de correspondencia** $y = f(x)$", siendo A el **conjunto de partida** o **Dominio** de f y B el **conjunto de llegada** de f.

Ejemplo 1.

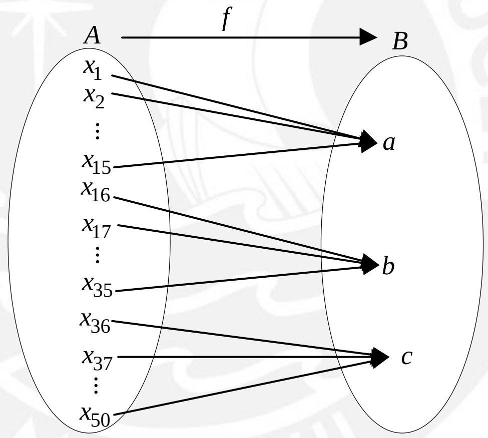
a) Las expresiones que resuelven los casos C y D:

$y = 90 - \frac{3}{4}x$ y $V(x) = 1000x - 140x^2 + 4x^3$, definen funciones de A a **R**. Halle el dominio A para cada caso.

b) La ecuación $y = x^2$ define una función f de **R** a **R**, pues cada x en **R,** de los números reales**,** tiene cuadrado único $y = f(x) = x^2$.

Algunas correspondencias son: $1 \to 1^2 = 1$ o $f(1) = 1$; $2 \to 2^2 = 4$ o $f(2) = 4$; $2{,}5 \to (2{,}5)^2 = 6{,}25$ o $f(2{,}5) = 6{,}25$; $-\frac{1}{4} \to \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ o $f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$; $-\frac{2}{5} \to \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ o $f(-\frac{2}{5}) = \frac{4}{25}$, etc.

c) La correspondencia f del caso ***A***: A cada alumno le corresponde el color de la camisa que lleva, es una función f de A a B, representada por la gráfica sagital:



En donde**:** $f(x_1) = f(x_2) = a$; $f(x_{16}) = f(x_{35}) = b$; $f(x_{35}) = f(x_{50}) = c$; etc. ¿Cómo se leen?

Observación 1: Para definir una función f, hay que considerar tres elementos: Un conjunto de partida A o **dominio** de la función (es conocido), un conjunto de llegada B (suficientemente grande) y la **regla de correspondencia** $y = f(x)$.

En adelante, tendremos $A \subset$ **R** y $B =$ **R**, y la regla de correspondencia $y = f(x)$; por lo que diremos: "f es una **función real**, con **variable independiente** x y **variable dependiente** y". En otros casos, la función f será definirla por la regla de correspondencia $y = f(x)$, entendiendo que A está formado por todos los x en **R** tal que $y = f(x)$ está también en **R**.

3.3.2.3. DOMINIO Y RANGO O IMAGEN DE UNA FUNCIÓN:

Dada la función f: A $\rightarrow$ B**,** $y = f(x)$;

-) Al conjunto A se llama el **dominio** de f y se denota A = Dom(f), que es el conjunto de todos los x en **R** tal que $f(x) = y$ está en el conjunto $B \subset$ **R**.

Para conocer A, se tiene la siguiente interrogante:
¿Para qué x en **R**, los valores $y = f(x)$ están en B?; es decir, hallar los $x \in$ **R** tal que $f(x) = y \in B$.

Se tiene: $A = \{x \ / \ x \in \mathbf{R}$ y $f(x) = y \in B\}$

-) El **Rango** de la función f es el conjunto denotado por Ran(f) $\subset B$, de todos los $y \in B$ tal que $y = f(x)$, para x en A.

Para conocer Ran(f), se responde a la interrogante: ¿Para qué $y \in B$, existe x en A tal que $y = f(x)$?; es decir, hallar $y \in$**R** tal que existe x en A con $f(x) = y \in B$.

Se tiene: Ran (f) = $\{y \ / \ f(x) = y \in B$, para x en $A\} = \{ f(x) \ / \ x \in A\}$

Por lo anterior, para hallar el rango de una función hay que hallar los valores $f(x)$, para x en A, recordando las propiedades de los números reales.

Ejemplo 2.

En el **caso C**, compra de los artículos A y B con S/. 360, se obtiene la expresión $3x + 4y = 360$; de donde $y = 90 - (3/4)x$, define una función f dada por la regla de correspondencia $y = f(x) = 90 - (3/4)x$, con x e y cantidades enteras no negativas, o sea x e y en **N**, x múltiplo de 4 e $y \geq 0$, esto es $90 - ¾ x \geq 0$ o $3x \leq 360$, y resulta $x \leq 120$. Por lo tanto, x es múltiplo de 4 , $0 \leq x \leq 120$ en **N**.

Dom(f) =$\{x \ / \ x \in \mathbf{N}$, x es múltiplo de 4 y $0 \leq x \leq 120\} = \{0, 4, 8, 12, .., 120\} = A$.
También, de $3x + 4y = 360$ se tiene $x = 120 - (4/3)y$, en donde y es múltiplo de 3, con $x \geq 0$, $120 - (4/3)y \geq 0$, $360 - 4y \geq 0$ o $y \leq 90$.

Luego,

$$\text{Ran}(f) = \{y \ / \ y \in \mathbf{N},\ y \text{ es múltiplo de 4 y } 0 \leq y \leq 90\}$$
$$= \{ f(0),\ f(4),\ f(8), \ldots\ldots,\ f(120)\} = \{0, 4, 8, 12, \ldots\ldots., 90\}$$

En el caso **D**, la expresión $V(x) = 1000x - 140x^2 + 4x^3$, define una función con dominio]0 , 10[y ¿cuál se su rango?.

3.3.2.4. CALCULO DE VALORES DE UNA FUNCIÓN:

Dada una función f definida por la regla de correspondencia $y = f(x)$ y con dominio $A \subset$ **R**, para tener el rango de f se hallan los valores $f(x)$, para cada x en A; es decir, reemplazando cada x de A en $f(x)$ se obtienen los valores de f. El conjunto de todos estos valores es el rango de f.

En los siguientes ejemplos, para ser desarrollados en grupos o individualmente, hallaremos los valores que toma $f(x)$, para algunos valores de la variable x en A:

Ejemplo 3.

a) Dada la función f definida por $f(x) = 2x - 3$, con x en **R; c**alcular:

i) $f(0)$; **ii)** $f(-2)$; **iii)** $f(2/3)$; **iv)** $f(p)$; v) $f(p+2)$; **vi)** $f(p+h)$.

Remplazando valores de la variable independiente x de **R** por el valor considerado 0, -2, 2/3, p, $p + 2$, $p + h$, respectivamente, en la expresión $f(x) = 2x - 3$, efectuando las operaciones, se tienen:

i) $f(0) = 2(0) - 3 = -3$; **ii)** $f(-2) = 2(-2) - 3 = -7$;

iii) $f(2/3) = 2(2/3) - 3 = 4/3 - 3 = -5/3$; **iv)** $f(p) = 2(p) - 3 = 2p - 3$;

v) $f(p+2) = 2(p+2) - 3 = 2p + 1$; **vi)** $f(p+h) = 2(p+h) - 3 = 2p + 2h - 3$.

b) Para el caso **D** se tiene $V(x) = 1000x - 140x^2 + 4x^3$, con x en $]0 \ , \ 10[$. Hallar $V(1)$, $V(5)$ y $V(8)$.

Se tiene: $V(1) = 1000(1) - 140(1^2) + 4(1^3) = 864$;
$V(5) = 1000(5) - 140(5^2) + 4(5^3) = 5000 - 3500 + 500 = 2000$;
$V(8) = 1000(8) - 140(8^2) + 4(8^3) = 8000 - 8960 + 2048 = 1088$;

3.3.2.5. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN:

En el **caso B**, presentamos la gráfica de una situación para analizar la relación del precio del limón en determinados meses de un cierto año, y ha permitido visualizar tales relaciones de alzas y bajas de los precios. Se aprecia que el precio varía o cambia según el mes correspondiente; es decir, el precio depende o está en función del mes. Por ello, esta gráfica define o representa una función o, simplemente, es la gráfica de la función precio.

Recordando la ubicación de puntos en un plano cartesiano rectangular por pares ordenados, las propiedades de una función se puede analizar o determinar a través de la gráfica de dicha función: Dada una función $y = f(x)$ con dominio $A \subset$ **R**, si para x_0 en A se tiene su valor $y_0 = f(x_0)$ en **R**, se forma el par ordenado (x_0 , y_0), que en un sistema cartesiano rectangular del plano, $\mathbf{R}^2$, representa un punto P_0, se denota por $P_0(x_0 , y_0)$ o $P_0 = (x_0 , y_0)$ y se lee: "el punto P_0 de abscisa x_0 y ordenada y_0". Si esto se trabaja con cada x de A, se tiene el conjunto de pares ordenados y que en el plano cartesiano es un conjunto de puntos o figura:

$\{(x , f(x)) \in \mathbf{R}^2 / x \in A\} = \{(x , y) \in \mathbf{R}^2 /\ y = f(x),\ x \in A\} \subset \mathbf{R}^2$**.**

Que llamaremos **gráfica de la función** f o **representación gráfica de la función** f, que denotaremos por Gr(f); esto es:

$$\mathrm{Gr}(f)=\{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 / x \in A\} = \{(x , y) \in \mathbf{R}^2 /\ y = f(x),\ x \in A\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Ejemplo 4.

En el **caso B**, la representación gráfica es la poligonal presentada y observando dicha figura se puede apreciar las variaciones de los precios (alzas y bajas) durante el periodo indicado.

También, en el **caso C**, de la expresión $3x + 4y = 360$ se tiene la función f dada por $y = f(x)= 90 - (3/4)\ x$, con x múltiplo de 4 y $0 \le x \le 120$ en **N**; obteniéndose la tabla de valores que definen los puntos (x, y) del plano:

x	0	4	8	12	16	20	24	……	120
y	90	87	84	81	78	75	72	……	0

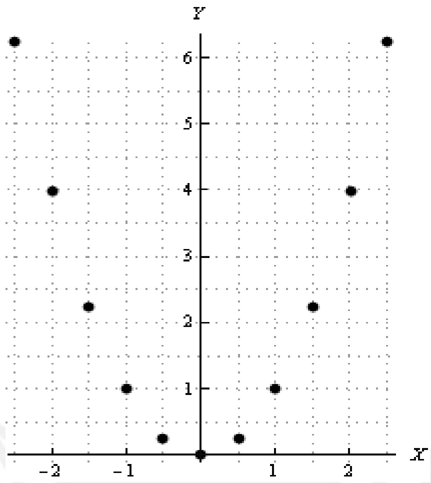
Su gráfica es:

Ejemplo 5.

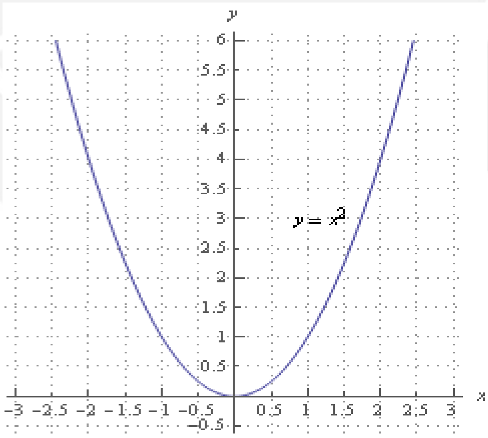
Dada la función real f cuya regla de correspondencia es $f(x)= x^2$, para x en **R**; si consideramos algunos valores de x y sus correspondientes valores $f(x)$, que presentamos en la siguiente tabla:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	–0,5	–1	–1,5	–2	–2,5
$f(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	0,25	1	2,25	4	6,25

Se tiene los siguientes pares ordenados o puntos en el plano cartesiano: (0 , 0); (0,5 , 0,25); (1 , 1); (1,5 , 2,25); (2 , 4); (2,5 , 6,25); (–0,5 , 0,25); (–1 , 1); (–1,5 , 2,25); (–2 , 4); (–2,5 , 6,25), etc. los cuales ubicamos en el plano de coordenadas rectangulares, como sigue:

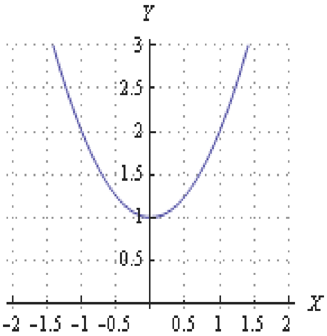


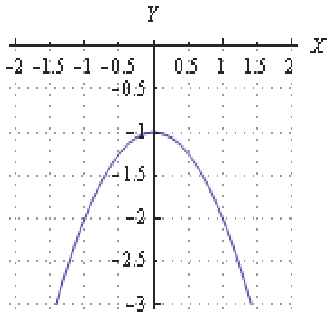
En un contexto más general, la gráfica de *f* consiste en todos los puntos (x, y) del plano cartesiano tal que $y = f(x)$ donde x está en dominio de f. En tal caso, la gráfica de la función $f(x)= x^2$, para x en **R**, tiene la siguiente representación:

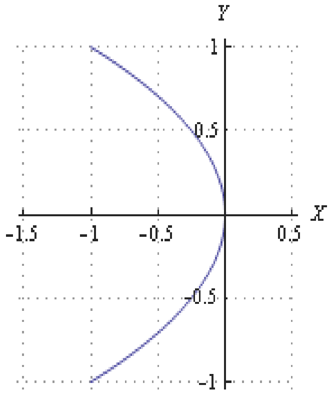


Ejemplo 6: ¿Cuáles de las siguientes figuras define una función?

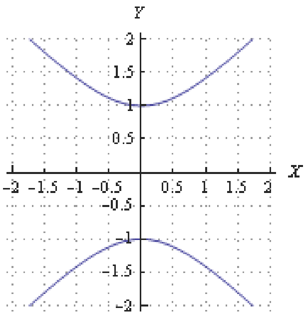
a) **b)** **c)**

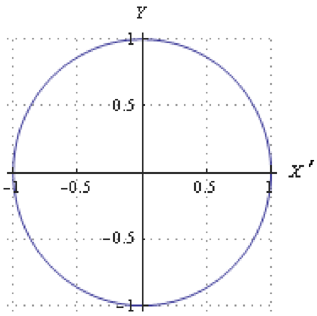


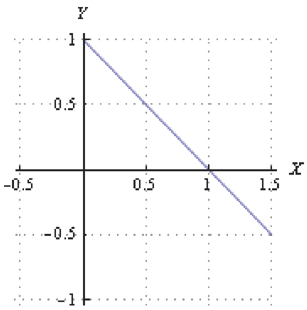




d) **e)** **f)**







Recordar que en una función $y = f(x)$, con x en $A \subset \mathbf{R}$; a cada x de A se le hace corresponder un único y en **R.** De esto, para x dado en $A \subset X$, trazando una recta vertical (paralela al eje Y) por x que intercepte a la figura o gráfica en un único punto (x, y) se determina que y es el valor de x por f. Por lo tanto, una figura define o representa una función si al trazar cualquier recta vertical que intercepta a la figura, lo hace en exactamente un punto. En otro caso, si hay alguna recta vertical que intercepte a la gráfica en dos o más puntos, dicha gráfica no define una función.

Según lo anterior, las figuras o gráficas **a)**, **b)** y **f)** definen funciones.

-) Prueba 01: Evaluación de Proceso. ¿Cuánto han aprendido del tema?

Al terminar el desarrollo de los conceptos básicos de funciones reales, consideramos pertinente tomar la evaluación de proceso de este tema, usando el mismo instrumento de la evaluación de entrada para determinar los avances de su aprendizaje y luego pasar al tema de la Función Real Lineal. De los resultados obtenidos se tiene:

Pregunta 1): Se pide definir términos

Entre algunos desarrollos se tiene:

1) a)

b) función es aquel que tiene un punto de partida y sólo un punto de llegada, pero, un punto de llegada puede tener varios puntos de partida.

c) El domenio y el rango son las partes de una funcion, dondo el dominio es el punto de partido y el Rango el punto de llegada ejm: $f(x)=(2;3)$ Dominio: (2) Rango: (3)

---

① Definir los sgtes términos.

a): Relación Binaria: Son las posibilidades de obtener pares ordenados a traves de dos grupos de elementos.

b): función: Es la relacion que existe entre los elementos de las "X" y los "Y" (Dominio y Rango).

c): Dominio y Rango: El dominio es el nombre asignado al eje de las "X" positivas y negativas, y el Rango al eje de las "y", positivas y negativas.

---

① a) Relación Binaria: Surge esta expresión cuando en una función, va a estar formado por pares ordenados, donde se relacionan dos conjuntos, solo los pares que satisfacen la ecuación forman la relación Binaria de un Dominio y Rango

b) Función. Una función son todos los valores, pares ordenados que satisfacen a una ecuación correspondiente determinado por x e Y

Por ej: $F(x)=2x+3$

c) Dominio: Son los elementos ~~de origen~~ del primer conjunto que no pertenecen al segundo conjunto, conocidos como Pre-Imagen

Rango: Son los elementos del segundo conjunto o Imagen, o elementos de llegada EJ. A (a, b) → B (1, 2) Dominio Rango

1.- A) RELACION BINARIA: Es la relación de 2 conjuntos en que se dan por pares ordenados.

B) FUNCIÓN: sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ entonces llamamos función de A en B ("A" conjunto de partida y "B" conjunto conjunto de llegada) a todo elemento de "A" asociado a un elemento o varios del conjunto "B", más no así, un elemento de "B" no puede relacionarse con un elemento del conjunto "A" mas de una sola vez (par ordenado), si esto sucediera ya no sería una función, si no una Relación de A en B, esto se define que toda función es una relación pero no toda relación es función $\Rightarrow$ una función de A en B sería $F(A \to B) = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

C) DOMINIO Y RANGO: El dominio son los elementos de las primeras componentes, y el rango son los elementos de las segundos componentes de los pares ordenados.

1)

a) Relación Binaria.

una relación de A en B se dice que es binaria si y solo si ∃ un elemento que pertenece a A y ∃ un elemento que pertenece a B.

denotado. $R: A \to B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$

b) Función

se dice que una relación es una función cuando del conjunto de partida sale una sola flecha de cada elemento o ninguna.

c) Dominio.

El dominio de una función son todos los elementos que intervienen en la función y que pertenecen al conjunto de llegada.

d) Rango.

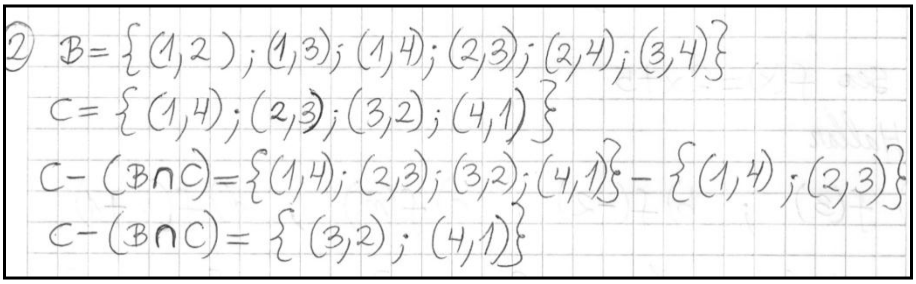
son todos los elementos activos en la función o mejor dicho que intervienen en la relación o tambien diremos que son la imagen de los elementos del conjunto de ~~llegada~~ partida.

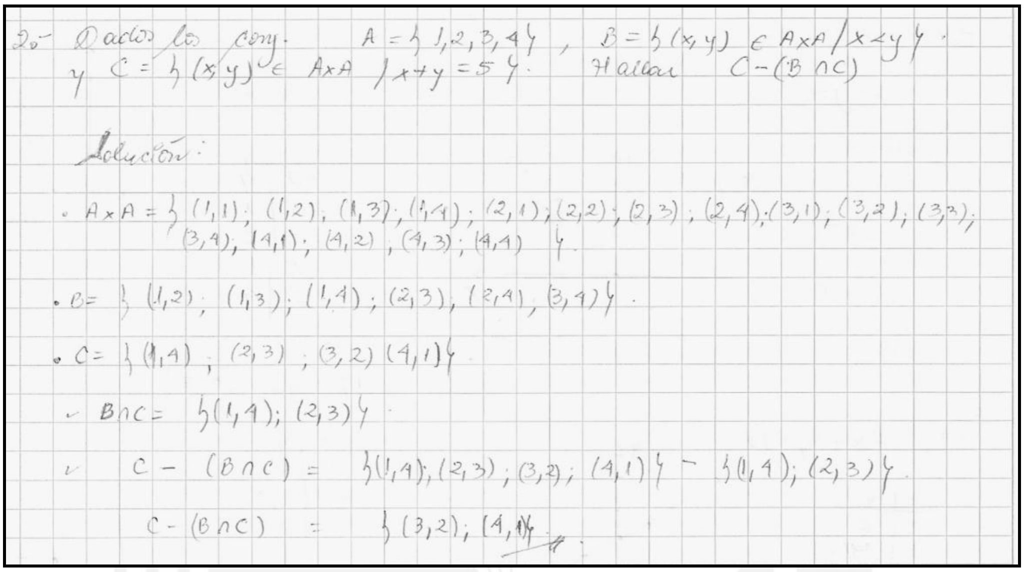
-) La mayoria responden con más precisión y formalidad; es decir, muestran tener más claro los conceptos de relación, función, dominio y rango de una función.

-) Falta consolidar y afianzar más con el manejo y aplicación de tales conceptos.

Pregunta 2): Cálculo de elementos y operaciones entre conjuntos

Se tiene algunas respuestas.


② $B=\{(1,2);(1,3);(1,4);(2,3);(2,4);(3,4)\}$
$C=\{(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)\}$
$C-(B\cap C)=\{(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)\}-\{(1,4);(2,3)\}$
$C-(B\cap C)=\{(3,2);(4,1)\}$


2.- Dados los conj. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{(x,y)\in A\times A / x<y\}$ y $C=\{(x,y)\in A\times A / x+y=5\}$. Hallar $C-(B\cap C)$

Solución:

• $A\times A=\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}$.

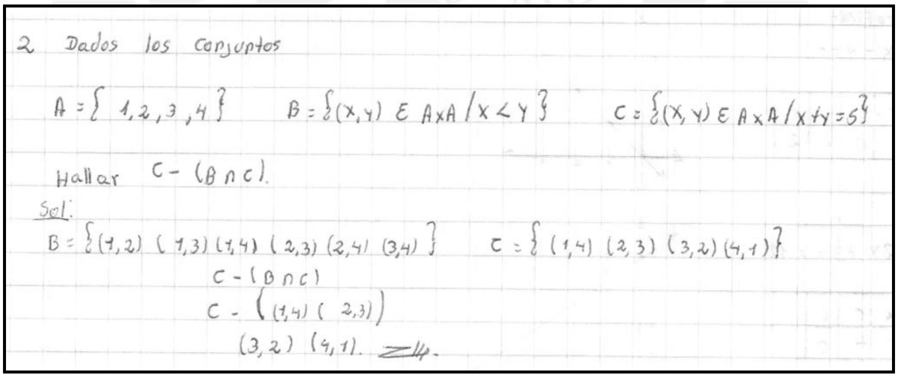
• $B=\{(1,2);(1,3);(1,4);(2,3);(2,4);(3,4)\}$.

• $C=\{(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)\}$

• $B\cap C=\{(1,4);(2,3)\}$

• $C-(B\cap C)=\{(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)\}-\{(1,4);(2,3)\}$.

$C-(B\cap C)=\{(3,2);(4,1)\}$ //.


2 Dados los conjuntos

$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{(x,y)\in A\times A / x<y\}$ $C=\{(x,y)\in A\times A / x+y=5\}$

Hallar $C-(B\cap C)$.

Sol:

$B=\{(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (2,3)\ (2,4)\ (3,4)\}$ $C=\{(1,4)\ (2,3)\ (3,2)\ (4,1)\}$

$C-(B\cap C)$

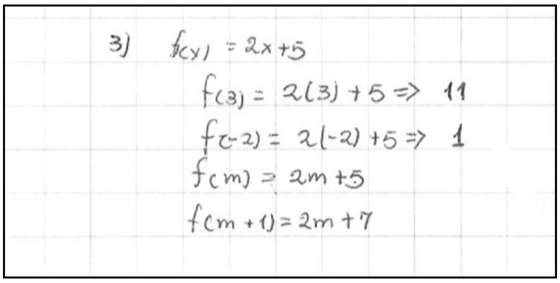
$C-((1,4)\ (2,3))$

$(3,2)\ (4,1)$.

-) Los cálculos son más precisos, las respuestas de la mayoría van mejorando considerando el producto cartesiano A×A para formar los conjuntos B y C y efectuar las operaciones indicadas.

-) Los que han desarrollado la prueba están en una comprensión acertada y más seguros de sus procesos.

Pregunta 3): Cálculo de valores de una función
Se tiene algunos desarrollos.



