PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad, como medio para desarrollar la capacidad de justificación de los profesores de secundaria

Tesis para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

Max Antonio Ponce Mariluz

Dirigida por

Dr. Uldarico Víctor Malaspina Jurado

Noviembre, 2019

DEDICATORIA

A nuestro Dios, mi maestro, a mi esposa Jeanette quien ha sido el soporte durante esta etapa de estudio, y a mis hijos Matias, Gabriel y Giovana por su comprensión y paciencia, permitiendo la culminación del presente trabajo .

A mis queridos padres, Máximo y Gloria por su ejemplo de valor, deseo de superación y esfuerzo.

AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia por su apoyo y por haber comprendido mi ausencia en muchos eventos familiares en este tiempo.

A la Universidad Católica del Perú por la oportunidad de realizar estudios de maestría y llegarla a culminar con éxito. A mi asesor Dr. Uldarico Malaspina Jurado, por sus enriquecedoras orientaciones para el desarrollo de esta investigación

Muchas gracias a cada uno de los docentes participantes en esta investigación, y a mi amigo Mg. Carlos Torres N. por su tiempo, amistad y paciencia.

A la Mg. Augusta Osorio Gonzales y a la Mg. Carolina Rita Reaño Paredes por cada una de sus observaciones pertinentes que aportaron a nuestra investigación.

RESUMEN

Actualmente, en cada uno de los documentos oficiales normativos de educación que rigen en nuestro país, se le demanda al profesor que enseñe, ejercite y evalúe la capacidad de justificación matemática de los alumnos. Para que esto se logre en los docentes es necesario que el profesor desarrolle la capacidad de justificar y proponga situaciones idóneas en el aula.

Investigaciones previas (Maraví, 2015) nos muestran la clasificación de errores frecuentes por parte del profesor al justificar proposiciones condicionales, y en otras investigaciones como en Torres (2016), se establece que existe estrecha relación entre la competencia de creación de problemas con la competencia matemática. Los antecedentes mencionados y las investigaciones que plantean alternativas para desarrollar la capacidad de justificar en los profesores son la motivación y la pertinencia para este trabajo, dado que estos brindan y mencionan opciones para desarrollar la capacidad de justificación.

Como inicio de nuestra investigación se desarrolló un taller con docentes de educación secundaria en matemática, donde se incluyó creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad. En dicho taller se aplicó a los profesores participantes una exploración inicial, una exploración de proceso y una exploración final. En estas exploraciones se solicitó a los profesores, de forma individual y en parejas, justificar las respuestas de los problemas propuestos y/o creados por ellos, y al final se solicitó analizar las justificaciones realizadas por algunos alumnos, presentadas en el episodio.

Al analizar las justificaciones realizadas por los docentes en el taller utilizando los instrumentos diseñados, los resultados nos muestran indicios de que el proceso de creación de problemas usando una estrategia EPP (que consiste en un Episodio, un problema Pre y un problema Pos) se podría usar como medio para desarrollar la capacidad de justificación en el profesor. Una conclusión que podemos obtener de nuestro trabajo se refiere a que la actividad justificativa matemática demanda la movilización de diversas capacidades en el profesor, y que se estimulan al vivir experiencias didácticas que se demande la creación de problemas, en un entorno de análisis de la suficiencia de información para responder el requerimiento del problema dado.

En este sentido, en la presente investigación se muestra una manera de desarrollar la capacidad de justificación de los profesores, empleando estrategias de creación de problemas

de suficiencia de información en el campo de la divisibilidad, enfatizando la justificación de las proposiciones condicionales en los contextos propuestos.

En este trabajo, además de algunas conclusiones, hacemos también algunas recomendaciones para posteriores investigaciones con énfasis en la capacidad de justificación de los profesores de matemática.

Palabras clave: Creación de problemas, suficiencia de información, formación de profesores, problemas *pre*, problemas *pos,* divisibilidad y capacidad de justificación.

ABSTRACT

Currently in the official normative documents of education that govern in our country, the teacher is asked to teach, exercise and evaluate the mathematical justification ability of the students. For this to be achieved in teachers, it is necessary for the teacher to develop the ability to justify and propose suitable situations in the classroom.

Previous research (Maraví, 2015) shows us the classification of frequent teacher's errors when justifying conditional propositions, and in other researches such as Torres (2016), it is established that the competence to create problems is closely related to the mathematical competence. The aforementioned background and the research which proposes alternatives to develop teacher´s ability to justify are the motivation and relevance for this work, since they provide and mention options to develop the ability of justification.

In order to reach the aim of our research, a workshop was developed with mathematics teachers of secondary education, which included the creation of problems of sufficiency of information on divisibility. In this workshop an initial exploration, a process exploration and a final exploration were applied to the participating teachers. In these explorations, the teachers were asked individually and in pairs to justify the answers to the problems proposed and/or created by them. In addition, they were asked to analyze the justifications made by some students.

When analyzing the justifications made by the teachers in the workshop using the instruments designed, the results show us that the process of creating problems using the EPP strategy (episode, pre problem and pos problem), could be used as a means to develop the ability of the teacher to justify. A conclusion that we can obtain from our work refers to the fact that the mathematical justification activity demands the mobilization of diverse abilities in the teacher, and that they are stimulated by living didactic experiences on creating problems, with emphasis on the analysis of the sufficiency of information .

In this sense, the present research shows a way to develop the ability of justification of teachers, using strategies to create problems of sufficiency of information in the field of divisibility, emphasizing the justification of conditional propositions in contexts proposed.

In this work, in addition to some conclusions, we also make some recommendations for further research with emphasis on the ability of mathematics teachers to justify.

Keywords: Problem posing, sufficiency of information, teacher training, pre problems, post problems, divisibility, and justification capacity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los estándares de aprendizaje mencionados en el Currículo Nacional del Perú del 2016 describen los indicadores de las capacidades de razonar, argumentar y justificar ideas matemáticas para cada una de las competencias que el alumno peruano debe mostrar respecto a ciertas situaciones que involucran: cantidad – regularidad, equivalencia y cambio – forma, movimiento y localización – gestión de datos e incertidumbre. En estas competencias está presente la justificación como uno de los objetivos principales en la enseñanza de la matemática, específicamente cuando el alumno intenta crear o dar solución a un problema. Asimismo, en el currículo de diversos países se está considerando la intención de desarrollar en los estudiantes la capacidad de justificar sus respuestas y razonamientos. Por ejemplo, en los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática elaborados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los Estados Unidos de América, se demanda que se fortalezca en los estudiantes la competencia para justificar sus procedimientos y razonamientos desde los primeros grados de educación escolar.

Esto se tradujo de Recio (2002):

> Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido…
>
> Debe intentarse que los niños justifiquen sus soluciones, sus procesos de pensamiento y sus conjeturas, y que además lo hagan de diversas formas. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos les ayudan a relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que hacer referencia a la hora de explicar y justificar sus ideas (p. 36)

Inspirados en estos objetivos, obviamente válidos también para los estudiantes peruanos, como lo corroboran documentos normativos de la Educación Básica Regular (EBR) del Perú en los que se demanda desarrollar la capacidad de justificación en los alumnos, decidimos desarrollar el presente trabajo, cuyo propósito se resume a continuación: *Analizar cómo mejoran los profesores de educación secundaria su capacidad de justificación, mediante la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad.* En esta investigación, analizamos información que recogemos después de aplicar los instrumentos de medición a un grupo de docentes, donde se analizaron las justificaciones brindadas por el grupo de matemática en servicio para fundamentar sus respuestas frente a los problemas planteados en los respectivos instrumentos.

Para realizar el análisis mencionado, fue necesario el apoyo de conceptos teóricos provenientes de la Educación Matemática, relacionados con la justificación matemática, así como de elementos metodológicos propios del análisis de contenido. Asimismo, es preciso mencionar que esta investigación se desarrolla en cinco capítulos:

En el capítulo 1 presentamos los antecedentes, la pertinencia y los elementos que dirigen nuestra investigación, como la pregunta de investigación y los objetivos.

En el capítulo 2 exponemos los elementos teóricos y metodológicos necesarios para el desarrollo del estudio. Los primeros provienen de la justificación matemática y las investigaciones sobre Creación de problemas; los segundos, de la metodología de análisis de contenido.

En el capítulo 3 presentamos los instrumentos aplicados en el taller: unos provenientes de investigaciones internacionales adaptadas a nuestro contexto y otros creados específicamente para este estudio, los cuales nos permitieron cumplir los objetivos trazados para nuestra investigación. También mostramos las respuestas correctas y justificaciones esperadas correspondientes a cada pregunta.

En el capítulo 4 describimos los pasos mediante los cuales recogimos y organizamos los datos para el estudio, en función a los procedimientos del análisis de contenido. Estos nos permitieron clasificar las justificaciones incorrectas y correctas, así como su evolución durante el proceso de la investigación. Asimismo, aplicamos el procedimiento metodológico de análisis principal de las justificaciones correctas, para clasificarlas y codificarlas según el nivel que la matriz de codificación indicaba y por los elementos teóricos considerados en nuestra investigación.

En el capítulo 5 planteamos las conclusiones de nuestra investigación, referidas a los objetivos establecidos en el capítulo 1. Además, presentamos algunas sugerencias y recomendaciones que pueden ser usadas en posteriores investigaciones.

Finalmente, en la parte de los anexos mostramos los diversos documentos, matrices de codificación e instrumentos que necesitamos diseñar y que nos permitieron levantar y ordenar información y datos para realizar nuestra investigación.

CAPÍTULO 1

Presentamos los argumentos que justifican el trabajo y las investigaciones relacionadas a este, que son un soporte importante para el desarrollo de esta investigación, pues en ellos se encontraron elementos conceptuales y metodológicos para contestar la pregunta de estudio, y los objetivos que la orientan.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el primer capítulo de nuestra investigación exponemos los argumentos que justifican la realización de nuestro trabajo y los que anteceden a ella. Además, planteamos la pregunta de estudio que intentamos responder, los objetivos que la orientan, los elementos teóricos y el método con el que desarrollaremos nuestro trabajo.

1.1 Planteamiento y justificación del problema

En estos últimos años, el enfoque por competencias ha sido tomado en cuenta por la comunidad internacional como una opción en el sector educativo para ir más allá del aprendizaje de contenidos, dado que este está dirigido a la formación de estudiantes constructivos, y reflexivos, dando lugar a identificar y entender la importancia que juega la matemática en la vida del ser humano. Por este motivo, muchos países emplean el enfoque por competencias como base para sus reformas curriculares de la educación obligatoria (OCDE, 2005). Además, estas experiencias han influido en diferentes reformas en Latinoamérica, tales como en el currículo peruano, donde se observa una transición del marco curricular antiguo del 2009, donde la noción de competencia no estaba explícitamente presente, al nuevo ajuste curricular.

En el nuevo currículo por competencias que se viene implementando en nuestro país, se trata de que a cada competencia matemática le correspondan capacidades matemáticas, tales como razonar, argumentar, justificar, representar, matematizar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar. Todos estos cambios demandan la realización de trabajos de investigación que traten sobre cómo mejorar las capacidades en los profesores, como por ejemplo el saber justificar. Para ello, se requiere el diseño de situaciones o herramientas que permitan desarrollar dicha capacidad, pues estamos seguros de que no se puede desarrollar una capacidad en el alumno sin antes desarrollar dicha capacidad en los profesores. Esto conlleva a la pertinencia de nuestro trabajo, pues su intención es desarrollar la capacidad de justificación de enunciados condicionales en los profesores, mediante la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad. En esta perspectiva, existen investigaciones previas a la nuestra que son un gran soporte para nuestro trabajo y que han tratado sobre la justificación con distintos enfoques. Por ello, decidimos ir más allá de lo que ya había sido investigado, presentando un medio que consiste en la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad, con el objetivo de desarrollar la capacidad de justificación en los profesores de secundaria.

A modo de resumen, en las líneas que siguen como sustento científico, se presenta la literatura relacionada a la investigación que llevamos a cabo.

1.2 Antecedentes

1.2.1 Investigaciones realizadas sobre la justificación matemática

En el estudio de Vallejo (2012), se muestra un estudio sobre las justificaciones y sus procesos, que implican el tratamiento de procesos de justificaciones afines: el planteamiento de conjeturas, la generalización en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (EBR) del Perú, el uso de contraejemplos y la generalización, partiendo de las justificaciones dadas por estudiantes respecto de enunciados diseñados en forma de sesiones de clase por el investigador. Además, examina la relevancia de justificaciones en el tema de divisibilidad específicamente.

Luego de revisar textos de matemática de secundaria de la EBR del Perú que mencionan la justificación, afirma que no se define claramente dicha capacidad en ningún documento revisado por la investigadora, pues solo encuentra una idea de justificar como habilidad previa a la demostración. Como objetivo general, su investigación plantea una propuesta para la inclusión de las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en la educación básica regular y, para ello, hace un análisis de la inclusión de las justificaciones sobre el tema de divisibilidad en algunos de los textos empleados en la enseñanza de las matemáticas en el Perú, y concluye que pocos textos consideran a la justificación como actividad relevante. Además, examina las reacciones de los alumnos de primer grado de secundaria frente a una serie de situaciones problemáticas relativas a la divisibilidad, en las que se enfatizan las justificaciones para luego realizar el análisis de dichas justificaciones a través del diálogo con sus alumnos, para llegar, con el acompañamiento del profesor, al conocimiento o el saber del objeto matemático.

Para la investigadora una justificación matemática no es igual que una demostración matemática. Además, afirma que una justificación matemática comprende un sentido mucho más amplio que una demostración, ya que esta incluye aquellos primeros argumentos que son proporcionados por estudiantes que son nuevos en los procesos demostrativos. Basándose en esta postura, plantea, como una de sus conclusiones de investigación, que toda demostración es una justificación matemática, aunque no toda justificación sea una demostración. De la misma forma, afirma que, a pesar de que en el Diseño Curricular Nacional (2009) se demanda el trabajo con la justificación, no se establecen sugerencias para que el profesor pueda provocar y crear situaciones donde se desarrolle la capacidad de justificar matemáticamente. Asimismo, afirma que el rol del docente en la enseñanza de las matemáticas donde se incluyen justificaciones es muy pertinente, puesto que es él quien dirige el proceso de justificación por medio de preguntas, corrección de imprecisiones, creación de problemas, habilidad de discernir si una justificación es correcta, así como la orientación a los estudiantes en la búsqueda de los argumentos más adecuados.

Finalmente, como resultado de sus instrumentos de investigación, la investigadora enfatiza la responsabilidad que tienen los maestros en su formación, en el ejercicio de la enseñanza de la matemática, en la capacidad del manejo de los libros de texto detectando deficiencias, de estar lo suficientemente preparados para poder aclarar las dudas de sus alumnos en clase y, sobre todo, de estimular el desarrollo de su pensamiento matemático crítico, fomentando así su búsqueda justificaciones, generación de conjeturas, propuestas de contraejemplos y generalizaciones.

1.2.2 Investigación sobre la argumentación matemática

Por su parte, Jiménez y Pineda (2012) refieren que la comunicación entre el alumno y el profesor es limitada por muchos factores, siendo uno de ellos la impertinente e incorrecta justificación de proposiciones condicionales por parte del profesor, usadas en su explicación de un tema o de una justificación a la respuesta presentada al alumno.

> Históricamente, las clases de matemáticas han sido influenciadas por distintas escuelas de pensamiento filosófico, como el platonismo, el positivismo lógico, el estructuralismo y el formalismo, que hasta el día de hoy perduran; esto ha generado, en muchos casos, que el docente, de forma desprevenida, se limite a intentar transmitir verdades

matemáticas en un lenguaje axiomatizado y, peor aún, sin mostrar las relaciones que tienen con la realidad. (p.104)

Además, la poca frecuencia de fomentar la justificación de las respuestas o conjeturas en diversas situaciones se convierte en un limitante para lograr el desarrollo de las competencias en los estudiantes, siendo este uno de los objetivos de la clase guiada por el docente. Cabe resaltar la existencia de varios factores que permiten esta situación, por lo cual los investigadores se centran en el lenguaje que el alumno utiliza para comunicar algo en el aula (argumentación y justificación) y a esto se le suma el lenguaje del profesor, que en muchos casos no es el adecuado, tal como lo señalan León y Calderón citado en Jiménez y Pineda (2012):

> (…) que el aula de clase se convierte en el lugar adecuado para construir y manifestar conocimiento, a partir de la interacción entre sus protagonistas (estudiantes-docentes) exige un tipo de relación didáctica que incorpore el componente comunicativo como un aspecto fundamental para el aprendizaje. (p. 44)

Por este motivo, el autor nos da a entender que si no se dan los elementos básicos para una comunicación adecuada en el aula que fomente la actividad de justificación (de parte de los alumnos como del profesor), entonces, estaríamos frente a un ambiente autoritario o jerárquico. Es decir, un monólogo, situación en la que se estaría bloqueando el proceso de aprendizaje y enseñanza, y esto daría paso a la memorización que tanto daño hace al estudiante y al quehacer matemático.

Asimismo, el estudio de Jiménez y Pineda (2012) muestra que se deben desarrollar estrategias y situaciones para fortalecer esta mejora en la comunicación matemática en aula. De esta manera, se plantea una estrategia heurística "solucionador-escucha" llamada TAPS (*Thinking Aloud pair Problem Solving*) que se puede interpretar como una estrategia que se basa en resolver problemas en voz alta y en parejas de estudiantes. En esta estrategia planteada por los investigadores, se desarrolla un proceso que es monitoreado por el profesor y el solucionador. Quien realiza la solución lo hace argumentando y justificando cada paso en todo el proceso, mientras su compañero (escucha) puede intervenir haciendo sugerencias, colaborando en el proceso, prestando atención a los errores que pueda cometer el solucionador, con el fin de permitir a su compañero descubrir por sí mismo el error. El que escucha no critica, sino aporta ideas que complementen el trabajo, generándose, de esa manera, un ambiente argumentativo donde ambos participantes llegan por sí mismos a nuevos saberes. Esta investigación, la cual considera una actividad individual y en parejas, fue pertinente para nosotros, pues se asemeja a lo planeado y desarrollado en las actividades del taller de nuestra investigación sobre creación de problemas. En conclusión, la metodología del trabajo "solucionador-escucha" llamada TAPS que presentan los investigadores es un aporte para nuestra investigación, dado que en la actualidad el trabajo colaborativo se está fomentando en el aula para formar personas no autosuficientes e individualistas, sino colaborativas y solidarias. Se sabe que esto fomenta el trabajo en parejas donde, en muchos casos, se ha visto que se llega al saber y resolución de un problema en menor tiempo y de forma correcta, ya que la resolución se da en un contexto más relajado y sin la ansiedad o frustración propias del trabajo individualista que bloquea la fluidez de las ideas, creatividad, y justificaciones de las respuestas.

1.2.3 Investigación relacionada al enunciado condicional

El trabajo de Maraví (2015) tuvo como objetivo analizar los errores de docentes de matemática del nivel secundario con respecto al uso y a los conocimientos relacionados a la proposición condicional. Para ese propósito, el investigador empleó elementos teóricos que provienen de la lógica y de la Educación Matemática, que guardan relación con el estudio de los errores. Además, mediante el uso de determinados procedimientos metodológicos del análisis de contenidos, realiza un análisis de las justificaciones de las respuestas emitidas por los participantes. De esta manera, se encuentra una relación entre los errores estudiados en investigaciones previas a la suya y los nuevos tipos de errores observados en las justificaciones provistas por docentes de matemática en servicio. Por ello, el autor desarrolla un especial y cuidadoso estudio de la lógica, a la que considera primordial dentro de la actividad matemática. Con respecto a lo anterior, Kneller, citado por Maraví (2015), señala algunos beneficios que trae el conocimiento de la lógica a la enseñanza, para los maestros:

> (…) los maestros se hallarían en mejores condiciones de mejorar la capacidad del alumno para pensar de manera lógica, al saber cuáles son las operaciones de ese pensamiento y cómo se puede guiar a los estudiantes a fin de realizarlas de una manera más efectiva.(p.20)

Asimismo, Maraví (2015) realiza un recorrido por diferentes documentos oficiales en los que se afirma que el dominio y el desarrollo de las habilidades sobre justificaciones de proposiciones condicionales por parte de los estudiantes exige a los maestros conocer la lógica y relacionarla en varios aspectos con el currículo. Además, asevera que conocer y dominar la lógica es la base para los profesores, en particular para los profesores de matemáticas, pues esta sirve para expresar el contenido de la misma matemática; más aún, cuando se trabaja con demostraciones, si no se sabe exactamente lo que se pretende demostrar. Luego de haber revisado algunas investigaciones, concluye que la lógica contribuye a la relación problemática entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, y que un aspecto muy importante de la aplicación de la lógica se da a nivel de las proposiciones condicionales.

Maraví (2015) manifiesta interés sobre la responsabilidad que tiene el profesor de sus errores en el razonamiento lógico durante su exposición en clase, por lo que apunta al cómo promover el pensamiento crítico en las escuelas. En este sentido, el autor identifica, clasifica, describe y analiza los errores de los profesores de matemáticas en sus tareas matemáticas que involucran las proposiciones condicionales. Enfocándonos en la investigación, se distingue que es cualitativa mediante una metodología del análisis de contenido. Cabe mencionar que esta metodología denominada *análisis de contenido* con todos sus elementos propios de ella, es la que aplicamos en nuestra investigación, donde la unidad de análisis será la justificación. Para los propósitos de su investigación, Maraví (2015) invitó a un grupo de profesores en servicio y les planteó cuatro problemas distintos, donde evitó que la dificultad de estos no sea un aspecto que distorsione el objetivo en la investigación, el cual fue detectar errores nuevos cometidos con el enunciado condicional. Asimismo, por esta razón, el objeto matemático en nuestra investigación fue muy familiar a los participantes, por lo que hemos considerado que los problemas planteados en los instrumentos para la recolección de datos durante el taller versen sobre aspectos básicos de la divisibilidad, con el propósito de reducir la posibilidad de que el manejo del objeto matemático no sea motivo de los errores por parte de los docentes, sino más bien la construcción de sus justificaciones, que son nuestro interés de estudio y clasificación, según la matriz diseñada y adaptada para nuestro estudio .

1.2.4 Investigación sobre la creación de problemas

En Martínez (2015), la investigadora aporta conocimientos mediante la elaboración, la aplicación y el análisis de los resultados de un taller realizado con docentes de educación primaria, en el que se aplicaron cuatro actividades, con el propósito de estimular la capacidad creadora a través de la formulación de problemas de adición y sustracción de números naturales por variación. Para la realización de los talleres, se apoyó en las estrategias *Episodio en clase*, *Problema Pre* y *problema Pos* (Estrategias *EPP*) de Malaspina (2013), donde el objetivo general de su estudio fue analizar el efecto que tendría la propuesta *EPP*, orientada a estimular la capacidad de crear problemas de adición y sustracción de números naturales en profesores de Educación Primaria a través de *Episodios en clase* contextualizados de acuerdo a la realidad en la que los participantes laboraban. Después de la aplicación de la estrategia *EPP*, la opinión de los participantes fue que la creación de problemas por variación era apropiada y pertinente dado que los pasos para crearlos fueron sencillos y que les permitieron una aproximación a las matemáticas mediante problemas de acuerdo a las necesidades e inquietudes de sus estudiantes. La investigadora afirma que la razón de su investigación tuvo tres motivos fundamentales: el primero fue por la importancia del tema y la relación entre resolución y creación de problemas presentes en las capacidades a lograr en nuestros documentos normativos; el segundo motivo fue que los estudiantes deben aprender matemáticas a través de la creación de problemas y, por ello, su trabajo contribuye a que los profesores de Educación Primaria se involucren en la creación de problemas y que la actividad creativa forme parte del proceso enseñanza-aprendizaje con sus estudiantes; el tercer motivo trata de difundir la estrategia EPP para la creación de problemas como una herramienta de enseñanza. Asimismo, afirma que activar y fomentar la capacidad creadora de los docentes para que luego estimulen el desarrollo del pensamiento, creatividad y curiosidad de sus estudiantes resulta fundamental, siendo los educadores los protagonistas y logrando que sus estudiantes tengan la oportunidad y la libertad de plasmar los datos en los enunciados de sus problemas creados, de acuerdo a los conocimientos matemáticos, a fin de que sean ellos mismos los que se reten en avanzar e incrementar el horizonte matemático adquirido hasta ese momento. Por lo tanto, la autora esperaba que la actividad de creación de problemas de adición y sustracción de números naturales generara mejoras en la capacidad de resolverlos y superar las dificultades que presentaban los estudiantes diagnosticados al inicio de la investigación. Para la investigadora, la creación de problemas es la capacidad que tiene el hombre de plasmar vivencias y dificultades en un enunciado, a partir de sus experiencias personales, lo que le permite efectuar operaciones por medio de estrategias y procedimientos, y, de ese modo, obtener una o varias soluciones, las mismas que le permitan resolver sus problemas planteados y aplicarlos en circunstancias que se le presenten en la vida cotidiana. De acuerdo con los aportes de los estudios que revisó y en base a su experiencia laboral, pudo manifestar que los problemas contextualizados creados por los docentes permitieron enseñar los contenidos matemáticos a los alumnos, adecuándolos a las características generales del grupo. Este hecho resultó estimulante y provechoso, ya que respondió a las capacidades, intereses y necesidades, lo que le permitió al profesor realizar una evaluación personalizada y tener una visión más clara de los logros obtenidos por cada alumno en la parte operativa como en los procesos cognitivos que ellos realizaron. Entre las conclusiones, la investigadora afirmó que su trabajo de investigación contribuyó a la adaptación de los planteamientos de la estrategia *EPP* diseñada por el investigador Malaspina (2013), a los dos grados del III ciclo de Educación Primaria, de tal modo que permitió un estudio con todas las etapas estructuradas adaptando rúbricas con criterios numéricos y cualitativos que hicieron posible una calificación y una categorización de la calidad de los problemas propuestos y la adaptación de una metodología para llevar a cabo el estudio. Considera que su trabajo es un aporte importante para investigaciones futuras en esta línea de *Creación de Problemas* que se aplica en el aula. Finalmente, la autora consideró que la estrategia *EPP* fue adecuada para estimular la capacidad de crear problemas aritméticos de adición y sustracción de números naturales, ya que presenta procedimientos sencillos que facilitan a los participantes apropiarse de los términos y secuencia a seguir y, a su vez, hizo posible que los participantes, de acuerdo con el avance en la aplicación de las actividades, incrementaran la calidad de los problemas creados.

1.2.5 Investigación sobre divisibilidad

En Ordoñez (2014), se investigan las condiciones con las que se puede lograr que los estudiantes de tercer grado de primaria sean capaces de construir, de forma progresiva, los conocimientos de división y divisibilidad de números naturales. Para ello, analizó los significados de la división, investigó acerca de las justificaciones en los documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú, estudió las producciones de los estudiantes de tercer grado de primaria en la construcción de los conocimientos de división y divisibilidad de los números naturales, analizó las justificaciones que los alumnos presentaron y, finalmente, hizo propuestas para la enseñanza de la división y divisibilidad de números naturales. Se investigan las condiciones en que es posible lograr que los estudiantes del tercer grado de nivel primaria fueran capaces de construir, en forma gradual, conocimientos de divisibilidad de números naturales, y que, por medio de ese proceso fueran capaces de desarrollar su razonamiento demostrativo y justificativo. La metodología que empleó fue Investigación – Acción colaborativa, donde los elementos teóricos empleados fueron la intuición, la identificación de patrones, razonamiento plausible y formulación de conjeturas. La investigadora definió la divisibilidad de números naturales como un caso especial de división. Por ejemplo, el caso de una división exacta se entiende como una repartición exacta; es decir, que debe ser entendida como una repartición equitativa y máxima sin objetos sobrantes al terminar la repartición.

Para ello, la autora consiguió, de manera activa y general, que los estudiantes propusieran ejemplos de reparticiones exactas o inexactas, con el propósito de que afianzaran estas nociones y, en la mayoría de los casos, solicitó la justificación de por qué su ejemplo es del tipo que ellos indicaron para determinar, de esa forma, la medición de los avances individuales. Algunas de las afirmaciones de la autora nos parecieron muy pertinentes, referidas a la justificación, en Ordoñez (2014):

> (….) es importante resaltar que una respuesta errada como la de Luis, no debe pasar desapercibida. Aquí tratamos de aprovechar estos errores para propiciar críticas, correcciones y debates por parte de sus compañeros. Asimismo, es relevante mencionar que en la corrección de una respuesta, no solo se debe aceptar que el estudiante diga "sí está bien" o "no está bien" como respuesta, sino pedir una justificación de *"¿por qué sí?* o *¿por qué no?*" con el propósito de que los estudiantes nos garanticen que entienden. Por otro lado, muchas veces las críticas, debates y justificaciones surgen gracias a los resultados erróneos de los alumnos, lo que permite reforzar y aclarar ideas, y finalmente un avance para todos. (p.115).

Esta opinión nos parece válida porque la autora resalta al proceso justificativo como un medio para llegar al conocimiento a partir de una respuesta esperada o distinta a ella. La autora elaboró varias conclusiones: una de ellas, con respecto a los alumnos que logran construir su conocimiento de división y divisibilidad de números naturales, afirma que las justificaciones involucradas en los problemas y la noción de repartición equitativa y máxima fueron el medio para lograr la construcción de dichos conocimientos. Además, observa que pocos alumnos lograron hacer conjeturas en relación al tema de divisibilidad. Es por esto que la autora consideró que la mayoría de los estudiantes no pueden hacer conjeturas debido a su corta edad y, además, porque son nuevos en esta forma de aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, una sugerencia interesante que ella plantea es realizar los ajustes necesarios a la propuesta aquí planteada para que los alumnos de este nivel tengan las condiciones suficientes para aprender a dividir números naturales, en términos de la noción de la repartición equitativa y máxima.

1.3 El porqué de nuestro trabajo

Nuestro trabajo intenta proponer algunas sugerencias tomando en cuenta los grandes desafíos en el área de la educación matemática, lo cual nos demanda formar profesores competentes. De esta manera, nos proponemos contribuir a desarrollar capacidades en los profesores que les permita mejorar su práctica docente: específicamente, la capacidad de justificación. En Carrasco (2013) se afirma que :

> "justificar significa explicar la utilidad, los beneficios y la importancia que tendrá el resultado de la investigación, tanto para la sociedad en general, el ámbito socio-gráfico donde se realiza, así como las esferas intelectuales del país"(p. 118).

Esta capacidad es mencionada en los diferentes documentos oficiales, como en los Estándares de aprendizaje del Currículo Nacional (Perú, Ministerio de Educación, 2014) que sugiere accionarla en diferentes contextos en el aula, particularmente cuando el alumno plantea preguntas simples pero retadoras hacia el docente. Esta es una de las razones para que los docentes cuenten con instrumentos para ejercitar y mejorar dicha capacidad, y, de esa manera, estar mejor preparados para justificar las respuestas que los alumnos esperan del profesor y, si es posible, poder justificar una respuesta o proposición de diversas maneras; más aún, formular a sus alumnos preguntas que los estimulen a aprender justificando. Por ese motivo, en nuestro trabajo presentamos la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad como medio para mejorar esta capacidad de justificación en los docentes de secundaria. Cabe mencionar que consideramos la divisibilidad como un objeto matemático cercano a los participantes, ya que este se trata desde los últimos años del nivel primaria de la EBR, según los documentos normativos en nuestro país.

A continuación presentamos algunas razones que nos motivaron a centrar nuestra atención en desarrollar la capacidad de justificación en los docentes y alumnos:

1.3.1 La capacidad de justificación en las Rutas de Aprendizaje

En las Rutas de aprendizaje (Perú, Ministerio de Educación, 2015) se sugiere a los docentes generar situaciones donde se puedan enseñar y desarrollar las capacidades de forma individual, pero sin descuidar la combinación de varias competencias en diversos contextos, para lograr la competencia matemática de los estudiantes. Desde esta perspectiva, importa el dominio específico de estas capacidades, pero es indispensable su combinación y utilización pertinente en contextos variados.

