

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE EDUCACIÓN



PUCP

**Lineamientos didácticos para la resolución de problemas matemáticos aritméticos
en niños de primaria entre 6 y 8 años según la metodología de George Pólya**

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR EL GRADO DE
BACHILLERA EN EDUCACIÓN**

AUTORA:

Miriám Eliana Atoche Palacios

ASESORA:

Lucrecia Elizabeth Chumpitaz Campos

Diciembre, 2018

RESUMEN

La presente tesina es una investigación de carácter documental monográfica, ya que involucra el uso de capacidades cognitivas como la búsqueda, selección y análisis exhaustivo de diversas fuentes de información, que en este estudio se realizó sobre el tema “Lineamientos didácticos para la resolución de problemas matemáticos aritméticos en niños de primaria entre 6 y 8 años según la metodología de George Pólya”. Se considera de gran importancia esta investigación, ya que existe un escaso estudio en relación a estrategias heurísticas y lineamientos específicos en cada una de las fases de esa metodología.

Para ello, se plantea como objetivo principal indagar sobre la importancia de la resolución de problemas matemáticos, reconociendo la trascendencia de las cuatro fases de la metodología de Pólya, y de esa manera proponer algunos lineamientos didácticos en las aulas de educación Primaria.

Cada uno de los lineamientos propuestos en las fases de la Comprensión del problema, el diseño de un plan, la ejecución del plan y la visión retrospectiva serán orientaciones clave para que los estudiantes tengan un proceso significativo y motivador en la resolución de problemas matemáticos, de manera reflexiva y crítica. Asimismo, esos serán de beneficio para que los maestros pueden crear diferentes formatos y técnicas en relación a cada una de esas etapas de la metodología de Pólya.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	5
CAPÍTULO 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS ARITMÉTICOS.....	7
1.1. Pedagogía Problémica.....	7
1.1.1. Problemas matemáticos.....	8
1.1.2. Características de un problema matemático.....	9
1.1.3. Componentes de un problema matemático.....	10
1.1.4. Problemas matemáticos aritméticos de enunciado verbal.....	10
1.1.4.1. Problemas de cambio.....	11
1.1.4.2. Problemas de combinación.....	12
1.1.4.3. Problemas de comparación.....	13
1.1.4.4. Problemas de igualación.....	13
1.2. Resolución de problemas matemáticos aritméticos.....	14
1.2.1. Capacidades en la resolución de problemas.....	16
1.2.1.1. Comprensión conceptual.....	16
1.2.1.2. Cálculo procedimental.....	17
1.2.1.3. Estimación.....	17
1.2.1.4. Comunicación.....	17
1.2.1.5. Actitud positiva.....	18
1.2.2. Niveles en la resolución de problemas.....	19
CAPÍTULO 2: LINEAMIENTOS DIDÁCTICOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS BASADOS EN LA METODOLOGÍA DE PÓLYA.....	20
2.1. Fases o etapas de la metodología.....	21
2.1.1. Fase 1: Comprensión del problema.....	21
2.1.2. Fase 2: Concepción y diseño de un plan.....	22
2.1.3. Fase 3: Ejecución del plan.....	23
2.1.4. Fase 4: Visión retrospectiva.....	23
2.2. Criterios metodológicos en cada fase.....	24
2.2.1. Comprensión.....	24
2.2.2. Concepción y diseño de un plan.....	27
2.2.3. Ejecución del plan.....	28
2.2.4. Visión retrospectiva.....	30
2.3. Rol docente.....	32
CONCLUSIONES.....	35



INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la literatura revisada y en base a las experiencias previas de observación en las aulas, se ha podido evidenciar que, en las clases de Matemática: la mayoría de estudiantes del nivel primaria no tienen experiencias positivas cuando resuelven problemas matemáticos, debido a que no comprenden la situación que dichos problemas proponen; en otros casos, los niños no realizan un plan adecuado de los pasos para llegar a dar respuesta a esa situación problemática. Por otro lado, de acuerdo con el Minedu (2016), en segundo grado de primaria existe un 37,3% de niños en ese nivel. Es decir, que los estudiantes están logrando parcialmente los aprendizajes esperados para el III ciclo, se encuentran en camino de lograrlos, pero todavía tienen dificultades en esas áreas. El objetivo es que más del 50% de los alumnos se encuentre en el nivel satisfactorio.

Ante toda esta problemática, considero importante la realización de la presente investigación titulada: *Importancia de las cuatro fases de la metodología de George Pólya en la resolución de problemas matemáticos aritméticos en niños de Primaria entre 6 y 8 años*. En virtud a lo anteriormente planteado, la presente investigación busca responder a la siguiente interrogante: *¿Cómo las fases de la metodología de George Pólya pueden facilitar la resolución de problemas matemáticos aritméticos, en estudiantes entre 6 y 8 años?*. A lo largo de la presente investigación daremos respuesta a dicha pregunta.

Para ello, se ha planteado como objetivo general indagar sobre la importancia de las cuatro fases de la metodología de George Pólya basada en la resolución de problemas matemáticos aritméticos en niños de Primaria entre 6 y 8 años.

Esta tesina está compuesta por dos capítulos. El primero tiene como objetivo reconocer la importancia de la resolución de problemas aritméticos. En este se parte del concepto de pedagogía problémica como un enfoque integrador de la resolución de problemas, la cual tiene como finalidad que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático a través de dicha competencia. Asimismo, se aborda una revisión teórica sobre los problemas matemáticos de tipo aritméticos, sus características principales, así como sus cuatro tipologías de acuerdo a los grados indicados. Además, se describe la importancia de la resolución de problemas matemáticos como una competencia transversal en el desarrollo de aprendizaje significativo de los alumnos. Finalmente, se indaga acerca de las actitudes y destrezas que están implicadas en ese proceso matemático.

Por otro lado, el segundo capítulo tiene como objetivo analizar la importancia de las cuatro fases de la metodología de George Pólya en la resolución de problemas matemáticos aritméticos, con la finalidad de proponer algunos lineamientos didácticos en cada una de esas. Asimismo, en este se aborda la importancia de las fases de comprensión, diseño de un plan, ejecución del plan y la visión retrospectiva de la metodología mencionada. Además, se proponen algunos lineamientos didácticos en cada una de esas etapas, los cuales serán trabajados por el docente y los estudiantes de manera participativa. Por último, se indaga acerca del rol que cumple el maestro a lo largo de todo el proceso de resolución de problemas.



CAPÍTULO 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS ARITMÉTICOS

Este capítulo tiene como objetivo identificar la importancia de la resolución de problemas aritméticos aditivos en estudiantes entre 6 y 8 años del nivel Primaria. En relación a esto, cabe señalar que la resolución de problemas matemáticos es una competencia para la vida, ya que los estudiantes diariamente están resolviendo problemas que se relacionan con sus intereses, necesidades y contexto. En este sentido, el desarrollo de esa les permitirá desenvolverse de manera autónoma en su contexto y en otros también, pues ser competente implica ser capaz de usar conocimientos, destrezas y habilidades necesarias para dar solución a un problema.

Para conseguir este objetivo, hemos organizado el contenido del capítulo en tres partes. En primer lugar, realizamos una revisión teórica sobre la pedagogía problemática en base a problemas matemáticos de tipo aritméticos, sus características principales, así como sus cuatro tipologías de acuerdo a los grados indicados. En segundo lugar, se realiza un estudio sobre la importancia de la resolución de problemas matemáticos como una competencia transversal en el desarrollo del aprendizaje significativo de los alumnos. Finalmente, se indagará acerca de las actitudes y destrezas que están implicadas en ese proceso matemático. A continuación, se explicará de manera detallada lo mencionado en anteriores líneas.

1.1. Pedagogía Problemática

La presente investigación parte de un concepto integrador de aprendizaje en el contexto de las matemáticas. Por ello, se comprende a la pedagogía problemática como el concepto del cual parte la resolución de problemas matemáticos. En este sentido, el aprendizaje problemático es el proceso de resolución de problemas por parte de los estudiantes, en el cual se produce la apropiación creativa de los conocimientos, habilidades y valores, de las experiencias acumuladas por la sociedad, además de la información de una personalidad activa, altamente desarrollada y consciente. (Ortiz, 2009, p.45). En otras palabras, esta pedagogía tiene como finalidad que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático a través de la competencia mencionada.

Acorde con Larios (citado por Rangel y García, 2014) el estudiante construirá nuevos conocimientos matemáticos a partir de situaciones problemáticas en las que él reflexione sobre los procesos y estrategias que usa. En este sentido, dicho autor reafirma que, en el aprendizaje de las Matemáticas basado en problemas, el proceso de enseñanza debe ser de manera sistematizada para que los estudiantes comprendan de manera articulada los diferentes conceptos y relaciones numéricas. En este caso, se considera que el docente es

un mediador y guía en el proceso de aprendizaje de los alumnos, pues serán estos quienes de manera autónoma manejan sus conocimientos y estrategias para resolver una diversidad de situaciones problemáticas.