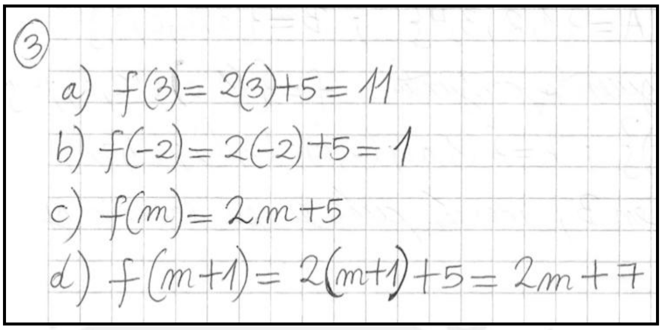
3) $f(x) = 2x+5$

$f(3) = 2(3)+5 \Rightarrow 11$

$f(-2) = 2(-2)+5 \Rightarrow 1$

$f(m) = 2m+5$

$f(m+1) = 2m+7$



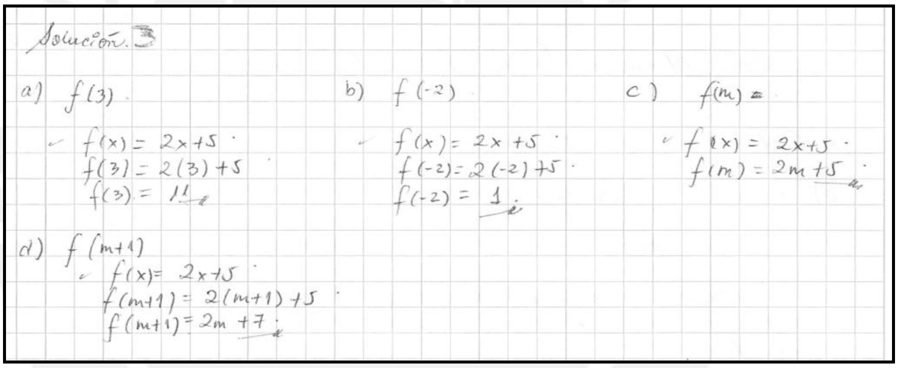
3

a) $f(3)=2(3)+5=11$

b) $f(-2)=2(-2)+5=1$

c) $f(m)=2m+5$

d) $f(m+1)=2(m+1)+5=2m+7$



Solución 3

a) $f(3)$

$f(x)=2x+5$

$f(3)=2(3)+5$

$f(3)=11$

b) $f(-2)$

$f(x)=2x+5$

$f(-2)=2(-2)+5$

$f(-2)=1$

c) $f(m)=$

$f(x)=2x+5$

$f(m)=2m+5$

d) $f(m+1)$

$f(x)=2x+5$

$f(m+1)=2(m+1)+5$

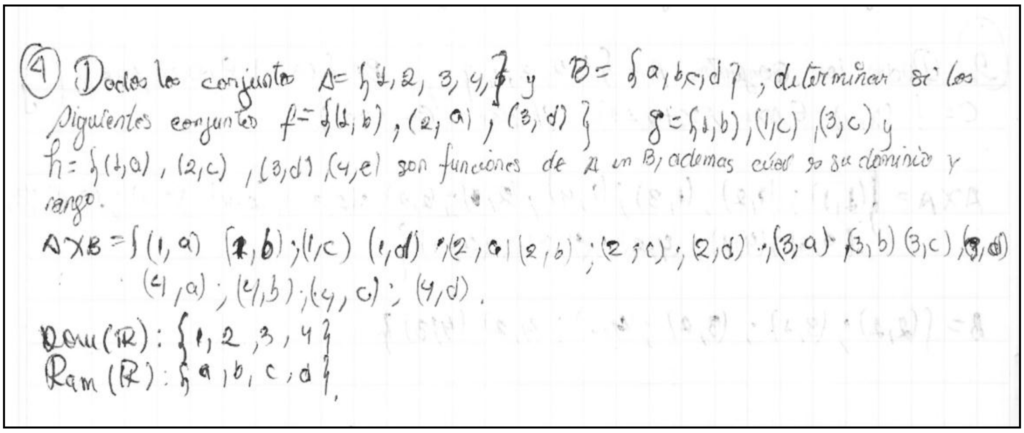
$f(m+1)=2m+7$

-) La mayoría contesta correctamente a esta pregunta.

-) Toman conciencia en los procesos que realizan y demuestran que utilizan algoritmos para los valores dados en la función y en las operaciones.

Pregunta 4): Se pide que determinen si los conjuntos f, g y h son funciones de A en B

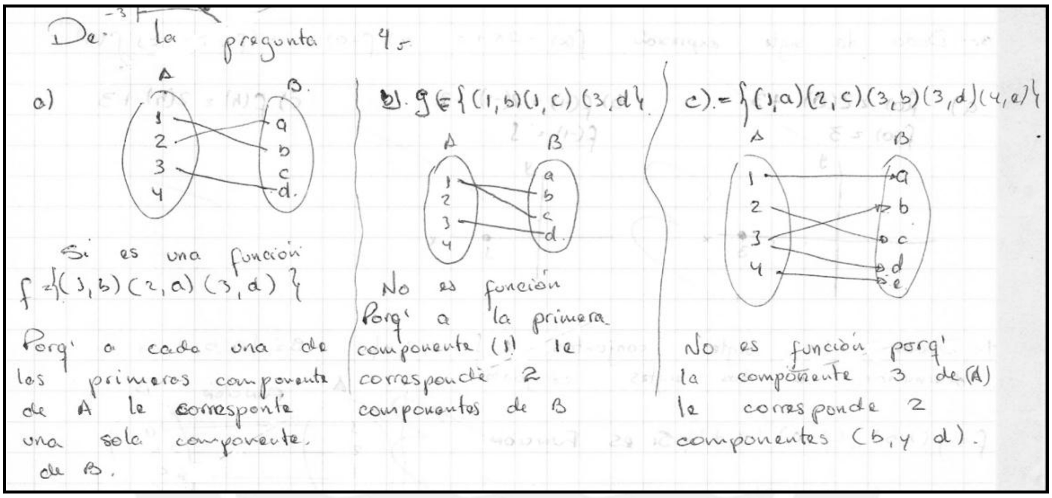
Entre algunas respuestas se tiene.



(4) Dados los conjunto A= {1, 2, 3, 4} y B= {a, b, c, d}, determinar si los siguientes conjuntos f= {(1,b), (2,a), (3,d)} g= {(1,b), (1,c), (3,c)} y h= {(1,a), (2,c), (3,d) (4,e)} son funciones de A en B, ademas cuál es su dominio y rango.

A×B = {(1,a) (1,b); (1,c) (1,d); (2,a) (2,b); (2,c); (2,d); (3,a) (3,b) (3,c) (3,d) (4,a); (4,b); (4,c); (4,d).

Dom (R): {1, 2, 3, 4}
Ran (R): {a, b, c, d}.

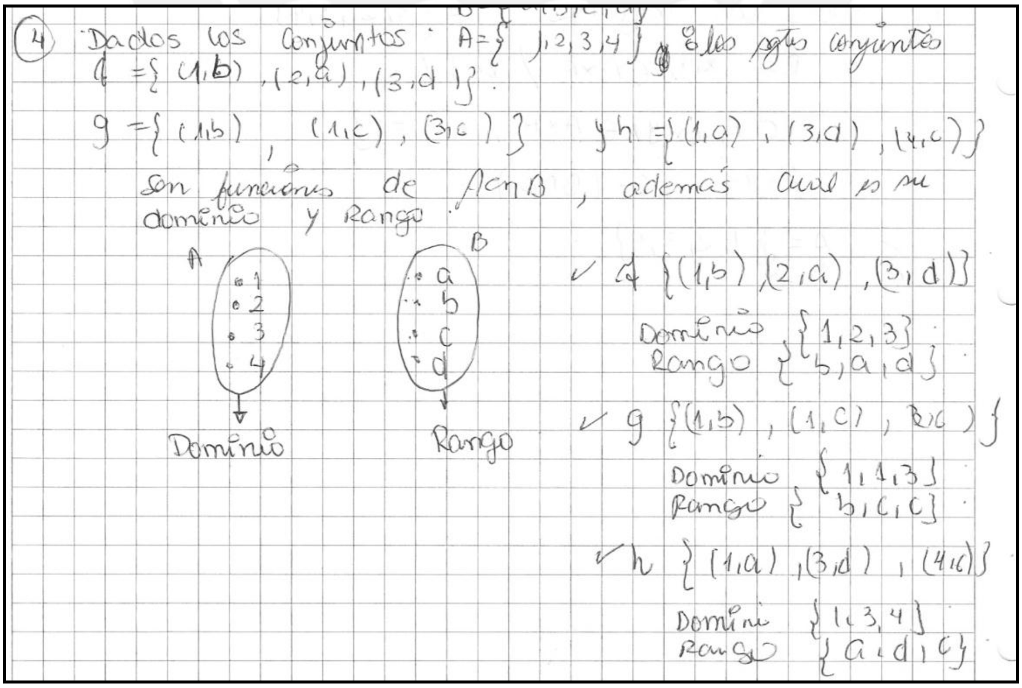


De la pregunta 4.

a) Si es una función f {(1,b) (2,a) (3,d)} Porq' a cada una de los primeros componente de A le corresponde una sola componente de B.

b). g ∈ {(1,b)(1,c) (3,d)} No es función Porq' a la primera componente (1) le corresponde 2 componentos de B

c). = {(1,a)(2,c)(3,b)(3,d)(4,e)} No es función porq' la componente 3 de (A) le corresponde 2 componentes (b, y d).



(4) Dados los conjuntos A={1,2,3,4} y los sgtes conjuntos f={(1,b),(2,a),(3,d)}. g={(1,b),(1,c),(3,c)} y h={(1,a),(3,d),(4,c)} son funciones de A en B, además cual es su dominio y Rango.

Dominio Rango

f {(1,b),(2,a),(3,d)}
Dominio {1,2,3}
Rango {b,a,d}

g {(1,b),(1,c),(3,c)}
Dominio {1,1,3}
Rango {b,c,c}

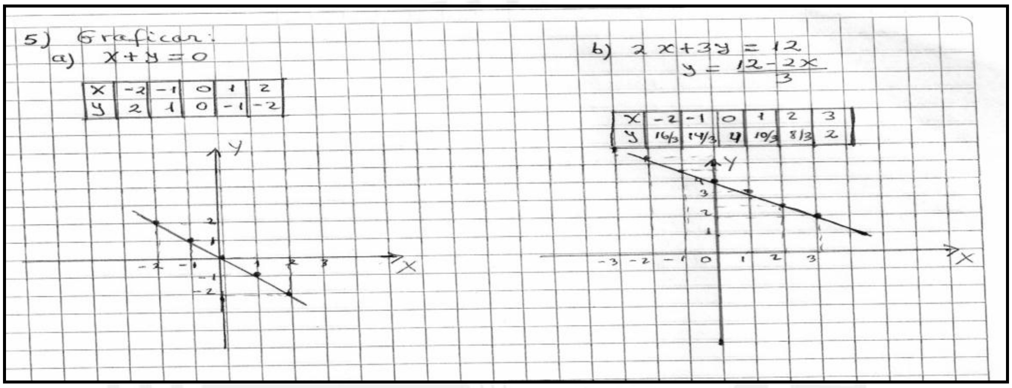
h {(1,a),(3,d),(4,c)}
Dominio {1,3,4}
Rango {a,d,c}

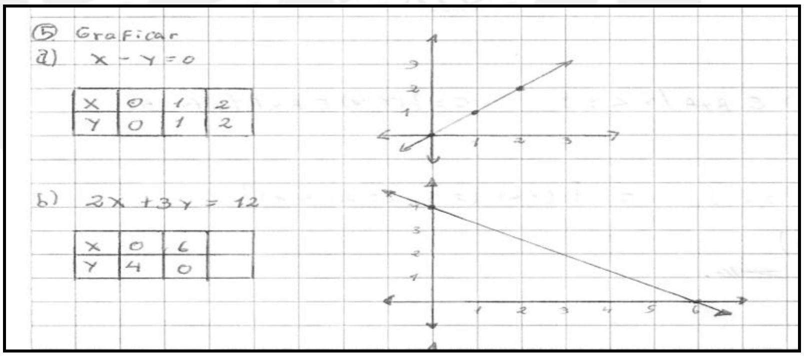
-) Pocos son los que dejan sin responder, la mayoria de los alumnos tratan de explicarlo pero con algunas dificultades. No se le pide el producto cartesiano, pero a través de ello encuentran dominio y rango con dificultad en la notación ya que escribe Dom(R) y Ran(R) y no de las funciones; en otros, no aplica la regla de correspondencia en las graficas y no determina dominio y rango de las funciones pero si explica que los conjuntos dados son o no funciones.

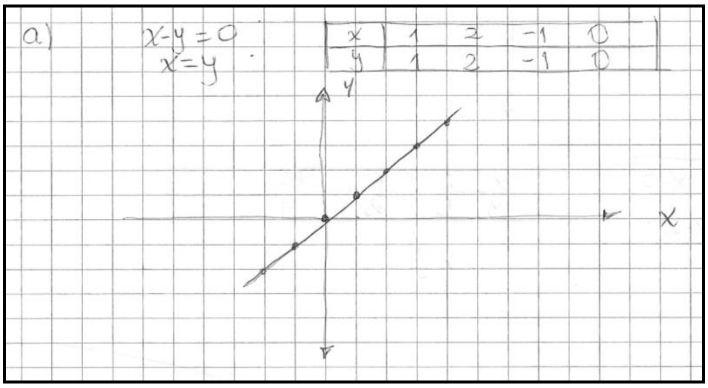
-) Han mejorado con respecto a la evaluación de entrada pero les falta interiorizar notaciones matemáticas de funciones al momento de escribir sus respuestas, simplemente estaría en una concepción de acción.

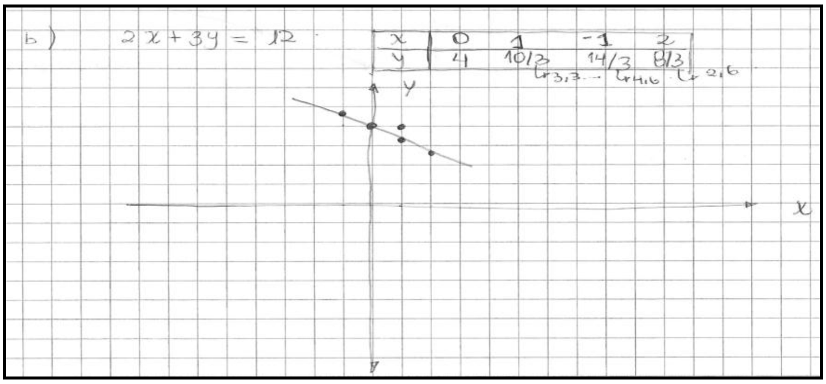
Pregunta 5): Se pide que grafiquen algunas ecuaciones

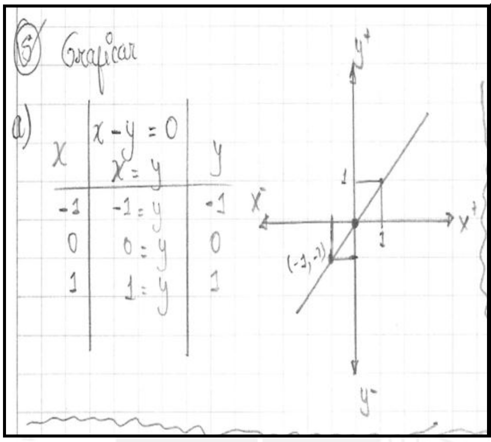
Entre algunas respuestas se tiene:

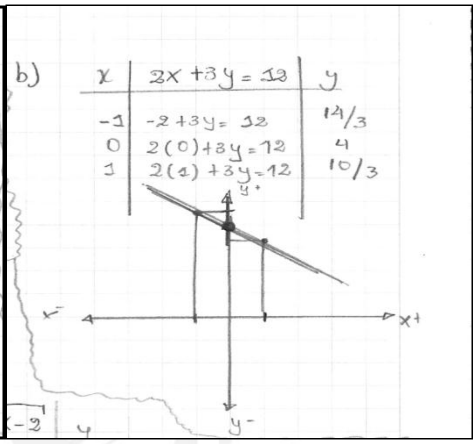












-) La mayoria responden con más precisión y lo hacen de diferentes maneras la gráfica de la función lineal.

-) Demuestran una mejor presentación de la gráfica de la función lineal antes de ser definida.

En resumen, se perciben acciones diversas con los conceptos y manejan procesos con ciertos objetos básicos de las funciones con la precisión de los términos o con el adecuado manejo de expresiones, siguiendo una secuencia de procesos para obtener soluciones acertadas.

-) Ficha N^{o} 08: ¿Qué grado de conocimiento muestra el alumno después de la evaluación de proceso que indica el docente?

Luego de haber tomado la evalución de proceso, el docente indica el grado de conocimiento que el alumno muestra en el tema correspondiente, marcando con una X el casillero adecuado en la ficha N° 08, donde los números representan los siguientes valores.

5. Muy bueno; 4. Bueno; 3. Regular; 2. Deficiente; 1.Muy deficiente.

CUADRO 5

Nº	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función	01	12	14	10	03
2	Variable dependiente e independiente	01	11	12	11	05
3	Dominio y rango de una función	02	10	12	09	07
4	Gráfica de una función	00	09	10	11	10
5	Cálculo de valores de una función	08	16	14	02	00
6	Función lineal	01	08	12	16	03
7	Función constante	00	06	14	12	08
8	Función lineal afín	00	07	11	12	10

Fuente: Información proporcionada por el docente

En resumen, en el cuadro se observa un grado de conocimiento todavía deficiente en algunos aspectos; sin embargo también se observa un grado de conocimiento bueno, es decir han mejorado en la comprensión de los conceptos de funciones reales y han superado las deficiencias de la evaluación de entrada, demostrando un progreso en su aprendizaje.

En el estudio de las funciones reales, hay tipos o clases de funciones que tienen comportamientos propios. Entre ellas se tiene a las llamadas funciones lineales, cuyas gráficas son rectas y con aplicaciones diversas, como la situación del caso C anterior. A continuación veremos el desarrollo de este tipo de funciones; iniciando, a manera de motivación, con un repaso de propiedades de rectas en el plano a través de actividades y tener la ecuación de una recta en el plano y que defina la regla de correspondencia de una función lineal.

3.3.3. FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN LINEAL AFÍN:

3.3.3.1. ACTIVIDADES DE REPASO: CONSTRUCCIÓN DE RECTAS

En el nivel básico de educación secundaria se hace un estudio intuitivo y axiomático de la recta en el plano: Por dos puntos diferentes en el plano se define o construye o traza (con una regla) una única recta, dos rectas diferentes son secantes o son paralelas, dos puntos diferentes de una recta lo separa en segmentos, semirrectas o rayos, etc.

1) Para repasar o consolidar diversas propiedades de rectas, la actividad a realizar es el uso de una regla para hacer trazos rectos en la pizarra o en una hoja de papel: Trazar rectas en el plano con una regla. ¿Cómo se procede?

Luego de un trabajo libre grupal, salieron a la pizarra para explicar y trazar rectas con una regla. Algunos lo hicieron bien: Fijaron dos marcas y haciendo coincidir el borde de la regla en dichas marcas, presionando la regla con dos o tres dedos trazaron sus rectas; otros no pudieron hacer un trazo recto, pues se le movía la regla o no podían seguir el borde de la regla.

Recordando las propiedades de la recta en el plano: Una recta tiene al menos dos puntos diferentes; es decir, por dos puntos diferentes se traza o pasa una única recta. Por ello, para trazar una recta, se hace las dos marcas (puntos de paso de la recta) y la regla se presiona con dos o más dedos para que la regla no se mueva.

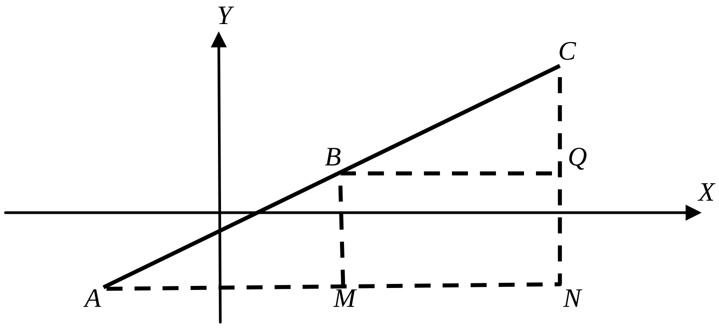
2) Respecto a rectas y segmentos de rectas paralelos en el plano, se recordaron que:

-) Dos rectas son paralelas si son coincidentes (iguales) o si son disjuntas;

-) Dos segmentos de rectas son paralelos si están contenidos en rectas paralelas. En particular, dos segmentos de rectas con un extremo común ¿Cuándo son paralelos?; o, dos segmentos de rectas contenidos en una misma recta ¿Son paralelos ¿Por qué?

3) Para pasar al estudio de las rectas en el plano cartesiano, se recordaron los tres casos de semejanzas de triángulos: LAL, ALA y LLL, y se presentaron sus interpretaciones gráficas; partiendo de que tres puntos no alineados *A*, *B* y *C* en el plano definen un único triángulo *ABC* de lados los segmentos de rectas *AB*, *BC* y *AC*, que tienen dos a dos un extremo común.

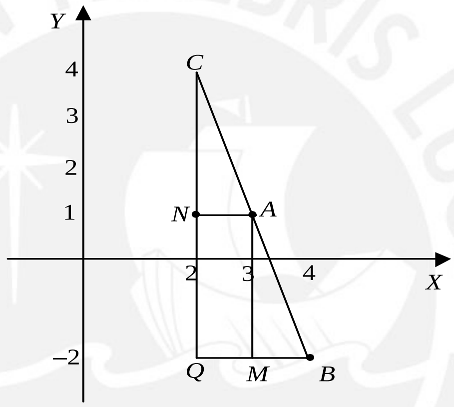
4) En un sistema rectangular de coordenadas del plano, al considerar las coordenadas de tres puntos no alineados *A*, *B* y *C*, se forman tres triángulos *ABM*, *ACN*, y *CBQ*, rectos en *M*, *N* y *Q*, respectivamente; y sus catetos correspondientes son paralelos: *AM* // *CN* // *CQ* y *BM* // *AN* // *BQ*.



Luego, considerando los resultados anteriores, los puntos *A*, *B* y *C* están alineados si y sólo si los triángulos ABM, ACN y CBQ son semejantes si y sólo si sus hipotenusas son paralelos: AB // AC // BC (criterio LLL, pues los otros son verticales y horizontales); por lo que las longitudes de los lados correspondientes (que forman los ángulos rectos) son proporcionales: $\frac{AM}{BM}=\frac{CN}{AN}=\frac{CQ}{BQ}$. De esto, $\frac{AM}{BM}=\frac{CN}{AN}$, $\frac{AM}{BM}=\frac{CQ}{BQ}$ o $\frac{CN}{AN}=\frac{CQ}{BQ}$, que se usa según la situación que se presente.

Ejemplo 7:

Sean A = (3, 1), B = (4, -2) y C = (2, 4). Se tiene M = (3, -2) y N = (2, 1).



Luego, $\frac{AM}{BM}=\frac{1-(-2)}{4-3}=\frac{3}{1}=3$, $\frac{CN}{AN}=\frac{4-1}{3-2}=\frac{3}{1}=3$ y $\frac{CQ}{QB}=\frac{4-(-2)}{4-2}=3$ es decir, los puntos A, B y C están en una recta L.

Estando estos puntos en una recta, hay que diferenciar si en los puntos dados, sus abscisas aumentan o disminuyen, también las ordenadas correspondientes aumentan o disminuyen, o disminuyen o aumentan, respectivamente; esto es,

Como A = (3 , 1), B = (4 , -2) y C = (2 , 4), en la proporción anterior resulta:

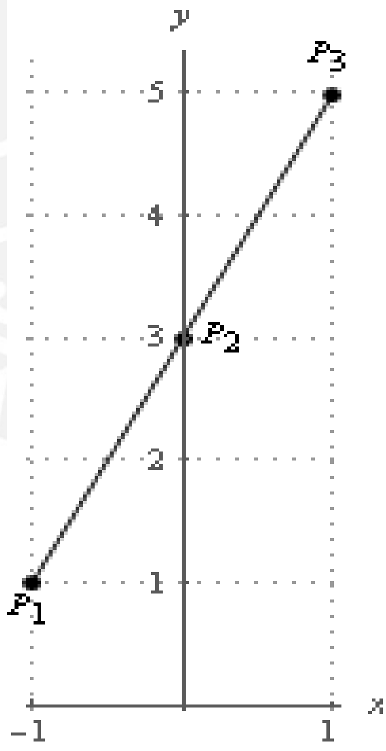
-) Para A y B, sus abscisas aumenta de 3 a 4 y sus ordenadas disminuye de 1 a -2, y se tiene $\frac{AM}{BM}=\frac{1-(-2)}{3-4}=\frac{3}{-1}=-3$,

-) Para A y C, sus abscisas disminuye de 3 a 2 y sus ordenadas aumente de 1 a 4, y se tiene $\frac{CN}{AN}=\frac{4-1}{2-3}=\frac{3}{-1}=-3$;

-) Para B y C, sus abscisas disminuye de 4 a 2 y sus ordenadas aumenta de -2 a 4, y se tiene $\dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{4-(-2)}{2-4} = \dfrac{6}{-2} = -3$.

En cada caso, -3 es el cociente de la diferencia de las ordenadas de entre la diferencia de las correspondientes abscisas.

Análogamente, dados los puntos $P_1(-1, 1)$, P_2 (0, 3) y P_3 (1, 5), para P_1 y P_2 sus abscisas aumenta de -1 a 0, sus ordenadas aumenta de 1 a 3 y el cociente de la diferencia de las ordenadas de entre la diferencia de las correspondientes abscisas es $\dfrac{3-1}{0-(-1)} = \dfrac{2}{1} = 2$; para P_2 y P_3, sus abscisas disminuye de 1 a 0, sus ordenadas disminuyen de 5 a 3 y el cociente de la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las correspondientes abscisas es $\dfrac{3-5}{0-1)} = \dfrac{-2}{-1} = 2$; para P_1 y P_3, el cociente de la diferencia de las ordenadas de entre la diferencia de las correspondientes abscisas es $\dfrac{5-1}{1-(-1)} = \dfrac{4}{2} = 2$. Se concluye que dichos puntos están en una recta L':



De los resultados anteriores, concluimos que la recta L que contiene a los puntos A = (3 , 1), B = (4 , -2) y C = (2 , 4), es decreciente; mientras que la recta L' que pasa por los puntos $P_1(-1, 1)$, P_2 (0, 3) y P_3 (1, 5) es creciente.

3.3.3.2. RECTAS EN EL PLANO CARTESIANO:

Llevando los resultados anteriores al plano cartesiano rectangular, realizando diversas actividades para reforzar:

1. Trazar la recta L que pasa por los puntos:

a) (1 , 3) y (4 , 9); **b)** (-1 , 1) y (2 , -5); **c)** (3 , -1) y (-4 , -5).

2. Analizar si los siguientes puntos están o no en una recta; es decir, son o no colineales o están o no alineados:

a) (-1, 1), (0, 3) y (1, 5); **b)** (1, -1), (2, 3) y (-2, 5).

3. En cada caso de la actividad 1:

a) Halle dos puntos distintos de los puntos dados de la recta L;
b) Si el punto (x, y) está en la recta L, ¿Qué relación deben cumplir x e y?
c) ¿De qué manera se puede obtener una expresión que permita ubicar puntos de la recta L que pasa por el punto (–3, 5) y por el origen de coordenadas (0, 0)?

4. Halle los valores de u y v en R de manera que los puntos dados están en una recta:

a) (3 , 1), (u , 3) y (-1 , v); **b)** (-2 , u) , (2 , 1) y (v , 5);
c) (-1 ,3), (4, -2) y (u, v).