En nuestra investigación, las actividades que se llevan a cabo durante el taller descrito en el Capítulo 4 ponen énfasis en la capacidad de justificación del docente, de forma individual, así como su capacidad de analizar las justificaciones realizadas por otras personas y las justificaciones colaborativas realizadas en parejas. Así, estas actividades son coherentes con la sugerencia en Rutas de Aprendizajes sobre el tratamiento individual de una capacidad para luego movilizarla con otras y, de esa manera, desarrollar la competencia en los estudiantes. Para nuestro trabajo, adaptamos el taller para docentes y así les brindamos experiencias concretas para desarrollar la capacidad de justificar afirmaciones propias y examinar las de otros.

En la misma temática, los documentos oficiales, como las Rutas de Aprendizaje y el Currículo Nacional (Perú, Ministerio de Educación, 2009), proponen un enfoque en el marco de la resolución de problemas. Por tal motivo, en esta investigación, desarrollamos un taller de resolución y creación de problemas en donde se le pide al profesor resolver y crear problemas de suficiencia de información, lo cual implica obtener una respuesta y, además, dar su justificación. Sobre la resolución de problemas, en las Rutas de aprendizaje se afirma lo siguiente:

> (…)La resolución de problemas sirve de escenario para desarrollar competencias y capacidades matemáticas. Es a través de la resolución de problemas, que los estudiantes desarrollan competencias matemáticas y capacidades matemáticas. (p.15)

También, en las Rutas de Aprendizaje para el VI y VII ciclo, se da una pauta para desarrollar la capacidad de justificación y argumentación utilizando un recurso denominado la *cruz demostrativa*:

> Los organizadores visuales, en este caso la cruz demostrativa, son recursos que posibilitan la estructuración de conocimientos, procedimientos para una exposición o discusión, para determinar la validez o no de una situación matemática. Esta estrategia tiene como finalidad que los estudiantes, al analizar la información, identifiquen el carácter de verdad de una proposición; es decir, la validez o no de las relaciones de la situación matemática analizada, y a través de razonamientos inductivos y deductivos logren dar razones suficientes que lo justifiquen; luego expresarán una conclusión mediante el lenguaje verbal y el lenguaje matemático. En este proceso se van a relacionar datos, siguiendo las reglas del pensamiento crítico, para obtener información nueva. (Perú, Ministerio de Educación, 2015,.91)

Tal como se señala en la cita mostrada de la Rutas de aprendizaje, la cruz demostrativa (ver Figura 1) muestra una estrategia que podría utilizarse en la enseñanza de la matemática para proporcionar herramientas que conllevarían a desarrollar la capacidad de justificación.

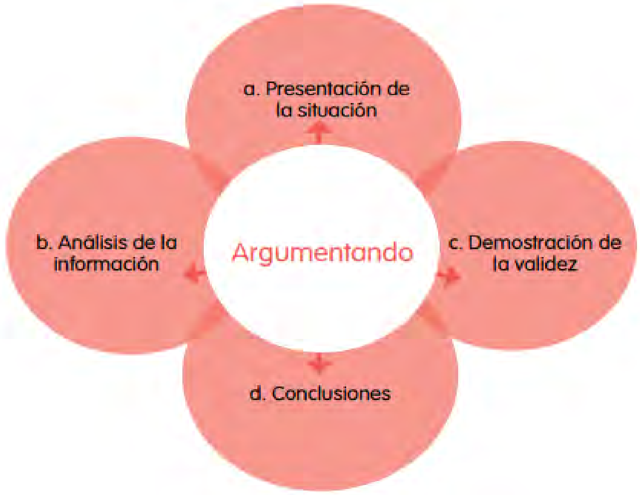


Figura 1. La cruz demostrativa
Fuente: Perú, Ministerio de Educación. (2015, p.92)

En nuestro trabajo, complementamos esta estrategia de argumentación y justificación presentada con una estrategia de creación de problemas EPP (Malaspina, Mallart y Font, 2015) que es útil, sencilla y cercana a la realidad del docente con el objetivo de mejorar su capacidad de justificación, estrategia que se explicará con más detalle en el Capítulo 2.

1.3.2 La capacidad de justificación en los Estándares de aprendizaje Nacional

En los Estándares de aprendizaje del Perú (Perú, Ministerio de Educación, 2014)se describen los indicadores de la capacidad de razonar , argumentar y justificar ideas matemáticas en cada una de las cuatro competencias: Resuelve problemas de cantidad; regularidad, equivalencia y cambio; forma, movimiento y localización; gestión de datos e incertidumbre.

Tabla 1. Estándares de aprendizaje de la competencia "Resuelve problemas de cantidad"

Nivel	Descripción de los niveles de desarrollo de la competencia
DESTACADO	Resuelve problemas referidos a relaciones entre cantidades o realizar intercambios financieros, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números racionales e irracionales, y modelos financieros. Expresa su comprensión de los números racionales, sus propiedades y operaciones, la noción de número irracional y la densidad en Q; las usa en la interpretación de información científica, financiera y matemática. Evalúa y determina el nivel de exactitud necesario al expresar cantidades y medidas de tiempo, masa y temperatura, combinando e integrando un amplio repertorio de estrategias, procedimientos y recursos para resolver problemas, optando por los más óptimos. Elabora afirmaciones sobre la validez general de relaciones entre expresiones numéricas y las operaciones; las sustenta con demostraciones o argumentos.
Nivel 7	Resuelve problemas referidos a las relaciones entre cantidades muy grandes o muy pequeñas, magnitudes o intercambios financieros, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números irracionales o racionales, notación científica, intervalos, y tasas de interés simple y compuesto. Evalúa si estas expresiones cumplen con las condiciones iniciales del problema. Expresa su comprensión de los números racionales e irracionales, de sus operaciones y propiedades, así como de la notación científica; establece relaciones de equivalencia entre múltiplos y submúltiplos de unidades de masa, y tiempo, y entre escalas de temperatura, empleando lenguaje matemático y diversas representaciones; basado en esto interpreta e integra información contenida en varias fuentes de información. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos de cálculo y estimación para resolver problemas, los evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea y compara afirmaciones sobre números racionales y sus propiedades, formula enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones numéricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades matemáticas.
Nivel 6	Resuelve problemas referidos a las relaciones entre cantidades o magnitudes, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números naturales, enteros y racionales, y descuentos porcentuales sucesivos, verificando si estas expresiones cumplen con las condiciones iniciales del problema. Expresa su comprensión de la relación entre los órdenes del sistema de numeración decimal con las potencias de base diez, y entre las operaciones con números enteros y racionales; y las usa para interpretar enunciados o textos diversos de contenido matemático. Representa relaciones de equivalencia entre expresiones decimales, fraccionarias y porcentuales, entre unidades de masa, tiempo y monetarias; empleando lenguaje matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, procedimientos, y propiedades de las operaciones y de los números para estimar o calcular con enteros y racionales; y realizar conversiones entre unidades de masa, tiempo y temperatura; verificando su eficacia. Plantea afirmaciones sobre los números enteros y racionales, sus propiedades y relaciones, y las justifica mediante ejemplos y sus conocimientos de las operaciones, e identifica errores o vacíos en las argumentaciones propias o de otros y las corrige.
Nivel 5	Resuelve problemas referidos a una o más acciones de comparar, igualar, repetir o repartir cantidades, partir y repartir una cantidad en partes iguales; las traduce a expresiones aditivas, multiplicativas y la potenciación cuadrada y cúbica; así como a expresiones de adición, sustracción y multiplicación con fracciones y decimales (hasta el centésimo). Expresa su comprensión del sistema de numeración decimal con números naturales hasta seis cifras, de divisores y múltiplos, y del valor posicional de los números decimales hasta los centésimos; con lenguaje numérico y representaciones diversas. Representa de diversas formas su comprensión de la noción de fracción como operador y como cociente, así como las equivalencias entre decimales, fracciones o porcentajes usuales[38]. Selecciona y emplea estrategias diversas, el cálculo mental o escrito para operar con números naturales, fracciones, decimales y porcentajes de manera exacta o aproximada; así como para hacer conversiones de unidades de medida de masa, tiempo y temperatura, y medir de manera exacta o aproximada usando la unidad pertinente. Justifica sus procesos de resolución así como sus afirmaciones sobre las relaciones entre las cuatro operaciones y sus propiedades, basándose en ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

Tabla 2. Estándares de aprendizaje de la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"

Ciclo	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
DESTACADO	Resuelve problemas referidos a analizar cambios discontinuos o regularidades, entre magnitudes, valores o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden incluir la regla de formación de sucesiones convergentes o divergentes, funciones periódicas seno y coseno, o ecuaciones exponenciales que mejor se ajusten al comportamiento. Expresa su comprensión de las propiedades o elementos de los sistemas de inecuaciones lineales, ecuaciones exponenciales y funciones definidas en tramos; usando lenguaje formal y diversas representaciones; y las usa para interpretar información científica, financiera y matemática. Combina e integra un amplio repertorio de recursos, estrategias o procedimientos matemáticos para interpolar, extrapolar valores o calcular el valor máximo o mínimo de sucesiones y sumatorias notables, así como de funciones trigonométricas y evaluar o definir funciones por tramos; optando por los más pertinentes a la situación. Elabora afirmaciones sobre la validez general de relaciones entre conceptos y procedimientos algebraicos, así como predecir el comportamiento de las variables; las sustenta con demostraciones o argumentos que evidencian su solvencia conceptual.
Nivel 7	Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.
Nivel 6	Resuelve problemas referidos a interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones; traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos[41], progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín, y relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Expresa su comprensión de: la relación entre función lineal y proporcionalidad directa; las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; la variable como un valor que cambia; el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. Plantea afirmaciones sobre propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones así como de una función lineal, lineal afín con base a sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige.
Nivel 5	Resuelve problemas de equivalencias, regularidades o relaciones de cambio entre dos magnitudes o entre expresiones; traduciéndolas a ecuaciones que combinan las cuatro operaciones, a expresiones de desigualdad o a relaciones de proporcionalidad directa, y patrones de repetición que combinan criterios geométricos y cuya regla de formación se asocia a la posición de sus elementos. Expresa su comprensión del término general de un patrón, las condiciones de desigualdad expresadas con los signos > y <, así como de la relación proporcional como un cambio constante; usando lenguaje matemático y diversas representaciones. Emplea recursos, estrategias y propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones o hallar valores que cumplen una condición de desigualdad o proporcionalidad; así como procedimientos para crear, continuar o completar patrones. Realiza afirmaciones a partir de sus experiencias concretas, sobre patrones y sus elementos no inmediatos; las justifica con ejemplos, procedimientos, y propiedades de la igualdad y desigualdad.

Tabla 3. Estándares de aprendizaje de la competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización"

Nivel	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
DESTACADO	Resuelve problemas en los que modela las características y localización de objetos con propiedades de formas geométricas, así como su localización y desplazamiento usando coordenadas cartesianas, la ecuación de la elipse y la circunferencia, o una composición de transformaciones de formas bidimensionales. Expresa su comprensión de las relaciones métricas entre los elementos de la circunferencia y elementos de los polígonos inscritos; así como la trayectoria de objetos usando la ecuación de la elipse, usando diversas representaciones. Clasifica formas geométricas compuestas, basado en criterios propios y propiedades geométricas. Combina e integra estrategias o procedimientos para determinar las ecuaciones de la recta, parábola y elipse, así como instrumentos y recursos para construir formas geométricas. Plantea afirmaciones sobre relaciones entre conceptos geométricos, deduce propiedades y las sustenta con argumentos que evidencian su solvencia conceptual.
Nivel 7	Resuelve problemas en los que modela características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y parábola; la ubicación, distancias inaccesibles, movimiento y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala. Expresa su comprensión de la relación entre las medidas de los lados de un triángulo y sus proyecciones, la distinción entre trasformaciones geométricas que conservan la forma de aquellas que conservan las medidas de los objetos, y de cómo se generan cuerpos de revolución, usando construcciones con regla y compás. Clasifica polígonos y cuerpos geométricos según sus propiedades, reconociendo la inclusión de una clase en otra. Selecciona, combina y adapta variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de formas compuestas, así como construir mapas a escala, homotecias e isometrías. Plantea y compara afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales de las propiedades de las formas geométricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades geométricas.
Nivel 6	Resuelve problemas en los que modela características de objetos mediante prismas, pirámides y polígonos, sus elementos y propiedades, y la semejanza y congruencia de formas geométricas; así como la ubicación y movimiento mediante coordenadas en el plano cartesiano, mapas y planos a escala, y transformaciones. Expresa su comprensión de las formas congruentes y semejantes, la relación entre una forma geométrica y sus diferentes perspectivas; usando dibujos y construcciones. Clasifica prismas, pirámides, polígonos y círculos, según sus propiedades. Selecciona y emplea estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, área o volumen de formas geométricas en unidades convencionales y para construir formas geométricas a escala. Plantea afirmaciones sobre la semejanza y congruencia de formas, entre relaciones entre áreas de formas geométricas; las justifica mediante ejemplos y propiedades geométricas.

Tabla 4: Estándares de aprendizaje de la competencia "Resuelve problemas de gestión, datos e incertidumbre"

Nivel	Descripción de los niveles de desarrollo de la competencia
DESTACADO	Resuelve problemas referidos a situaciones aleatorias y situaciones referidas a caracterizar una población basado en una muestra representativa. Emplea técnicas de muestreo estratificado y recolecta datos, usando diversas estrategias y procedimientos; determina el quintil. Representa el comportamiento de los datos usando gráficos y tablas pertinentes, estadísticos, relaciones entre medidas de tendencia central y el coeficiente de variación, identificando lo más óptimo. Interpreta la información sobre el comportamiento de los datos y la probabilidad condicional. Contrasta conclusiones sobre la relación entre variables.
Nivel 7	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, caracterizando la población y la muestra e identificando las variables a estudiar; empleando el muestreo aleatorio para determinar una muestra representativa. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas, determina terciles, cuartiles y quintiles; la desviación estándar, y el rango de un conjunto de datos; representa el comportamiento de estos usando gráficos y medidas estadísticas más apropiadas a las variables en estudio. Interpreta la información contenida en estos, o la información relacionada a su tema de estudio proveniente de diversas fuentes, haciendo uso del significado de la desviación estándar, las medidas de localización estudiadas y el lenguaje estadístico; basado en esto contrasta y justifica conclusiones sobre las características de la población. Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad, y determina su espacio muestral; interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación; justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades.
Nivel 6	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continuas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.
Nivel 5	Resuelve problemas relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.

1.3.3 Una mirada comparativa sobre la capacidad de justificación

Entre las diversas investigaciones realizadas sobre el marco teórico de PISA, citamos el trabajo realizado por Caraballo, Rico y Lupiáñez (2013), el cual es pertinente para nuestra justificación, pues ahí se establece que el profesor en el aula tiene la posibilidad de desarrollar, promover y estimular en sus alumnos competencias matemáticas específicas tales como la comunicación, la cual involucra la argumentación y justificación:

> (…) PISA provee un marco diferente para la enseñanza de las matemáticas que merece ser examinado con profundidad. La introducción de la competencia matemática como cambio curricular demanda que los profesores interpreten y comprendan la naturaleza y el propósito de esta noción. Esta acción, como respuesta a las directrices curriculares, conducirá al desarrollo de prácticas docentes orientadas a manejar la enseñanza, el desarrollo y la evaluación de esta competencia. Como gestor del proceso de enseñanza, el profesor pone en juego sus conocimientos para desarrollar, promover y estimular en sus alumnos competencias matemáticas específicas relevantes como pensar, razonar, resolver problemas y comunicar. Conocer el marco de la evaluación PISA, alineado con las evaluaciones de diagnóstico y con el currículo en conjunto, permitirá a los profesores adaptar sus métodos y prácticas de enseñanza al logro de esta finalidad.(p.228)

En los Estándares de aprendizaje (2014) se refieren a la capacidad matemática fundamental de comunicación, en la cual se sostiene que, al resolver un problema, se crea la oportunidad de presentar la respuesta a otros de forma verbal o escrita poniendo en acción la capacidad de justificación, dado que durante el proceso de solución se necesita resumir y presentar resultados intermedios. Posteriormente, una vez encontrada la solución, la persona que resuelve el problema puede presentarla a otros y darles una explicación o justificación de sus razonamientos.

Finalmente, con respecto a la capacidad de razonamiento y argumentación, siendo esta la que permite realizar las justificaciones de los enunciados o soluciones de los problemas, se afirma en los Mapas de Progreso (2014) lo siguiente:

> Esta capacidad implica procesos de pensamiento arraigados en forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones de los problemas. (p.14)

En relación con la clasificación de los niveles de exigencia de la capacidad de razonamiento y argumentación se propone:

> (…) en las tareas que requieren de una activación muy baja de esta capacidad, el razonamiento exigido puede ser, sencillamente, seguir las instrucciones dadas. En un nivel de exigencia ligeramente superior, las preguntas requieren una cierta reflexión para asociar distintas informaciones con el fin de realizar inferencias (p.ej.: relacionar distintos elementos presentes en un problema, o utilizar el razonamiento directo dentro de un aspecto del problema). En un nivel superior, las tareas requieren el análisis de la información para seguir o crear un argumento compuesto de varios pasos o relacionar distintas variables; o razonar a partir de fuentes de información afines. En un nivel aún más alto de demanda, hay la necesidad de sintetizar y evaluar la información, utilizar o crear cadenas de razonamiento para justificar inferencias, o para hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios elementos de información de una manera sostenida y dirigida.(p.27)

A continuación, se presenta una tabla donde se muestra una comparación entre las capacidades fundamentales según el marco de evaluación PISA y el marco curricular vigente (Rutas del Aprendizaje versión 2015 y Mapas de Progreso):

Tabla 5: Cuadro de capacidades fundamentales según el marco de evaluación PISA y el marco curricular vigente .

PISA	RUTAS DEL APRENDIZAJE
Matematización	Matematiza situaciones
Comunicación	Comunica y representa ideas matemáticas
Representación	

Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	
Razonamiento y argumentación	
Diseño de estrategias	Razona y argumenta generando ideas matemáticas
Utilización de herramientas matemáticas	Elabora y usa estrategias

Fuente: Perú, Ministerio de Educación. (2015, p. 34)

Además, en las Rutas de Aprendizaje se realizan algunas recomendaciones pedagógicas para el desarrollo de la competencia matemática en el marco de lo propuesto por PISA:

> Promueva entre sus estudiantes la argumentación o justificación de sus ideas matemáticas. Utilice en su práctica cotidiana actividades de argumentación y justificación de sus razonamientos. Plantee situaciones que generen debates sobre estrategias, procedimientos o conclusiones lógicas para que sus estudiantes analicen la corrección fundamentando claramente sus razones. (p.41)

Esta es una muestra de la demanda de justificar las ideas matemáticas en el aula por parte de los profesores y alumnos, descrita en los documentos oficiales nacionales y extranjeros. Además, a los docentes se les pide crear situaciones que generen momentos de comunicación matemática fundamentada en justificaciones. Por ello, nuestra investigación es una forma de contribuir a que el profesor desarrolle su capacidad de justificar sus afirmaciones durante su quehacer diario, mediante la creación de problemas.

1.3.4 La capacidad de justificación y de creación de problemas en los profesores.

En Ayllón (2014) la autora afirma que:

> El profesor también puede utilizar la invención de problemas como método de enseñanza, como contenido curricular y como vínculo al uso de las nuevas tecnologías. Por lo que esta tarea no se presenta de forma aislada en la construcción del conocimiento matemático. Por todo esto se recomienda a los

> profesores que incluyan la invención de problemas en las tareas que proponen a sus escolares. Es necesario que se forme en dicha tarea tanto a los profesores que están en activo como a los futuros profesores, desarrollando en ellos esta habilidad. Esto les ayudará a motivar a su alumnado, para que se enfrente sin miedos a problemas que han de resolver o que han de inventar y hacer que el alumno confíe más en sus capacidades y así sean competentes matemáticamente. (pp. 36-37)

La afirmación de la autora fortalece nuestra posición cuando se refiere a que el docente, al poner en acción su creatividad en la invención de problemas, va a permitir desarrollar sus capacidades, entre ellas la justificación de sus respuestas. Asimismo, afirma que mediante el desarrollo de la habilidad de crear problemas sobre suficiencia de información sobre divisibilidad se irá estimulando la capacidad de los docentes y alumnos de justificar de forma natural.

Dicho esto, es satisfactorio reconocer los trabajos que se vienen realizando en el Perú como el de Malaspina (2012), quien ha investigado sobre la práctica de creación de problemas tanto en profesores en ejercicio como en formación, dándole la relevancia que tiene esta práctica para los profesores y estudiantes. Además, este investigador asegura que:

> Las experiencias muestran que crear problemas contribuye a reforzar e interrelacionar lo aprendido, aplicándolo creativamente a situaciones concretas, con una perspectiva propia. Más aún, ayuda a ir tomando conciencia de manera natural de que la matemática está en continua expansión, que no todos los problemas están escritos en los libros, ni todos los problemas están resueltos. Crear problemas contribuirá a que el alumno sienta que es posible colaborar a esa continua expansión de la matemática. Estimular esta capacidad, acompañada con la de resolver problemas, puede hacer percibir mejor la belleza de la matemática y su didáctica, y sentir que es posible contribuir a crear “obras de arte” en la matemática. (p. 136)

Según la cita, el investigador nos indica que la creación de problemas favorece el aprendizaje, pues el creador del problema viene a ser parte del equipo que permite que la expansión de la matemática continúe. Por ello, se considera a esta actividad como un medio adecuado para el quehacer matemático, por ser motivador, desarrollador de habilidades, evaluador del razonamiento y medidor de la comprensión de los conceptos matemáticos y sus relaciones.

Asimismo, Castro (2011) menciona los aportes de la invención de problemas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, citando a Brown y Walter English, los cuales sostienen que la actividad de creación de problemas conduce a los alumnos a elegir la información que requieren en la actividad de resolución de problemas y a seleccionar los datos con los cuales efectuarán la operación, lo que contribuirá a reducir la frecuencia de errores en la resolución. En esa línea, hemos observado que los alumnos, al tener libertad de plantear sus propios problemas, superan poco a poco sus errores, debido a que ellos eligen los datos y operaciones a realizar dentro del universo numérico que conocen y los conocimientos previos que traen. Según lo mencionado, estamos cada vez más convencidos de que en la creación de problemas se puede evaluar conocimientos, provocar el razonamiento y desarrollar conceptos hasta llegar a un nivel máximo, que sería la construcción del conocimiento matemático.

1.4 La capacidad de justificación y la comunicación matemática

La argumentación, profundización y conexión entre las ideas matemáticas sobre las cuales se explora durante el proceso de enseñanza-aprendizaje son actividades promovidas por la Comunicación Matemática. Contribuye a que los alumnos logren comprender, desarrollar, interiorizar y expresar con precisión las ideas matemáticas. Para el National Council of Teachers of Mathematics (2000), el estándar de comunicación tiene como objetivo que el estudiante logre organizar y consolidar su pensamiento matemático y lo pueda comunicar con coherencia y claridad, así como analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás, mediante el uso preciso del lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas. En el NCTM se propone que:

> Los profesores pueden utilizar la comunicación oral y escrita en las matemáticas para dar a los estudiantes la oportunidad de pensar en los problemas; formular explicaciones; practicar el vocabulario nuevo o anotación; experimentar con formas de argumentación; justificar conjeturas; justificaciones de la crítica; reflexionar sobre su propia comprensión y en las ideas de los demás. (p. 272)

Bajo esta perspectiva, los docentes diseñarán momentos durante el desarrollo de las sesiones de clase con el fin de que los alumnos puedan, de manera oral y escrita, explicar, justificar, argumentar y reflexionar acerca de las ideas matemáticas que se discutan. Además, estos espacios permitirán que el docente conozca el razonamiento que siguen los estudiantes para resolver un problema y, con esta información, podrán tomar decisiones sobre su práctica pedagógica con el fin de adquirir nuevos conocimientos y continuar el proceso de estudio.

Las capacidades de justificación y comunicación matemática se pueden desarrollar si se ofrecen oportunidades y medios para hacerlo, como en la actualidad a través de la creación de problemas. Con respecto a este punto, Pérez (2006) afirma lo siguiente:

> Fundamentar una conclusión es establecer un conjunto de razones que, si son verdaderas, hacen que la conclusión sea obligatoriamente verdadera. Es decir, fundamentar consiste en dar razones para mostrar que lo que decimos es verdadero. Explicar es algo distinto, pues cuando explicamos lo que hacemos es ofrecer las causas que permiten establecer lo que afirmamos, pero puede que nuestra afirmación no sea verdadera. (p.34)

La creación de problemas ofrece una serie de recursos, que constituyen una fuente de un alto potencial de transformación de las prácticas educativas. Es por ello el interés en nuestra investigación sobre la creación de problemas de suficiencia de información sobre la divisibilidad como medio para desarrollar la capacidad de justificación de proposiciones matemáticas en los profesores de secundaria. Además, crear problemas brinda ocasiones en las que se ponen a prueba diversas capacidades de quien crea el problema, sea docente o alumno.

Al crear problemas con estrategias, actividades personales y grupales adecuadas, también se fomenta la comunicación matemática en el marco de la afirmación de Jiménez y Pineda (2012) :

> Cabe destacar que estrategias como el trabajo en grupo y la heurística de solucionador-escucha, inmersas en actividades de clase orientadas a la interacción social, a la negociación de significados, a la reflexión y a la regulación del aprendizaje, juegan un papel importante para el desarrollo de la argumentación en clase como una práctica discursiva, basada en el razonamiento natural y en el lenguaje usual que permite justificar una afirmación, defender o refutar una idea y convencer a un auditorio particular. (p.114)

La creación de problemas en parejas es una actividad que se toma en cuenta en nuestra investigación. Por otra parte, la comunicación matemática se realiza cuando el proponente y el acompañante inician una reflexión conjunta, exponiendo el proponente sus ideas sobre el problema a crear y justificando cada paso del proceso de solución. De esta manera, invita a ser escuchado y pide al acompañante su opinión sobre sus proposiciones e ideas.

En esta comunicación matemática se usará tanto el lenguaje oral como escrito para exponer propuestas, estrategias para crear, resolver problemas y justificar sus procedimientos.

Convencidos de la importancia y pertinencia de estimular la capacidad de justificación de los docentes y de hacerlo mediante la creación de problemas adecuados, nos planteamos las preguntas y objetivos de investigación que exponemos a continuación.

1.5 Preguntas y objetivos de investigación

La siguiente pregunta orienta nuestro trabajo :

¿Cómo influye la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad en la capacidad de justificación de los profesores de secundaria?

1.5.1 Objetivo general

- Analizar cómo mejora la capacidad de justificación, mediante la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad, en los profesores de Educación Secundaria.

1.5.2 Objetivos específicos

- Analizar la capacidad inicial de los profesores de Educación Secundaria de la muestra, para justificar proposiciones condicionales.
- Clasificar los niveles de las justificaciones de los profesores de la muestra, en las experiencias didácticas relacionadas con la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad.
- Identificar, en los profesores de secundaria de la muestra, los cambios en la capacidad de justificación, luego de las experiencias de creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad, aplicando la estrategia denominada EPP (estrategia que consiste en un *episodio*, un *problema pre* y un *problema pos*).

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

2.1 Elementos teóricos

Para iniciar la descripción de los diferentes elementos teóricos, iniciaremos haciendo una lista de los que van a ser considerados en nuestro trabajo. Tenemos la Creación de problemas, la estrategia denominada EPP (estrategia que consiste en un *episodio*, un *problema pre* y un *problema pos*), la creación de un problema por variación, la justificación matemática, los niveles de justificación matemática y la proposición condicional. A continuación, pasaremos a describir cada uno de estos elementos que nos servirán para desarrollar nuestro trabajo.

2.1.1. Lo que entendemos por Creación de Problemas

Adoptamos la propuesta de Malaspina (2015, p. 131) sobre la creación de problemas: "La creación de problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema". Malaspina (2015), quien ha investigado sobre la práctica de creación de problemas tanto en docentes en ejercicio como en formación, hace énfasis en la relevancia que tiene esta práctica para los profesores y estudiantes.

Según el investigador, crear es sinónimo de construir un problema, mediante la capacidad que da el pensamiento lógico a todo ser humano, a partir de sus experiencias y conocimientos personales previos para expresarlos en un enunciado escrito y/u oral bajo una forma y un orden lógico. El problema tiene una estructura con información y requerimiento que permite efectuar operaciones y procedimientos en una interacción entre creación y resolución de problemas. Además, el proceso de creación de un problema supone un ejercicio lógico para relacionar la información con el requerimiento y tener una idea intuitiva de cómo se resolvería el problema. Esta concepción de creación de un problema toma en cuenta los cuatro elementos fundamentales característicos de un problema matemático, como propone Malaspina (2013, 2014): información, requerimiento, contexto y entorno matemático, los cuales serán utilizados en la parte del análisis de los *problemas pre* creados de forma individual y en parejas durante el proceso y cuyas definiciones se resumen a continuación:

1. *Información*: está constituida por los datos cuantitativos o relaciones que se dan en el problema.
2. *Requerimiento:* es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, y puede ser cuantitativo o cualitativo, e incluir gráficos y demostraciones.
3. *Contexto:* se refiere a la situación que involucra el problema. De esa manera, se tienen los problemas relacionados con la vida cotidiana. El contexto también puede ser estrictamente matemático. De lo anterior, se define que el problema puede ser de contexto intramatemático o extramatemático. En el primer caso, se refiere al entorno netamente matemático del problema (por ejemplo, graficar la función lineal, resolver una ecuación). En el segundo caso, el problema está más vinculado a una situación real.
4. *Entorno matemático:* se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Se sabe que un problema puede resolverse de distintas formas y con diversos objetos matemáticos, por ello el entorno no es específico para un problema. Es decir, "(...) no habiendo una única manera de resolver un problema, el entorno matemático no tiene que ser único y la misma información, requerimiento y contexto pueden llevar a problemas diferentes, al precisar el entorno matemático que se debe usar para resolverlo." (Malaspina, 2014, p. 13)

Estos elementos fundamentales serán analizados a través de las actividades de creación de problemas *pre* que los participantes realizarán en forma individual y en parejas, como se muestra en el capítulo 4.

2.1.2. Estrategia de creación de problemas matemáticos: EPP

En nuestra investigación se han utilizado los planteamientos de la estrategia *EPP,* diseñada por Malaspina (2012), para elaborar los instrumentos que usamos para obtener la información necesaria. Además, el trabajo ha sido complementado con los elementos metodológicos provenientes del análisis de contenido (como son la construcción de las dos matrices de codificación, el uso de las mismas para la realizar el análisis principal y la codificación respectiva).

En la estrategia *EPP* (*Episodio en clase*, *Problema Pre* y *Problema Pos*), el Episodio en clase consiste en presentar a los docentes un problema en contexto didáctico con los comentarios y reacciones de algunos de sus estudiantes a dicho problema. Luego, se requiere crear un problema *Pre,* cuyo propósito es que cada participante llegue al entendimiento, la comprensión del problema y el despeje de dudas presentadas en el *Episodio en clase ,* obteniendo de esta manera la solución correcta de ambos problemas (*Problema Pre* y problema del *Episodio en clase*). Finalmente, luego de haber resuelto y comprendido correctamente el problema dado en el *Episodio en clase*, el *Problema Pos* tiene el objetivo de desafiar a los estudiantes a ir más allá de una solución correcta. Esto puede llevar a los estudiantes o docentes a ampliar el panorama de las matemáticas haciendo generalizaciones y cambiando el contexto y el entorno matemático del problema del *Episodio en clase*.

Según Malaspina (2013), hay dos formas de crear problemas: a partir de un problema dado (*Variación* de un problema) o dada una situación (*Elaboración* de un problema).