1.1.1. Problemas matemáticos

A partir de la literatura indagada, se puede identificar que hay diversas interpretaciones sobre lo que un problema matemático significa en el ámbito de las Matemáticas. Por un lado, de acuerdo con Luceño (1999), un problema matemático es “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo” (p.13). En este sentido se destaca que, la vía para pasar del planteamiento a la situación exigida debe ser desconocida para que sea realmente un problema. En esta línea, Charnay y Polya (citados por Rangel y García, 2014) destacan que un problema solo será una situación problemática siempre y cuando para el alumno sea un reto y dificultad a resolver, siendo éste consciente de las acciones que se necesitan para alcanzar el objetivo trazado. Desde ambos puntos de vista se puede reconocer que el problema es una situación compleja la cual supone un reto y una meta por alcanzar a través de un conjunto de acciones.

Por otro lado, Sadovsky (citado por Itzcovich 2009), agrega que, “un problema es tal en la medida que invita a un desafío y la toma de decisiones en donde los conocimientos de que se disponen no son suficientes, pero tampoco, tan escasos” (p. 3). En este caso, un problema se entiende como una situación compleja que busca de una solución para comprenderla, depende de los conocimientos y estrategias cognitivas que el estudiante tenga para darle respuesta. Asimismo, se rescata lo dicho por Castro, Rico y Castro (1995), quienes mencionan que un problema matemático se refiere a una situación en la que hay una meta por alcanzar y donde existen obstáculos para llegar a ella; siendo dicha problemática de carácter cuantitativa y que requiere de técnicas matemáticas para su resolución no necesariamente a través de un algoritmo en específico.

A partir de las conceptualizaciones presentadas, se comprende que un problema hace referencia a una situación problemática compleja, en la cual se plantea una meta por alcanzar a través de un conjunto de procedimientos pensados de manera estratégica y consciente. Además, un problema será un reto en la medida que para el estudiante signifique algo complejo por resolver, ya que todos los niños tienen diferentes perspectivas de dichas situaciones.

1.1.2. Características de un problema matemático

Todo problema matemático tiene un conjunto de características que lo hacen propio. En consideración a ello se ha tomado lo propuesto por Alfaro y Barrantes (2008), quienes proponen las siguientes características. Primero, un problema no es algorítmico, ya que el camino para su resolución no se especifica con anterioridad. Segundo, es complejo porque encontrar su solución no se da desde un único punto de vista. Tercero, este tipo de problemas con frecuencia da lugar a múltiples soluciones. Cuarto, al principio de su resolución hay cierta incertidumbre de conocer todo lo que se pide para desarrollarlo. Finalmente, un problema matemático requiere de un arduo trabajo mental, pues la persona que lo resuelve utiliza estrategias y criterios para su resolución.

En esta línea, Echenique (2006) argumenta otras características tales como: los problemas siempre suponen un reto; segundo, la finalidad de ellos es indagar en los conocimientos y experiencias que posee la persona para así tomar aquellos que sean convenientes para dar solución a la situación problemática; tercero, los problemas tienen una o más soluciones y, los procedimientos para llegar a ellos pueden ser diversas. Finalmente, se rescata que ellos requieren de un tiempo suficiente para pensar sobre su significado.

Por otro lado, acorde con el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (citado por Pérez y Ramírez, 2011, p.174) se destaca que un buen problema matemático abarca las siguientes características: primero, estos deben plantear cuestiones que promuevan un razonamiento matemático a partir de situaciones auténticas de aprendizaje, y que no solo impliquen manejar largos cálculos. Segundo, un buen problema posibilita que los alumnos lo resuelvan a través del descubrimiento, organización y estructuración de acciones y no solo a través de la memorización de procedimientos. Tercero, los problemas deben tener un lenguaje claro, preciso y coherente para que destaquen su originalidad e importancia. Y cuarto, el grado de dificultad que tienen concuerda con el nivel de desarrollo de los estudiantes. Por último, un problema ofrece la oportunidad de que los niños expresen diferentes maneras de resolverlo.

Se puede rescatar que, a diferencia de los ejercicios matemáticos, los problemas suponen que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático más comprensivo, pues estos se caracterizan por ser situaciones reales de aprendizaje, las cuales tienen una diversidad de soluciones que los alumnos pueden explorar a través de sus experiencias previas, su capacidad de cálculo y comprensión matemática.

1.1.3. Componentes de un problema matemático

En relación con los componentes con los que todo problema matemático debe contar, se destaca lo propuesto por Mayer (citado por Poggioli, 1999), quien señala que los problemas matemáticos presentan cuatro elementos importantes: las metas, los datos, las restricciones y los métodos. En este sentido, el autor menciona que la meta es aquel propósito que se quiere lograr en la situación problemática; los datos hacen referencia a los elementos numéricos explícitos o implícitos, que son indispensables para que el alumno resuelva dicho problema; las restricciones son aquellas circunstancias que impiden llegar a la resolución del problema; finalmente, los métodos son las operaciones y procedimientos que permitirán alcanzar la meta.

Asimismo, los problemas matemáticos poseen dos aspectos importantes: las relaciones matemáticas y el carácter subjetivo del mismo; pues en diferentes contextos sociales no todos los sujetos tienen una misma concepción de “problema”. Por ello, se asume que aquel es un enunciado que describe una situación desconocida y de interés para un sujeto, en la cual intervienen relaciones matemáticas. (Hernández y Pérez, 2015).

A partir de lo dicho en anteriores líneas, se comprende que en un problema no puede faltar aquella dificultad que se quiere resolver, ya que si esta no existiera no se hablaría de las metas que se proponen alcanzar; simplemente comprenderían las operaciones a través de cálculos procedimentales de forma algorítmica. En pocas palabras todo problema matemático debe tener los componentes señalados en el párrafo anterior, sin excepción de alguno.

1.1.4. Problemas matemáticos aritméticos de enunciado verbal

En este apartado se explicará acerca de los problemas matemáticos de tipo aritméticos de enunciado verbal, los cuales se refieren a situaciones en los que es necesario usar una operación de adición o sustracción para resolverlos. Ahora bien, acorde con Luceño (1999) “Un problema es aritmético cuando implica el conocimiento de conceptos, técnicas y algoritmos matemáticos para su resolución. Las características que vienen a definir un problema aritmético hacen referencia al enunciado y a la resolución del problema” (p.14). En este sentido, el autor refiere que el enunciado de estos problemas tiene información de carácter cuantitativa, es decir, que los datos se expresan en cantidades. Además, que, las preguntas aluden a la delimitación de la o las cantidades, o relaciones entre esas cantidades.

En esta línea, en base a estos problemas de tipo aritméticos de enunciado verbal, Echenique (2006) afirma que:

Los problemas aritméticos son aquellos que, en su enunciado, presentan datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo, cuyas preguntas hacen referencia a la determinación de una o varias cantidades o a sus relaciones, y que necesitan la realización de operaciones aritméticas para su resolución. (p.30).

Por lo dicho anteriormente, se rescata el carácter cuantitativo de este tipo de problemas, las operaciones aritméticas a través del cálculo y algoritmos necesarios para su resolución. “Las operaciones aritméticas remiten a una acción transformadora en la que dos situaciones interactúan para dar lugar a una nueva situación que, de nuevo, se describe numéricamente” (Maza, 2008, p. 177). La interacción de ambas situaciones a través de las operaciones nos da a entender la creación de otras.

En esta investigación se estudian los problemas aritméticos de tipo aditivos. Acorde con Echenique (2006), este tipo de problemas se encuentran en un primer nivel pues para su resolución es necesaria una única operación. En este caso, se toman a las operaciones de la adición y la sustracción. “Para que se puedan resolver mediante una operación aritmética, es necesario conocer dos de esas cantidades. A las cantidades conocidas se les llama datos, y a la cantidad desconocida, resultado o incógnita” (Cañadas y Castro, 2011, p.84). Estos componentes como los datos y la cantidad incógnita son indispensables en este tipo de situaciones problemáticas.

De esta manera, se tienen en consideración cuatro categorías de este tipo de problemas: problemas de cambio, de combinación, de comparación y de igualación. A continuación, se explicará cada tipología acompañada de un ejemplo específico para su mejor comprensión.