En efecto:

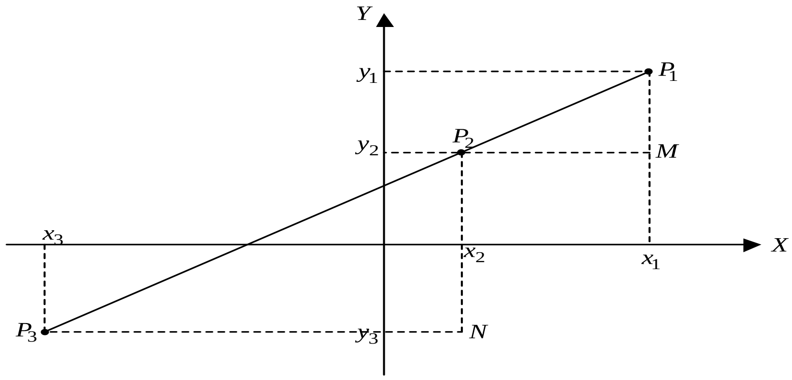
1. En el plano cartesiano, el alumno ubica los puntos dados y con la regla traza la recta correspondiente.

2. Ubicando los tres puntos en el plano cartesiano, podría aparecer que están o no están alineados. Para asegurar su resultado, hay que aplicar la propiedad de segmentos paralelos:

Además, recordar que para definir una recta (en el plano) se requiere tener dos puntos distintos (puntos de paso de la recta): Dados tres puntos distintos P_1, P_2 y P_3, en el plano cartesiano, $P_1(x_1 , y_1)$, $P_2(x_2 , y_2)$ y $P_3(x_3 , y_3)$, con $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ y $x_2 \neq x_3$, se traza la recta L_1 por P_1 y P_2.

-) ¿Qué se requiere para que P_3 esté en L_1, es decir, para que P_1, P_2 y P_3 sean colineales?

En el gráfico: se trazan los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_3P_2}$



Entonces P_1, P_2 y P_3 son colineales si y solamente si los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_3P_2}$ están en una misma recta; es decir, los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_3P_2}$ son paralelos, sí y sólo si los triángulos P_1MP_2 y P_2NP_3 son semejantes; esto es, $\frac{NP_2}{NP_3} = \frac{MP_1}{MP_2}$ o sea $\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

-) Según esto, analiza si las ternas de puntos: P_1, P_2 y P_3 son colineales?
a) $P_1\,(-1, 1)$, $P_2\,(0, 3)$ y $P_3\,(1, 5)$;
b) $P_1\,(1, -1)$, $P_2\,(2, 3)$ y $P_3\,(-2, 5)$.

Aquí los alumnos analizan la terna de puntos para determinar si son colineales mediante el concepto dado, es decir los tres puntos los ubican en el plano y los segmentos que lo determinan están en una misma recta de la siguiente manera.

a) Para que estén alineados, se debe cumplir: $\frac{3-1}{0-(-1)} = \frac{5-3}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$, lo que es verdad. Luego, dichos puntos son colineales.

b) Como el caso anterior, $\frac{3-(-1)}{2-1} = \frac{5-3}{-2-2}$, o sea $\frac{4}{1} = \frac{2}{-4}$ no es verdad: Por lo tanto, tales puntos no son colineales.

3.a) Hallar dos puntos distintos de los puntos dados de la recta L que pasa por los puntos (-1, 1) y (2, -5).

En 2) se ha analizado cuándo tres puntos dados son o no colineales. Como se dan dos puntos (-1, 1) y (2, -5) hay que considerar un tercer punto arbitrario (x , y). Entonces, el punto (x , y) está en la recta L que pasa por los puntos dados (-1 , 1) y (2 , -5) significa que los puntos A = (-1 , 1), B = (2 , -5) y C = (x , y) están alineados; es decir, el cociente de la diferencia de las ordenadas de A y B entre la diferencia de las correspondientes abscisas de A y B es igual al cociente de la diferencia de las ordenadas de C y A entre la diferencia de las abscisas correspondientes de C y A; esto es: $\dfrac{1-(-5)}{(-1)-2} = \dfrac{y-1}{x-(-1)}$, de donde, simplificando, $\dfrac{y-1}{x+1} = \dfrac{6}{-3} = -2$, $\dfrac{y-1}{x+1} = -2$, $y-1 = -2(x+1)$ o $y = -2x-1 \ldots (*)$

¿Para qué nos sirve o qué significa esta ecuación? o ¿Qué utilidad tiene?.

Con esta ecuación, dando valores a *x* se halla el valor de *y*, tal que el punto (*x* , *y*) obtenido está en *L*; es decir, está alineado con (-1, 1) y (2, -5). Así, para *x* = 1 se tiene *y* = -3, para *x* = 3 se tiene *y* = -7, para *x* = -5 se tiene *y* = 9, etc. Por lo que los puntos (1,-3), (3,-7) y (-5,9) pertenecen a *L* o dichos puntos están alineados con (-1, 1) y (2, -5).

3.b) ¿Cuántos puntos más en la recta *L* se puede hallar?.

Para cada valor dado *x* en **R** se halla *y* en **R**; es decir, se puede hallar cualquier cantidad de puntos (*x* , *y*) en *L*; por esto se dice que $y = -2x-1$ es la ecuación de la recta *L* que pasa por los puntos (-1, 1) y (2, -5) o es la expresión que relaciona *x* e *y* para que el punto (*x*, *y*) esté en la recta *L* que pasa por (-1, 1) y (2, -5).

3.c) Como el caso 3.a), sea (*x* , *y*) en la recta *L* que pasa por (–3 , 5) y (0 , 0), entonces $\dfrac{y-0}{x-0} = \dfrac{5-0}{-3-0}$, es decir, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{-3}$ o sea $y = -\dfrac{5}{3}x$, de donde para cada valor dado *x* se halla el valor de *y*, obteniéndose los puntos (*x* , *y*) de L. Así, se tienen (3 , -5), (-2 , 10/3), (6 , -10), etc. puntos de *L*. Luego, $y = -\dfrac{5}{3}x$ es la ecuación de la recta *L*.

4.a) Los puntos (3, 1), (*u*, 3) y (-1, *v*) están en una recta si y sólo si $\dfrac{3-1}{u-3} = \dfrac{v-1}{-1-3}$, esto es $\dfrac{2}{u-3} = \dfrac{v-1}{-4}$ o $v-1 = \dfrac{-8}{u-3}$, de donde, para $u \neq 3$ se tiene el valor de *v*. Así, para *u* = 5, se tiene *v* – 1 = $\dfrac{-8}{2} = -4$, o sea *v* = -3; para *u* = -5 se tiene *v* = 2; es decir, los puntos (3, 1), (5, 3), (-1, -3), (-5, 2) están alineados.

3.3.3.3. ECUACIÓN DE UNA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO:

En las actividades anteriores se ha visto, cuándo tres puntos diferentes del plano están o no alineados o están o no en una misma recta.

De esto, por ejemplo, se tiene que el punto (*u* , *v*) está en la recta *L* que pasa por los puntos (1 , 3) y (4 , 9) o los puntos (*u* , *v*), (1 , 3) y (4 , 9) están alineados si y sólo sí $\frac{v-3}{u-1}=\frac{3-9}{1-4}=2$; esto es $\frac{v-3}{u-1}=2$ o $v-3=2(u-1)$ o $v=2u+1$; de donde, dando un valor a u se halla el valor correspondiente para v y se tiene que el punto (u , v) está o pertenece a la recta L. Así, para u = 5, resulta v = 11 y el punto (5, 11) está en L, o para u = -3, resulta v = -5 y el punto (-3 , -5) está en L, etc. En este caso, a la expresión $v=2u+1$ se llama ecuación de L.

-) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1 , 1) y (2 , -5)? Luego, halle tres puntos diferentes de dicha recta.

En general, en el plano:

-) Para tres puntos distintos: $A = (x_1 , y_1)$, $B = (x_2 , y_2)$ y $C = (x_3 , y_3)$, esto es, $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ y $x_2 \neq x_3$, se tiene: A, B y C son colineales o están en una recta L sí y sólo si $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=m$, los cocientes de las diferencias de las ordenadas de dos puntos entre las diferencias de las correspondientes abscisas de dichos puntos, es una constante llamada la ***pendiente*** de la recta L que contiene a dichos puntos.

-) Dados dos puntos diferentes en el plano: $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, sea $P = (x, y)$ un punto en el plano. Se trata de hallar una expresión que relaciona x e y para que P esté o pertenezca a la recta L que pasa por A y B; es decir, los puntos A, B y P estén alineados.

Por los resultados anteriores, esto equivale a que se cumpla la proporción: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m$, llamada la **ecuación de la recta** L **que pasa por** A **y** B; de donde $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$, llamada la **ecuación de la recta que pasa por** $\boldsymbol{A} = (x_1, y_1)$ y **pendiente** m.

También de dicha ecuación se tiene $y=m(x-x_1)+y_1=mx+(y_1-mx_1)$, de donde, para b = y_1-mx_1, resulta $y=mx+b$. Aquí, para x = 0 se tiene y = b; es decir, la recta pasa por (0, b) y tiene pendiente m. Por ello se dice que $y=mx+b$ es la **ecuación de la recta con pendiente** m **y ordenada en el origen** b o, simplemente, **ecuación cartesiana de la recta**.

Ejercicio 1: Para ser resueltos en clases, en forma colaborativa o grupal o como tarea:

1) Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) A = (-2, 3) y B = (4, -1); **b)** A = (-2, 3) y B = (4, -1);

2) Halle la ecuación de la recta que:

a) Pasa por (3, 2) y pendiente 4; **b)** pasa por (-2, 1) y pendiente -2/3.

3) Halle la ecuación de la recta que pasa por (4, -3) e intercepta al eje Y en el punto (0, 4).

4) Halle la ecuación de la recta que pasa por el baricentro del triángulo *ABC* y es paralela al lado *BC*, siendo *A* = (3, 2), *B* = (-1, 4) y *C* = (-5, -2).

3.3.3.4. FUNCIÓN LINEAL:

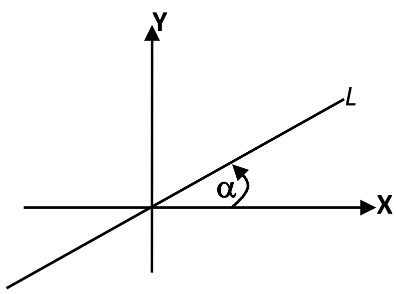
En el estudio de las rectas en el plano cartesiano, daremos atención a las rectas *L* cuyas ecuaciones están dada en la forma $y = mx + b$, que define una **función real** que llamaremos **función real lineal**; pues, para cada valor de *x* se obtiene un único valor *y*, es decir, el punto (*x*, *y*) pertenece a la recta *L* sí y sólo si *x* e *y* satisfacen la ecuación $y = mx + b$ o $f(x) = mx + b$, con *x* en **R**, cuya gráfica es la recta *L*.

Formalizado, se tiene:

DEFINICIÓN: Una función f con dominio **R** y cuya regla de correspondencia es la expresión $f(x) = mx$, donde *m* es una constante dada en **R**, llamaremos **función lineal**; es decir, una **función lineal** f es la función.

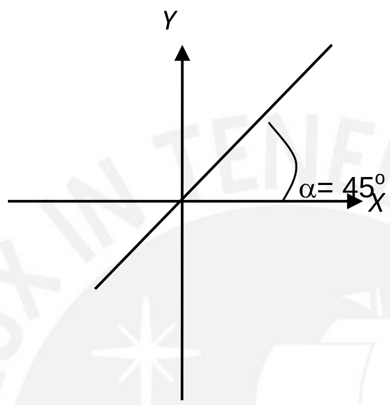
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, f(x) = mx$, con m en **R** constante.
Aquí la regla de correspondencia $y = f(x) = mx$ establece que "A cada número real *x* se le asigna el único número real *mx*". En particular a 0 le corresponde *m*(0) = 0; es decir, el punto (0 , 0) está en su gráfica o la gráfica pasa por el origen de coordenadas, siendo dicha gráfica una recta *L* cuya ecuación es *y* = *mx*.

DEFINICIÓN: A la constante *m* de una función lineal definida por $f(x) = mx$, se llama la **pendiente** de f o de su gráfica *L*.



Observación 2: En la función lineal definida por $f(x) = mx$, cuya gráfica es la recta L de la figura anterior, el ángulo α, formada por el semieje positivo del eje X y la semirrecta de L que está sobre el eje X, se llama **ángulo de inclinación** de L y cumple $\tan(\alpha) = m$.

Si $m = 1$ la función $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\ /\ \ f(x)=x$, es llamada ***función identidad***, y se denota $I(x) = x$, que juega un papel importante como veremos después, cuya gráfica es:



Si $m = 0$, la función lineal es $f(x) = 0\ x = 0$. ¿Cómo es su gráfica? En este caso, la función f es la **función constante cero**.

Ejemplo 8.

Para ser resueltas en una actividad colaborativa:

a) La función lineal $f(x) = 2x$, pasa por (0, 0) y (1, 2); su ángulo de inclinación es α tal que $\tan(\alpha) = 2$. Trazar la gráfica de dicha función indicando su ecuación.

b) Para la función lineal dada por $f(x) = -3x$, trazar la gráfica de dicha función indicando su ecuación.

c) Una recta L pasa por el origen de coordenadas y su pendiente es $-2/3$. Halle la ecuación de la recta y trace su gráfica.

Ejemplo 9.

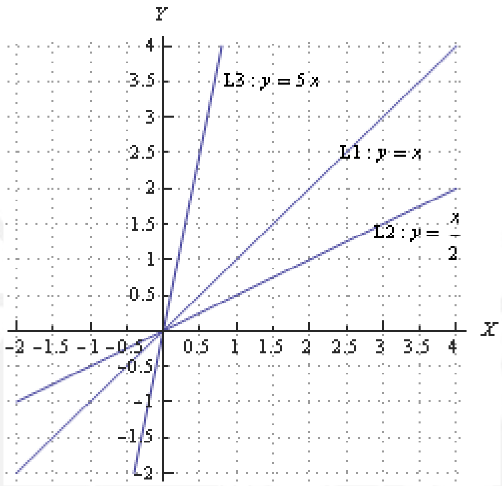
En un solo plano cartesiano graficar las siguientes funciones lineales, ubicando dos puntos de paso en cada caso.

a) $I(x) = x$ **b)** $g(x) = \frac{1}{2}x$ **c)** $h(x) = 5x$

En efecto:

Para graficar las funciones lineales dadas, hay que ubicar dos puntos de paso, siendo uno el origen de coordenadas (0, 0). Para ubicar otro punto de paso, en cada caso es suficiente dar un valor a $x \neq 0$. Así, dado el valor $x = 2$, se tiene $I(2) = 2$, $g(2) = 1$ y $h(2) = 10$. Luego, la gráfica de I es la recta L_1 que pasa por (0, 0) y (2, 2), la gráfica de g es la recta L_2 que pasa por (0, 0) y (2, 1) y la gráfica de h es la recta L_3, ¿Por qué puntos pasa?

Graficando se tienen:



Observando las gráficas:

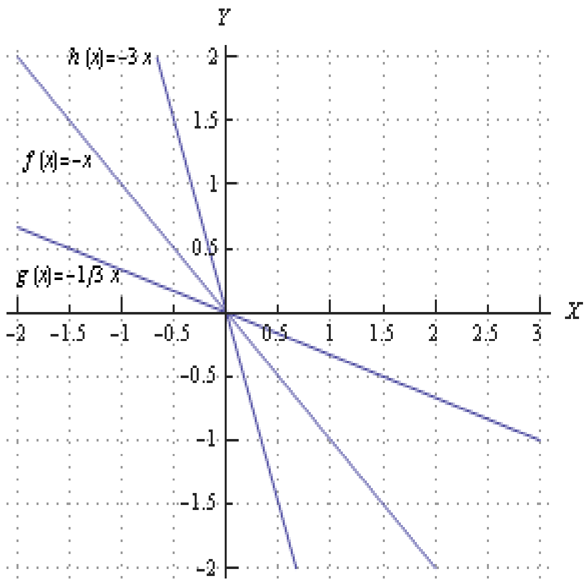
- Indique las pendientes y sus correspondientes signos.
- Ordene de menor a mayor las pendientes de las rectas y, según esto, determine el comportamiento de las gráficas.
- Ubicar otros puntos en cada recta.
- En cada caso, considerando el punto de paso de abscisa 2, ¿cómo son las correspondientes ordenadas para las abscisas $2 + 1 = 3$, $2 - 3 = -1$, $2 + a$ y $2 - a$ para $a > 0$, relacionándolos con sus pendientes?
- Si (x_0, y_0) es punto de paso en cada gráfica, a través de la pendiente, ¿cómo se determina otro punto en cada recta? y ¿cómo influye que las pendientes sean positivas?

Ejemplo 10.

En un solo plano cartesiano graficar las siguientes funciones lineales.

a) $f(x) = -x$ **b)** $g(x) = -\frac{1}{3}x$ **c)** $h(x) = -3x$

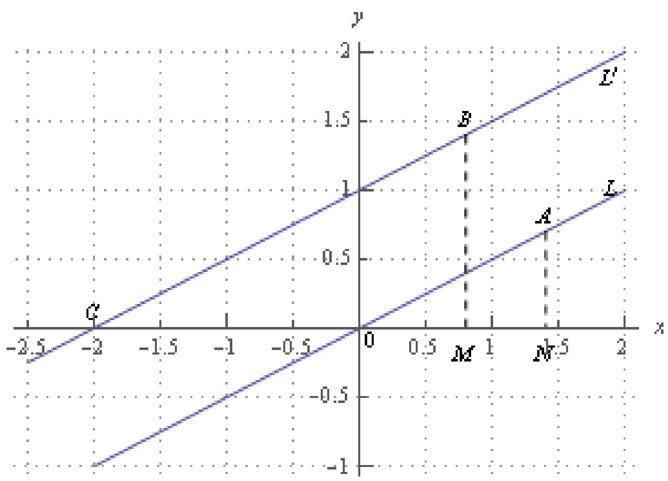
Graficando, se tienen las rectas:



- En cada recta indique su pendiente y su signo y ubique dos puntos de paso.
- Fijado un punto de paso, halle los puntos en cada recta cuando a la abscisa del punto de paso se le suma 3, se le resta –1, relacionando con las pendientes.
- Si (x_0, y_0) es punto de paso en cada gráfica, a través de la pendiente, ¿cómo se determina otro punto en cada recta? y ¿cómo influye que las pendientes sean negativas?

3.3.3.5. FUNCIÓN LINEAL AFÍN:

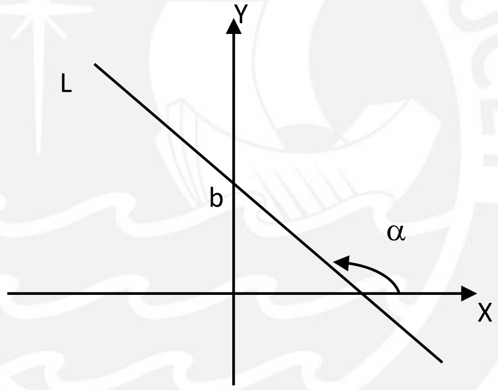
Dada una recta L que pasa por el origen y no es vertical (no es paralela al eje Y), dada por $y = mx$, existen rectas L' paralelas a L y que no pasa por el (0, 0). En tal caso, esta recta tiene la misma pendiente que L e intercepta al eje Y en un punto $(0, b)$, con $b \neq 0$



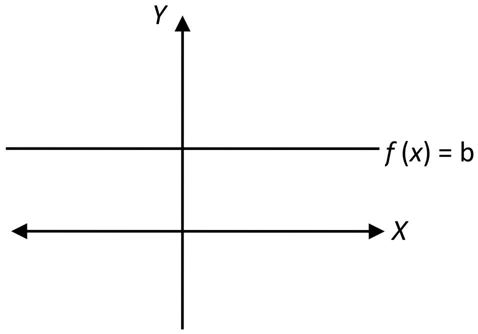
Para esto, si L pasa por $A(x_0 , y_0)$, con $x_0 \neq 0$, y L' pasa por $B(x_1 , y_1)$ e intercepta al eje X en el punto $C(x_2 , 0)$, con $x_2 \neq x_1$; como $L' \,//\, L$ se tiene que los segmentos de rectas OA y BC son paralelos y los triángulos AON y BCM son semejantes, y se cumple: $\dfrac{AN}{NO} = \dfrac{BM}{MC}$, esto es $\dfrac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \dfrac{y_1 - 0}{x_1 - x_2}$. Pero $\dfrac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \dfrac{mx_0}{x_0} = m$ De esto $\dfrac{y_1 - 0}{x_1 - x_2} = m$, la pendiente de L' es m.

Como L' pasa por $(0, b)$ y tiene pendiente m, entonces un punto (x, y) está en L' sí y sólo si $\dfrac{y - b}{x - 0} = m$, esto es $y = mx + b$; que define una función $f(x) = mx + b$ donde m y b constantes, tiene por gráfica una recta L', que no pasa por el origen de coordenadas. Si $b \neq 0$, a esta función se llama **función lineal afín**, cuya ecuación es $y = mx + b$.

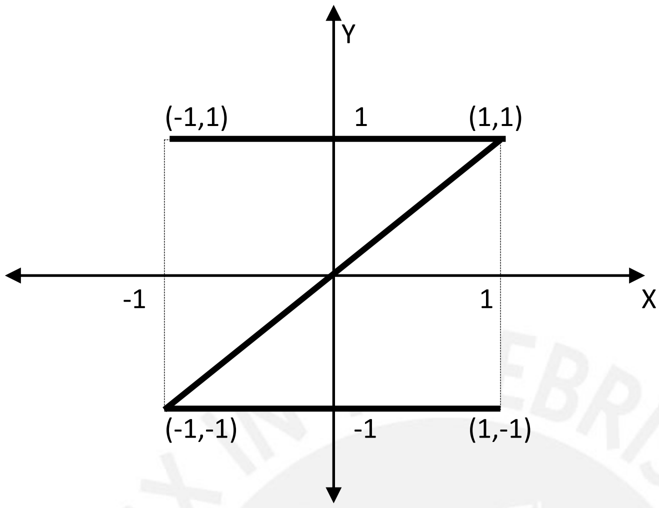
Gráficamente:



Si $m = 0$, se tiene $f(x) = 0x + b = b$; esto es, $f(x) = b$ define una función llamada **función constante,** cuya gráfica es una recta horizontal (paralela al eje X) que pasa por el punto $(0, b)$:



Ejemplo 11.
En el cuadrado de vértices (1, 1), (–1, 1), (–1, –1) y (1, –1), se tiene una figura parecida a la letra Z.



- ¿Esta figura representa una función?

- Los dos segmentos horizontales y el segmento inclinado, son las gráficas de sendas funciones. ¿Cuáles son estas funciones?

- Indique sus reglas de correspondencias y sus dominios de tales funciones.

Ejemplo 12.
Obtener la ecuación del siguiente enunciado: El doble de la edad de Juan, es la edad de su padre disminuida en 16.

Para esto:
Sean x la edad de Juan e y la edad del padre de Juan, donde $2x$ es el doble de la edad de Juan e $y - 16$ es la edad del padre disminuido en 16. Luego: $2x = y - 16$, el doble de la edad de Juan es igual a la edad de su padre disminuido en 16.

De la expresión $2x = y - 16$, despejando y, se obtiene la ecuación: $y = 2x + 16$, que define una función lineal afín $f(x) = 2x + 16$.

- ¿Cuál es su dominio?

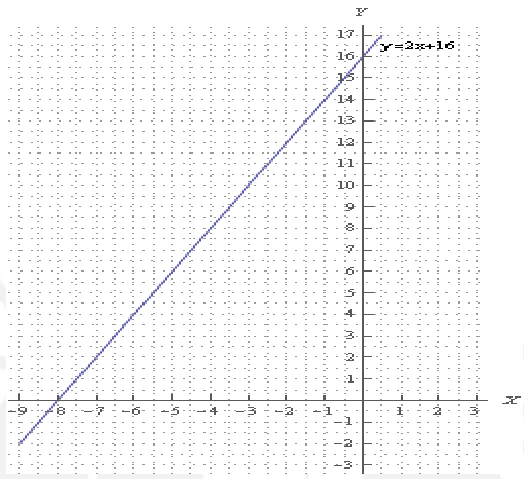
- ¿De qué manera se graficaría dicha función?,

- ¿la gráfica interceptará a los ejes coordenados?, ¿En qué puntos?

Al reemplazar $x = 0$ en la ecuación $y = 2x + 16$ resultan $y = 16$, esto es, el punto (0, 16) está en el eje *Y*.

Para $y = 0$ en $y = 2x + 16$ se tiene $x = -8$, determinándose el punto (–8, 0) en el eje *X*

Luego, la recta que pasa por los puntos (0, 16) y (–8, 0) en el plano es la gráfica de la función lineal afín $y = 2x + 16$. ¿Por qué?



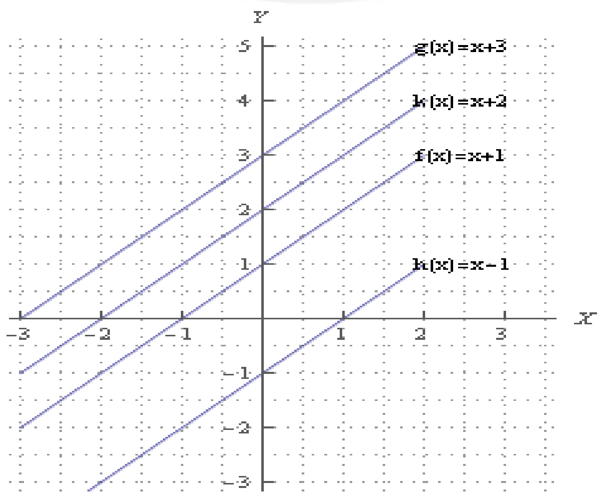
Ejemplo 13.

En un mismo plano cartesiano graficar las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 1$; **b)** $g(x) = x + 3$; **c)** $h(x) = x - 1$; **d)** $k(x) = x+2$Como en el ejemplo anterior hallando los interceptos con los ejes coordenados se tienen los puntos de paso de cada función para construir las gráficas.

- Hallar dichos interceptos.

Graficando:



- En las gráficas y a partir de los interceptos con los ejes de coordenadas, ubicar los puntos de las gráficas sumando 2, restando 3 a las abscisas de tales puntos; luego, sumando 2 , restando 3 a las ordenadas de tales puntos,

- ¿Qué sucede con la gráfica de la función cuando el término independiente varía positivamente? y ¿cuándo varia negativamente? Explicar en cada caso.
- Graficar las rectas obtenidas.

Ejemplo 14.

Graficar las siguientes funciones haciendo un análisis similar al ejemplo 13.

$f(x) = -x + 1$, $g(x) = -x + 3$, $h(x) = -x - 3$.