La variación de un problema dado se adapta mejor a los propósitos de nuestra investigación. En este sentido, con el fin de estimular la capacidad de crear problemas por *Variación* en un trabajo individual, Malaspina (2013) sugiere llevar a cabo las siguientes estrategias:

> a) Buscar más de una forma de resolver el problema, b) Luego de resolver el problema, o de intentar resolverlo, plantearse preguntas "¿Qué pasaría si….?". Por ejemplo, qué pasaría si la información fuera otra, si el requerimiento fuera diferente, si se considera otro entorno matemático, si se cambiara el contexto. […], es un trabajo reflexivo, creativo y con mente abierta, y el "¿Qué pasaría sí…?" incluye analizar si los cambios tienen sentido y verlos integradamente. (p.137)

Ahora bien, respecto al trabajo grupal, Malaspina (2013) propone la siguiente estrategia para la creación de problemas por *Variación* a través del trabajo grupal:

> a) Compartir en grupos (preferentemente a lo más de 4 integrantes) la solución del problema y las diversas respuestas a la pregunta "¿Qué pasaría sí….?", efectuadas por cada integrante del grupo; b) Seleccionar en grupo las preguntas, analizar las posibles repuestas y decidir las modificaciones para configurar el nuevo problema; c) Escribir en grupo el enunciado del problema creado, con base en lo anterior y examinar su claridad; d) Resolver ordenadamente el problema creado; e) Atendiendo a la dificultad del problema creado y al nivel educativo en el que se pretenda emplear, pensar en la posibilidad o conveniencia de desagregarlo en problemas de dificultad gradual, f) Proponer el problema a otro grupo y pedirle solución y comentarios. (p.137)

El intercambio de opiniones a través del trabajo grupal favorece la comprensión y profundización de los conocimientos de los estudiantes no solo en el campo de las matemáticas, sino también en otras áreas de estudio, pues se necesita debatir ,argumentar y justificar sus procedimientos y respuestas.

Además del trabajo individual y grupal, Malaspina (2014) propone una etapa de *socialización* en la creación de problemas. Se entiende por socialización una forma de trabajo en que los participantes exponen y dan a conocer sus problemas creados, e intercambian opiniones y comentarios sobre los mismos, enriqueciéndose mutuamente.

Malaspina (2013) propone la siguiente estrategia:

> a) Según la disposición del tiempo, hacer exposiciones críticas de los grupos que resolvieron los problemas. Promover el intercambio de opiniones; b) Revisar la redacción de los enunciados de los problemas expuestos y hacer los ajustes que se consideren necesarios, c) Redondear ideas o conceptos matemáticos que hayan surgido y evidenciar nuevos problemas como variación del problema inicial (los que haya previsto el profesor u otros que surjan en esta fase). (p. 137)

Esto permite corregir y mejorar aspectos de la redacción en los enunciados, interiorizar en los participantes la tolerancia y la empatía, ya que estos han de recibir, asumir y mejorar las críticas, además de manifestar sus puntos de vista, muchas veces en desacuerdo con los demás participantes del grupo. En esta etapa se desarrolla y ejercita la justificación, muy estrechamente con la comunicación, para explicar el porqué de cada paso en las soluciones de los problemas creados.

Se han considerado en nuestra investigación lo descrito sobre la actividad de creación de problemas según la estrategia EPP y los elementos de un problema. Consideramos la creación de problemas por variación, aplicados mediante los instrumentos del taller y al solicitar a los participantes crear problemas *pre*. La presentación de información general, información adicional y el requerimiento en los problemas planteados y creados por los participantes toman en cuenta los elementos básicos de un problema según la estrategia EPP, siendo su contexto intramatemático y su entorno, la divisibilidad de números naturales.

2.1.3. Lo que entendemos por justificación matemática

En la búsqueda de definiciones sobre justificación que hemos realizado en nuestra investigación, encontramos las afirmaciones de Vallejo (2012), que vinculan la justificación y la demostración :

> […] una justificación matemática presenta un sentido más amplio que la demostración puesto que esta incluye aquellos primeros argumentos que son proporcionados por estudiantes que son nuevos en los procesos demostrativos. De aquí que la relación existente entre ellas (entre la demostración y la justificación) es que toda demostración es una justificación matemática, aunque no toda justificación sea una demostración. […] una justificación matemática nos puede indicar el nivel alcanzado por el estudiante, sus dificultades, sus errores, sus conflictos, sus concepciones, etc. (p.19)

Basándonos en las pocas definiciones que encontramos con respecto a la justificación matemática, podemos decir que son todas las explicaciones verbales o escritas, con sentido lógico, que permiten verificar la verdad o falsedad de una afirmación matemática. Los medios que se pueden usar para una justificación son: contraejemplos, ejemplos, definiciones, resultados previamente justificados, etc. Qué medios utilizar dependerá del tipo de problema que nos planteen: si es un problema particular o general. En el caso de que sea para justificar la veracidad de un problema general, se requerirá también de argumentos generales. Se podrá justificar la falsedad de una afirmación general usando un contraejemplo adecuado. A pesar de que no se encontraron muchas fuentes que hayan desarrollado el tema de la justificación matemática como tema central, se decidió continuar con esta investigación, puesto que este proceso involucra movilizar en los profesores el razonamiento, la argumentación y la parte cognitiva para justificar sus respuestas y afirmaciones frente a sus alumnos. Por otra parte, en los pocos textos en los que sí se hace referencia a la justificación, lamentablemente no se explicita cuáles son las consideraciones conceptuales de esta, pero sí encontramos trabajos sobre la demostración y los diferentes niveles que pueden darse en el intento de llegar a la demostración formal y rigurosa, que pasa por la justificación de las afirmaciones, que es a lo que apunta este trabajo, especialmente, de las proposiciones condicionales.

Para concluir, podemos afirmar que la función del docente como orientador de las justificaciones de sus alumnos es muy importante en la enseñanza de las matemáticas, ya que es la persona que conduce el proceso de justificación por medio de constantes cuestionamientos, correcciones de los errores, así como por medio de la solución y creación de problemas que contribuyan a que el proceso de justificación sea fluido. Además, posee la habilidad de discernir si una justificación es o no es correcta y brinda la orientación en la búsqueda de los argumentos adecuados o el contraejemplo que el caso requiera.

2.1.4. Niveles de justificación matemática

En nuestra investigación, utilizamos la clasificación de la justificación matemática según los niveles de producción propuestos por Bieda, Choppin y Knuth (citado en Stylianou, Blanton y Knuth, 2009). Estos aportes nos sirven para adaptar nuestra matriz de codificación que responde a los objetivos de esta investigación.

Tabla6 : Niveles de producción de justificación matemática

Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
En este nivel los participantes parecen no ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación *matemática* para demostrar la verdad de una proposición o afirmación. Un participante podría aceptar una proposición como verdadera porque un docente, una persona cualquiera, o un texto "dice" que es verdadera; es por esto que, la justificación no es matemática. En otros casos, un participante podría simplemente establecer que una proposición es verdadera sin referencia alguna de por qué es así.	Los participantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática, pero sus justificaciones no son generales; la mayoría de los justificaciones de los participantes están basadas empíricamente. Entre las justificaciones basadas empíricamente, reconocemos distinciones (en subniveles) entre participantes que consideran comprobar unos pocos casos, estudiantes que consideran comprobar sistemáticamente unos pocos casos (por ejemplo, números pares e impares), estudiantes que consideran comprobar casos extremos o casos "aleatorios" y estudiantes que consideran el uso de un ejemplo genérico (demostración por una clase de objetos).	Los participantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general e intentan producir tales argumentos por ellos mismos; los argumentos, sin embargo, no llegan a ser demostraciones aceptables. Esto puede suceder de dos maneras: (1) Los participantes expresan el reconocimiento de la necesidad de proporcionar un argumento general e intentan producir tal argumento, sin embargo, el argumento proporcionado no es un argumento viable (es decir, el argumento es o bien incorrecto matemáticamente o bien no nos conduciría a una demostración aceptable). (2) Los participantes expresan el reconocimiento de la necesidad de proporcionar un argumento general e intentan producir tal argumento, sin embargo, el argumento está incompleto (si se completara, el argumento sería una demostración aceptable). En ambas situaciones, el punto es que los participantes intentan tratar con el caso general. Además, el Nivel 2 de justificaciones incluye respuestas de aquellos participantes que demuestran una consciencia de que la evidencia empírica no es suficiente como demostración – o bien al expresar reconocimiento de la necesidad de tratar con todos los casos o bien al expresar reconocimiento de la limitación de la presentación de ejemplos como demostración – pero no han logrado producir un argumento general.	Los participantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general y son capaces de producir exitosamente tales argumentos por ellos mismos. Consideramos que los argumentos que los estudiantes producen en este nivel son demostraciones aceptables; esto es, sus argumentos demuestran que una proposición o afirmación es verdadera en todos los casos. Los argumentos categorizados en este nivel usualmente hacen referencia a suposiciones o hechos, a una cadena de deducciones usada para construir el argumento y, finalmente, a una afirmación concluyente explícita. Aunque los argumentos producidos por los participantes podrían carecer de rigor o formalidad típicamente asociada a la demostración, estos, sin embargo demuestran el caso general. En el esquema siguiente presentamos en resumen la clasificación de los niveles de los argumentos que serán considerados como una justificación matemática o demostración matemática y los que no serán considerados justificación matemática.

Fuente : Bieda, Choppin y Knuth (citado en Stylianou, Blanton y Knuth, 2009)

A continuación, presentamos el resumen de los niveles de justificación que se usará para el análisis de las justificaciones dadas por los participantes en nuestra investigación:

- Nivel 0 (no es justificación matemática)
- Nivel 1, 2 y 3 (son justificación matemática)

Asimismo, ya que en nuestra investigación se analizan justificaciones de proposiciones condicionales sobre divisibilidad, desarrollaremos este tema a continuación.

2.1.5 La divisibilidad y su aspecto matemático

El estudio de la Teoría de la Divisibilidad se originó por la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades y el mayor número de unidades posible, cuestiones que, en muchos casos, dejaban residuos, debido a la no divisibilidad del número que expresaba la cantidad a repartir entre el número de personas.

Para describir el objeto matemático en cuestión, consideramos la definición de divisibilidad: dados los números naturales a y b decimos que b es divisible por a, cuando con el número de unidades que indique el número b se puedan formar tantos grupos como indique el número a, teniendo cada uno de estos grupos el mismo número de unidades. En este caso, también se dice que a es divisor de b o que a es factor de b.

Ejemplo :

24 es divisible por 6 porque con 24 unidades se pueden formar 6 grupos, teniendo cada grupo 4 unidades. También podemos decir que 6 es divisor de 24 o que 6 es un factor de 24.

A continuación, tomaremos las definiciones y proposiciones como las que se dan sobre divisibilidad en *N*, en Carranza (1999). Las demostraciones se encuentran en tal libro.

> Definición. Un número natural a distinto de 0 es divisor de otro número natural b si existe un número natural c tal que $b = a.c$; se escribirá $a | b$ que se lee ¨a¨ divide a ¨b¨. Es decir, $a| b$ si existe un $c \in$ N, tal que $b = a.\ c$. También diremos que b es múltiplo de a o que b es divisible por a.

Ejemplos:

1. 6 es divisor de 24, pues existe 4 ∈ N tal que 24= 6 x 4.
2. 36 no es múltiplo de 8 u 8 no es divisor de 36, pues para todo $n \in$ N, $36 \neq 8$n.

Observaciones:

a) Como $a = a.1$, para todo $a \in$ N; entonces, todo número natural es múltiplo de 1.
b) Como $0 = b.0$, para todo b ∈ N; el cero es múltiplo de todo número natural.

Teorema

Si a, b y c son números naturales, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Propiedad reflexiva : $a|\ a$ para todo $a \neq 0$

b) Propiedad transitiva : Si $a|\ b$ y $b|\ c$, entonces $a|\ c$

c) Si $a|\ b$ y $a|\ c$, entonces $a|\ (b+ c)$

d) Si $a|\ b$ entonces $a|\ (bc)$

e) Si $a|\ (b+c)$ y $a|\ b$, entonces $a|\ c$

f) Si $a|\ b$, $a|\ c$ y $b \geq c$, entonces $a|\ (b-c)$

Algunas expresiones equivalentes relacionadas con la divisibilidad

Si a y b son números naturales y a es diferente de cero, son expresiones equivalentes:

- b es un múltiplo de a
- b es divisible por a
- $b = a \times n$, para algún número natural n.
- b entre a es una división exacta
- a es un divisor de b.
- a es factor de b

Algunas propiedades de la divisibilidad

Transitividad

Si a y b son múltiplos de c entonces $a +b$ es múltiplo de c

Si a y b son múltiplos de c entonces $a - b$ es múltiplo de c

Si a y b son múltiplos de c entonces $a \times b$ es múltiplo de c

b múltiplo de a entonces b es múltiplo de los factores de a.

Criterios de divisibilidad

Según Carranza (1999):

> Es frecuente usar los criterios de divisibilidad como reglas mágicas sin tener la menor idea de su justificación y de su vinculación con la forma polinómica de representar un número natural usando la base 10. Es bueno que los estudiantes encuentren esta relación a partir de casos concretos y perciban su generalización. Es una excelente ocasión para aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación , factorizando sumas de productos indicados por números, en el desarrollo polinómico.

Como ya hemos visto, la divisibilidad entre números naturales está muy relacionada con los conceptos de repartición de cantidades enteras de objetos, entre un determinado número de personas. Cuando la repartición de *b* objetos entre *a* personas es equitativa, máxima y exacta, se dice que *b* es divisible por *a*. Este enfoque se puede encontrar, explicado de manera más minuciosa, en (Vallejo, 2012, pp.155 – 156). A continuación, mostramos un mapa conceptual coherente con el objeto de la divisibilidad:

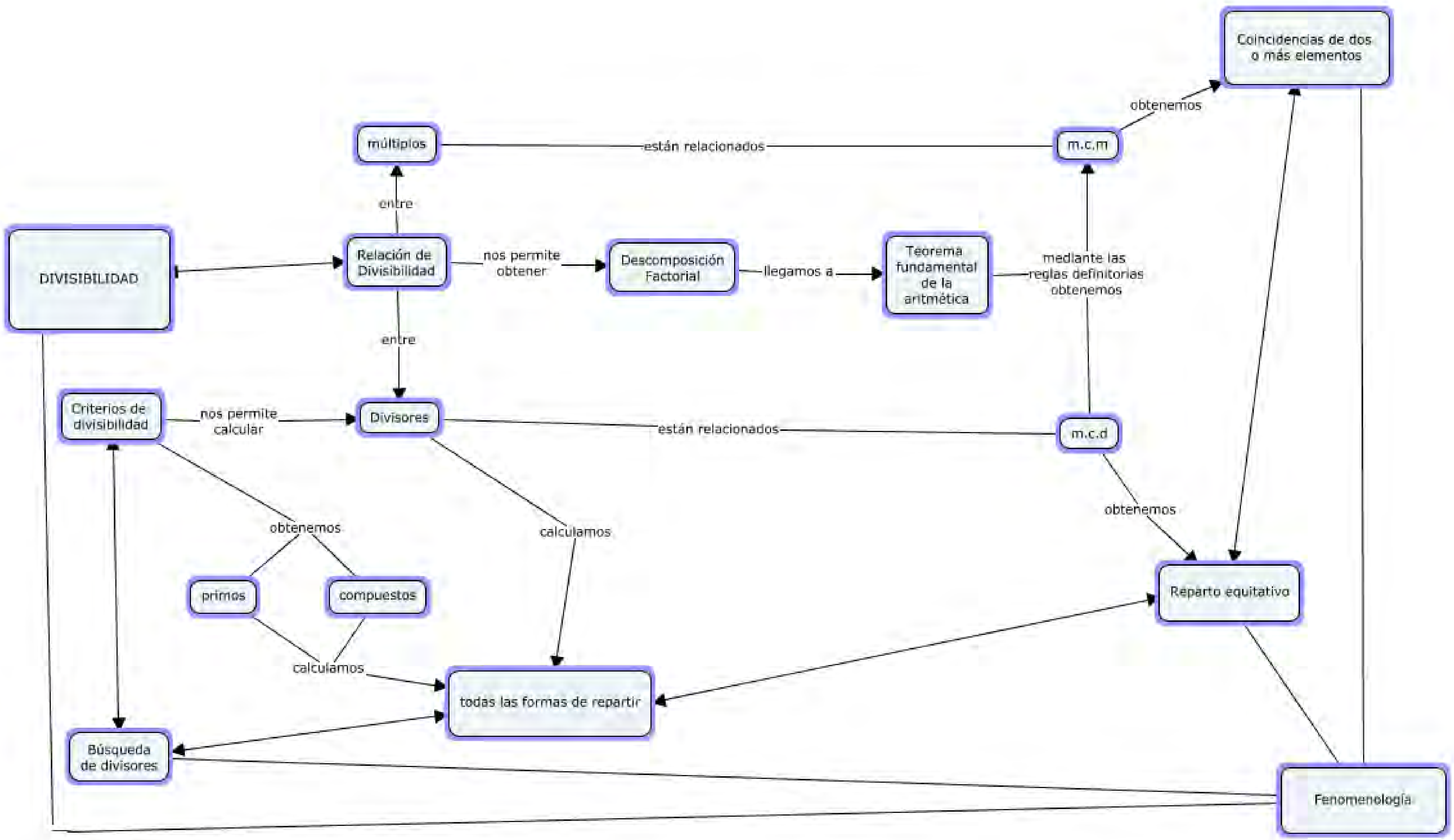


Figura 2. Mapa conceptual sobre la divisibilidad.

Fuente: Martín (2012, p.17)

2.1.6 El uso del contraejemplo como medio de justificación

El contraejemplo es un método que se utiliza para demostrar que un enunciado universal es falso (Restrepo, 2003). Otra consideración sobre el pensamiento matemático, la intuición y su relación con el contraejemplo, la muestra Recio citado en Vallejo (2012):

> Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento matemático va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior. Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático.(p.7)

El autor menciona que hay una serie de alternativas que puede utilizar el matemático (profesor) para que se construya una demostración empezando con lo más básico, como la verificación, los ejemplos, los casos particulares, hasta usar un contraejemplo para demostrar la falsedad de una conjetura. Sin embargo, según vemos ahora, recién se le está dando la importancia debida a esta tarea de demostrar con procedimientos basados en la intuición.

2.1.7 Acerca de un problema de suficiencia de información

Existe una gran diferencia entre lo necesario y lo suficiente. Esto quiere decir que los problemas de suficiencia de información se mueven sobre esa brecha, donde el abuso o mal uso de la intuición y la suposición, el bajo nivel del razonamiento lógico y los aspectos cognitivos contribuyen a que el resolutor llegue a conclusiones erradas frente a este tipo de problemas. Su estructura , aplicación y uso frecuente se describen a continuación:

Los problemas de Suficiencia de Información son aplicados particularmente en el Graduate Management Admission Test (GMAT) y en los exámenes de admisión de algunas universidades locales de nuestro país. En el examen estandarizado GMAT, los consideran como preguntas de dificultad media y es por ello que el 50 % de las preguntas de la parte numérica son de suficiencia de información. Este tipo de preguntas evalúan la capacidad de eficiencia efectiva sobre la gestión de información, es decir, que se requiere saber cuándo exactamente se tiene suficiente información para dar una respuesta correcta a la pregunta. Si toma información extra que no necesita o si utiliza información que no existe en el problema, usualmente responde erradamente. Para responder correctamente a las preguntas de suficiencia de información, se debe maximizar el recojo de información de cada proposición en la información general y adicional, lo que permitirá responder o dar solución a la pregunta, sin llegar a sobrevaluar la información dada. El problema presenta restricciones en la información general que se debe tomar en cuenta para resolver el requerimiento. Además, va a depender del razonamiento lógico y del conocimiento matemático que se tiene para dar la respuesta esperada. Hay tres tipos de respuestas que se pueden dar (Sí, No y No necesariamente) a partir de la información general y de la información adicional que se brinda en los problemas.

El procedimiento a realizar consiste en tomar en cuenta la información general y cada una de las informaciones adicionales (1) y (2), individualmente. En los problemas de suficiencia de información se debe determinar si es posible llegar a la respuesta con la información general y adicional, dadas en la estructura del problema. Por ello, en la presente investigación proponemos que, para desarrollar la capacidad de justificación en profesores de secundaria, se tome en cuenta la resolución y creación de problemas sobre suficiencia de información, ya que estos brindan oportunidades excelentes para analizar proposiciones condicionales a través del análisis de la información general y adicional en el problema.

A continuación, un ejemplo de un problema de suficiencia de información del GMAT.

¿Si n es un número entero positivo, n es divisible por 2 ?

(1) $2n$ es par.

(2) $3n$ es par.

La información general nos afirma que n es un entero positivo y la información adicional (1) no es suficiente para dar una única respuesta a la pregunta dada. Sin embargo, cuando se usa la información (2) con la general, sí es posible dar una única respuesta a la pregunta pues para que $3n$ sea par, necesariamente n tiene que ser par.

2.1.8. Conexión entre condicional, inferencia y conjuntos

La proposición condicional se presenta de diferentes formas dependiendo específicamente de la función que relaciona el antecedente y consecuente, llamando a estas proposiciones, según el caso: condicionales no exclusivas o exclusivas. Con respecto a las primeras, las cuales se verán en esta investigación, llamadas condicionales propiamente dichas, Gorski y Tavants (1960) afirman lo siguiente:

> La existencia de aquello que se trata en el antecedente es condición suficiente, aunque no necesaria, para la existencia de aquello que se trata en el consecuente, y la

existencia de aquello que se trata en el consecuente es condición necesaria, aunque no suficiente, para la existencia de aquello que se trata en el antecedente.(p. 136)

Es importante notar, dado el antecedente P y consecuente Q, que se relacionan estrechamente P→Q con $A \subset B$ mediante la proposición categórica $\forall x \in A$ *se cumple que* $x \in B$. O sea $x \in A \rightarrow x \in B$. Se justifica usar diagramas de Venn en los problemas de suficiencia de información propuestos en los instrumentos diseñados para nuestra investigación con el fin de visualizar, de forma más amigable, la implicancia que se da entre las preposiciones P y Q.

2.2. Elementos metodológicos

A continuación describimos la información de manera resumida y el método de investigación cualitativa que empleamos. Justificamos su elección en el ámbito de la educación matemática y presentamos las etapas que guían nuestro trabajo; es decir, la ejecución de cada una de las actividades planeadas

El presente estudio se enmarca en el enfoque metodológico del tipo cualitativo. De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010): "(…) es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema de estudio ha sido poco explorado, o no se ha hecho al respecto en algún grupo social específico" (p. 364). De ahí que podamos afirmar que nuestra investigación se ubica bajo el enfoque cualitativo, ya que pretende analizar cómo se desarrolla la capacidad de justificación, mediante la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad, en los profesores de Educación Secundaria. Este énfasis implica plantear un medio para mejorar y ejercitar dicha capacidad a través de la creación de problemas de suficiencia de información bajo el método de la estrategia EPP. Lo descrito anteriormente se apoya en lo mencionado por Araújo y Borba (2004) respecto a la investigación cualitativa:

> Assim, quando decidimos desenvolver uma pesquisa, partimos de uma inquietação inicial e, com algum planejamento, não muito rígido, desencadeamos um proceso de busca. Devemos estar abertos para encontrar o inesperado; o plano deve ser frouxo o suficiente para não "sufocarmos" a realidade, e, em um processo gradativo e não organizado rígidamente, nossas inquietações vão se entrelaçando com a revisão da literatura e com as primeiras impressões da realidade que pesquisamos para, suavemente, delinearmos o foco e o design da pesquisa (pp. 42 – 43)
>
> [Así, cuando decidimos desarrollar una investigación, partimos de una inquietud inicial y, con alguna planificación, no muy rígida, desencadenamos un proceso de búsqueda. Debemos estar abiertos al encuentro de lo inesperado; el plan debe ser lo

suficientemente holgado para no "ahogarnos" en la realidad, y, en un proceso gradual y no organizado rígidamente, nuestras inquietudes se van entrelazando con la revisión de la literatura y con las primeras impresiones de la realidad que investigamos para, suavemente, delinear el foco y el diseño de nuestra investigación] (traducción propia)

Trabajamos en la línea de esta afirmación pues el estar dispuestos a lo inesperado y flexibles a los planes iniciales nos han permitido valorar lo encontrado en el proceso de esta investigación; además, aprender conceptos nuevos y relacionarlos a nuestro objeto de estudio nos ha permitido ser más cuidadosos en las fases y actividades para el desarrollo de nuestra investigación. Por ejemplo, en nuestro estudio, realizamos adaptaciones en las matrices de codificación para que el análisis de las justificaciones provistas por los maestros sea más preciso.

Por lo anterior expuesto, consideramos para la realización de nuestra investigación cualitativa el uso de las fases y actividades propuestas en Álvarez de Zayas y Sierra (2001):

2.2.1 Fases de la investigación cualitativa

Las fases de la investigación cualitativa son las que a continuación presentamos:

2.2.1.1 *Precisión de lo que se investiga*

En esta fase se delimitan el problema de la investigación, los objetivos, el objeto de estudio, el marco contextual y el campo de acción del estudio. Para todo esto, realizamos el estudio de investigaciones antecedentes que traten de justificaciones, así como en las Rutas del Aprendizaje y los Mapas de Progreso elaborados por el Ministerio de Educación. En el Capítulo 1, se ha realizado todo lo mencionado en esta fase.

a) Elaboración de la monografía

En esta fase se definen los elementos teóricos que aportan a la comprensión y explicación de los aspectos históricos, lógicos y didácticos del problema de investigación. Una vez fijados los elementos en el presente capítulo, estaremos listos para desarrollar la descripción de los instrumentos con los que se llevó a cabo el estudio en el Capítulo 3.

b) Diagnosis del objeto de estudio

En esta fase se determina "la situación que manifiesta el objeto de investigación" (Álvarez de Zayas y Sierra, 2001, p. 53), la cual consideramos como la más importante de nuestra investigación. A continuación, presentamos los procedimientos que implica esta fase:

2.2.1.2 Recolección de datos

Se tomó una muestra intencional de profesores de Matemática de Educación Secundaria, a los que se aplicó una exploración inicial, tres exploraciones del proceso y una exploración final. Su participación fue voluntaria y sus datos personales no fueron expuestos; en lugar de nombres se les asignó un código para identificarlos en toda la investigación. Se consideraron en el taller actividades de resolución de problemas, creación de problemas y análisis de justificaciones dadas por terceros. La creación de problemas se realizó según la estrategia EPP, la cual incluía las justificaciones de sus respuestas. El tiempo que tomó desarrollar estas actividades fue aproximadamente de 6 horas.

Tabla 7: Relación entre estrategia, técnica e instrumentos de investigación

Estrategia de investigación	Técnicas de investigación	Instrumentos
Análisis de contenido (taller de creación de problemas para mejorar la justificación).	Observación no participante, notas de campo, evaluación diagnóstica, cuestionarios de caracterización de la muestra, análisis documental como consecuencia del taller.	Prueba de conocimientos del objeto, exploración inicial, exploración de proceso (ficha1 y ficha 2); se incluye resolución y creación de problemas, exploración final.

Fuente: propia

2.2.1.3 Análisis de datos

Nos enfocaremos en las justificaciones dadas a las respuestas de los problemas planteados en las actividades de la exploración inicial, exploración del proceso y la exploración final. Para ejecutar el análisis de las justificaciones incorporaremos algunos elementos del análisis de contenidos. Este es, según Schreier (citado en Maraví , 2015):

> (…) a method for systematically describing the meaning of qualitative data (…) This is done by assigning successive parts of the material to the categories of a coding frame. This frame is at the heart of the method, and it contains all those aspects that feature in the description and interpretation (…) of the material. Three features characterize the

method: qualitative content analysis reduces data, it is systematic, and it is flexible (p. 170)

[(…) un método para la descripción sistemática del significado de datos cualitativos (…) Esto es realizado mediante la asignación de partes sucesivas del material en las categorías pertenecientes a un marco de codificación. Dicho marco se encuentra en el corazón del método y contiene todos aquellos aspectos que aparecen en la descripción e interpretación (…) del material. Tres rasgos caracterizan al método: el análisis de contenido reduce datos, es sistemático y es flexible]

Según esta concepción, se sugiere que el sistema de códigos generado sea considerado como el resultado principal y sirva como punto de inicio para posteriores estudios, referentes al análisis de ocurrencias coincidentes. Además, se indica que los resultados también pueden ser presentados de forma cuantitativa, por medio de las frecuencias de los códigos registrados.

En nuestro trabajo, tomamos en cuenta la presentación de las justificaciones diagnosticadas y codificadas respectivamente, con cuadros estadísticos que indiquen la frecuencia de aparición de una justificación determinada con respecto al total de justificaciones.

Del mismo modo, Schreier (citado en Maraví, 2015) indica: “This can be done by two coders working independently of each other (…)” (p. 179) [“Este puede ser realizado por dos codificadores que trabajen independientemente uno de otro (…)”]

El motivo principal para emplear el análisis de contenido en este trabajo se encuentra en la dirección planteada por los objetivos de investigación. Es por esto que consideramos que la forma del análisis de contenido coincide, en su mayor parte, con lo indicado por Mayring (citado en Maraví, 2015):

> The object of the analysis is to filter out particular aspects of the material, to give a cross-section through the material according to pre-determined ordering criteria, or to assess the material according to certain criteria (…) (p. 373).
>
> [El objeto de análisis es filtrar determinados aspectos del material, brindar una sección representativa de todo el material de acuerdo con criterios predeterminados de orden o valorar el material de acuerdo con ciertos criterios (…)](Traducción Maraví, 2015)

Además, cabe destacar que, según McKnight et al. (2000), el análisis del contenido es un procedimiento de análisis del contenido de la información obtenida en forma de texto como las respuestas obtenidas de una entrevista o de un cuestionario abierto.

Nuestra investigación se realizará como se describió anteriormente, mediante la valoración del material de acuerdo a determinados criterios, luego de la selección de aquellas secciones que permitan observar la justificación del enunciado condicional. Dichos criterios consistirán en las clases de justificación que han sido investigadas y codificadas en la literatura antecedente a nuestra investigación, que presentamos a continuación, y la que va a ser usada por nosotros para hacer el análisis de las justificaciones hechas por los profesores.

CAPÍTULO 3

EXPLORACIONES PARA EL DIAGNÓSTICO

Los instrumentos que hemos adaptado y construido son: el episodio en clase, ficha de información de participantes, matriz de codificación de los niveles de justificación, exploración inicial, exploración de proceso y exploración final, todos estos fueron pertinentes porque nos permitieron el registro, la clasificación de la información y el análisis de datos de la información obtenida por dichos instrumentos. La información completa se muestra en las tablas de resumen de análisis elaboradas en el siguiente capítulo, donde se podrán apreciar los diferentes niveles de justificación inicial y cómo se desarrollan en los diferentes momentos del taller. Cabe considerar que las actividades que involucran la justificación se dieron a través de la resolución y creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad realizados de forma individual y en parejas.

3.1 Los instrumentos de exploración

Según la idea de Mulhern citado en Rico (2008) en una investigación cualitativa del tipo análisis de contenidos, se considera un instrumento de investigación diseñado por el mismo investigador o adaptado de otros ya existentes, con el objetivo que cada participante manifieste su grado de saber o conocimientos sobre los elementos que conforman dicho instrumento.

En nuestra investigación para construir los instrumentos de exploración inicial, final y del proceso, realizamos adaptaciones de un problema usado en la investigación de Maraví (2015) y nos apoyamos en la estrategia EPP (Malaspina et at, 2015) que condiciona la existencia de algunos elementos para crear un buen problema matemático. Para la parte del análisis de datos se necesitó una matriz de codificación para la clasificación de los niveles de justificación, la que nos permitió analizar las justificaciones de los participantes y es por ello que en nuestro trabajo, se tomó la clasificación de los niveles de justificación propuesta por Bieda, Choppin y Knuth (citados en Blanton et al., 2011, pp. 154-155), esto significó que el análisis de las justificaciones brindadas por los participantes se ubicaron en el nivel que les corresponde según los indicadores de cada nivel. En la Figura 3, se muestra la pertinencia de los instrumentos de exploración para lograr los objetivos específicos y general de nuestra investigación, dado que en cada uno de ellos se pide no solo resolver y crear problemas sino también justificar las soluciones que son procesos que están fuertemente relacionados por elementos que estaremos detallando en el desarrollo de la investigación.

