

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**CREACIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA INDAGACIÓN.
UN ESTUDIO SOBRE ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES CON
ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA.**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

AUTOR

ANTONIO CAHUANA VENTURA

ASESOR

ULDARICO VICTOR MALASPINA JURADO

Marzo, 2019

RESUMEN

La investigación parte de la premisa que los estudiantes aprenden mucho mejor cuando asumen el control de sus propios aprendizajes; en este sentido, la indagación debería orientar a los estudiantes a la búsqueda de soluciones apropiadas, debido a que la utilización del método socrático permite que el aprendizaje sea mediante la formulación de preguntas e interrogantes, las cuales permiten la creación de problemas con mayor motivación. Como objetivo principal tiene el de analizar el aprendizaje basado en la indagación y cómo esta contribuye en la creación de problemas por variación y elaboración, relacionados con áreas de regiones poligonales, con estudiantes del curso año de secundaria. La creación de problemas es una actividad pedagógica que fomenta la creatividad en los estudiantes, y está muy relacionada con la capacidad indagatoria por parte de los alumnos. Dicha habilidad contribuye al conocimiento matemático, la motivación por el área y la superación de los errores matemáticos. Los estudiantes que participaron en la investigación mostraron un potencial indagatorio satisfactorio, pues se formularon conjeturas o preguntas del tipo fácticas, conceptuales o debatibles, las cuales generaron en el estudiante la necesidad de ser respondidas. Una de las conclusiones a las que se llega en la presente investigación es que la indagación realizada por los estudiantes, contribuye de manera adecuada a la creación de problemas, debido a que los estudiantes son más autónomos en la formulación de preguntas indagatorias y ello conlleva a generar ideas y tener mayor motivación al momento de crear los problemas, debido a que responden a sus propias observaciones.

Palabras claves: Problemas, creación de problemas, aprendizaje por indagación, regiones poligonales.

ABSTRACT

The research starts from the premise that students learn better, when they take control of their own learning, in this sense the inquiry should guide students to search for appropriate solutions, because the use of the Socratic method allows the student to Learning is through the formulation of questions and questions, which allow the creation of problems with greater motivation. The main objective is to analyze learning based on inquiry and how it contributes to the creation of problems by variation and elaboration, related to areas of polygonal regions, with students of the fourth year of secondary school. The creation of problems is a pedagogical activity that encourages creativity in students, accompanied by an adequate inquiry capacity on the part of the students stimulates much better the ability to create problems. This skill increases the mathematical knowledge, the motivation for the area, the overcoming of the mathematical errors. The students who participated in the investigation showed a satisfactory investigative potential, due to conjectures or questions of the factual, conceptual or debatable type, which generated in the student the need to be answered. The conclusions reached by this research is that the inquiry contributes appropriately in the creation of problems, because students are more autonomous in the formulation of questioning questions and this leads to greater motivation when creating problems due to who are responding to their needs.

Keywords: Problems; problem posing; learning by inquiry; polygonal regions.

AGRADECIMIENTOS

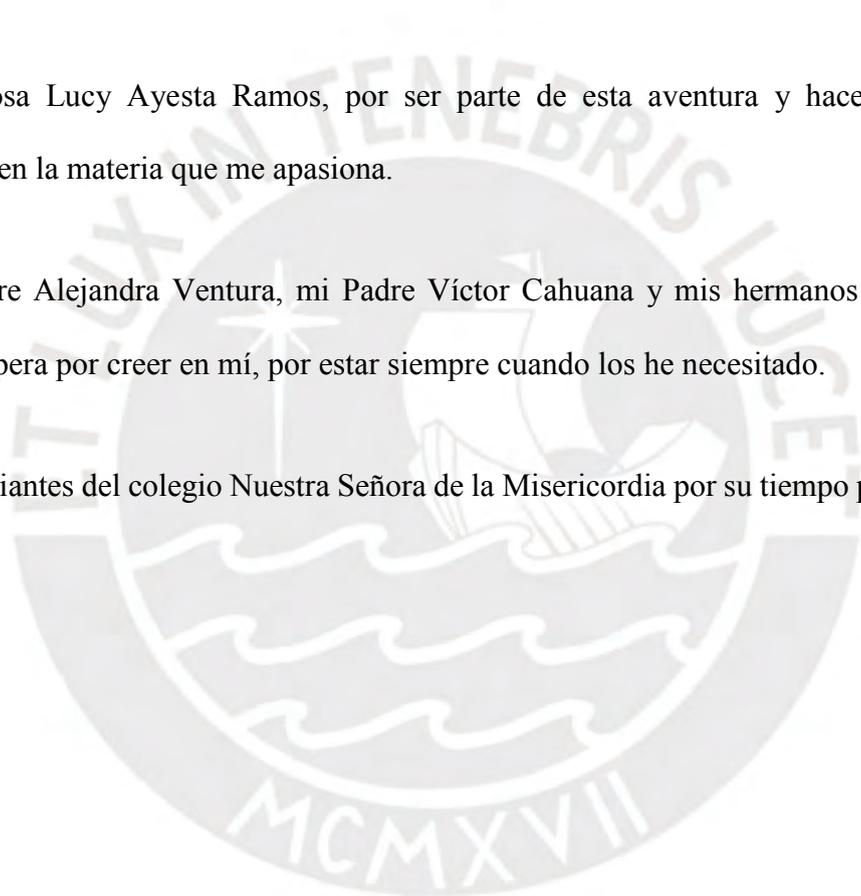
Al Maestro Uldarico Malaspina Jurado, mi asesor de tesis, una persona apasionada por las matemáticas y por la enseñanza; sus aportes han sido fundamentales para la presente investigación.

A los profesores de la Maestría, Cecilia Gaita, Uldarico Malaspina, Jesús Victoria Flores, Augusta Osorio por sus enseñanzas.

A mi esposa Lucy Ayesta Ramos, por ser parte de esta aventura y hacer realidad una investigación en la materia que me apasiona.

A mi Madre Alejandra Ventura, mi Padre Víctor Cahuana y mis hermanos Tito, Eusteria, Lorgia y Prospera por creer en mí, por estar siempre cuando los he necesitado.

A los estudiantes del colegio Nuestra Señora de la Misericordia por su tiempo para la presente investigación.



ÍNDICE

| | Pág. |
|------------------|-------------|
| Resumen | ii |
| Índice | iii |
| Lista de Tabla | v |
| Lista de Figuras | vi |
| Introducción | 12 |

PRIMERA PARTE: MARCO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO I

MARCO CONTEXTUAL: PROBLEMATICA

| | | |
|------|----------------------------------------------------------|----|
| 1.1. | Investigaciones de referencia | 14 |
| | 1.1.1. Creación de problemas | 14 |
| | 1.1.2. Investigaciones realizadas con areas poligonales. | 17 |
| | 1.1.3. Investigaciones sobre indagación matemática | 19 |
| 1.2. | Justificación | 22 |
| 1.3. | Pregunta y objetivos de la investigación | 28 |

CAPÍTULO II

MARCO CONCEPTUAL: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

| | | |
|--------|---------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. | Aspectos matemáticos/históricos/epistemológicos | 29 |
| 2.1.1. | Civilización Egipcia | 30 |
| 2.1.2. | Civilización Babilonia | 31 |
| 2.1.3. | Civilización Griega | 31 |
| 2.1.4. | Aproximación a los conceptos de area de regiones poligonales. | 32 |
| 2.2. | Aspectos del tema a investigar en los libros didácticos | 38 |

SEGUNDA PARTE: MARCO TEORICO, DISEÑO METODOLÓGICO Y RESULTADOS

CAPÍTULO III

Marco teórico

| | | |
|--------|--------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. | Marco teórico | 40 |
| 3.1.1. | La indagación en matemática | 45 |
| 3.1.2. | El aprendizaje por indagación | 46 |
| 3.1.3. | Metamodelos y Modelos de situaciones problemáticas | 47 |
| 3.1.4. | Creación de problemas | 48 |
| 3.2. | Metodología y procedimientos | 52 |
| 3.2.1. | Tipo de investigación | 52 |
| 3.2.2. | Determinación de la muestra | 53 |
| 3.2.3. | La metodología de trabajo | 53 |
| 3.2.4. | Elaboración de los instrumentos para la recolección de datos | 55 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| CAPÍTULO IV | |
| PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN | 58 |
| 4.1. Características de los sujetos de la investigación | 58 |
| 4.2. Descripción de las secuencias de actividades en sesiones | 58 |
| 4.2.1. Etapas y objetivos de la investigación | 59 |
| 4.2.2. Actividades y objetivos | 60 |
| 4.3. Descripción de las secuencias de actividades. | 61 |
| 4.3.1. Diagnostico sobre indagación, a través de una prueba de entrada. | 61 |
| 4.3.2. Taller sobre creación de problemas por variación y elaboración | 71 |
| 4.3.3. Taller sobre indagación en el proceso de aprendizaje en las matemáticas. | 83 |
| 4.3.4. Prueba final sobre creación de problemas mediante la indagación. | 85 |
| 4.3.5. Comparación de los problemas creados, en la fase II y la fase IV | 92 |
| CAPITULO V | 94 |
| CONSIDERACIONES FINALES | |
| 5.1. Conclusiones | 94 |
| 5.2. Recomendaciones | 97 |
| Referencias bibliográficas | 98 |
| Anexos | 101 |

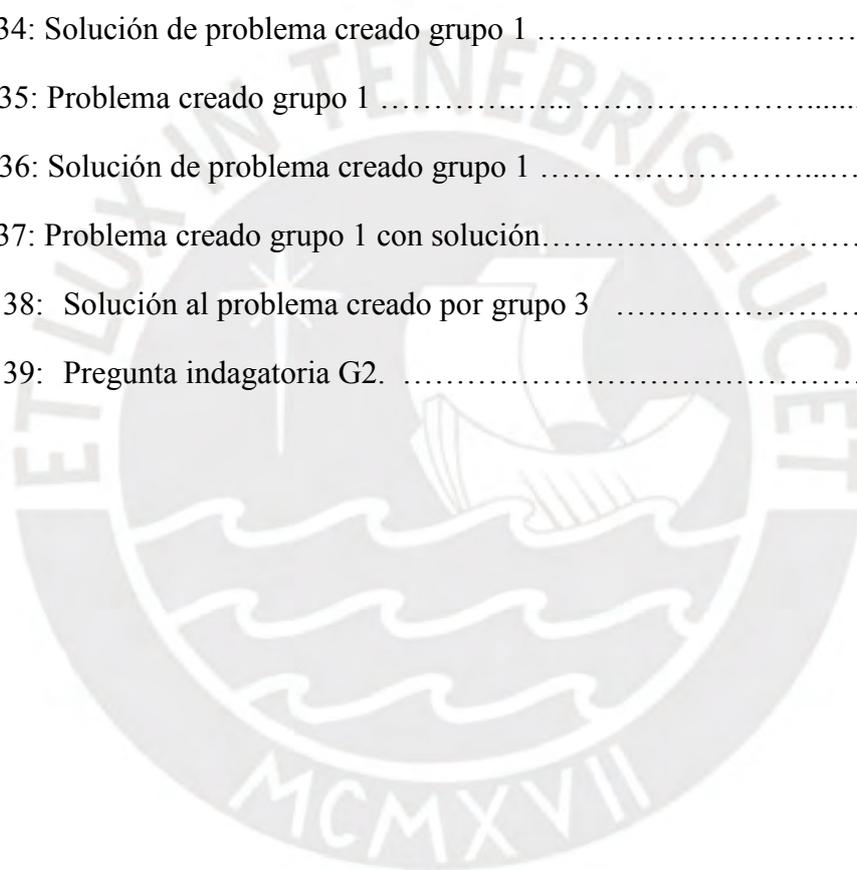
LISTA DE TABLAS/CUADROS

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabla 1: Histórico de resultados nacionales según medida promedio y niveles de logro.. | 26 |
| Tabla 2: Resumen de los metamodelos ... | 46 |
| Tabla 3: Actividades de la investigación..... | 58 |
| Tabla 4: Etapas y objetivos en la investigación | 58 |
| Tabla 5: Actividades y objetivos..... | 59 |
| Tabla 6: Resumen de test | 61 |
| Tabla 7: Consolidado de prueba diagnóstico | 63 |
| Tabla 8. Resumen de elementos del problema de la figura 23..... | 72 |
| Tabla 9. Resumen de elementos del problema de la figura 24..... | 73 |
| Tabla 10. Resumen de elementos del problema de la figura 25..... | 75 |
| Tabla 11. Resumen de elementos del problema de la figura 27..... | 78 |
| Tabla 12. Resumen de elementos del problema de la figura 28..... | 79 |
| Tabla 13. Resumen de elementos del problema de la figura 29..... | 81 |
| Tabla 14. Resumen de elementos del problema de la figura 33..... | 86 |
| Tabla 15. Resumen de elementos del problema de la figura 35..... | 88 |
| Tabla 16. Resumen de elementos del problema de la figura 37..... | 90 |
| Tabla 17. Resumen de resultados de la fase II y IV..... | 92 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Resumen de axioma 17 | 33 |
| Figura 2: Resumen de axioma 18 | 34 |
| Figura 3: Resumen de axioma 19 | 34 |
| Figura 4: Resumen del teorema | 35 |
| Figura 5: Demostración geométrica I | 36 |
| Figura 6: Demostración geométrica II | 37 |
| Figura 7: Modelo de aprendizaje de la ciencia a través de la indagación..... | 37 |
| Figura 8: Propuesta de Ellerton (2012)..... | 43 |
| Figura 9: Gráfica prueba diagnóstico | 64 |
| Figura 10: Gráfica de prueba diagnóstico de justificación..... | 64 |
| Figura 11: Calculo prueba diagnóstica..... | 64 |
| Figura 12: Respuesta sobre calculo..... | 65 |
| Figura 13: Resolución del problema por un estudiante | 65 |
| Figura 14: Pregunta 2..... | 66 |
| Figura 15: Problema 2 a | 67 |
| Figura 16: Problema 2 b | 67 |
| Figura 17: Problema 2 f..... | 68 |
| Figura 18: Problema 3 b | 68 |
| Figura 19: Pregunta 3 c..... | 69 |
| Figura 20: Problema 4..... | 69 |
| Figura 21: Situación problemática | 71 |
| Figura 22: Creación de problema por variación 1 | 72 |
| Figura 23: Creación de problema por variación 2 | 73 |
| Figura 24: Creación de problema por variación 3..... | 75 |
| Figura 25: Situación problemática para creación de problemas por elaboración | 77 |
| Figura 26: Problema creado por elaboración 01 | 78 |

| | |
|----------------------------------------------------------|----|
| Figura 27: Problema creado por elaboración 02..... | 79 |
| Figura 28: Problema creado por elaboración 03..... | 81 |
| Figura 29: Preguntas de indagación..... | 83 |
| Figura 30: Conclusión 1 | 83 |
| Figura 31: Conclusión 2 | 84 |
| Figura 32: Problema creado | 84 |
| Figura 33: Problema creado grupo 1..... | 85 |
| Figura 34: Solución de problema creado grupo 1 | 86 |
| Figura 35: Problema creado grupo 1 | 87 |
| Figura 36: Solución de problema creado grupo 1 | 88 |
| Figura 37: Problema creado grupo 1 con solución..... | 89 |
| Figura 38: Solución al problema creado por grupo 3 | 90 |
| Figura 39: Pregunta indagatoria G2. | 93 |



INTRODUCCIÓN

Las investigaciones relacionadas con la creación de problemas a través de la indagación, como estrategia de aprendizaje y enseñanza en el nivel de secundaria son escasas en nuestro país; los estudios que más se acercan son las realizadas en el continente europeo.

En la presente investigación se ha analizado la creación de problemas a través del aprendizaje por indagación con estudiantes del cuarto año de secundaria de un colegio de convenio del distrito de Ventanilla, Región Callao. El objeto matemático que interviene en la investigación es el área de regiones poligonales.

Mediante la presente investigación se pretende aportar a los docentes de matemática lo valioso que puede resultar la aplicación de la creación de problemas mediante el aprendizaje por indagación en el proceso de enseñanza de la materia, debido a que los estudiantes muestran mejor predisposición para el aprendizaje, debido a que son más significativos los trabajos realizados por ellos mismos.

La presente investigación comprende cinco capítulos:

En el capítulo I, presentamos la problemática de la investigación, es decir, los antecedentes relacionados con el tema, el planteamiento del problema y la justificación; la pregunta que da pie a la presente investigación; y, finalmente, los objetivos tanto el general como los específicos.

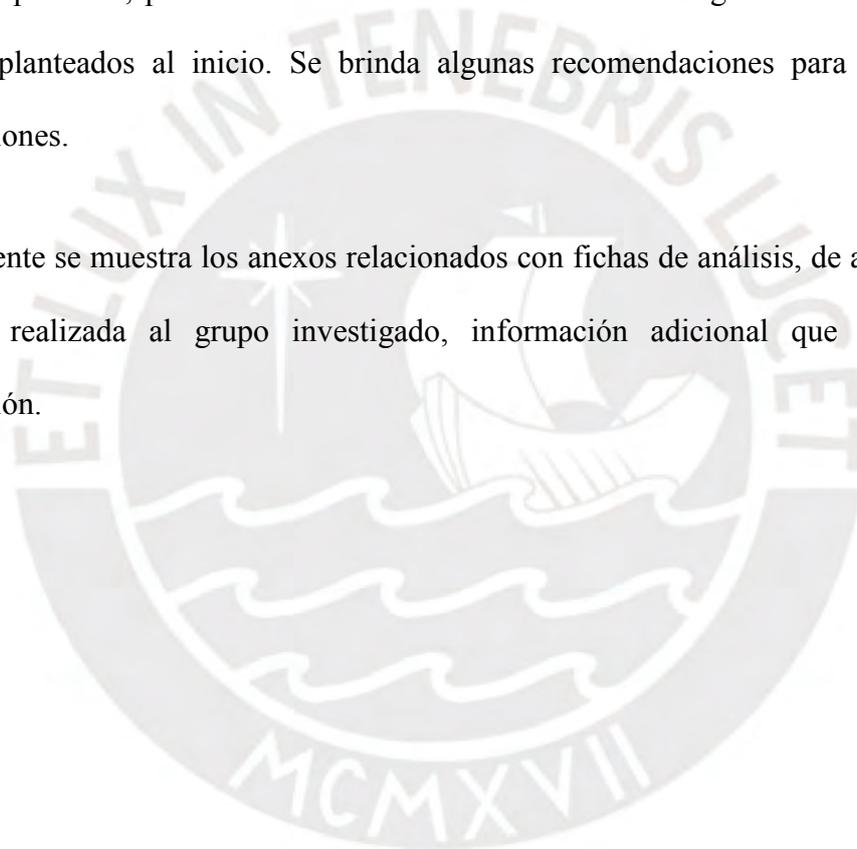
En el capítulo II, damos a conocer los aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos del objeto matemático considerados en la investigación. Así como, su consideración en los libros didácticos del nivel de secundaria.

En el capítulo III, presentamos el marco teórico, la metodología y procedimientos metodológicos que orientan el desarrollo de la investigación.

En el capítulo IV, se da a conocer la parte experimental, es decir la aplicación de los instrumentos de investigación y los análisis de los resultados que se ha obtenido en las diferentes fases.

En el capítulo V, presentamos las conclusiones de la investigación relacionadas con los objetivos planteados al inicio. Se brinda algunas recomendaciones para fines de futuras investigaciones.

Finalmente se muestra los anexos relacionados con fichas de análisis, de aplicación y de la entrevista realizada al grupo investigado, información adicional que complementa la investigación.



CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo se brinda información de algunas investigaciones realizadas en torno a la problemática a investigar, la creación de problemas mediante la indagación matemática.

1.1 Investigaciones de referencia

En esta parte de la investigación, damos a conocer los aportes realizados relacionados con la creación de problemas, la indagación en matemática y las áreas de regiones poligonales, los cuales permitirán tener mayor entendimiento de la problemática a investigar.

1.1.1 Creación de problemas

Los diferentes investigadores consideran la creación de problemas, de diferentes maneras. Por ejemplo: Kilpatrick (1987), usa la expresión formulación de problemas; Brown y Walter (1993), lo consideran como planteamiento de problemas; a su vez Silver (1994), lo plantea como formulación y generación de problemas; y Castro (2011) considera como invención de problemas; finalmente, Malaspina (2011) usa la expresión creación de problemas. Estos términos se refieren a la formulación de nuevos problemas o a la reformulación de problemas dados (Silver & Cai,1996). Es decir, se puede crear nuevos problemas durante la resolución de los problemas brindados inicialmente (Silver,1996) lo cual consiste en realizar cambios al problema, reformulándolo, buscando generalizaciones, o centrándose en un caso concreto, objetivos diversos, ya sea didácticos o matemáticos. Así mismo, también se puede crear problemas, una vez que ya se ha resuelto el problema planteado, ya sea modificando los objetivos, las condiciones o las preguntas del mismo, (Silver, 1994). En este sentido, Brown y Walter (1993) dan a conocer, cómo formular nuevos problemas a partir de lo proporcionado,

siguiendo la estrategia “¿What if not?” (¿Qué pasa si no?), la cual consiste en cambiar las consideraciones hechas en un problema proporcionado.

Por otra parte, Malaspina (2015), señala que en varios enfoques didácticos ya se considera de manera implícita la creación de problemas; para ello cita a Brousseau (1986) quien manifiesta que “aprender un conocimiento es reconstruirlo” Por otra parte, Chevallard, Bosch y Gascón (2005), manifiestan que “enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstruir organizaciones matemáticas para poder usarlas en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones”. Finalmente, Font, Planas y Godino (2010) manifiestan que “el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y, sobre todo, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica operativa)”.

Así mismo los autores Ayllón, Gómez y Ballesta (2015), en su artículo de investigación establecen una conexión entre la creación de problemas con el desarrollo del pensamiento matemático y la creatividad. Mencionan que la creatividad y las matemáticas comparten elementos como “la fluidez, la flexibilidad, la novedad y la elaboración”. Tener en cuenta esta vinculación contribuirá a estimular un aprendizaje significativo, y facilitará el logro de las competencias matemáticas. De esta manera, la invención y la resolución de problemas constituye una estrategia muy importante, ya que pone de manifiesto el razonamiento matemático y la creatividad de los discentes, mejorando de esta manera la adquisición de conceptos matemáticos. La creatividad está muy vinculada con la invención, la cual se desarrolla mucho mejor en una adecuada educación matemática. Así, la invención de problemas matemáticos es un elemento de necesidad primordial para la realización de actividades matemáticas.

Cárdenas (2015), en su tesis de maestría, se plantea la siguiente pregunta: “¿Cómo obtener información sobre las capacidades creativas y matemáticas de los estudiantes mediante el análisis de los problemas creados por ellos?”, para responderla, hace una investigación con 33 estudiantes del sexto grado de primaria, en una Institución Educativa del Perú, utilizando una metodología cualitativa constructivista (investigación-Acción). Para el logro de los objetivos, el investigador les brinda un conjunto de actividades por día, durante cuatro días, obteniendo como conclusión que, aunque existe un nivel bajo de creación de problemas relacionados con originalidad, “los estudiantes muestran altos niveles de flexibilidad, fluidez y claridad al crear problemas por elaboración en forma grupal, sobre todo al trabajar con situaciones no rutinarias” (p.107) y estos son más significativos con el tema de medida de capacidad. Por otro lado, en situaciones semiestructuradas se ha percibido una mayor originalidad al crear problemas por elaboración, que al crear problemas por variación.

En esta misma línea, Espinoza (2013), sobre problemas aritméticos, con estudiantes con talento en matemática, toma en consideración a dos grupos de estudio, los cuales presentan características diferentes en relación a las habilidades matemáticas al momento de resolver dos actividades de invención de problemas aritméticos. El estudio estuvo centrado en analizar las características que presentaban los problemas inventados por el grupo de estudiantes talentosos. El análisis consideró la estructura sintáctica, semántica y matemática, así como establecer las diferencias que hubiera con respecto al grupo estándar. La investigación fue de tipo exploratorio descriptivo; el grupo talento estuvo conformado por 21 estudiantes, mientras que el grupo estándar lo conformaron 19 estudiantes. Para la investigación se creó un cuestionario con dos actividades semiestructuradas de creación de problemas (Stoyanova, 1998). La conclusión a la que llega en la investigación, es que los problemas creados por el grupo de estudiantes con talento presentan mayor riqueza que los inventados por el grupo estándar, debido a que

contienen una mayor cantidad de tipos de números, de proposiciones y de relaciones semánticas, los cuales requieren de más procesos de cálculo para ser resueltos.