-) **Ficha N° 07 ¿Qué conocemos del aprendizaje del alumno mediante la evaluación de intervenciones orales?**

En estas evaluaciones de intervenciones orales, realizadas en varios momentos y desde los inicios de las clases, se tienen los siguientes comentarios:

1. Después de la prueba de entrada, hubieron muestras de preocupación por los resultados en la evaluación no esperada. Preguntado sobre dicha prueba, algunos consideraron fácil, otros más o menos y la mayoría no respondió, con opiniones de acuerdo como lo habían entendido. Sus ideas se anotaron en la pizarra, se fue aclarando y ellos iban recordando y asociando sus ideas confusas, incompletas o ambiguas.

2. Al inicio de cada clase y a manera de motivación, se recordaba referente a la clase anterior con preguntas relacionadas con algún aspecto real para encaminar la clase que se va a desarrollar. Por ejemplo, que recuerden la idea intuitiva de función del caso A y del caso B para precisar el concepto de función real.

3. En el desarrollo de las clases, con preguntas grupales o individuales, evaluándose las intervenciones orales. Así, para el desarrollo de la gráfica de una función, había que recordar ¿qué es una función?. En grupo respondieron como una correspondencia de elementos de un conjunto A hacia un conjunto B; mientras que individualmente, respondieron: f es una función de A a B si a cada elemento x de A le hace corresponder un único elemento y en B; o una función es una regla o correspondencia que a cada elemento x de A le hace corresponder un único elemento y en B.

   También ¿Cómo reconocen si una gráfica en el plano cartesiano define o representa una función?. Las respuestas fueron: Fijado un punto en la gráfica y trazando una recta vertical por ese punto debe interceptar a la figura o gráfica en un solo punto; o para cada x que fijemos en el dominio (eje X) le corresponde un único y en el rango (eje Y), es decir en la gráfica; notándose que respondían recordando y relacionándolo con la actividad del caso B que se trabajó en grupos.

A la pregunta ¿Qué la gráfica de una función?, respondieron: Son todos los puntos (x, y) del plano cartesiano o es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano cartesiano tal que $y = f(x)$ donde x está en el dominio de f.

4. Antes de la evaluación final (prueba 02: evaluando nuestro aprendizaje), se realizaron sondeos con preguntas orales en la pizarra y cuyas respuestas se resumen:

- ¿Qué es el dominio de una función?

  -) El dominio de una función f: A $\rightarrow$ B es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto A.

  -) El dominio de una función f: A $\rightarrow$ B es el conjunto formado por todas las primeras componentes de los pares ordenados de f y que están en A.

- ¿Qué es el rango de una función?

  -) El rango de una función f: A $\rightarrow$ B es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto B.

  -) El rango de una función f es el conjunto formado por todas las segundas componentes de los pares ordenados de f y que están en B.

5. En una hoja de papel se da la gráfica de la figura parecida a la letra Z del ejemplo 11 y se le preguntó individualmente:

- ¿La figura presentada de la letra Z, define una función?

  -) No es una función, porque al ubicar un punto en la gráfica y trazar una línea vertical que pase por el punto le corta en dos puntos.

- Si se considera solamente el segmento diagonal ¿será una función? y, ¿Qué clase de función es?

  -) Sí es una función. Es la función identidad y = x en el domino que está dibujada la gráfica.

- Cada uno de los segmentos horizontales ¿representará una función? y, ¿los dos como una sola figura?

  -) Si lo vemos por separado a cada segmento, es una función; y si están juntos como una sola figura o gráfica no sería función.

- ¿Qué nombre reciben este tipo de funciones?

-) Son funciones constantes.

La Ficha N° 07 es el cuadro resumen de evaluación de intervenciones orales, llenada por el profesor de acuerdo a la capacidad de comprensión y respuesta acertada del alumno. Se aplicó al grupo con una muestra de 18 alumnos, de los cuales 15 respondieron a la pregunta y 3 no la respondieron.

De los que respondieron SI a las preguntas:

CUADRO 6

ASPECTOS A OBSERVAR	SÍ	NO
1. Responde con proposiciones que tiene relación con la pregunta.	13	02
2. Se atiene sólo a la información recibida	06	09
3. Distorsiona la información recibida	02	13
4. Realiza comentarios sobre lo demandado	14	01
5. Adiciona información de otras fuentes	11	04

Fuente: Información proporcionada por el docente

En conclusión, en las intervenciones orales, al tratar de recordar el concepto de función, dominio y rango o gráfica de una función, se observó que asociaban con la actividad realizada del caso B, evidenciándose el proceso de desencapsulación; vale decir, lo asimilado en el desarrollo de las acciones concretas y elaboración de los objetos. Este proceso quedó expresado en las respuestas de modo más formal, manejando un lenguaje que les permitió expresarse con más claridad respecto al tema de funciones reales.

3.3.4. FUNCIONES DEFINIDAS POR SECCIONES:

Para completar esta sección, presentaremos ejemplos de funciones cuyas gráficas son partes o secciones de ciertas funciones lineales o lineales afines, dependiendo de su dominio o de la forma cómo están definidas.

Ejemplo 15.

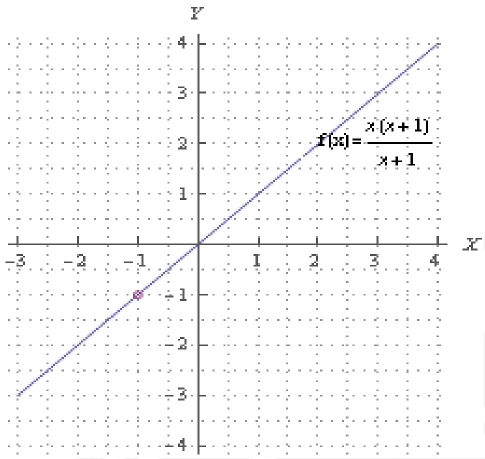
Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x+1}$ y $g(x) = x$

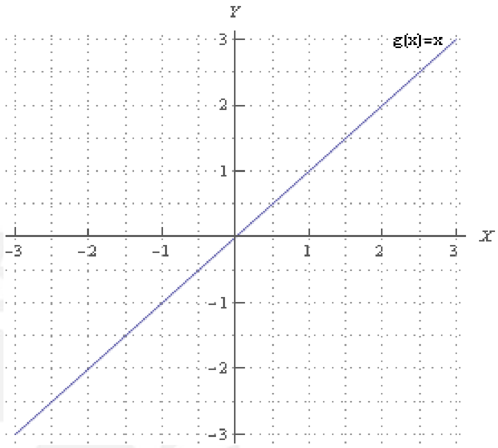
Analizar el comportamiento de la gráfica de las funciones dadas indicando dominios y rangos.

En efecto, como $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x+1}$ es una fracción, su denominador es $x + 1 \neq 0$ o

$x \neq -1$. Luego, su dominio es **R** − {−1} y $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x+1} = x$. Por lo tanto $f(x) = x$, para $x \neq -1$, su rango es también **R** − {−1}. ¿Por qué?, y su gráfica es la recta con ecuación $y = x$, para $x \neq -1$; es decir, la recta perforada en (–1, –1).

Gráfica de *f*: Gráfica de *g*:





- Para cada una de las funciones ¿Cuál es la variable independiente? y ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿Para qué valores de *x* están definidas las funciones $f(x)$ y $g(x)$?
- ¿Serán iguales f(x) y g(x)?
- ¿Cuál es el dominio de $f(x)$ y de $g(x)$?
- ¿Cuál es el rango de $f(x)$ y de $g(x)$?

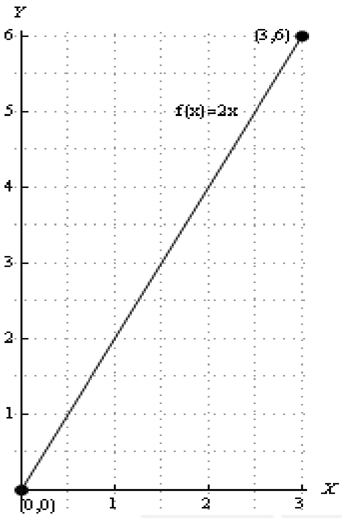
Ejemplo 16.

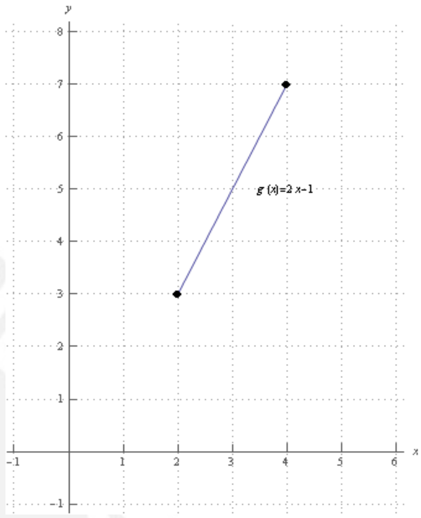
Sean $f(x) = 2x$, $x \in [0, 3]$ y $g(x) = 2x - 1$, $x \in [2, 4]$ dos funciones reales de variable real.

- ¿Qué valores puede asumir x en cada una de las funciones dadas?; es decir, halle o indique sus dominios.
- Para $x = -2$ o $x = 8$, ¿Será posible hallar los valores $f(x)$ o $g(x)$?;
- Grafique las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = 2x - 1$ en el plano cartesiano; y, en sus dominios correspondientes, señale los intervalos [0 , 3] y [2 , 4];
- De lo anterior, ¿cómo identificas las gráficas de las funciones $f(x) = 2x$,

$x \in [0\,,3]$ y $g\,(x) = 2x - 1,\; x \in [2\,,4]$?

- Es verdad que las gráficas dadas son las gráficas de las funciones $f\,(x) = 2x$, $x \in [0\,,3]$ y $g\,(x) = 2x - 1,\; x \in [2\,,4]$?





- De las gráficas obtenidas ¿cuál es el dominio y cuál es el rango de cada En las gráficas anteriores ¿cuál es el dominio y cuál es el rango de cada una de las gráficas dadas?

-) Ficha N° 05. ¿Qué está ocurriendo con la autoevaluación en el proceso de aprendizaje?

En este interín se aplicó otro instrumento de evaluación formativa, usando la Ficha N^{o} 05, para tener información de sus actitudes, como son: participación en clase, práctica y responsabilidad.
Los siguientes cuadros indican los resultados obtenidos en la autoevaluación que cada alumno marcó de acuerdo a su criterio personal en cuanto a los avances y logros en sus aprendizajes:

CUADRO 7

I.- PARTICIPACIÓN EN CLASE			
Aspectos a Observar	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
1. Mis aportes en clase fueron siempre oportunos y pertinentes.	19	18	03
2. Trabajé con honestidad y responsabilidad al realizar mis trabajos, prácticas, pruebas individuales.	30	10	00
3. Respeté las opiniones de los demás	34	06	00
4. Realicé mis tareas (trabajos, prácticas, etc) con creatividad y dedicación.	21	17	02
II.- PRÁCTICA.			
Aspectos a Observar	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
1. Apliqué lo aprendido en la presentación de mis trabajos.	27	13	00
2. Practiqué lo aprendido en algunos ejercicios.	21	19	00
III.- RESPONSABILIDAD			
Aspectos a Observar	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
1. Asistí puntualmente a las clases	19	21	00
2. Entregué puntualmente todos mis trabajos, practicas, etc.	31	09	00

Fuente: Información proporcionada por los propios alumnos

En conclusión, Se observa la autoreflexión que hacen los alumnos con respecto a su actitud y responsabilidad, son conscientes de sus propios actos calificando sus aprendizajes, dándole un juicio de valor; que le sirva a cada uno a tomar su decisión a fin de mejorar sus aprendizajes futuros.

Ejemplo 17.

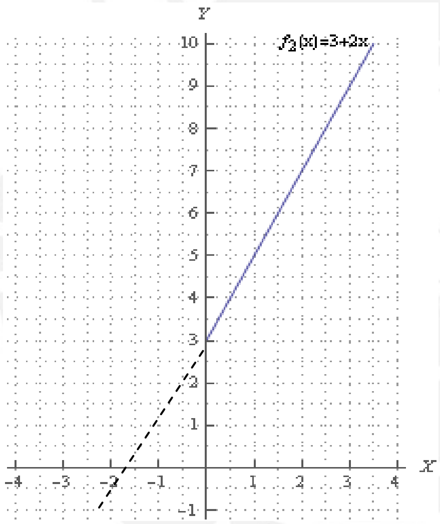
Analizar y graficar la siguiente función:

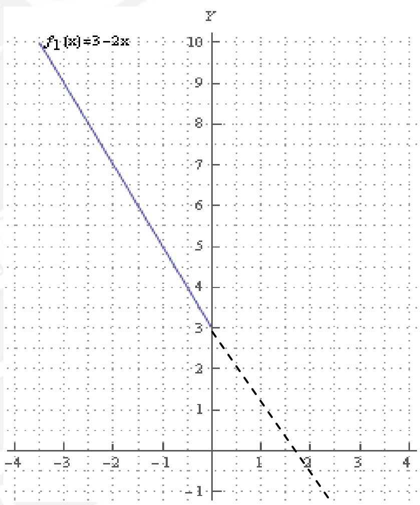
$$f(x) = \begin{cases} 3-2x, & x<0 \\ 3+2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Analizando:

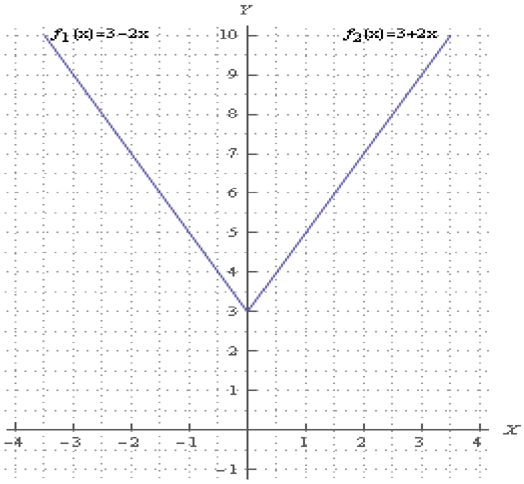
- ¿Cuál es el dominio de $f(x)$?
- ¿Qué expresiones definen dicha función?
- En un mismo plano, grafique la función $y = 3 - 2x$, y en ella considere la parte que corresponde a los $x < 0$, y, luego grafique $y = 3 + 2x$ considerando los $x \geq 0$. De esto, la gráfica de la función $y = f(x)$ es la unión de las gráficas anteriores.

  En efecto, sean $f_1(x) = 3 - 2x$, con $x < 0$, y $f_2(x) = 3+2x$, con $x \geq 0$.
  Luego graficando $f_1(x)$ y $f_2(x)$ por separado tenemos:





En un mismo plano, se ubican ambas gráficas y se tiene la gráfica de $f(x)$:



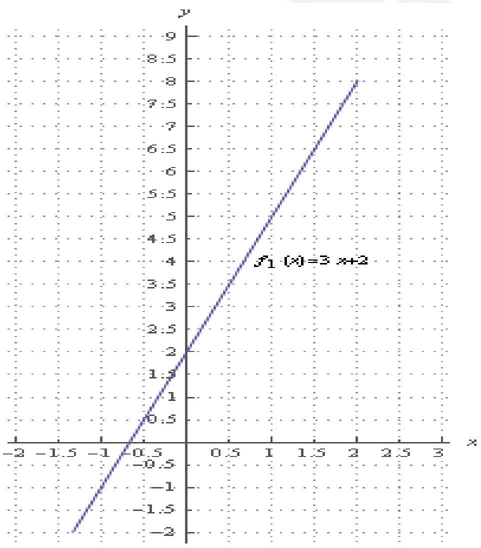
-) De la gráfica obtenida, ¿Cuál es el dominio y cuál es el rango de f ?

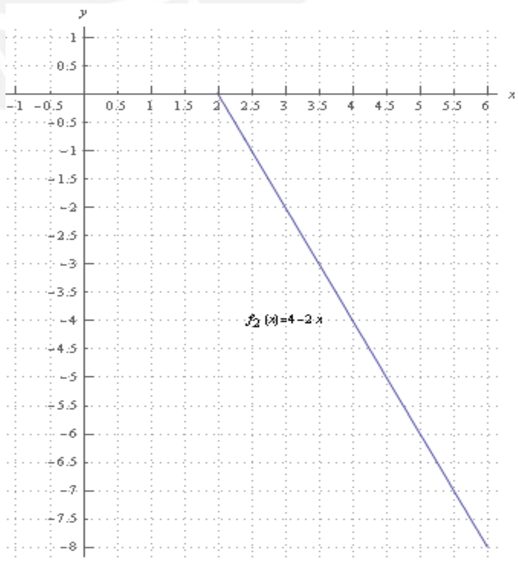
Ejemplo 18.

Dada la función real de variable real

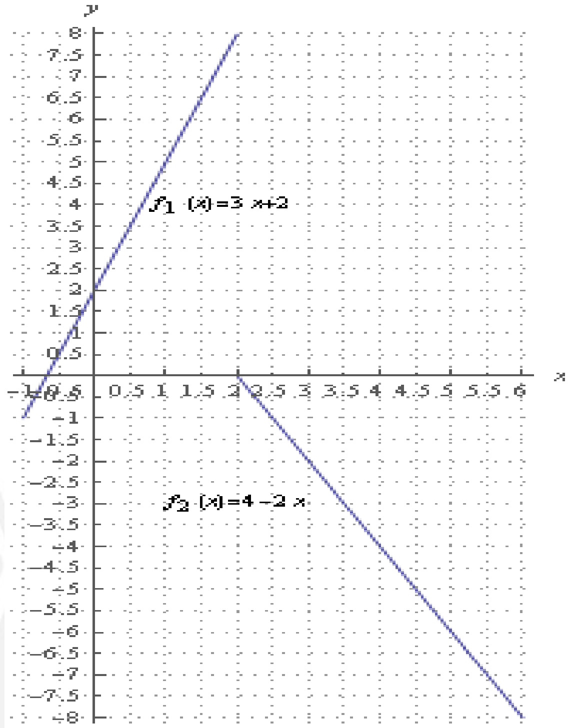
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leq 2 \\ 4 - 2x & x > 2 \end{cases}$$

- ¿Cuál es el dominio de $f(x)$?
- Desdoblando $f(x)$ en dos funciones $f_1(x) = 3x + 2$, para $x \leq 2$ y $f_2(x) = 4 - 2x$, para $x > 2$, se grafican $f_1(x)$ y $f_2(x)$ por separado:





Luego, considerando ambas gráficas en un mismo sistema de coordenadas se tiene la gráfica de la función *f*:



-) De la gráfica obtenida ¿Cuál es el rango de $f(x)$?

Ejemplo 19.

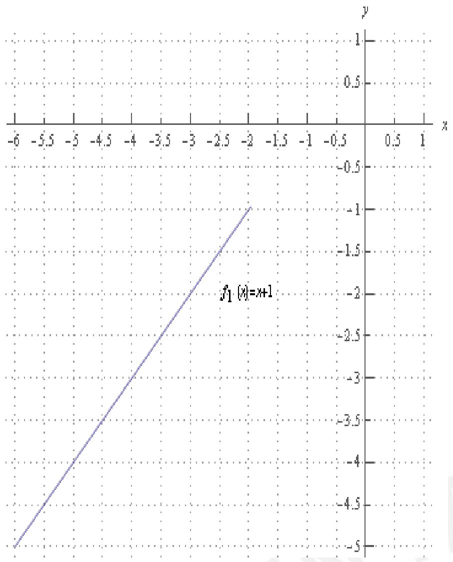
Para las siguientes funciones, analizar dominio, rango y graficar.

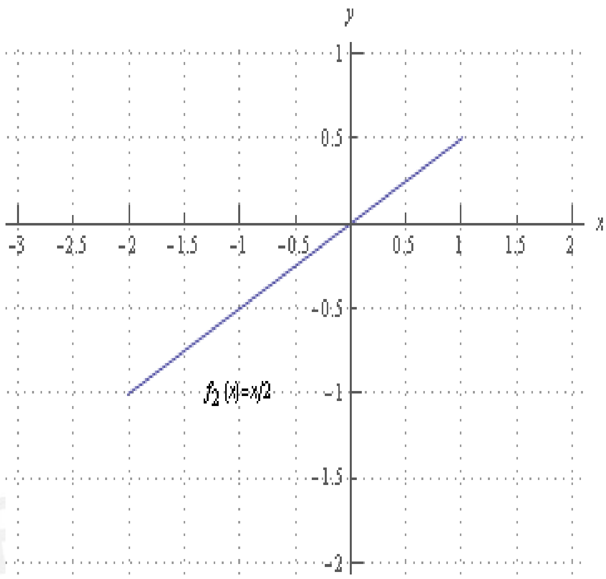
a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<-2 \\ x/2, & -2\le x<1 \\ 2-x, & x\ge 1 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} 2x-3, & x\le -1 \\ 3x+2, & -1<x\le 3 \\ -2x+1, & x>3 \end{cases}$

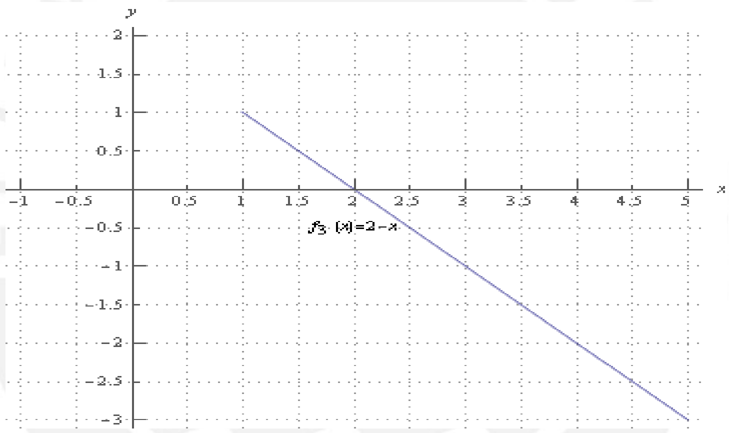
En efecto: **a)** desdoblando $f(x)$, como los ejemplos anteriores, se tienen:

$f_1(x)$ = x+1, x < -2 $f_2(x) = x/2$, $-2 \le x<1$ f_3 (x) = 2-x, x ≥ 1

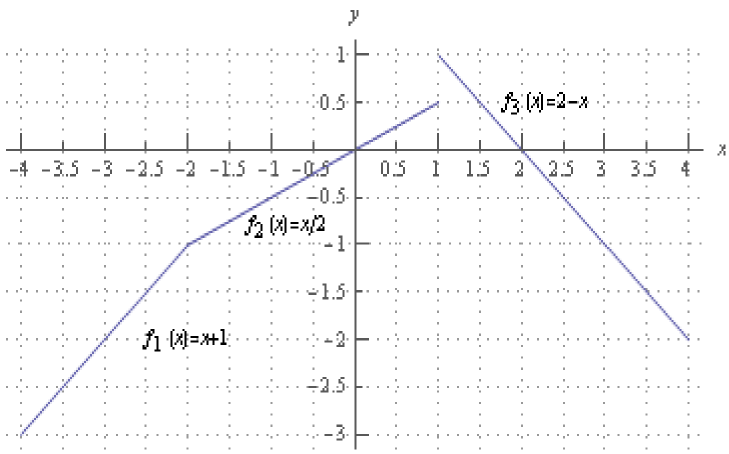
- Graficar estas funciones en sus correspondientes dominios y, luego, identificarlas en un mismo sistema de coordenadas.







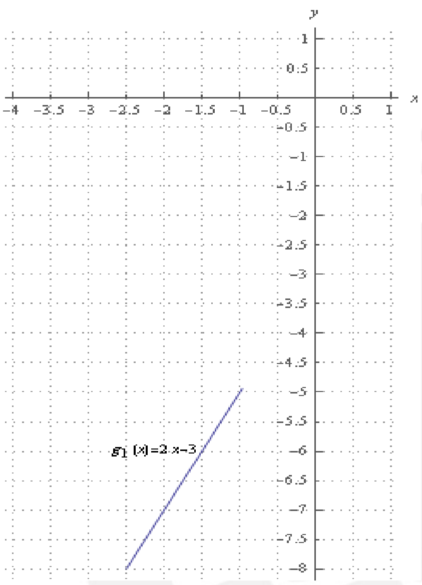
Identificando la gráfica de $f(x)$ en un mismo sistema de coordenadas

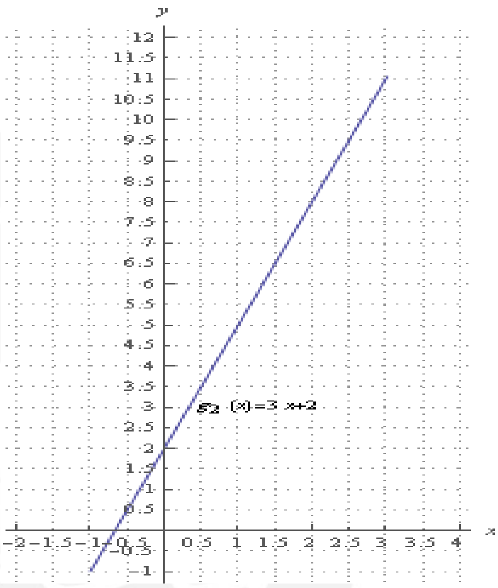


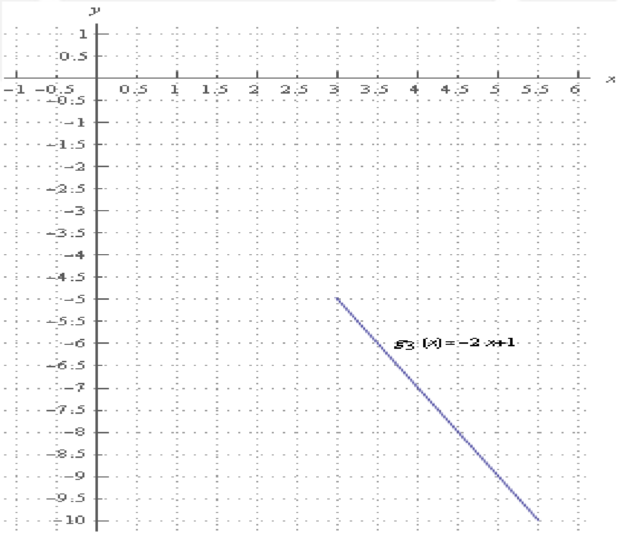
b) desdoblando *g* (*x*), se tiene:

$g_1(x) = 2x\text{-}3,\ x \leq -1$ $\qquad g_2(x) = 3x+2,\ -1< x \leq 3$ $\qquad g_3(x) = -2x+1,\ x > 3$

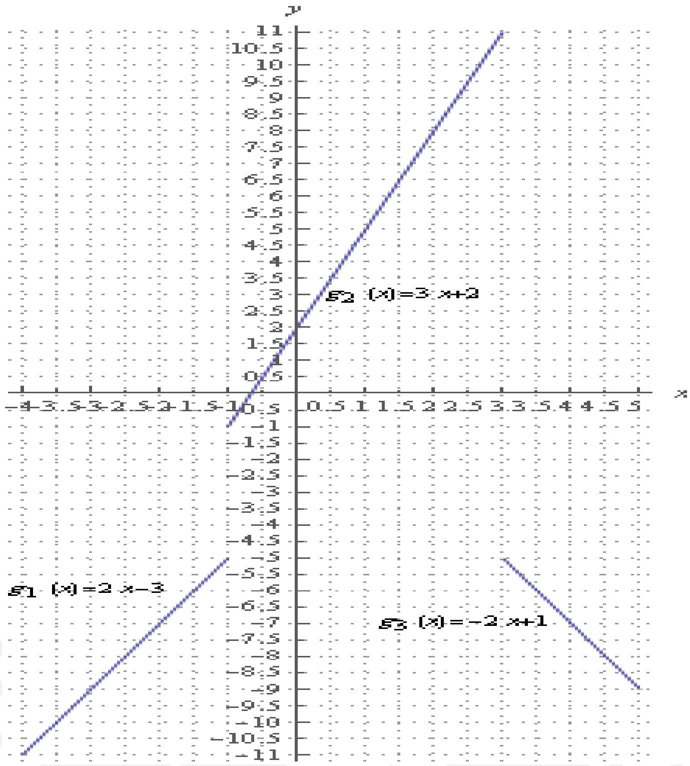
- Graficar estas funciones en sus correspondientes dominios y, luego, identificarlas en un mismo sistema de coordenadas.