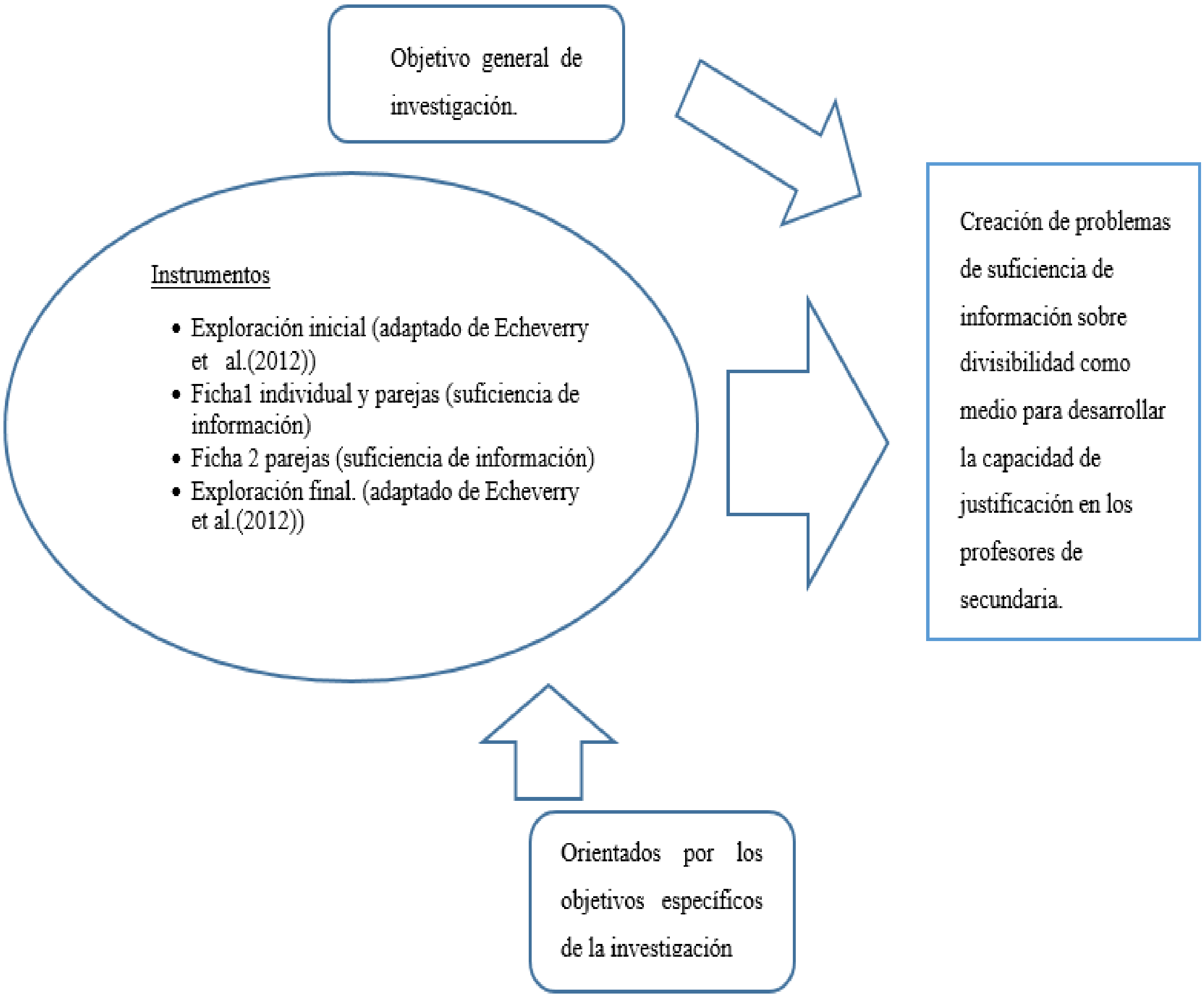


Figura 3. Relación entre instrumentos a utilizar y los objetivos de nuestra investigación.

Fuente: Elaboración propia

A continuación describiremos cada uno de los diferentes instrumentos usados en la investigación con sus respectivas soluciones :

3.1.1 Exploración inicial – Problema sobre las fichas

Para la exploración inicial nos basamos en Echeverry, Molina, Samper, Perry y Camargo (2012) que presentan dos cuestionarios desarrollados en una investigación realizada con estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. En esa investigación el objetivo era determinar la interpretación del condicional por parte de los estudiantes utilizando diagramas de Venn para dar solución a cada caso del cuestionario. La parte (a) de dicho cuestionario original de Echeverry et al. (2012) se presenta en la Figura 4.

Hay dos bolsas diferentes con fichas en las que es posible reconocer tres atributos: *color* (verde, azul, rojo), *forma* (redonda, rectangular, triangular) y *material* con el que está hecha (cartón, plástico). Además, cada ficha de cada bolsa tiene una etiqueta que la identifica (F1, F2, F3, etc.).

A continuación se establecen unas afirmaciones respecto a los atributos de las fichas; a partir de ellas, responda las preguntas, anotando también una explicación para su respuesta. Cada situación se refiere a las fichas de una de las bolsas.

a) Las fichas verdes son triangulares.

Todas las fichas triangulares son del mismo material

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SÍ	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es una ficha azul.	¿Es F1 triangular?				
ii)	F3 y F4 son del mismo material.	¿Son F3 y F4 triangulares?				
iii)	F5 es redonda.	¿Es F5 verde?				
iv)	F7 y F8 son fichas verdes.	¿Son F7 y F8 del mismo material?				

Figura 4. Fichas parte (a), Problema 2

Fuente: Echeverry et. al., (2012, p. 76)

A continuación, presentaremos el instrumento inicial que construimos realizando algunas modificaciones del formato propuesto por Echeverry et al. (2012, p. 76) figura 4. Así, en el original se usa la respuesta *no se sabe*, en nuestro instrumento será *no necesariamente* y el término *explicación* será sustituido por *justificación.*

Exploración inicial

Situación:

Hay una bolsa con fichas en la que es posible reconocer tres atributos:

color (verde, azul o roja); **forma** (redonda, rectangular o triangular); y **material** con el que están hechas (cartón o plástico).

Además, cada ficha de la bolsa tiene una etiqueta que la identifica (F1, F2, F3, etc.)

A continuación, se presentan casos con una **información general** para las fichas de la bolsa (la misma para todos los casos) y en cada uno de ellos se brinda **información adicional** sobre determinadas fichas, a fin de responder **requerimientos (preguntas)** específicos acerca de tales fichas.

<u>**En cada caso, marque su respuesta con un aspa, según corresponda, y justifique su respuesta.**</u>

Caso 1

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F1 es una ficha azul

Requerimiento	**Respuesta**		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F1 es triangular?			
Justificación:			

Caso 2

Información general:
Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material
Información adicional: F3 y F4 son del mismo material.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F3 y F4 son triangulares?			
Justificación:			

Caso 3

Información general:
Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material
Información adicional: F5 es redonda

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F5 es verde?			
Justificación:			

Caso 4

Información general:
Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material
Información adicional: F7 y F8 son fichas verdes.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F7 y F8 son del mismo material?			
Justificación:			

1. ¿Considera que es importante que en la enseñanza de las matemáticas se deben enfatizar las justificaciones de las respuestas a los problemas? ¿Por qué?
2. Escriba tres palabras o frases cortas que expresen lo que ha sentido en su experiencia de justificar las respuestas de los problemas.

<u>Solución de referencia de la exploración inicial</u>

Presentada nuestra exploración inicial alcanzamos las soluciones de referencia de cada caso del instrumento, sabiendo que estas soluciones son desarrolladas en base a la teoría conjuntista que se sugirió y presentó a los participantes en la parte introductoria del taller por parte del que dirigió el taller, puesto que el desarrollo original del problema, parte (a) adaptado de Echeverry et. al., (2012), se apoyó también en los diagramas de Venn para explicar su solución de cada caso.

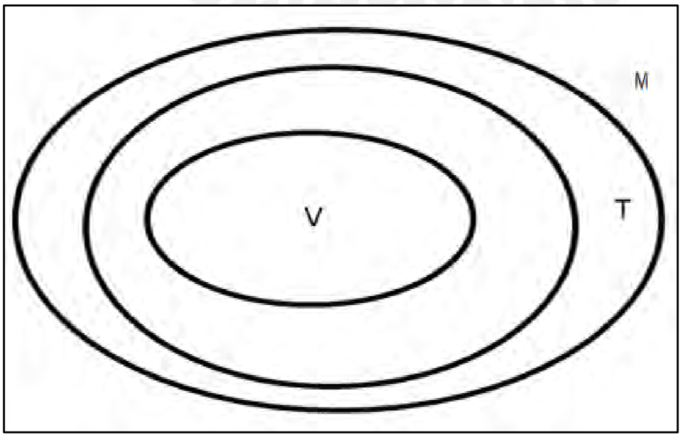


Figura 5. Representación de la información general del problema (Diagrama de Venn)

Cabe mencionar que en la figura 5, V representa el conjunto de las fichas verdes; T el de las fichas triangulares y M el de las fichas del mismo material bien puede ser de cartón o plástico. Un elemento del conjunto V, es decir una ficha verde, también es elemento del conjunto de las triangulares y todas estas del mismo material; bien todas de cartón o plástico. Según la información de las condiciones del problema se presentan 4 casos y presentaremos cada uno de ellos con su respectiva solución, mostradas a continuación:

<u>Para el caso 1</u>

Caso 1
Información general:
Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F1 es una ficha azul

Requerimiento	**Respuesta**		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F1 es triangular?			
Justificación:			

Figura 6. Caso 1 del problema inicial

Es un problema de suficiencia de información propuesto usando proposiciones condicionales y sus correspondientes diagramas de Venn. En la información general se tiene $V \rightarrow T$ y $T \rightarrow M$

Con esta información se debe ubicar en el diagrama de Venn la ficha F1 para responder el requerimiento.

Para el caso 1 (ver figura 6), la respuesta esperada es “No Necesariamente”. La única restricción en cuanto a la forma son las de color verde (deben ser triangulares). Con respecto a los otros colores no se restringe la forma, es por esa razón que en el gráfico F1 puede estar ubicada en varias zonas, por lo tanto podemos representarla en diagramas de Venn, (ver figura 7) :

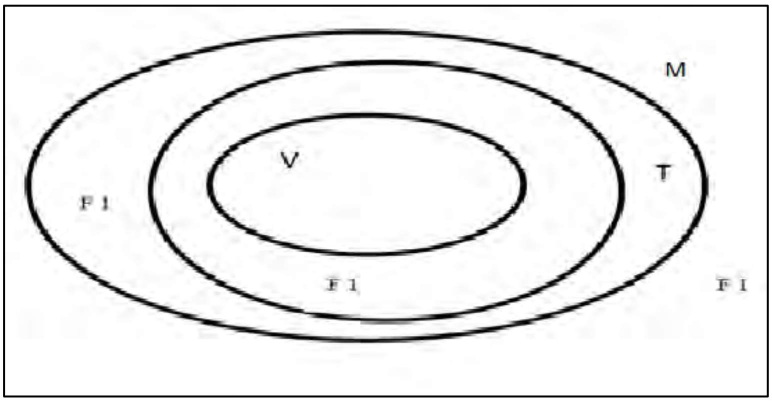


Figura 7. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 1

<u>Para el caso 2</u>

Caso 2

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F3 y F4 son del mismo material.

Requerimiento	**Respuesta**		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F3 y F4 son triangulares?			
Justificación:			

Figura 8. Caso 2 del problema inicial

Para el caso 2 (ver Figura 9) la respuesta esperada es “No necesariamente”. El hecho que F3 y F4 sean del mismo material no condiciona que sean de la misma forma ni menos que sean triangulares; por lo tanto, podemos representarla de la siguiente forma (ver Figura)

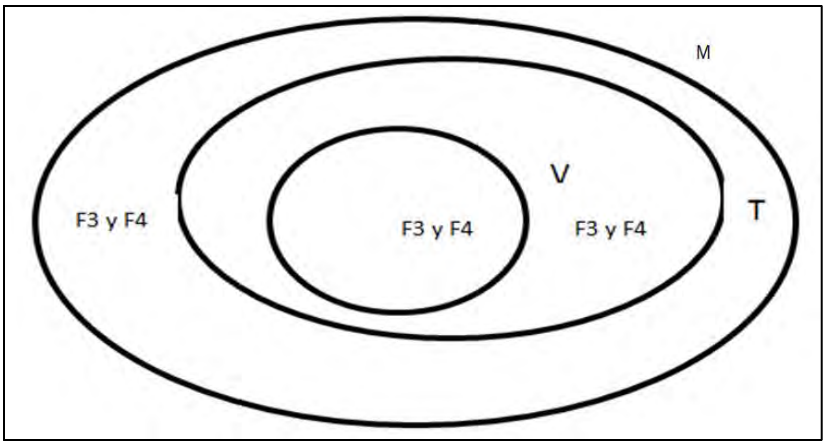


Figura 9. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 2

Como podemos apreciar en la Figura , no sabemos si F3 y F4 pertenecen a T o al complemento de T. Es decir, F3 y F4 pueden ser triangulares o no.

Para el caso 3

Caso 3
Información general:
Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F5 es redonda

Requerimiento	**Respuesta**		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F5 es verde?			
Justificación:			

Figura 10. Caso 3 del problema inicial.

Para el caso3 (ver Figura 11), la respuesta esperada es “NO”: una ficha verde necesariamente es de forma triangular, por lo que si F5 es redonda no le corresponde que sea de color verde (ver Figura 11).

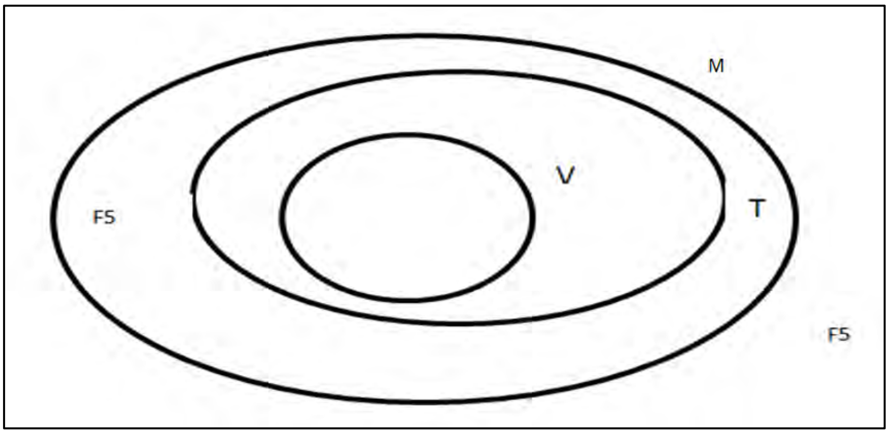


Figura 11. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 3.

<u>Para el caso 4</u>

Caso 4
Información general:
Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material
Información adicional: F7 y F8 son fichas verdes.

Requerimiento	**Respuesta**		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F7 y F8 son del mismo material?			
Justificación:			

Figura 12. Caso 4 del problema inicial.

Para el caso 4 (ver Figura 12) la respuesta esperada es “SÍ”: pues, como F7 y F8 son verdes, implica que son triangulares, y si son triangulares implica que son del mismo material; por lo tanto, se determina que son del mismo material cartón o plástico. A continuación, presentamos la gráfica que nos ayuda a entender la respuesta dada (Figura 13).

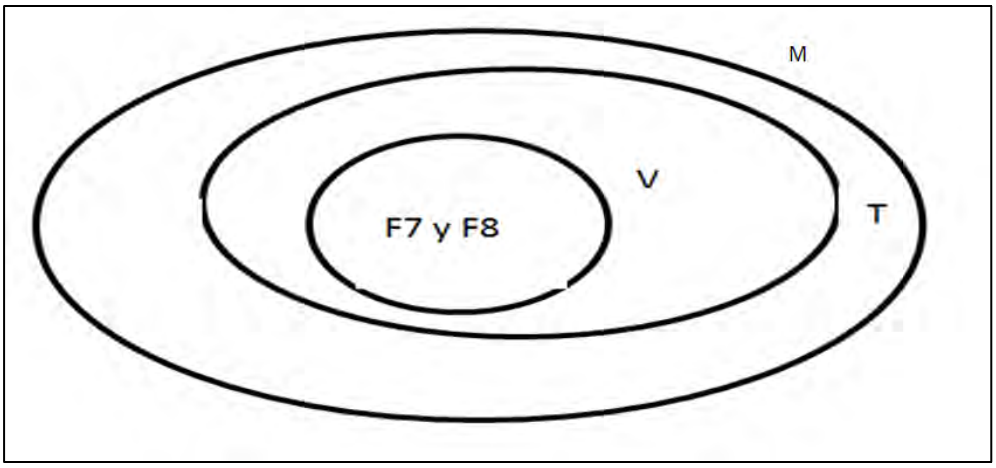


Figura 13. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 4.

Luego de aplicar el instrumento de exploración inicial utilizamos el de la ficha 1 individual (exploración de proceso) donde el objeto matemático es la divisibilidad en un contexto matemático a diferencia de la exploración inicial que era extramatemático.

3.1.2 Exploración del Proceso – Ficha 1 (individual)

Para realizar esta parte de la exploración del proceso hemos tomado en cuenta las sugerencias de Malaspina (2013):

> a) Observar la situación y anotar toda la información que se vaya encontrando, b) Examinar las relaciones lógicas y matemáticas que se pueden establecer con la información que se percibe, c) Seleccionar la información que se considere relevante en relación a las relaciones lógicas y matemáticas encontradas; o modificar convenientemente la información. (p.138)

Somos conscientes de que el trabajo individual motiva a que el alumno incremente sus conocimientos gracias a sus propios aprendizajes logrados y esto se da al movilizar una serie de elementos cognitivos, lógicos, experiencias previas e intuitivos que sirvan para la creación de problemas. Por ello, cabe resaltar que el diseño de este instrumento (Ficha 1- individual) fue elaborado tomando en cuenta los elementos básicos que debe tener un problema matemático, según Malaspina (2013) tales como: *Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático.*

FICHA 1 (Individual)

Episodio

La profesora Nancy, en una de sus clases sobre divisibilidad, propuso el siguiente problema a sus estudiantes del segundo grado de educación secundaria, considerando dos casos:

Caso 1

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 6?			
Justificación:			

Caso 2

Información general:

a y b representan números enteros positivos cualesquiera .

Información adicional: a y b son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?			
Justificación:			

Luego de unos minutos, algunos alumnos de Nancy respondieron:

Para el caso 1, Pepito marcó SI, y justificó así: Cuando n =18*, n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6; por lo tanto n siempre es múltiplo de 6.*

Para el caso 2, María marcó SI, y justificó así: *Cuando a=6 y b=12 ambos son múltiplos de 6 y la suma a+b me resulta un múltiplo de 3.*

Descripción de la ficha 1 – individual

Esta exploración de proceso (ficha 1 – individual) presenta inicialmente un episodio de una clase de la profesora Nancy que muestra dos casos 1 y 2 para ser resuelto por el participante, dichos casos (problemas) cuentan con información general, información adicional y el requerimiento respectivo. Cada caso está dentro de un contexto intramatemático y en un entorno matemático de la teoría de números (divisibilidad). Además de requerir una respuesta como: SI, NO, o No necesariamente, se tiene un espacio para la parte más importante de esta investigación, estamos hablando de la justificación (del porqué de su respuesta). Las actividades se inician individualmente resolviendo los casos y justificando sus respuestas; en una segunda parte se pide examinar y comentar las respuestas y justificaciones dadas por dos alumnos (Pepito y María) de la profesora Nancy. En la tercera y última parte de la ficha 1 – individual, se pide crear dos problemas pre (uno para cada caso) que ayuden a entender el problema del episodio y a resolver correctamente tal problema. Se trata de crear un problema por *variación* en un trabajo individual. Malaspina (2013) sugiere las siguientes estrategias:

> a) Buscar más de una forma de resolver el problema, b).Luego de resolver el problema, o al intentar resolverlo, plantearse preguntas "¿Qué pasaría si….?". Por ejemplo, qué pasaría si la Información fuera otra, si el Requerimiento fuera diferente, si se considera otro entorno matemático, si se cambiara el contexto. […], es un trabajo reflexivo, creativo y con mente abierta, y el "¿Qué pasaría sí…?" incluye analizar si los cambios tienen sentido y verlos integradamente. (p.137)

Según Malaspina (2013), se necesita que los docentes den el primer paso, brindando a los estudiantes cierta información y requerimientos a través de un determinado problema, pero que a partir de este, los alumnos utilizando su razonamiento, observación y pensamiento lógico puedan dar libertad a su creatividad para crear nuevos problemas no muy lejanos al dado por el profesor (llamado *pre*) para entender la solución final del problema planteado por el profesor. Creemos que añadir a este proceso de creación la parte de justificación de sus respuestas, es romper con la cotidianeidad de solo resolver y que es fundamental para el profesor y el alumno en el quehacer matemático.

3.1.3 Exploración del proceso – Ficha 1 (Actividad en parejas)

Los participantes en esta etapa comentan las respuestas y justificaciones de otros para luego crear dos problemas en parejas, donde, para esta actividad colaborativa, Malaspina (2013) sugiere:

> a) Compartir en grupos la información decidida individualmente para el nuevo problema y las relaciones lógicas y matemáticas que se hayan encontrado o establecido, b) Examinar qué requerimientos se pueden hacer a partir de la información decidida y sus relaciones lógicas y matemáticas; c) Decidir un requerimiento, y darle forma de un problema, considerando como contexto la situación dada, o haciendo algunas modificaciones a esta, y a un entorno matemático acorde con el nivel educativo en el que se pretenda proponer el problema, d) Escribir en grupo el enunciado del problema con base en lo anterior, y examinar la claridad; e) Resolver el problema, f) Atendiendo a la dificultad del problema creado y al nivel educativo en el que se pretenda emplear, pensar en la posibilidad o conveniencia de desagregarlo en problemas de dificultad gradual; g)Proponer el problema a otro grupo y pedirle solución y comentarios.(p.138)

Esta forma de trabajo colaborativo favorece indudablemente al aprendizaje mutuo, evita cometer errores frecuentes dado que el acompañante puede darse cuenta de ello, sin descuidar la supervisión del profesor. Esta forma de trabajo fomenta directamente la comunicación matemática donde se da la argumentación, llegando de esa manera a justificar las proposiciones individuales, que es nuestro tema matemático del presente trabajo.

Descripción de la ficha1 – actividad en parejas

En esta parte del proceso, se pide como primera actividad examinar y comentar en parejas las dos justificaciones de los alumnos (Pepito y María) de la profesora Nancy y en la tercera y última parte se pide crear en parejas dos problemas (uno para cada caso) que ayuden a entender y aclarar los problemas dados por la profesora Nancy (problemas en el episodio – caso1 y caso 2) habiendo un caso 3 opcional para crear un problema *pos* descrito en la estrategia EPP en el capítulo 1 de nuestra investigación. En el Anexo B3 se presenta este instrumento de trabajo.

Actividades en parejas

1. Leer y comentar en pareja el Episodio, las respuestas y justificaciones de los alumnos.

Caso 1

(Solución de Pepito)

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que *n* es múltiplo de 3.

Información adicional: *n* no es múltiplo de 12

<table>
<tr><td rowspan="2">Requerimiento</td><td colspan="3">Respuesta</td></tr>
<tr><td>Sí</td><td>No</td><td>No necesariamente</td></tr>
<tr><td>¿n es múltiplo de 6?</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Justificación:
Cuando n =18, n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6; por lo tanto n siempre es múltiplo de 6.</td></tr>
<tr><td colspan="4">¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?</td></tr>
</table>

Caso 2

(Solución de María)

Información general: *a* y *b* representan números enteros positivos cualesquiera

Información adicional: *a* y *b* son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta

	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?	X		
Justificación: *Cuando a=6 y b=12 ambos son múltiplos de 6 y la suma a+b me resulta un múltiplo de 3.*			
¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?			

2. Crear un problema con dos o más casos, cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado por la profesora Nancy, y a obtener una solución correcta del mismo.

Usar los cuadros que se presentan a continuación para escribir la información general, la información adicional y el requerimiento del problema, así como la respuesta correcta y la justificación correspondiente.

Caso 1

Información general: ---

Información adicional: ---

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
Justificación:			

Caso 2

Información general: --

Información adicional: --

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
Justificación:			

3.1.4 Exploración del proceso -Ficha 2 (Parejas)

En esta parte del proceso se pide como primera actividad examinar y comentar en parejas las dos justificaciones de los alumnos del profesor Pedro y en la tercera y última parte se reta a crear dos problemas (uno para cada caso) que ayuden a entender y aclarar los problemas dados por el profesor Pedro (problemas en el episodio – caso1 y caso 2) habiendo un caso 3 (opcional) para crear un problema *pos* descrito en la estrategia EPP.

1. Leer y comentar en pareja el Episodio, las respuestas y justificaciones de los alumnos.

Caso 1

(Solución de Milca)

Información general: n representa un número entero positivo múltiplo de 4.
Información adicional: n es múltiplo de 6.

Requerimiento	Respuesta		
	Si	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 24?	X		
Justificación : Todo número múltiplo de 4 y a la vez múltiplo de 6, siempre resulta múltiplo de 6 *por 4.*			

¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?

Caso 2

(Solución de Rufino)

Información general: n representa un número entero positivo menor que 15 y múltiplo de 3.

Información adicional: n - 1 es múltiplo de 5

Requerimiento	Respuesta		
	Si	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 2?		X	
Justificación: Para n =6, se obtiene n -1 múltiplo de 5, pero 5 no es múltiplo de 2.			
¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?			

2. Vuelva a leer el Episodio y cree Ud. un problema con dos o más casos, cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado por el profesor Pedro, y a obtener una solución correcta del mismo.

Use los cuadros que se presentan a continuación para escribir la información general, la información adicional y el requerimiento del problema, así como la respuesta correcta y la justificación correspondiente

Caso 1.

Información general ………………………………………………… …………….

Información adicional…………………………………………………………………..

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
Justificación:			

Información adicional: ……………………………………..

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
Justificación:			

Caso 3 (Opcional)

Información general: ---

Información adicional: ---

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
Justificación:			

3.1.5 Exploración final

Para la exploración final se toma lo de Echeverry et al. (2012) donde presentan dos cuestionarios desarrollados en una investigación realizada con estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. En esa investigación el objetivo era determinar la interpretación del condicional por parte de los estudiantes. El análisis de las respuestas se dio bajo el uso de diagramas de Venn. Diseñaron dos cuestionarios, el primer cuestionario fue aplicado antes de la implementación de estrategias didácticas para mejorar el trato al enunciado condicional en un grupo de profesores de Matemática en formación es por ello que se seleccionó y adaptó para nuestra investigación. La parte (b) de dicho cuestionario original de Echeverry et al. (2012) se presenta en la Figura .

Apellidos y nombres: ______________________________

b) ***Si una ficha es de cartón entonces es rectangular.***

Si una ficha es de cartón entonces es verde.

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?				
ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?				
iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?				
iv)	F5 es de cartón	¿Es F5 triangular?				

Figura 14. Fichas, parte (b)Problema 2

Fuente: Echeverry, Molina, Samper, Perry y Camargo (2012)

Descripción de la exploración final

El instrumento que construimos para nuestra exploración final fue inspirado de la parte b del cuestionario usado por Echeverry, Molina, Samper, Perry & Camargo (2012) en su investigación, considerando algunas modificaciones que fueron necesarias para recoger la información pertinente para nuestra investigación. A continuación, presentamos dicha exploración final:

Exploración final

Situación:

Hay una bolsa con fichas en la que es posible reconocer tres atributos: color (verde, azul o roja); forma (redonda, rectangular o triangular); y material con el que están hechas (cartón o plástico). Además, cada ficha de la bolsa tiene una etiqueta que la identifica (F1, F2, F3, etc.)

A continuación, se presentan casos con una información general para las fichas de la bolsa (la misma para todos los casos) y en cada uno de ellos se brinda información adicional sobre determinadas fichas, a fin de responder requerimientos (preguntas) específicos acerca de tales fichas.

En cada caso, marque su respuesta con un aspa, según corresponda y justifique su respuesta.

Caso 1

Información general:

Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.

Información adicional: F1 es azul

<table>
<tr><td rowspan="2">Requerimiento</td><td colspan="3">Respuesta</td></tr>
<tr><td>Sí</td><td>No</td><td>No necesariamente</td></tr>
<tr><td>¿F1 es de plástico?</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Justificación:</td></tr>
</table>

Caso 2

Información general:

Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.

Información adicional: F2 es una ficha de plástico

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F2 es rectangular?			
Justificación:			

Caso 3

Información general:

Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.

Información adicional: F3 es rectangular

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F3 es una ficha de cartón?			
Justificación:			

Caso 4

Información general:

Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.

Información adicional: F5 es de cartón.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F5 es rectangular?			
Justificación:			

- Escriba espontáneamente cuatro palabras que completen la expresión:

  " La creación de problemas de matemáticas es ………………………..

  " La creación de problemas de matemáticas es………………………..

  " La creación de problemas de matemáticas es………………………..

  " La creación de problemas de matemáticas es………………………..

- Escriba algún o algunos comentarios suyos acerca de la experiencia de crear problemas de matemáticas.

- ¿Cómo considera que ha influido en su capacidad de justificar sus afirmaciones, la experiencia de crear problemas de suficiencia de información?

  Marque un número, considerando que 1 es MUY POCO y 5 es MUCHO

  1 2 3 4 5

  ¿Por qué?

Respuestas referenciales de la Exploración final:

El diagrama correspondiente a la información general de la exploración final es el indicado en la siguiente figura:

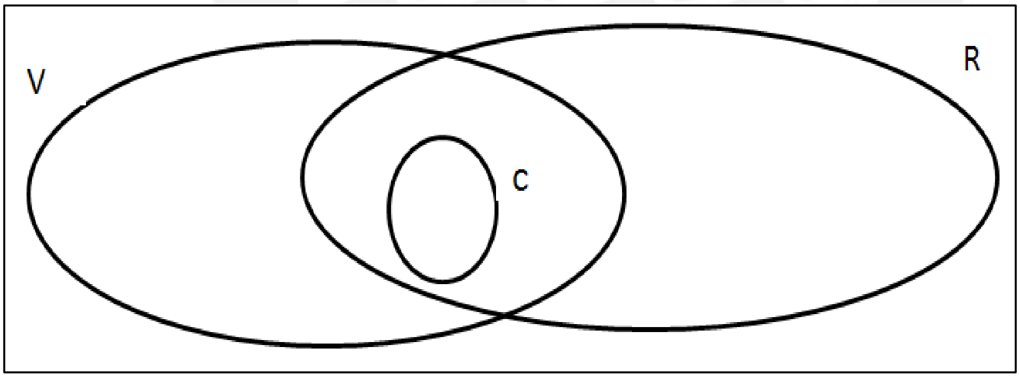


Figura15. Representación de la información general (Diagrama de Venn)

En la figura el conjunto V es el conjunto de las fichas verdes; R de las fichas rectangulares y C de las fichas de cartón. Toda ficha de cartón es verde y rectangular a la vez. Pero debo tener en cuenta que toda ficha rectangular no necesariamente es de cartón ni verde y de la misma manera una ficha verde no necesariamente tendrá que ser de cartón ni rectangular. Con las informaciones adicionales, que se presenta en cada caso de la exploración final, podemos esperar las siguientes respuestas:

Para el caso 1:

Para el caso 1 la respuesta esperada es SI. Según la figura 16, puede ubicarse en la región del complemento del conjunto de V, por lo que no es verde y esta posibilidad imposibilita que sea de cartón; por lo tanto, tiene que ser de plástico sabiendo que el color no se podría definir entre rojo o azul. El gráfico y las informaciones adicionales sobre F1 nos lleva a presentar el siguiente diagrama de Venn (ver Figura 16)

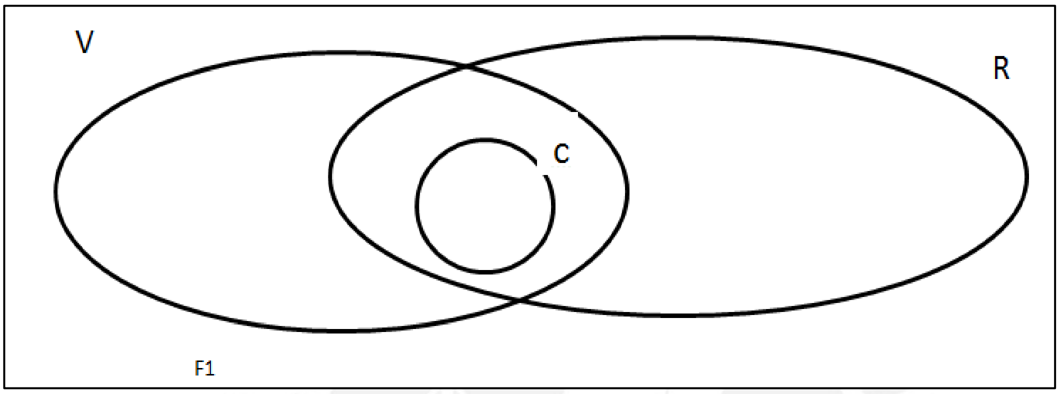


Figura 16. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 1.