1.1.4.1. Problemas de cambio

Con respecto a esta tipología, “En los problemas de cambio se distinguen tres momentos diferentes: hay una cantidad inicial sometida a una acción o transformación que la modifica para llegar a una cantidad final” (Cañadas y Castro, 2011, p.85). Así mismo, de acuerdo con Martínez y Sánchez (2013), los elementos que constituyen a este tipo de problemas son: la cantidad inicial, el cambio que se produce en esa cantidad, el sentido de cambio y la cantidad final. La cantidad inicial se refiere al dato inicial. El sentido de cambio es el resultado de incrementar o disminuir la cantidad inicial. Finalmente, la cantidad final es a la que se llega como consecuencia de dicho cambio o transformación.

A modo de ilustración se propone el siguiente ejemplo:

Tabla 1: Ejemplo de un problema de la categoría de cambio

CANTIDAD INICIAL	CAMBIO	SENTIDO DE CAMBIO	CANTIDAD FINAL
36 niños, quienes asisten en un inicio a la feria	18 niños, quienes se incorporan a la feria.	De aumento.	54 niños, quienes están en la feria luego han llegado los 18 niños más.
“A una feria de juegos asisten 36 niños. Luego se incorporan 18. ¿Cuántos niños hay ahora en la feria?”			

Elaboración propia, basado en Martínez y Sánchez, 2013: 46.

Se puede observar que, en un principio la cantidad inicial de 36 que se encuentran en la feria se vio afectada por un cambio de aumento de 18 niños, quienes se incorporaron luego; resultando así un total de 54 niños en la feria. En efecto, los problemas de cambio son aquellos denotados por un proceso de alteración en la cantidad inicial, que sufre un cambio ya sea de aumento o disminución para obtener un resultado final.

1.1.4.2. Problemas de combinación

En relación con esta tipología, “En los problemas de combinación hay dos cantidades estáticas que forman parte de un todo que las incluye y lo conforman en su totalidad” (Cañadas y Castro, 2011, p.85). Asimismo, Martínez y Sánchez (2013) sostienen que los elementos que constituyen a este tipo de problemas son: un conjunto o una colección y las partes en que se pueden dividir ese conjunto. En cuanto al conjunto, este puede ser dividido en diversas partes en función de ciertas características de sus elementos. El segundo elemento se refiere a las partes que pertenecen a una misma clasificación o naturaleza.

A manera de ilustración se propone el siguiente ejemplo:

Tabla 2: Ejemplo de un problema de la categoría de combinación

COMBINACIÓN		
PARTE 1	PARTE 2	TODO
Dato 1: 35 tomates	Dato 2: 12 zanahorias	47 verduras en total ¿? Es la incógnita
“En una canasta hay 35 tomates y 12 zanahorias. ¿Cuántas verduras hay en total?”		

Elaboración propia, basado en Martínez y Sánchez, 2013: 68.

Se puede visualizar que hay un conjunto de verduras en la canasta, una parte de esas son tomates y la otra son zanahorias. En este caso estos elementos se han combinado y forman una colección de 47 verduras. Es así que los problemas de combinación hacen referencia a dos grupos de cantidades que forman un solo conjunto de su misma categoría.

1.1.4.3. Problemas de comparación

En cuanto a esta tipología “En los problemas de comparación se dan simultáneamente dos cantidades independientes que se relacionan mediante la comparación” (Cañadas y Castro, 2011, p.87). Es decir, ambas cantidades se comparan en relación del número de elementos con los que cuentan, una puede tener más o menos que la otra.

En la misma línea, Martínez y Sánchez (2013) agregan que, estos son problemas en los cuales sus cantidades o datos se comparan una respecto a la otra; para ello se usan términos como “más que” o “menos que”. Asimismo, en estos problemas se distinguen cuatro elementos: la cantidad que se contrasta, la cantidad que sirve de referencia, la diferencia y el sentido de la diferencia.

A manera de ejemplo se presenta la siguiente tabla:

Tabla 3: Ejemplo de un problema de la categoría de comparación

CANTIDAD COMPARADA	CANTIDAD DE REFERENCIA	DIFERENCIA	SENTIDO DE LA DIFERENCIA
24 canicas. La cantidad de canicas de Roxana.	32 canicas. La cantidad de canicas de Roxana	8 canicas.	Positivo.
“Roxana tiene 24 canicas, y Andrea 32. ¿Cuántas canicas tiene Andrea más que Roxana?”			

Elaboración propia, basado en Martínez y Sánchez, 2013: 79.

Se comprende que, una de las personas tiene más canicas que la otra. En este caso Andrea cuenta con 8 canicas más en comparación con Roxana. Asimismo, se podría decir que, Roxana tiene 8 canicas menos que Andrea. En ambos se comparan cantidades que tienen más o menos entre sí.

1.1.4.4. Problemas de igualación

En relación con esta categoría, “Los enunciados de los problemas de igualación exponen

una acción física, necesaria para que una cantidad sea igual a otra (Cañadas y Castro, 2011, p.88). De igual manera, Martínez y Sánchez (2013) refieren que estos problemas se refieren a agregar o quitar una parte de una cantidad para hacerla igual a la otra. Para ello, se deberá saber cuántos elementos se deben retirar o adicionar con la finalidad de igualar dichas cantidades. Asimismo, los componentes de estas situaciones son: la cantidad a igualar, la cantidad de referencia, la igualación y el sentido de igualación.

A modo de ejemplo se presenta la tabla:

Tabla 4: Ejemplo de un problema de la categoría de cambio de igualación

CANTIDAD A IGUALAR	CANTIDAD DE REFERENCIA	IGUALACIÓN	SENTIDO DE IGUALACIÓN
23 novelas.	45 novelas.	22 novelas.	Positivo
<p>“Mercedes tiene 45 novelas y Alonso tiene 23 novelas. ¿Cuántas novelas tiene que comprar Alonso para tener tantas como Mercedes?”</p>			

Elaboración propia, basado en Martínez y Sánchez, 2013: 104 -105.

En relación a este ejemplo, se puede apreciar que se quiere igualar la cantidad de novelas que tienen tanto Mercedes como Alonso. En este caso, Alonso tendrá que comprar 22 novelas más de las que tiene para igualar a la cantidad de dichos libros de Mercedes, y así ambos tener 45 novelas.

En resumen, se han explicado cuatro diferentes categorías en relación a las operaciones de sustracción y adición, que se trabajan con niños entre los 6 y 8 años. De esa manera, se tomaron en consideración cuatro categorías de este tipo de problemas: problemas de cambio, de combinación, de comparación y de igualación.

1.2. Resolución de problemas matemáticos aritméticos

La resolución de problemas ha sido y es una corriente de investigación muy importante a lo largo de toda la historia de la enseñanza de la matemática. Por un lado, se considera lo mencionado por Orton (citado por Luceño, 1999) quien afirma que, la resolución de

problemas se concibe como aquella que genera un proceso mental, en el cual quien aprende combina variedad de elementos, conocimientos, destrezas, habilidades, capacidades, reglas y conceptos adquiridos de manera previa que admiten dar solución a una situación nueva.

Esto se relaciona con lo señalado por Lesh y Zawojewki (2007), quienes afirman que esta competencia es:

El proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones- y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. (p.782).

Ambos autores destacan el rol que juegan las habilidades cognitivas, capacidades, y actitudes matemáticas y contenidos conceptuales que intervienen en este proceso tan complejo. Del mismo modo, de acuerdo con Echenique (2006), la resolución de problemas implica que los niños indaguen en su pensamiento matemático, que identifiquen los conocimientos matemáticos necesarios para dar solución a una determinada situación problemática, así como rescatar aquellas estrategias que usaron en otras experiencias al resolver problemas. En otras palabras, esta es una competencia matemática, la cual permite que los estudiantes tomen conciencia, sean conscientes de sus conocimientos y capacidades matemáticas que tienen, es una manera de aplicar lo que saben a situaciones reales y no reales. No es aplicar fórmulas y procedimientos reglamentados, implican pensar, razonar, inferir, recordar, una serie de procesos mentales.

Asimismo, la resolución de problemas es una competencia ventajosa por las siguientes razones: en primer lugar, porque se resuelven muchos problemas matemáticos en la vida diaria; en segundo término, porque la experiencia adquirida en la resolución de problemas matemáticos es aplicable para la resolución de otros problemas no matemáticos; en tercer lugar, porque la resolución de problemas es un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor. (Castro, 2008, p.98). Además, se considera lo propuesto por Ortiz (2009) quien afirma que, la resolución de problemas matemáticos abarca los criterios metodológicos que tiene el docente para plantear situaciones problemáticas de aprendizaje que sean de interés para los estudiantes y los motiven a explorar diferentes maneras de darles solución. Dichas situaciones son condiciones inesperadas que conllevan al estudiante a descubrir aquello desconocido.