Identificando la gráfica de *g*(*x*) en un mismo sistema de coordenadas



3.3.5. APLICACIONES:

Las funciones reales lineales son aplicables a casos concretos, como ilustran los ejemplos que siguen, donde se determinan ecuaciones de rectas, que definen funciones lineales o funciones lineales afines seccionadas:

Ejemplo 20.

En los mercados y tiendas se usan balanzas automáticas, encargadas de señalar los precios de los productos según su peso. Así, por ejemplo, un cierto tipo de menestras tiene el precio de 16 soles por kilogramo, es decir, 0.016 soles el gramo.

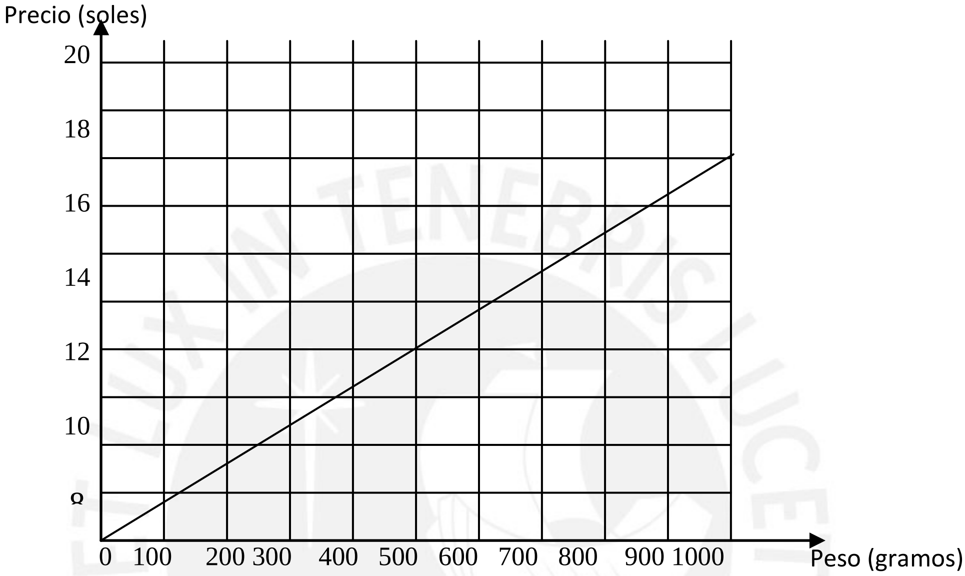
Trabajando a mano se tendrá una tabla para distintas cantidades y sus costos correspondientes del producto:

Peso (g)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	...	850	900	950	1000
Precio (sol)	0.80	1.60	2.40	3.20	4.00	4.80	5.60	6.40	7.20	8.00	...	13.60	14.40	15.20	16.00

La tabla indica, por ejemplo, que 400 g del producto cuesta S/.6.40, 350 g cuesta S/. 5.60, 950 g cuesta S/. 15.20, etc.

- ¿Qué variables se identifican? y ¿quién es independiente?
- ¿Qué precio le correspondería a un peso de 425 gramos o a 2,75 kilos?
- A un peso doble que otro ¿Le corresponderá un precio doble del otro precio?
- Si el peso aumenta en 50 gr. ¿El precio en cuanto aumenta?
- ¿Se podrá decir que el precio es proporcional al peso? o ¿el precio está relacionado con el peso a través de una función lineal?. !Explique¡

Ubicando en una gráfica los valores obtenidos en la tabla como puntos del plano:



- ¿Todos los puntos estén alineados?
- ¿Qué interpretación tiene el precio por unidad de peso, es decir 0.016 soles por gramo?
- Según el gráfico para 350 gr. Del producto ¿qué precio se tiene?

Para resolver, evaluando los cocientes del precio entre su peso, resultan:

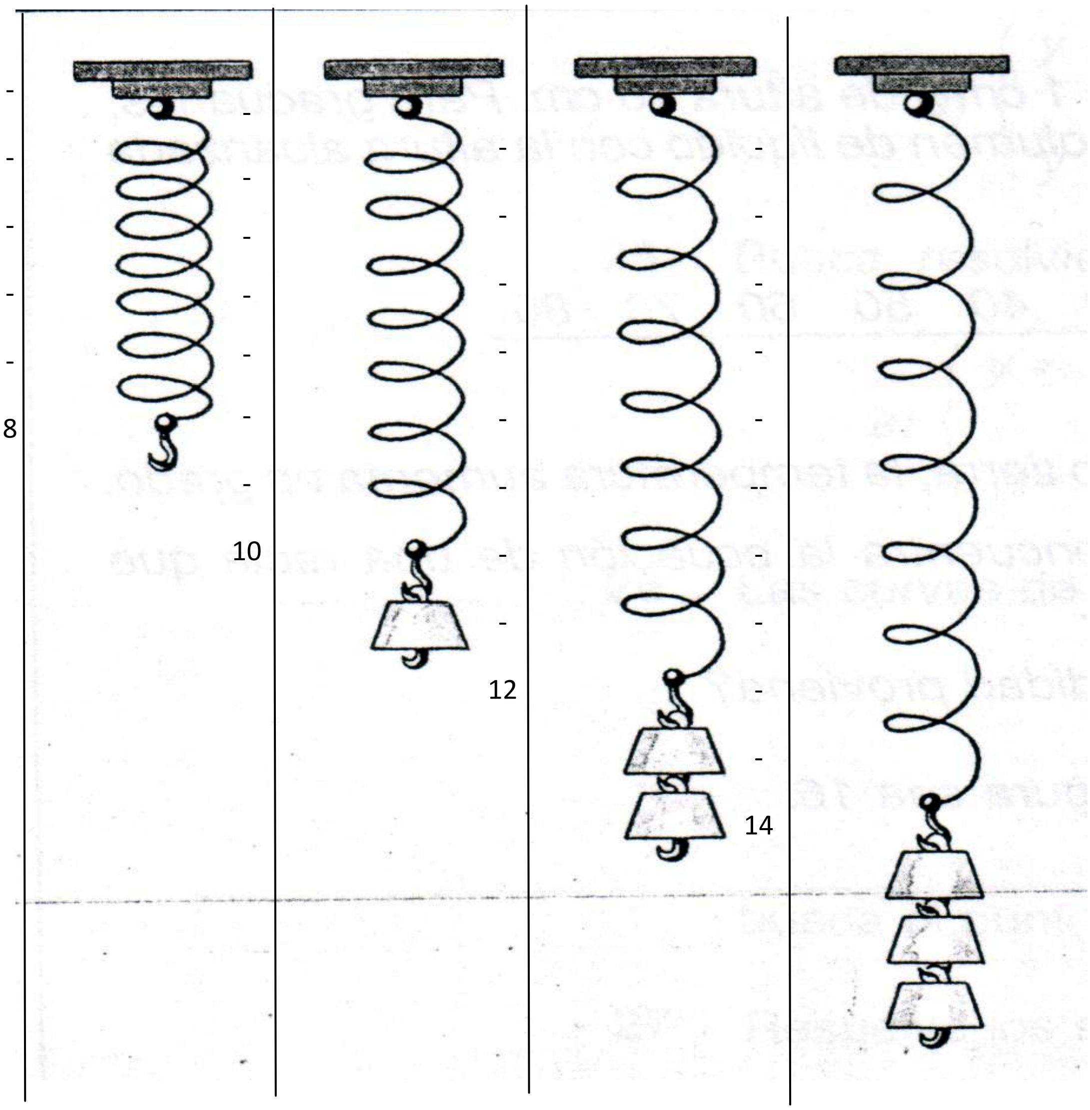
$$\frac{0{,}80}{50} = 0.016, \quad \frac{1{,}60}{100} = 0.016, \quad \frac{5{,}60}{350} = 0.016, \text{ etc.}$$

En general, llamando x al peso de una cierta cantidad del producto, en gramos, sea y su precio, en soles. Por lo anterior, evaluando el cociente del precio entre el peso respectivo se tiene $\frac{y}{x} = 0{,}016$, es decir, $y = 0{,}016\,x$, es la expresión o regla de correspondencia de una función lineal seccionada $f(x) = 0{,}016x$ cuyo dominio es $[0\ ,\ +\infty[$ o $x \geq 0$; pues, teóricamente se puede pesar cualquier cantidad no negativa del producto.

-) ¿Cuál es el rango de la función?
-) ¿Cuánto del producto tiene el costo de 10 soles o 23 soles?

Ejemplo 21.

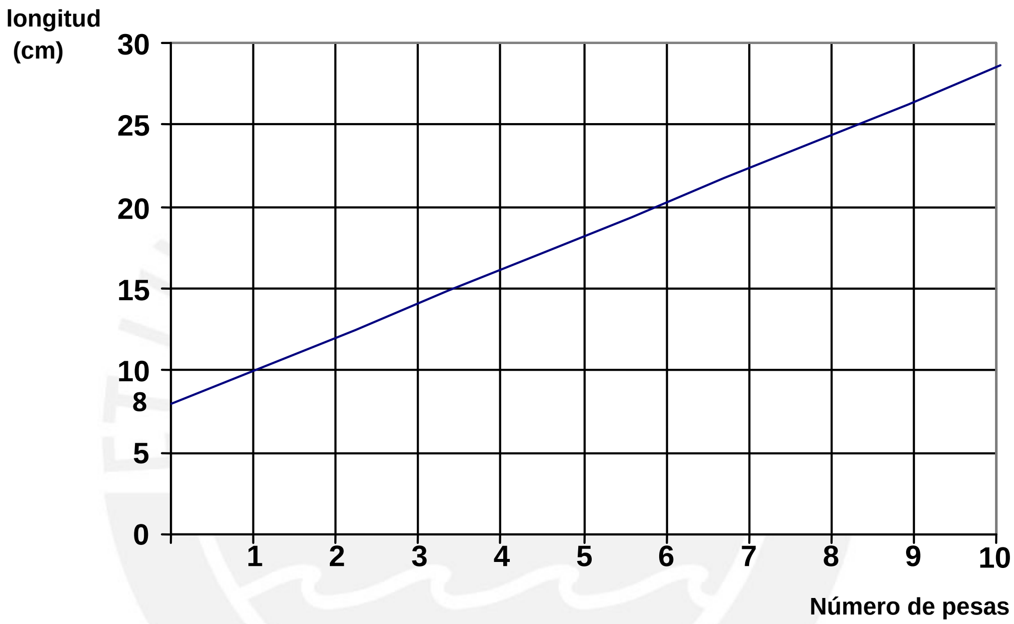
Se ha instalado un resorte de 8 cm de largo, en cuyo extremo inferior se han ido colgando una, dos y tres pesas iguales, midiendo en cada caso las correspondientes longitudes alcanzadas por el resorte.



Obteniéndose los siguientes resultados:

Numero de pesas	0	1	2	3	4	5	…	10
Longitud (en cm.)	8	10	12	14	16	18	...	28

- ¿Qué variables se tienen?
- ¿Cuál es la variable independiente?
- ¿Qué indica 8 cm con respecto al número de pesas?
- ¿En cuántas unidades va aumentando la longitud del resorte al colgar una, dos y tres pesas?
- Al colgar pesas de distintos pesos ¿Qué pasa con la longitud del resorte?
- ¿Será posible colocar 1000 pesas del mismo tamaño?
- ¿Qué relación se obtiene entre las dos variables indicadas anteriormente?
- Si se agrega un peso de 1 gr, ¿en cuánto se alargará el resorte?
  Representando en una gráfica los resultados obtenidos del experimento.



Si llamamos x al número de pesas y como 8 cm es la longitud inicial del resorte y 2 es el aumento de longitud (en cm) por cada pesa que añadimos, se tiene la expresión $y = 8 + 2x$, que define una función lineal afín seccionada para $x \geq 0$ y x en N, y cuya gráfica es una recta.

-) ¿Qué variación ocurre en la gráfica de la función cuando x aumenta en una unidad?

-) Para una imagen dada, ¿de qué manera podremos determinar una pre imagen?

-) ¿Cuál es el dominio de la función? y ¿Cuál es el rango de la función?

-) ¿Cómo reconocer si una gráfica en el plano cartesiano define o representa una función?

Ejemplo 22.

Una compañía A alquila autos cobrando $ 40 por día con un adicional de $ 0,15 por cada kilómetro recorrido; y otra compañía B lo hace cobrando $ 50 por día con un adicional de $ 0,10 por cada kilómetro recorrido.

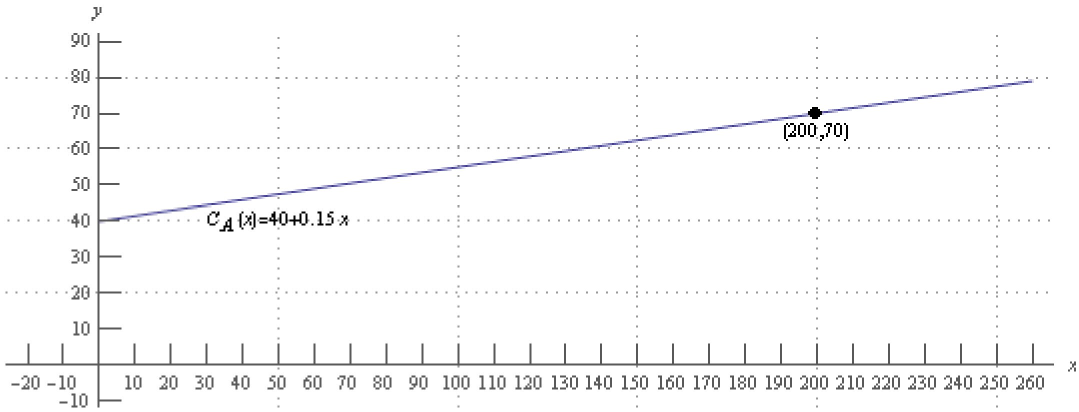
a) Determine las expresiones del costo de alquiler de un auto por día, para cada compañía, en función de la distancia recorrida indique su dominio; y, en un mismo sistema de coordenadas, trace las gráficas de ambas funciones.

b) De las gráficas anteriores, analice y decida en cuál de las compañías el alquiler es más conveniente para el usuario.

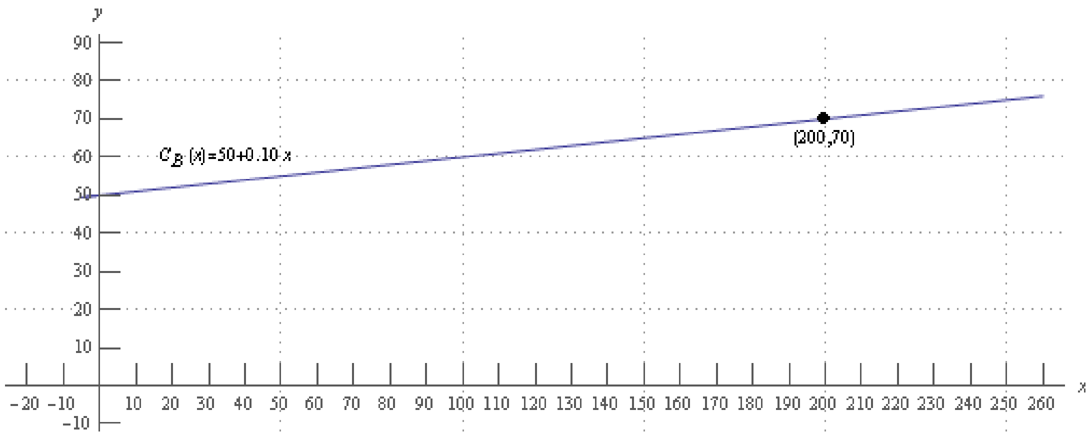
Para resolver:

a) En cada compañía, el costo de alquiler depende del total de x kilómetros recorridos durante el día.

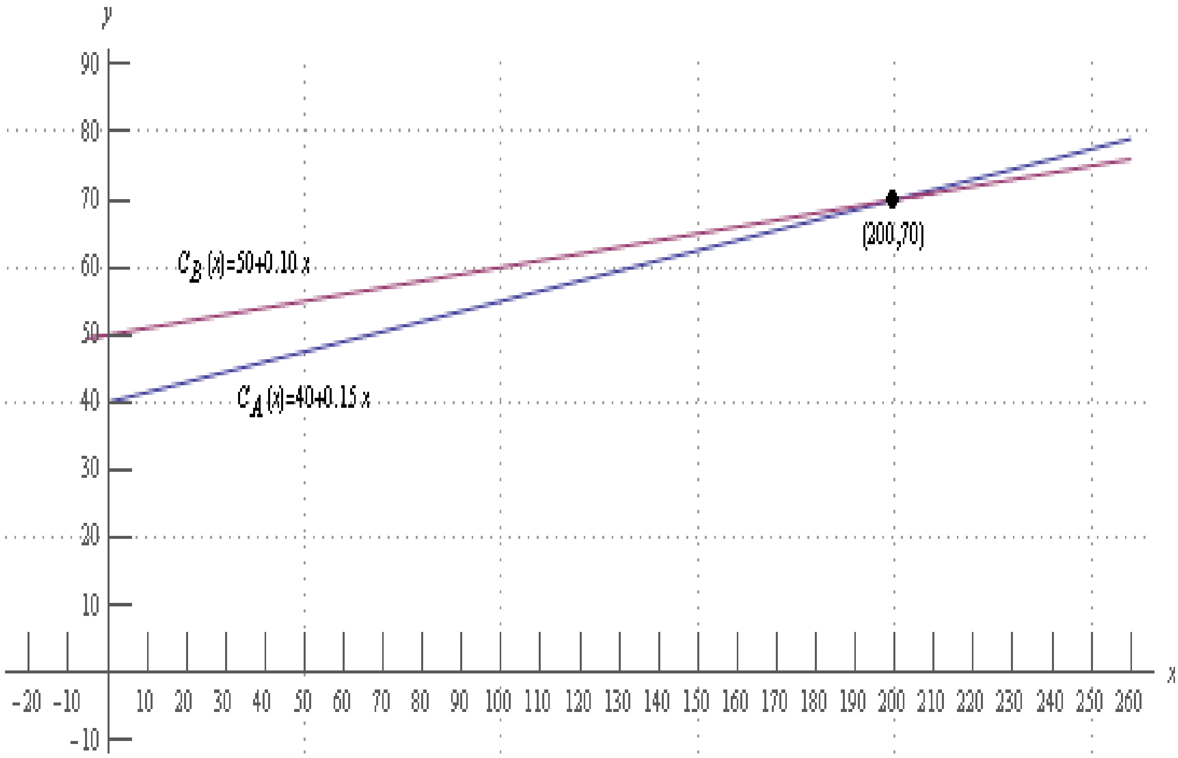
Para la compañía A, el costo es $C_A(x) = 40 + 0{,}15\,x$, con $x \geq 0$;



y para la compañía B, el costo es $C_B(x) = 50 + 0{,}10\,x$, con $x \geq 0$.



Luego veamos la gráfica de ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.



b) De la gráfica se observa que, si el usuario va a recorrer menos de 200 km le conviene alquilar autos de la compañía A pero si va a recorrer más de 200 km le conviene alquilar autos de la compañía B.

-) Ficha N° 03. ¿Qué grado de conocimiento tienen los alumnos de las funciones reales?

Se requiere conocer el grado de conocimiento que tienen, individualmente, de los temas que se han desarrollado.

Para esto, cada uno ha llenado la ficha N^{o} 03, con números que se indican para diversas valoraciones, antes de la evaluación final:

5 Muy bueno 4 Bueno 3 Regular 2 Deficiente 1 Muy deficiente

Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

CUADRO 8

N°	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función	02	15	18	03	02
2	Variable dependiente e independiente	01	16	21	01	01
3	Dominio y rango de una función	02	20	17	01	00
4	Gráfica de una función	04	21	13	01	01
5	Cálculo de valores de una función	10	20	09	01	00
6	Función lineal	02	18	17	02	01
7	Función constante	09	23	08	00	00
8	Función lineal afín	03	19	15	02	01

Fuente: Información proporcionada por los propios alumnos

En este cuadro se observa el grado de conocimiento de los alumnos que creen tener después que se desarrolla los temas en clase, ellos mismos han marcado la ficha Nº 03 en el casillero correspondiente antes de ser sometidos a la evaluación final (prueba 02: evaluando nuestro aprendizaje).

Como vemos el grado de conocimiento que tienen los alumnos para el enunciado idea intuitiva de función y variable dependiente e independiente es regular, y para los demás enunciados es bueno.

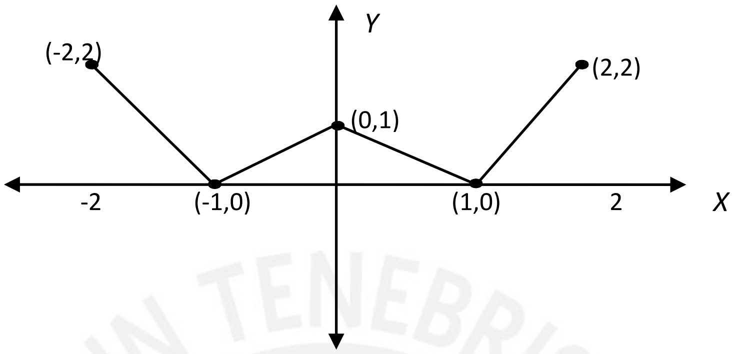
En conclusión, acerca de idea intuitiva de función y variable dependiente e independiente es regular, y para los demás enunciados es bueno; y se puede decir que hay un progreso de sus aprendizajes en el tema de funciones reales.

A través de este instrumento de evaluación, los alumnos han reflexionado en torno a su autoaprendizaje, conociendo cuál es su propia percepción del desarrollo del contenido de funciones reales, dándole un juicio de valor logrando con esto aprendizajes significativos.

En el ejemplo que sigue, la función $f(x)$ se obtiene analizando la figura dada:

Ejemplo 23.

La gráfica dada es la gráfica de una función f. Defina o halle la función por secciones.



- Determina la ecuación de la recta que contiene a cada segmento, aplicando la ecuación de punto-pendiente o puntos de pasos.
- Halle las funciones en los dominios de los segmento de rectas.
- Defina la función lineal afín seccionada, que es la función cuya gráfica es la figura.

En efecto:

Como la figura es unión de cuatro segmentos de rectas, de izquierda a derecha, sean m_1, m_2, m_3 y m_4 las pendientes de las rectas que contienen a cada segmento y que pasan por los pares de puntos $(-2, 2)$ y $(-1, 0)$, $(-1 , 0)$ y $(0 , 1)$, $(0 , 1)$ y $(1 , 0)$, $(1 , 0)$ y $(2 , 2)$, respectivamente. Entonces:

-) $m_1 = \dfrac{0-2}{-1+2} = -2$ y pasa por $(-1 , 0)$; y se tiene $\dfrac{y-0}{x+1} = -2$ o $y = -2(x + 1)$; es decir, $y = -2x - 2$ es la ecuación de la recta que contiene al primer segmento. (1)

-) $m_2 = \dfrac{1-0}{0+1} = 1$ y pasa por $(-1 , 0)$; y se tiene $\dfrac{y-0}{x+1} = 1$ o $y - 0 = 1(x + 1)$, es decir, $y = x + 1$ es la ecuación de la recta del segundo segmento; ………… (2)

-) $m_3 = -1$ y pasa por $(0, 1)$; y se tiene $\dfrac{y-1}{x-0} = -1$ o $y - 1 = -1(x - 0)$; esto es $y = -x + 1$ en la ecuación de la recta del tercer segmento: y ………..(3)

-) $m_4 = 2$ y pasa por $(1, 0)$. Se tiene $\dfrac{y-0}{x-1} = 2$ o $y - 0 = 2(x - 1)$; esto es,

$y = 2x -$ es la ecuación de la recta del cuarto segmento. ……… (4)

Luego la función $f(x)$ estará definida por las ecuaciones de las rectas (1), (2), (3) y (4), en sus respectivos dominios de la figura, por:

$$f(x)=\begin{cases} -2x-2\,, & si \quad -2\le x<-1 \\ x+1\,, & si \quad -1\le x<0 \\ -x+1\,, & si \quad 0\le x<1 \\ 2x-2\,, & si \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$$

Ejemplo 24:

Función Valor Absoluto.

Considerando la definición del valor absoluto de *a* en **R**, se tiene**:**

$$|\,a\,|=\begin{cases} a\,, & si \quad a\ge 0 \\ -a\,, & si \quad a<0 \end{cases}.$$

Según esto, la función $f(x)=|\,x\,| = \begin{cases} x\,, & si \quad x\ge 0 \\ -x\,, & si \quad x<0 \end{cases}$, llamada **Función Valor Absoluto**, corresponde a una función lineal seccionada.

En el contexto anterior, se trata de estudiar la función: $f(x)=\begin{cases} x\,, & si \quad x\ge 0 \\ -x\,, & si \quad x<0 \end{cases}$.