Para el caso 2:

Para el caso 2 la respuesta esperada es No Necesariamente, pues considerando el gráfico la ficha F2 se puede ubicar en cualquier zona que sea parte del complemento del conjunto C, esta situación se puede representar mediante el siguiente diagrama de Venn (ver figura 17):

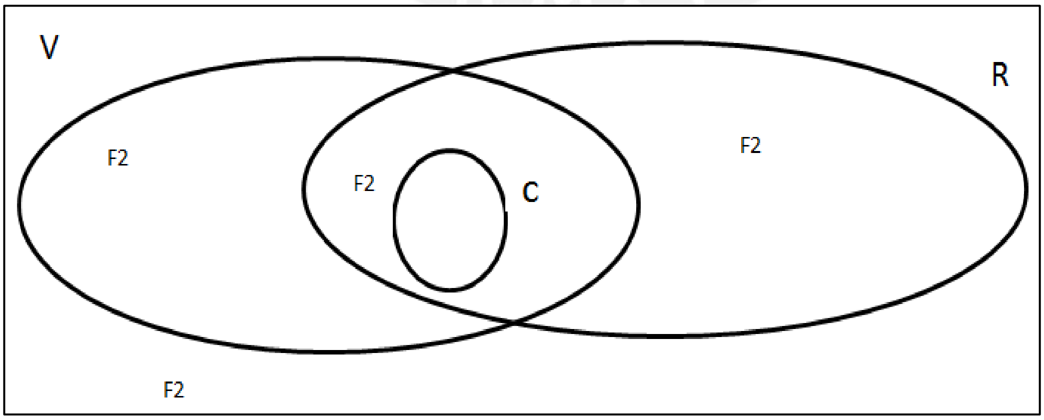


Figura 17. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 2.

Para el caso 3:

Para el caso 3 la respuesta esperada es No necesariamente, dado que F3 puede moverse dentro del conjunto R, esto permite que F3 pueda ser de cartón o de plástico.

El siguiente diagrama presenta esta situación con respecto a la ficha F3 (ver Figura 18)

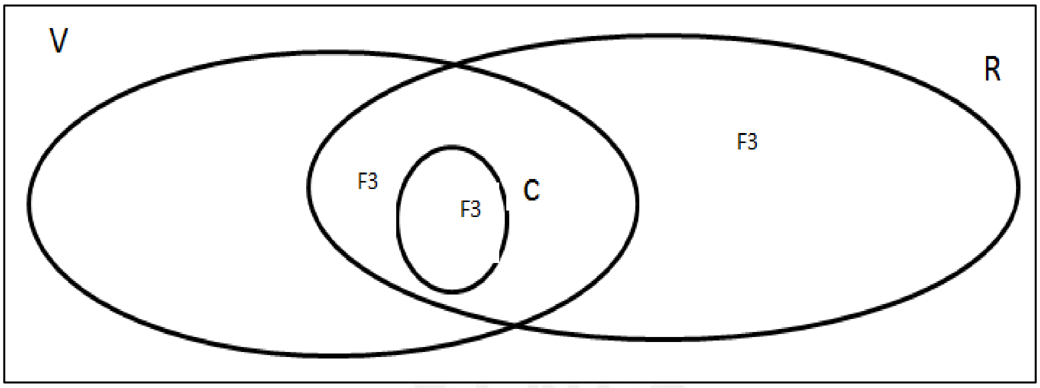


Figura 18. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 3.

Para el caso 4:

Para el caso 4 la respuesta esperada es SI, de acuerdo a la figura 19, la única región que puede ubicarse la ficha F5 es en el conjunto C lo que implica que es rectangular.

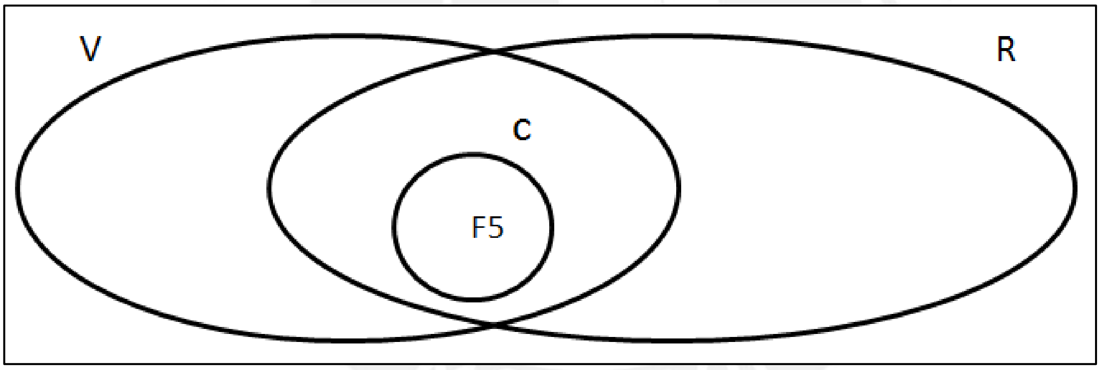


Figura 19. Diagrama de Venn para la información general y adicional del caso 4.

Aunque Echeverry et al. (2012) desarrollaron un sistema de categorías apropiado para los fines de su estudio, nosotros solo analizaremos cómo el discurso de las justificaciones mejoran por medio de la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad en profesores de secundaria. A continuación, el capítulo 4 de nuestra investigación.

CAPÍTULO 4

Recolección y organización de datos

En este cuarto capítulo nos enfocamos en los aspectos relacionados a la organización y desarrollo del primer taller piloto con el objetivo de obtener información y experiencias que nos ayudarían a mejorar la realización del taller final, de forma adecuada, donde se fomentó la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad como medio para mejorar la capacidad de justificación en profesores de secundaria. A continuación, describiremos las ocurrencias del primer taller piloto.

4.1 Primera recolección

Para lograr los resultados y objetivos esperados en nuestra investigación, previo al taller realizamos un taller piloto sobre creación de problemas de suficiencia de información el cual se aplicó en el VIII coloquio CIEM en la ciudad de Piura, en el mes de Agosto de 2016. Este taller consistió en un episodio de una clase, problemas pre y problemas pos (estrategia EPP). A continuación, mostramos las observaciones que hicimos del taller piloto :

Ocurrencias en el taller piloto (UNP)

a) *Primer contacto.*

A través del instrumento aplicado en el primer taller piloto denominado DIA1 presentado en el anexo A1, se observó que un grupo de los profesores presentes no habían tenido experiencias previas con los problemas de suficiencia de información y esto nos motivó para continuar nuestra investigación pues el tipo de problema era innovador y retador para los docentes. Algunos de ellos tuvieron dificultad en familiarizarse con el cómo se podía utilizar cada proposición para resolver el requerimiento del problema, la cual presentaba tres posibles respuestas (no, si, no necesariamente) y dado que esta situación fue la que llevó, en la mayoría de los casos, al error al responder las preguntas.

b) *Objeto matemático conocido.*

La mayoría de los profesores manipulaban el objeto matemático (divisibilidad) de forma adecuada, pues el nivel de los saberes previos eran de un buen nivel para trabajar con los problemas planteados sobre el tema.

c) Interés en el tipo de problema.

La originalidad del tipo de problema de suficiencia de información generó interés en los participantes. Muchos profesores se mostraron motivados ante los problemas de suficiencia de información porque los docentes comentaban el interés de pedir a sus propios estudiantes crear y aplicar otros objetos matemáticos que ellos manejaban en sus aulas.

d) La justificación como reto.

Este fue el punto más crítico de toda la actividad, pues para muchos de los docentes el justificar proposiciones fue retador. Más aún, por ser la justificación una práctica no frecuente en sus aulas para la mayoría de los participantes del taller piloto, siendo este el motivo principal en dar respuestas y justificaciones incorrectas.

e) Respuestas en el episodio ayudaron a tener una idea de justificación.

Contar con ejemplos de justificación dados en un inicio en el problema episodio, fue de gran ayuda para los docentes, ya que nos permitió ver el nivel de justificación que traía la muestra contrastado con lo que esperábamos obtener, y que la actividad de creación de problemas de suficiencia de información fuera un medio para mejorar la capacidad de justificar en los profesores.

f) Tiempo insuficiente

Lo planeado inicialmente fue realizar dos actividades en dos días, de hora y media cada sesión, pero en todo el tiempo que se dispuso se pudo realizar solo una actividad. Esto nos llevó a tener muy en cuenta el manejar bien los tiempos en el taller oficial, para que se puedan cubrir las actividades planeadas y así poder obtener toda la información esperada.

g) Mejorar el diseño de la prueba.

El desarrollo del piloto tuvo como objetivo detectar algunas correcciones que se debería hacer para realizar el taller oficial y creemos que una de ellas fue la modificación del diseño de la prueba, y de esa manera se mejoraron los tiempos para su desarrollo. Se hicieron cambios en el formato de las preguntas, brindándole un espacio para justificar, y cada información adicional se presentó en bloques independientes.

A continuación, describiremos la realización del taller oficial que se realizó en la ciudad de Lima, Universidad Católica del Perú (PUCP)

4.2 Segunda recolección

Ocurrencias en el taller PUCP

Iniciamos este apartado describiendo a los participantes del estudio, presentación del diseño, la metodología, la descripción del taller, comentamos la implementación de dicho taller y analizamos las respuestas de los profesores participantes poniendo énfasis en sus justificaciones dadas en la exploración inicial, exploración del proceso (ficha 1 y ficha 2) y la exploración final, realizados de forma individual y grupal.

Los participantes recibieron la invitación al taller y se mostraron interesados por el tema (creación de problemas) e interesados por conocer nuevos medios para desarrollar sus capacidades como docentes. Generó expectativa y motivación en el grupo de profesores, que llamaremos participantes, los que colaboraron y aportaron valiosa información para la realización del taller oficial cuya descripción es la siguiente.

En el taller contamos con 8 participantes los cuales eran profesores del área de matemáticas de diferentes Instituciones Educativos de Educación Secundaria ubicadas en Lima y el Callao. El taller fue realizado un domingo en la Universidad Católica del Perú (PUCP) y dirigido por el Dr. Uldarico Malaspina Jurado. Cada participante usó un mismo código durante todo el proceso del taller (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 y P8), de esta manera se pudieron realizar de manera anónima las actividades del taller, y con respecto a la información de cada participante, la agrupamos en una ficha que se presenta en la tabla 8.

El cuestionario de información general de los participantes (ver Anexo A.1) se recopilaron los siguientes datos:

- Código de participante
- ¿En dónde labora actualmente?
- Tiempo total de servicio en la docencia – años
- Institución de estudios profesionales
- Grado que enseña actualmente
- Grado en el que tiene mayor experiencia en la enseñanza de las matemáticas
- Cantidad de estudiantes promedio a los que enseña en su aula
- Horas por semana que enseña en el área de matemáticas

A continuación, presentamos la tabla 8 donde se presentan las respuestas de los participantes al cuestionario de información general.

Tabla 8. Información general de los participantes

INFORMACIÓN GENERAL DE LOS PARTICIPANTES						
Código de participante:	P1	P2	P3	P4	P5	P8
¿En dónde labora actualmente?	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Nuestra Sra. Del Carmen de S.M	I.E.E Callao
Tiempo total de servicio en la docencia-años	21	16	27	28	18	28
Institución de estudios profesionales	IPNM	UNMSM	UPSM	UNMSM	UNMSM	UPIGV
Grado que enseña actualmente	1ro y 2do	4to	1ro y 2do	2do y 5to	4to y 5to	5to
Grado en el que tiene mayor experiencia en la enseñanza de las matemáticas	1ro	3ro	1ro y 2do	5to	5to	3ro
Cantidad de estudiantes promedio a los que enseña en su aula.	24	24	22	25	20	30
Horas por semana que enseña en el área de matemáticas.	24	24	24	24	24	24

Con respecto a la tabla 8 se puede observar que más del 50 % de los participantes tienen una buena cantidad de años de servicio como docentes, promediando 24 años, y a esto se suma la evidencia de la poca cantidad de alumnos con un promedio de 22 alumnos por aula. Esta información fue muy alentadora por el tipo de docentes con la que contábamos en el taller; con experiencia y con el manejo adecuado del objeto matemático que se trató en el taller.

A continuación, se presentan las sesiones del taller piloto oficial con los tiempos que demandó cada una de sus sesiones:

<u>Diseño de las sesiones del taller</u>

Taller 25 de setiembre 2016 en la PUCP

<u>Sesión 1</u>

1. Cuestionario para información de los profesores……………………….(10 min)
2. Exploración de conocimientos sobre divisibilidad...……………………(30 min)
3. Presentación del taller por el Dr. Uldarico Malaspina………..…...........(20 min)
4. Exploración inicial………………………………………………………(20 min**)**

<u>Sesión 2</u>

5. Reparto de Ficha 1 (Individual) – Páginas 1 y 2 . ……………………….(30 min)
6. Reparto de las páginas 3 y 4 de la Ficha 1 para trabajo por parejas……..(30 min)
7. Comentarios y socialización de lo trabajado……………………………..(30 min)
8. Comentarios sobre la primera parte del taller……………………………(30 min)

<u>Sesión 3</u>

1. Reparto de las hojas 1 y 2 de la ficha 2 -Trabajo individual. …………..……(30 min)
2. Reparto de las páginas 3 y 4 de la ficha 2 – Trabajo en parejas. …………….(30 min)
3. Socializar los trabajos, con exposiciones voluntarias ………………………..(30min)
4. Justificaciones dadas al problema del episodio y los problemas creados, sus respuestas y justificaciones…………………………………………………………………(30 min)

En la llamada sesión 1 (punto 2) se discutió y aclaró sobre conceptos básicos como múltiplos, factor o divisor, criterios de divisibilidad y algunas propiedades. Todo esto se hizo con el propósito de homogenizar al grupo y así evitar que no sea el objeto matemático lo que dificulte el proceso del taller y que no se generen distorsiones en los resultados, dado que las justificaciones son el centro de atención de nuestra investigación. El taller se aplicó bajo una estrategia llamada EPP de creación de problemas de Malaspina et al. (2015), con esta estrategia inicialmente se presenta un Episodio de clase de una profesora (Nancy) y se pide resolver los problemas que plantea la profesora, luego se pide crear problemas *pre* justificando las respuestas. También se pide analizar las justificaciones dadas por otros (alumnos de profesora

Nancy) y todas estas actividades se trabajaron de forma individual y en parejas. Para lograr los objetivos general y específicos de la investigación tuvimos que centrar nuestras observaciones en cómo el proceso de la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad funcionaba como medio para desarrollar la capacidad de justificación. En el taller se pidió resolver, crear problemas y justificar sus respuestas. Tuvimos la certeza de que estos pedidos constituyeron un ejercicio más elaborado, completo y exigente a los participantes, ya que no solo se trataba de crear y resolver, sino de justificar lo que hacen ante lo que le piden resolver (en resolución de problemas). Se evidenció la demanda de un mayor razonamiento y una secuencia lógica expresados a través de la justificación que vincula los datos con las conclusiones del problema. En resumen, se aplicó la exploración inicial, la exploración de proceso, la exploración final y se finalizó con una socialización sobre sus respuestas y sus justificaciones respectivas, la cual fue muy enriquecedora para todos los participantes y organizadores.

Considerando las diversas actividades ocurridas durante el taller en la PUCP nos es pertinente, por un tema de orden, presentar un esquema donde se ha codificado cada una de las actividades, mostrado a continuación:

Rutas y etapas del taller

En la figura 20, que a continuación se presenta, se observan, de forma detallada, las tres fases del taller (inicial, del proceso y final) y que cada fase está compuesta por etapas. Resaltando que algunas de ellas se realizan de forma individual o en pareja.

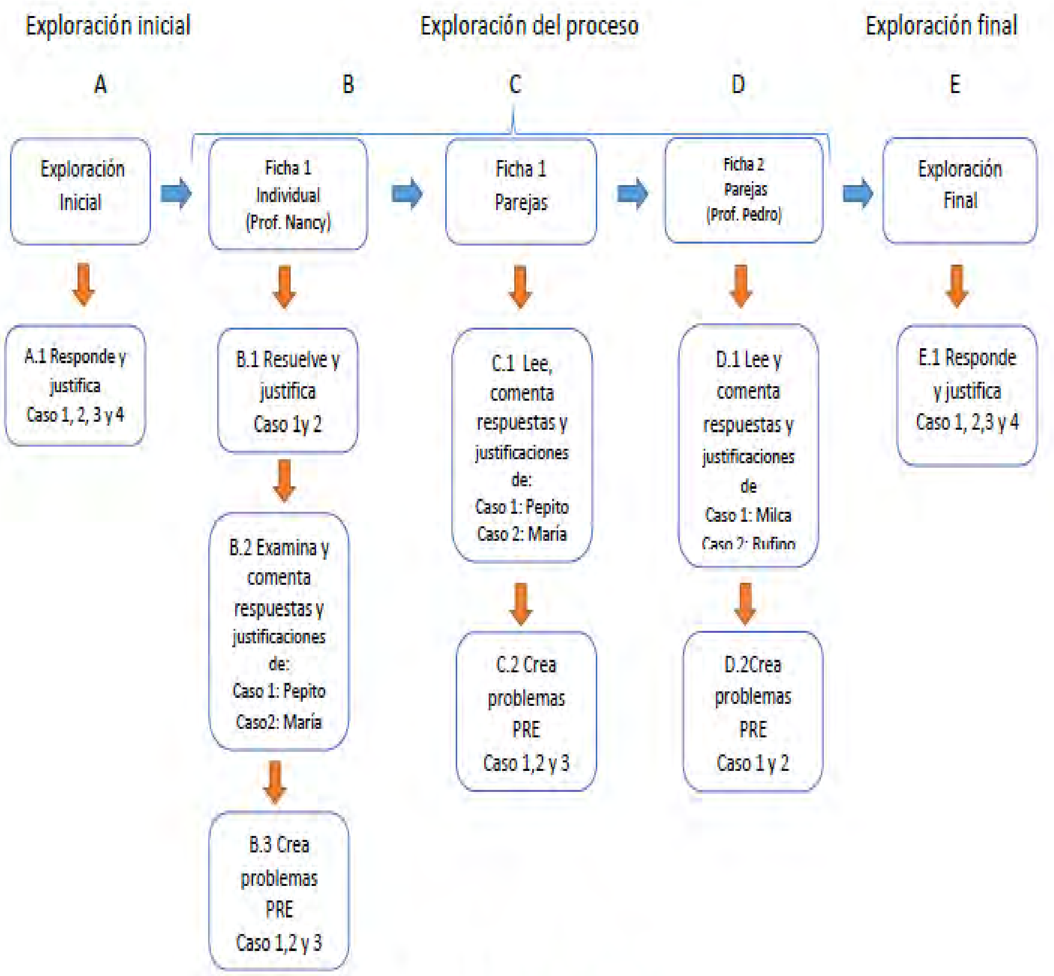


Figura 20. Ruta y etapas del taller
Fuente: Propia

Nota:
Etapa A1 pertenece a la fase de la exploración inicial.
Etapas B1,B2,B3, C1,C2,D1y D2 pertenecen a la fase de la exploración del proceso.
Etapa E1 pertenece a la fase de la exploración final.

4.3 Análisis de Datos

Después de las exploraciones aplicadas durante el taller, se analizaron los datos recogidos. Para ello, primero se registraron las justificaciones en función de la matriz de codificación (primer nivel de análisis), luego analizamos las justificaciones escritas por cada uno de los participantes (segundo nivel de análisis) de forma individual y en parejas.

En el momento del análisis cualitativo se hicieron observaciones con mayor detalle sobre el trato que se dio al enunciado condicional por parte de los participantes usando los criterios sugeridos por Bieda, Choppin y Knuth (en Blanton et al., 2011) que plantea la clasificación de la demostración matemática según sus niveles de producción (nivel 0, nivel 1, nivel 2, nivel 3) descrito en el capítulo 2.

Cabe señalar que en las matrices no se consideró la categorización con respecto a la respuesta, puesto que nuestro objetivo es analizar cualitativamente la justificación en cumplimiento de los objetivos de nuestro estudio. Posterior a la clasificación de las justificaciones realizamos el análisis de comparación entre los resultados de otros momentos del taller (exploración inicial, exploración del proceso y exploración final). Por todo esto se pudo establecer las observaciones sobre el desarrollo positivo de la capacidad de justificación esperada por parte de los participantes.

4.3.1 Análisis global de las justificaciones dadas por los participantes

A continuación, presentamos la matriz adaptada de Bieda, Choppin y Knuth, citada en Blanton et al. (2011), que usaremos para clasificar los diferentes niveles de justificación que presentaron los participantes en cada una de las etapas del taller.

Tabla 9. Codificación de niveles de justificación

Tabla de codificación de los niveles de justificación				
No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Los estudiantes dejan en blanco o afirman cualquier cosa menos el de acercarse a la tarea de justificar que se le solicita	Los estudiantes en este nivel parecen no ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación *matemática* para demostrar la verdad de una proposición o afirmación.	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática, pero sus justificaciones no son generales; en la mayoría de los casos, las justificaciones de los estudiantes están basadas empíricamente	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, e intentan producir tales argumentos por ellos mismos; los argumentos, sin embargo, no llegan a ser demostraciones aceptables.	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, y son capaces de producir exitosamente tales argumentos por ellos mismos.

Fuente : Adaptado de Bieda, Choppin y Knuth (en Blanton, et al., 2011, p. 154).

Para nuestro análisis de justificaciones será considerada una afirmación como justificación matemática si los argumentos planteados se ubican en alguno de los niveles 1, 2 ó 3 mostrado en la tabla 9.

A continuación, presentamos los cuadros que resumen la clasificación de las justificaciones por parte de los participantes de forma individual o en parejas, a través de las diferentes etapas del taller mostrados en la figura 20.

Resultados de la etapa A1 del taller (exploración inicial)

Tabla 10. Niveles de justificaciones en exploración inicial-individual - Caso 1 y 2

Caso 1						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Total
P1		x				
P2		x				
P3			x			
P4				x		
P5				x		
P6		x				
P7		x				
P8					x	
Total						
Caso 2						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Total
P1		x				
P2		x				
P3		x				
P4			x			
P5		x				
P6		x				
P7			x			
P8				x		
Total						

Se observa concentración en el número de afirmaciones que no serían clasificadas como justificaciones al desarrollar el caso 1 y el caso 2, dado que están en el nivel 0, pues según nuestra matriz de codificación en tabla 8, solo los ubicados en los niveles 1, 2 ó 3 serían considerados justificaciones.

Tabla 11. Niveles de justificaciones en exploración inicial-individual - Caso 3 y 4

Caso 3						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Total
P1			x			
P2			x			
P3				x		
P4				x		
P5				x		
P6		x				
P7				x		
P8				x		
Total						
Caso 4						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Total
P1			x			
P2		x				
P3			x			
P4					x	
P5					x	
P6		x				
P7				x		
P8					x	
Total		12	7	9	4	32

En esta tabla se observa que en el caso 3 y caso 4 la mayoría de los participantes intentan hacer una justificación, pero solo llegan a realizar justificaciones empíricas no generales, sin la necesidad de proporcionar argumentos rigurosos.

Un análisis especial haremos sobre los participantes P5 y P8 en todo el proceso ya que muestran su capacidad de justificación muy regular desde un inicio de las actividades.

Tabla 12. Síntesis de resultados obtenidos en las justificaciones de la exploración inicial.

Cuadro de resultados de exploración inicial						
	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Totales
Total	0	12	7	9	4	32

Según la tabla 12 se muestra una cantidad considerable de intentos de justificaciones que se ubican en el nivel 0, lo cual nos dice que los participantes no parecen ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática para demostrar la verdad de una proposición. Por otra parte, encontramos pocas justificaciones ubicadas en el nivel 3, que son las de mayor nivel, dado que la mayoría se concentra entre el nivel 1 y 2. Esperando que este grupo de justificaciones se traslade hacia nivel 2 y 3 al terminar el proceso de creación y resolución de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad.

Resultados de la etapa B1 del taller (exploración del proceso)

Tabla 13. Justificaciones del problema propuesto por profesora Nancy-ficha1 individual

Análisis de justificaciones Ficha 1										
	Caso1					Caso2				
Participante	No codificable	0	1	2	3	No codificable	0	1	2	3
P1			x				x			
P2			x			x				
P1 y P2										
P3	x								x	
P4			x					x		
P3 y P4										
P5				x					x	
P8				x					x	
P5 y P8										
P6		x					x			
P9	x					x				
P6 y P9										

Luego de haber sido presentada durante el taller la solución de la exploración inicial utilizando los diagramas de Venn y mostrando las justificaciones esperadas de cada proposición, se observa en la tabla 13 cierta mejora en sus justificaciones, concentrándose un buen número de ellos en los niveles 1 y 2.

Resultados de la etapa B2 y C1 del taller (exploración del proceso)

Tabla 14. Tabla de codificación para las justificaciones pepito y María.

Para analizar la justificación de Pepito

Reconoce como incorrecta	Hace notar la insuficiencia del caso particular	Da contraejemplo
A	B	C

Para analizar la justificación de María

Reconoce como incorrecta	Hace notar que es incompleta por considerar solo un caso particular	Propone alternativa orientada hacia análisis general
A	D	E

Tabla 15. Tabla de Resultados del análisis de las justificaciones dados por alumnos de la profesora Nancy-individual y parejas -ficha1

Participante individual	Justificación de Pepito Ficha1			Justificación de María Ficha1		
	A	B	C	A	D	E
P1	x	x		x	x	
P2	x	x				x
P3			x			x
P4	x		x			x
P5	x	x		x		x
P8	x	x		x		x
Total	5	4	2	3	1	5
En parejas						
P1 y P2	x		x			x
P3 y P4	x	x				x
P5 y P8	x		x	x		x
Total	3	1	2	1		3

El reconocer por parte de los participantes del taller que la justificación de Pepito y María sean incorrectas, los lleva a mejorarla y aplicar las sugerencias en el momento de resolver la exploración inicial, y esto se da con mayor claridad cuando analizan la justificación dada por María, en la que los participantes proponen con mayor frecuencia justificaciones orientadas al análisis general (nivel E).

Resultados de la etapa B3 y C2 del taller (exploración del proceso)

Tabla 16. Tabla de justificaciones de problema creado individualmente y en parejas ficha1

Análisis de justificaciones Ficha 1 –Creación individual y parejas										
	Crear Problema (caso1)					Crear Problema (caso2)				
Participante	No codificable	0	1	2	3	No codificable	0	1	2	3
P1	x							x		
P2			x			x				
P1 y P2		x					x			
P3				x		x				
P4			x					x		
P3 y P4				x				x		
P5				x					x	
P8			x					x		
P5 y P8			x					x		
P6		x					x			
P9	x					x				
P6 y P9		x					x			

En esta tabla se muestran los niveles de las justificaciones que presentan los participantes cuando crearon los problemas pre, donde se nota una positiva concentración de justificaciones en el nivel 1 y 2 que nos demuestra la mejora en dicha capacidad de justificar.

Tabla 17. Resultados de las justificaciones

Cuadro resumen trabajo individual – Ficha 1							
Participante	No relevante	Nivel 0	Nivel1	Nivel 2	Nivel 3	Total	
P1	1	1	2	0	0	4	
P2	2	0	2	0	0	4	
P3	2	0	0	2	0	4	
P4	0	0	4	0	0	4	
P5	0	0	0	4	0	4	
P6	0	4	0	0	0	4	
P7	0	0	0	0	0	0	
P8	0	0	2	2	0	4	
Total	5	5	10	8	0	28	

Son 2 justificaciones del problema de la profesora Nancy y 2 del problema creado por el participante individual. Aproximadamente el 64.2% de las afirmaciones son justificaciones (nivel 1, 2, 3).

Resultados de la etapa D1 del taller (exploración del proceso)

Tabla 18. Tabla de Codificación de las justificaciones que realizan los alumnos del profesor Pedro

Para analizar la justificación de Milca

Reconoce como incorrecta	Hace notar el error de la afirmación general	Da contraejemplo
A	F	C

Para analizar la justificación de Rufino

Reconoce como incorrecta	Hace notar la confusión entre n y n-1	Propone alternativa adecuada
A	H	I

Tabla 19. Tabla de Análisis de justificaciones de alumnos del profesor Pedro -fichas 2

parejas	Justificación de Milca Ficha2			Justificación de Rufino Ficha2			
	A	F	C	A	H	I	
P1 y P2	x		x	x	x		
P3 y P4	x		x	x	x		
P5 y P8	x		x			x	
Total	3		3	2	2	1	11

Se advierte según la Tabla 19, que hay un incremento en el uso del contraejemplo como justificación de una afirmación falsa. En términos generales, en las parejas que trabajaron la ficha 2, se encuentra un mejor uso de criterios para examinar las justificaciones de los alumnos. De 9 ítems en los que se reconoce el uso de criterios adecuados para analizar las justificaciones en los problemas de la ficha 1, se pasa a 12 ítems en la ficha 2.

Resultados de la etapa D2 del taller (exploración del proceso)

Tabla 20. Tabla de Justificaciones de los participantes en problema creado (Pre) - parejas de la ficha 2

Análisis de justificaciones en parejas - Ficha 2										
Participantes	Problema PRE caso1					Problema PRE caso2				
	No codificable	0	1	2	3	No codificable	0	1	2	3
P1 y P2				x		x				
P3 y P4			x			x				
P5 y P8					x					x
P6 y P9	x					x				

La tabla 20, sintetiza de forma cuantitativa los resultados obtenidos al clasificar las justificaciones frente al problema creado (Pre) en parejas, de la ficha 2

Tabla 21. Resultados obtenidos en las justificaciones frente al problema creado (Pre) en parejas, de la ficha 2.

Cuadro resumen actividad parejas – Ficha 2						
Participantes	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Total
P1 y P2	1	0	0	1	0	2
P3 y P4	1	0	1	0	0	2
P5 y P8	0	0	0	0	2	2
Total	2	0	1	1	2	6

Notamos que la pareja P5 y P8 presentan argumentos generales que cumplen con las características para considerarlos como justificaciones que se ubican en el nivel 3.

Resultados de la etapa E1 del taller (exploración final)

Tabla 22. Tabla para codificar justificaciones de problemas en exploración final.

Tabla de codificación de los niveles de justificación				
No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Los estudiantes dejan en blanco o afirman cualquier cosa menos el de acercarse a la tarea de justificar que se le solicita	Los estudiantes en este nivel parecen no ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación *matemática* para demostrar la verdad de una proposición o afirmación.	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática, pero sus justificaciones no son generales; en la mayoría de los casos, las justificaciones de los estudiantes están basadas empíricamente	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, e intentan producir tales argumentos por ellos mismos; los argumentos, sin embargo, no llegan a ser demostraciones aceptables.	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, y son capaces de producir exitosamente tales argumentos por ellos mismos.