A partir de las conceptualizaciones presentadas, se tiene en cuenta que, la resolución de problemas matemáticos es una competencia matemática transversal y útil para la vida, que involucra utilizar un conjunto de estrategias, habilidades, capacidades y actitudes personales y matemáticas de manera consciente para dar solución a una situación

problemática. En este sentido, el rol del docente es clave tanto en el planteamiento de situaciones interesantes como en las estrategias didácticas que use para que los alumnos se sientan motivados por indagar en aquello desconocido y puedan así vivir un proceso significativo cuando resuelven un problema.

1.2.1. Capacidades en la resolución de problemas

En la resolución de problemas matemáticos se consideran clave las capacidades que el estudiante posee, pues al ser aquel un proceso complejo requiere que el alumno sea consciente de la situación a la que se enfrenta. En este sentido, Burkhardt y Bell (2017) señalan que, quienes resuelven problemas deben tener una amplia comprensión sobre las Matemáticas, además de tener la habilidad de ver patrones de similitud y asociación, planear un plan de solución y reflexionar sobre los resultados que obtuvo para llegar a la meta, que es resolver el problema.

Ambos autores refieren la importancia de que el estudiante comprenda la utilidad de las capacidades y destrezas matemáticas que se necesitan para darle sentido a la situación problemática. A continuación, se destaca a la comprensión conceptual, el cálculo procedimental, la estimación, la comunicación y la actitud positiva frente a los problemas como las principales destrezas que los estudiantes deben desarrollar.

1.2.1.1. Comprensión conceptual

Una de las habilidades más importantes de todo matemático competente es la comprensión que tenga de sus conocimientos matemáticos. En este sentido, “La comprensión conceptual se asocia a la representación mental y a la relación que se establece entre diferentes conceptos. Se pone de manifiesto al resolver determinadas situaciones matemáticas” (Echenique, 2006, p.16).

De esta manera, la comprensión conceptual es un componente importante para ser competente en el campo matemático, ya que es necesario desarrollarla para que los alumnos puedan enfrentarse con nuevas situaciones problemáticas. En esta línea, de acuerdo con la National Council of teachers of Mathematics (2000) el aprendizaje a través de la comprensión es importante para que los alumnos tengan las habilidades que necesitan para resolver cualquier tipo de problemas a lo largo de sus vidas. Por otro lado, Llinares (citado por Chamorro, 2003) señala que esta capacidad se desarrollará siempre y cuando el alumno represente mentalmente y relacione las diferentes partes del contenido matemático con los problemas que se le proponga.

A partir de lo mencionado por estos autores, se destaca la importancia de que esta capacidad se muestra en la práctica cuando el estudiante comprende y transfiere sus conocimientos al momento de resolver problemas. Es decir, no solo se tienen que conocer los conceptos matemáticos, sino también comprender el uso adecuado de esos para construir un pensamiento matemático rico.

1.2.1.2. Cálculo procedimental

En relación con esta capacidad, se destaca que los estudiantes tienen que conocer los tipos de cálculos que se requieren para resolver un problema. En esta línea, Echenique (2006) señala que, “El cálculo procedimental se refiere no solo a conocer los procedimientos matemáticos, sino además a cuándo y cómo usarlos de un modo apropiado, correcto y eficaz” (p.17). Es decir, los estudiantes deben tener consolidados los conocimientos conceptuales, manejarlos de manera comprensible para que no realicen cálculos de forma memorística. Es decir que, estos cálculos deben realizarse de forma fluida y flexible según la situación problemática a la cual se enfrenten.

1.2.1.3. Estimación

En el proceso de resolver un problema esta capacidad es útil. De acuerdo con el Ministerio de Educación Pública (citado por Calvo, 2008) la estimación es una habilidad, mediante la cual los alumnos comunican un conocimiento aproximado respecto a la solución de un problema, además que permite observar cómo es el manejo de cálculo mental de los niños.

Asimismo, Reys, Segovia, Castro, Rico y Castro (citados por Segovia Alex y Castro Martínez, 2009) señalan que la estimación en las matemáticas presenta las siguientes características: Primero, esta se refiere al valor que se le da a una parte o al resultado de una operación aritmética. En este caso, el estudiante debe tener información o alguna experiencia sobre lo que va dar juicio. Segundo, dicho valor no tiene una exactitud, pero si es correcto para tomar decisiones. Tercero, la estimación se realiza con rapidez y usando números sencillos.

1.2.1.4. Comunicación

Otra de las habilidades necesarias en la resolución de problemas es la comunicación. Acorde con Echenique (2006) esta capacidad implicaría que los estudiantes expliquen y justifiquen el proceso que realizan en la ejecución de tareas propuestas en el problema matemático, para que así los demás compañeros comprendan las razones por las cuales lo resolvieron de una u otra manera. En otras palabras, los alumnos deben ser capaces de

argumentar en sus propias palabras los procedimientos que realizaron y así generar un espacio de discusión sobre las diferentes perspectivas de resolución.

Se destaca que, la comunicación es un medio y proceso de interacción que promueve la comprensión del conocimiento matemático y por la cual la resolución de problemas tiene sentido para los niños. En este sentido, Ortiz (2009) afirma:

El valor de la comunicación está dado en que es justo a través de ella que la actividad adquiere sentido para los que la realizan, toda vez que ella se convierte en el medio que posibilita la construcción de conocimientos y en el sustrato de la creación de motivos e intereses. (p.111)

Por otro lado, de acuerdo con la National Council of teachers of Mathematics (2003), a través de la comunicación los estudiantes organizan, articulan y consolidan su pensamiento matemático, ya que los invita a compartir las reflexiones que tienen acerca de sus conocimientos y estrategias que utilizan en la resolución de problemas. Ellos desarrollan una mejor comprensión de su pensamiento cuando lo verbalizan en la interacción con otros, ya sea a través de gestos, símbolos y otras maneras de expresión propias de ellos.

Por último, se valora lo señalado por Isoda y Katagiri (2016), quienes destacan que es necesario que el estudiante comunique con claridad, coherencia, sencillez y con un lenguaje matemático los resultados de su accionar en la resolución de problemas, a partir de la organización que hagan de sus ideas y acciones para así validar sus conocimientos y comprensión del problema.

1.2.1.5. Actitud positiva

Un estudiante competente en la resolución de problemas debe tener una actitud positiva hacia dicho proceso. En este sentido, Echenique (2006) destaca que:

Una actitud positiva hacia las matemáticas viene determinada por varios actores: el enfoque que se le dé al área en la etapa de escolaridad, las oportunidades de colaboración activa que se les brinde a los alumnos en el desarrollo de las sesiones, el ambiente del aula, el tipo de tareas matemáticas que se les demande, etc. (p.17).

Entonces, se considera importante señalar que, en la resolución de problemas matemáticos no solo basta que el estudiante domine ciertos conocimientos y cálculos procedimentales, también es necesario que muestre una actitud positiva en todo momento, ya que si los alumnos no se sienten motivados es imposible que construyan un pensamiento matemático significativo.

1.2.1.6. Representación

Esta capacidad es muy destacada en los estudiantes de las edades que se está proponiendo en esta investigación. Acorde con el Minedu (2015), “Las ideas matemáticas adquieren significado cuando se usan diferentes representaciones y se es capaz de transitar de una representación a otra, de tal forma que se comprende la idea matemática y la función que cumple en diferentes situaciones” (p.26). Se destaca que, esta habilidad es una manera en cómo los niños expresan sus conocimientos y pensamientos cuando están frente a una situación problemática.

En este sentido, de acuerdo con la National Council of teachers of Mathematics (2003), los niños pueden comprender la situación problemática representando sus ideas y procedimientos matemáticos de diversas maneras. Por ejemplo, cuando utilizan objetos físicos como sus dedos, el lenguaje natural, dibujos, diagramas, gestos y símbolos, pueden ellos crear imágenes mentales que les posibilitan comprender mejor el problema.

A partir de lo mencionado, se puede decir que, la representación es una habilidad que todo niño desarrolla en la resolución de problemas, ya que los niños expresan sus experiencias y conocimientos de algo a través de diferentes maneras. Por ello, los docentes no deben limitar a los estudiantes en la representación de lo que entienden del problema únicamente escribiendo, sino darles la oportunidad de que ellos exploren otros medios y recursos de aprendizaje.

1.2.2. Niveles en la resolución de problemas

Acorde con Castro, Rico y Castro (1995) en la resolución de problemas matemáticos hay tres niveles fundamentales de considerar: el nivel conceptual, el nivel de conexión y el nivel de abstracción.