Para esto:

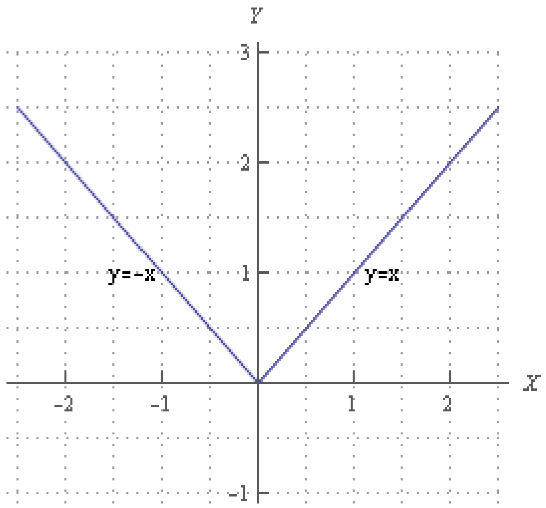
- Grafique dicha función en el plano cartesiano, indicando su dominio y rango.
- Compruebe que $f\,(2) = f\,(-2)$, $f\,(-3/5) = f\,(3/5)$,…….., $f(a) = f(-a)$ para cualquier *a* en **R.**

En adelante, a esta función denotaremos por $f(x)=|\,x\,|$, para todo *x* en R y llamaremos la **función valor absoluto**; es decir, es la función

f: **R** $\rightarrow$ **R,** definida por $f(x)=|\,x\,|$; esto es:

$$f(x)=|\,x\,|=\begin{cases} x\,, & si \quad x\ge 0 \\ -x\,, & si \quad x<0 \end{cases}.$$

Denotando $y = f(x)$, se tiene $y = x$, si $x \ge 0$, e $y = -x$ si $x < 0$; y su gráfica es la unión de dos semirrectas y su rango es Ran(f) = $[0\,,+\infty\rangle$, esto es:



Como aplicación del resultado anterior:

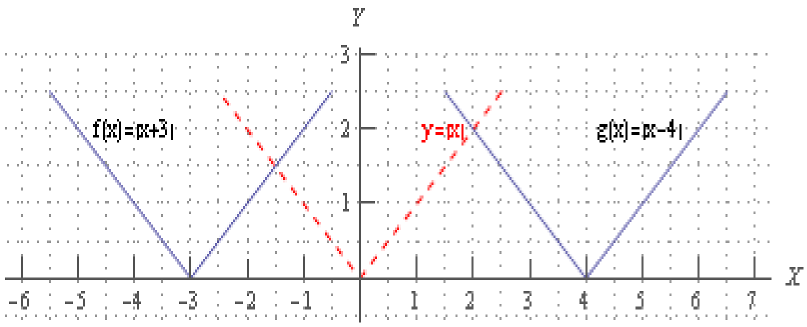
Ejemplo 25.
Graficar las siguientes funciones $f(x) = |x + 3|$, $g(x) = |x - 4|$

En efecto:
Observar, de acuerdo a la definición de valor absoluto se tiene:

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3, si\ x+3 \geq 0 \\ -(x+3), si\ \ x+3<0 \end{cases} = \begin{cases} x+3, si.x \geq -3 \\ -(x+3), si\ x < -3 \end{cases}$$

Similarmente para la función g(x)

$$g(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4, si\ x-4 \geq 0 \\ -(x-4), si\ \ x-4<0 \end{cases} = \begin{cases} x-4, si.x \geq 4 \\ -(x-4), si\ x < 4 \end{cases}$$



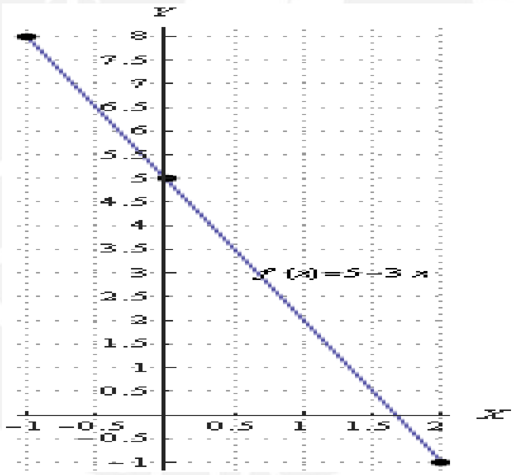
- Las gráficas de las funciones dadas, resultan de la gráfica de la función valor absoluto de x. Explique el proceso a seguir.

- ¿Cuál es el dominio y rango de las funciones?

Ejemplo 26.

La función *f*: [–1, 2]→ **R**, es definida por $f(x)$= 5 – 3*x*. Grafique dicha función en un plano cartesiano indicando su dominio y halle su rango.

En efecto:
Como Dom(*f*) = [–1 , 2] se conoce y sus valores están en **R,** para hallar el rango, hay que construir 5 – 3*x* a partir de *x*∈[–1, 2] o $-1 \le x \le 2$. De esto, $-6 \le -3x \le 3$ y $5-6 \le 5-3x \le 5+3$. Luego, $-1 \le f(x) \le 8$; es decir, Ran(*f*) = [–1, 8].
Otra forma, de $y = 5 - 3x$ se despeja *x*; esto es $x = \dfrac{5-y}{3}$. Como $-1 \le x \le 2$, se tiene $-1 \le \dfrac{5-y}{3} \le 2$. Resolviendo tal inecuación, resulta $-1 \le y \le 8$ o $-1 \le f(x) \le 8$.
Graficando dicha función, se tiene:



- De la gráfica, halle el dominio y el rango de *f*.

Ejemplo 27.

Para las funciones dadas, halle su rango a partir del dominio dado y de la gráfica correspondiente.

a) $f(x) = 3 - 2x$, para $x \in [-1,\ 2[$; **b)** $f(x) = 2x + 5$, para $x \in [-3, 5]$;
c) $f(x) = 5 - 2x$, para $x \in [-4, 4]$.

En efecto:
a) Partiendo del dominio de *f*:

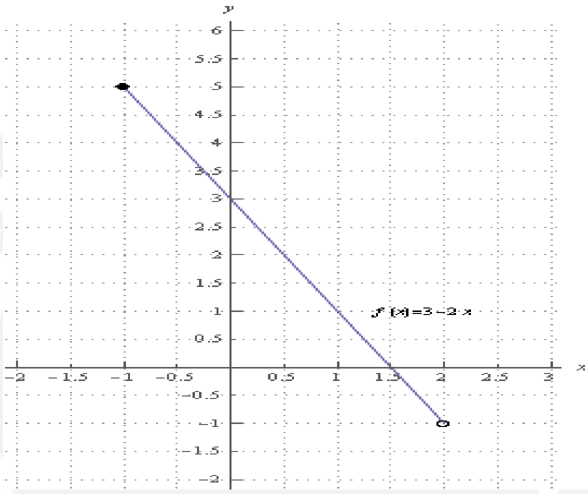
$x \in [-1\ ,\ 2[\ \Leftrightarrow\ -1 \leq x < 2 \Leftrightarrow\ 2 \geq -2x > -4\ \Leftrightarrow\ 5 \geq 3 - 2x > -1\ \Leftrightarrow$
$5 \geq y > -1$; es decir, Ran $(f) =]-1\ ,\ 5]$.

b) Como Dom$(f) = [-3\ ,\ 5]$, se tiene:
$x \in [-3\ ,\ 5]\ \Leftrightarrow\ -3 \leq x \leq 5\ \Leftrightarrow\ -6 \leq 2x \leq 10\ \Leftrightarrow\ -1 \leq 2x+5 \leq 15$
$\Leftrightarrow\ -1 \leq f(x) \leq 15\ \Leftrightarrow\ f(x) \in [1, 15]$.
Siendo $f(x) = y$, se tiene Ran $(f) = [1\ ,\ 15]$.

c) Queda como ejercicio en un trabajo grupal.

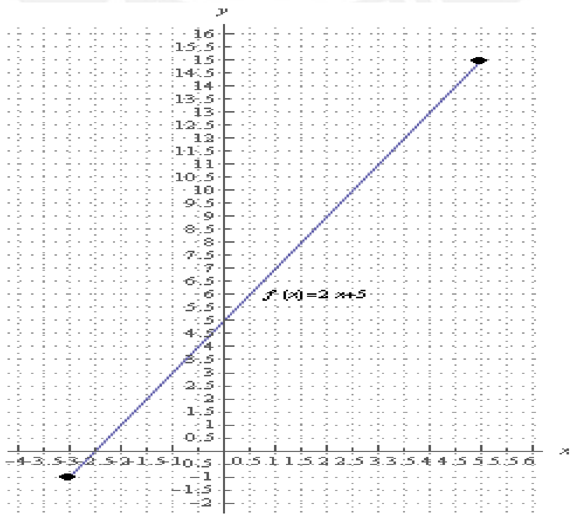
Graficando dichas funciones:

a)



Ran$(f) =]-1\ ,\ 5]$.

b)



Ran $(f) = [1\ ,\ 15]$.

En este proceso, se necesita conocer el grado de conocimiento consolidado que tienen los integrantes de los grupos de trabajo, con la Ficha N^o 04, antes de la evaluación final.

-) Ficha N° 04. ¿Qué grado de conocimiento tienen los integrantes de los grupos de trabajo?

Los coordinadores de los grupos indican, marcando en la Ficha N^o 04, el grado de conocimiento que considera tener los integrantes de sus grupos, después del desarrollo de los temas indicados; donde se tiene los siguientes valores:

5 Muy bueno 4 Bueno 3 Regular 2 Deficiente 1Muy deficiente

El resumen de los resultados está en la tabla:

CUADRO 9

N°	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función	00	15	25	00	00
2	Variable dependiente e independiente	10	20	10	00	00
3	Dominio y rango de una función	10	30	00	00	00
4	Gráfica de una función	10	25	05	00	00
5	Cálculo de valores de una función	05	20	15	00	00
6	Función lineal	05	35	00	00	00
7	Función constante	10	15	10	05	00
8	Función lineal afín	05	16	15	04	00

Fuente: Información proporcionada por los propios alumnos

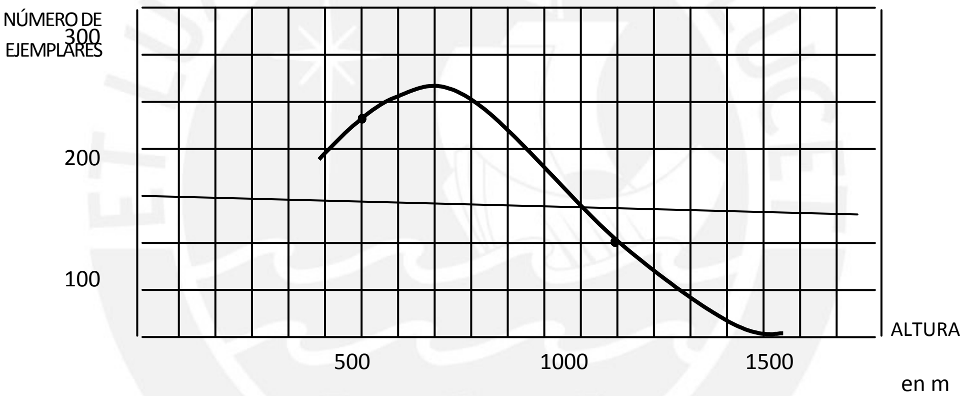
En conclusión, la mayoría de estudiantes han mejorado respecto a las apreciaciones individuales; pues, la participación de todos los integrantes en los grupos de trabajo les ha permitido tomar conciencia de sus aprendizajes emitiendo juicios de valores respecto a las observaciones de los demás, resaltando la importancia de las relaciones interpersonales.

EVALUANDO NUESTRO APRENDIZAJE: EVALUACIÓN FINAL

Con esta prueba "evaluando nuestro aprendizaje" se pretende que el alumno analice e interprete datos del gráfico en el plano cartesiano y que comunique por escrito el concepto de función indicando las variables que lo relacionan, grafique función lineal y lineal afín y así como también que grafique funciones definidas por secciones en el plano cartesiano.

PRUEBA 02: PRUEBA DE DESARROLLO

1. En una cierta zona ceja de selva peruana hay una especie vegetal que aparece con frecuencia. Se ha estudiado la cantidad aproximada de ejemplares por hectárea que hay a distintas alturas. A la vista de esta gráfica, se intenta describir la influencia de la altura sobre la cantidad de esa especie vegetal por hectárea. Para ello, conteste las preguntas y elabora, con tus respuestas, un pequeño informe.



- La figura mostrada, ¿Es la gráfica de una función? ¿Por qué?

- ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuál es la independiente, cuál la dependiente?

- ¿A qué altura hay aproximadamente 200 ejemplares por hectárea?

- La zona estudiada, ¿está por encima de los 350 m sobre el nivel del mar? ¿por qué?

(4 puntos)

2. En un plano cartesiano grafique las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = 4x + 8$

- ¿Son lineales o lineales afines las funciones dadas? ¿por qué?

- De las gráficas, halle los x en Dom(f) tal que $f(x) < 5$.

(4 puntos)

3. Sean $f(x)=\dfrac{-2x(x-1)}{x-1}$ y $g(x) = -2x$

- ¿Son iguales f y g? ¿por qué?
- Grafica f y g en planos distintos y analiza sus dominios y sus rangos.

(4 puntos)

4. Sean $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$, con x en [-3,4 [y $g(x) = 2x$, con x en [0, ∞ [

- Grafique f y g en planos distintos.
- Del gráfico obtenido señale dominios y rangos.

(4 puntos)

5. Bosqueje la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} 6\ , & si \quad x<2 \\ 4-x\ , & si \quad 2\le x\le 4 \\ x-8\ , & si \quad x>4 \end{cases}$$

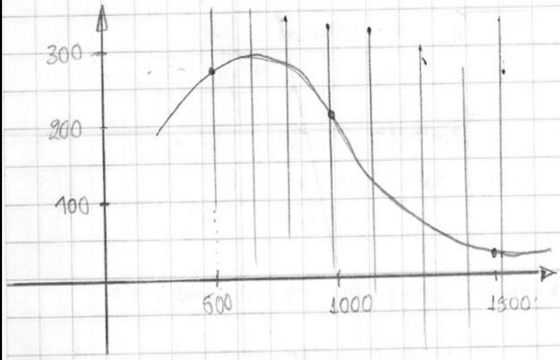
- ¿Cuál es el rango de $f(x)$?
- Alguna parte de la función ¿es una función constante? ¿con qué dominio?

(4 puntos)

RESULTADOS DE LA PRUEBA:

Pregunta 1): Relación entre gráfica de función e informaciones que contiene.

(1) a) La figura mostrada, ¿Es la gráfica de una función? ¿Porqué?



▷ Sí es una gráfica de de una función, porque para cada valor en x, hay un valor en y. Otra forma de averiguar si es función es trazando verticales y pues verificando que corte a la gráfica en un solo punto.

b) ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuál es la independiente, cuál es la dependiente.

Bueno : R: {(500, 225); (1000, 175); (1500, 25)}

La dependiente: 500, 1000, 1500.

La independiente: 225, 175, 25

c) ¿A qué altura hay aproximadamente 200 ejemplares por hectárea?

▷ A la altura de 400 m.

d) La comarca estudiada, ¿Está por encima de los 350 m sobre el nivel del mar? ¿En qué te fijas para averiguarlo?

Sí esta por encima, por lo que la altura asciende a más de los 1500 y pues me doy cuenta al contar los cuadritos que valen 100 m.

1) • La gráfica es una función

• Las variables que se relacionan son los ejemplares y la altura. La independiente es el aumento de los ejemplares, la dependiente es cuando decae los ejemplares.

• La altura que hay aproximadamente en 200 ejemplares por hectárea es de 500, 1050 aproximadamente en la gráfica

• La comorca estudiada si esta por encima de los 350 m sobre el nivel del mar, Me fijo en la altura para poder determinar.

①

•)

- La grafica si es una función porque a cada elemento del dominio le corresponde unicamente un elemento del rango.
- Por el metodo practico al trazar una linea vertical intercepta en un solo punto.

•)

Las variables que se relacionan son: ~~Altura y (ejemplares)~~. ~~Número de ejemplares~~

- Altura sobre el nivel del mar
- Número de ejemplares por hectario.

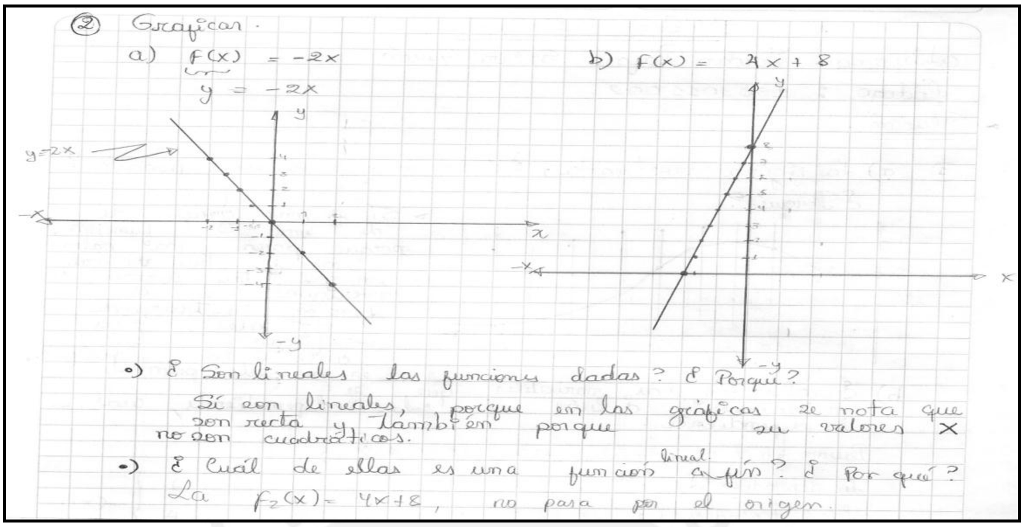
• La altura es la variable independiente y el N° de ejemplares es la dependiente.

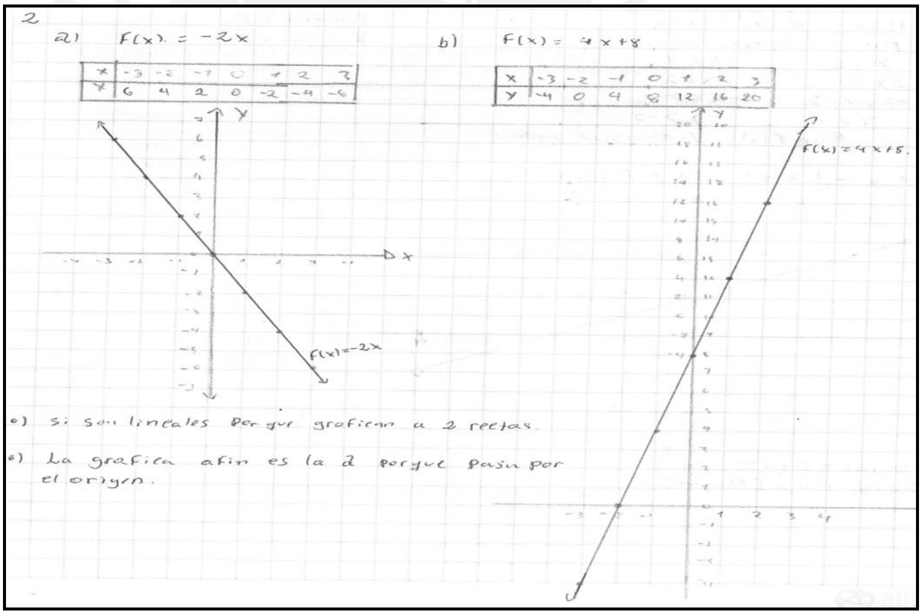
•) a los 500 m.s.n.m.

•) En los datos que me dan en el eje orizontal, de la grafica.

-) En las respuestas coinciden en afirmar que la gráfica dada representa una función y también mencionan las variables que se relacionan, además también explican que si se les da un dato ellos lo relacionan en la gráfica y hacen su comentario; esto indica que en la comprensión del concepto de función y la gráfica de una función han mejorado, pues accionan adecuadamente los procesos para la gráfica y del concepto de función.

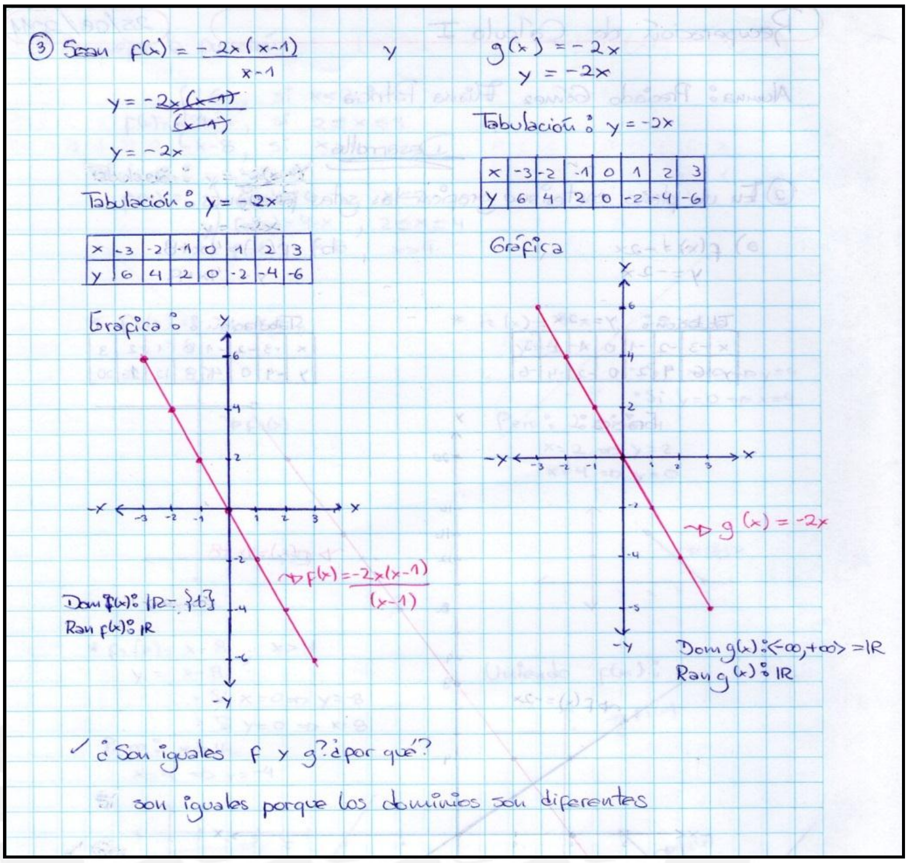
Pregunta 2): Gráfica de función lineal y lineal afín, indicando dominio y rango.

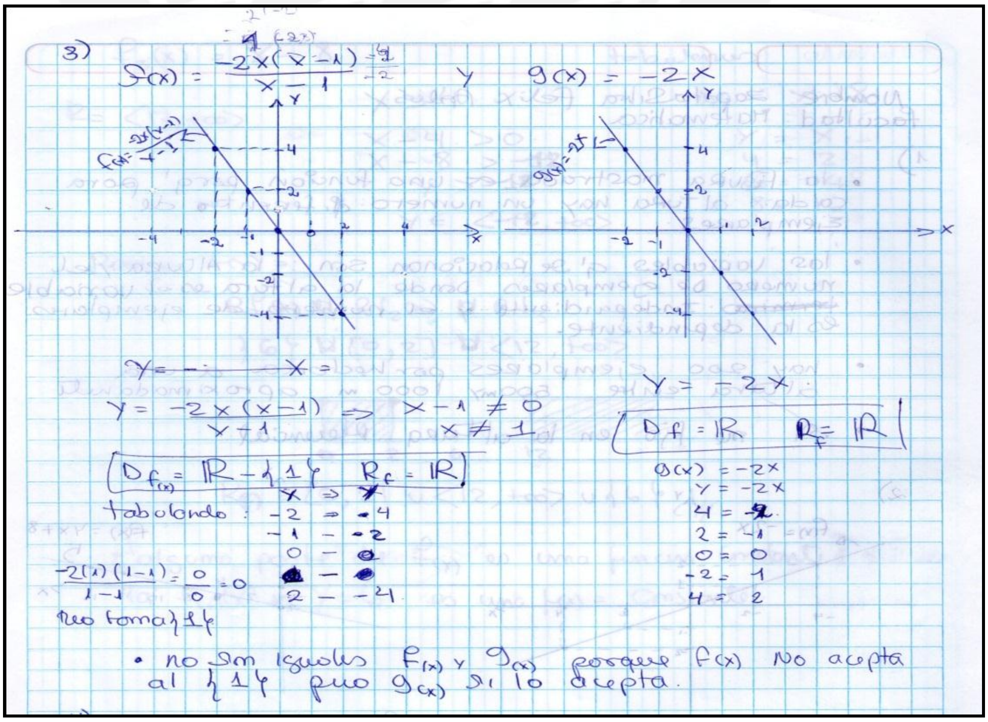


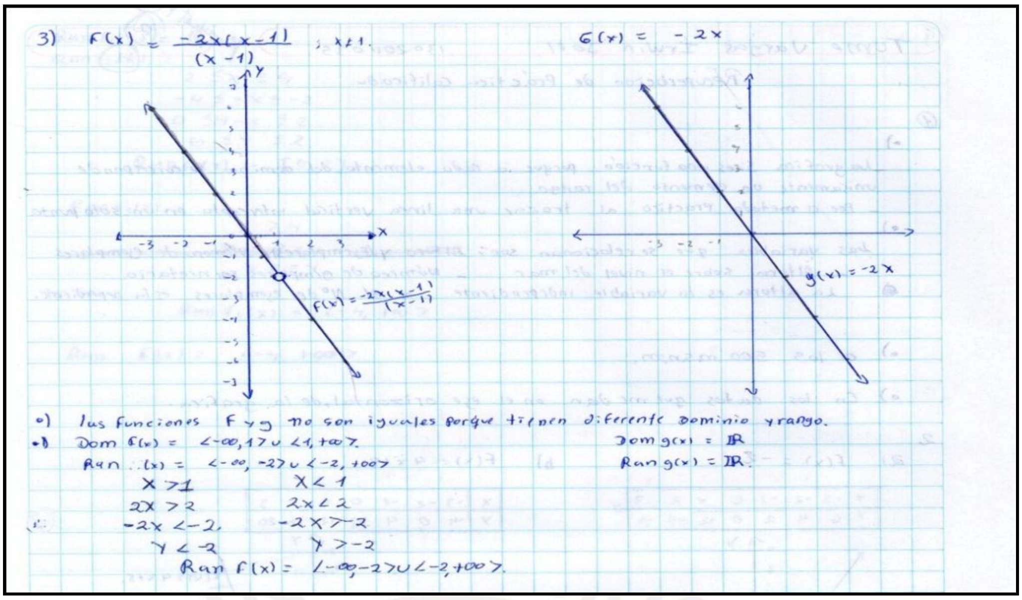


-) Grafican bien en el plano cartesiano la función lineal y lineal afín, explican los pasos que siguen. Hay mejores resultados respecto a la evaluación de proceso, con procesos más adecuados para graficar funciones, accionando bien la función lineal y lineal afín.