Tabla 23. Distribución de las justificaciones emitidas por los participantes en la exploración final

Caso 1						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel1	Nivel2	Nivel3	Total
P1		x				
P2			x			
P3			x			
P4			x			
P5					x	
P6		x				
P7			x			
P8		x				
Total						
Caso 2						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel1	Nivel2	Nivel3	Total
P1			x			
P2			x			
P3	x					
P4		x				
P5					x	
P6			x			
P7				x		
P8			x			
Total						

En la tabla 23, se detecta una concentración de las justificaciones en el nivel 1 con respecto a los casos 1 y 2, pues se entiende que los participantes insisten en el uso de la verificación para dar sus justificaciones. Esto ocurre frecuentemente en el ejercicio justificativo al intentar generalizar, muchas veces se queda en la verificación de algunos casos particulares.

Tabla 24. Clasificación de Justificaciones en exploración final

Caso 3						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel1	Nivel2	Nivel3	Total
P1		x				
P2			x			
P3		x				
P4			x			
P5					x	
P6			x			
P7					x	
P8					x	
Total						
Caso 4						
Participante	No codificable	Nivel 0	Nivel1	Nivel2	Nivel3	Total
P1					x	
P2		x				
P3			x			
P4				x		
P5					x	
P6				x		
P7					x	
P8				x		
Total	1	7	12	4	8	32

Fuente : propia

En esta tabla 24 se observa que los niveles de justificación se han concentrado en los niveles 2 y 3, significando esto que se logra el desarrollo de la capacidad de justificación.

Tabla 25. Cuadro de resultados totales de la exploración final.

Cuadro de resultados de exploración final						
	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Totales
Totales	1	7	12	4	8	32

En la Tabla 25 se observa disminución en la cantidad de afirmaciones (nivel 0) por parte de los participantes que parecen no ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática para demostrar la verdad de una proposición, más bien aumentan las afirmaciones (nivel 3) que los participantes producen, siendo justificaciones aceptables dado que sus argumentos demuestran que una proposición o afirmación es verdadera en todos los casos.

Cuadro comparativo final de las justificaciones dadas durante el taller

Tabla 26. Análisis de las justificaciones al inicio y al final del proceso de la investigación.

Cuadro de resultados de exploración inicial (i)y exploración final (f) (Problema de fichas)						
	No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Totales
Exploración inicial (i)	0	12	7	9	4	32
Exploración final (f)	1	7	12	4	8	32
Observaciones	Aumento mínimo	Disminuyó los que no eran justificaciones	Aumentaron las justificaciones	Disminuyo las justificaciones	Aumento las justificaciones	

Destacamos aspectos claramente positivos:

- Disminución en el nivel 0; Aumento en el nivel 1; Aumento en nivel 3.
- La disminución en el nivel 2 también lo consideramos positivo en la medida en que refleja traslados al nivel 3.
- La cantidad de explicaciones que se consideran como justificaciones (1, 2, 3), según la matriz se incrementó.
- Las explicaciones que consideramos como demostraciones esperadas (nivel 3) se han duplicado de 4 a 8.

A continuación, detallaremos de lo que trató la socialización entre los participantes en nuestro taller que sirvió para consolidar saberes.

4.3.1.1 La socialización

Esta parte de las actividades la consideramos muy pertinente e importante, pues en ella se da la oportunidad de ejercitar el compartir con otros los nuevos saberes y experiencias logrados en la actividad que se está ejecutando, de esa manera se fortalece y consolidan muchos aspectos de cada participante, en ese momento. En ese sentido, para que este momento se dé adecuadamente, Malaspina (2013) manifiesta la siguiente estrategia de la socialización:

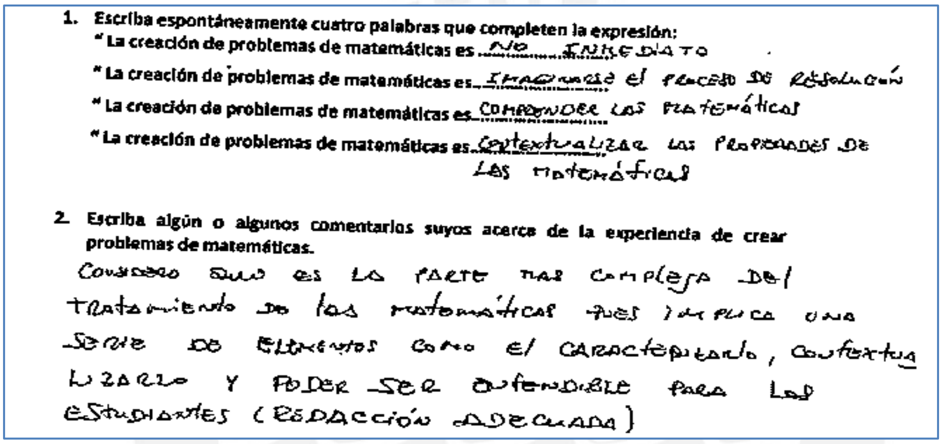
a) Según la disposición de tiempo y del número de grupos, se procederá a realizar exposiciones críticas de los grupos que resolvieron los problemas.

b) Promover el intercambio de opiniones

c) Revisar la redacción de los enunciados de los problemas expuestos y hacer los ajustes que se consideren necesarios

d) Redondear ideas o conceptos matemáticos que hayan surgido y evidenciar nuevos problemas como variación del problema inicial (los que haya previsto el profesor u otros que surjan en esta fase). (p.138)

Además de la socialización dada en el taller, se hicieron presentaciones expositivas de sus problemas creados por variación y sus justificaciones, se pudo levantar información a través de algunas preguntas objetivas sobre la experiencia de crear problemas y su influencia en la capacidad de justificación que habían experimentado. A continuación, algunas de las respuestas del participante P5:

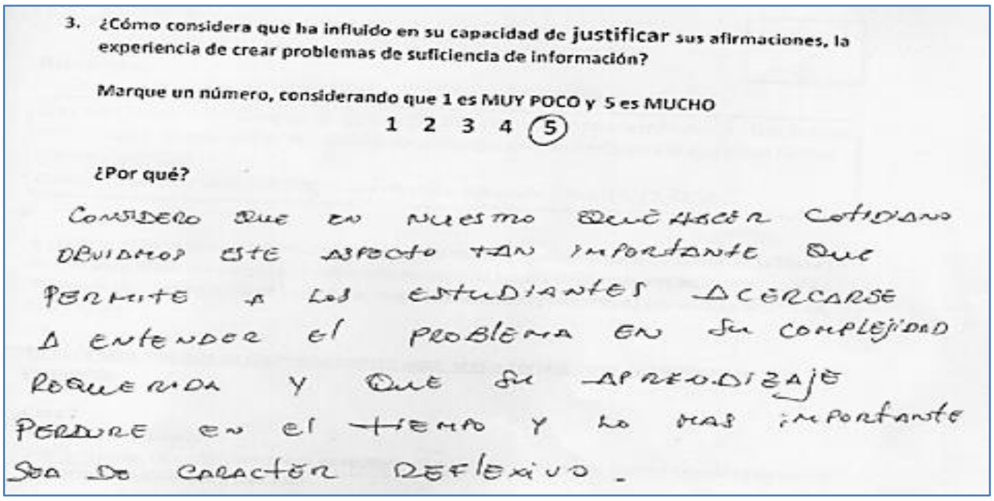


1. Escriba espontáneamente cuatro palabras que completen la expresión:
   " La creación de problemas de matemáticas es NO INMEDIATO
   " La creación de problemas de matemáticas es IMAGINARSE el PROCESO DE RESOLUCIÓN
   " La creación de problemas de matemáticas es COMPRENDER LAS MATEMÁTICAS
   " La creación de problemas de matemáticas es CONTEXTUALIZAR LAS PROPIEDADES DE LAS MATEMÁTICAS

2. Escriba algún o algunos comentarios suyos acerca de la experiencia de crear problemas de matemáticas.
   CONSIDERO QUE ES LA PARTE MAS COMPLEJA DEL TRATAMIENTO DE LAS MATEMÁTICAS PUES IMPLICA UNA SERIE DE ELEMENTOS COMO EL CARACTERIZARLO, CONTEXTUALIZARLO Y PODER SER ENTENDIBLE PARA LOS ESTUDIANTES (REDACCIÓN ADECUADA)

Figura 21. Respuesta en la socialización por P5 – primera parte

En la figura 21, según las respuestas con respecto a la creación de problemas, el participante es consciente de la complejidad de realizar esta actividad pues considera que son demandadas varias capacidades para quien crea el problema, pero en ningún momento afirma que es imposible.



3. ¿Cómo considera que ha influido en su capacidad de justificar sus afirmaciones, la experiencia de crear problemas de suficiencia de información?

Marque un número, considerando que 1 es MUY POCO y 5 es MUCHO

1 2 3 4 5

¿Por qué?

Considero que en nuestro quehacer cotidiano olvidamos este aspecto tan importante que permite a los estudiantes acercarse a entender el problema en su complejidad requerida y que su aprendizaje perdure en el tiempo y lo mas importante sea de caracter reflexivo.

Figura 22. Respuestas en la socialización de P5 – segunda parte

En la figura 22, la respuesta muestra la importancia que le da el participante a la actividad de crear problemas de suficiencia de información para influenciar la capacidad de justificar y que lo más importante es que considera que el aprendizaje razonado debe permanecer en el tiempo.

4.3.2 Análisis de las justificaciones dadas por dos participantes (P5 y P8)

En esta sección se realiza el análisis principal de los datos recogidos y organizados en el capítulo anterior, este análisis se llevará a cabo mediante los elementos teóricos considerados en el presente trabajo de investigación en el capítulo 2. En el capítulo anterior, utilizamos los procedimientos de exploración, evaluación y codificación de las justificaciones, propios de la metodología de análisis de contenido. Estos procedimientos correspondían al primer nivel de análisis propuesto y luego, llevaremos a cabo el segundo nivel de análisis llamado en nuestra metodología el análisis principal, fijando nuestra atención en las justificaciones codificadas en base a la matriz de niveles de justificación presentada en el capítulo 4. A continuación, se presenta el análisis de datos recogidos de dos participantes P5 y P8 los que presentan un claro desarrollo, y mejora en su capacidad de justificación durante el taller, esta capacidad en los participantes fue medida a través de los instrumentos mostrados en el capítulo anterior iniciando por la exploración inicial, exploración del proceso (ficha1 y ficha 2), para finalizar con la exploración final.

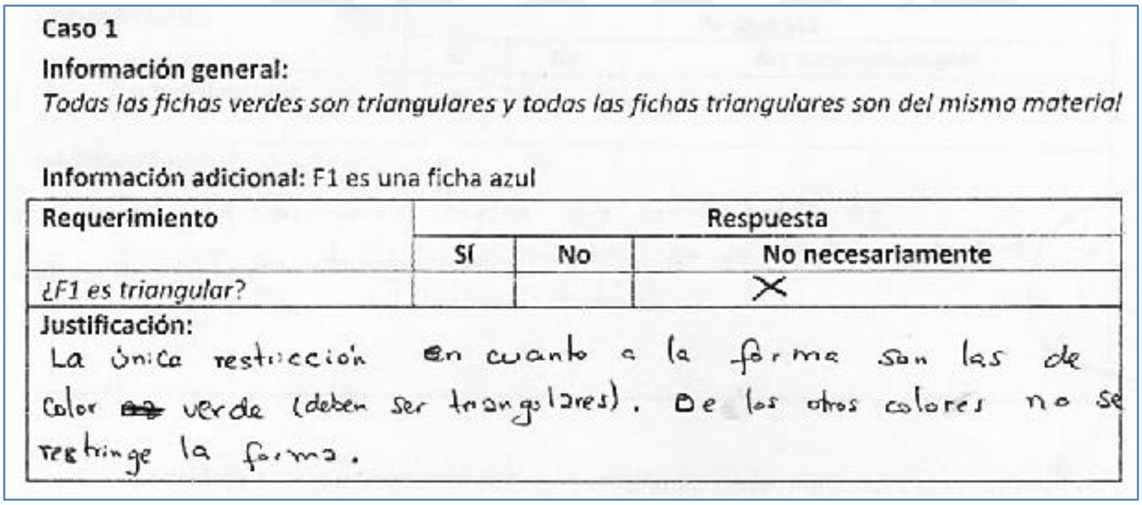
4.3.2.1 Análisis de las justificaciones del participante P5

Tabla 27. Codificación de niveles de justificación – exploración inicial

Tabla de codificación de los niveles de justificación				
No codificable	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Los estudiantes dejan en blanco o afirman cualquier cosa menos el de acercarse a la tarea de justificar que se le solicita	Los estudiantes en este nivel parecen no ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación *matemática* para demostrar la verdad de una proposición o afirmación.	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática, pero sus justificaciones no son generales; en la mayoría de los casos, las justificaciones de los estudiantes están basadas empíricamente	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, e intentan producir tales argumentos por ellos mismos; los argumentos, sin embargo, no llegan a ser demostraciones aceptables.	Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, y son capaces de producir exitosamente tales argumentos por ellos mismos.

Fuente: Adaptado de Bieda, Choppin y Knuth (en Blanton, et al., 2011, p. 154).

Análisis de las justificaciones del participante P5 en etapa A1 (exploración inicial)


Caso 1

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F1 es una ficha azul

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F1 es triangular?			X

Justificación:
La única restricción en cuanto a la forma son las de color ~~..~~ verde (deben ser triangulares). De los otros colores no se restringe la forma.

Figura 23. Justificación dada por el participante P5 en caso1 de exploración inicial.

Nivel 2. El participante es consciente de la necesidad de argumentar, su proposición es lógica y tiene la intención de generalizar.

Caso 2

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F3 y F4 son del mismo material.

Requerimiento	**Respuesta**		
	Sí	**No**	**No necesariamente**
¿F3 y F4 son triangulares?			X
Justificación: El hecho que F3 y F4 sean del mismo material no Condiciona que sean de la misma forma ni menos que sean triangulares.			

Figura 24. Justificaciones dadas por el participante P5 en caso 2 de la exploración inicial

Nivel 0. Su justificación no muestra un fuerte sustento para verificar su planteamiento, tal es así que no parece tener la necesidad de hacer una justificación matemática para demostrar la veracidad de lo propuesto.

Análisis de las justificaciones del participante P5 en etapa B1(exploración de proceso)

Actividades individuales

P5

1. Resuelva el problema propuesto por la profesora Nancy.

Caso 1

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

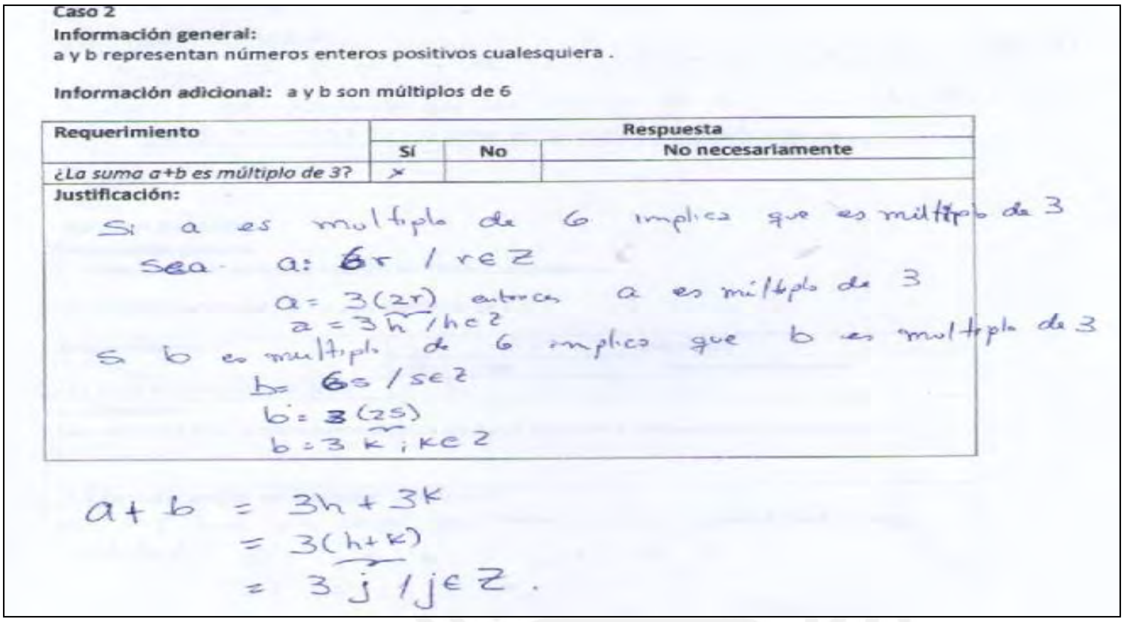
Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 6?			X

Justificación: caso 1) Tomemos el número 15 que cumple con la información general y adicional sin embargo 15 no es múltiplo de 6

caso 2) Tomemos el número 18 que cumple con la inform. gral y adicional; además 18 es múltiplo de 6

Figura 25. Justificaciones dadas por el participante P5 al resolver el problema de profesora Nancy Caso1.

Nivel 2. El participante recurre a casos particulares para verificar las condiciones del problema, presenta secuencia lógica, pero no concluye, es por ello que no llega a plantear una demostración formal. Los casos que presenta le llevan a dos respuestas distintas, lo que le lleva a dar la respuesta: no necesariamente.



Caso 2

Información general:

a y b representan números enteros positivos cualesquiera .

Información adicional: a y b son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?	x		

Justificación:

Si a es multiplo de 6 implica que es múltiplo de 3

Sea $a = 6r \,/\, r \in \mathbb{Z}$

$a = 3(2r)$ entonces a es múltiplo de 3

$a = 3h \,/\, h \in \mathbb{Z}$

Si b es multiplo de 6 implica que b es multiplo de 3

$b = 6s \,/\, s \in \mathbb{Z}$

$b = 3(2s)$

$b = 3k \,;\, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a+b &= 3h+3k \\ &= 3(h+k) \\ &= 3j \,/\, j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Figura 26. Justificaciones dadas por el participante P5 al resolver problema de profesora Nancy

Nivel 2. El participante muestra una justificación usando el álgebra y su conocimiento del objeto de divisibilidad es suficiente para resolver el problema, por ello la codificación a su justificación es la que corresponde a una cuasi demostración.

<u>Análisis de las justificaciones de pepito y Maria por P5 en etapa B2(exploración de proceso)</u>

En esta actividad el participante P5 analiza las justificación realizadas por alumnos (Pepito y María) de la profesora Nancy y para codificar su análisis diseñamos una matriz de codificación exclusivamente para usarla en el análisis cualitativo de las justificaciones dadas por el participante P5 sobre dichas justificaciones:

Tabla 28. Matriz de codificación para analizar justificación de Pepito y María.

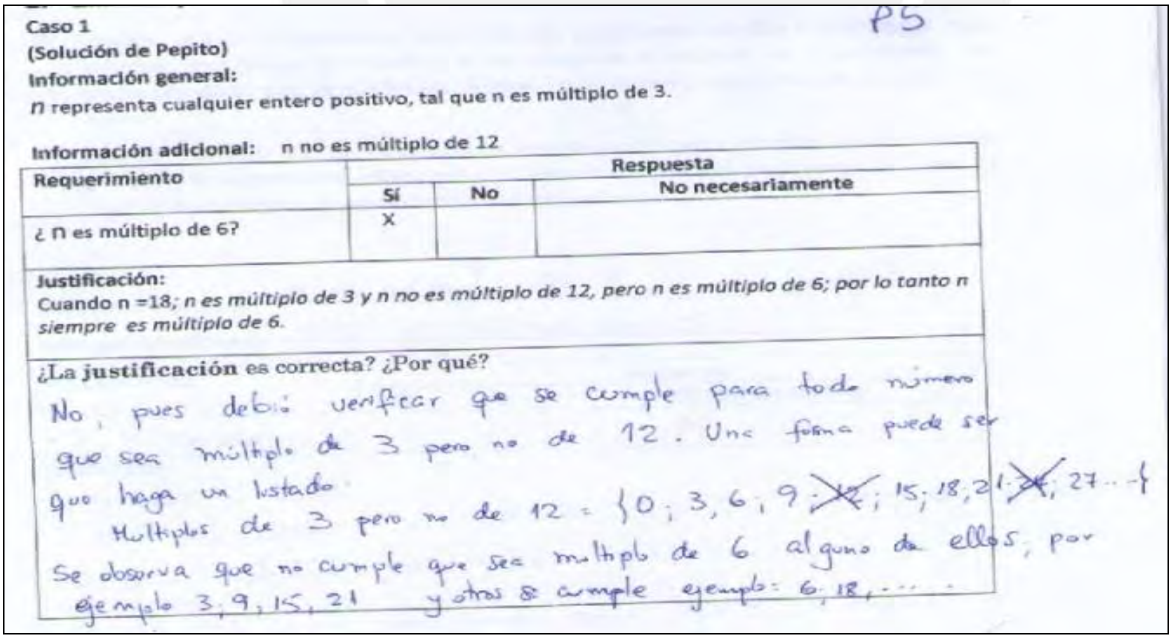
Para analizar la justificación de Pepito

Reconoce como incorrecta	Hace notar la insuficiencia del caso particular	Da contraejemplo
A	B	C

Para analizar la justificación de María

Reconoce como incorrecta	Hace notar que es incompleta por considerar solo un caso particular	Propone alternativa orientada hacia análisis general
A	D	E

Muestra de justificación por P5:



P5

Caso 1
(Solución de Pepito)
Información general:
n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 6?	X		

Justificación:
Cuando n =18; *n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6; por lo tanto n siempre es múltiplo de 6.*

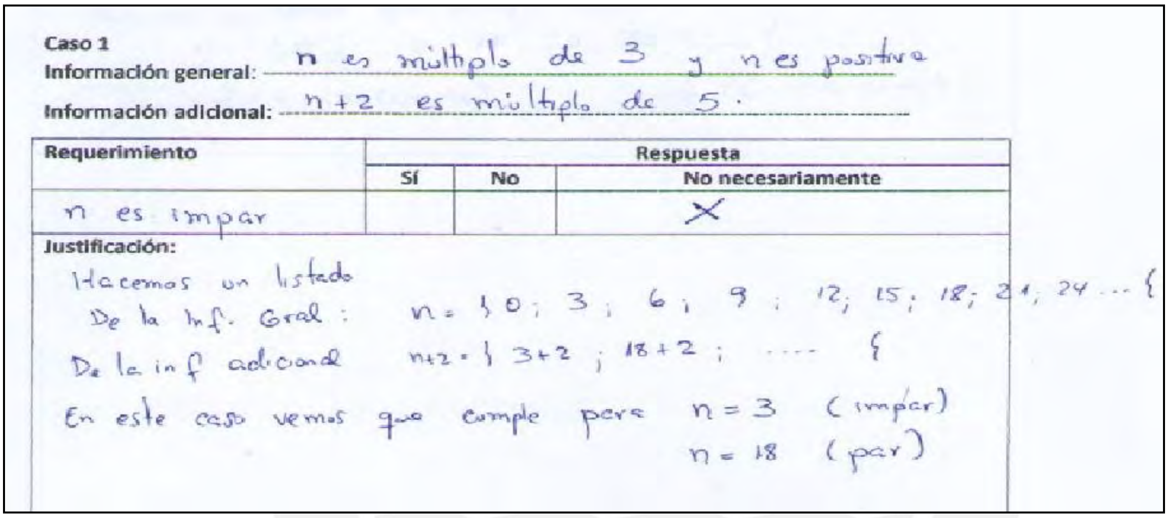
¿La **justificación** es correcta? ¿Por qué?
No, pues debió verificar que se cumple para todo número que sea múltiplo de 3 pero no de 12. Una forma puede ser que haga un listado
Múltiplos de 3 pero no de 12 = {0; 3, 6, 9; ~~12~~; 15; 18; 21; ~~24~~; 27 ... }
Se observa que no cumple que sea múltiplo de 6 alguno de ellos, por ejemplo 3, 9, 15, 21 y otros se cumple ejemplo: 6, 18, ...

Figura 27. Análisis de P5 sobre justificaciones de alumnos

Según la matriz mostrada en la Tabla 28, ubicamos en el indicador A y B la justificación dada por el participante P5. Reconoce como incorrecta la respuesta y hace notar la insuficiencia del caso particular.

Análisis de justificaciones del participante P5 en etapa B3 (exploración de proceso)

Muestra de justificación por P5:



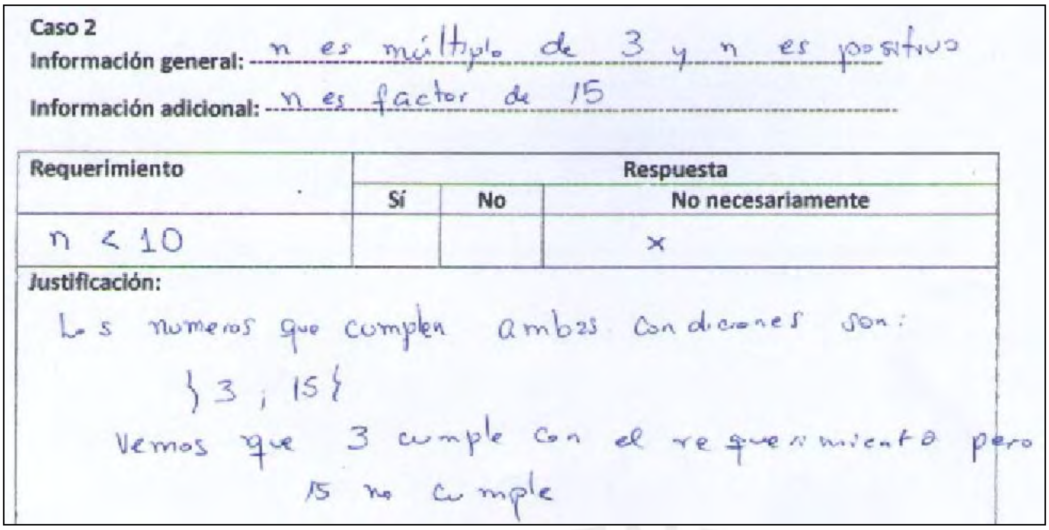
Caso 1
Información general: n es múltiplo de 3 y n es positivo
Información adicional: n + 2 es múltiplo de 5.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
n es impar			X

Justificación:
Hacemos un listado
De la inf. Gral: $n = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24 \ldots\}$
De la inf adicional $n+2 = \{3+2; 18+2; \ldots\}$
En este caso vemos que cumple para $n = 3$ (impar)
$n = 18$ (par)

Figura 28. Justificaciones dadas por el participante P5 al crear el problema Pre con respecto al problema de la profesora Nancy.

Nivel 2. El participante P5 crea un problema *pre* y lo justifica apoyándose en la verificación con casos particulares y concluye que para algunos valores de n estos son impares y existen otros valores de n pares. Propone verdades y mantienen una secuencia lógica en sus propuestas.



Caso 2

Información general: n es múltiplo de 3 y n es positivo

Información adicional: n es factor de 15

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
n < 10			x

Justificación:

Los numeros que cumplen ambas condiciones son:

{3 ; 15}

Vemos que 3 cumple con el requerimiento pero 15 no cumple

Figura 29. Justificaciones dadas por el participante P5 al crear el problema Pre con respecto al problema de la profesora Nancy.

Nivel 2. El problema *Pre* creado tiene los elementos básicos y su justificación se basa en verificar valores que cumplan con las informaciones general y adicional e intenta justificar adecuadamente.

Análisis de los participantes P5 y P8 sobre las justificaciones de los alumnos pepito y María en etapa C1 (exploración del proceso)

En esta parte, luego de que los participantes realicen el análisis de las justificaciones de alumnos, haremos la clasificación y diagnóstico de la justificación de su análisis.

Caso 1
(Solución de Pepito)
Información general:
n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 6?	x		

Justificación:
Cuando n =18, *n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6 ; por lo tanto n siempre es múltiplo de 6.*

¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?
No; pues tomó un solo caso pero no verificó con otros casos como por ejemplo: 9; 15; 21; 27 ... que no son múltiplos de 6 pero sí de 3. Por lo que la respuesta correcta sería no necesariamente.

Figura 30. Análisis realizado por los participantes P5 y P8 (en parejas) sobre las justificaciones de los alumnos – Caso 1.

Indicador A y C. Reconoce como incorrecta la respuesta y da contraejemplos para justificar una proposición.

Caso 2
(Solución de María)
Información general: *a* y *b* representan números enteros positivos cualesquiera

Información adicional: *a* y *b* son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?	x		

Justificación:
Cuando a=6 y b=12 ambos son múltiplos de 6 y la suma a+b me resulta un múltiplo de 3.

¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué? La respuesta sí pero la justificación No: pues no es completa.
Una forma de justificar sería:
$a = 3(2k) \ / k \in \mathbb{Z}$
$b = 3(2h) \ / h \in \mathbb{Z}$

2

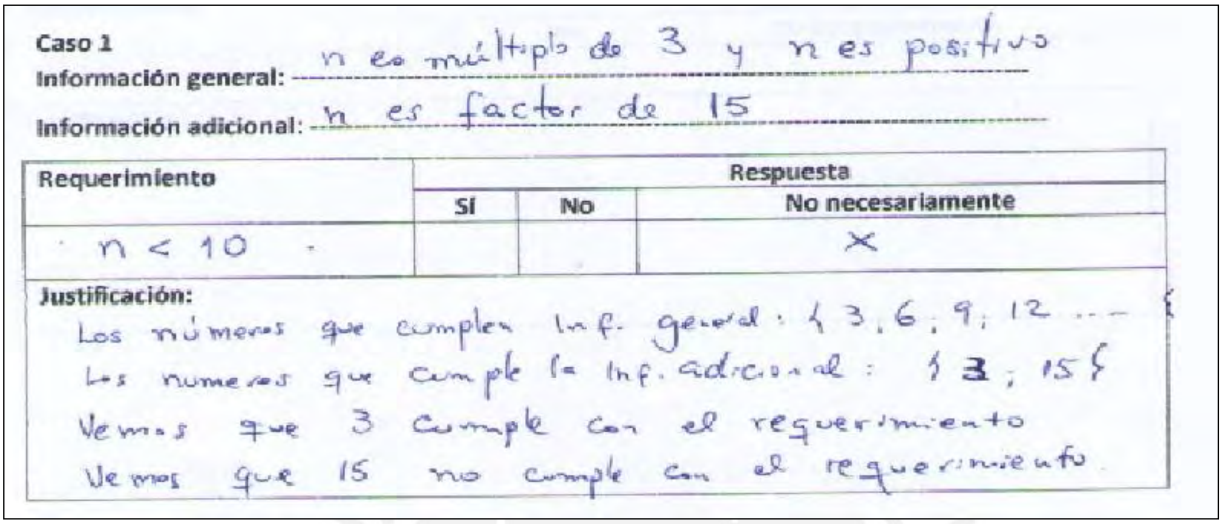
Se tiene
$a + b = 3(\underbrace{2k+2h})$
$= 3(s) \ / s \in \mathbb{Z}$.

Figura 31. Análisis realizado por los participantes P5 y P8 (en parejas) sobre las justificaciones de los alumnos – Caso 2.

Indicador A, E. Reconoce como incorrecta la respuesta y propone alternativa orientada hacia análisis general.