1.1.2 Investigaciones relacionadas con áreas poligonales.

Los estudiantes a lo largo de su proceso de aprendizaje de las matemáticas, presentan diversas dificultades al momento de diferenciar la noción de área y perímetro, como lo manifiestan Dickson et al (1991), Estrada y Avila (2009) y los profesores D'Amore y Fandiño (2007). Las investigaciones especializadas en relación a este tema han evidenciado que las nociones intuitivas de los alumnos dificultan la comparación de dichas relaciones, específicamente cuando consideran que regiones de mayor perímetro tendrán mayor área (Kospentaris y Acuña 2011).

Por otro lado, De Carvalho (2013), manifiesta que los libros de consulta de los estudiantes presentan escasas oportunidades para distinguir adecuadamente las magnitudes de área y perímetro. Por su parte, Chamorro (1997) considera que la enseñanza de la matemática, en especial la geometría, se presenta con figuras dibujadas y que es poco habitual encontrarlas recortadas, estas omisiones contribuyen a un obstáculo didáctico, debido a que, para los sentidos de los alumnos, lo que sobresale es la línea que forma la frontera, lo cual no permite que se reconozca la superficie como el interior delimitado por dicha frontera.

También Malaspina (2014) considera que la creación de nuevos problemas, toman en cuenta las modificaciones cualitativas y cuantitativas de la información que se presenta en un problema. Las modificaciones cualitativas son los cambios más vinculados con las relaciones entre los elementos del problema. En cambio, las modificaciones cuantitativas se refieren a los cambios que tienen que ver con cambios numéricos, como las dimensiones de la figura, las velocidades, las magnitudes, etc. Estas consideraciones se desprenden de la investigación que

se realizó con 23 estudiantes del primer ciclo universitario de formación docente de educación primaria o inicial, a las cuales se les planteó la modificación o creación de un problema relacionado con áreas, utilizando para ello el material concreto del papel (papiroflexia). Concretamente se pidió: “Resolver problemas; Identificar en el problema: información, requerimiento, contexto y entorno matemático; Crear un nuevo problema, modificando uno o más de los elementos del problema dado; Resolver el problema creado” (p.136)

Los resultados que se obtuvieron fueron muy significativos, debido a que 19 estudiantes resolvieron correctamente el problema; 21 estudiantes inventaron nuevos problemas y 14 estudiantes realizaron cambios relacionados a los datos que se brindó en el problema original, de las cuales 7 alumnos hicieron cambios cuantitativos bastante sencillos. En la investigación se concluye que los docentes poseen un gran potencial inventivo para imaginar nuevos problemas matemáticos; en tal sentido, debe ser estimulada para mejorar sus competencias didáctico-matemáticas.

Por otro lado Arenas (2012), en su estudio cuasi experimental de tipo descriptivo-cualitativo sobre, “propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas, con estudiantes del sexto grado, para ello tuvo como objetivo el de crear y poner a prueba una estrategia didáctica en los estudiantes del sexto grado aplicando la enseñanza de la geometría con el uso de las tecnologías, específicamente el Moodle y material concreto del tangram” (p. 5); con estas herramientas busca que los alumnos construyan el concepto de área y perímetro de figuras planas. La conclusión de la investigación, fue que la “implementación de la estrategia facilitó la identificación de los conceptos primarios en relación a áreas y perímetros; así mismo, la manipulación, visualización y participación de los alumnos en el proceso de aprendizaje con los materiales concretos potenciaron su aprendizaje de áreas y perímetros” (p.36).

Así mismo Corberán (1996), en su tesis doctoral hace un análisis de la enseñanza del concepto de área de superficies planas, en los diversos niveles educativos. Para ello, diseñó, realizó y analizó un test que consideró los conceptos de área, unidad de medida, conservación de superficies cuando son sometidas a transformaciones, relación entre “área y perímetro, sus fórmulas para determinarlos, la comprensión del teorema de Pitágoras, la relación entre las áreas de figuras como un rombo, un paralelogramo y un trapecio con la de un rectángulo” (pp.72). Dicho test fue ampliado a una población de 521 alumnos, de octavo grado, bachillerato, universidad, estudiantes de la escuela de magisterio, y estudiantes de la facultad de matemática. El estudio concluye afirmando que la totalidad de los alumnos comprenden el significado del área de una superficie plana, pero carecen de formación acerca de cómo calcularla. No se ha podido establecer ninguna conexión clara entre las concepciones manifestadas por los alumnos y los procedimientos que utilizan para comparar o calcular áreas de superficies planas.

1.1.3 Investigaciones sobre indagación matemática

En esta línea consideramos los aportes de Artigue M. (2017), cuyo artículo de investigación aborda el tema, ¿Qué es la educación matemática basada en la indagación? En ello toma el concepto del Informe Inquiry in Science Education, y señala que “La indagación es un término usado, tanto en la educación como en la vida cotidiana, para referirse a la búsqueda de conocimiento o información mediante el método de hacer preguntas” (p.594). En este contexto, la indagación es llevada al terreno de la matemática, por cuestiones que surgen del mundo natural o del entorno que nos rodea. Así mismo nos dice que los objetos matemáticos también pueden ser fuente esencial de indagación matemática desde las primeras etapas de la vida. Por otro lado, la autora nos dice que no existe una forma única o estándar de indagación en matemáticas, ni siquiera para las formas de indagación interna en el ámbito matemático, debido a que un proceso de indagación puede conducir a un resultado universal o existencial. Por ello,

en la educación matemática basada en la indagación, es necesario que los alumnos no traten con problemas aislados, por desafiantes que sean, ya que esto no contribuirá a desarrollar los conceptos matemáticos generales. Finalmente, la autora manifiesta que la educación matemática basada en la indagación contribuya a la comprensión de conceptos matemáticos de los alumnos, lo que debe posibilitar que los conocimientos matemáticos sean más duraderos y funcionales en los diversos contextos, y así ayudará a desarrollar la curiosidad, creatividad, reflexión crítica, razonamiento analítico y su autonomía como estudiante. Estos aportes serán uno de los sustentos en nuestra investigación emprendida.

Bajo este enfoque Avilés G. (2012) realizó un estudio para implementar la metodología de indagación para el aprendizaje de la geometría, en el marco de un enfoque constructivista. Para ello analizó textos y artículos actualizados que se relacionaban con la “metodología indagatoria y la teoría constructivista de Piaget” (p.1), llegando a la conclusión de que es necesario implementar la metodología indagatoria en el proceso de enseñanza, debido a que esta fomenta el “aprendizaje significativo mediante preguntas, las cuales generan nuevas respuestas por medio de la observación, análisis, síntesis, e identificación de patrones; lo cual permitirá implementar procesos de significación y resignificación”(p.10) de los nuevos conocimientos centrados siempre en el pilar “aprender a aprender”, acción esta que permitirá al alumno a enfrentarse consigo mismo y discutir el rumbo que debe seguir para hallar la respuesta a sus cuestionamientos.

Jauregui, Goienetxe y Vidales (2018), realizaron una investigación sobre la predisposición de los estudiantes hacia las estrategias indagadoras de aprendizaje.

Para ello se trazaron como objetivos:

Describir las opiniones de los estudiantes de las regiones de Bretaña y País Vasco en relación a las estrategias de enseñanza y aprendizaje basadas en la indagación, para luego analizar y comparar los puntajes de los estudiantes en relación a las actividades académicas realizadas en el aula. En el estudio han participado estudiantes entre 12 y 15 años de edad, siendo la distribución de la siguiente manera, un total de 568 alumnos contestaron el cuestionario de la zona de Bretaña y 452 estudiantes de la zona del País Vasco. Los alumnos de 12 años representan el 25.1%, los de 13 años 25.1%, los de 14 años 24.7% y los de 15 años 25.1%. La muestra estuvo dividida en 51.8% varones y 49.2% mujeres (p.113).

Los autores, Jauregui, Goienetxe y Vidales (2018), concluyen manifestando que:

Los docentes de educación secundaria utilizan mayoritariamente actividades de indagación estructurada en su práctica habitual. Se debería formar a los docentes para desarrollar estrategias de enseñanza y aprendizaje basadas en la indagación guiada y abierta y, de esta manera, mejorar la motivación y la implicación de los estudiantes. El diseño de secuencias de enseñanza y aprendizaje orientadas a la indagación y centradas en el estudiante, la organización del aprendizaje basada en situaciones reales, así como el fomento de la evaluación formativa, mejoran los aprendizajes de los estudiantes” (pp. 120-121)

1.2 Justificación

La relevancia de esta investigación está en que en la propuesta del Currículo Nacional, el aprendizaje de la matemática está centrada en el enfoque de resolución de problemas; en este sentido, es importante tener en cuenta lo que manifiesta Hofstadter (1982), “las capacidades

esenciales de la inteligencia humana se favorecen desde las matemáticas, cuando estas implican la resolución de problemas y estos a su vez tengan diversas soluciones” (p.72), esto invitará a los estudiantes a realizar estimaciones, conjeturas y, finalmente, a sugerir explicaciones de la resolución. Ante esto, en esta investigación vinculamos la resolución de problemas con la indagación y la creación de problemas.

El Informe Cockroft (1985) señala, la importancia de enseñar y aprender las matemáticas mediante la resolución de problemas vinculados con la vida cotidiana; por otra parte, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), como se cita en García (1992, p. 112), declaraba ya hace más de 15 años que “el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas”. Con el propósito de favorecer la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas, esta investigación propone analizar la creación de problemas, por los propios estudiantes apoyándose en la indagación.

Por otro lado, el documento del NCTM (2000) con respecto a la resolución de problemas nos dice:

Los estudiantes aprenden más y mejor cuando ellos mismos toman el control de sus aprendizajes definiendo sus objetivos y controlando su progreso. Cuando los alumnos son desafiados con tareas elegidas de manera apropiada, los estudiantes adquieren confianza en su habilidad para abordar problemas difíciles, desean resolver las cosas por sí mismos, muestran flexibilidad al explorar ideas matemáticas e intentar vías de solución alternativas, y disposición para perseverar. (p.20)

Así mismo, se sabe que la creación de problemas no se realiza de la misma manera por los diferentes sistemas educativos, según Grouws & Cebulla (2000). Manifiestan que, en Estados

Unidos, se dedica más del 90% del tiempo a realizar procedimientos rutinarios; por ende, no se dedica tiempo suficiente a la creación de nuevos procedimientos, ni mucho menos al análisis del proceso de la resolución de problemas. En contraste con los estudiantes japoneses, que pasan el 40% del tiempo a practicar procedimientos de rutina, 15% a la aplicación de estos conocimientos a nuevas situaciones y el 45% restante, las pasan inventando nuevos procedimientos y analizando situaciones novedosas para resolver los problemas matemáticos planteados.

En este sentido debemos tener en cuenta que la actividad de creación de problemas fomentan la creatividad, para ello Malaspina (2015), sostiene que es importante ir estimulando la capacidad de crear problemas, desde los más sencillos, hasta poder llegar a niveles más complejas, que se pueden alcanzar mediante la elaboración de preguntas que relacionen las ideas y los conceptos matemáticos, que esencialmente es el método de la indagación, con el cual se va construyendo el conocimiento matemático. Para Castro (2011), la creación de problemas tiene diversas ventajas, como puede ser el “incremento del conocimiento matemático, la motivación por el estudio de la materia, la reducción del miedo o la preocupación por las Matemáticas” (p.6) y sobre todo proporciona información al profesor sobre las destrezas de sus alumnos para usar su conocimiento matemático ante nuevas situaciones problemáticas.

Para fines de la presente investigación, se ha considerado el objeto matemático áreas de regiones poligonales, debido a la importancia que tiene este concepto en la vida cotidiana, el cual debe ser conocido con mayor profundidad. En este sentido consideramos que el enfoque de creación de problemas y la indagación fomentan la creatividad, sobre todo en contextos de creación libre, donde la formulación de problemas debe ser vinculada al contexto cotidiano de los estudiantes.

El área de regiones poligonales es de suma importancia en la educación matemática, porque permite la resolución de problemas de la vida cotidiana, así como la construcción y enseñanza de otros conceptos matemáticos, como puede ser: fracciones, porcentajes, proporcionalidad, integración, volumen, entre otros; así mismo contribuye en el desarrollo de las habilidades matemáticas, como es la resolución de problemas, la descomposición de figuras planas, los razonamientos inductivos y deductivos, argumentaciones lógicas, visualización de figuras. Sin embargo, es pertinente mencionar que este tópico (área de regiones poligonales) no ha sido considerado con la profundidad que se requiere en los textos instructivos del cuarto año de educación secundaria del año 2016, proporcionados por el Ministerio de Educación (MINEDU). En los libros de las editoriales COREFO Y COVEÑAS del año 2015, que se utilizan en instituciones educativas privadas, consideran el tópico con mayor amplitud a manera de ejercicios, que conllevan al estudiante solamente al cálculo y ejercitación de enunciados. Caso contrario sucede con los libros proporcionados por el MINEDU, que los pocos problemas que se presentan son contextualizados y su resolución moviliza el desarrollo de más capacidades y el logro de las competencias del área. Ver Anexos 07, 08 Y 09.

Por otra parte, las investigaciones hechas por diversos educadores matemáticos dan buenas razones para considerar el área de regiones poligonales como objeto matemático de la presente investigación, porque, existe un bajo nivel académico de los alumnos al momento de resolver problemas de área de regiones poligonales en evaluaciones nacionales e internacionales (De Araújo y Dos Santos, 2009); hay un considerable número de informes que destacan las complicaciones que tienen los alumnos al momento de comprender el concepto de área; en este sentido Marmolejo (2015); nos manifiesta que:

El reconocimiento que tales dificultades persisten de un nivel escolar a otro, incluso en la universidad (Kospentaris, Spirou y Lappas, 2011); el interés actual en la literatura

especializada (Zacharos, 2012) y en las instituciones que forman (Roldán y Rendón, 2014) y cualifican (Marmolejo, 2013) educadores matemáticos en el diseño, aplicación y evaluación de secuencias de enseñanza que promuevan el estudio del área, así como el análisis de cómo el área de regiones poligonales es tratada en los textos escolares de diferentes países. (p.46)

En relación a los libros de consulta escolar, De Araújo y Dos Santos (2009) nos dicen que las estrategias que permiten organizar matemáticamente el concepto de área, suelen ser organizadas o sistematizadas por los alumnos o profesores, por estar ausentes en los libros, así como las actividades relacionadas con la comparación de áreas. Por otro lado, Olmo, Moreno y Gil (1989), afirman que:

Normalmente en los textos de uso, se sobreentiende, que el alumno ha descubierto por sí mismo el concepto de área y suele pasar directamente a la medida. O bien, se sale del paso dando una definición más o menos abstracta de superficie, pero sin realizar actividades orientadas a que se distinga esta cualidad de las restantes o compare objetos respecto de la misma sin necesidad de meditarlos. (p.46)

En este sentido los aspectos visuales u holísticos no son considerados en la construcción del concepto de área, muy por el contrario, la actividad se limita a cuestiones aritméticas y algebraicas, olvidándose la auténtica finalidad del concepto de área.

Por otra parte, en las pruebas nacionales (las censales en el Perú) e internacionales (PISA), sí han considerado el objeto matemático áreas, en cuestiones que merecen desarrollarse. Ver anexo 03 y 04. En la evaluación de PISA del año 2003, se considera el contenido de espacio y forma, que involucra fenómenos del mundo visual y físico, ver anexo 02. Considerando el informe de Moreano (2017), el Perú en esta evaluación internacional (PISA), está ubicado en

el nivel 1; dicha evaluación consta de 6 niveles, siendo este último la mejor ubicación, ver anexo 01. Es decir, el 65,5% de los alumnos solo responder a los cuestionarios que implican situaciones conocidas, con información necesaria y clara. Que solo pueden realizar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas, realizar acciones sencillas que se predicen inmediatamente de los estímulos presentados, esta situación es preocupante para todos los que enseñemos matemática y nos invita a reflexionar y tomar medidas urgentes para revertir dichos resultados. Así mismo, dentro de los resultados a nivel latinoamericano y Organización para la Cooperación y el desarrollo Económico Americano (OCDEA), el Perú está ubicado en el tercer puesto. Es así como el Perú tiene un 21,0% de escolares que están ubicados en el nivel II; el 9.8% está en el nivel III y 2,7% está ubicado en el nivel IV. Finalmente, menos del 1% está ubicado en el nivel 5. Ver anexo 05 y 06. — Por ello se puede decir que los estudiantes peruanos tienen dificultades para trabajar y desarrollar modelos en situaciones problemáticas cada más complejas, así como para desarrollar estrategias nuevas de resolución de problemas.

En la evaluación censal, aplicada a estudiantes del segundo año de secundaria, en el año 2015, 2016 y 2018 por el MIMEDU a nivel nacional, donde los rangos de nivel van de forma ascendente desde: previo al inicio, inicio, proceso y satisfactorio; se obtuvo los siguientes resultados:

Tabla 1. Histórico de resultados nacionales según medida promedio y niveles de logro

| Nivel de logro | 2015 | 2016 | 2018 |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|
| Satisfactorio | 9,5% | 11,5% | 14,1% |
| En proceso | 12,7% | 16,9% | 15,9% |
| En inicio | 40,2% | 39,3% | 36,4% |
| Previo al inicio | 37,6% | 32,3% | 33,7% |

Fuente: Tomada de “Evaluación de logros de aprendizaje 2018”. Cuadro estadístico de la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC). 2019.

Del cuadro se desprende, que el grupo mayoritario de estudiantes se encuentran ubicados en los niveles previo al inicio e inicio, lo que indica que estos resultados no son nada alentadores para la población, ni para la comunidad educativa, y es natural preguntarse cuáles fueron las razones que llevaron a ello. Seguramente son muchas, entre ellas las desigualdades educativas en las diversas zonas geográficas, la ausencia de la metodología concreta usada en las aulas, el bajo presupuesto destinado al sector educativo, entre otros; pero lo que, si es cierto, es que urge cambios sustanciales para que contribuyan a lograr las competencias requeridas en el grado.

Ante esta situación se hace necesario proponer herramientas de trabajo que fortalezcan el desarrollo y logro de la capacidad requerida en el área como la resolución de problemas y es en esta línea que surge la propuesta de creación de problemas a través de la indagación, para que contribuya en la mejora de los aprendizajes de los estudiantes. Es necesario profundizar su conocimiento, desarrollar experiencias didácticas más motivadoras y de esta manera recoger elementos para proponer una estrategia para que los aprendizajes sean más profundos y con bases en las inquietudes, motivaciones y curiosidad científica de los estudiantes.

Sin embargo, se sabe que los procesos educativos de la enseñanza y aprendizaje de las ciencias basados en la indagación orientan a los estudiantes a buscar soluciones apropiadas con base en sucesivas preguntas. Al respecto Charpack (2006), determina que el aprendizaje basado en la enseñanza mediante preguntas es complicado, pero resulta significativo cuando se logra ver los resultados.

En este sentido la capacidad indagatoria propuesta por el Ministerio de Educación, en el Currículo Nacional (2017), está priorizada en el área de Ciencia y Tecnología, considerando las capacidades de; Problematiza situaciones para hacer indagación y diseña estrategias para hacer indagación. Esto implica que los estudiantes se planteen interrogantes sobre sucesos y

fenómenos naturales; que puedan interpretar situaciones y a su vez formularse hipótesis. Así mismo conllevaría a que muchos docentes reconocen el valor del aprendizaje basado en la indagación, pero la mayoría considera que es un enfoque difícil para la enseñanza de las matemáticas, debido a la forma tradicional de enseñar matemática es calculando y conectando números, que solo se enfoca en el cálculo de resultados. Los maestros han enseñado matemáticas de esta manera durante años, y han generado en los estudiantes una visión muy pobre de las matemáticas, que no les motiva a estudiar y profundizar; más aún, les resulta intimidante y difícil de comprender. Pero hay que tener en cuenta que, en la enseñanza basado en la indagación, los profesores usan preguntas, problemas y escenarios contextualizados para ayudar a los estudiantes a aprender a través del pensamiento individual por indagación. En lugar de simplemente presentar formas de resolver problemas, el docente alienta a los alumnos a que realicen preguntas sobre el problema y recurrir a su intuición para comprenderlo. Al vincular la resolución de problemas con la formulación de preguntas, surge de manera natural la vinculación de la creación de problemas con la formulación de preguntas y con la indagación. Por ello el aprendizaje basado en la indagación también se enfoca en dejar que los estudiantes hagan sus propias preguntas, esencialmente brindando su propia indagación. En este sentido Avilés (2012), nos dice que la “escuela tiene el compromiso de formar futuros ciudadanos más flexibles, eficaces, autónomos en su aprendizaje, y no solo de conocimientos o saberes específicos que suelen ser menos duraderos, sino en procesos de auto aprendizaje” (p.4).

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

¿Cómo desarrollar la capacidad de crear problemas sobre áreas de regiones poligonales, mediante el aprendizaje basado en la indagación en estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular?

1.3.1 Objetivo general.

- Analizar la influencia del aprendizaje basado en la indagación, en el desarrollo de la capacidad de creación de problemas sobre áreas de regiones poligonales, en estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular.

1.3.2 Objetivos específicos

- Describir cómo los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular practican la indagación en sus aprendizajes de matemática.
- Analizar los problemas sobre áreas poligonales que crean los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, antes de recibir estimulación a su aprendizaje basado en la indagación.
- Comparar los problemas sobre áreas de regiones poligonales que crean los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, luego de recibir estimulación a su aprendizaje basado en la indagación.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En el presente capítulo se dará a conocer los aspectos históricos del objeto matemático que se considera en la presente investigación; para ello se ha recurrido a textos académicos relacionados a conceptos fundamentales vinculados al objeto matemático, área de regiones poligonales, entendida esta como una magnitud, adoptando una unidad de medida para calcularla.

2.1 Aspectos matemáticos/históricos/epistemológicos.

Las matemáticas a lo largo de la historia de la humanidad estuvieron ligadas al desarrollo de las sociedades, debido al papel que jugó en la solución de problemas que ocasionaba la naturaleza y las necesidades de las sociedades emergentes.

A continuación, damos a conocer los orígenes y desarrollo del concepto de área en las civilizaciones que son referentes en el estudio del desarrollo de la matemática, como son la cultura egipcia, babilónica y griega.

2.1.1 Civilización Egipcia.

Las matemáticas de la cultura egipcia según Castillo J. (2013), se “desarrolló a orillas del río Nilo entre 3100 A.C. y el 332 A.C. dicha cultura consideraba que las matemáticas tenían un origen divino, por ende, eran estudiados por los faraones y sacerdotes” (p.3).

En este sentido no dice Castillo (2013), que la geometría surge como necesidad práctica de los habitantes y de los Faraones. A razón de los continuos desbordes del “río Nilo, se crearon tecnologías y reglas prácticas para el cálculo del área de terrenos que cambiaban de forma y tamaño” (p.3) después de cada desborde del río Nilo. Una vez culminado el desborde del río, el gobernante de la zona enviaba a los agrimensores, que tenían la responsabilidad de trazar los nuevos límites de las parcelas afectadas por la inundación.

Un documento importante a tomar en cuenta es “en el papiro de Rhind, que fue escrito por los años 2000 a 1700 a.n.e., los escribas establecieron las recetas para el cálculo de áreas” (Castillo, 2013, p.4). En el manual se dice que se empleaba el codo cuadrado o setat como

unidad de medida para el cálculo de las superficies. En unidades actuales, un codo real egipcio equivaldría a 52,3 cm.

Del mismo modo nos dice que para el cálculo del área de cualquier cuadrilátero de lados a, b, c, d , se obtenía de la siguiente manera, $(a+c)/2 \times (d + b)/2$, lo cual solo es válido para un rectángulo y cuadrado.

Por otra parte, Gairin J. (1999), manifiesta la existencia de otro método que utilizaban los egipcios para calcular el área de triángulo, el cual era transformar el triángulo en un rectángulo o viceversa.

2.1.2 Civilización Babilónica

La cultura babilónica lo conformaban, Castillo (2013), “diferentes pueblos, como los sumerios, los caldeos, los asirios, entre otros, que se desarrollaron en Mesopotamia entre los años 5000” (p.5) a.n.e.. Las exploraciones arqueológicas señalan que la geometría babilónica estaba relacionada con las mediciones de longitud, área y volumen.