Respecto al primer nivel, “Es aquel en el que los niños modelan completamente la acción o las relaciones que se dan en el problema usando objetos físicos o dedos. En este nivel se caracteriza por el uso de materiales concretos y descripciones verbales” (p. 23). Se enfatiza el uso que hacen los estudiantes de esos recursos para representar sus conocimientos y comprensión del problema matemático. En relación con el segundo, en este nivel se siguen utilizando materiales concretos y descripciones verbales, pero además se van introduciendo los símbolos escritos correspondientes. Los niños tenderán a no representar físicamente las cantidades descritas en el problema y, poco a poco, serán capaces de realizar la operación de recuento por sí sola. (Castro, Rico y Castro, 1995, p.23).

En otras palabras, los alumnos ahora hacen uso de la escritura para realizar sus representaciones del problema.

En cuanto al último nivel, se destaca la idea de que los estudiantes utilicen operaciones a través del cálculo procedimental y que describan cada uno de los pasos que están siguiendo en la resolución. Al respecto, Castro, Rico y Castro (1995) refieren que:

En este tercer nivel las técnicas de recuento han dado paso a la utilización de los algoritmos para llegar a la solución del problema. Se presenta una sentencia numérica como $5-3 = ()$ y se les anima a que piensen y describan acciones asociadas a la misma. (p.23).

En resumen, este capítulo presentó un marco teórico sobre la importancia de la resolución de problemas aritméticos en niños de los primeros grados del nivel Primaria. En este sentido, se parte de la pedagogía problémica como un enfoque basado en problemas matemáticos, en relación a situaciones problemáticas que fomentan un aprendizaje matemático significativo en la vida de los niños.

Asimismo, se consideraron cuatro tipologías de dichos problemas, estas son: problemas de cambio, de comparación, de combinación y de igualación. Este tipo de problemas son los que se trabajan con niños de Primaria, especialmente en niños con edades entre los 6 y 8 años, pues implica utilizar operaciones de adición y sustracción.

Finalmente, se destaca a las capacidades tales como la comprensión conceptual, el cálculo procedimental, la comunicación, la estimación, la representación y la actitud positiva en ese proceso; dichas habilidades se desarrollarán en cada una de las etapas de resolución de problemas que se proponen en el siguiente capítulo. Cada una de esas capacidades es fundamental a lo largo de todo el proceso de resolución, porque fomentan el desarrollo del pensamiento matemático.

CAPÍTULO 2: LINEAMIENTOS DIDÁCTICOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS BASADOS EN LA METODOLOGÍA DE PÓLYA

El presente capítulo tiene como finalidad reconocer la importancia de cada una de las fases comprendidas en la metodología de George Pólya, para la resolución de problemas matemáticos aritméticos. En relación a esto, cabe señalar que se toma en consideración este método por el impacto que tiene en las Matemáticas desde hace un largo periodo de tiempo.

Para conseguir este objetivo, se ha organizado el contenido del capítulo en tres partes. En primer lugar, realizaremos una revisión teórica sobre la importancia de las fases de comprensión, diseño de un plan, ejecución del plan y la visión retrospectiva de la metodología mencionada. En segundo lugar, se proponen algunos lineamientos didácticos en cada una de esas etapas, los cuales serán trabajados por el docente y los estudiantes

de manera participativa. Finalmente, se indagará acerca del rol que cumple el maestro durante todo el proceso de resolución de problemas.

En tal sentido, se entiende que es el estudiante el agente más importante en este proceso y el docente cumple un rol de guía y mediador. A continuación, se explicará de manera detallada lo mencionado en anteriores líneas.

2.1. Fases o etapas de la metodología

En la resolución de problemas matemáticos se considera fundamental que los alumnos sean conscientes de las acciones que implica lograr dar respuesta a una situación problemática, pues un estudiante competente siempre comprende qué metas debe alcanzar en dicha situación.

Para ello, las fases que George Pólya propone son cuatro: La comprensión del problema, la concepción o diseño de un plan, la ejecución del plan y la visión retrospectiva. A continuación, se explicarán a detalle en qué consiste cada una.

2.1.1. Fase 1: Comprensión del problema

Con respecto a esta fase, esta es considerada como una de las primordiales en el proceso de resolución de problemas, pues si los alumnos no entienden de qué trata la situación planteada les resultará un proceso mucho más complejo de lo que es el alcanzar la meta o dar respuesta a dicha problemática. En este sentido “Comprender adecuadamente le permite seleccionar la información, valorarla, resumir, clasificar, distinguir lo fundamental de lo secundario, almacenar en su memoria a largo plazo en forma de esquemas de conocimiento, que posteriormente será mejor recordada en forma de conocimientos previos” (Vallés, 2005, p. 50).

Así también, Romero (2012) afirma:

El proceso de resolución de un problema se inicia necesariamente con una adecuada comprensión de la situación problemática, para ello es necesario e importante que el estudiante llegue a tener muy claro de qué se está hablando, qué es lo que se quiere conocer, cuáles son los datos que se conocen, dado que en la mayor parte de los casos los problemas se plantean en forma escrita. (p.4)

Por otro lado, Polya (citado por Pérez y Ramírez, 2011) refiere que en esta primera etapa el alumno debe entender el enunciado de la situación problemática, es decir, identificar cuál es la interrogante que se le pide resolver, cuáles son los datos y sus condiciones. En este caso es necesario que los estudiantes formulen preguntas que les permitan encontrar

dichos elementos; además de realizar algún esquema o dibujo que los representen. Es importante que los alumnos decodifiquen el mensaje de la situación para que así se involucren más en el proceso de resolución.

Por último, Polya (citado por Nurkaeti, 2018) destaca tres indicadores básicos en esta fase. La primera es identificar los aspectos que el lector conoce del enunciado del problema; lo segundo, mencionar la pregunta que plantea dicha situación y, finalmente, relacionar o conectar el problema con alguna situación conocida. Se rescata la idea de que los alumnos sean capaces de identificar cuál es la meta a alcanzar para que tengan claro el propósito del problema.

2.1.2. Fase 2: Concepción y diseño de un plan

La segunda fase en la cual se apoya esta metodología es la concepción de un plan para dar solución a la situación problemática, es decir, el proceso de planificación que realiza el estudiante para resolver el problema. Por un lado, Polya (citado por Pérez y Ramírez, 2011) indica que cuando el alumno tiene claro qué es lo que busca encontrar, empieza a planificar un conjunto de acciones que lo llevarán a dar solución a la problemática inicial, pensará en las operaciones que debe realizar y el orden de estas. Asimismo, en esta etapa los estudiantes usan sus conocimientos previos y los conceptos matemáticos que requieren para incorporar en su plan.

En esta línea, se considera que en esta fase no solo participa el estudiante planificando el proceso de resolución, sino que el profesor también es un agente importante. Para ello, se rescata lo mencionado por Palomino (2016), quien afirma:

Concebir un plan es un proceso gradual en el cual el docente puede guiar a través de preguntas, sugerencias o aplicar estrategias como recordar los problemas anteriores que hayan resuelto para buscar las similitudes entre ellos y recordar la forma como lo resolvió, enunciar el problema de otra forma con la finalidad de hacerlo más sencillo y poder visualizar cómo resolverlo, es otra estrategia que puede encaminarlo a la solución (p.11).

Se puede comprender que en esta fase los estudiantes deben ser conscientes de la meta que se quiere lograr en el problema, para así indagar las posibles vías de solución del problema. Son ellos quienes deben definir las mejores estrategias que usarán. Cabe destacar que, en esta etapa los niños recogen sus conocimientos matemáticos previos y experiencias cotidianas que se relacionan con el enunciado del problema.

2.1.3. Fase 3: Ejecución del plan

En esta fase los estudiantes ponen en práctica las acciones planificadas en la fase anterior. En esta línea, Polya (citado por Pérez y Ramírez, 2011), refiere que esta consiste en aplicar el plan realizado en la etapa anterior, utilizando las habilidades de pensamiento y estrategias cognitivas para resolver de manera comprensible su problema. En este caso, se resalta que los alumnos deben ser cuidadosos y revisar detalle a detalle el cómo está realizando su procedimiento.

Asimismo, se rescata la idea del respeto que debe tener el docente hacia la forma en cómo los estudiantes resuelven dicho problema, así como la orientación que debe dar en las acciones que los niños realizan.

En la ejecución del plan se enfatiza el trabajo práctico del estudiante, el docente debe respetar como él resuelve el problema, acompañándolo en el proceso de la ejecución a través de preguntas e incidiendo en la verificación de cada paso de la resolución del problema. (Palomino, 2016, p.12)

En resumen, durante esta fase los niños deben estar convencidos de que su planificación es la adecuada para responder al objetivo del problema, puesto que en esta ya aplican las operaciones e ideas matemáticas necesarias. Asimismo, ellos deben ir evaluando si los pasos que planearon están siendo utilizados con concentración y seguridad en sí mismos.