Análisis de justificaciones de P5 y P8 (en parejas) en etapa C2 (exploración del proceso)

Análisis de las justificaciones dadas por los participantes P5 y P8 en la creación de los problema pre (actividad en parejas) :



Caso 1

Información general: n es múltiplo de 3 y n es positivo

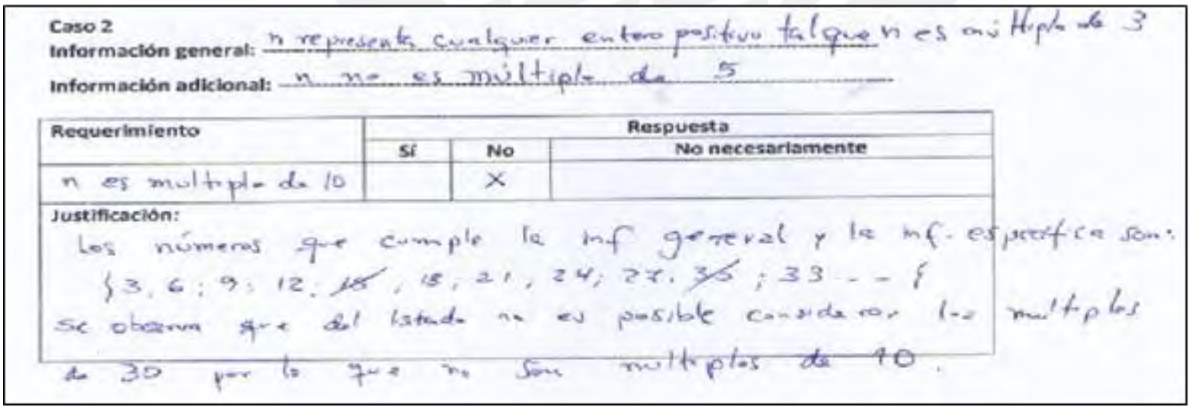
Información adicional: n es factor de 15

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
n < 10			X

Justificación:
Los números que cumplen Inf. general: {3, 6, 9, 12 ... }
Los numeros que cumple la Inf. adicional: {3; 15}
Vemos que 3 cumple con el requerimiento
Vemos que 15 no cumple con el requerimiento.

Figura 32. Justificaciones dadas por los participantes P5 y P8 en la creación de los problemas pre.

Nivel 1.Los elementos fundamentales de un problema pre están presentes en la creación del problema realizado por la pareja P5 y P8, pero lo que no presenta es una justificación general y no ha utilizado los diagramas de Venn para respaldarla.



Caso 2

Información general: n representa cualquier entero positivo tal que n es múltiplo de 3

Información adicional: n no es múltiplo de 5

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
n es multiplo de 10		X	

Justificación:
Los números que cumple la inf general y la inf. específica son: {3, 6; 9; 12; ~~15~~, 18, 21, 24; 27. ~~30~~; 33 ... }
Se observa que del listado no es posible considerar los multiplos de 30 por lo que no son multiplos de 10.

Figura 33. Justificaciones dadas por los participantes P5 y P8 en la creación de los problemas pre.

Nivel 1. Los elementos fundamentales de un problema pre están presentes en la creación del problema realizado por la pareja P5 y P8, presenta una justificación general pero no utiliza diagrama de Venn para respaldarla.

<u>Análisis de las justificaciones de Milca y Rufino por los participantes P5 y P8 en etapa D1 (exploración del proceso)</u>

En esta última parte del análisis de datos solo se pidió hacer el análisis en parejas sobre las justificaciones hechas por los alumnos del profesor Pedro (Milca y Rufino), donde se utilizó su propia matriz de codificación, mostrada a continuación:

Tabla 29. Matriz de codificación para analizar justificaciones de Milca y Rufino

Para analizar la justificación de Milca

Reconoce como incorrecta	Hace notar el error de la afirmación general	Da contraejemplo
A	F	C

Para analizar la justificación de Rufino

Reconoce como incorrecta	Hace notar la confusión entre *n* y *n*-1	Propone alternativa adecuada
A	H	I

A continuación, presentamos el análisis de P5 y P8 sobre justificaciones realizadas por alumnos (Milca y Rufino):

Caso 1
(Solución de Milca)
Información general: n representa un número entero positivo múltiplo de 4.
Información adicional: n es múltiplo de 6.

Requerimiento	Respuesta		
	Si	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 24?	X		

Justificación :
Todo número múltiplo de 4 y a la vez múltiplo de 6, siempre resulta múltiplo de 6 *por 4*.

¿La **justificación** del alumno es correcta? ¿Por qué?

No necesariamente pues de acuerdo al grafico se observa que n puede ser 12 que cumple las dos informaciones pero no es multiplo de 24

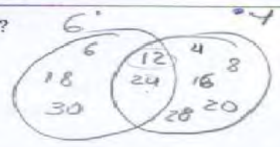
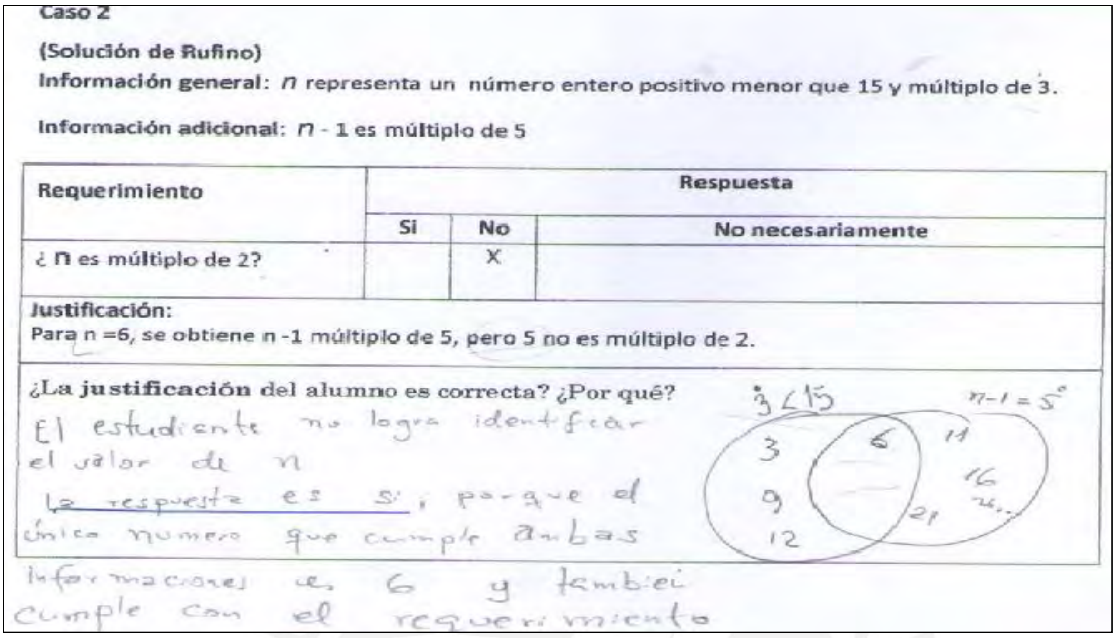


Figura 34. Análisis realizado por los participantes P5 y P8 (en parejas) sobre las justificaciones de los alumnos.

Indicador A, C. Reconoce como incorrecta la respuesta y da un contraejemplo para analizar la justificación de Milca.



Caso 2

(Solución de Rufino)

Información general: n representa un número entero positivo menor que 15 y múltiplo de 3.

Información adicional: n - 1 es múltiplo de 5

Requerimiento	Respuesta		
	Si	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 2?		X	

Justificación:
Para n =6, se obtiene n -1 múltiplo de 5, pero 5 no es múltiplo de 2.

¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?

El estudiante no logra identificar el valor de n
La respuesta es si, porque el único numero que cumple ambas informaciones es 6 y tambiei cumple con el requerimiento

Figura 35. Análisis realizado por los participantes P5 y P8 (en parejas) sobre las justificaciones de los alumnos.

Indicador I. El participante propone alternativa adecuada para analizar la justificación del alumno Rufino.

Tabla 30. Cuadro de resultados del análisis de las justificaciones de alumnos.

	Individual P5		Pareja P5 y P8			
	Ficha 1		Ficha 1		Ficha 2	
	Pepito	María	Pepito	María	Rufino	Milca
Nivel de codificación	A,B	A,E	A,C	A,E	A,C	I
	Individual P8		Pareja P5 y P8			
	Ficha 1		Ficha 1		Ficha 2	
	Pepito	María	Pepito	María	Rufino	Milca
Nivel de codificación	A,B	A,E	A,C	A,E	A,C	I

En la tabla se observa que, en el trabajo individual sobre el análisis de la justificación de los alumnos Pepito y María, se logran los mismos indicadores, pero notamos que mejoran dichos indicadores cuando se trabaja en pareja, y esto nos confirma que el trabajo colaborativo (en parejas) facilita el desarrollo y aprendizaje para realizar justificaciones.

<u>Análisis de justificaciones de P5 y P8 (en parejas) en etapa D2 (exploración del proceso)</u>

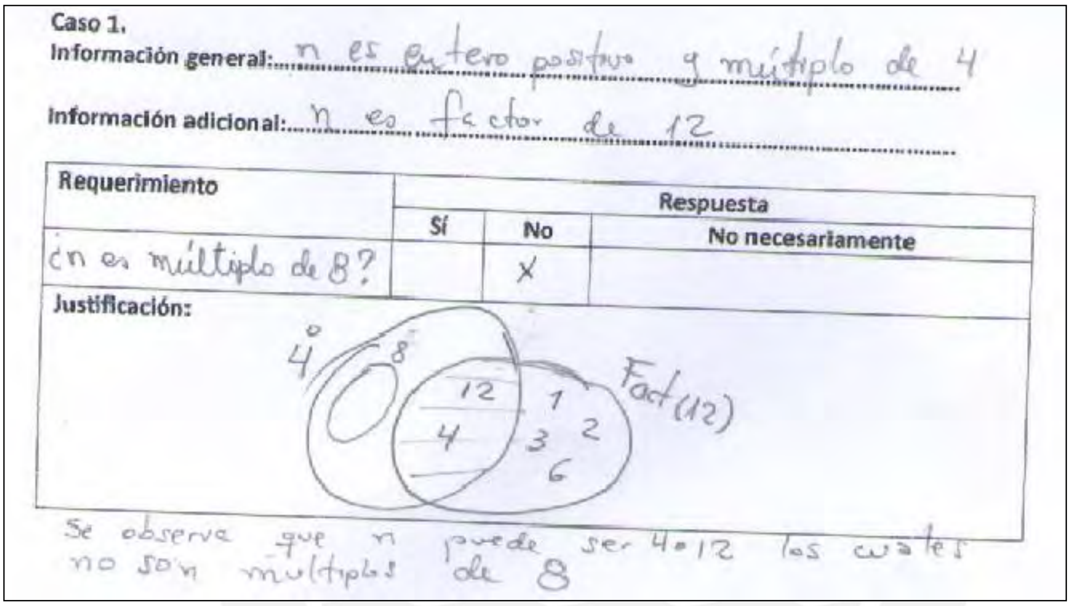


Figura 36. Justificaciones dadas por los participantes P5 y P8 en la creación de los problemas .

Nivel 3. Los participantes P5 y P8 presentan una justificación esperada, ideal, utilizando recursos gráficos en un contexto conjuntista que fue sugerido en el taller.

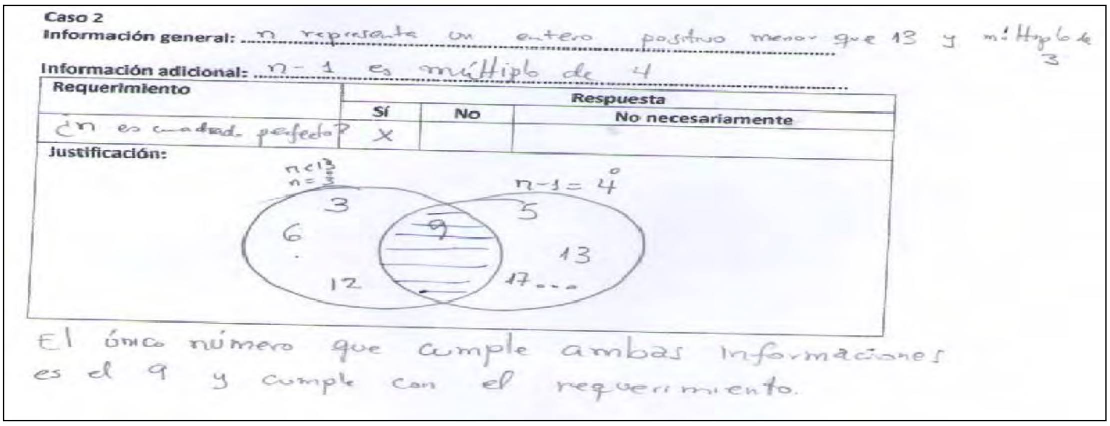


Figura 37. Justificaciones dadas por los participantes P5 y P8 en la creación de los problemas pre.

Nivel 3. Los participantes P5 y P8 presentan una justificación esperada, ideal, utilizando recursos gráficos en un contexto conjuntista que les sugerimos en el taller.

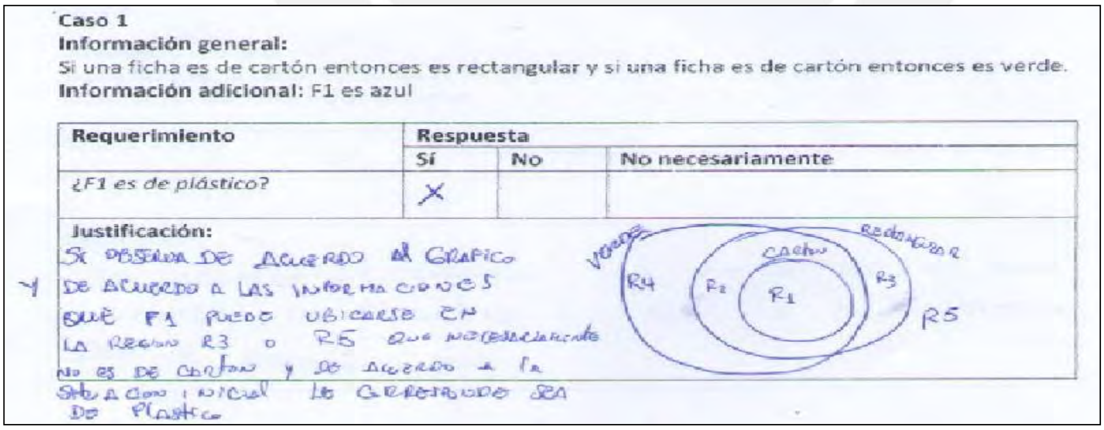
Tabla 31. Justificaciones de pareja P5 y P8 en problema PRE

	Justificaciones de pareja P5 y P8 en problema PRE			
	Ficha 1		Ficha2	
	Caso1	Caso2	Caso1	Caso2
Nivel de codificación	1	1	3	3

En la tabla 31 notamos un desarrollo en la capacidad de justificación en el trabajo de pareja, inicialmente los dos casos eran de nivel 1 en la ficha 1, pero al final del taller cuando se trabaja en la ficha 2 en parejas se logra un mejor nivel de justificaciones, los dos casos se ubican en nivel 3, esto nos da indicios que el medio que estamos usando (creación de problemas) y el trabajo colaborativo, favorecen el desarrollo de la justificación.

<u>Análisis de las justificaciones del participante P5 en la etapa E1 (exploración final)</u>

En la siguiente figura mostramos la respuesta y justificación del caso 1 de la exploración final por parte del participante P5:

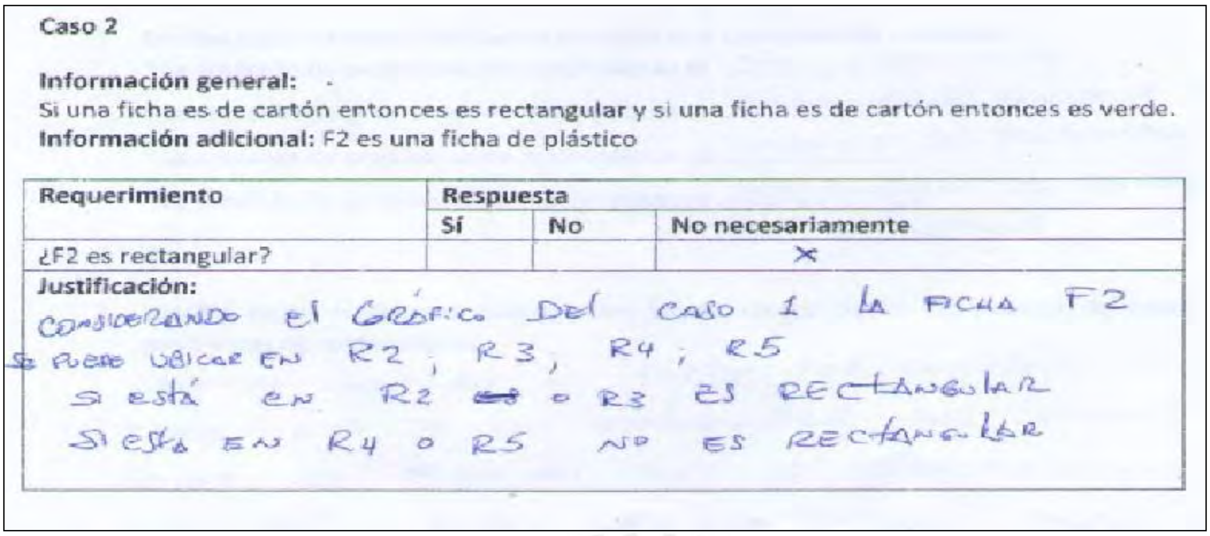

Caso 1
Información general:
Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.
Información adicional: F1 es azul

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F1 es de plástico?	X		

Justificación:
Se observa de acuerdo al grafico y de acuerdo a las informaciones que F1 puede ubicarse en la region R3 o R5 que necesariamente no es de carton y de acuerdo a la situación inicial lo garantizado sea de plastico

Figura 38. Justificaciones dadas por el participante P5 en la exploración final (nivel 3).

El participante establece proposiciones correctas en base a la representación gráfica que utiliza para plantear su justificación, y su necesidad de plantear un argumento general hace que se apoye en el uso de diagramas de Venn, que expresan verdades acabadas.



Caso 2

Información general:
Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.
Información adicional: F2 es una ficha de plástico

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F2 es rectangular?			X

Justificación:
CONSIDERANDO EL GRÁFICO DEL CASO 1 LA FICHA F2
SE PUEDE UBICAR EN R2, R3, R4, R5
SI ESTÁ EN R2 O R3 ES RECTANGULAR
SI ESTÁ EN R4 O R5 NO ES RECTANGULAR

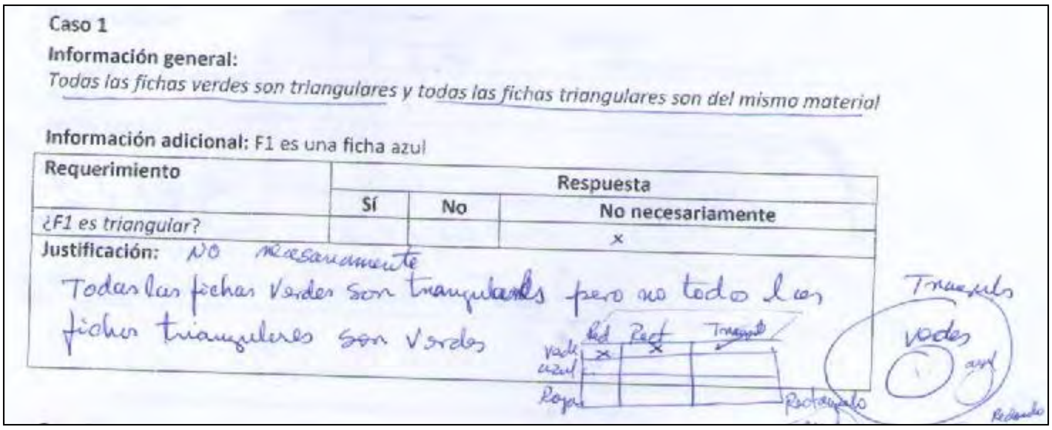
Figura 39. Justificaciones dadas por el participante P5 en la exploración final (nivel 3).

En esta justificación el participante es consciente de la necesidad de un argumento general y eso lo logra con el apoyo de su representación gráfica, donde se pueden ver las zonas donde argumenta que presentan elementos con respuesta no necesariamente, dado que la respuesta al requerimiento puede ser afirmativa o negativa.

4.3.2.2 Análisis de las justificaciones dadas por el participante P8

Luego de la exploración inicial el participante P8 trabajó individualmente con cada una de las exploraciones diseñadas por nosotros, con el propósito de aplicar un análisis comparativo del nivel de las justificaciones previamente clasificadas y codificadas. De esa manera, pudimos darnos cuenta del desarrollo respectivo, comparando la exploración de inicio y del final, analizando las justificaciones en pleno proceso, trabajando individualmente o parejas, y la comparación entre los análisis de las justificaciones de los alumnos por parte de los participantes P5 y P8.

Análisis de las justificaciones del participante P8 en la etapa A1 (exploración inicial)



Caso 1

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F1 es una ficha azul

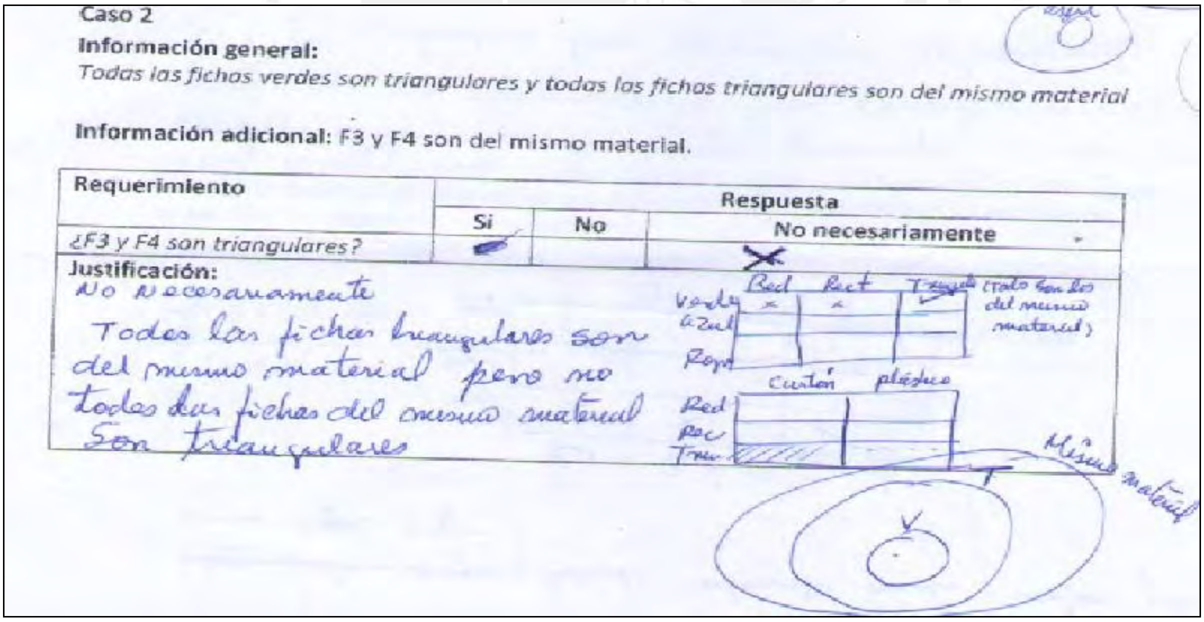
Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F1 es triangular?			x

Justificación: No necesariamente

Todas las fichas verdes son triangulares pero no todos las fichas triangulares son verdes

Figura 40. Justificaciones dadas por el participante P8 en la exploración inicial (nivel 3).

El participante justifica con la intención de presentar un argumento general y se apoya en gráficos que permiten visualizar lo que se quiere plantear como justificación.



Caso 2

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F3 y F4 son del mismo material.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F3 y F4 son triangulares?			X

Justificación: No necesariamente

Todas las fichas triangulares son del mismo material pero no todas las fichas del mismo material son triangulares

Figura 41. Justificaciones dadas por el participante P8 en la exploración inicial (nivel 2).

El uso de representaciones gráficas le permite al participante hacer una correcta justificación de su respuesta, permitiendo que las informaciones dadas en este problema (informaciones general y adicional) sean la base para llegar a una conclusión verdadera. El participante muestra intención de presentar un argumento general.

Análisis de las justificaciones del participante P8 en la etapa B1(exploración del proceso)

1. Resuelva el problema propuesto por la profesora Nancy.

Caso 1

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 6?			×

Justificación: no necesariamente porque para que "n" múltiplo de 6 sea múltiplo de 3 y que no sea múltiplo de 12 se tendría en cuenta lo sgte ⇒ {3, 6, 9, ~~12~~, 15, 18, 21, ~~24~~, 27, 30, 33, ~~36~~, 39, 42, 45, ~~48~~ ...

n = 6, 18, 30, 42, ... pero 9, 15, 21, 27 no son múltiplos de 6. Por lo tanto no necesariamente n es múltiplo de 6.

Figura 42. Justificaciones dadas por el participante P8 al resolver problema de profesora Nancy

Nivel 2. El proceso de justificación del participante se apoya en casos particulares que satisfacen ambas condiciones general y adicional, pero sabemos que el requerimiento no se responde con una única respuesta particular , el participante no generaliza.

Caso 2

Información general:

a y b representan números enteros positivos cualesquiera .

Información adicional: a y b son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?			

Justificación:

$\mathbb{Z}^+$ $a = 6k_1$ y $b = 6k_2 \Rightarrow 6k_1 + 6k_2$

$6(k_1 + k_2)$

$3 \cdot 2(k_1 + k_2)$

Si a y b son múltiplos de 6 necesariamente su suma es múltiplo de 3 como se demuestra arriba.

Figura 43. Justificaciones dadas por el participante P8 al resolver problema de profesora Nancy

Nivel 2. Declarar una verdad matemática de memoria no es una justificación de dicha afirmación, el participante trabaja algebraicamente, de forma correcta, intentando generalizar, pero no culmina satisfactoriamente redondeando la idea original.

Análisis de las justificaciones de Pepito y María por P8 en etapa B2(exploración del proceso)

Caso 1 P8

(Solución de Pepito)

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 6?	x		

Justificación:

Cuando n =18; *n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6; por lo tanto n siempre es múltiplo de 6.*

¿La justificación es correcta? ¿Por qué?

No es correcta la justificación porque él (Pepito) está tomando solo un caso de múltiplo de 6 que no es múltiplo de 12, por ejemplo 9,15,21,27 no son múltiplos de 6 pero si de 3. entonces no necesariamente se cumple que n sea múltiplo de 6 siempre. La respuesta correcta sería "No necesariamente"

Figura 44. Análisis de P8 sobre justificaciones de alumnos.

Indicador A y B. Reconoce como incorrecta la respuesta y hace notar la insuficiencia del caso particular.

Caso 1

Información general: n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3

Información adicional: "n" no es múltiplo de 15

Requerimiento	Respuesta		
	Si	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 30?		X	

Justificación:

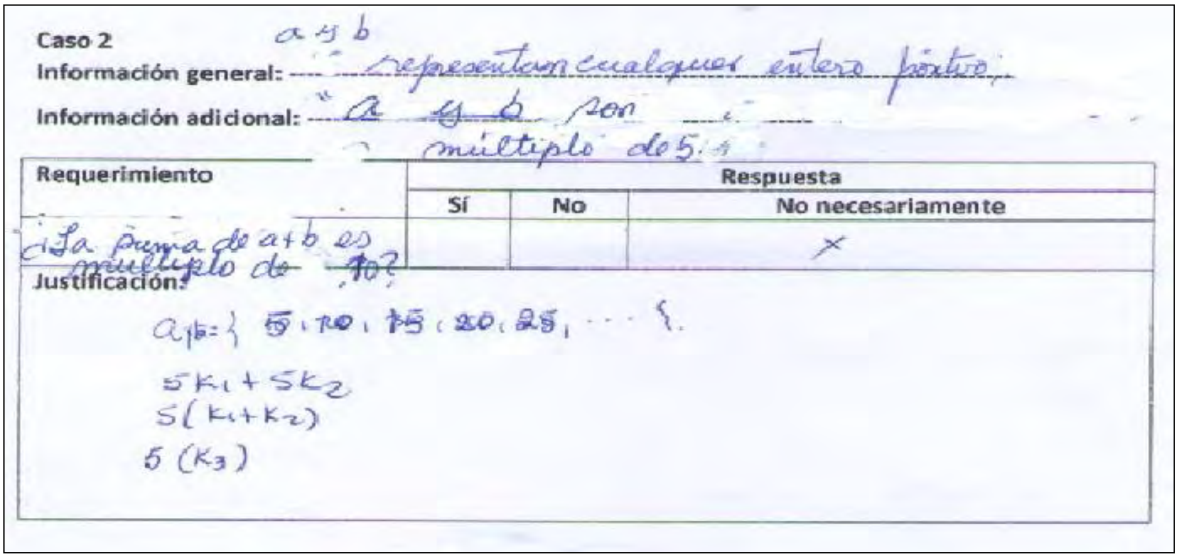
{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27 ... }

No se cumple.

Figura 45. Justificaciones dadas por el participante P8 al crear el problema Pre.

Nivel 1. No le parece al participante ser consciente de justificar la conjetura de forma rigurosa haciendo generalizaciones, más bien opta por apoyarse solo en casos de validación que satisfacen la información general y adicional del problema creado.


Caso 2

Información general: a y b representan cualquier entero positivo.

Información adicional: a y b son múltiplo de 5.

Requerimiento	Sí	No	No necesariamente
¿La suma de a+b es múltiplo de 10?			x

Justificación:

$a, b = \{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$

$5k_1 + 5k_2$

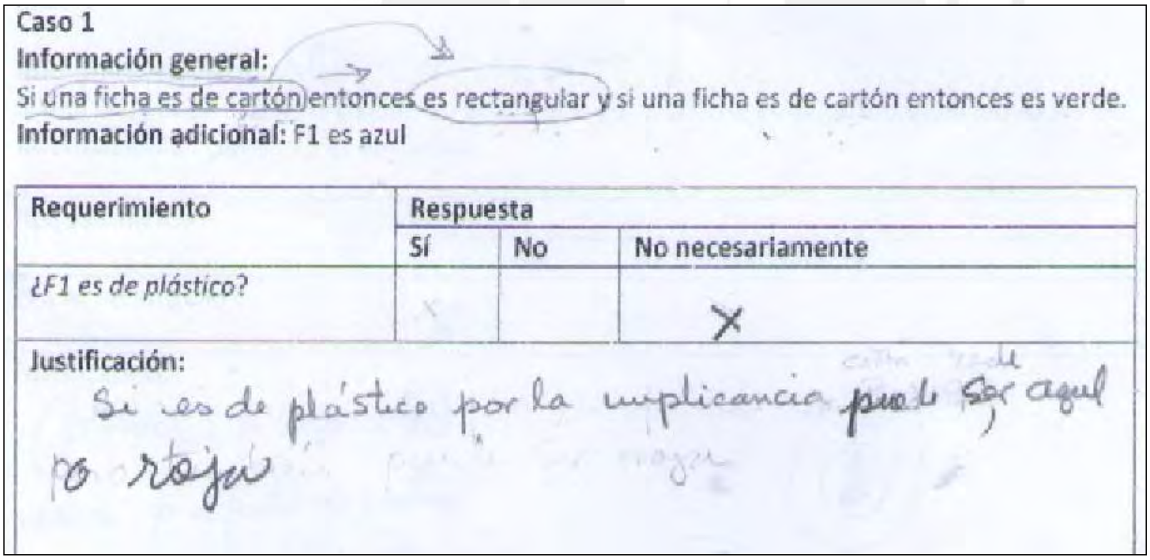
$5(k_1 + k_2)$

$5(k_3)$

Figura 46. Justificaciones dadas por el participante P8 al crear el problema Pre.

Nivel 1. Intenta demostrar apoyándose en el álgebra para generalizar, empieza bien, pero no concluye la idea.

Análisis de las justificaciones del participante P8 en la etapa E1 (exploración final)


Caso 1

Información general:

Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.