Pregunta 3): Gráfica de dos funciones lineales, indicando dominio y rango.






3) $F(x) = \frac{-2x(x-1)}{(x-1)}$; $x \neq 1$.

$G(x) = -2x$

a) las funciones F y g no son iguales porque tienen diferente dominio y rango.

b) Dom $F(x) = \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

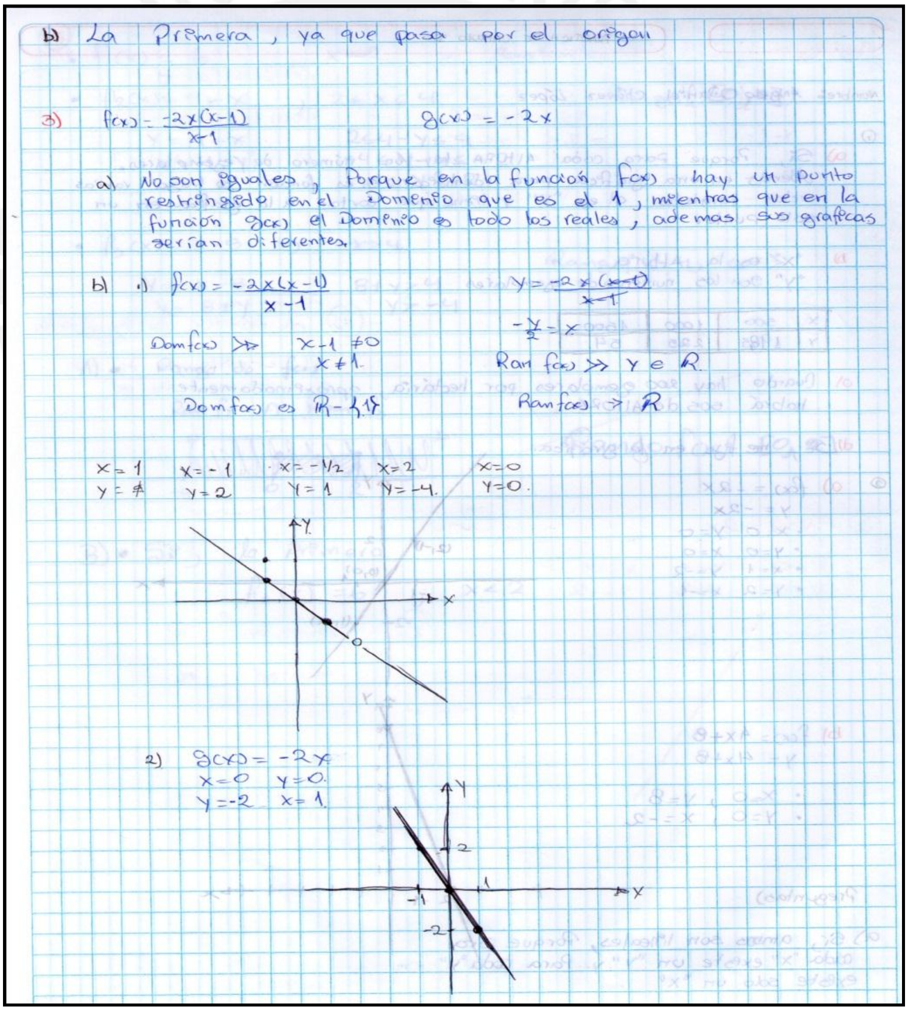
Dom $g(x) = \mathbb{R}$

Ran $(x) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2, +\infty\rangle$

Ran $g(x) = \mathbb{R}$

$x > 1$	$x < 1$
$2x > 2$	$2x < 2$
$-2x < -2$	$-2x > -2$
$y < -2$	$y > -2$

Ran $F(x) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2, +\infty\rangle$.


b) La primera, ya que pasa por el origen

3) $f(x) = \frac{-2x(x-1)}{x-1}$ $g(x) = -2x$

a) No son iguales, porque en la función f(x) hay un punto restringido en el Dominio que es el 1, mientras que en la función g(x) el Dominio es todo los reales, ademas sus graficas serían diferentes.

b) 1) $f(x) = \frac{-2x(x-1)}{x-1}$ $y = \frac{-2x(x-1)}{x-1}$

Dom f(x) >> $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$. $-\frac{y}{2} = x$

Ran f(x) >> $y \in \mathbb{R}$

Dom f(x) es $\mathbb{R} - \{1\}$ Ran f(x) → $\mathbb{R}$

$x = 1$	$x = -1$	$x = -1/2$	$x = 2$	$x = 0$
$y = \nexists$	$y = 2$	$y = 1$	$y = -4$	$y = 0$

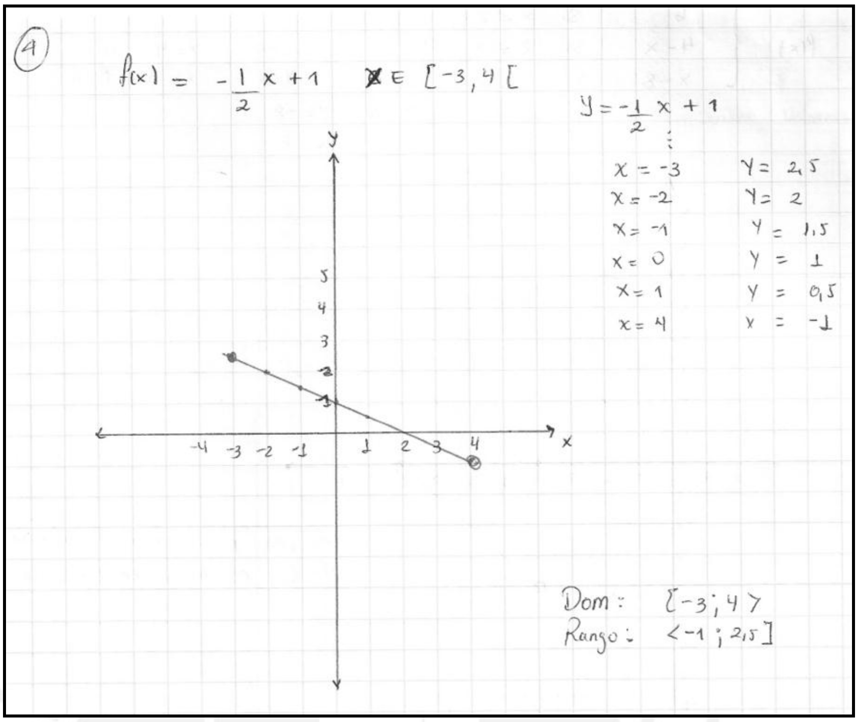
2) $g(x) = -2x$

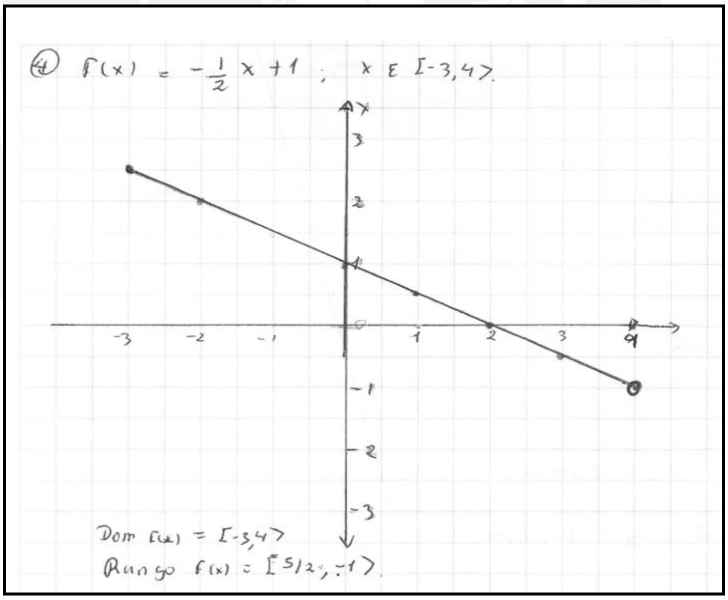
$x = 0$ $y = 0$

$y = -2$ $x = 1$

-) La mayoría grafica bien las funciones en sus respectivos dominios y rangos, explicando por qué las funciones no son iguales. En algunos casos simplifican la función f y comentan que f y g son iguales.

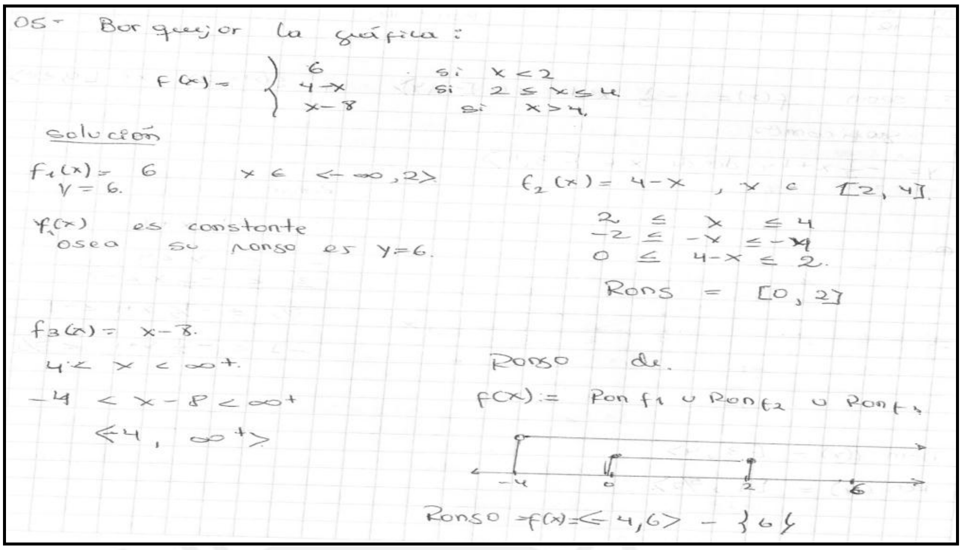
Pregunta 4): Sobre función lineal definida en un intervalo:





-) Tienen una mejor presentación, nombrando los ejes coordenados, distribuyendo mejor las unidades de medida en los ejes. Falta mejorar las notaciones de dominio y rango, y la esquematización de los procesos que siguen, al accionar los objetos de función lineal y su gráfica en un intervalo.

Pregunta 5): Relaciona función seccionada en intervalos.


05- Bor quejor la gráfica:

$f(x) = \begin{cases} 6 & si \quad x < 2 \\ 4-x & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ x-8 & si \quad x > 4 \end{cases}$

solución

$f_1(x) = 6 \quad x \in \langle -\infty, 2 \rangle$

$y = 6.$

$f_1(x)$ es constonte

osea su ronso es $y=6.$

$f_2(x) = 4-x \quad , x \in [2, 4]$

$2 \leq x \leq 4$

$-2 \leq -x \leq -4$

$0 \leq 4-x \leq 2.$

Rons = $[0, 2]$

$f_3(x) = x-8.$

$4 < x < \infty^+.$

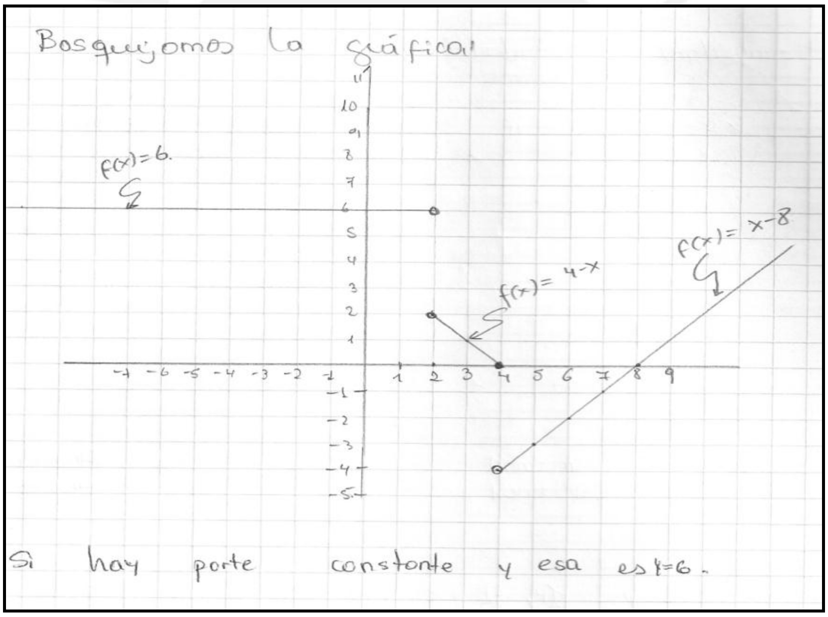
$-4 < x-8 < \infty^+$

$\langle -4, \infty^+ \rangle$

Ronso de.

$f(x) :=$ Ron $f_1 \cup$ Ron $f_2 \cup$ Ron f_3

Ronso $f(x) = \langle -4, 6 \rangle - \{6\}$



-) Accionan los objetos de función lineal y su gráfica, ya esquematizados o formalizados con procedimientos más estructurados, al analizar las gráficas de las funciones definidas en intervalos y, luego, al hallar el rango considerando el dominio o la gráfica; aunque con dificultad al graficar en intervalos abiertos, manejan mejor los esquemas que corresponden.

-) De lo anterior, los alumnos muestran una mejor disposición en el accionar objetos con procesos establecidos y llegar a la esquematización o formalización de resultados.

Para completar la evaluación integral y continua en el proceso de aprendizaje, se requiere conocer el grado de conocimiento que tienen después de la evaluación final (prueba 02: evaluando nuestro aprendizaje); es decir:

-) **Ficha N° 08. ¿Qué grado de conocimiento muestran los alumnos después de la evaluación final?**

Luego de la evalución final, el docente completa la información del grado de conocimiento que el alumno muestra en los temas desarrollados, con la Ficha N° 08 con valoraciones de los temas presentados y con resumen de resultados en la tabla que sigue:

5. Muy bueno 4. Bueno 3. Regular 2. Deficiente 1. Muy deficiente

CUADRO 10

N°	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función	06	18	12	02	02
2	Variable dependiente e independiente	07	15	13	03	02
3	Dominio y rango de una función	09	16	11	03	01
4	Gráfica de una función	07	23	08	01	01
5	Cálculo de valores de una función	12	18	07	03	00
6	Función lineal	06	16	14	02	02
7	Función constante	11	20	09	00	00
8	Función lineal afín	08	19	10	02	01

Fuente: Información proporcionada por el docente

En conclusión, después de la evaluación final, el grado de conocimiento se concentra en bueno y regular, luego en muy bueno; lo que permite apreciar el logro de determinados aprendizajes al término de la unidad planificada con la prueba de evaluación final.

CAPITULO IV

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN Y MUESTRA:

Por la naturaleza de la investigación, y a fin de lograr los objetivos, se ha empleado la metodología de la investigación cualitativa y cuantitativa. El estudio es de tipo descriptivo y pre experimental, pues el modelo metodológico en el tema de funciones reales se desarrolló con una muestra intencional de 40 alumnos, una sección de la especialidad de Electrónica y Telecomunicaciones de un universo de 80 alumnos matriculados en el curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias, semestre académico 2011–1. Para su desarrollo se elaboraron actividades metodológicas con participación activa y colaborativa de los mismos alumnos y con instrumentos de evaluación formativa para mejorar el rendimiento académico. La evaluación se realizó con una evaluación de entrada y de proceso (prueba 01), y una evaluación final (prueba 02) de tipo desarrollo.

4.2. DESARROLLO DEL MODELO METODOLOGICO

Para iniciar el desarrollo de la unidad de Función Real, consideramos que los alumnos conocen el contenido de Conjuntos y el Sistema de los Números Reales, como requisitos. Se hace una breve presentación de los contenidos, enfatizando su importancia en la aplicación a casos concretos.

El modelo metodológico se desarrolla en varias etapas:

1. Aplicación de un formulario de informe personal, para saber el grado de conocimiento que tienen sobre funciones reales.
2. Aplicación de la evaluación de entrada (Prueba 01) que se encuentra en anexo N° 1, para conocer el nivel de conocimientos previos que tiene cada alumno acerca de conceptos básicos de función real.

   El docente indica el grado de conocimiento que el alumno muestra en el desarrollo de la evaluación de entrada, marcando con una X el casillero adecuado usando la ficha 08.

3. Para involucrar el concepto de función, se presenta un repaso de requisitos y casos en un contexto real, con preguntas para inducir al alumno al concepto de función real, trabajando en forma individual y grupal.

   El grupo dividido en subgrupos de 4 o 5 alumnos, desarrollaron una lista de preguntas planteadas. Después de un tiempo prudencial se entregó al coordinador de cada grupo una ficha de observación grupal (Ficha 02) para ser llenado por el mismo y en algunos casos las fichas de coevaluación (Ficha 06) que eran llenadas por cada alumno del grupo evaluando a sus compañeros integrantes del grupo. Finalmente se discutieron en conjunto las soluciones de las preguntas y se absolvieron las dudas.

4. Se aplica la evaluación de proceso, la misma prueba de entrada (Prueba 01) antes de desarrollar el tema de Función Real Lineal, para conocer cuánto vienen aprendiendo del tema.

   El docente indica el grado de conocimiento que el alumno muestra en el desarrollo de la evaluación de proceso, marcando con una X el casillero adecuado usando la ficha 08.

5. Información de los aprendizajes: En el desarrollo de las clases, se evaluaron oralmente a los alumnos para tener una referencia sobre su progreso en cuanto a su asimilación y retención de la información referente, usando la Ficha 07. Se sigue el desarrollo del tema con ejemplos haciendo uso de dinámicas de grupos e intervenciones orales, y aplicando instrumentos de evaluación.

6. En el avance del desarrollo del tema de Función Real Lineal, se aplican instrumentos de evaluación tales como la autoevaluación usando la ficha 05.

7. Antes de la evaluación final: En la Ficha 03, individualmente indicaron el grado de conocimiento del tema; en la Ficha 04 indican el grado de conocimiento en forma grupal.

8. Se aplica la evaluación final (Prueba 02: Evaluando Nuestro Aprendizaje) teniendo en cuenta los objetivos específicos. El docente indica el grado de conocimiento que el alumno muestra en el desarrollo del examen, marcando con una X el casillero adecuado usando la ficha 08.

Las fichas referidas se encuentran en los anexos.

4.3. ANALISIS DE RESULTADOS

1. En el grupo de la muestra habían estudiantes que tenían ciertas referencias sobre los temas de funciones reales; pero les faltaba la comprensión. Este primer aspecto nos permitió esclarecer las diferencias entre conocer, entender y comprender. El primero se entiende como un proceso en que cualquier alumno puede ver por

primera vez un ejercicio, un procedimiento de una función real. El segundo quiere decir que luego de haberlo visto, observado por primera vez trata de encontrarle un sentido, una razón. Esto solo es posible cuando los estudiantes viven en constante interacción con estas prácticas, piensan sobre funciones reales, trabajan con funciones reales y comparten sus procedimientos y resultados. La comprensión permite explicar, comunicar y aplicar los conocimientos adquiridos o aprendidos.

Comparando los resultados: del informe personal del cuadro 1, donde la mayoría contesta que tiene un conocimiento regular o bueno, con la evaluación de entrada del cuadro 2, donde están en un nivel deficiente o muy deficiente, se decide iniciar el modelo metodológico con repaso de conceptos previos o requisitos con motivaciones hacia el tema.

2. La evaluación de entrada o evaluación diagnóstica muestra que los estudiantes presentan serias debilidades en la definición de términos, en el cálculo y operaciones entre conjuntos, cálculo de valores de una función, determinación de conjuntos, gráfica de ecuaciones. Esta evaluación no es una simple aplicación de un instrumento de evaluación; su aplicación y su interpretación ha permitido darle verdadero significado al estudio para establecer las estrategias metodológicas de mejorar las debilidades identificadas.

Comparando la evaluación de entrada con la evaluación de proceso, hay progresos del nivel muy deficiente y hay otros de un nivel deficiente, aumentando en forma significativa el nivel de regular y bueno con lo que se observa que con el modelo metodológico hay tendencias de mejorar los aprendizajes.

Contextualizando la Teoría de las Situaciones didácticas de Brousseau, en la fase de validación la evaluación diagnóstica se propuso tres cosas: en primer lugar, determinar el grado de dominio del estudiante en relación con los objetivos propios de ciertas conductas o habilidades de entrada consideradas como requisitos previos del curso o unidad de enseñanza planeados; en segundo lugar, establecer si el estudiante posee y en qué grado el dominio de los objetivos de una determinada unidad de enseñanza o curso se va a impartir; y en tercer lugar, cuando se realiza durante el desarrollo del proceso de instrucción, establecer las causas de reiterados problemas en el aprendizaje, que presentan los estudiantes.

3. Del cuadro 3, se tiene que la actitud de los integrantes de cada grupo en los trabajos de equipo es de cooperación y colaboración, donde se respetan las ideas, aportando y compartiendo conocimientos y materiales, cumpliendo las tareas asignadas en el proceso de la actividad programada. Estos resultados son indicadores positivos para empezar los trabajos colaborativos y cooperativos, a ello se suma la socialización de conocimientos sobre las actividades programadas y de los materiales de trabajo (separatas, libros, apuntes); y el cumplimiento de

tareas asignadas indica que los estudiantes tienen todas las posibilidades para poder realizar diversos trabajos de modo individual y colectivo.

Las actitudes positivas de los estudiantes generaron una interacción más fluida, activa profundizando el aprendizaje colaborativo, es decir interdependencia positiva (mayor confianza para compartir los materiales y socializar procedimientos y contenidos), interacción promocional cara a cara (en confianza van explicando los ejercicios a los que han entendido menos o poco), responsabilidad individual (sentimiento de querer que todos aprendan y humildad para aprender del otro), manifestaciones de habilidades interpersonales (cada uno muestra su propio concepción de los ejercicios y el modo más fácil de solucionar los problemas de funciones reales), procesamiento grupal (se comparten procedimientos y resultados).

Las actitudes de los estudiantes de manera colectiva e individual cualitativamente se vuelven el eje fundamental del aprendizaje de las funciones reales porque en ella hay mayor confianza, compromiso, socialización de conocimientos, procedimientos y resultados de manera responsable, entre otros.

4. Se aplicó la coevaluación a los alumnos en los grupos de trabajo que realizaron el desarrollo de la actividad del caso D, considerándose aspectos a observar referente a la actividad, según el cuadro 4 de esto se puede decir que hubo una valoración de los aprendizajes logrados en equipo y la importancia de las relaciones interpersonales de los estudiantes.

   La coevaluación, unido a las actitudes positivas de los estudiantes, fue un éxito debido a los trabajos individual y colectivo. Por un lado el trabajo colectivo intragrupal permitió a los estudiantes prepararse en equipo (todos aportan) para alcanzar sus metas que luego fueron evaluados por los otros grupos. La participación activa y positiva en los trabajos de grupo, con debates, aclaración de fórmulas y conceptos, en los procesos para llegar a las soluciones de los problemas y el intercambio de información entre los integrantes permitieron tener un trabajo sintético comprendido por cada uno de ellos, cualquier miembro del equipo quedó así preparado para enfrentar, demostrar y defender los métodos, procedimientos, técnicas utilizadas en el desarrollo de cada ejercicio; cumpliéndose el objetivo de complementar entre todos los conocimientos adquiridos por cada grupo.

5. En los resultados de la evaluación de proceso del cuadro 5 vemos que los estudiantes han mejorado sus aprendizajes en la comprensión de conceptos y en el proceso al desarrollar los ejercicios, de esta manera se demuestra que han superado la deficiencia de la evaluación de entrada cuadro 2.
   Comparando el cuadro 5 de evaluación de proceso con el cuadro 2 de evaluación de entrada, donde se observa que la mayoría de estudiantes presentan una idea

intuitiva de función muy deficiente o deficiente; pero en el proceso de desarrollo o aplicación del modelo, estas se transforman, alcanzando un calificativo de regular o bueno. Lo mismo sucede acerca del conocimiento sobre las variables dependientes e independientes.

Para el caso del conocimiento del dominio y rango se pasa lentamente de muy deficiente y deficiente a regular y bueno. Para el conocimiento de la gráfica de una función de ecuación de primer grado, al inicio la mayoría de estudiantes tenía un conocimiento muy deficiente; pero esta cifra se logra superar (en el proceso) y se distribuyen entre deficiente, regular y bueno.

En cambio para el cálculo de valores de una función, esta se ubica al principio entre regular y bueno; pero vemos que esta cifra es reforzada por un mayor número de estudiantes que adquieren conocimientos sobre este tema e incluso se logra que haya estudiantes con conocimientos muy buenos.

6. Del cuadro 6, respecto a las intervenciones orales, los alumnos que respondieron a la pregunta la mayoría demostró con argumentos válidos relacionadas con la pregunta, haciendo uso de un lenguaje matemático más fluido respecto al tema de funciones reales, que permite percibir progresos en sus aprendizajes.

   Las respuestas a las preguntas en las intervenciones orales muestran el grado de aprendizaje de los estudiantes y la efectividad del modelo que se está desarrollando, mostrando la aplicación de la parte teórica de los ejercicios, comprendiendo e interpretándola de manera adecuada. Este tipo de evaluación ha permito entender la importancia de preguntas sueltas para ser respondidas de modo dinámico y con espacios de confianza. La valoración y respeto a las ideas, opiniones expresadas en diversas respuestas fue importante porque facilitó el aprendizaje de objetivos en las funciones reales.

7. Para el caso de la investigación luego de haber creado confianza en los estudiantes se procedió a la autoevaluación, los resultados son favorables o positivos, puesto que los estudiantes de manera responsable tomaron conciencia de sus propias limitaciones y resaltaron con humildad sus potencialidades.

   Al aplicar la autoevaluación en el proceso de aprendizaje de cada alumno para obtener información de su actitud referente a su participación en clase, en sus prácticas y su responsabilidad, se observa en los resultados del cuadro7 que la mayoría de los alumnos siempre participaron en clase, siendo sus aportes oportunos y pertinentes. Con honestidad realizaron sus trabajos, prácticas y pruebas individuales, respetaron las opiniones de los demás y realizaron sus trabajos con creatividad y dedicación. En sus prácticas siempre aplicaron lo aprendido en los trabajos que realizaron y como también practicaron lo aprendido en los ejercicios. En cuanto a su responsabilidad la mayoría entregó puntualmente todos sus trabajos y prácticas, pero hay que destacar el reconocerse que hay una simple mayoría que dice que a veces asistió puntualmente a clases, puesto que llegaban unos minutos después del inicio de las clases.