2.1.4. Fase 4: Visión retrospectiva

En esta última fase los estudiantes reflexionan sobre todo el proceso que realizaron para alcanzar las metas propuestas, es decir, darle solución al problema. En este sentido, ellos comparten cómo les fue en el proceso, mencionan las fortalezas y dificultades que tuvieron y qué estrategias de aprendizaje fueron las más adecuadas. Cabe señalar que, en esta etapa los alumnos se autoevalúan y también valoran los procesos de resolución de los otros compañeros.

Cabe destacar lo mencionado por Polya (citado por Pérez y Ramírez, 2011) quien llama a esta fase la examinación de la solución obtenida, que se basa en una visión retrospectiva, en la cual el alumnado revisa el plan que realizó, sus procedimientos y los resultados de su solución. Esa visión permite que ellos tengan una mejor comprensión de los resultados que obtuvieron que puedan transferir lo que hicieron a otras situaciones.

El rol del docente como guía en esta etapa es trascendental, pues será quien proporcione una retroalimentación eficaz y precisa en relación con los conocimientos y

habilidades que los alumnos han consolidado a través de la resolución del problema. En este sentido, Palomino (2016) señala que:

Los estudiantes analizan con apoyo del docente el proceso que han seguido para llegar a la solución del problema, que les ayudará a comprender los pasos realizados y afianzar sus conocimientos. Además, se debe relacionar el problema resuelto con otros problemas, que se puedan resolver en forma similar; de esta manera los estudiantes se sentirán motivados a seguir resolviendo situaciones problemáticas. (p. 13)

Después de analizar y comprender cada una de las fases que comprende la metodología de Polya, es considerable distinguir que el empleo de todas ellas en la resolución de problemas nos brindará un mejor panorama de la manera en cómo los estudiantes aprenden y consolidan sus propios procesos de pensamiento matemático. Tanto la comprensión de la situación problemática, el diseño de un plan de resolución, la ejecución de dicho plan, y finalmente, la reflexión que el niño realice de todo su proceso de resolución son procesos que no deben omitirse en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

2.2. Criterios metodológicos en cada fase

Luego de indagar en cada una de las fases del proceso de resolución de problemas es importante considerar algunos criterios metodológicos para trabajar en cada una de ellas. Sin embargo, para empezar, es importante señalar algunas estrategias meta cognitivas que están involucradas de manera transversal a lo largo de dichos lineamientos o criterios. Estas estrategias, de planificación, supervisión y evaluación son acciones fundamentales que los estudiantes deben realizar a lo largo del proceso de resolución de problemas, ya que estas le permiten tomar control, tanto de sus capacidades matemáticas como de sus saberes previos para que los maneje de acuerdo al objetivo de aprendizaje. Asimismo, destacar que, cuando los estudiantes utilizan estas herramientas están desarrollando su capacidad de autonomía, pues son ellos los que autorregulan su aprendizaje continuamente. Es decir, que ellos están reflexionando conscientemente sobre la meta que quieren alcanzar.

Por último, cabe añadir que los formatos de fichas de trabajo que se proponen en cada fase a continuación deben ser modeladas por el docente, es decir, él debe explicarles a los niños de qué manera usarlas y cuál es el propósito de cada una. De esta manera los niños comprenderán a profundidad la importancia de cada fase en su proceso como matemáticos competentes.

2.2.1. Comprensión

En este apartado indagaremos sobre la etapa de la comprensión de la situación problema, una de las etapas que todo estudiante debe tomar en cuenta para llegar a interpretar el significado del problema para saber hacia dónde quiere llegar. Los criterios a trabajar en esta fase son los siguientes:

En primer lugar, en esta fase los estudiantes de manera individual, en parejas o en grupos de tres integrantes deben leer detenidamente la situación problemática que el docente plantea. Se les da algunos minutos para que puedan leer de manera silenciosa el problema y de esa manera puedan identificar cual es el propósito de la lectura, cuáles los datos y qué es lo que van a resolver para darle solución. Luego de esa lectura compartirán lo que han comprendido y aclararán lo que no han entendido en sus propias palabras. Cabe señalar que, los alumnos deben tener un tiempo para pensar antes de compartir dichas ideas. Por ejemplo, ellos podrían comunicar su comprensión con frases como: el problema leído trata de....., el problema me recuerda a..., entiendo que los datos son., el problema me pide que....., necesito conocer que....., entre otras preguntas.

En segundo lugar, se propone que los docentes elaboren preguntas eficaces en el momento de la lectura del problema. Las interrogantes que Luceño (1999) propone después de leer el problema, son las siguientes: ¿Qué dice el problema?, ¿lo he comprendido?, ¿entiendo el significado de las palabras de este problema?, ¿Cuál es la pregunta?. Como se ha mencionado en el párrafo anterior, estas interrogantes pueden compartirse en parejas para luego expresarlas con todos los compañeros y el docente. En un primer momento el docente compartirá esas preguntas, pero luego los estudiantes las emplearán sin ayuda del maestro, además que los niños también pueden crear sus propias preguntas.

En tercer lugar, es importante darles a los niños la oportunidad de que representen lo que han comprendido del problema. Cada niño tiene una manera diferente de entender el problema, algunos anotarán las ideas más importantes de manera escrita, otros harán gráficos o símbolos, y así cada uno con una perspectiva diferente. Sin embargo, también es necesario que el docente muestre algunos modelos de representación que deben usar en los problemas tanto de cambio, combinación, comparación e igualación que se están trabajando en esta investigación. En este sentido, Echenique (2006) indica que el realizar esquemas a partir de los datos del enunciado es una manera de representar las relaciones que existen entre dichos datos. En este caso, para estos problemas la autora recomienda usar la recta numérica, en la cual se representan los datos y sus relaciones, resolviendo el problema mediante el método del conteo y no simplemente usando la operación.

Otra de las técnicas que los maestros pueden usar son las hojas de pensar. Esta técnica son las propuestas por Pirrafé y Sanuy (2001), ambos refieren que:

El material didáctico “Hojas para pensar el problema” tiene como principal objetivo guiar y enriquecer el proceso de resolución del problema. En este material se plantea al alumno diferentes interrogantes, indicaciones y sugerencias sobre los posibles procedimientos a utilizar para resolver el problema. (p.302)

A través de este material los estudiantes pueden visualizar de manera sencilla la situación problema y algunas preguntas de comprensión lectora tales como: ¿Qué te pide el problema?, ¿a dónde tienes que llegar?, ¿Qué datos del enunciado son los más importantes?. De igual manera anotará aquellos datos que debe encontrar.

Ahora bien, se les puede mostrar otro modelo de ficha. En este caso estamos trabajando con un problema aritmético de la categoría de cambio. A manera de ejemplo, se presenta en esta tabla:

Tabla 5: Ficha de trabajo para trabajar durante la fase de la comprensión

<p>SITUACIÓN PROBLEMA</p> <p>“A una feria de juegos asisten 36 niños. Luego se incorporan 18. ¿Cuántos niños hay ahora en la feria?”</p>	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; background-color: #e6f2ff; padding: 5px; text-align: center; margin-bottom: 10px;"> <p>¿Qué conozco del problema?</p> </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; height: 60px; margin-bottom: 10px;"></div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; background-color: #e6f2ff; padding: 5px; text-align: center; margin-bottom: 10px;"> <p>¿Qué necesito hallar?</p> </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; height: 60px;"></div>
---	---

Elaboración propia (2018).

Como se ha abordado, la fase de la comprensión es fundamental para que los estudiantes tengan un conocimiento significativo del problema, así como de la incógnita que dará respuesta a dicho. En el modelo de ficha que se presenta se puede observar que los niños pueden representar su comprensión a través de la escritura, dibujos u otras representaciones que deseen realizar. Para que se realice esta ficha, el docente debe

modelar su uso y su importancia antes de entregarles a los niños, además estos deberían disponer de un tiempo considerable no menos de 5 minutos para emplearla.

2.2.2. Concepción y diseño de un plan

En este apartado indagaremos sobre la etapa de la concepción y diseño de un plan para la resolución del problema, en la cual los estudiantes planearán las acciones necesarias para llegar a alcanzar la meta establecida en la fase de la comprensión. Los criterios a trabajar en esta fase son los siguientes:

Es importante que sean los estudiantes quienes por sí mismos realicen una planificación de los pasos que seguirán para resolver el problema. Tal idea es reafirmada cuando se expresa “Se debe impulsar a cada estudiante a hallar la solución del problema por sí mismo, debe ser capaz de reconocer que existe más de una forma de darle solución y no limitarse a una única manera de hacerlo” (Calvo, 2008, p.133). En otras palabras, a partir de que los niños tengan clara cuál es la meta que se quiere lograr ya deben empezar a reflexionar tanto de manera individual, en pareja o grupal, sobre el orden de sus acciones para alcanzarla.