En este sentido J. J. O'Connor (citado por Castillo, 2013) manifiesta que “los babilonios poseían fórmulas que permitían facilitar el cálculo de áreas, como la de triángulos, cuadriláteros, trapecios. Para el cálculo del área de cuadriláteros realizaban el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos, algo parecido a los egipcios” (p.5). Para los trapecios con un lado perpendicular a los lados (bases) paralelos, el área estaba dada por lo que ahora resumimos en la fórmula $A = c(a + b)/2$, donde a y b son las longitudes de los lados paralelos y c es la longitud del lado perpendicular a los lados formados. Para el cálculo de área de triángulos se utilizaba las semejanzas y la terna pitagórica, para ello se buscaba llegar a formar triángulos rectángulos.

2.1.3 Civilización Griega

La geometría griega tiene como origen a la egipcia y la introdujo Thales (600 A.C.) y tubo por finalidad principal brindar solución a problemas de la vida cotidiana como por ejemplo la medición de la altura de ciertos monumentos por medio del cálculo de las sombras que esta proyectaba.

Los aportes de la escuela de Alejandría fueron muy grandes en el campo de la matemática; en especial mediante la obra Los Elementos, de Euclides. Sobre este libro, Castillo (2013) nos dice:

En el primer libro, de los 13 que lo conforman, se encuentran las proposiciones I.35 al I.45, en ella están todas las ideas de lo que hoy en día representamos a través de fórmulas, como por ejemplo están las fórmulas para determinar el área de paralelogramos y triángulos. Sin embargo, es necesario mencionar que Euclides no deja explícitos los conceptos de magnitud y tamaño. Pero en el caso del área, el patrón de comparación siempre ha sido el cuadrado (p.6).

El método de aplicación de áreas de Euclides, consiste en la descomposición de un polígono en triángulos, que no deben estar superpuestos el uno sobre el otro; en este sentido, ahora decimos que si tenemos un polígono P , y éste se descompone en dos T_1 y T_2 , o sea que $T_1 \cup T_2 = P$, de tal forma $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Decimos entonces que P se descompone en T_1 y T_2 , o que P se compone de T_1 y T_2 .

2.1.4 Aproximación a los conceptos de área de regiones poligonales.

Para los fines de la presente investigación tomaremos en cuenta la definición de área, considerada por Moise E. (1972), Flores J y Comeca B. (2012), las cuales darán luces a la investigación y brindarán mayor entendimiento del objeto matemático.

Definición 1. (Región Triangular)

Una región de características triangulares es la reunión del triángulo y de su interior.

Definición 2. (Región poligonal)

Una región de forma poligonal es la reunión de un número finito de regiones triangulares, donde los triángulos solo pueden intersectarse en los bordes o en los vértices.

Cuando asignamos un área a una región poligonal, asociamos un número real positivo a una región poligonal R del plano. Formalmente, podemos decir que se tiene una función a (función área) que asigna un número real positivo $a(R)$ (el área de R) a cada región poligonal R de un conjunto \mathcal{R} de regiones poligonales. Esto es, $\mathcal{R} = \{R; R \text{ es una región poligonal en el plano}\}$; así, definimos a como sigue

$a: \mathcal{R} \rightarrow \text{Reales positivos}$

$R \rightarrow a(R)$

Flores (2012), “Una función de esta naturaleza, cuyo dominio es un conjunto de regiones poligonales y cuyos valores son números reales positivos, se la denomina función área” (328).

Axioma 16

Flores (2012), “A toda región poligonal R le corresponde un número real positivo único que lo llamaremos y simbolizamos como $a(R)$ (área de la región poligonal R) tal que $a(R) > 0$ ” (p.328)

Axioma 17

Flores (2012), “Si R_1 y R_2 son regiones de áreas triangulares congruentes (es decir, si los triángulos correspondientes son congruentes), entonces $a(R_1) = a(R_2)$ ” (p.328).

Axioma 18

Flores (2012), “Si R_1 y R_2 son dos regiones poligonales que solo se intersecan en bordes o vértices o son disjuntas, entonces: $a(R_1 \cup R_2) = a(R_1) + a(R_2)$ ” (p.328) .

Si dividimos una región en dos partes, precisaremos las condiciones para que el área de la región sea la suma de las áreas de las dos partes.

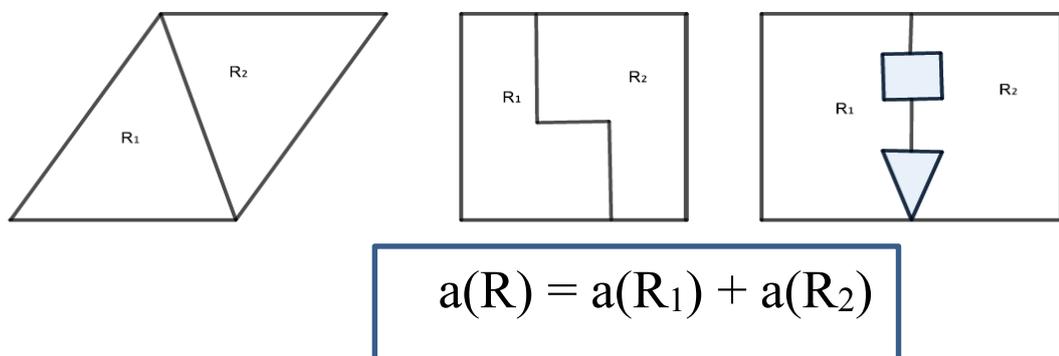


Figura 1. Ilustración del axioma 18. Tomada de Moise, 1972, p. 293.

En cada una de las figuras anteriores, la región total R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2 . En cada caso, R_1 y R_2 se intersecan, a lo más, en un número finito de segmentos o un número finito de puntos. Con estas condiciones, podemos calcular $a(R)$ mediante adición.

Moise (1972), “En general, si R_1, R_2, \dots, R_n son n regiones poligonales que solo se intersecan en bordes o vértices (o son disjuntas), entonces : $a(R_1 \cup R_2 \dots \cup R_n) = a(R_1) + a(R_2) + \dots + a(R_n)$ ” (p.305).

Hay casos simples en los cuales una región es la reunión de otras dos regiones, pero para ellos no es válida la fórmula anterior. Si R_1 y R_2 son áreas de regiones triangulares como en la figura 02 y R es su reunión, entonces $a(R)$ es menor que $a(R_1) + a(R_2)$. (Al sumar, contamos dos veces el área de la región en forma de diamante de la parte central de la figura.).

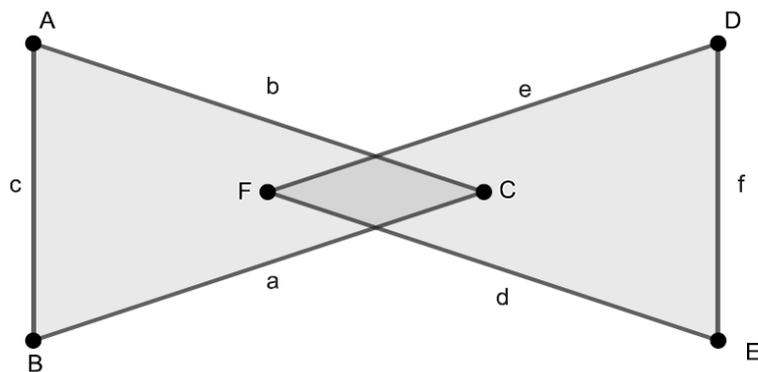


Figura 2. Adición de áreas. Tomada de Moise, 1972, p. 294.

Unidad de área

Igual que para las magnitudes longitudinales y angulares, la unidad de área puede elegirse arbitrariamente. Sin embargo, por costumbre se escoge como unidad de área, la de un cuadrado cuyos lados miden la unidad de longitud. Si, por ejemplo, la unidad de longitud fuese el

centímetro (cm), entonces la unidad de área correspondiente sería llamada centímetro cuadrado (cm^2). Un cuadrado de lado unitario tiene área unitaria.

Axioma 19

Flores (2012), “El área de una región cuadrada, es el cuadrado de la longitud de su lado” (p.329).

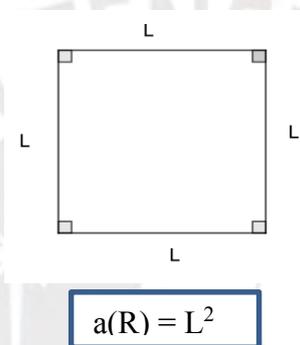


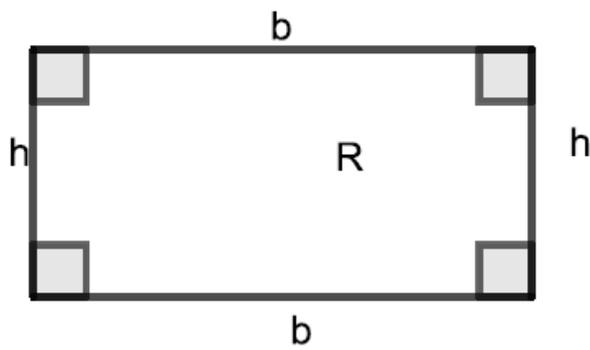
Figura 3. Axioma 19. Tomada de Moise, 1972, p. 294.

De ahora en adelante, para abreviar, nos referimos al área de un cuadrado, al área de un triángulo, y así sucesivamente. En cada caso, entendemos, desde luego, se trata del área de la región correspondiente. También, hablamos de la base y la altura de un rectángulo, refiriéndonos a la longitud de la base y la longitud de la altura. Esto simplifica las expresiones y, en cada caso, el alumno deberá decidir, a base del contexto, si nos referimos a un segmento o al número que constituye su medida.

Ahora, podremos, mediante un simple artificio, determinar el área de un rectángulo.

Teorema

Moise (1972), “El área de una región rectangular es el producto de las longitudes de su base y su altura” (p.306).



$$a(R) = bh$$

Figura 4. Área de un rectángulo. Tomada de Moise, 1972, p. 295.

Demostración: Considérese la figura de la derecha, construida a partir de un rectángulo de lado b , h , cuya área A deseamos obtener.

Las áreas de los cuadrados de lados b , h son b^2 y h^2 , por el axioma 19; y el área del cuadrado grande, de lado $b+h$, es $(b+h)^2$.

Por tanto, mediante aplicación repetida del postulado de adición de áreas.

$$b^2 + 2A + h^2 = (b+h)^2$$

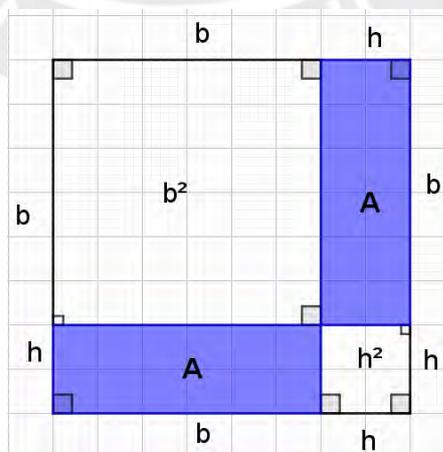


Figura 5. Construcción geométrica. Tomada de Moise, 1972, p. 295.

Y algebraicamente

$$(b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2$$

En consecuencia

$$2A = 2bh \text{ y tenemos}$$

$$\boxed{A = b \cdot h}$$

Como queríamos demostrar,

Si el alumno se pregunta cómo sabemos, a base de los axiomas, que los dos rectángulos de la figura tienen la misma área, debe examinar la figura de la derecha. Los cuatro triángulos son congruentes y, por tanto, tienen la misma área; y el área de cada rectángulo es dos veces el área de cada triángulo.

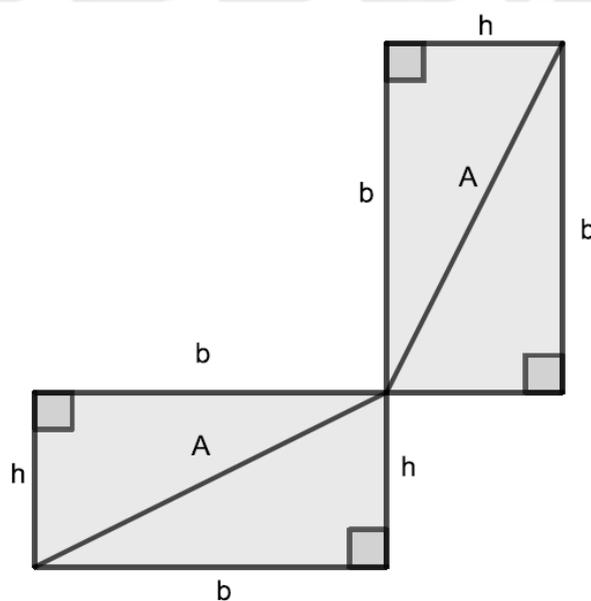


Figura 6. Triángulos congruentes. Tomada de Moise, 1972, p. 295

2.2 Área de regiones poligonales en los libros didácticos

En los libros de didáctica de las matemáticas se toca el tema de polígonos, de manera sucinta, en este sentido en el libro de Bressan A., Bosisic B. & Crego K. (2013) titulado Razones para enseñar geometría en la educación básica, el cual fue promocionado por el MINEDU, como material de consulta para los profesores, considera la geometría desde la óptica lúdica y contextualizada buscando con ello fortalecer las habilidades visuales, constructivas, comunicativas y lógicas. En relación al tema de regiones poligonales no lo considera como un capítulo aparte.

Por su parte Valiente S. (2000), en el libro didáctica de las matemáticas, propone la metodología, que tiene como intención pedagógica llevar al estudiante a la discusión o polemizar sobre los problemas planteados. Estamos hablando del método socrático, que tiene como objetivo principal conducir a los discentes por el sendero del aprehender el conocimiento, auxiliado en el recurso del interrogatorio que, en forma ordenada, conduce el maestro a sus estudiantes. Bajo esta perspectiva podemos decir que existe un acercamiento hacia nuevos conocimientos que el estudiante realiza por indagaciones que lo conducirán a un mejor entendimiento del problema analizado.

Por otro lado, Rico L. & Moreno A. (2016), en el libro Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria, abordan las regiones poligonales de diferentes maneras, desde las paradojas matemáticas y su relevancia en el razonamiento e incluso en la preparación de materiales, siendo el Tangram un elemento que sirve para la introducción al tema de áreas de regiones poligonales.

Así mismo se ha analizado los textos de consulta de los estudiantes del cuarto año, entre ellas tenemos la editorial Coveñas M. (2016) y COREFO (2015), que considera el tema de polígono y áreas en capítulos distintos, en este sentido los polígonos son tocados desde el plano de construcción ya sea regular o irregular. En cuanto a área, se centra en figuras como el triángulo, cuadrado y polígonos regulares. Los problemas que se plantean en el libro se centran en la ejercitación y la aplicación de propiedades preestablecidas para el cálculo de áreas. Ver anexo 08 y 09

En los textos revisados para la presente investigación, están ausentes actividades pedagógicas que involucren el incremento de la capacidad indagatoria de los alumnos, como propuesta didáctica; en este sentido, es necesario recurrir a otras fuentes para la presente investigación.

Por otro lado, el cuaderno de trabajo de matemática del cuarto año (2017), proporcionado por el Ministerio de Educación, los problemas planteados, se encuentran contextualizados, pero en relación con regiones poligonales son a lo mucho 4 problemas, que consideran el cálculo de áreas. En cambio, en el libro de Resolvamos problemas del mismo año, que también fue proporcionado por el Ministro de Educación del programa de jornada Escolar Completa, sí considera más problemas para desarrollar, los cuales tienen una contextualización. Ver anexo 7.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En los pasos del proceso de enseñanza de la matemática, muchas veces se cae en la rutina de solo ejercitar al estudiante ante un determinado problema, cuando la esencia es proporcionar las herramientas para que los estudiantes puedan aprender a aprender, con estrategias innovadoras que conlleve la atención y motivación para seguir resolviendo el problema.

En este sentido, en el presente capítulo, daremos a conocer los elementos teóricos que fundamenten la investigación emprendida tocando como primer punto los conceptos de indagación y su propuesta metodológica a desarrollarse en la educación matemática para perfeccionar los aprendizajes de los alumnos y por ende que contribuya a la resolución de problemas. Para ello se tomará en cuenta la propuesta de Artigue (2017), ¿Qué es la Educación matemática basada en la indagación?, de Gómez (2013). El aprendizaje por indagación o el método Moore. Como segundo punto tenemos la creación de problemas propuesto por Malaspina (2011); así mismo, se tomará en cuenta los aportes de Fernández (2014), en relación a la invención de problemas.

La metodología a utilizarse en la presente investigación será la descriptiva, que considera un estudio de caso y a su vez utiliza la técnica de la recolección de datos.

3.1 Marco teórico

El aprendizaje por indagación en la enseñanza de las matemáticas, está basada en que el alumno adquiere los conocimientos y destrezas partiendo del planteamiento de preguntas sobre el problema. Es una propuesta que utiliza el método Socrático, el cual consiste en realizar preguntas al estudiante con la finalidad de que se formule por sí mismo algunas conjeturas, las cuales serán respondidas mediante la indagación. De esta manera el alumno construye su conocimiento activamente y de manera motivada. Al respecto Erick y Reed (2002), mencionan que el aprendizaje por indagación no consiste en la memorización de situaciones, sino que se trata de que el estudiante realice una adecuada formulación de interrogantes y a su vez halle las soluciones adecuadas a las interrogantes y problemas que se ha planteado. La indagación es una actividad que requiere de mucha responsabilidad, por tanto, es necesario que se realice una adecuada planificación.

Por otra parte, el Fondo Nacional de Desarrollo de la Educación Peruana (FONDEP) (2013) sostiene que:

Mediante la indagación se permite a los niños a centrarse en un tema específico y plantear preguntas a partir de las cuales inicia el recorrido hacia la búsqueda de información, recogiendo datos de diferentes fuentes, socializando y analizando la información, hasta obtener las conclusiones. Uno de los aspectos principales de este método es la “experimentación”, es decir darles a los niños la oportunidad de buscar la información en contacto directo con su entorno y con los materiales. Otro de los grandes aportes de la indagación es que favorece la metacognición, al reflexionar sobre la propia actividad de aprendizaje, e invita al estudiante a que recuerde y retome las acciones que permitieron recoger la información mediante la experimentación y las evidencias que permiten llegar a conclusiones. (pp.16-17)

Por otro lado, Gil y Cañal (citado por Izquierdo F. 2016) manifiestan que la enseñanza por indagación consiste en plantear al estudiante situaciones problemáticas “abiertas, con el fin de que sean capaces de buscar soluciones y respuestas a esas cuestiones formulando y verificando hipótesis, diseñando y poniendo a prueba experimentos, controlando variables” (p.10). Con estas acciones lo que se busca es la autonomía del estudiante con la finalidad de involucrarlo al máximo en el aprendizaje.

En relación a la creación de problemas, que la vinculamos con la indagación, en la presente investigación consideramos la propuesta de Ellerton (2012) para la invención de problemas, llamado Marco de Aprendizaje Activo, que se desarrolla en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta propuesta se basa en las acciones pasivas y activas que desarrolla el estudiante.

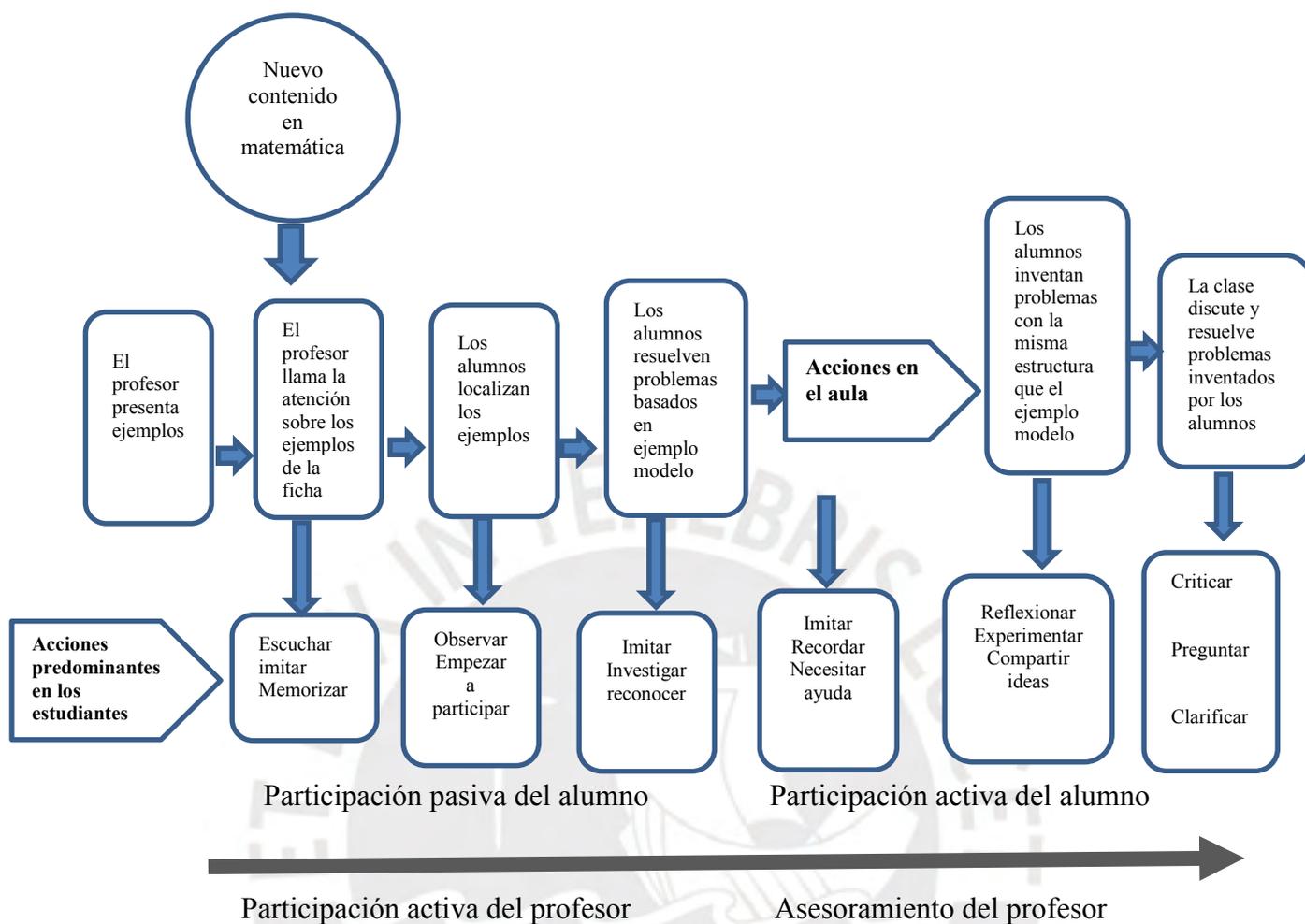


Figura 7. Proceso de indagación. Tomada de Bravo 2015, p 50.

3.1.1 La indagación en matemática

La indagación es un término usado, para hacer referencia a la investigación de conocimiento o información mediante el método de hacer preguntas, es decir practicar el método Heurístico en las clases. El cual hace uso de algunas herramientas: Análisis del enunciado; Representaciones externas y modelo de un plan; Aprehensión global de una forma; Razonamiento progresivo y Razonamiento regresivo; Participación y generalización; Problemas análogos.

En este sentido la indagación matemática surge de una pregunta (indagaciones internas) o un problema planteado, las posibles respuestas deben realizarse a través de la observación y la exploración; para ello se realizan experimentos mentales, materiales o virtuales; los cuales buscarán conectar con preguntas ya respondidas y que tienen analogías relevantes para la pregunta que se está investigando.

Al respecto, Artigue (2017), menciona que la indagación matemática parte de una pregunta o problema y las respuestas se buscan a través de la observación y la exploración; se realizan experimentos mentales, materiales o virtuales; se buscan conexiones con preguntas ya respondidas y que tienen analogías relevantes para la pregunta que se está investigando; se ponen en juego técnicas matemáticas conocidas y se adaptan cuando es necesario. Este proceso de indagación conduce a respuestas hipotéticas, a conjeturas que requieren validación. Dicho proceso se resume en la siguiente figura.