Estas características les permitieron finalmente involucrarse más en la aplicación práctica de los contenidos teóricos, en la búsqueda de nuevos procedimientos de solución de ejercicios, en la entrega puntual de los trabajos, en la valoración de la importancia de las funciones reales en la vida cotidiana.

8. De los resultados que se obtienen en el cuadro 8, el grado de conocimiento que creen tener los alumnos de los temas de funciones reales en forma individual, antes de la evaluación final, se observa que el conocimiento de idea intuitiva de función y variable dependiente e independiente es regular y para los demás temas es bueno. También hay algunos alumnos que asignan a los enunciados un valor muy bueno, pero también hay pocos alumnos que asignan un valor de deficiente y una mínima cantidad que asignan el valor de muy deficiente.

   Si comparamos el resultado del cuadro 8 con el cuadro 1 de informe personal vemos que: En el informe personal ningún alumno manifiesta tener un grado de conocimiento muy bueno de los conceptos o enunciados de funciones reales para poderlo explicar a un compañero o compañera, pero en el cuadro 8 vemos que hay alumnos con buen grado de conocimiento de funciones reales.

   Además en el informe personal cuadro 1 vemos que tenían un conocimiento parcial o lo conocían comprendiéndolo parcialmente los enunciados, como también se aprecia que la mayoría de alumnos desconocía función lineal, función constante y función lineal afín. Ahora en el cuadro 8 muestran tener un mejor conocimiento de los enunciados de funciones reales lo cual demuestra que ellos reconocen haber mejorado sus aprendizajes.

   En el trabajo individual los estudiantes realizan las operaciones de funciones reales de modo personalizado, utilizando métodos, técnicas, recursos y procedimientos para construir individualmente conocimientos (enlaces, cuestionarios individuales, apuntes personales, simulaciones de solución, prácticas constantes, entre otras). Estas actividades permiten al estudiante adquirir ciertos conocimientos y habilidades para que puedan interactuar de modo más efectivo en las acciones de discusión, debate, socialización de conocimientos.

   El aprendizaje individual permitió a cada estudiante reflexionar sobre sus conocimientos conceptuales y procedimentales mejorando de esa manera algunos de los errores observados por ellos mismo, esto es prioritario porque fortaleció las habilidades y capacidades para el trabajo en conjunto o grupal. El aprendizaje individual además resultó muy importante para que los estudiantes piensen en sus procedimientos, reflexionen sobre sus resultados y finalmente piensen en la socialización de esos conocimientos con sus compañeros de clase.

9. El aprendizaje individual marca el eje esencial para este nuevo aprendizaje el hecho de organizar el saber para explicárselos a otros constituye una poderosa experiencia de aprendizaje.

   Al recoger la información del grado de conocimiento que tienen los alumnos en los grupos de trabajo, en el cuadro 9 vemos que la mayoría le asigna a los enunciados un valor bueno, seguido de un valor regular y muy bueno. Pero también hay pocos estudiantes que tienen un grado de conocimiento deficiente y ninguno tiene grado de conocimiento muy deficiente, lo cual demuestra el trabajo en equipo es mejor para el aprendizaje de los estudiantes.

   A través de estos saberes colectivos los estudiantes comparten los procedimientos y conceptos construidos de manera individual. El conocimiento compartido a través de los grupos de trabajo aumentó la interdependencia positiva, responsabilidad individual y en rendimiento en el aprendizaje de las funciones reales.

10. Después de haber aplicado la evaluación final (evaluando nuestro aprendizaje) en los resultados del cuadro 10, se observa que el grado de conocimiento que tienen los alumnos con respecto a los enunciados de función real, la mayoría tiene un valor bueno seguido de un valor regular y muy bueno. También se observa que hay una mínima cantidad de alumnos que tienen un grado de conocimiento deficiente y un grado de conocimiento muy deficiente. En general vemos que han superado las deficiencias de la evaluación de entrada y han mejorado más sus conocimientos en la evaluación de proceso.

11. Si comparamos la evaluación de entrada cuadro 2 con la evaluación de proceso cuadro 5 y la evaluación final cuadro 10 observamos ciertos aspectos importantes: en primer lugar en la evaluación de entrada vemos que la mayoría de estudiantes muestra un grado de conocimiento deficiente y muy deficiente especialmente en la gráfica de una función de primer grado, en la variable dependiente e independiente y en la función lineal afin; sin embargo en la evaluación de proceso estas dan saltos hacia regular con mayor cantidad. Para la evaluación final en estas temáticas donde había más problemas de deficiencia se mejoró considerablemente, puesto que se alcanzó grados de conocimiento bueno y muy bueno. Incluso para la gráfica de funciones se evoluciona en el conocimiento de manera prioritaria porque la mayor cantidad de alumnos alcanzaron conocimientos con calificativo de buenos.

CONCLUSIONES

1. En la evaluación de entrada la mayoría de estudiantes tiene una valoración de un conocimiento muy deficiente y deficiente acerca de funciones reales; y en la evaluación de proceso los estudiantes mejoran sus grados de conocimientos en la comprensión de los conceptos de funciones reales, superando deficiencias de la evaluación de entrada.
2. El repaso de conceptos previos o requisitos con motivaciones hacia el tema de funciones reales les permitió a los estudiantes comprender y mejorar sus aprendizajes que tuvieron en la evaluación de entrada.
3. La actitud de los integrantes de cada grupo de compartir sus conocimientos y materiales dentro del grupo les permitió que el trabajo sea más eficaz; es decir, esta actitud del estudiante, colectiva e individual, cualitativamente fue el eje fundamental del aprendizaje de las funciones reales.
4. La metodología activa y colaborativa, en el proceso de la enseñanza – aprendizaje, produjo cambios significativos en los estudiantes hacia la mejor comprensión de los conceptos y propiedades del tema de función real.
5. La aplicación de la coevaluación a los estudiantes en los grupos de trabajo colectivo intragrupal en el desarrollo de una de las actividades programadas les permitió prepararse en equipo con una participación activa, tener un trabajo sintético comprendido por cada uno de ellos.
6. Hay mejora en los aprendizajes de los estudiantes en la comprensión y aplicación de conceptos a situaciones reales.
7. Los estudiantes mejoraron sus niveles de aprendizaje trabajando en equipos en comparación cuando se iniciaron los trabajos grupales, el conocimiento compartido a través de los grupos de trabajo aumentó la interdependencia positiva, responsabilidad individual y en rendimiento en el aprendizaje de las funciones reales.
8. En la respuesta a las preguntas en las intervenciones orales los estudiantes demostraron la comprensión y aplicación de la parte teórica en los ejercicios, esta evaluación también ha permitido la importancia de las preguntas sueltas de manera dinámica teniendo diversas opiniones expresadas.
9. La aplicación de la autoevaluación en el proceso de aprendizaje de cada alumno para obtener información de su actitud referente a estas características como son: su participación en clase, en sus prácticas y su responsabilidad; le permitió cumplir en la entrega de sus trabajos, en involucrarse más en la aplicación práctica de los contenidos teóricos de las funciones reales en la vida cotidiana y dar solución a los ejercicios con un procedimiento adecuado.

10. Las actividades del trabajo individual les permitió adquirir ciertos conocimientos y habilidades para que puedan interactuar de modo más efectivo en las acciones de discusión, debate y en la socialización de conocimientos teóricos.
11. El aprendizaje individual permitió a cada estudiante reflexionar sobre sus conocimientos conceptuales y procedimentales mejorando de esa manera algunos de los errores observados por ellos mismo, también el aprendizaje individual resultó muy importante para que los estudiantes piensen sobre los procedimientos que siguieron para alcanzar el aprendizaje, reflexionen sobre sus resultados y, finalmente, piensen en la socialización de esos conocimientos con sus compañeros de clase.
12. En la evaluación final se mejoró considerablemente los aprendizajes de los estudiantes alcanzándose un grado de conocimiento de bueno y muy bueno, en general superando las deficiencias de la evaluación de entrada y han mostrado mejoras de sus conocimientos que en la evaluación de proceso.

RECOMENDACIONES

1. Aplicar una evaluación diagnóstica (prueba de entrada o de requisitos) al inicio de una unidad o un curso para que el docente conozca el nivel de conocimientos previos que sus estudiantes tienen sobre los temas que van abordar.
2. Hacer un seguimiento y orientación en el proceso de aprendizaje a los alumnos de rendimiento académico bajo, sin descuidar a los demás a través de actividades complementarias (trabajos encargados, ejercicios, evaluaciones orales etc.)
3. Aplicar una metodología activa en el desarrollo de los contenidos mediante estrategias metodológicas participativas y colaborativas para que desarrolle en los estudiantes niveles de comunicación.
4. Aplicar la evaluación formativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje a otros cursos de matemática a fin de mejorar el rendimiento académico de los estudiantes.
5. Las entidades dedicadas a la enseñanza de la matemática deben promover la implementación y actualización de los docentes dentro de las modalidades de trabajo considerados en la presente investigación con la finalidad que se mejore el rendimiento académico de los estudiantes de la Universidad Nacional de Piura.
6. Adecuar este modelo metodológico para trabajar el área de Matemática en educación primaria y secundaria. Sobre todo en esta última con la finalidad de cimentar una buena base para la mejor comprensión y manejo de los conceptos matemáticos los cuales serán de suma utilidad en educación superior.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Ballester, M. (2008). *Evaluación como ayuda al Aprendizaje.* España: GRAO.

Ballester, M. (2000). *Evaluación como ayuda de Aprendizaje.* Caracas: Laboratorio Educativo.

Bernardo, J. (2004). *Una didactica para hoy.* España: RIALP. S.A.

Bonvecchio, M., & Grasso, A. (2006). *Evaluacion de los Aprendizajes.* Argentina: Novedades Educativas.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: El Zorzal.

Cámara, Á. (2007). *Curso básico de matemáticas y estadística.* Madrid: Delta.

Capella Riera, J., & Moreno Izaguirre, G. (1999). *Aprendizaje y Constructivismo.1ª Edición.* Lima: Massey and Vainer.

Carranza, C., & Kong, M. (1970). *Teoría de Conjuntos y Números Naturales.* Impreso en Perú Offset. Lima – Perú.

Cerda Gutiérrez, H. (2000). *La Evaluación Como Experiencia Total. 1ª Edición.* Colombia: Nomos S.A.

Chavarría, J. (2006, Año 1, Número 2). *Teoría de las situaciones didácticas*. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* , 1-10.

Concha, S. (1989). *Un modelo metodológico alternativo para la enseñanza de una segunda lengua*. *Comunicación, lenguaje y educación* , 65-75.

De Guzmán, M. (1987*) Bachillerato 1 de Matemáticas*. España.

Díaz, F., & Hernández, R. (1998). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. 1ª Edición.* México: Mc Graw-Hill .

Flores, R. (1999). *Evaluación Pedagógica y Cognición*. Mc Graw – Hill Interamericana, S.A. Santafé de Bogotá, D.C., Colombia.

Fuensanta, H. P., & Soriano Ayala, E. (1997). *La Enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria.* Murcia: Universidad de Murcia.

Giné Frexies, N., & Parmerisa Aran, A. (2000). *Evaluación en la Educación Secundaria.1ª Edición.* España: GRAO.

Godino, J., & Font, V. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Matemáticas y su Didáctica para Maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Goleman, D., Cherniss, C., & Bennis, W. (2005). *Inteligencia emocional en el trabajo.* España: Kayrós.

Goñi, J. (2011). *Didactica de Las Matematicas.* España: GRAO.

Goñi, J. (2006). *Matemáticas e interculturalidad.* España: GRAO.

Goñi, J., & Alcina, C. (2000). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI.* España: GRAO.

Lages, E., Pinto, P., Morgado, A. (2000). *La Matemática en la Enseñanza Media.* Vol. 1. IMCA.

Larson, R., Hostetler, H., Edwuars, B. (1995). *Cálculo Vol. 1*. 5ª *Edición*. Mc.Graw – Hill. España.

Larson, R., Bruce, H., Edwuars, B. (2010). *Cálculo 1*. 9ª *Edición*. Ed.Mc.Graw – Hill. México.

Leithold, L. (1997). *Matemáticas Previas al Cálculo*. *3ª Edición*. México.

ITESO. (2003). *El laberinto de las matemáticas*. *Renglones* .

Kú, D., Trigueros, M., & Oktac, A. (2008). *Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE*. *Educación Matemática* , 65-89.

Maslow, A. H. (1991). *Motivación y Personalidad.* Madrid: Díaz de Santos.

Mateo, J. (2000). *La Evaluación Educativa su Práctica Otras Metáforas. 1ª Edición.* Barcelona: Horsori.

Medina, M., & Kwiatkowska, T. (2000). *Ciencia, tecnología/naturaleza, cultura en el siglo XXI.* Anthropos: España.

Molina, W. (2009). *Estructura multiplicativa, fracciones y estadística descriptiva.* Colombia: Universidad Francisco José de Caldas.

Nuria, G., Artur, P. (2000). *Evaluación en la Educación secundaria*. *1ª Edición. Ed. GRAO. España.*

Ochoa, R. (2000). *Evaluación Pedagógica y Cognición.* México: Mc.Graw-Hill Interamericana.

Ortiz, A. (2007). *Pedagogia de la Educacion Superior y Docencia Universitaria.* Colombia: CEPEDID.

Planas, N., & Alsina, À. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas.* España: GRAO.

Pimienta, J. (2008). Evaluación de los Aprendizajes. 1ª *Edición. Ed. Trillas. México.*

Requejo, A. (2003). *Educación permanente y educación de adultos.* España: LIBERDUPLEX.

Santos, A. (2000) *Evaluación Educativa 1*. Editorial Magisterio del Rio de la Plata. *3ª Edición. Argentina.*

Schunk, D. (1997). *Teorías del Aprendizaje. 2ª Edición.* México: Prentice Hall.

Silberman, M. (1996). *Aprendizaje activo: 101 estrategias para enseñar cualquier materia.* Argentina: Troquel.

Stewart, J. (1998). *Cálculo.* Internacional Thomson Editores, S.A. de C. V. México.

Valdivia, R. (2000). *Problemática de la Evaluación en Educación Superior*. Cuadernos Espg – Upt. Tacna. Perú.

Vizcarro, C. (2000,pág.129). *Nuevas Tecnologías del Aprendizaje.* España: Universidad Autónoma de Madrid .

Cuentas, M. A. (diciembre de 2010). *MODELO METODOLOGICO PARA LOS PROCESOS DE DIALOGO CON PERTINENCIA CULTURAL*. Recuperado el 20 de febrero de 2012, de http://www.dialogo.gob.gt/sites/default/files/MODELO%20METODOLOGICO%20BASE1.pdf

Flores, P. (1997). *Funcionamiento de la clase de matemáticas*. Recuperado el Viernes, 24 de Marzo de 2012, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-sp/Dinamica.pdf

Rabino, A. y. (s.f.). *Aprender álgebra utilizando contextos significativos.* Recuperado el 26 de febrero de 2012, de http://www.soarem.org.ar/Documentos/22%20Rabino.pdf

wikimusas. (s.f.). Recuperado el viernes 24 de febrero de 2012, de Situación Didáctica: http://wikimusas.wikispaces.com/Situaci%C3%B3n+Did%C3%A1ctica

ANEXOS

ANEXO Nº 1. FICHAS DE INSTRUMENTOS DE EVALUACION

Ficha 01

INFORME PERSONAL

Rellena (individualmente) el formulario de conceptos siguientes. Para hacerlo, indica en la columna correspondiente:

- Columna a) si has estudiado el concepto : Sí o No
- Columna b) El grado de conocimiento o de comprensión que tienes del concepto:

1= No lo conozco
2 = Tengo un conocimiento parcial
3 = Lo conozco, pero lo comprendo parcialmente
4 = Tengo un buen conocimiento y una buena comprensión
5 = Lo puedo explicar a un compañero o compañera

Conceptos	a) Estudio previo (Sí o No)	b) Grado de conocimiento
• Función		
• Dominio de una función		
• Rango de una función		
• Gráfica de una función		
• Función Lineal		
• Función constante		
• Función lineal afín		

Escala de estimación numérica

Ficha 02

FICHA DE OBSERVACIÓN GRUPAL

GRUPO : ____
ESPECIALIDAD : ____
PROFESOR : ____

INSTRUCCIONES: Esta ficha será llenada por el coordinador de grupo de acuerdo al grado de participación que tienen sus compañeros al término del desarrollo de los ejercicios propuestos por el profesor.
Para ello, el coordinador marcará de acuerdo al siguiente detalle.

S : Siempre
AV : A veces
N : Nunca

Integrantes	Respeta las ideas de los demás	Aporta y comparte conocimiento al desarrollo de la actividad programada	Aporta y comparte materiales	Cumple con la tarea asignada dentro del grupo

Escala de estimación verbal

Ficha 03

GRADO DE CONOCIMIENTO DE LOS ALUMNOS INDIVIDUALMENTE ANTES DE LAS EVALUACION FINAL.

Instrucciones: Indica el grado de conocimiento de cada tema, marcando con X el casillero adecuado. Los números representan los siguientes valores:

5 Muy bueno 4 Bueno 3 Regular 2 Deficiente 1Muy deficiente

¿Qué grado de conocimiento tienes respecto de los siguientes enunciados?

	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función					
2	Variable dependiente e independiente					
3	Dominio y rango de una función					
4	Gráfica de una función					
5	Cálculo de valores de una función					
6	Función lineal					
7	Función constante					
8	Función lineal afín					

Escala de estimación numérica

Ficha 04

GRADO DE CONOCIMIENTO DE LOS ALUMNOS EN LOS GRUPOS DE TRABAJO ANTES DE LAS EVALUACION FINAL.

Instrucciones: Indique el grado de conocimiento de cada tema que muestre el grupo, marcando con X el casillero adecuado. Los números representan los siguientes valores:
5 Muy bueno 4 Bueno 3 Regular 2 Deficiente 1 Muy deficiente

¿Qué grado de conocimiento tienen los alumnos integrantes del grupo.... respecto de los siguientes enunciados?

	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función					
2	Variable dependiente e independiente					
3	Dominio y rango de una función					
4	Gráfica de una función					
5	Cálculo de valores de una función					
6	Función lineal					
7	Función constante					
8	Función lineal afín					

Escala de estimación numérica

AUTOEVALUACIÓN (FICHA 05)

Nombre: ______________________________ Fecha ________

RESPONDE A CADA PREGUNTA SELECCIONANDO UNA DE LAS ALTERNATIVAS PROPUESTAS:

I. PARTICIPACIÓN EN CLASE:

	Siempre	A veces	Nunca
1. Mis aportes en clase fueron siempre oportunos y pertinentes.			
2. Trabajé con honestidad y responsabilidad al realizar mis trabajos, prácticas, pruebas individuales.			
3. Respeté las opiniones de los demás			
4. Realicé mis tareas (trabajos, prácticas, etc) con creatividad y dedicación			

II. PRACTICA

	Siempre	A veces	Nunca
1. Apliqué lo aprendido en la presentación de mis trabajos			
2. Practiqué lo aprendido en algunos ejercicios propuestos.			

III. RESPONSABILIDAD

	Siempre	A veces	Nunca
1. Asistí puntualmente a las clases			
2. Entregué puntualmente todos mis trabajos, prácticas, etc.			

EVALUACIÓN DEL CURSO : ___________________________________

Logros :

Dificultades :

Sugerencias :

FICHA 06

FICHA DE COEVALUACIÓN

Nombre: ____

Tema: ____

Fecha ____

Instrucciones: Responde verazmente las preguntas (marca con un aspa), esta ficha será llenada por el coordinador de grupo de acuerdo a su desempeño de cada integrante, asignándole una nota con la opinión de los demás del grupo.

Aspectos Observados		Siempre	A veces	Nunca
1.	Analiza la situación problemática que se le presenta.			
2.	Construye la caja sin tapa con las medidas que él asigna.			
3.	Responde correctamente a las preguntas que se le fórmula.			
4.	Obtiene una expresión que le permita determinar el volumen.			
5.	Halla el volumen de la caja de acuerdo a las medidas asignadas.			
6.	Determina el menor y mayor valor numérico para la altura de la caja.			
7.	Explica el proceso que siguió para construir la caja sin tapa.			

Escala de estimación verbal

FICHA 07

EVALUACIÓN DE INTERVENCIONES ORALES

INSTRUMENTO DE REGISTRO USO INDIVIDUAL
ALUMNO : ____
PROFESOR : ____________________________FECHA:____________
ESPECIALIDAD : _____________________________

OBJETIVO A EVALUAR: Capacidad de comprensión y respuesta acertada.

Aspectos a observar	SI	NO
Responde a la pregunta		

De los que responden la pregunta Si:

Aspectos a observar	SI	NO
1. Responde con proposiciones que tiene relación con la pregunta		
2. Se atiene sólo a la información recibida		
3. Distorsiona la información recibida		
4. Realiza comentarios sobre lo demandado		
5. Adiciona información de otras fuentes		

FICHA 08

GRADO DE CONOCIMIENTO OBTENIDO DE LAS EVALUACIONES ESCRITAS

Instrucciones: Después de haber tomado la evaluación escrita, el Docente indicará el grado de conocimiento que el alumno muestra en el tema correspondiente, marcando con X el casillero adecuado. Los números representan los siguientes valores.

5. Muy bueno 4. Bueno 3. Regular 2. Deficiente 1. Muy deficiente

	ENUNCIADOS	5	4	3	2	1
1	Idea intuitiva de función					
2	Variable dependiente e independiente					
3	Dominio y rango de una función					
4	Gráfica de una función					
5	Cálculo de valores de una función					
6	Función lineal					
7	Función constante					
8	Función lineal afín					

Escala de estimación numérica

ANEXO Nº 2. EVALUACION DE ENTRADA Y DE PROCESO (PRUEBA 01)

1) Definir los siguientes términos
   a) Relación Binaria
   b) Función
   c) Dominio y Rango de una Función
   (4p)

2) Dado los conjuntos:
   $A = \{1; 2; 3; 4\}$
   $B = \{(x,y) \in AxA \,/\, x < y\}$
   $C = \{(x,y) \in AxA \,/\, x + y = 5\}$
   Hallar $C - (B \cap C)$
   (4p)

3) Dado la siguiente expresión $f(x) = 2x+5$
   Hallar:
   a) $f(3)$, b) $f(-2)$, c) $f(m)$ y d) $f(m+1)$
   (3p)

4) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$, determinar si los siguientes conjuntos $f = \{(1,b), (2,a), (3,d)\}$, $g = \{(1,b), (1,c), (3,e)\}$, $h = \{(1, a), (2, c), (3, b), (3, d), (4, e)\}$ son funciones de A en B, además hallar su dominio y rango.
   (3p)

5) Graficar
   a. $x + y = 0$
   b. $2x + 3y = 12$
   c. $x - y = 0$
   d. $y = x^2$
   e. $x = y^2$
   f. $y = \sqrt{x-1}$
   (6p)

ANEXO Nº 3. RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES ESCRITAS Y CUALITATIVAS

a) RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES ESCRITAS

Nº	Evaluación de Entrada (Prueba 01)	Evaluación de Proceso-E1 (Prueba 01)	Evaluación Final-E2 (Prueba 02)	Promedio E1,E2
1	4	16	16	16
2	11	10	15	12,5
3	7	14	15	14,5
4	10	14	18	16
5	10	15	16	15,5
6	7	14	15	14,5
7	5	16	18	17
8	7	13	15	14
9	7	12	13	12,5
10	14	16	18	17
11	15	18	19	18,5
12	9	12	13	12,5
13	8	14	15	14,5
14	8	14	16	15
15	7	13	11	12
16	3	13	12	12,5
17	6	16	16	16
18	9	6	12	9
19	5	11	17	14
20	6	15	16	15,5
21	4	8	15	11,5
22	11	9	16	12,5
23	6	13	16	14,5
24	5	8	10	9
25	8	11	17	14
26	3	15	14	14,5
27	10	16	18	17
28	6	15	17	16
29	10	16	15	15,5
30	7	15	12	13,5
31	10	17	18	17,5
32	7	8	9	8,5
33	14	16	18	17
34	8	15	10	12,5
35	6	13	13	13
36	11	16	17	16,5
37	10	15	16	15,5
38	9	11	15	13
39	11	14	16	15
40	8	9	8	8,5

Fuente: Registro de calificaciones del profesor

Los números representan los siguientes valores numéricos

1. Muy Deficiente: [00 - 05] = Desaprobado
2. Deficiente: [06 – 10] = Desaprobado
3. Regular: [11 - 13] = Aprobado
4. Bueno: [14 –16] = Aprobado
5. Muy Bueno [17–20] = Aprobado

b) RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES CUALITATIVAS: AUTOEVALUACIÓN, COEVALUACIÓN E INTERVENCIONES ORALES CON PESOS 1, 1 Y 2 RESPECTIVAMENTE

N°	APELLIDOS Y NOMBRES	peso 1	peso1	peso2	PROMEDIO
		AUTOEVAL.	COEVAL.	I.O.	
1		16.00	15.00	16.00	15.75
2		12.00	12.00	11.00	11.50
3		14.00	13.00	14.00	13.75
4		17.00	15.00	16.00	16.00
5		14.00	15.00	14.00	14.25
6		16.00	14.00	15.00	15.00
7		18.00	16.00	17.00	17.00
8		13.00	11.00	10.00	11.00
9		14.00	12.00	12.00	12.50
10		17.00	15.00	15.00	15.50
11		18.00	16.00	17.00	17.00
12		13.00	11.00	9.00	10.50
13		14.00	13.00	13.00	13.25
14		15.00	14.00	15.00	14.75
15		12.00	12.00	11.00	11.50
16		13.00	11.00	12.00	12.00
17		16.00	15.00	14.00	14.75
18		11.00	11.00	11.00	11.00
19		14.00	12.00	13.00	13.00
20		15.00	13.00	13.00	13.50
21		13.00	11.00	11.00	11.50
22		13.00	12.00	13.00	12.75
23		14.00	13.00	14.00	13.75
24		11.00	10.00	10.00	10.25
25		13.00	13.00	14.00	13.50
26		14.00	14.00	15.00	14.50
27		19.00	16.00	18.00	17.75
28		15.00	14.00	14.00	14.25
29		16.00	14.00	16.00	15.50
30		14.00	12.00	12.00	12.50
31		17.00	15.00	16.00	16.00
32		11.00	10.00	9.00	9.75
33		14.00	13.00	14.00	13.75
34		12.00	12.00	11.00	11.50
35		13.00	12.00	13.00	12.75
36		18.00	16.00	17.00	17.00
37		15.00	13.00	14.00	14.00
38		13.00	12.00	13.00	12.75
39		14.00	14.00	14.00	14.00
40		10.00	8.00	9.00	9.00