Información adicional: F1 es azul

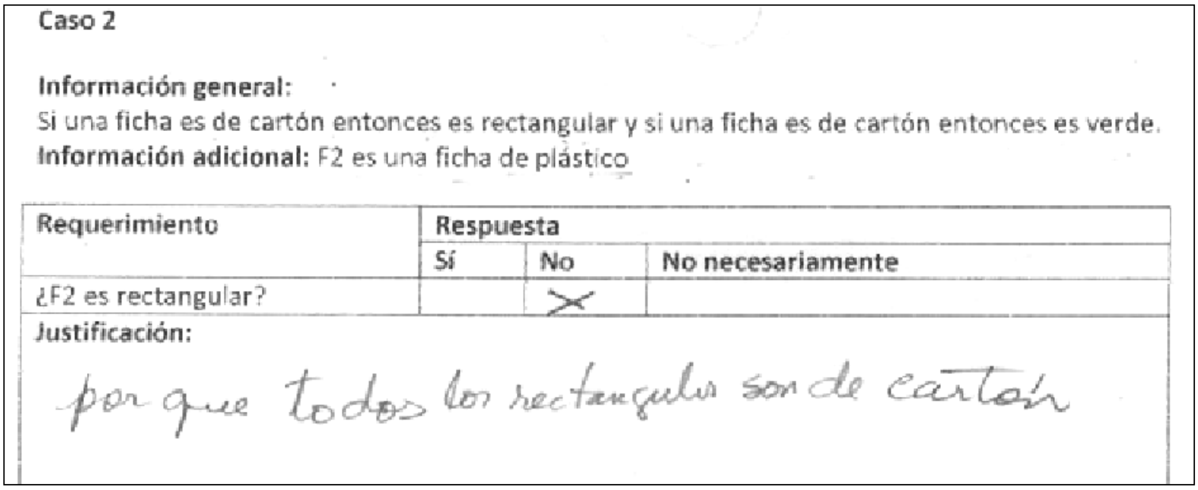
Requerimiento	Sí	No	No necesariamente
¿F1 es de plástico?			X

Justificación:

Si es de plástico por la implicancia puede ser azul o rojo

Figura 47. Justificaciones dadas por el participante P8 en la exploración final.

Nivel 0. El participante plantea una respuesta incorrecta y que no se entiende qué plantea como intento de justificación.



Caso 2

Información general:
Si una ficha es de cartón entonces es rectangular y si una ficha es de cartón entonces es verde.
Información adicional: F2 es una ficha de plástico

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F2 es rectangular?		X	

Justificación:
por que todos los rectangulo son de carton

Figura 48. Justificaciones dadas por el participante P8 en la exploración final.

Nivel 1. La respuesta es incorrecta porque está cometiendo el error de considerar el requerimiento como información.

Tabla 32. Cuadro resumen de justificaciones realizadas de forma individual por P5 y P8.

	Justificaciones realizadas de forma individual por el participante P5											
	Exploración Inicial				Exploración del proceso Ficha1				Exploración Final			
	Caso1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Ficha1 -problema de profesora Nancy		Ficha1- problema Pre para problema de prof. Nancy		Caso1	Caso2	Caso3	Caso4
Nivel de justificación	2	0	2	3	2	2	2	2	3	3	3	3
	Justificaciones realizadas de forma individual por el participante P8											
Nivel de justificación	3	2	2	3	2	2	1	1	0	1	3	2

Fuente: Propia

En el trabajo individual notamos que el participante P5 tiene una buena capacidad de justificación durante todas las actividades que involucra trabajo individual, mientras que el participante P8 tiene una capacidad promedio de nivel 2, pero observamos que P5 influye positivamente en P8 cuando realizan el trabajo en parejas, ratificando la ventaja que tiene realizar la actividad de justificación de forma colaborativa.

CAPÍTULO 5

CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo damos a conocer las conclusiones respecto a los objetivos establecidos en el capítulo1 y, además, brindamos algunas sugerencias que consideramos útiles para futuras investigaciones que enfoquen problemáticas relacionadas con la justificación matemática y su desarrollo.

5.1 Conclusiones

- **En relación al primer objetivo específico:**

Analizar la capacidad inicial de los profesores de Educación Secundaria de la muestra, para justificar proposiciones condicionales.

Consideramos que este objetivo se ha logrado y podemos afirmar que la capacidad inicial de justificación de proposiciones condicionales de los profesores de la muestra no es alta, pues según la tablas 10 y 11, solo 4 de los 32 casos logra el nivel 3 según la categorización dada en la matriz de Bieda, Chopin y Knuth, presentada en la tabla 9. Además, se observa que 12 de los 32 casos de justificación realizados por los participantes corresponden al nivel 0, los cuales pertenecen a los participantes que no parecen ser conscientes de proporcionar una justificación matemática para demostrar la verdad de una proposición o afirmación.

- **En relación al segundo objetivo específico:**

Explicitar los niveles de las justificaciones de los profesores de la muestra, en las experiencias didácticas relacionadas con creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad.

Consideramos que este objetivo se ha cumplido y, por ello, podemos afirmar que la capacidad de justificación de proposiciones condicionales de los profesores de la muestra no fue alta al inicio, pero conforme se involucraban con el proceso de la creación de problemas, la capacidad de justificación empezó a desarrollarse en algunos participantes, iniciándose en el trabajo individual y consolidándose en el trabajo en parejas. Por lo tanto, esto nos confirma la relevancia que tiene el trabajo colaborativo en el proceso enseñanza – aprendizaje, que se refleja en la mejora de la capacidad de justificación que se puede visualizar en función de las frecuencias según el nivel clasificatorio de las justificaciones que son mostradas en las tablas 25 y 26.

- **En relación al tercer objetivo específico**:

Identificar, en los profesores de secundaria de la muestra, los cambios en la capacidad de justificación, luego de las experiencias de creación de problemas de suficiencia de información, aplicando la estrategia EPP.

Existen indicios para afirmar que la creación de problemas mediante la estrategia EPP podría ser considerada como un medio para desarrollar la capacidad de justificación matemática en los profesores. Esta afirmación la hacemos con base en las comparaciones de los niveles de justificación que tuvieron la mayoría de los participantes al inicio y al final del taller, mostrándose esto objetivamente a través de los cuadros de resultados presentados en la tabla 26 de nuestra investigación.

- **En relación al objetivo general**

El cumplimiento de los objetivos específicos, el análisis global cualitativo hecho sobre toda la muestra que se presenta en la Tabla 24 y el análisis individual de los participantes P5 y P8 mostrado en las Tablas 31 y Tabla 32 nos permiten afirmar que hemos cumplido con el objetivo general de esta investigación: *"Analizar cómo mejora la capacidad de justificación, mediante la creación de problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad, en los profesores de Educación Secundaria."*

5.2 Comentarios y Recomendaciones

- La estrategia *EPP* fue pertinente para estimular la capacidad de crear problemas de suficiencia de información sobre divisibilidad, porque presenta pasos sencillos, que facilitó a los participantes el apropiarse de los términos y secuencia a seguir. Además, permitió que los participantes, de acuerdo con el avance en la aplicación de las actividades, mejoraran el nivel de sus justificaciones en los problemas que creaban.

- Usar un formato de presentación de los problemas, construido y modificando el formato usado por Echeverry, Molina, Samper, Perry, y Camargo (2012) (ver Figura 4) y reajustado después del taller piloto (ver anexo A.3), resultó altamente favorable en el taller por la rápida comprensión y apropiación del modelo por parte de los profesores. Es un formato a usarse también en las aulas.

- Al final de las actividades los participantes, opinaron que la estrategia *EPP* para la creación de problemas por *Variación* es apropiada y pertinente, porque los pasos para crear son sencillos. De la misma manera, opinaron que la estrategia permite integrar las matemáticas con otras áreas del conocimiento y para nuestra investigación la inclusión de pedir justificar fue original y retadora para muchos de los participantes.
- Los participantes, manifestaron que les parecía interesante el proceso de la creación de problemas; afirmaron, muchos de ellos, también no haber tenido nunca alguna experiencia con dicha actividad de crear problemas. En la etapa de socialización los profesores comentaban su intención de utilizar la creación de problemas de suficiencia de información con otros objetos matemáticos para desarrollar la capacidad de justificación de sus alumnos en clase.
- Los participantes manifestaron al término del taller, la intención de usar la estrategia *EPP* aprendida, como una oportunidad para mejorar sus procesos de enseñanza y aprendizaje, al modificar de manera adecuada y pertinente problemas de difícil solución para los estudiantes (creación de *Problemas Pre).*
- Debemos señalar que los resultados obtenidos y analizados, en donde nuestra unidad de análisis es la justificación, se deben considerar como indicios positivos para el cumplimiento de nuestro objetivo. Afirmaciones de carácter general requieren una muestra seleccionada con criterios técnicos, un taller con mayor tiempo de duración, que incluya por lo menos una sesión previa para familiarizarlos con los problemas de suficiencia de información, antes de la actividad propiamente dicha de creación de problemas y de justificación.
- Luego de realizar nuestra investigación, podemos afirmar que se mejoró la capacidad de justificación de algunos de los participantes, por medio de la creación de problemas de suficiencia de información. Esto se pudo observar, usando la clasificación de las justificaciones y la matriz de codificación que se les aplicó en la investigación al final del taller.
- Los participantes del taller de nuestra investigación, a pesar de no conocer la estrategia de creación de problemas y sentir cierto temor al inicio de la primera actividad crearon problemas interesantes de suficiencia de información sobre divisibilidad.
- La educación ha cambiado en las últimas décadas y quienes vivimos la experiencia de un método de enseñanza que daba prioridad a la memorización, proponemos, a través de esta investigación, invitar a los profesores a justificar en clases toda conjetura, proposición o respuesta que se da cuando se resuelva y se invente problemas. Esto

contribuirá a romper con la educación por memorización y a formar alumnos que entiendan lo que aprenden, lo cuestionen y lo analicen desde distintas perspectivas de aprendizaje.

- Consideramos que al formar profesores con gran capacidad de justificación de sus afirmaciones y de manejo de las proposiciones condicionales, ellos podrán, a su vez, pedir a sus alumnos que justifiquen adecuadamente sus respuestas. Así evitaremos que los alumnos lleguen a grados mayores de la educación con un pensamiento lógico insuficiente, con una imaginación estrecha o simplemente con miles de datos que conocen y han memorizado, pero que jamás se han cuestionado. Debemos crear un estudiante más despierto y ambicioso, intelectualmente hablando.
- Al insistir en la justificación de las respuestas, incentivamos una manera de estudiar mejor, pues ayuda a aprender comprendiendo y no limitarse a memorizar. Esta forma de estudiar, por ende, deriva en aprender mejor y por más tiempo lo que se enseña en las escuelas.
- Sería pertinente brindar tiempo suficiente para que los profesores reflexionen sobre cada una de sus respuestas y brindarles la oportunidad de expresar sus justificaciones de manera verbal, que también es una manera válida de justificación, antes de pasar a una formalización simbólica.
- La metodología de análisis de contenido utilizada fue pertinente, ya que nos permitió, a través de sus fases, realizar de manera organizada y secuencial toda la investigación. Esta metodología resulta un modelo útil para los investigadores que necesiten analizar la información dada por una muestra, para luego clasificarla y codificarla para su análisis respectivo, donde la unidad de análisis en nuestra investigación fue la justificación de proposiciones condicionales.

REFERENCIAS

Álvarez de Zayas, C. & Sierra, V. (2001). *Metodología de la investigación científica*. Cochabamba: Kipus.

Araújo, J. & Borba, M. (2004). Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*, pp. 27 – 47. Belo Horizonte: Autêntica.

Ayllón, M. F. & Gómez, I. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela abierta: revista de Investigación Educativa.* 17: 29-40.

Barrantes,H. (2007). *Introducción a la teoría de los números.* Universidad Estatal a Distancia. San José,Costa Rica.

Beuchot, M. (2004). *Introducción a la lógica.* Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial. Universidad Autónoma de México. México

Caraballo, R; Rico, L y Lupiáñez, J. (2013). *Colaboraciones cambios conceptuales en el marco teórico competencial de Pisa: el caso de las matemáticas*. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado,17*(2), 225-241.

Carranza, C (2015). *Álgebra (1ra. Ed)*. Academia Nacional de Ciencias. Editorial Moshera SRL. Lima, Perú.

Carrasco, S. (2013). *Metodología de la Investigación Científica. (2ª ed.).* Lima: San Marcos.

Castro, E. (2011). *La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 1-15). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Cofré, A. (2003). Como desarrollar el razonamiento lógica matemático. Fundación Educacional Arauco. Santiago de Chile.

Copi, I. (1981). *Introducción a la Lógica*. Buenos Aires: Universitaria de Buenos Aires.

Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P. & Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de Matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (1), pp. 73 – 88. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2055/1/2012-Echeverry%26Proposicion.pdf

Gorski, D.&Tavants, P. (1960). *Lógica*. México D. F.: Grijalbo.

Hernández,R.,Fernández,C. & Baptista,M. *Metodología de la investigación (5ta ed.).* Recuperado de https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Jiménez, A. y Pineda, L. (2012).*Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. Educación y Ciencia*. (16), 101-116.

Malaspina, U. (2012). *Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica*. Unión, (32), pp.9 –27. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/32/archivo5_volumen32.pdf

Malaspina, U. (2013). *La creación de problemas matemáticos en la formación de profesores*. VII CIBEM, pp. 129 -140.Uruguay. Recuperado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/727.pdf

Malaspina, U. (2014). Papiroflexia y elementos para construir indicadores sobre creación de problemas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática* (38), 135–141.

Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME

Maraví, L. (2015*). Errores de profesores de matemáticas de educación secundaria en el desarrollo de tareas que demandan conocimientos sobre el enunciado condicional*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú

Martínez, C. (2015). *Estrategias para estimular la creación de problemas de adición y sustracción de números naturales con profesores de educación primaria.* Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis. En Bikner – Ahsbahs, A., Knipping, C. &Presmeg, N. (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, pp. 365 – 380. [Version de Springer]. DOI 10.1007/978-94-017-9181-6_13

Minedu (2016). Currículo Nacional 2016. Recuperado de www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Miró Quesada, F. (1962). *Lógica*. Lima: Santa Rosa.

NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

OCDE. (2005). *La Definición y Selección de Competencias Claves. Resumen ejecutivo*. Recuperado de http://deseco.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf

Ordoñez, C (2014). *La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria***.** Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú

Pérez, M. (2006). *Lógica clásica y argumentación cotidiana: un texto de ayuda para el desarrollo de algunas habilidades argumentativas básicas al comienzo de la universidad.* Recuperado de: https://books.google.com.pe/books

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional.* Perú. Recuperado de www.minedu.gob.pe/DeInteres/xtras/download.php?link=dcn_**2009**.pdf

Perú, Ministerio de Educación. (2014). *Mapas de Progreso de Matemática.* Recuperado de: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formaciondeformadores/?p=446

Perú, Ministerio de Educación. (2015). *Rutas de Aprendizaje.* Recuperado de http://recursos.perueduca.pe/rutas/secundaria.php

Piscoya, L. (2007). *Lógica general*. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Planas N. y Morera L. (2010). *La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado.* Universidad autónoma de España. Recuperado de https://www.academia.edu/926456/La_argumentaci%C3%B3n_en_la_matem%C3%A1tica_escolar_Dos_ejemplos_para_la_formaci%C3%B3n_del_profesorado.mentos

Recio, A. (2002). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp.27 – 43. Universidad de Almería.

Restrepo, G. (2003). *Fundamentos de la Matemática*. Cali: Universidad del Valle.p.18.Colombia.

Schreier, M. (2014). Qualitative Content Analysis. En Flick, U. (Ed.) *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis*, pp. 170 – 183. London: SAGE.

Stylianou, D., Blanton, M. & Knuth, E. (2009). Teaching and learning proof across the grades. A K – 16 perspective. New York: Routledge.

Torres, C. (2016).*Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

Vallejo, E. (2012). *Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria.* Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

ANEXOS

ANEXOS A

DEL TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS DE SUFICIENCIA DE INFORMACIÓN SOBRE DIVISIBILIDAD

Anexo A.1 Taller Piloto

VIII CIEM

CREACIÓN DE PROBLEMAS de SUFICIENCIA DE INFORMACIÓN
Piura, 11 y 12 de agosto de 2016

Episodio: (Segundo de secundaria)

La profesora Nancy, en una de sus clases sobre **divisibilidad**, propuso el siguiente problema a sus estudiantes del segundo grado de educación secundaria:

<u>En cada caso, marcar con un aspa, según corresponda</u>

Información general: n representa cualquier entero positivo, factor de 24.

Requerimiento: ¿n^2 es un factor de 24?

Información adicional	Respuesta			Justificación
	Si	**No**	**No necesariamente**	
a) $n \geq 4$				
b) $n^2 < 9$				
c) n es primo				

Luego de unos minutos, algunos alumnos de Nancy respondieron:

Para el caso (a), **Pepito** marcó SI, y justificó así: 4 es un factor de 24, y 4^2 es menor que 24.

Para el caso (b), **María** marcó NO, y justificó así: 4 < 9 y 4 es un factor de 24.

Para el caso (c), **Julián** respondió No necesariamente y justificó así: no me dicen cuánto vale n

Actividades individuales

Resuelva el problema propuesto por la profesora Nancy.

1. Examine y comente las respuestas y justificaciones dadas por Pepito, María y Julián. ¿Las **justificaciones** son correctas? ¿Por qué?

2. Vuelva a leer el Episodio y **cree Ud. un problema** cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado por la profesora Nancy, y a obtener una solución correcta del mismo.

   Enunciado y solución del problema creado por Ud. (Cuadro similar al del problema del Episodio, con información general y adicional, requerimiento, respuestas y **justificaciones)**

Actividades en parejas

1. Leer y comentar en pareja el Episodio, las respuestas y **justificaciones** de los alumnos. ¿Las **justificaciones** de los alumnos son correctas? ¿Por qué?

2. **Crear un problema** cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado por la profesora Nancy y a obtener una solución correcta del mismo.

   Enunciado y solución del problema creado (Cuadro similar al del problema del Episodio, con información general y adicional, requerimiento, respuestas y **justificaciones.)**

Anexo A.2 INFORMACIÓN GENERAL SOBRE LOS PARTICIPANTES

- Código de participante:
- ¿En dónde labora actualmente?

P……

………………………………………………………………………………………….

- Tiempo total de servicio en la docencia …………..

-En la actual I.E …………

- Institución de estudios profesionales

-Instituto pedagógico ………

-Universidad Estatal ………

-Universidad particular ………

- Grado que enseña actualmente

-Grado ……………………….

- Cantidad de estudiantes promedio a los que enseña en su aula.

- Horas por semana que enseña en el área de matemáticas.

INFORMACIÓN GENERAL DE LOS PARTICIPANTES						
Código de participante:	P1	P2	P3	P4	P5	P8
¿En dónde labora actualmente?	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Bartolomé Herrera	I.E.E Nuestra Sra. Del Carmen de S.M	I.E.E Callao
Tiempo total de servicio en la docencia-años	21	16	27	28	18	28
Institución de estudios profesionales	IPNM	UNMSM	UPSM	UNMSM	UNMSM	UPIGV
Grado que enseña actualmente	1ro y 2do	4to	1ro y 2 do	2do y 5to	4to y 5to	5to
Grado en el que tiene mayor experiencia en la enseñanza de las matemáticas	1ro	3ro	1ro y 2do	5to	5to	3ro
Cantidad de estudiantes promedio a los que enseña en su aula.	24	24	22	25	20	30
Horas por semana que enseña en el área de matemáticas.	6	6	6	26	24	6

AnexoA.3 Exploración sobre divisibilidad

EXPLORACIÓN INICIAL SOBRE DIVISIBILIDAD

- Escriba todos los factores de 30. …………………………………………………........
- Escriba todos los factores de 20, que sean impares………………………………….
- Escriba todos los factores de 20, que sean números primos…………………………
- Pepito al dividir un número n entre 7, obtiene como residuo 9. ¿Qué opina sobre la división realizada por Pepito?

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………
- Escriba tres múltiplos de 13………………………………………………………..
- Escriba dos divisores de 13………………………………………………………..
- ¿Qué factores de 20 son números de la forma n^2, siendo n un número entero?

  ………………………………………………………………………………………
- Carlos afirma que puede saber si 7284 + 95472 es múltiplo de 3, sin efectuar la suma. ¿Está de acuerdo con Carlos? ¿Por qué?

  ……………………………………………………………………………………….

  ……………………………………………………………………………………….
- ¿Qué puede afirmar de n, si se sabe que el residuo de dividir n entre 7 es cero?

  ………………………………………………………………………………………..
- Si se sabe que a, b y c son múltiplos de 17 ¿Qué puede decir de $a\ (b+c)$ respecto a 17?

  ……………………………………………………………………………………….
- Si a y b son números enteros positivos, ¿afirmar que a es múltiplo de b es equivalente a afirmar que a es divisible por b? ¿Por qué?

  ………………………………………………………………………………………

Anexo A.4 Instrumento de exploración inicial

INSTRUMENTO DE EXPLORACIÓN INICIAL

Exploración inicial

Situación:

Hay una bolsa con fichas en la que es posible reconocer tres atributos: color (verde, azul o roja); forma (redonda, rectangular o triangular); y material con el que están hechas (cartón o plástico).

Además, cada ficha de la bolsa tiene una etiqueta que la identifica (F1, F2, F3, etc.)

A continuación, se presentan casos con una información general para las fichas de la bolsa (la misma para todos los casos) y en cada uno de ellos se brinda información adicional sobre determinadas fichas, a fin de responder requerimientos (preguntas) específicos acerca de tales fichas.

<u>En cada caso, marque su respuesta con un aspa, según corresponda, y justifique su respuesta.</u>

Caso 1

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F1 es una ficha azul

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente

¿F1 es triangular?			
Justificación:			

Caso 2

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F3 y F4 son del mismo material.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F3 y F4 son triangulares?			
Justificación:			

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F5 es redonda

Requerimiento	Respuesta

	Sí	No	No necesariamente
¿F5 es verde?			
Justificación:			

Caso 4

Información general:

Todas las fichas verdes son triangulares y todas las fichas triangulares son del mismo material

Información adicional: F7 y F8 son fichas verdes.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F7 y F8 son del mismo material?			
Justificación:			

- ¿Considera que es importante que en la enseñanza de las matemáticas se enfaticen las justificaciones de las respuestas a los problemas? ¿Por qué?
- Escriba tres palabras o frases cortas que expresen lo que ha sentido en su experiencia de justificar las respuestas de los problemas.

ANEXOS B

INSTRUMENTOS DEL PROCESO

Anexo B.1 Ficha 1 Individual

FICHA 1 (Individual)

Episodio

La profesora Nancy, en una de sus clases sobre divisibilidad, propuso el siguiente problema a sus estudiantes del segundo grado de educación secundaria, considerando dos casos:

Caso 1

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 6?			
Justificación:			

Caso 2

Información general:

a y b representan números enteros positivos cualesquiera .

Información adicional: a y b son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?			
Justificación:			

Luego de unos minutos, algunos alumnos de Nancy respondieron:

Para el caso 1, Pepito marcó SI, y justificó así: Cuando n =18*, n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6; por lo tanto n siempre es múltiplo de 6.*

Para el caso 2, María marcó SI, y justificó así: *Cuando a=6 y b=12 ambos son múltiplos de 6 y la suma a+b me resulta un múltiplo de 3.*

Actividades en parejas

1. Leer y comentar en pareja el Episodio, las respuestas y justificaciones de los alumnos.

Caso 1

(Solución de Pepito)

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 6?	X		
Justificación: Cuando n =18*, n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6 ; por lo tanto n siempre es múltiplo de 6.*			
¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?			

Caso 2

(Solución de María)

Información general: *a* y *b* representan números enteros positivos cualesquiera

Información adicional: *a* y *b* son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?	X		
Justificación: *Cuando a=6 y b=12 ambos son múltiplos de 6 y la suma a+b me resulta un múltiplo de 3.*			

¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?

2. Crear un problema con dos o más casos, cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado por la profesora Nancy y a obtener una solución correcta del mismo.

Usar los cuadros que se presentan a continuación para escribir la información general, la información adicional y el requerimiento del problema, así como la respuesta correcta y la justificación correspondiente.

Caso 1

Información general: --

Información adicional: --

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
Justificación:			

Caso 2

Información general: --

Información adicional: --

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente

Justificación:

Anexo B.2 Solucionario de Actividades individuales –ficha 1

3. Resuelva el problema propuesto por la profesora Nancy.

Caso 1

Información general:

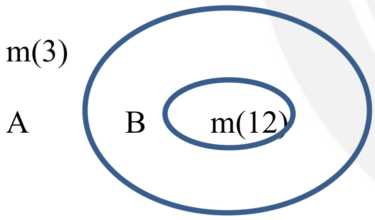
n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 6?			x

Justificación:



Todo múltiplo de 12 es múltiplo de 3 y si n no es múltiplo de 12 está en zona B. Podemos considerar al 15 y al 18 que cumplen ambas condiciones (no ser múltiplo de 12 y ser múltiplo de 3). Vemos que 15 no es múltiplo de 6 pero 18 sí es múltiplo de 6; en consecuencia, n no necesariamente es múltiplo de 6.

Caso 2

Información general:

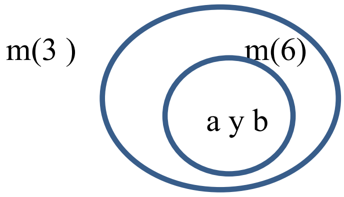
a y b representan números enteros positivos cualesquiera .

Información adicional: a y b son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente

¿La suma a+b es múltiplo de 3?	x		

Justificación:



Todo múltiplo de 6 es múltiplo de 3 y si tomo dos números a y b múltiplos de 6 y los sumo obtendré un número múltiplo de 6 .Como se sabe que todo múltiplo de 6 es múltiplo de 3 entonces la suma a +b es siempre múltiplo de 3.

1. **Todo múltiplo de 6 es múltiplo de 3:**
   Justificación: múltiplo de 6 se puede expresar como 6k, el cual puede expresarse como 3(2k) siendo k entero entonces p=2k, por lo tanto la expresión 3p genera los múltiplos de 3.
2. **La suma de dos números múltiplos de 6 es múltiplo de 6**
   Justificación: Para todo k y p enteros 6k y 6p son múltiplos de 6 entonces al sumarlos tengo 6 (k +p) lo que representa un múltiplo de 6.
3. **Por las afirmaciones 2 y 1, la suma de dos números múltiplos de 6 es también múltiplo de 3.**

Nota: múltiplo de 3 lo representamos como m(3)

4. Examine y comente las respuestas y justificaciones dadas por Pepito y María.

Caso 1

(Solución de Pepito)

Información general:

n representa cualquier entero positivo, tal que n es múltiplo de 3.

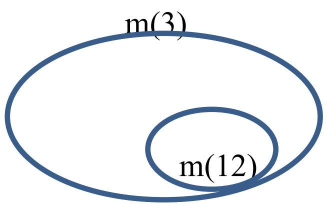
Información adicional: n no es múltiplo de 12

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 6?	X		

Justificación:

Cuando n =18*; n es múltiplo de 3 y n no es múltiplo de 12, pero n es múltiplo de 6; por lo tanto, n siempre es múltiplo de 6.*

¿La justificación es correcta? ¿Por qué?



NO, porque usa un solo caso particular para responder a la pregunta sobre n en general, pues cuando n toma el valor de 15 la respuesta sería No, contraria a la del alumno pepito.

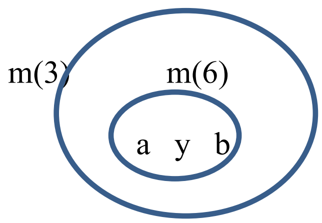
Caso 2

(Solución de María)

Información general:
a y *b* representan números enteros positivos cualesquiera .

Información adicional: *a* y *b* son múltiplos de 6

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿La suma a+b es múltiplo de 3?	X		
Justificación: *Cuando a=6 y b=12 ambos son múltiplos de 6 y la suma a+b me resulta un múltiplo de 3.*			
¿La justificación es correcta? ¿Por qué?			



No, porque está dando un caso muy particular, en este caso solo está verificando con un par de valores para a y b, por lo tanto no es una justificación adecuada que se pueda mostrar una generalización apoyada por el álgebra.

Actividad en parejas

Solucionario de Actividades en parejas –Ficha 2

1. Leer y comentar en pareja el Episodio, las respuestas y justificaciones de los alumnos.

Caso 1

(Solución de Milca)

Información general: n representa un número entero positivo múltiplo de 4.

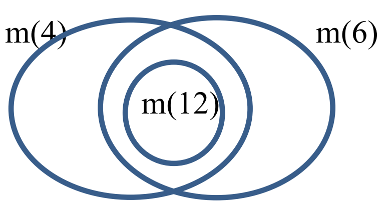
Información adicional: n es múltiplo de 6.

Requerimiento	Respuesta		
	Si	No	No necesariamente
¿n es múltiplo de 24?	X		

Justificación :

Todo número múltiplo de 4 y a la vez múltiplo de 6, siempre resulta múltiplo de 6 *por 4*.

¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?



NO, porque un número múltiplo de 4 y de 6 se encuentra en la intersección de los conjuntos, estos deben ser al menos múltiplos de 12, pero no necesariamente uno de ellos es 6 por 4.

Caso 2

(Solución de Rufino)

Información general: n representa un número entero positivo menor que 15 y múltiplo de 3.

Información adicional: n - 1 es múltiplo de 5

Requerimiento	Respuesta		
	Si	No	No necesariamente
¿ n es múltiplo de 2?		X	

Justificación:

Para n =6, se obtiene n -1 múltiplo de 5, pero 5 no es múltiplo de 2.

¿La justificación del alumno es correcta? ¿Por qué?

No, porque n puede ser 3, 6, 9, 12 y para que n – 1 sea múltiplo de 5 solo se da cuando n es igual a 6, y 6 es múltiplo de 2. El error se da cuando toma a 5 como n.

ANEXOS C

EXPLORACIÓN FINAL

Anexo C.1 Instrumento de exploración final

Exploración final

Situación:

Hay una bolsa con fichas en la que es posible reconocer tres atributos: color (verde, azul o roja); forma (redonda, rectangular o triangular); y material con el que están hechas (cartón o plástico). Además, cada ficha de la bolsa tiene una etiqueta que la identifica (F1, F2, F3, etc.)

A continuación, se presentan casos con una información general para las fichas de la bolsa (la misma para todos los casos) y en cada uno de ellos se brinda información adicional sobre determinadas fichas, a fin de responder requerimientos (preguntas) específicos acerca de tales fichas.

<u>En cada caso, marque su respuesta con un aspa, según corresponda y justifique su respuesta.</u>

Caso 1

Información general:

Si una ficha es de cartón, entonces, es rectangular y si una ficha es de cartón, entonces, es verde.

Información adicional: F1 es azul

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F1 es de plástico?			
Justificación:			

Caso 2

Información general:

Si una ficha es de cartón, entonces, es rectangular y si una ficha es de cartón, entonces, es verde.

Información adicional: F2 es una ficha de plástico

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F2 es rectangular?			
Justificación:			

Caso 3

Información general:

Si una ficha es de cartón, entonces, es rectangular y si una ficha es de cartón, entonces, es verde.

Información adicional: F3 es rectangular

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F3 es una ficha de cartón?			
Justificación:			

Caso 4

Información general:

Si una ficha es de cartón, entonces, es rectangular y si una ficha es de cartón, entonces, es verde.

Información adicional: F5 es de cartón.

Requerimiento	Respuesta		
	Sí	No	No necesariamente
¿F5 es rectangular?			
Justificación:			

- Escriba espontáneamente cuatro palabras que completen la expresión:

  " La creación de problemas de matemáticas es ………………………..

  " La creación de problemas de matemáticas es………………………..

  " La creación de problemas de matemáticas es………………………..

  " La creación de problemas de matemáticas es………………………..

- Escriba algún o algunos comentarios suyos acerca de la experiencia de crear problemas de matemáticas.

- ¿Cómo considera que ha influido en su capacidad de justificar sus afirmaciones, la experiencia de crear problemas de suficiencia de información?

  Marque un número, considerando que 1 es MUY POCO y 5 es MUCHO

  1 2 3 4 5

  ¿Por qué?