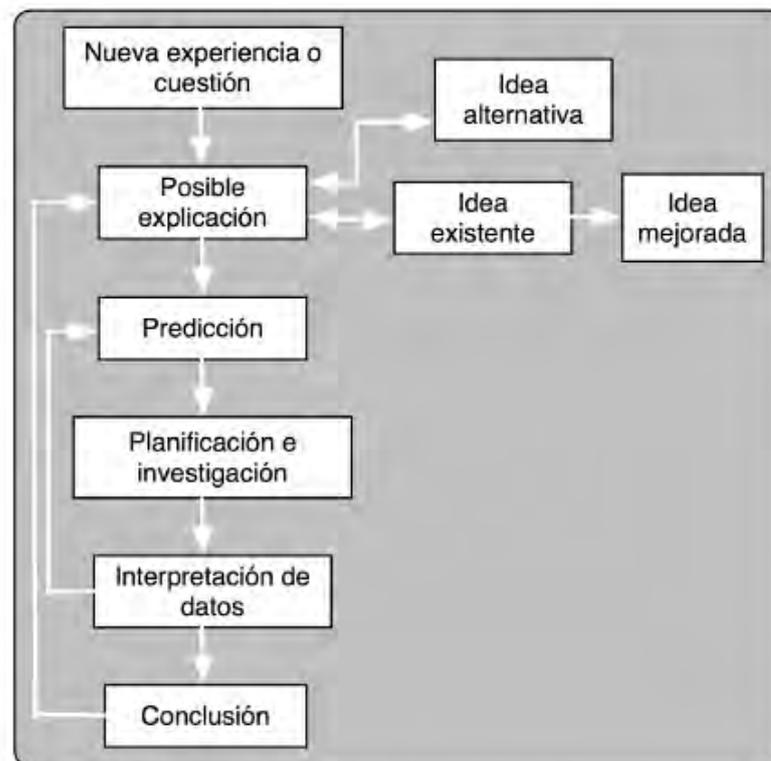


Figura 8. Modelo de aprendizaje de la ciencia a través de la indagación. Tomada de Artigue (2017), p.594.

Por ello, Artigue y Blomhoj (2013) relacionan la resolución de problemas con el aprendizaje basado por indagación manifestando:

Los estudiantes tienen que desarrollar sus propias estrategias y técnicas cuando se enfrentan a problemas no rutinarios; tienen que explorar, conjeturar, experimentar y evaluar; se les da responsabilidades matemáticas sustanciales y generalmente son estimulados para que generen cuestiones por ellos mismos y para prever posibles generalizaciones de los resultados que obtienen (p. 802).

Considerando, por otro lado, la propuesta de Windschitl (2008) (citado por Vilchez G. y Bravo T. 2015), sobre la indagación basada en modelos, se ha considerado tomar en cuenta la siguiente secuencia: Problema planteado, conjetura que de una posible respuesta al problema, las variables que intervienen en el problema, la planificación y procesamiento de datos para su resolución, el análisis del proceso empleado en la resolución del problema y finalmente las conclusiones a las que nos lleva la resolución del problema, a partir de la conjetura planteada. Esta propuesta se utilizará en la elaboración de la ficha del anexo 15, sobre el planteo de procesos de indagación sobre áreas de regiones poligonales, ante una situación dada.

3.1.2. El aprendizaje por indagación

El aprendizaje por indagación en la matemática, es la adquisición de conocimientos y habilidades a partir de la formulación de interrogantes y problemas. Este método se asemeja al Socrático, que consiste en confrontar al estudiante con la ignorancia que podría tener sobre un

determinado tema, lo cual le debería motivar para salir de ella a través de la indagación. Es decir, que el estudiante es el responsable de construir su conocimiento y por ello no se le debería dar construido; esta responsabilidad se traspasa al alumno para que encuentre la solución más adecuada al problema, sin abandonarse en el intento de dar con la solución.

Por ello las preguntas de indagación ayudan a los estudiantes a identificar y organizar la experiencia del aprendizaje, debido a que la indagación implica especular, explorar, cuestionar y establecer conexiones, en este sentido las preguntas que pudieran formular los estudiantes pueden ser del tipo fácticas, que implica el recordar datos. Las preguntas del tipo conceptual, que busca analizar las ideas más importantes del problema. Las preguntas debatibles que tienen como propósito evaluar perspectivas y desarrollar el análisis crítico del problema.

3.1.3. Metamodelos y Modelos de situaciones problemáticas, para el método de invención, según Fernández Bravo.

Consideramos que algunos metamodelos propuestos por Fernández (2018), puedan ayudar en la valoración de los problemas creados por los estudiantes, en este sentido damos a conocer en la siguiente tabla las que se utilizaran en el análisis.

Tabla 2. Resumen de los metamodelos, Fernández (2018. pp.3-5).

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>METAMODELOS: Es un conjunto de clases de modelos de situaciones problemáticas diferentes, capaces de generar ideas válidas para resolver problemas. No son problemas para resolver, sino propuestas de alterar, modificar, crear, separar, transformar, enlazar un problema. El trabajo con metamodelos mejora la resolución de problemas, especialmente la comprensión de la tarea, es decir, la conexión del enunciado con la estructura matemática que subyace.</p> | |
| <p>GENERATIVOS: Son las primeras situaciones a las que se enfrentan los estudiantes, las cuales deben ayudar a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. Se fortalece la atención, la</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Situación sin número.</i> Se presenta un problema en las cual hay ausencia de datos numéricos. 2. <i>Informaciones de las que se puede deducir algo.</i> La información es presentada sin ninguna pregunta. Pudiendo ser carteles publicitarios, una frase, lista de precios. A partir de ellas deducirán ideas para luego clasificarlas. |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad a las ideas de los demás.</p> | <ol style="list-style-type: none"> 3. <i>Situaciones cualitativas.</i> Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico, pero de forma incompleta para llegar a una solución. 4. <i>Enunciados abiertos.</i> A través de una información de cualquier tipo, el estudiante inventa una situación problemática. |
| <p>DE ESTRUCTURACIÓN: Las partes del problema se compone: Enunciado, pregunta, resolución, solución. Las operaciones o conjunto de operaciones dan lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones.</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada.</i> El estudiante crea el enunciado, la pregunta y el proceso que lleva a la solución. 2. <i>Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática.</i> Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido. 3. <i>Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones.</i> Llegar a la solución dada y aplicar las operaciones indicadas. |
| <p>DE ENLACES: Es aquella que ayuda en la concordancia entre el enunciado del problema, la pregunta y la solución, Considerando las variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales y, experiencias propias.</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y resolver el problema. 2. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y una solución dada. 3. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y la operación a seguir en el proceso de resolución. 4. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. 5. Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas. |
| <p>DE TRANSFORMACIÓN. Implica la utilización de una gran diversidad de enfoques y diversidad de alternativas; con ello se dinamizará las relaciones mentales, lo cual ayudará al desarrollo del pensamiento matemático y a la consolidación de conceptos. En este caso se dará hincapié en la utilización de los métodos de análisis y síntesis.</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que se obtuvo anteriormente. 2. Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente. 3. Añadir o eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe. 4. Cambiar lo que sea necesario, y solo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto. 5. Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente. |

3.1.4 Creación de problemas matemáticos

En el proceso de creación de problemas por parte de los estudiantes Malaspina (2013), nos dice que el docente juega un papel fundamental en este proceso de creación de problemas matemáticos en sus clases. Pone hincapié en que el docente debe ser competente en matemáticas y en la didáctica de enseñanza, de esta manera podrá motivar adecuadamente a sus estudiantes en la creatividad y favorecer el aprendizaje mediante la creación de problemas; para ello Malaspina considera que el proceso del aprendizaje de las matemáticas debe ser dinamizado en las clases con los estudiantes de la siguiente manera:

- 1.- Secuencia de problemas.
- 2.- Soluciones y aproximaciones a las soluciones de los problemas
- 3.- Preguntas y respuestas.
- 4.- Conjeturas, demostraciones, refutación y afinamiento de conjeturas.
- 5.- Identificación de problemas.
- 6.- Creación de problemas.
- 7.- Soluciones o aproximaciones a las soluciones de los problemas creados.
- 8.- variaciones de los problemas creados.
- 9.- Comprensión de lo resuelto, de los conjeturado, de los métodos usados y del contexto matemático. (p.30)

Así mismo, Stoyanova y Ellerton (1996), citado por Bravo (2015), consideran que crear problemas es “el proceso por el cual los estudiantes, con base en sus experiencias matemáticas, construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos” (p.44). Para fines de la presente investigación consideraremos la propuesta de Malaspina (2013), que dice que la creación de problemas matemáticos es un

proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema a partir de un problema conocido (variación de un problema dado) o a partir de una situación dada (elaboración de un problema). Los cuales tienen cuatro elementos importantes: Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático.

En relación a estos cuatro elementos citamos a Malaspina y Vallejo (2014) que afirman:

La *información*: está constituida por los datos cuantitativos y relacionales que se dan en el problema.

El *requerimiento*: es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluye gráficos y demostraciones.

En cuanto al *contexto*: suele llamarse “problema contextualizado” a aquel que está relacionado con alguna situación real, con la vida cotidiana; sin embargo, consideramos que el contexto también puede ser formal o estrictamente matemático. En ese sentido, podemos afirmar que, en un problema, el *contexto* puede ser *intra-matemático* o *extra-matemático*. En el primer caso, como su nombre lo indica, el problema se circunscribe a lo matemático (por ejemplo, hallar el dominio de una función, graficar una ecuación de dos variables y hallar los factores primos que un número natural, son problemas que tienen contexto intra matemático). En el segundo caso, el problema está más vinculado a una situación real.

El elemento *entorno matemático* se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Ciertamente esto es relativo, pues depende del camino que se siga para resolver el problema. En el marco de la creación de problema para el aprendizaje, el entorno matemático puede ser el

punto de partida para la creación de nuevos problemas, como “el tema a tratar” (pp. 12-13)

Por tanto, Malaspina (2013), considera que la creación de problemas por “VARIACIÓN es el proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema mediante la modificación de la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático del problema” (p.12); es decir, se debe modificar uno o más de los cuatro elementos antes mencionados.

En cambio, los problemas creados por ELABORACIÓN surgen a partir de situaciones específicas; “es el proceso mediante el cual se crea un problema a partir de una situación problemática brindada con anticipación; la información para la elaboración del problema es obtenida mediante la selección o modificación de la información presente en la situación” (p.13).

Espinoza (2011), considera que el análisis de este tipo de problemas debe considerar la estructura semántica, sintáctica y matemática; para la presente investigación los elementos propuestos por Espinoza estarán contempladas en el elemento de la claridad.

3.2 Metodología y procedimientos

En este capítulo se expondrá la metodología a emplearse en la presente investigación, presentando en primer lugar el tipo de investigación en el cual se enmarcará nuestro estudio. Luego se expondrá el diseño de la investigación que implica la selección de la muestra de los estudiantes, la descripción y procedimientos que se aplicará, así como los instrumentos a utilizarse para la recolección de datos y el proceso de codificación y transcripción de las producciones de los discentes.

3.2.1 tipo de investigación.

La investigación emprendida es cualitativa del tipo exploratorio descriptivo con un estudio de caso, debido a que busca a un primer acercamiento al estudio de creación de problemas relacionados con áreas de regiones poligonales, con estudiantes del cuarto año de educación básica regular, teniendo como referencia el aprendizaje basado en la indagación.

3.2.2 Determinación de la muestra

La investigación se desarrolla con estudiantes del cuarto año de secundaria de educación básica regular, ubicados en el quinto superior académico en el área de matemática, se eligió este grupo de alumnos porque la indagación y creación de problemas son temas nuevos en el área de matemática y se prefirió trabajar con alumnos de mayor predisposición a las matemáticas, considerando que su participación sería más activa en la investigación. Para la obtención de dicha información, se recurrió a las actas académicas del Sistema de Información de Apoyo a la Gestión de la Institución Educativa (SIAGIE). La experiencia didáctica se realiza en cuatro sesiones, de tres horas pedagógicas cada una de ellas.

3.2.3 La metodología de trabajo.

En la metodología indagatoria, de acuerdo a Avilés (2012), debe considerar el análisis de la forma de las figuras creadas. Con ello se pone hincapié en el proceso de visualización, de observación, clasificación y la identificación de las propiedades que tienen los objetos matemáticos creados; de esta manera se está realizando un reconocimiento abstracto del objeto matemático estudiado. Desde esta perspectiva, la indagación debe fomentar el crecimiento de las capacidades y habilidades claves como, la observación y la resolución de problemas.

En este sentido los discentes participantes en un primer momento crean problemas de forma individual y luego socializan con la finalidad de buscar las adecuadas soluciones a los problemas que ellos mismos han creado. El docente, en este contexto, se vuelve un facilitador; son los propios alumnos quienes deberán diseñar sus propias conjeturas y deberán hacer nuevas interrogaciones. Esta es la finalidad y la razón de ser de la indagación, que tiene como objetivo primordial la búsqueda constante de nuevos conocimientos.

Por otra parte, al momento de realizar las diferentes actividades pedagógicas, que son netamente la formulación o creación de problemas por parte de los alumnos, se deberá tener en cuenta el método Moore que en la actualidad se le conoce como, *inquirí based learning*, el cual se puede traducir de las siguientes maneras: el aprendizaje por descubrimiento, el aprendizaje basado en lo empírico, el aprendizaje basado en la indagación y el aprendizaje indagatorio. Para fines de la presente investigación se considerará el aprendizaje indagatorio. La idea principal del aprendizaje indagatorio se resume en la frase: *implicame y entenderé*. Esto quiere decir que es primordial que el alumno sea el actor de su propio aprendizaje, que tenga la capacidad de indagar para dar con la solución; de esta manera habrá comprendido el problema; para lograr esta situación es necesario que el docente maneje la información del tópico enseñado, los pasos del aprendizaje por indagación y la enseñanza por indagación.

A continuación, se detallan algunas características del método Moore con adaptaciones para la presente investigación:

1. El material para la clase será preparado por el docente, el cual se distribuye de acuerdo con la dinámica de la clase; las modificaciones del material se realizan de acuerdo al grupo con el que se trabaja.

2. Se propicia el trabajo en equipo durante las clases para las prácticas generales; pero la creación de problemas se realizará en forma individual inicialmente y luego se solicita un trabajo colaborativo.
3. Los problemas creados sobre áreas de regiones poligonales se tendrán que entregar al investigador una vez finalizada la actividad. Cada estudiante escribe sus propias creaciones. Además, como parte del fomento del valor de la honestidad:
 - Si un estudiante ha recibido ayuda de otro en la creación de problemas, deberá escribir en la ficha de elaboración: problema N°... (Con la ayuda del estudiante...).
 - Si un estudiante ha trabajado con su compañero, con el permiso del profesor, deberá escribir en la ficha de elaboración: problema N°... (trabajo conjunto con el estudiante...).
4. Los problemas creados por los estudiantes serán expuestos en la clase, para su análisis de su vinculación con la indagación, de sus características y sus posibles soluciones. Los estudiantes participantes en la investigación podrán participar con preguntas relacionadas a sus experiencias de indagación, creación y resolución.

3.2.4 Elaboración de los instrumentos para recolección de datos.

La presente investigación tiene cuatro fases, para ello se elaboraron instrumentos en los que se propusieron actividades relacionadas con creación de problemas sobre áreas de regiones poligonales y la metodología de indagación.

Primera fase: En esta parte de la investigación se elaboró un instrumento para averiguar la capacidad indagatoria de los estudiantes seleccionados, en relación con situaciones geométricas. Para tal finalidad se propusieron figuras o situaciones sobre las cuales los estudiantes deben formular(se) preguntas indagatorias relacionadas con las matemáticas. Se consideran objetos matemáticos conocidos por los estudiantes y también algunas cuestiones relacionadas con áreas de regiones poligonales. **(Ver anexo 10).**

Segunda fase: En esta etapa se realizó un taller sobre creación de problemas, considerando la propuesta de Malaspina (2015), que es por variación y elaboración. Para ello se elaboró una presentación de orientaciones generales, para posteriormente invitar al estudiante a la elaboración libre e individual de problemas.

Para el análisis de los problemas creados consideramos los aportes de Ayllón (2012), que considera cuatro elementos a tener en cuenta, las cuales son: “la flexibilidad, fluidez, originalidad y claridad al crear problemas” (p.98). Al respecto Malaspina (2014a), dice que la flexibilidad se visualiza en el problema creado por variación cuando el estudiante está preparado para hacer modificaciones de mayor extensión, que conlleven a cambios sustanciales en relación al problema presentado. La originalidad se puede apreciar cuando el estudiante presente novedad en su problema creado, respecto al problema proporcionado y que se distingue con claridad de otras modificaciones hechas al mismo problema por otros estudiantes. La fluidez es cuando se crea más de un problema con ideas y propuestas diferentes, a partir de los problemas proporcionados.

En relación a la claridad del problema creado se considera la adecuada coherencia lógica y matemática, una adecuada redacción, que las preguntas sean pertinentes y que los contextos intra y extra matemático estén presente en el problema creado.

Para fines prácticos se elaboró una ficha de análisis. (Ver anexo 18).

Tercera fase: se debe diseñar un taller sobre indagación en matemáticas, para ello utilizaremos la metodología propuesta de Moore, el cual estará en una ficha donde se brinde información sobre la indagación matemática y la secuencia de la misma. Ver anexo 15.

Luego se pedirá a los estudiantes que completen la ficha del anexo 16, es necesario analizar en esta fase las conjeturas que podrían realizar los estudiantes de acuerdo al problema planteado. Las conjeturas o preguntas que se planteen los estudiantes favorecerán en la creación de problemas.

Cuarta fase: Se debe elaborar un instrumento para que los estudiantes pueden crear problemas, por variación o por elaboración, relacionados con áreas de regiones poligonales. Posteriormente se analizará los problemas creados, usando una rúbrica, en la cual se considere la fluidez, originalidad, flexibilidad, claridad, coherencia matemática, dificultad, etc.

Para la creación de problemas por variación, es necesario iniciar la sesión de aprendizaje considerando en la ficha de aplicación problemas que sean relativamente sencillos y que ofrezcan la posibilidad de realizar modificaciones a la información presentada, al requerimiento solicitado, al contexto o al entorno matemático.

En cambio, para la creación de problemas por elaboración es necesario vincular la información a situaciones reales del estudiante, que permitan plantearse preguntas y encontrar relaciones lógicas en el enunciado creado.

Posteriormente se procederá a analizar los problemas inventados por los estudiantes tomando en cuenta las rúbricas. Así mismo se procederá con algunas entrevistas para saber el nivel de satisfacción y dificultad que han tenido al momento de crear los problemas.

Se analiza mediante una rúbrica que considere fluidez, originalidad, flexibilidad claridad. Ver anexos 17 y 18.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo daremos a conocer, las características de los sujetos de investigación, los instrumentos aplicados, presentaremos las cuatro actividades realizadas, describiremos las sesiones realizadas y luego analizaremos los productos de los estudiantes en cada actividad.

4.1 Características de los sujetos de la investigación

La muestra es de 10 estudiantes del cuarto año de secundaria, los cuales están ubicados en el quinto superior del grado y pertenecen a la Institución Educativa de Acción conjunta N°3720 “Nuestra Señora de la Misericordia” del centro poblado Villa los Reyes, distrito de Ventanilla, Provincia Constitucional del Callao y Departamento de Lima. Del total de estudiantes participantes, solo uno es varón y sus edades son entre 15 y 16 años de edad. El grupo fue escogido según su promedio académico en el área de matemática.

4.2 Descripción de las secuencias de actividades.

La investigación esta dividida en cuatro sesiones, los cuales se desarrollarán según el siguiente orden:

Tabla 3. Actividades de la investigación.

| SESIÓN 01 | SESIÓN 02 | SESIÓN 03 | SESIÓN 04 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Diagnóstico sobre indagación.</p> <p>1. Aplicar una prueba diagnóstica en relación con la capacidad indagatoria de los estudiantes.</p> <p>2. Solicitar a los estudiantes la respuesta a varias preguntas relacionadas a un problema.</p> <p>3. Comentarios a los problemas de la prueba diagnóstica.</p> | <p>Taller sobre creación de problemas.</p> <p>1. Se presenta las ideas básicas sobre creación de problemas por variación o elaboración en general.</p> <p>2. Se presentan unos ejemplos de creación de problemas por variación o elaboración, tomando en cuenta las propuestas de Malaspina</p> <p>3. se presenta una ficha sobre creación de problemas relacionado a áreas de regiones poligonales</p> <p>4. Se solicita la creación de problemas por variación o elaboración de forma individual.</p> <p>5. Se socializa los problemas creados.</p> | <p>Taller sobre indagación</p> <p>1. Se presenta las ideas generales sobre indagación en el aprendizaje.</p> <p>2. Se muestra un ejemplo sobre el proceso de indagación ante problema matemático.</p> <p>3. Se solicita a los estudiantes a trabajar en grupos de tres para desarrollar la actividad.</p> <p>4. Se solicita a los estudiantes la creación de problemas por variación o elaboración.</p> | <p>Prueba final sobre creación de problemas mediante la indagación.</p> <p>1. Se solicita a los estudiantes la creación de problemas sobre áreas de regiones poligonales de forma individual.</p> <p>a. A partir de un problema dado</p> <p>b. A partir de una situación dada</p> <p>2. Se solicita el trabajo en grupos de tres para la creación de problema por variación o elaboración.</p> <p>3. Se socializa los problemas creados.</p> |

4.2.1. Etapas y objetivos de la investigación.

Tabla 4. Etapas y objetivos en la investigación

| ETAPAS | OBJETIVOS |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Exploración | <ul style="list-style-type: none"> Analizar cómo el aprendizaje basado en la indagación contribuye a la creación de problemas sobre áreas de regiones poligonales. |
| Experimentación | <ul style="list-style-type: none"> Analizar cómo los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular practican la indagación en sus aprendizajes de matemática. Analizar los problemas sobre áreas de regiones poligonales que crean los |

| | |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | <p>estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, antes de recibir estimulación a su aprendizaje basado en la indagación.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Analizar los problemas sobre áreas de regiones poligonales que crean los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, luego de recibir estimulación a su aprendizaje basado en la indagación. |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

4.2.2. Actividades y objetivos

Tabla 5. Actividades y objetivos

| Actividades | Objetivos de la actividad. |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Diagnóstico sobre indagación, a través de una prueba de diagnóstico. | <ul style="list-style-type: none"> • Analizar los resultados de la prueba tomada a los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, para medir el potencial indagatorio que poseen en el aprendizaje de las matemáticas. |
| Taller sobre creación de problemas por variación y elaboración. | <ul style="list-style-type: none"> • Proporcionar información sobre creación de problemas mediante variación o elaboración sobre áreas de regiones poligonales a estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, antes de recibir estimulación a su aprendizaje basado en la indagación, para que tengan ideas sobre creación de problemas. |
| Taller sobre indagación en el proceso de aprendizaje. | <ul style="list-style-type: none"> • Brindar información sobre el aprendizaje por indagación en matemática a los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, para que conozcan la secuencia del aprendizaje por indagación. |
| Prueba final sobre creación de problemas mediante la indagación. | <ul style="list-style-type: none"> • Analizar los problemas creados sobre áreas de regiones poligonales que crean los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, mediante una rubrica luego de recibir estimulación sobre aprendizaje basado |

| | |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------|
| | en la indagación, para ver el impacto de la indagación en la creación de problemas. |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------|

4.3. Descripción de las secuencias de actividades.

La investigación está dividida en cuatro actividades, las que están relacionadas a la indagación en el proceso de aprendizaje y la creación de problemas por variación y elaboración.

4.3.1 Diagnóstico sobre indagación

Se aplicó un test con escalas de Likert para diagnosticar el potencial indagatorio de los estudiantes del cuarto año de secundaria, adaptado de Jauregui, Goienetxe y Vidales (2018) y contextualizado para la presente investigación; posteriormente se plantea una prueba estructurada con tres preguntas abiertas, las cuales son resueltas con la guía del docente. Ver anexo 10.

La información obtenida se sistematiza en una ficha de resumen. Ver anexos 11 y 12, para luego analizar las respuestas que han brindado los estudiantes.

A continuación, presentamos el análisis de los resultados obtenidos en la actividad 01. Test para averiguar el potencial indagatorio de los estudiantes participantes.