En esta línea, acorde con Isoda, Arcavi y Mena (2007) “El profesor recorre el aula orientando a los niños que no pueden encontrar maneras de resolver, y estimulando a aquellos que encontraron una solución al buscar otras maneras posibles” (p. 122). La función del docente es fundamental, este debe ser un guía y mediador que oriente al estudiante para que conciba un plan, sin necesidad de imponerles sino motivándolos.

Asimismo, se propone que los maestros elaboren preguntas eficaces para guiar a los alumnos. Luceño (1999) propone las siguientes interrogantes: ¿Cómo lo puedo resolver?, ¿tengo todos los datos necesarios para resolver este problema?, ¿qué información necesito?, ¿qué pasos o acciones debo realizar?, ¿qué hago primero?, ¿cómo debo calcular la solución?, ¿con qué solución?, ¿Con qué operaciones tengo dificultades? (p.22). El docente podría elegir algunas de estas interrogantes y plantearlas a través de fichas. Se les puede pedir a los niños que en un post- it o en otro material impreso, de manera escrita enumeren los pasos acordados, y luego explicar a los demás compañeros las razones por las cuales consideran dichas secuencias.

A manera de ejemplo, se les puede presentar a los estudiantes esta tabla. En este caso, se está trabajando con un problema aritmético de la categoría de comparación:

Tabla 6: Formato para trabajar durante la fase del diseño del plan

<p>SITUACIÓN PROBLEMA</p> <p>“Roxana tiene 24 canicas, y Andrea 32. ¿Cuántas canicas tiene Andrea más que Roxana?”</p>	<p>Primero</p>
	<p>Luego</p>
	<p>Finalmente</p>

Elaboración propia (2018).

Como se observa, en esta ficha los estudiantes deben explicar con sus propias palabras qué pasos realizarán para resolver el problema. Se incorporan las palabras “Primero”, “luego” y “finalmente” como conectores de secuencia para que los niños tengan cierto orden en sus acciones y así organicen sus ideas de manera comprensible. Teniendo claros los pasos que va a ejecutar su resolución será más factible. Cabe señalar, que los maestros deben modelar el uso de esta ficha y qué es lo que deben lograr usándola.

2.2.3. Ejecución del plan

En esta tercera fase reflexionaremos sobre la etapa de la ejecución del plan para la resolución del problema, en la cual los estudiantes pondrán en práctica su plan o diseño de la fase anterior, es decir, realizarán cada uno de los pasos propuestos si es que todos son necesarios. Para ello, los criterios a trabajar en esta fase son los siguientes:

En este sentido, es importante destacar que los maestros orienten a los alumnos comunicándoles que deben decir en voz alta los pasos que están usando durante la

resolución de los problemas. Por ejemplo, los niños pueden usar conectores de secuencia tales como: primero, para empezar, segundo, después, luego, al final, para terminar, entre otros.

Asimismo, los docentes también pueden guiar a través de preguntas eficaces. En este sentido, Beyer y Frid (1998) plantea interrogantes como: ¿Qué hicieron mentalmente para resolver el problema?, ¿Qué hicieron primero?, ¿Por qué?, ¿Qué hicieron a continuación?, ¿Por qué? Asimismo, se añaden preguntas como: ¿podemos observar si todos los pasos son correctos?, ¿en cada operación matemática explicaron lo que hicieron y para qué lo hicieron?, ante alguna dificultad ¿volvieron al principio, reordenaron sus ideas y probaron de nuevo? (Boscán y Klever, 2012, p.14).

De esta manera, los niños de manera individual, en pareja o grupal deben explicar de manera exployada y justificar sus respuestas y procedimientos que realizaron, en sus propias palabras. Además, los niños deben justificar de manera escrita sus procedimientos, de esa forma el docente podrá retroalimentarlos de manera mucho más eficaz. Así se genera un ambiente de discusión y reflexión sobre las diferentes formas que se usaron durante la resolución.

A manera de ejemplo, se les puede presentar a los estudiantes esta tabla, en este caso se está trabajando con un problema aritmético de la categoría de igualación.

Tabla 7: Formato para trabajar durante la fase de la ejecución del plan

	Resuelvo el problema	Explico y justifico los pasos que realice
<p style="text-align: center;">SITUACIÓN PROBLEMA</p> <p>“Mercedes tiene 45 novelas y Alonso tiene 23 novelas. ¿Cuántas novelas tiene que comprar Alonso para tener tantas como Mercedes?”</p>		

Elaboración propia (2018).

Como se observa, en esta fase los niños no solo ejecutan o realizan los procedimientos para resolver el problema, sino que también explican y justifican dichas acciones. Esta parte

es esencial porque el niño se dará cuenta si los pasos que en un principio planificó fueron los indicados o no para llegar a la meta, es una manera de contrastar sus ideas con los resultados que obtuvo. Cabe añadir que, el docente deberá explicar de manera breve y sencilla el uso de este material.

2.2.4. Visión retrospectiva

En este apartado indagaremos sobre la cuarta etapa “Visión retrospectiva” de la resolución del problema, en la cual los estudiantes recapitularán todo el proceso realizado en las fases anteriores, con el objetivo de que reflexionen y tomen decisiones en base a los resultados que obtuvieron en dicho proceso, si llegaron o no a alcanzar la meta y si no fue así que otros procedimientos pudieron realizar. Asimismo, es una manera de que compartan sus resultados con los demás compañeros, entre todos puedan retroalimentarse y autoevaluarse. Los criterios a trabajar en esta fase son los siguientes:

Por un lado, los estudiantes tendrán que compartir con sus compañeros el proceso que siguieron a lo largo de la resolución del problema. Entre todos comunican y discuten acerca de las emociones que sintieron, los obstáculos que se les presentaron, aquello en lo que les fue bien o que pueden seguir mejorando y sobre otras maneras que pueden conocer para resolver el problema. Esto se puede realizar en un círculo de trabajo, ya que permite que todos los estudiantes puedan tener un contacto visual más cercano entre ellos y con la docente.

En esta línea, Calvo (2008) refiere que los niños deben ser capaces de explicar con sus propias palabras sus procedimientos en la resolución de problemas, que comprendan porque ciertas acciones conllevan a la solución y por qué otras no. Asimismo, se rescata la necesidad que los estudiantes intercambien sus ideas y formas de solución del problema planteado; para ello, primero individualmente deben reflexionar sobre las fortalezas y debilidades que tienen, para luego hacerlo de forma conjunta.

En esta fase, se puede utilizar una estrategia de autoevaluación, en la cual los niños reflexionan sobre aquellos logros que tuvieron al resolver el problema, así como en los aspectos que deben mejorar la próxima vez que resuelvan un problema. A continuación, se presenta un formato de esta estrategia.

Tabla 8: Formato de autoevaluación durante la fase visión retrospectiva

Me autoevalúo
Hoy aprendí que: _____ _____
Dos cosas que pienso hacer de ahora en adelante son: _____ _____

Elaboración propia (2018).

También se podría realizar una estrategia de retroalimentación entre compañeros. En este caso, el estudiante debe realizar comentarios escritos a otro compañero en base a las fortalezas, ideas interesantes y aspectos por mejorar de este en su proceso de resolución, de manera amigable. Esta estrategia no solo facilita el desarrollo de la reflexión sino también aporta conocimientos a los estudiantes para que regulen sus estrategias de resolución de problemas. A continuación, se presenta un formato llamado “Mensaje nuevo” para esta estrategia.

Tabla 9: Formato de retroalimentación entre compañeros durante la fase visión retrospectiva

¡MENSAJE NUEVO! PARA:
Te felicito porque: _____ _____
Te recomiendo que sigas mejorando en: _____ _____

Elaboración propia (2018).

Cabe considerar que, para ambas estrategias los niños deberían disponer de un aproximado de 5 cinco minutos para escribir sus comentarios en dichos formatos. Después se realiza un círculo de trabajo para compartir esos comentarios de manera voluntaria.

Por último, cabe destacar que en esta fase es muy importante que los docentes motiven constantemente a los estudiantes a plantearse nuevas metas cuando se enfrenten a la resolución de otros problemas, los niños deben vivir este como parte de su vida real, ya ese no solo los conduce a la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas, sino que también promueve el desarrollo de habilidades comunicativas de escucha y participación activa.

2.3. Rol docente

El docente cumple una función fundamental en la enseñanza de las estrategias a lo largo de esta metodología de trabajo. Teniendo en cuenta que la resolución de problemas es una competencia fundamental para la vida, se requiere la presencia de un guía que oriente y sea mediador en cada una de esas fases.