Marca con una X la puntuación que indique tu grado de aceptación de las afirmaciones que se hacen en el cuadro. Marca 1, 2, 3 o 4. Tomando en cuenta que:

1: Totalmente en desacuerdo. 2: En desacuerdo. 3: De acuerdo. 4: Totalmente de acuerdo.

| | | | | | |
|---|----------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| A | Me gusta analizar situaciones problemáticas y pensar en sus posibles soluciones. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| B | Me gusta analizar por qué suceden las cosas. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| C | Me gusta realizar resúmenes y esquemas de lo que leo. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| D | Me gusta buscar información amplia en internet. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| E | Me gusta leer libros. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| F | Me gusta debatir en clase sobre un tema. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| G | Me gusta que me pidan mi opinión en clase. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| H | Me gusta que me pregunte el profesor/a | 1 | 2 | 3 | 4 |
| I | Me gusta justificar mis afirmaciones | 1 | 2 | 3 | 4 |
| J | Me gusta que me pregunten sobre lo que afirmo | 1 | 2 | 3 | 4 |

Cuadro resumen de puntuación del Test.

La escala de valores que se ha considerado para analizar el cuadro, tomando el promedio de cada enunciado y las respuestas de los estudiantes, será en los siguientes intervalos:

[0-0,9>: Bajo potencial indagatorio. [1-1,9>: Regular potencial indagatorio.

[2-2,9>: Adecuado potencial indagatorio. [3-4]: Alto potencial indagatorio.

Tabla 6. Resumen de test

| Enunciados Estudiantes | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | Suma de puntos por estudiante | Promedio por estudiante |
|-------------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------------------------|-----------------------------------------|
| E1 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 34 | 3,4 |
| E2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 29 | 2,9 |
| E3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 38 | 3,8 |
| E4 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 31 | 3,1 |
| E5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 29 | 2,9 |
| E6 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 36 | 3,6 |
| E7 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 28 | 2,8 |
| E8 | 4 | 4 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 28 | 2,8 |
| E9 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 27 | 2,7 |
| E10 | 3 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 37 | 3,7 |
| Suma de puntos por enunciado | 31 | 31 | 28 | 32 | 36 | 31 | 30 | 28 | 36 | 34 | | 3,17 promedio general del grupo. |
| Promedio por enunciado | 3,1 | 3,1 | 2,8 | 3,2 | 3,6 | 3,1 | 3,0 | 2,8 | 3,6 | 3,4 | | |

La prueba, fue aplicada a un grupo de 10 estudiantes del cuarto año de secundaria, con la finalidad de conocer algunas actividades que realizan en sus ratos libres y cómo estas se relacionan con su potencial indagatorio en su proceso de aprendizaje.

Los resultados obtenidos en el Test manifiestan lo siguiente:

En los enunciados A, B, D, F y G se obtuvo un promedio de 3,1 puntos; lo que indica que a la mayoría de estudiantes les gusta analizar situaciones problemáticas y pensar en sus posibles soluciones; analizar el porqué de los sucesos; buscar información por internet; ser crítico en las clases y brindar su opinión, rasgos que caracterizan a individuos que tienen un alto potencial indagatorio.

En los enunciados E, I y J; se obtuvo un promedio de 3,5 puntos; lo que indica que los estudiantes del grupo investigado son buenos lectores, les gusta justificar sus afirmaciones y les gusta ser preguntados; cualidades que afianza más el potencial indagatorio que pueden tener los estudiantes que participan en la investigación.

Sin embargo, en los enunciados C y H se obtuvo un promedio de 2,8 puntos, es decir que en relación a esquemas de resumen y responder preguntas del docente no lo realizan con mucho agrado, pero por el puntaje que se obtuvo como promedio, podemos decir que los estudiantes tienen un adecuado potencial indagatorio según nuestra escala de valoración.

En relación a los estudiantes podemos decir que E3; E6 y E10 tienen un alto potencial indagatorio. En términos generales podemos decir que, si el promedio 4 es lo máximo en puntuación que significaría un alto potencial indagatorio, el grupo que participa en la investigación se encuentra en 3,17; lo que indica, que estamos frente a estudiantes con un alto potencial indagatorio, lo que es favorable para el estudio, ya que con este potencial posiblemente los estudiantes tengan mayor facilidad para crear problemas interesantes.

A continuación, se presenta el cuadro de resumen de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica del total de participantes en la investigación. Ver anexo 10. Considerando para ello las siguientes abreviaturas:

AD: Adecuado IN: Inadecuado 2; +3: número de dobleces que realizan

Tabla 7. Consolidado de prueba diagnóstico.

| Enunciado | ítem 01 | | | | | ítem 02 | | | | ítem 03 | | | ítem 04 |
|-----------|---------|----|----|----|----|---------|----|----|----|---------|----|----|---------|
| | a | b | c | d | e | a | b | c | e | a | b | c | a |
| E1 | Si | Si | Si | Si | AD | Si | Si | No | IN | Si | Si | IN | +3 |
| E2 | Si | No | Si | No | AD | No | No | No | IN | Si | No | IN | +3 |
| E3 | Si | Si | Si | No | AD | No | No | No | IN | Si | Si | AD | +3 |
| E4 | Si | Si | Si | No | AD | Si | No | No | IN | Si | No | IN | +3 |
| E5 | Si | Si | Si | No | AD | Si | No | Si | AD | Si | Si | AD | +3 |
| E6 | Si | No | Si | No | AD | Si | Si | Si | AD | Si | Si | IN | 2 |
| E7 | Si | No | No | No | IN | Si | Si | Si | AD | No | Si | AD | 3 |
| E8 | Si | Si | Si | No | AD | Si | Si | No | AD | Si | Si | AD | +3 |
| E9 | Si | Si | No | No | AD | Si | Si | No | AD | Si | Si | AD | +3 |
| E10 | Si | Si | No | No | IN | Si | Si | Si | AD | Si | Si | AD | 3 |

El cuadro nos permite tener más claridad con las respuestas obtenidas en la prueba en cada enunciado y alternativa, lo cual nos permitirá realizar un análisis por ítem y estudiante.

A continuación, se procede a analizar los enunciados de la prueba tomada, que ha considerado en su ítem el potencial de indagación que podrían tener los estudiantes al momento de resolver problemas.

En relación al ítem 01 de la prueba:

a) Dibuje una posible ubicación del garaje, indicando las medidas que podría tener.

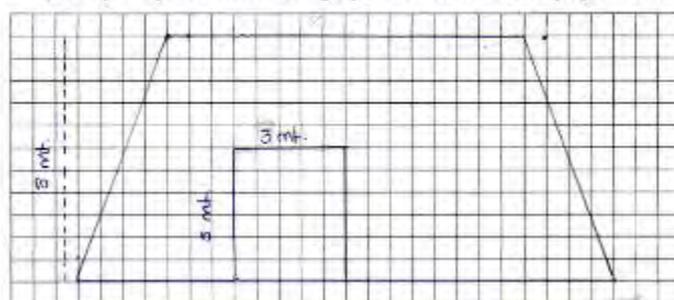


Figura 09. Grafica prueba diagnostico

En relación a la siguiente indicación, dibuje una posible ubicación del garaje, indicando las medidas que podría tener. El total de estudiantes logran realizar una gráfica correcta, de acuerdo con lo solicitado, considerando las medidas proporcionales del auto, sin embargo, para ubicar el garaje en el jardín han tomado en cuenta la parte central, aunque ha habido algunos casos en las que se ha ubicado en el lado extremo de la figura.

En cambio, a la indicación “considere tres posibles dimensiones del garaje, diferentes a las consideradas en (a). Justifique cada una en el contexto dado”, 7 de los 10 estudiantes logran graficar teniendo en cuenta las proporciones del vehículo. La justificación no fue realizada en esta premisa.

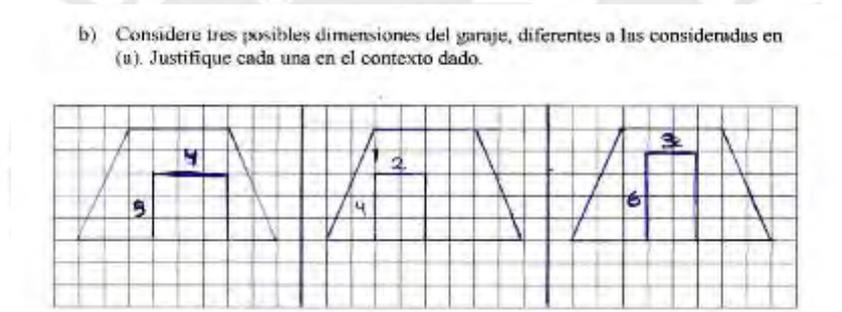


Figura 10. Gráfica de prueba diagnóstica de justificación

En relación con el cálculo del área del terreno, siete estudiantes lograron calcular correctamente, la estrategia que utilizaron fue la de calcular el área total y luego quitar el área que ocuparía el garaje.



Figura 11. Cálculo prueba diagnóstica.

Ante la solicitud de buscar otras maneras de calcular el área del terreno, nueve estudiantes manifestaron que no era posible, esta respuesta refleja que la idea de calcular el área de una superficie está fuertemente ligada a la aplicación de la fórmula y hacer posteriormente la diferencia entre los resultados.

d) ¿Hay una sola forma de calcular el área de la región en la que se sembrará el césped?

No puede usar una fórmula específica o simplemente restar, también pueden hacerlo en una ecuación o también pueden sacar el área de cada espacio vacío ya que hay triángulo y cuadrados.

Figura 12. Respuesta sobre calculo.

Del total de estudiantes, ocho de ellos dieron una adecuada explicación de los procedimientos utilizados para resolver el problema, en este caso la estudiante recurrió a la división de la figura en áreas conocidas, luego calculó el espacio del jardín, sumando las áreas libres. En otro caso realizaron una diferencia entre el área total y la del garaje.

e) Explique el procedimiento utilizado para calcular el área.

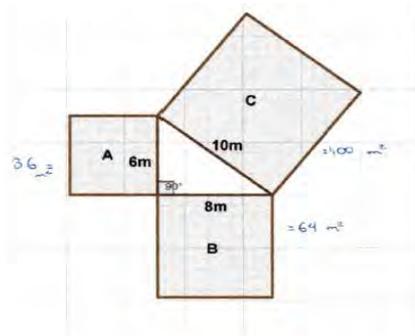
• 1era forma =
 $\left(\frac{8+12}{2}\right) \cdot 8 = 80m^2 - 16m^2$
 \rightarrow restando el área grande con el área del garaje $\rightarrow 64m^2$

• 2da forma =
 $\left(\frac{8 \times 2}{2}\right) \times 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 8$
 $16 + 16 + 32$
 $64m^2$

Sumando figura x figura

Figura 13. Resolución del problema por un estudiante.

En relación con el ítem 02. ocho alumnos pudieron deducir el teorema de Pitágoras, así mismo manifestaron que se trataba del triángulo notable conocido de lados 3,4, y 5. Esto indicaría que ya conocían el teorema de Pitágoras y no que lo dedujeron o intuyeron. La relación a que llegaron fue a establecer, que el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños.



a) A, B y C son las áreas de las regiones sombreadas formadas en los lados del triángulo rectángulo ¿Cómo relacionas entre sí las áreas de los cuadrados? ¿Qué operación aritmética puedes establecer entre A, B y C?

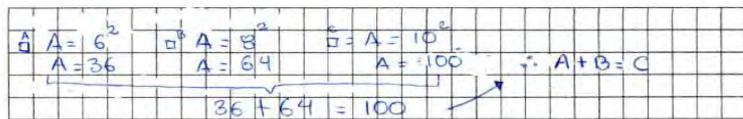


Figura 14. Pregunta 2

En relación a la solicitud de realizar hexágonos regulares alrededor de los lados del triángulo rectángulo, seis estudiantes llegaron a realizarlo adecuadamente, considerando la proporción de los lados. En la figura presentada se visualiza que el hexágono está dividido en triángulos, lo cual indica que el estudiante quiere relacionar con el triángulo y el cuadrado. Los cálculos de las áreas corresponden a la figura elaborada.

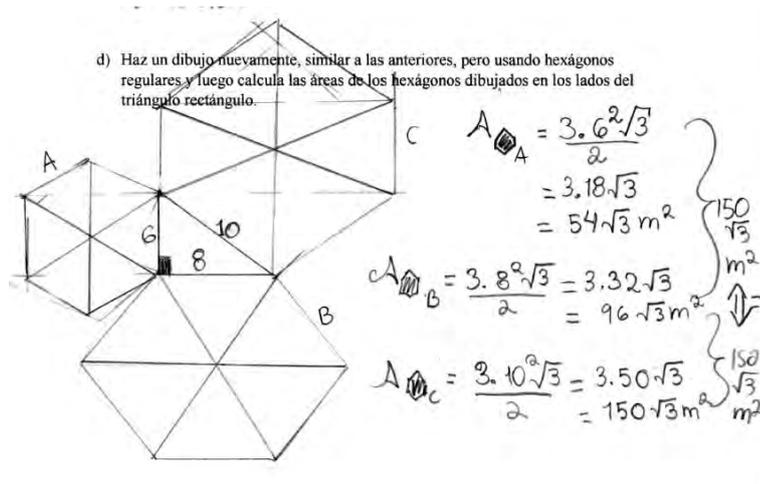


Figura 15. Problema 2 a

- b) Haz un dibujo similar al anterior, pero usando triángulos equiláteros en lugar de cuadrados y luego calcula las áreas de los triángulos equiláteros, dibujados en los lados del triángulo rectángulo.
 (Nota: Puedes consultar el formulario)

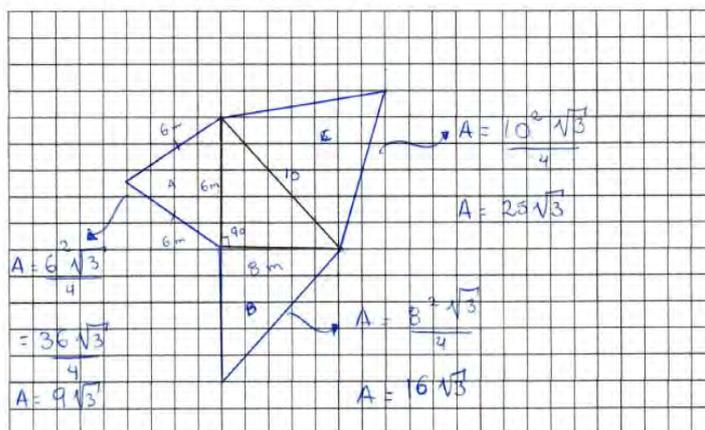


Figura 16. Problema 2b

Al realizar las gráficas solicitadas del triángulo equilátero y el hexágono en los lados del triángulo rectángulo, y su comparación con la premisa original (teorema de Pitágoras), solo cuatro estudiantes lograron deducir que se trataba del teorema de Pitágoras y que esta proporción se mantenía, siempre y cuando fuesen polígonos regulares.

- f) En los dibujos realizados con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares, ¿Las áreas de estas figuras dibujadas sobre los lados del triángulo rectángulo, tienen alguna propiedad en común? Explica

Si, cuando sumamos el área A y B nos resulta el área C, esto debe a que son triángulos regulares y al teorema de Pitágoras

Figura 17. Problema 2f

En relación con el ítem 03. Nueve estudiantes respondieron correctamente la pregunta. Ocho estudiantes ubicaron correctamente el punto “P” en la circunferencia. Es interesante ver que los estudiantes tienen claro que los diámetros y el radio de la circunferencia determinan las dimensiones del triángulo, siendo la posición del radio lo que determina el área.

- b) ¿Dónde ubicaría el punto P para obtener tal región triangular de área máxima? Explique el porqué de su respuesta.

No ubicaría para que formara una altura porque el área se calcula $\frac{b \times h}{2}$, es decir si la base ya tiene medida la altura es quien determina si el área será mayor por lo tanto es lo máximo que puede llegar a ser es la medida del radio de una forma saliente de la circunferencia

Figura 18. Problema 3 b

Sin embargo, a una pregunta que buscaba en el estudiante una indagación más profunda sobre el problema, condujo a que la respuesta lleve a plantear nociones de infinito, lo que indica que hay indagación por parte del estudiante para plantear dicha respuesta.

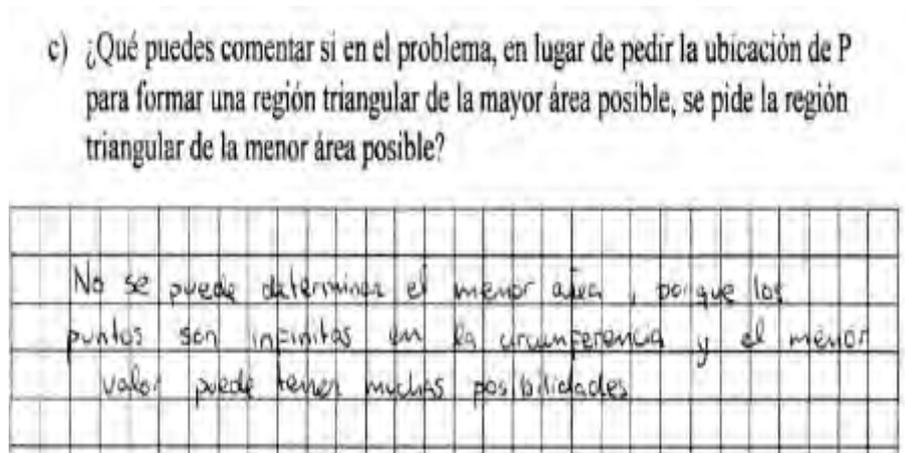


Figura 19. Problema 3c

A la pregunta relacionada a formar la mitad del área de hoja cuadrada, con solo doblar el papel, nueve estudiantes lograron encontrar más de tres formas. Esto indica que la capacidad indagatoria está presente en los estudiantes, que llegaron a plantear respuestas diversas

4. Si tienes una hoja cuadrada, ¿de cuántas maneras la puedes doblar para mostrar una figura cuya área sea la mitad del área de la hoja? Dibujar las maneras.

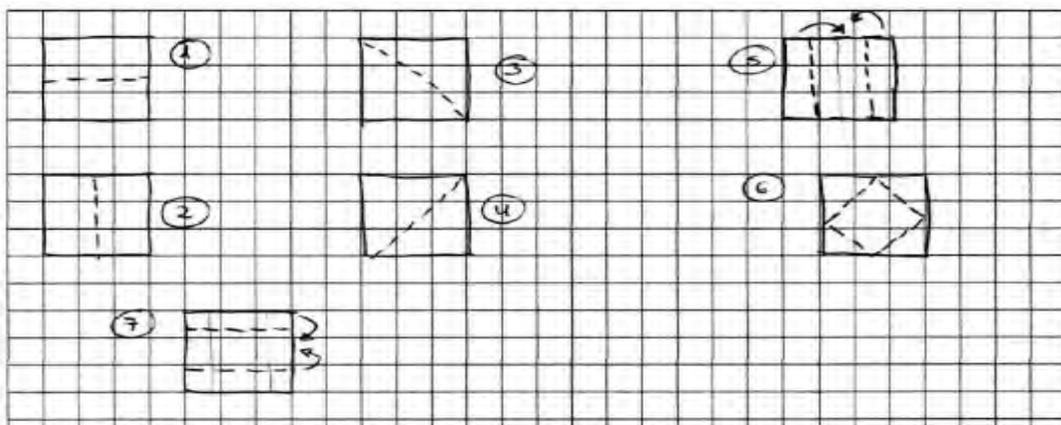


Figura 20. Problema 4

En términos generales y considerando los datos mostrados en la tabla 7; podríamos decir que los estudiantes ante la prueba planteada para ver el nivel o potencial indagatorio, su participación en todo momento fue activa, y las respuestas brindadas en su mayoría conducen a afirmar que los estudiantes tuvieron que recurrir a los aprendizajes adquiridos, así como a indagar, formulándose interrogantes continuamente para dar una respuesta adecuada a las preguntas que se le plantearon. Estas acciones conciben con los resultados obtenidos en el test de potencial indagatorio que fue de un promedio alto. Así mismo podemos decir que los estudiantes en el transcurso del desarrollo de la prueba utilizaron estrategias y técnicas propias, debido a que tuvieron que explorar las posibles respuestas y procedimientos, crear conjeturas, experimentar situaciones y evaluar cada posible solución.

4.3.2 Taller sobre creación de problemas por variación y elaboración

Para esta actividad se ha preparado una presentación en PowerPoint y una ficha de resumen en Word, donde a través de diversos ejemplos se da a conocer a los alumnos la creación de problemas por variación y elaboración, con esto se busca que los estudiantes tengan mayor claridad y conocimiento en la creación de problemas de áreas de regiones poligonales.

A continuación, se presenta dos situaciones problemáticas a los estudiantes, para que a partir de ella puedan crear problemas por variación o elaboración. Luego se procede a analizar de acuerdo a la ficha de análisis del anexo 18, así mismo se tomará en cuenta los metamodelos propuesta por Fernández.

Se tiene la primera situación.

El señor Alberto tiene un terreno rectangular, como se muestra en la imagen. Ha decidido repartir el terreno a sus hijos, considerando sus edades. Sus herederos de mayor a menor edad son: Luis, Pedro, Ana y Sonia; al menor de los hermanos le tocará el terreno grande y al mayor le tocará el terreno pequeño. La parte sombreada será un jardín en común.

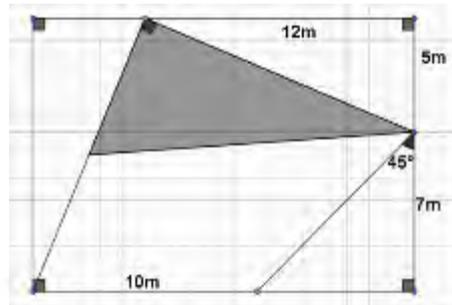


Figura 21. Situación problemática.

- 1.- ¿Cuál es el área del terreno a repartir?
- 2.- Si el terreno esta valorizado en \$55.00 el metro cuadrado ¿En cuánto esta valorizado el terreno de Ana?

Los problemas creados por los estudiantes que presentamos a continuación, han partido de la situación planteada por el investigador, donde el estudiante de manera individual ha creado el enunciado o contexto del problema y las preguntas correspondientes con el contenido.

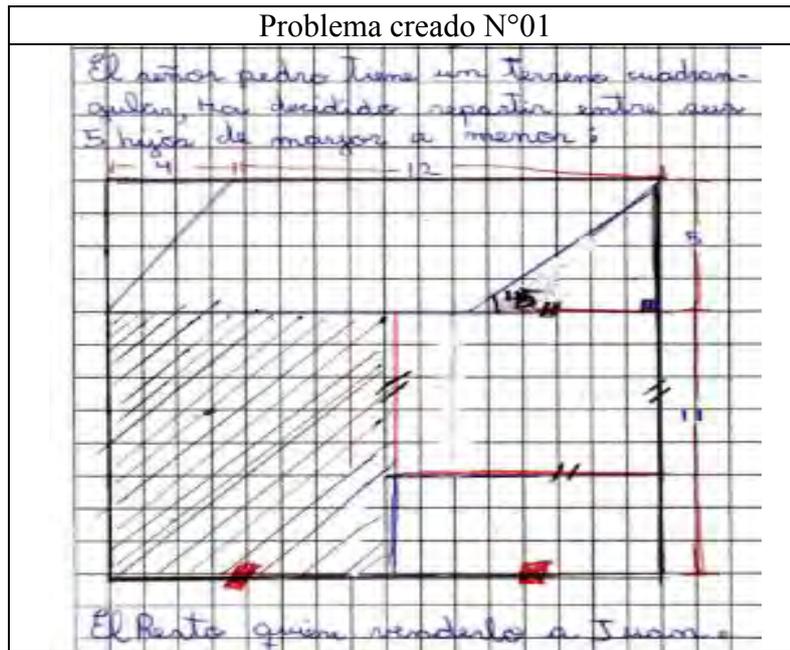


Figura 22. Creación de problema por variación N°01

Análisis del problema creado por Estudiante 01, con la ficha del anexo 18. A continuación, presentamos la tabla el resumen.

Tabla 8. Resumen de elementos del problema de la figura 23.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|---------------------------------|---------|
| Originalidad | Alto |
| Flexibilidad | Alto |
| Fluidez | Bajo |
| Claridad | Regular |
| Preguntas de indagación | Bajo |

El problema creado en relación a los elementos de originalidad y flexibilidad tienen niveles altos, debido a que la variación del problema se ha realizado en la totalidad de la figura y se aprecia modificaciones cuantitativas en los datos del problema creado, es decir se plantean líneas semejantes, se realizan nuevos trazos, haciendo con esto que la gráfica sea distinta al proporcionado inicialmente como modelo de referencia. En relación a la claridad esta en un nivel regular, debido a que la redacción no es tan clara, el contexto extra-matemático no es

claro, pero existe una coherencia lógica en la expresión que lo hace comprensible. Por otro lado, la fluidez está en un nivel bajo ya que no presenta ningún requerimiento, en el mismo nivel se encuentra la pregunta de indagación, debido a que no presenta ninguna. Así mismo el problema creado es de tipo generativo si lo llevamos a los metamodelos de Fernández, ya que hay ausencia de datos numéricos y de la información creada se puede deducir algunos aspectos lógicos. En este sentido de acuerdo a la ficha de análisis del anexo 18, el máximo puntaje sería de 72, y el problema analizado obtuvo 27 puntos realizando la suma de los puntajes obtenidos en los criterios de cada elemento, para luego ubicarlo en los rangos correspondientes, por tanto, el problema creado está ubicado en un nivel regular.

A continuación, se presenta el problema N°02 para su análisis.

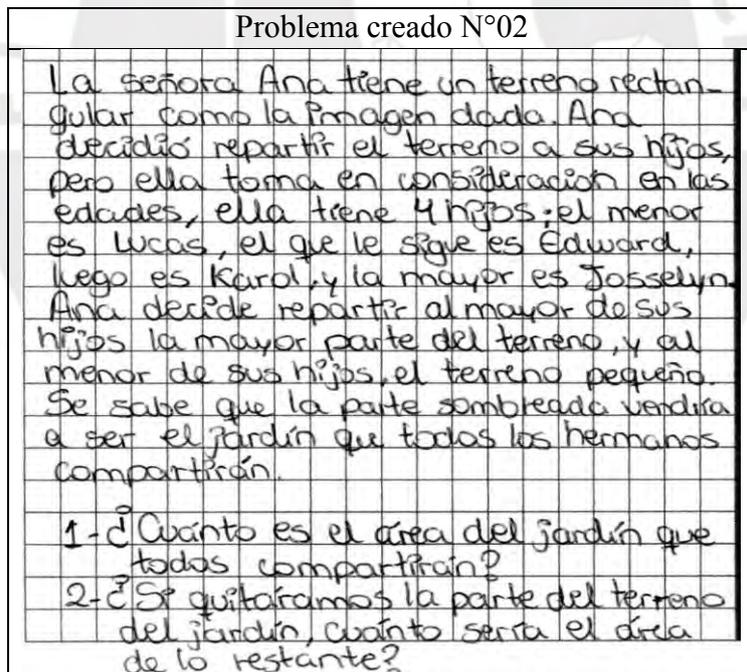


Figura 23. Creación de problema por variación N°02

Cuadro de resumen del problema creado por el Estudiante N°02, analizado con ficha de anexo 18.

Tabla 9. Resumen de elementos del problema de la figura 23.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|----------------------------------------|--------------|
| Originalidad | Bajo |
| Flexibilidad | Regular |
| Fluidez | Regular |
| Claridad | Regular |
| Preguntas de indagación | Bajo |

En relación con la originalidad, el problema está ubicado en el nivel bajo, debido a que no se incorporan cambios cualitativos significativos y las preguntas son distintas a la planteada en la situación problemática, que a su vez son sencillas. En relación a la flexibilidad, la fluidez y claridad del problema está ubicada en un nivel regular, debido a que hay ausencia de modificaciones cuantitativas, así mismo solo considera dos ítems de requerimiento, existe una coherencia lógica y matemática, donde la redacción es adecuada, el problema analizado está en un contexto extra-matemático adecuado. Las preguntas de indagación conllevan a respuestas rápidas, por tanto, podemos ubicar el problema en un nivel bajo. El puntaje que obtiene el problema según en anexo 18, es de 21 puntos de un total de 72, lo cual lo ubica en un nivel regular de creación de problemas.

A continuación, presentamos el problema N°03 para su análisis respectivo considerando la ficha del anexo 18.

Problema creado N°03

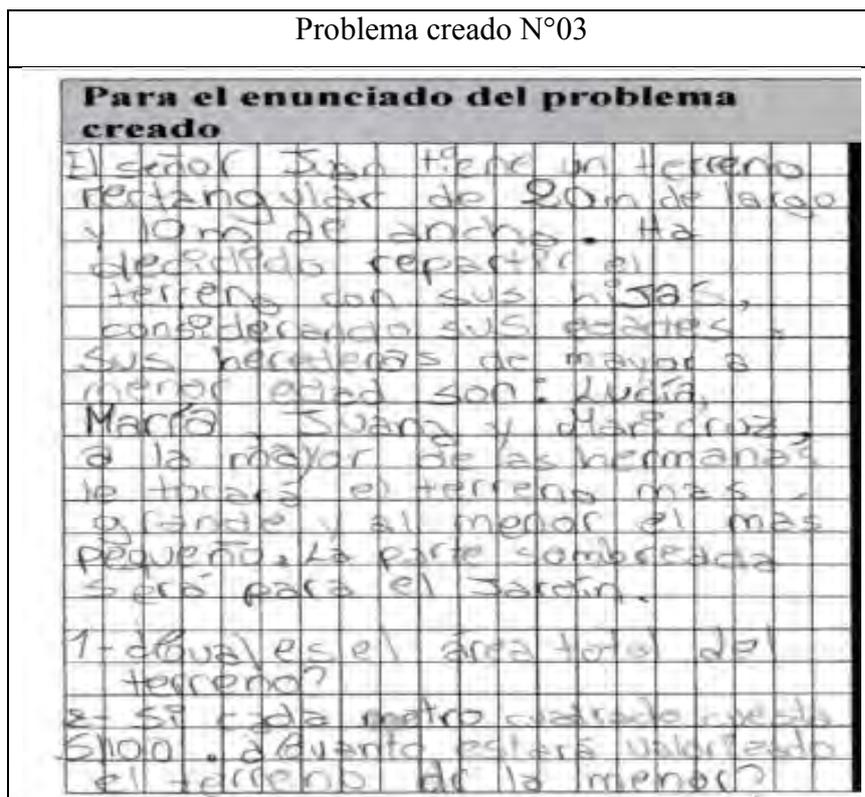


Figura 24. Creación de problema por variación 3

Cuadro de resumen del problema creado por el Estudiante N°03, analizado con ficha de anexo 18.

Tabla 10. Resumen de elementos del problema de la figura 24.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|---------------------------------|---------|
| Originalidad | Baja |
| Flexibilidad | Bajo |
| Fluidez | Regular |
| Claridad | Regular |
| Preguntas de indagación | Bajo |

En relación al elemento de originalidad del problema, podemos decir que hay ausencia de ella, más aún si comparamos con los otros problemas creados por sus compañeros; más bien es una repetición de la situación planteada por el investigador, solo se ha cambiado los nombres

de los personajes del problema; en este sentido el elemento analizado tiene un nivel bajo. Por otro lado, en relación al elemento de flexibilidad, existe una modificación cuantitativa (20 y 10 metros en las dimensiones del rectángulo) de los datos, pero no es muy significativo, por ello se ubica en un nivel regular. En relación con el elemento de fluidez, el problema creado presenta dos requerimientos, pero también son sencillos, por ello se ubica en un nivel regular. En relación con la claridad del problema, se puede decir que está ubicado en un nivel regular, debido a que el problema creado es muy parecido a la situación presentada. Las preguntas formuladas de indagación no presentan creatividad y son fáciles de responder, por ello está ubicado en este elemento en un nivel bajo. El problema en su conjunto tiene 21 puntos, de un total de 72 puntos, lo que lo ubica nivel regular en relación a la creación de problemas.

En resumen, podemos decir que los problemas creados por variación en esta fase de la investigación, se encuentran en el nivel regular, ya que el promedio que se obtuvo de los puntos asignados a los problemas analizados en esta etapa fue de 23 puntos de un total de 72.

Enunciar y resolver un problema creado por Elaboración.

Se tiene la siguiente situación: La familia Pérez desea construir su vivienda, para ello el ingeniero les ha traído el plano, cuya escala es de 1/1000



<https://www.pinterest.com/pin/578431145862176391/>

Figura 25. Situación problemática para creación de problemas por elaboración

Para esta parte, se planteó la siguiente situación: Teniendo en cuenta la situación planteada, invente y resuelva un problema.

A continuación, presentamos algunos problemas creados por los estudiantes por elaboración, los cuales son de tipo generativos, según la propuesta de Fernández (2018), puesto que se solicita a los estudiantes la creación de problemas, a partir de una información proporcionada, en este caso un plano de una vivienda.

Problema creado N°01 por elaboración

| Para el enunciado del problema creado | Para realizar los cálculos. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| La familia Castro quiere hacer algunas remodelaciones en su casa. | El garaje mide: $3,75 \times 3,0 = 11,25$ |
| Primero quieren cambiar el piso del garaje. | 1° Precio = $11,25 \times 10$ $= 112,5$ soles |
| Después también el piso del baño. | Esta baño: $1,50 \times 3,00 = 4,50$ |
| Por último quieren cambiar el piso también por una piscina excepto el garaje ya realizado. | 2° Precio = $4,5 \times 10 = 45$ soles |
| ¿Cuánto les costará el piso si cada m^2 cuesta 10 soles? | Piscina: $3,00 \times 2,95 = 8,95$ |
| ¿Cuánto les costará cada m^2 si en total en la casa 1000 soles en la piscina? | $1000 \div 8,95 = 112,75$ soles $\times m^2$ |

Figura 26. Problema creado por elaboración N°01

A continuación, se muestra la tabla de resumen del análisis del problema creado por elaboración por el estudiante N°04, según los elementos que se encuentran en la ficha del anexo 18.

Tabla 11. Resumen de elementos del problema de la figura 26.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|---------------------------------|---------|
| Originalidad | Regular |
| Flexibilidad | Regular |
| Fluidez | Regular |
| Claridad | Regular |
| Preguntas de indagación | Alto |

En relación, al elemento de originalidad del problema creado, podemos decir que es regular, debido a que existe una contextualización del problema y los requerimientos guardan relación con el problema elaborado. Con respecto al elemento de flexibilidad, se puede decir que está

en el nivel regular, debido a que las modificaciones cuantitativas del problema son escasos. Con el elemento de la fluidez del problema elaborado, presenta dos ítems de requerimiento, por ello está ubicado en un nivel regular. La redacción del problema es adecuada, las preguntas son pertinentes y existe una coherencia lógica y matemática, en este sentido el elemento de claridad está ubicado en un nivel regular. Las preguntas de indagación están bien formuladas, ya que son pertinentes y creativas, por ello está ubicado en el nivel alto. En términos generales el problema ha obtenido un total de 30 puntos, de un total de 72, lo cual lo ubica en regular según la ficha de análisis del anexo 18.

A continuación, presentamos el problema elaborado por el estudiante N°05 para su análisis.

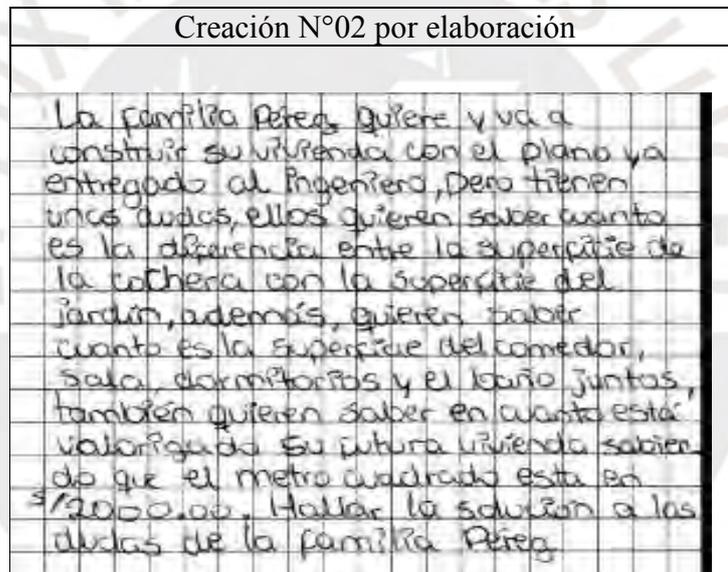


Figura 27. Problema creado por elaboración 02

A continuación, se muestra la tabla de resumen del análisis del problema creado por elaboración por el estudiante N°05, según los elementos que se encuentran en la ficha del anexo 18.

Tabla 12. Resumen de elementos del problema de la figura 28.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|----------------------------------------|--------------|
| Originalidad | Regular |
| Flexibilidad | Regular |
| Fluidez | Regular |
| Claridad | Alto |
| Preguntas de indagación | Bajo |

Como se puede apreciar en el cuadro de resumen el elemento de originalidad del problema en relación a los anteriores problemas, podemos decir que está ubicado en un nivel regular. Lo mismo sucede con la flexibilidad del problema, debido a que las modificaciones cuantitativas, solo se da en el precio del terreno por metro cuadrado. En relación a la fluidez del problema, también se ubica en el nivel regular, ya que los requerimientos son sencillos y las respuestas son directas. En relación con el elemento de la claridad del problema, se obtuvo un nivel alto, debido a que existe una adecuada redacción, coherencia lógica y matemática. La pregunta de indagación no es del todo claro, en este sentido se ubica en un nivel bajo. En términos generales se ha obtenido 26 puntos de un total de 72 según la ficha de análisis del anexo 18, lo cual lo ubica en un nivel regular en relación a creación de problemas.

A continuación, presentamos el problema elaborado por el estudiante N°06 para su análisis.

Creación N°03 por elaboración.

| Para el enunciado del problema creado | Para realizar los cálculos. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| * La familia Pérez quiere saber cuántos m ² mide su cochera y su baño. Y también el área total de toda la casa completa. | Al cochera: $3 \cdot 3,75$ ↓ $11,25 \text{ m}^2$ |
| ✚ Hallar el total de m ² mide el resto de la casa dejando de lado la cochera y baño. | A baño: $3 \cdot 2,5$ ↓ $7,5 \text{ m}^2$ |
| | A total: $12 \cdot 6$ ↓ 72 m^2 |
| | A del resto de la casa: $\begin{array}{r} 72,00 \\ - 18,75 \\ \hline 53,25 \end{array}$ |

Figura 28. Problema creado por elaboración N°03

A continuación, se muestra la tabla de resumen del análisis del problema creado por elaboración por el estudiante N°06, según los elementos que se encuentran en la ficha del anexo 18.

Tabla 13. Resumen de elementos del problema de la figura 29.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|---------------------------------|-------|
| Originalidad | Bajo |
| Flexibilidad | Bajo |
| Fluidez | Bajo |
| Claridad | Bajo |
| Preguntas de indagación | Bajo |

En esta situación el nivel de originalidad del problema es bajo, debido a que repite solamente la situación inicial. La flexibilidad del problema también está ubicada en el nivel bajo, ya que las modificaciones cuantitativas están ausentes, así mismo la fluidez del problema se encuentra

en un nivel bajo, porque el requerimiento no es claro. En relación con la claridad problema, también se puede decir que está en nivel bajo, debido a que la redacción no es adecuada. Las preguntas de indagación no existen, por tanto, también está en un nivel bajo. En general este problema tiene 17 puntos de un total de 72, de acuerdo a la ficha de análisis del anexo 18, lo que lo ubica en un nivel bajo en relación a creación de problemas.

Por tanto, los problemas creados por elaboración en esta fase se encuentran en un nivel regular, ya que se obtuvo como promedio 24 puntos según la ficha 18.

4.3.3 Taller sobre indagación en el proceso de aprendizaje en las matemáticas.

Para esta fase de la investigación se tuvo que preparar una ficha en la que se daba a conocer el proceso indagatorio que se debería seguir ante un problema planteado. Los pasos que se ha considerado son: conjetura, variables que intervienen en un problema, planificación y procesamiento de los datos antes de resolver el problema, análisis del proceso realizado, conclusiones. Ver anexo 15

El aprendizaje basado en la indagación es una estrategia que induce al estudiante a formular conjeturas (hipótesis en el método científico), para luego ser probadas mediante preguntas sucesivas en torno al problema planteado.

Si bien es cierto que el estudiante utiliza la estrategia indagatoria en la resolución de problemas, el docente en este caso el investigador utilizó la enseñanza basada en la indagación, siendo responsable de la formulación de la situación problemática y la pregunta a resolver. En este sentido según Abrams (2007), el nivel de indagación está ubicado en la guiada, debido a que el docente es el responsable de la formulación del problema y de las premisas; el papel del

estudiante es el de formular la conjetura que conlleve a una respuesta adecuada, para ello tendrá que buscar la mejor estrategia.

Para fortalecer el concepto de indagación en el proceso de aprendizaje, se realizó actividades como las que se muestra en el anexo 16.

Durante el desarrollo de la actividad con los estudiantes, se ha considerado la propuesta del método Moore, donde la idea principal es: implícame y entenderé.

A continuación, presentamos las conjeturas elaboradas, las conclusiones y problemas creados por los estudiantes en el taller.

PROBLEMA.

Dibuja un cuadrilátero convexo en cartulina, localiza los puntos medios de los lados y únelos, se formará cuatro triángulos, y el cuadrilátero P.

- ¿Qué puedes decir del cuadrilátero P?
- ¿Qué relación o relaciones encuentras entre el área del paralelogramo y el área del cuadrilátero?

CONJETURA

Las conjeturas hechas por los estudiantes dan a conocer que la suma de las áreas de los triángulos formados, deberán ser igual al área del cuadrilátero. Esta comprobación se realizó al superponer los triángulos en el cuadrilátero.

Figura 29. Preguntas de indagación

CONCLUSIONES

Efectivamente en el análisis del proceso, para llegar a la certeza, primero se trabajó con un cuadrado, luego con rectángulo, finalmente se dibujó un cuadrilátero convexo

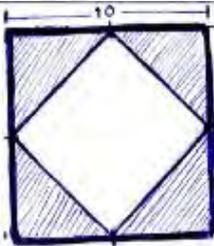
Figura 30. Conclusión 1

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>El cuadrilátero formado por la unión de los puntos medios de un cuadrilátero cuadrado mayor es la mitad que el total.</p> | <p>según los requerimientos, mediante la indagación e inducción, se llega a mostrar que la conjetura va por buen camino y se debe pensar en su demostración.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Figura 31. Conclusión 2

PROBLEMA CREADO

Problema:
 ① Se piensa repartir el cuarto más grande de mi casa de modo que los 4 de nosotras podamos guardar nuestras cosas y tener un espacio grande donde ir a una mesa para que podamos escribir al mismo tiempo. Cada uno ocupa 1 área sombreada y compartimos el espacio central donde se ubica una mesa.



② ¿Qué parte del cuarto ocupa cada uno?
 ③ ¿Cómo se relacionan las partes sombreadas con el cuadrilátero central?
 ④ Si las nuevas dimensiones del cuarto fueran 20 x 10, ¿Qué área ocuparía cada uno? ¿Desde punto medio? ¿Cuál sería el tamaño del área donde entrara la mesa?

Figura 32. Problema creado

A la solicitud del investigador de crear un problema de forma libre, pero teniendo en cuenta que, puede ser por variación o elaboración, una estudiante presentó el siguiente problema. Como se puede apreciar el problema está contextualizado, existe modificaciones cuantitativas, la claridad del problema es adecuado, las preguntas se relacionan con el problema. Lo interesante del problema es la ubicación de la mesa, pero no se detalla las dimensiones de dicho objeto ni de sus accesorios. El propósito de la solicitud de crear un problema en esta fase, era la de conectar la indagación con los conceptos trabajados en el taller anterior sobre creación problemas.

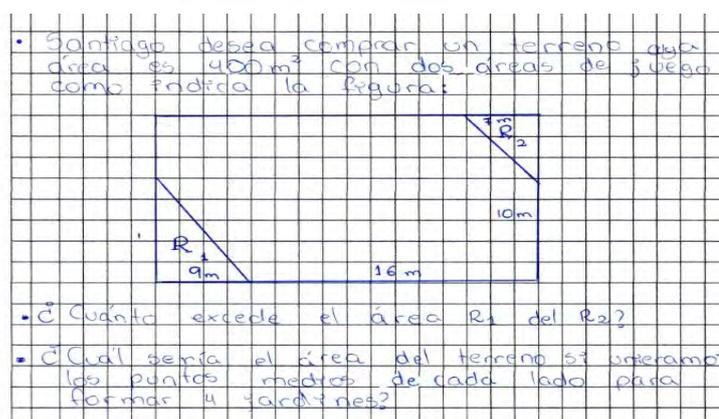
4.3.4 Prueba Final sobre creación de problemas mediante la indagación.

En esta fase de la investigación, se ha solicitado a los estudiantes la creación de problemas por elaboración a partir de la propuesta de la ficha de trabajo del anexo 17, posteriormente se ha analizado con la ficha del anexo 18, considerando los elementos de originalidad, flexibilidad, fluidez, claridad y preguntas de indagación.

La presente actividad fue realizada en grupo de trabajo colaborativo; cada integrante del equipo aportó con el planteo de preguntas de indagación, que posteriormente por consenso de los integrantes del equipo se consideraron solo las mejores preguntas, las cuales fueron utilizadas para la construcción y creación de un nuevo problema.

A continuación, presentamos algunos problemas creados por los estudiantes de forma grupal por elaboración, cabe mencionar que la premisa original que plantea el investigador corresponde a la propuesta de Fernández (2018) que son del tipo generativos, ya que se solicita a los estudiantes que, a partir de una información gráfica, crear una situación problemática por elaboración.

Presentamos el problema inventado mediante Elaboración y la solución de la misma por el grupo N°01



problema y creado dos problemas sobre la misma situación, en este sentido la fluidez se encuentra en un alto nivel. En cuanto al elemento de claridad, el problema planteado tiene coherencia lógica y matemática, la redacción es adecuada, contiene el aspecto intra-matemático y extra-matemático, por tanto, su nivel es alto.

Las preguntas de indagación reflejan creatividad, y sirven de base para la formulación del problema por tanto se ubica en el nivel alto. En relación con la originalidad del problema, se ha comparado con otros problemas inventados en forma individual y existe un alto nivel de originalidad.

El problema creado, tomando en cuenta la ficha de análisis del anexo 18, y sacando el promedio en general de los puntos asignados a cada elemento y criterio, se obtuvo 53 puntos, lo que indica, que el problema creado por el equipo está en un nivel alto.

Pasamos a la presentación del problema inventado mediante Elaboración y la solución de la misma por el grupo N°02

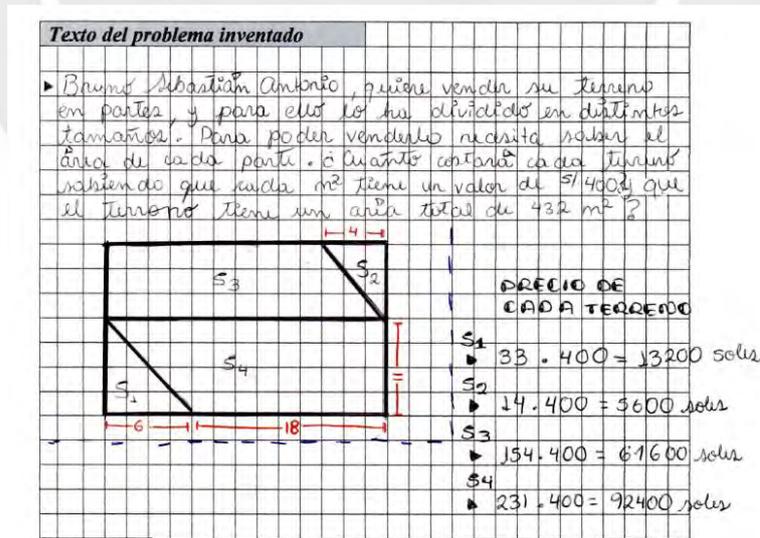


Figura 35. Problema creado grupo 02

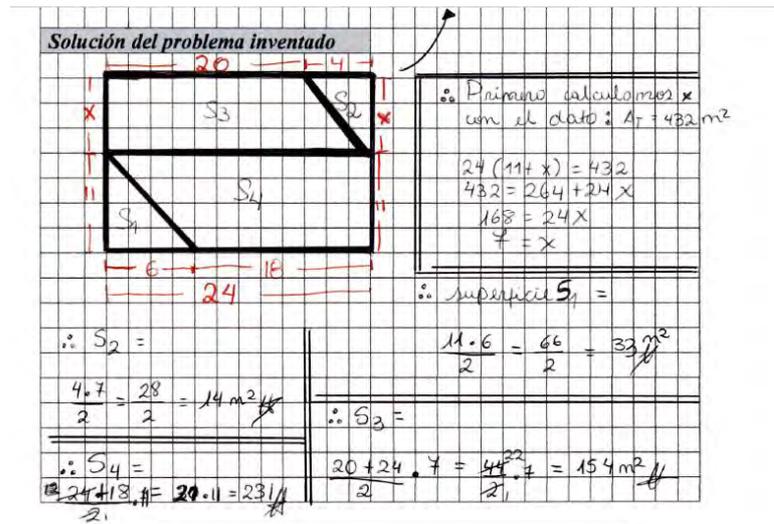


Figura 36. Solución de problema creado grupo N°02

A continuación, se muestra la tabla de resumen del análisis del problema creado por elaboración por el grupo N°02, según los elementos que se encuentran en la ficha del anexo 18.