En este sentido, la mediación del maestro a través de su orientación y retroalimentación constante permitirá que los estudiantes fortalezcan su autonomía y capacidad de autorregulación de aprendizaje en este proceso. Por ello, la manera en que guíe el maestro se verá reflejado en la forma de aprender de los niños. Al respecto, Tebar (2003) refiere que la mediación:

Es la característica de la interacción, especialmente en la experiencia de aprendizaje y en la transmisión cultural. Se produce en un clima de empatía y mutua aceptación entre los protagonistas (...) potencia las capacidades del sujeto, despierta su competencia, regula la conducta, controla la impulsividad, enseña estrategias (...) provoca el análisis metacognitivo de todo el proceso de aprendizaje para crear la plena autonomía del sujeto (...) se realiza a partir de los criterios de intencionalidad-reciprocidad, significación, trascendencia, etc. (p.276)

Por otro lado, es necesario destacar que, las situaciones problemáticas que el maestro proponga resolver deben ser auténticas y cercanas al contexto del estudiante, situaciones que lo conecten al estudiante para que se involucre en la resolución del problema. En este sentido, García (citado por Pérez y Ramírez, 2011) señala la importancia de presentar problemas con diferentes tipos de contextos, situaciones que se relacionen con experiencias variadas en relación con experiencias de su vida real, así como de cuestiones ficticias, las cuales fomenten la motivación y creatividad por resolver.

Finalmente, es interesante destacar que los docentes deben tener algunas características personales tales como: una actitud positiva, empatía, escucha activa y responsabilidad para atender de manera positiva a todos los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas. Son ellos quienes deben estar constantemente motivando a los niños para que resuelvan los problemas de manera significativa y sin temor alguno a equivocarse, pues el error es parte del aprendizaje. Además, destacar que el docente debe dar una retroalimentación constructiva de manera escrita y también verbal, destacando los aspectos positivos que están logrando sus alumnos, así como explicándoles aquellos en los que deberían mejorar.

En resumen, este capítulo presentó la importancia que tiene la metodología de George Polya en la resolución de problemas matemáticos. Se destaca el método heurístico por tener una claridad y comprensión en la puesta en práctica en el aula; además de considerar etapas que fomenten el desarrollo de capacidades matemáticas y habilidades de autoevaluación por parte de los niños.

Asimismo, se considera que cada uno de los lineamientos que se proponen en las fases deben ser trabajados de manera positiva, fomentando en los estudiantes la capacidad de autoevaluación, invitándolos a pensar si las acciones que están realizando al resolver el problema las están comprendiendo con el objetivo de alcanzar el propósito de las situaciones problemáticas.

Este trabajo de investigación desarrolló un estudio sobre la competencia de la resolución de problemas matemáticos de tipo aritméticos entre niños de 6 a 8 años, a través de la metodología de George Pólya. En el primer capítulo, se analizó la importancia de dicha competencia, sus componentes, las categorías de problemas en esta etapa de los estudiantes, y las capacidades y habilidades que esta involucra. Asimismo, se resalta a la pedagogía problémica como base de esta competencia, ya que esa parte de situaciones problemáticas que suponen el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

En el segundo capítulo, se indaga en las fases de la comprensión del problema, el diseño de un plan, la ejecución del plan y la visión retrospectiva, de la metodología mencionada y se reconoce la importancia de cada de estas. De esta manera, se proponen lineamientos didácticos en cada fase, desde un enfoque reflexivo y participativo entre estudiantes y los docentes, esto con el objetivo de fomentar un aprendizaje significativo en la resolución de problemas.

Para finalizar esta investigación, es importante señalar que, los docentes pueden proponer diversas técnicas y estrategias de aprendizaje a partir de los lineamientos metodológicos propuestos en líneas anteriores. Si se tiene claro que la meta principal es que los

estudiantes aprendan de manera significativa, se pueden crear experiencias de trabajo que promuevan dicho aprendizaje.



CONCLUSIONES

A partir de lo investigado en esta tesina, podemos establecer las siguientes conclusiones:

- La resolución de problemas es una competencia matemática transversal y útil para la vida, que involucra utilizar un conjunto de estrategias, habilidades, capacidades y actitudes personales y matemáticas de manera consciente para dar solución a una situación problemática.
- Cada una de las fases planteadas por Pólya son fundamentales para la resolución de problemas matemáticos. A partir de la comprensión que tenga el estudiante sobre la situación problemática tendrá mayor claridad de la meta que debe alcanzar en el problema, de esa manera planificará un diseño que responda a dicha meta, ejecutará cada uno de los pasos de manera consciente y, finalmente logrará tener una visión más reflexiva y crítica sobre su proceso de resolución.
- En la resolución de problemas matemáticos el docente cumple un rol fundamental tanto en el planteamiento de situaciones interesantes y reales a resolver, como en las estrategias didácticas que use para que los alumnos se sientan motivados por indagar en aquello desconocido y puedan así vivir un proceso significativo cuando resuelven un problema.

REFERENCIAS

- Alfaro, C., y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 3(4), 83-98. Recuperado de <http://www.kerwa.ucr.ac.cr/handle/10669/18765>
- Beyer, B. K., y Frid, I. (1998). *Enseñar a pensar: Libro-guía para docentes*. Argentina: Troquel.
- Boscán, M., y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Pólya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, 10(2), 7-19.
- Burkhardt, H., y Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM the International Journal on Mathematics Education*. 39, 395-403.
- Calvo Ballesteros, M. M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Educación*. 32(1), 123 -138. Recuperado de <http://www.redalyc.org/html/440/44032109/>
- Calvo, M.M. Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en Matemáticas. *Revista Educación*. 1(32), 123-138. Recuperado de <http://www.redalyc.org/html/440/44032109/>
- Cañadas, M., y Castro, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En Isidoro, A., y Rico, L., *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 84-88). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/677/>
- Chamorro, M. C., Belmonte, G. J. M., Llinare, S., Ruiz, H. M. L., & Vecino, R. F. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación, S.A.
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas Resolución de Problemas: Educación Primaria*. Recuperado de <https://goo.gl/mwt6dU>
- Hernández, J., y Pérez, K. (2015). La comprensión de problemas matemáticos en la enseñanza primaria. *Transformación*, 2 (11), 15- 26. Recuperado de <https://goo.gl/porujY>

- Isoda, M., Arcavi, A., y Mena, L. A. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Isoda, M., y Katagiri, S. (2016). *Pensamiento Matemático: Cómo desarrollarlo en la sala de clases*.
- Itzcovich, H. (2009). *La Matemática escolar: Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Lesh, R., y Zawojewki, J.S. (2007). Problem solving and modeling. In F.R. Lester, Jr. (Ed). *The second handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. 763-804. National Council of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing
- Luceño, J. (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula*. Málaga, España: Aljibe.
- Martínez, J., y Sánchez, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid, España: Wolters Kluwer.
- Maza, C. (2008). Adición y sustracción. En Castro, E., *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria (177)*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Ministerio de Educación (2015). Rutas de aprendizaje. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/primaria.php>
- National Council of teachers of Mathematics. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática.
- Nurkaeti, N. (2018). Polya's strategy: an analysis of mathematical problem solving difficulty in 5th grade elementary school. *EduHumaniora*, 10(2), 140-147.
- Ortiz, A. (2009). *Pedagogía problemática: modelo metodológico para el aprendizaje significativo por problemas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Palomino, E. (2016). La aplicación de las fases de resolución de problemas de George Polya en el marco de las rutas de aprendizaje en los estudiantes del III ciclo de la I.E. N° 131 "Monitor Huáscar" (Tesis de diploma). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Pérez, Y., y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*. 35

(73), 169- 194. Recuperado de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S1010-29142011000200009&script=sci_arttext&lng=en

Pifarré, M., y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 19(2), 297-308. Recuperado de <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21745/21579>

Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender*. Caracas: Venezuela: Fundación Polar

Rangel, J.A. y García, M.P. (2014). Fortalecimiento del desempeño de los niños de 1° primaria en la resolución de problemas de estructura aditiva: cambio y combinación. *Espiral, Revista de Docencia e Investigación*. 4(2), 63 – 82. Recuperado de <https://doi.org/10.15332/erdi.v4i2.842>

Romero, A. (2012). *Comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en alumnos de segundo grado de primaria del distrito Ventanilla – Callao* (tesis de maestría). Universidad San Ignacio de Loyola, Lima.

Segovia Alex, I., y Castro Martínez, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. 7 (1), 499-536. Recuperado de <http://www.redalyc.org/html/2931/293121936023/>

Tebar, L. (2003). *El perfil del profesor mediador*. Madrid, España: Santillana.

Vallés, A. (2005). Comprensión lectora y procesos psicológicos. *Revista Virtual Liberabit. Lima Perú*. 11, 49-61. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/686/68601107.pdf>