Tabla 15. Resumen de elementos del problema de la figura 35.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|---------------------------------|---------|
| Originalidad | Bajo |
| Flexibilidad | Bajo |
| Fluidez | Regular |
| Claridad | Alto |
| Preguntas de indagación | Alto |

El problema creado presenta un nivel bajo de originalidad en relación con otros problemas creados por los estudiantes en la parte individual y grupal. Las modificaciones cuantitativas son nulas, toma en cuenta los mismos trazos del modelo propuesto, plantea un trazo que divide la figura en dos partes, en ese sentido la flexibilidad del problema creado se encuentra en un nivel bajo. En relación a la fluidez de los problemas creados, podemos decir que se encuentra en un nivel regular, debido a que solo considera un ítem de requerimiento y la solución del problema

creado es directo. Sin embargo, la claridad de los problemas está en un nivel alto, ya que hay una coherencia lógica, la redacción es adecuada, la pregunta es pertinente y los problemas están elaborados en un contexto extra-matemático. Las preguntas de indagación no reflejan creatividad, así mismo no se utilizan como requerimiento en el problema creado, en este sentido el nivel en este elemento es bajo.

En la solución del problema se observa que el grupo ha realizado operaciones algebraicas al inicio, finalizando en operaciones aritméticas para calcular el valor del terreno.

Este problema creado en términos generales obtuvo un total de 31 puntos, según la ficha de análisis del anexo 18, por lo tanto, está ubicado en un nivel regular en relación a la creación de problemas.

Finalmente presentamos el problema inventado mediante Elaboración y su solución por el grupo N°03

| Texto del problema inventado | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Los ingenieros de la institución educativa U.S.M. están dibujando un plano para la construcción que van a realizar y van a considerar 2 espacios para áreas verdes y futuras modificaciones en estos espacios, para así poner salones donde puedan albergar los chicos de secundaria que forma parte de la J.E.C.</p> | |
| <p>1. ¿Cuál sería la \angle de las áreas verdes? (S_1 y S_2)</p> <p>2. ¿Cuál sería el área del S_1?</p> <p>3. Si la figura se divide en 2 con una diagonal:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ¿Cuál sería el área de esa mitad? - ¿Cómo calcularías esa área sin contar la fig. S_1? | <p>El diagrama muestra un rectángulo con una diagonal que divide el espacio en dos triángulos, S_1 y S_2. El lado superior izquierdo del rectángulo está etiquetado como 20, y el lado superior derecho como 14. El lado derecho del rectángulo está etiquetado como 11. El triángulo S_1 está en la parte inferior izquierda, y el triángulo S_2 está en la parte superior derecha.</p> |

Figura 37. Problema creado grupo 3

| Solución del problema inventado | | | |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| 1- | $S_1 = \frac{6 \times 11}{2}$ $= \frac{66}{2}$ $= 33$ | $S_2 = \frac{7 \times 4}{2}$ $= \frac{28}{2}$ $= 14$ | $\{ = 33 + 14$ $= 47$ |
| 2- | $S_1 = \frac{6 \times 11}{2}$ $= \frac{66}{2}$ $= 33$ | $3 \cdot \text{mitad} = 432 \left(\frac{2}{216} \right) \left(\frac{2}{216} \right)$ $= 3 \cdot \frac{216}{12}$ | 216 m^2 |
| | | $\circ \text{ mitad} - S_1 = \frac{216}{33}$ $= 182 \text{ m}^2$ | $\frac{216}{33}$ $= 183$ |

Figura 38. Solución al problema creado por grupo 3

A continuación, se muestra la tabla de resumen del análisis del problema creado por elaboración por el grupo N°03, según los elementos que se encuentran en la ficha del anexo 18.

Tabla 16. Resumen de elementos del problema de la figura 37.

| Elementos de un problema creado | Nivel |
|---------------------------------|-------|
| Originalidad | Alto |
| Flexibilidad | Alto |
| Fluidez | Alto |
| Claridad | Alto |
| Preguntas de indagación | Alto |

En relación con la originalidad del problema, se puede decir que tiene un nivel alto, debido a que existen diferencias notorias con los problemas creados por los grupos uno y dos.

En cuanto a la flexibilidad del problema, los datos establecidos en el enunciado se mantienen en el problema creado, sin embargo, se plantea nuevos trazos y con la gráfica resultante el requerimiento es distinto. Por ello, consideramos que se encuentra en un nivel alto.

El grupo ha elaborado dos problemas, considerando la situación propuesta y otra de manera libre. Los problemas creados tienen más de dos ítems; en este sentido la fluidez se ubica en un nivel alto.

La coherencia lógica y matemática, así como la redacción son claras y las preguntas precisas; en este sentido la claridad del problema creado se ubica en un nivel alto.

Las preguntas de indagación son de índole intra-matemático, reflejan creatividad y sirven de base para la formulación del problema; estos criterios se ubican en un nivel alto. El problema en general obtuvo 45 puntos, lo que indica que se encuentra en un nivel alto en relación a la creación de problemas.

4.3.5 Comparación de los problemas creados, en la fase II y la fase IV.

A continuación, se muestra la tabla de comparación de la fase II y IV, considerando los elementos que se encuentran en la ficha de análisis del anexo 18.

Tabla 17. Resumen de resultados de la Fase II y IV.

| Elementos de un problema creado | FASE II | | | | | | FASE IV | | |
|---------------------------------|-----------|---------|---------|-------------|---------|------|-------------|---------|------|
| | Variación | | | Elaboración | | | Elaboración | | |
| | E1 | E2 | E3 | E1 | E2 | E3 | G1 | G2 | G3 |
| Originalidad | Alto | Bajo | Bajo | Regular | Regular | Bajo | Alto | Bajo | Alto |
| Flexibilidad | Alto | Regular | Bajo | Regular | Regular | Bajo | Muy alto | Bajo | Alto |
| Fluidez | Bajo | Regular | Regular | Regular | Regular | Bajo | Alto | Regular | Alto |
| Claridad | Regular | Regular | Regular | Regular | Alto | Bajo | Alto | Alto | Alto |
| Preguntas de indagación | Bajo | Bajo | Bajo | Alto | Bajo | Bajo | Alto | Alto | Alto |
| Puntaje | 27 | 21 | 21 | 29 | 26 | 24 | 53 | 31 | 45 |

En términos generales, si promediamos los puntajes obtenidos en la fase IV, se obtiene un promedio de 43 puntos, en cambio en la fase II, en relación a la creación de problemas por elaboración se obtiene 26,3 y por variación se obtiene 23 puntos, lo que indica que los

problemas creados en la fase IV, están ubicados en el nivel alto, este resultado se debe a que los problemas creados fueron realizados partiendo de preguntas de indagación, en las cuales se obtiene un nivel alto, lo que ha permitido contextualizar mucho mejor el problema, ser más interesante su elaboración, otro factor que ha contribuido a este resultados ha sido el trabajo en equipo, que ha favorecido la creación de problemas por elaboración, por ser un trabajo colaborativo.

El problema creado en la fase IV, como se muestra en la figura 37, demostraría que los estudiantes han empleado adecuadamente el proceso indagatorio. Esto significa que los estudiantes aprenden más y mucho mejor cuando el estudiante conduce su propio aprendizaje a través de procesos de indagación. El desafío que conlleva las preguntas formuladas al inicio y las conjeturas que se desean probar, invitan al estudiante a crear problemas que tengan significado y de aplicación en la vida cotidiana. Estas acciones fomentan la creatividad, que es esencial para que los discentes lleguen a niveles de reflexión más complejos.

Los estudiantes, crean problemas partiendo de una situación establecida por el investigador, como primer paso formularon preguntas indagatorias, que en su mayoría fueron del tipo fácticas, es decir inducían a recordar datos y temas, como por ejemplo la del grupo dos:

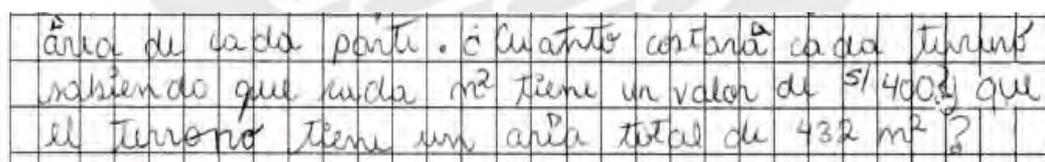


Figura 39. Pregunta indagatoria G2.

¿Cuánto costará cada terreno, sabiendo que cada metro cuadrado tiene el valor de S/400.00, si el terreno tiene un área de 432 m² ?

Es necesario mencionar, que las preguntas de indagación fueron más de tres en cada grupo, los cuales ayudaron a formular o crear los problemas, debido a que es necesario responderlas, pero para ello primero se debía contextualizar el problema creado.

CAPITULO V: CONSIDERACIONES FINALES DE LA INVESGACIÓN.

En el presente capitulo se da a conocer las consideraciones finales de la presente investigación, como son las conclusiones a las que llega el presente estudio y las sugerencias para las futuras investigaciones en este campo.

5.1 CONCLUSIONES

Al comenzar la investigación nos formulamos la siguiente pregunta ¿Cómo desarrollar la capacidad de crear problemas sobre áreas de regiones poligonales, mediante el aprendizaje basado en la indagación en estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular?, para ello se buscó investigaciones que se hayan ocupado de creación de problemas y el aprendizaje por indagación en matemática. Sobre creación de problemas se encontró suficiente información para iniciar el proyecto, sin embargo, sobre aprendizaje por indagación existe poca información, más aún en el área de matemática, pero eso no ha sido un obstáculo para emprender la investigación; más bien, ha sido una oportunidad para realizar revisiones bibliográficas diversas.

Con las informaciones revisadas nos planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar la influencia del aprendizaje basado en la indagación, en el desarrollo de la capacidad de creación de problemas sobre áreas de regiones poligonales, en estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular.

Para comprobar este objetivo se desarrollaron talleres en cuatro sesiones, siendo la primera la de diagnosticar el potencial indagatorio de los estudiantes que participaron en la investigación; en el segundo taller se brindó información sobre creación de problemas por

variación y elaboración; en el tercer taller se explicó el aprendizaje por indagación en matemática y para ello se elaboró una ficha. Ver anexo 15 y 16 y finalmente en el último taller se solicitó a los estudiantes la creación de problemas por elaboración.

Conclusiones relacionadas al primer objetivo específico: Describir cómo los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular practican la indagación en sus aprendizajes de matemática.

- Los estudiantes que han participado en la investigación mostraron un potencial indagatorio satisfactorio, siendo el promedio de 31.7 en el test, cuando el máximo era 40 puntos (Ver tabla 06). El mayor puntaje se obtuvo en el enunciado I, “me gusta justificar mis afirmaciones”, lo que indica que la capacidad de indagación si está presente en los estudiantes.
- Para averiguar el potencial indagatorio de los estudiantes en el área de matemática se ha diseñado una prueba, (ver anexo 10 y tabla 07), de este último se desprende que los estudiantes tienen un adecuado potencial indagatorio, debido a que han brindado respuestas adecuadas a las preguntas que se les ha formulado. Una prueba de ello se muestra en la figura 13, donde al solicitarle sobre otras formas de calcular el área de la región en la que se sembrará el césped, el estudiante responde que hay diversas formas de calcularla, lo cual demuestra que ha puesto en práctica su capacidad indagatoria, para dar con la respuesta.

Conclusiones relacionadas con el segundo objetivo específico: Analizar los problemas sobre áreas poligonales que crean los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, antes de recibir estimulación a su aprendizaje basado en la indagación.

- Los problemas creados por variación y elaboración antes de recibir estimulación sobre el aprendizaje por indagación estuvieron en términos generales en un nivel regular, esta afirmación se desprende luego de analizar los problemas creados con la ficha del anexo 18, donde se establece con claridad los elementos que debe tener un problema creado y luego los resultados son vaciadas en las tablas 08, 09, 10, 11, 12 y 13. En estas se visualiza que los niveles que alcanza en cada elemento del problema creado se encuentran en el nivel regular, en relación a la creación de problemas.

Conclusiones relacionadas con el tercer objetivo específico: Comparar los problemas sobre áreas de regiones poligonales que crean los estudiantes del cuarto año de secundaria de Educación Básica Regular, luego de recibir estimulación a su aprendizaje basado en la indagación.

- Los problemas creados después de recibir estimulación en el aprendizaje basado en la indagación están mejor ubicados, obteniendo de esta manera un nivel alto en relación a los elementos que debe tener un problema creado. Esto se desprende del análisis de la ficha del anexo 18, así como de las tablas 14, 15 y 16.
- Los problemas creados luego de recibir estimulación en el aprendizaje por indagación fueron mejor elaborados ya que subieron los niveles de originalidad, flexibilidad, fluidez y claridad; estos elementos antes de recibir la estimulación del aprendizaje por indagación estuvieron en un nivel regular.
- En la entrevista, (ver anexo 19) los estudiantes manifestaron, que crear problemas es muy motivador debido a que uno puede plantearse los problemas según sus propias necesidades.
- Considerando la tabla 17, se desprende que en la fase II de creación de problemas por elaboración un estudiante obtuvo 29 puntos, este mismo estudiante que trabajo luego en

equipo en la fase IV obtuvo 53 puntos, esto se debe porque en la fase III, han recibido información sobre el aprendizaje por indagación y también se debe por hecho de trabajar en equipo y en colaboración con sus compañeros.

Por lo expuesto en los párrafos anteriores consideramos que el objetivo general se ha logrado, ya que se han desarrollado sin contratiempos las cuatro actividades planteadas, así mismo se cumplieron con los tres objetivos específicos establecidos en la presente investigación. Los datos obtenidos en la investigación nos llevan a la conclusión de que el aprendizaje basado en la indagación, si influye positivamente y de manera adecuada en la creación de problemas, debido a que los estudiantes han demostrado mayor autonomía al momento de crear los problemas y estar más motivados para ello. Estas afirmaciones se desprenden de las entrevistas que se tuvo con los estudiantes al finalizar la investigación, así como del promedio de 43 puntos que se obtuvo en la etapa final, lo que muestra la contribución positiva de la indagación al momento de crear problemas. Del mismo modo podemos ver la evolución de los problemas creados, esto se visualiza en las figuras 29 y 38, en las que se aprecia la mejora de los problemas inventados.

5.2 RECOMENDACIONES.

- En la literatura científica sobre indagación en matemática, los aportes son pocos, más información se puede encontrar en el área de ciencia y tecnología. Se debe seguir contribuyendo con la investigación relacionada con la indagación y creación de problemas en matemáticas.
- Es necesario que las futuras investigaciones consideren la enseñanza y aprendizaje por indagación, los cuales deben ser desarrollados en talleres de periodos más amplios.

- La creación de problemas es interesante como estrategia de enseñanza y su aplicación puede darse en cualquier nivel y grado como se muestra en el anexo 20.



REFERENCIAS

Artigue Michele.

2017 ¿Qué es la educación basada en la indagación?, *la gaceta de la RSME* 20 (3), pp. 593-609.

Artigue, Michele y Blomhoj, Morten.

2013 Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), pp. 797-810.

Avilés, Ginette

2012 Implementando la metodología indagatoria en el aprendizaje de la geometría desde una concepción constructivista, *VIII Festival Internacional de Matemáticas*, pp. 1-11.

Arenas, Mario

2012 Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas. *Universidad Nacional, Medellín, Colombia. Consulta: 22 de junio del 2018.* <http://www.bdigital.unal.edu.co/9300/1/5654114.2012.pdf>.

Ayllón, María; Gómez, Isabel, y Ballesta Julio.

2016 Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y representaciones*, 4(1), pp 169-218.

Ayllón, M aria.

2012 *Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. Doctoral dissertation, Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Bravo, José y Sánchez, Juan

2015. *Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática*. Madrid: La Muralla.

Cárdenas, Jorge

2015 Análisis de problemas de adición, sustracción y multiplicación de expresiones decimales, creados por estudiantes del 6 grado de primaria en una experiencia didáctica. *Trabajo de Grado realizado para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú.*

Castro, Encarnación

2011 *La invención de problemas y sus ámbitos de investigación SEIEM. Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática*". Universidad de Granada, Andalucía, España. pp. 5-15.

Castillo, Johann

2013 *Área y perímetro de polígonos y regiones poligonales*. Tesis Doctoral dissertation. Bogota: Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá.

Cockcroft, W. H.

1985 *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft*. Ministerio de Educación y ciencia. Madrid: Editorial GREFOL. p. 7

Corberán, Rosa.

1996 *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. Doctoral dissertation, Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universitat de València.

Dinarte, Ginette.

2011 La metodología indagatoria: una mirada hacia el aprendizaje significativo desde "Charpack y Vygotsky". *InterSedes*, 12(23).

Douglas, Grouws y Kristin, Cebulla

2006 *Mejoramiento del desempeño en matemática*. México. Universidad Pedagógica Nacional. Consulta: 12 de agosto del 2018. <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001254/125453s.pdf>

Del Olmo, María; Moreno, Francisca y Gil, Francisco

1989 *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis. pp. 46

Espinoza, Johan., Lupiáñez, José y Segovia, Isidoro.

2013 *Inventio de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio*. Consulta: 22 de junio del 2018. <http://funes.uniandes.edu.co/2323/1/Espinoza2013CEMACYC.pdf>

Fernández, José Antonio

2018 *Problemas y tareas basadas en los metamodelos*. Consultado el 24 de julio del 2018.
<http://www.grupomayeutica.com/documentos/metamodelos.pdf>

Fernández, José y Barbaran, Juan

2015 “ Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática”. España: Editorial Muralla S.A., pp. 44-51

Ferrés, Gurt; Marbà, Anna y Sanmartí, Neus

2014 Trabajos de indagación de los alumnos: instrumentos de evaluación e identificación de dificultades. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 12(1), pp-22.

Flores, Julio y Comeca, Benito

2012 *Elementos de Geometría Plana*. Lima: Fondo Editorial UNMSM-Centro Preuniversitario

García, Juan

1992 Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. *Aula de innovación educativa*, n.6, pp.14-21.

Hofstadter, Douglas.

1982 *Godel, Escher, Bach: una eterna trenza dorada*. CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA MEXICO.

Izquierdo, Fernando.

2016 Aprendizaje por indagación en Educación Primaria: análisis e interpretación de datos y desarrollo de modelos. Consultado: el 12 de mayo del 2018.
http://ndspace.ubu.es/bitstream/10259/4171/6/Izquierdo_Miranda.pdf

Jauregui, Pello y Goienetxe, Rosa.

2018 El aprendizaje basado en la indagación en la enseñanza secundaria. *ASOCIACIÓN INTERUNIVERSITARIA DE INVESTIGACIÓN PEDAGÓGICA (AIDIPE) MIEMBRO DE LA EUROPEAN EDUCATIONAL RESEARCH (EERA)*, 36(1), 109.

Juvêncio, Abraao y Câmara, Marcelo.

2009 Avaliação Externa do Projovem: o caso de áreas e volumes. *Boletim de Educação Matemática*, 22(33).

- Kospentaris, George y Spyrou, Panagiotis
2011 Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.
- Malaspina, Uldarico.
2011 Sobre creación de problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática Unión*, (28), pp. 159-164. Consultado el 25 de agosto del 2018.

http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/28/archivo_16_volumen28.pdf
- Malaspina, Uldarico.
2013 La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores[diapositivas]. Consulta: el 7 de noviembre del 2018.

http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2015/07/Conferencia-en-CIAEM_2015-U.-Malaspina.pdf
- Malaspina, Uldarico.
2014 El rincón de los problemas: papiroflexia y elementos para construir indicadores sobre creación de problemas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (38), pp. 135-141.
- Malaspina, Uldarico.
2014 Flexibilidad, originalidad y fluidez en la variación de problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN*, 39, pp. 135-140.
- Malaspina, Uldarico y Vallejo, Estela.
2014 Creación de problemas en la docencia e investigación. *Departamento Académico de Ciencias, Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Reflexiones y propuestas en educación matemática*, pp.7-54.
- Malaspina, Uldarico.
2016 Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, pp. 321-331.
- Marmolejo Gustavo y González María.
2015 El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 10(1).
- Moise, Edwin. y Downs, Floyd.,
1972 *Serie de matemática moderna*. Lima, Perú: Norma. pp. 304-306

Moreano Villena y otros

2017 El Perú en PISA 2015: informe nacional de resultados.

National Council of Teachers of Mathematics 2000 (Ed.). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of. p. 20

Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes, Ministerio de Educación del Perú
2019. Consulta: el 12 de noviembre del 2018.

<http://www.ece2018.pe/>

Rojas, Fidel y otros.

2018 Recomendaciones de política para la innovación educativa: experiencias educativas innovadoras sistematizadas por el Fondo Nacional de Desarrollo de la Educación Peruana -FONDEP.

Roldán, Gabriel y Rendón, Hernando.

2014 *Estrategia para el estudio del área y el perímetro de figuras planas articulada al modelo socio crítico para los estudiantes de la Institución Educativa María de los Ángeles Cano Márquez*. Doctoral dissertation, Maestría en Educación Matemática-Universidad de Medellín.

Sallán, José

1999 Los enigmáticos cálculos del escriba Ahmes. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (31), pp. 55-66.

Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias. Colombia

1998 *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional.

Valiente, Santiago.

2000 *Didáctica de la matemática*. Madrid. Editorial La Muralla SA.

Vílchez, José y Bravo, Beatriz.

2015 Percepción del profesorado de ciencias de educación primaria en formación acerca de las etapas y acciones necesarias para realizar una indagación escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), pp. 0185-202.

Web de Paco Gómez

El método Moore o el aprendizaje por indagación. Consultada: el 24 de agosto de 2018.
<http://www.webpgomez.com/social/educacion/408-metodo-moore>.

ANEXOS

Anexo 01

Tabla 1. Descripción de los niveles de desempeño de Matemática en PISA 2015

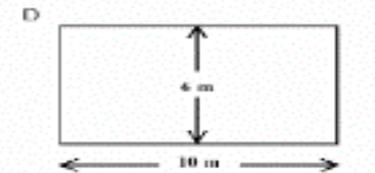
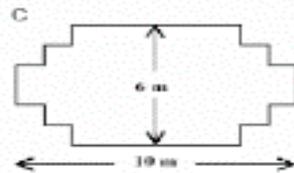
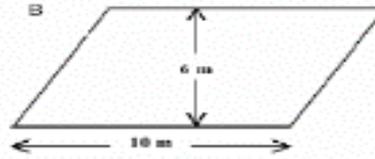
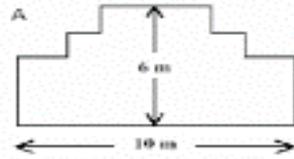
| Niveles | Descripción |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nivel 6 (mayor o igual a 669) | Los estudiantes pueden conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos, y pueden usar su conocimiento en contextos no usuales. Asimismo, pueden relacionar diferentes fuentes de información y tipos de representaciones, y pasar de una a otra con flexibilidad. Los alumnos de este nivel son capaces de pensar y razonar con matemática avanzada. Pueden aplicar su conocimiento, comprensión e intuición, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, para desarrollar nuevos planteamientos y estrategias frente a situaciones nuevas. Del mismo modo, pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones referidas a sus resultados, interpretaciones y argumentos, y su pertinencia a situaciones originales. |
| Nivel 5 (entre 607 y 669) | Los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos de situaciones complejas, que exigen identificar las condiciones y especificar los supuestos. De igual manera, pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas para abordar problemas complejos relacionados con estos modelos. En este nivel, los alumnos trabajan estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones referidas a estas situaciones. Ellos reflexionan sobre sus acciones y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos. |
| Nivel 4 (entre 545 y 607) | Los estudiantes pueden trabajar eficazmente con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas, que pueden implicar condiciones o exigir la formulación de supuestos. También, pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, relacionándolas directamente con situaciones del mundo real. Además, en este nivel, los estudiantes utilizan su rango limitado de habilidades y pueden razonar con algunas intuiciones en contextos simples. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, razonamientos y acciones. |
| Nivel 3 (entre 482 y 545) | Los estudiantes pueden ejecutar procedimientos claramente descritos, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Sus interpretaciones son suficientemente sólidas como base para la construcción de un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillos. Asimismo, en este nivel, pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Ellos típicamente muestran algunas habilidades de manejo de porcentajes, fracciones y números decimales y de trabajo con relaciones proporcionales. Sus soluciones reflejan que están comprometidos en interpretaciones y razonamientos básicos. |
| Nivel 2 (entre 420 y 482) | Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. De igual modo, pueden extraer información relevante a partir de una única fuente y hacer uso de un único modo de representación. A su vez, utilizan algoritmos, formulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas que involucran números naturales. También, son capaces de realizar interpretaciones literales de sus resultados. |
| Nivel 1 (entre 358 y 420) | Los estudiantes pueden responder a las preguntas que involucran contextos conocidos, en los que se encuentra toda la información necesaria y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Realizan acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados. |
| Debajo del nivel 1 (menor a 358) | Los estudiantes que no alcanzan el nivel 1 de desempeño pueden, en el mejor de los casos, ser capaces de realizar tareas matemáticas muy directas y sencillas. Estas pueden ser la lectura de un único valor a partir de una figura sencilla o tabla en la que las etiquetas de la misma coinciden con las palabras en el estímulo y pregunta, de modo que los criterios de selección son claros y la relación entre la tabla y los aspectos del contexto descrito son evidentes. Asimismo, realizan operaciones aritméticas básicas, siguiendo instrucciones claras y bien definidas. |

Fuente: OCDE (2016)

Anexo 02

Pregunta 8: CARPINTERO

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



Redea con un círculo *Si* o *No* para indicar si, para cada diseño, se puede o no se puede construir el parterre con los 32 metros de madera.

| Diseño del parterre | ¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando este diseño? |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Diseño A | Si / No |
| Diseño B | Si / No |
| Diseño C | Si / No |
| Diseño D | Si / No |

Pregunta de PISA 2003.

Anexo 03

Se quiere saber la superficie que se cubre con las mayólicas blancas, grises y negras que se muestran a continuación:

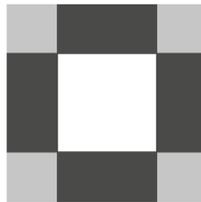


Figura 1

La mayólica blanca y las grises son cuadradas. El lado de la mayólica blanca mide **24 cm** y el lado de la mayólica gris es la mitad que el de la mayólica blanca.

¿Cuánto mide la superficie total cubierta por todas las mayólicas mostradas en la figura 1?

- a) 192 cm²
- b) 1 152 cm²
- c) 1 296 cm²
- d) 2 304 cm²

ANEXO 04

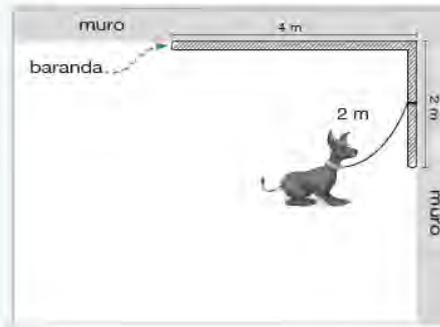
Problema: ¿Por dónde se puede mover una mascota?

Materiales:

- Escuadra y compás

Lee atentamente el problema que se presenta a continuación.

La señora Lorenza tiene en el patio de su casa un espacio para dejar a su perrito seguro cuando ella sale. Este espacio está delimitado por dos muros que forman un ángulo recto entre ellos. Cada muro tiene una baranda de madera de 4 m y 2 m, respectivamente. Lorenza ata la correa del collar de su perrito a un punto fijo de esas barandas, dejando libre 2 m de correa.



Si en alguno de los trabajos necesitas emplear π , considera $\pi = 3$.

Evaluación PISA 2015 MINEDU

ANEXO 05

Figura 3.3. Resultados de Matemática para Perú, Latinoamérica y OCDE, según medida promedio y niveles de desempeño en PISA 2015



Fuente: OCDE (2016b)

ANEXO 06

Tabla 3.3. Variación de los resultados de Matemática para Perú, según niveles de desempeño en PISA 2009 – 2015

| | PISA 2009 | | PISA 2012 | | PISA 2015 | |
|-------------------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|
| | % | e.e. | % | e.e. | % | e.e. |
| Nivel 6 | 0,1 | (0,1) | 0,1 | (0,0) | 0,0 | (0,0) |
| Nivel 5 | 0,5 | (0,2) | 0,6 | (0,2) | 0,4 | (0,1) |
| Nivel 4 | 2,1 | (0,4) | 2,1 | (0,4) | 2,7 | (0,4) |
| Nivel 3 | 6,8 | (0,7) | 6,7 | (0,7) | 9,8 | (0,7) |
| Nivel 2 | 16,9 | (1,3) | 16,1 | (1,0) | 21,0 | (0,9) |
| Nivel 1 | 25,9 | (1,2) | 27,6 | (0,9) | 28,4 | (0,9) |
| Debajo de Nivel 1 | 47,6 | (1,8) | 47,0 | (1,8) | 37,7 | (1,2) |

Fuente: OCDE (2016b)

ANEXO 07

1. Un condominio que toma en cuenta la protección al medioambiente considera espacios de áreas verdes, como se muestra en la figura de color gris. ¿Cuántos metros cuadrados se han considerado para el área verde?

- a) 376 m²
 b) 280 m²
 c) 360 m²
 d) 368 m²



2. Una empresa que elabora aceite ecológico de 500 ml desea empaquetar en cajas que contengan dos docenas de botellas. Si el diámetro de la botella es de 8 cm, ¿cuál debe ser el área mínima de la base de la caja?

- a) 1536 cm²
 b) 64 cm²
 c) 4000 cm²
 d) 1536 cm²



Patio de Honor

El siguiente gráfico representa el patio de la IE Los Héroes del Perú.



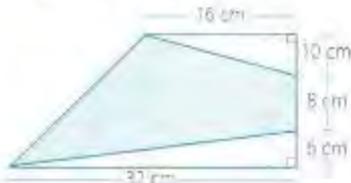
Problema del libro de JEC - 2017

ANEXO 08

11. Un rectángulo ABCD tiene 30 cm de base y 6 cm de altura. ¿A qué distancia de C sobre \overline{CD} debe tomarse el punto M, para que el área del triángulo BCM sea igual a un quinto del área del trapecio ABMD?

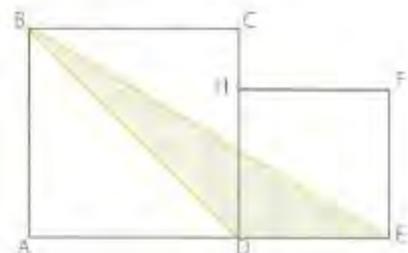
- a. 8 cm
 b. 2 cm
 c. 6 cm
 d. 4 cm
 e. 5 cm

12. En la figura mostrada, calcula el área de la región sombreada.



- a. 250 cm²
 b. 400 cm²
 c. 300 cm²
 d. 350 cm²
 e. 500 cm²

16. Los cuadrados ABCD y DEFH tienen áreas de 45 y 20 cm² respectivamente. **Determina** el área de la región sombreada.



- a. 15 cm²
 b. 30 cm²
 c. 18 cm²
 d. 12 cm²
 e. 16 cm²

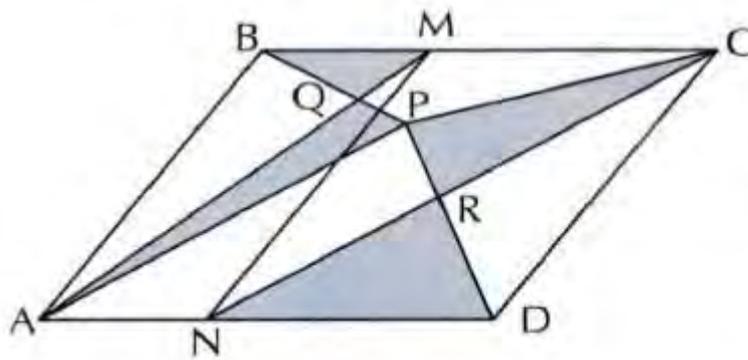
Problema de libro COREFO 2015

ANEXO 09

Problema 13 En un triángulo ABC se traza su altura BH , la mediatriz del lado AC corta al lado BC en F . Encontrar el área de la región del cuadrilátero $ABFH$, si el área de la región triangular ABC es 132 cm^2 .

- A) 64 cm^2 B) 60 cm^2 C) 33 cm^2
 D) 30 cm^2 E) 66 cm^2

Problema 15 En el paralelogramo $ABCD$, encontrar el área de la región triangular AQP , si $MN \parallel AB$, las áreas de las regiones triangulares BQM , PCR y RND son 2 cm^2 , 3 cm^2 y 5 cm^2 .



- A) 3 cm^2
 B) 4 cm^2
 C) 5 cm^2
 D) 6 cm^2
 E) 7 cm^2

Problema de libro COVEÑAS 2015

ANEXO 10

FICHA DE APLICACIÓN ACTIVIDAD I

Apellidos y nombres.....

Marca con una X la puntuación que indique tu grado de aceptación de las afirmaciones que se hacen en el cuadro. Marca 1, 2, 3 o 4. Si marcas 4 significa que estás totalmente de acuerdo con la afirmación y si marcas 1, que estás en total desacuerdo.

| | | | | | |
|---|----------------------------------------------------------------------------------|--|--|--|--|
| A | Me gusta analizar situaciones problemáticas y pensar en sus posibles soluciones. | | | | |
| B | Me gusta analizar por qué suceden las cosas. | | | | |
| C | Me gusta realizar resúmenes y esquemas de lo que leo. | | | | |
| D | Me gusta buscar información amplia en internet. | | | | |
| E | Me gusta leer libros. | | | | |
| F | Me gusta debatir en clase sobre un tema. | | | | |
| G | Me gusta que me pidan mi opinión en clase. | | | | |
| H | Me gusta que me pregunte el profesor/a | | | | |
| I | Me gusta justificar mis afirmaciones | | | | |
| J | Me gusta que me pregunten sobre lo que afirmo | | | | |

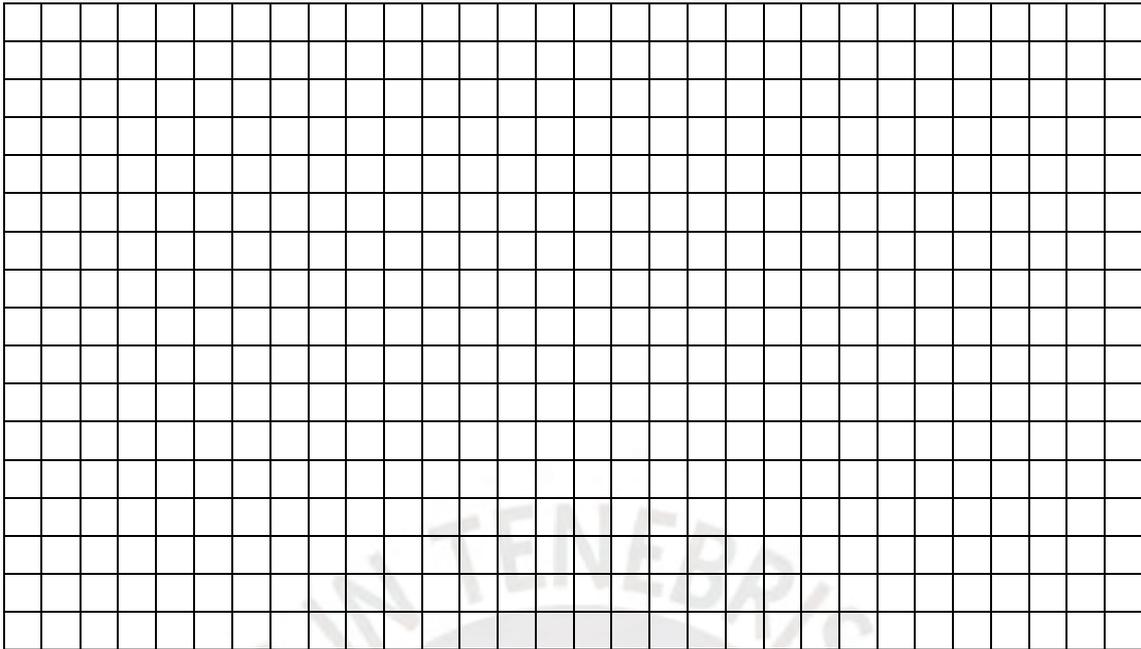
A continuación, te presentamos algunos problemas para que los analices y puedas responder las preguntas planteadas

1. Sobre un terreno trapezoidal isósceles de 12 m. de lado mayor y 8 m. de lado menor, y cuya distancia entre los lados paralelos es de 8 metros, Carolina ha construido un garaje, cuya puerta está en el lado mayor. Carolina desea sembrar césped en la parte del terreno que no está ocupada por el garaje. En la figura se muestran las dimensiones de su auto.

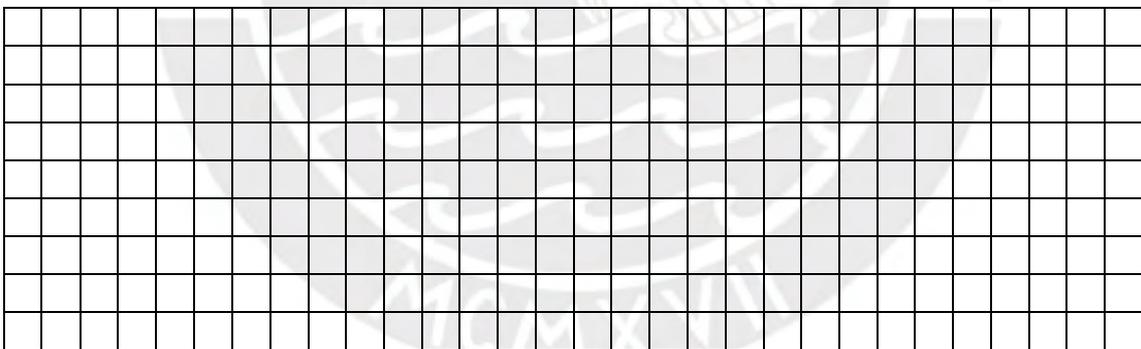


A continuación, desarrolla las siguientes cuestiones:

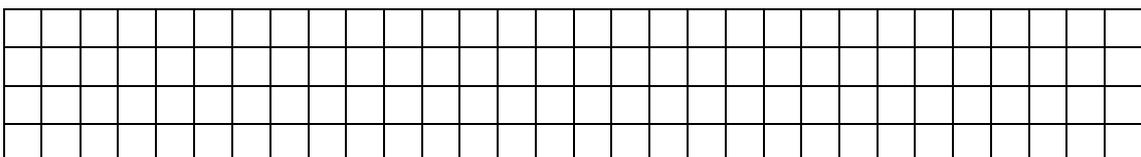
- a) Dibuja una posible ubicación del garaje, indicando las medidas que podría tener.



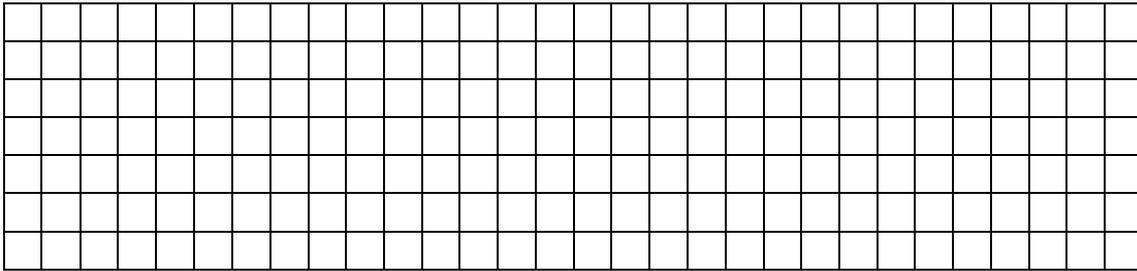
- b) Considera tres posibles dimensiones del garaje, diferentes a las consideradas en (a). Justifica cada una en el contexto dado.



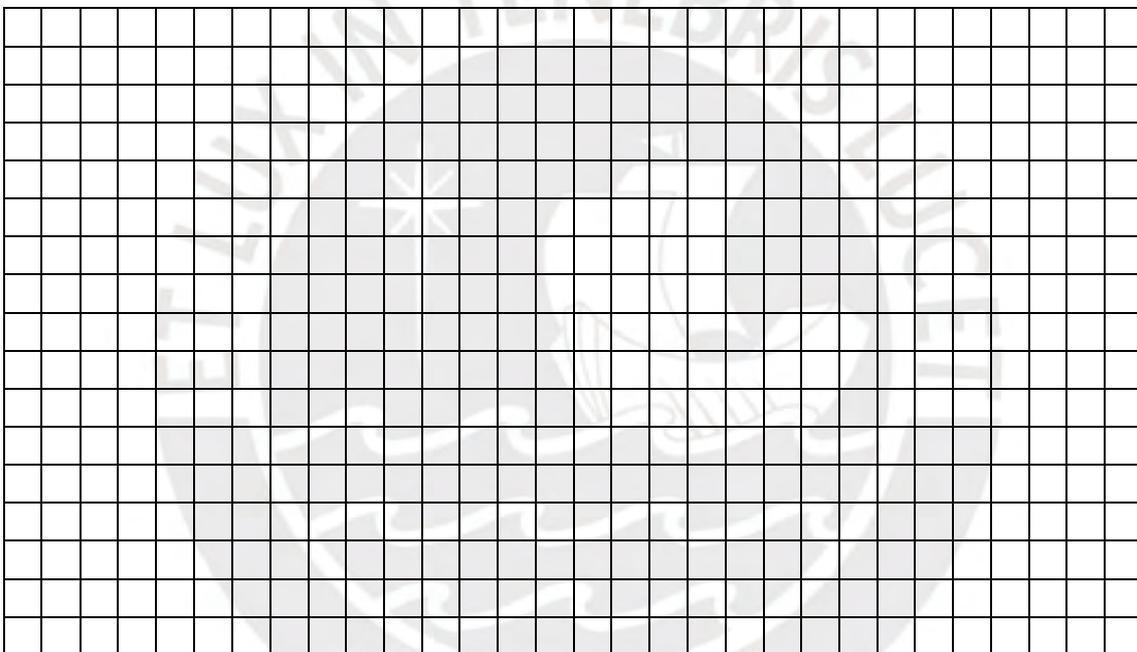
- c) Considerando el caso “a” ¿Cuánto mide el área del terreno donde se sembrará el césped?



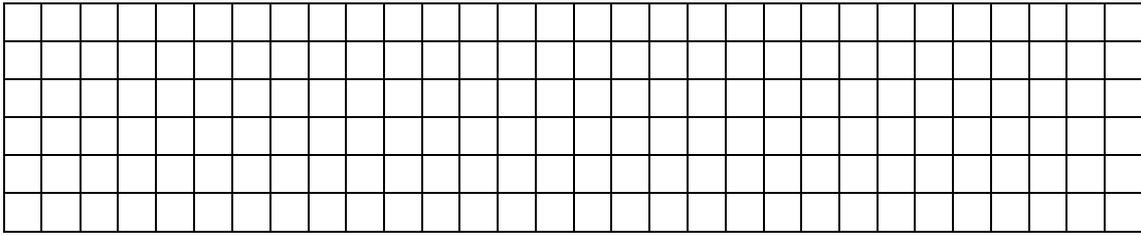
- d) ¿Hay una sola forma de calcular el área de la región en la que se sembrará el césped?



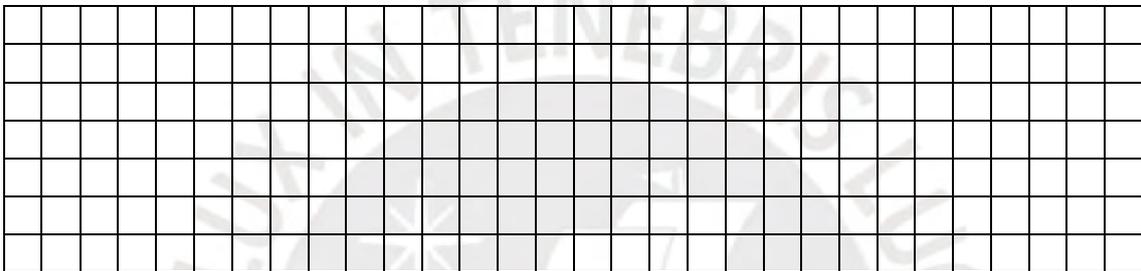
e) Explica el procedimiento utilizado para calcular el área.



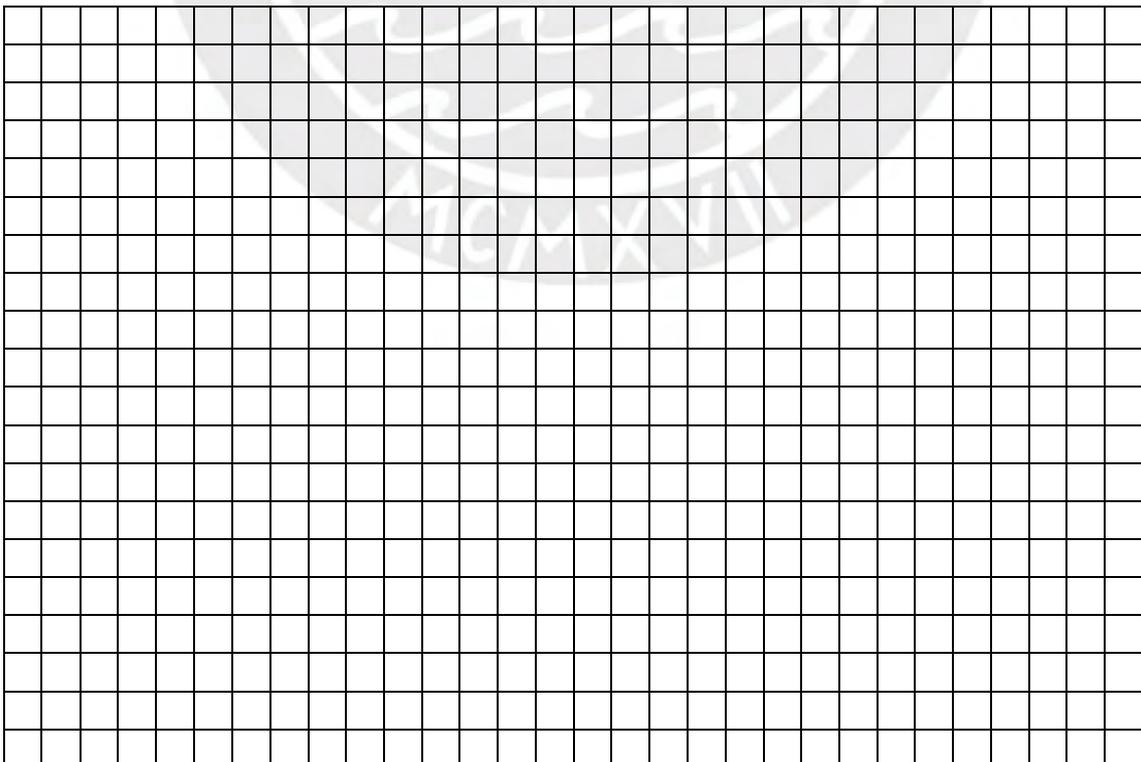
2. Un ingeniero civil decide construir en la urbanización San Francisco tres parques alrededor de un terreno que tiene la forma de un triángulo rectángulo. Las dimensiones de los lados del triángulo son como se muestra en la figura (6m; 8m y 10m)

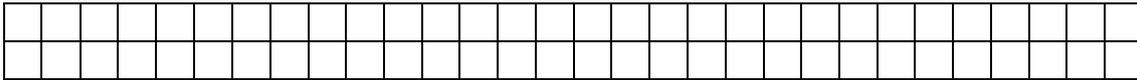


c) ¿Cómo relacionas entre sí las áreas de los triángulos equiláteros?

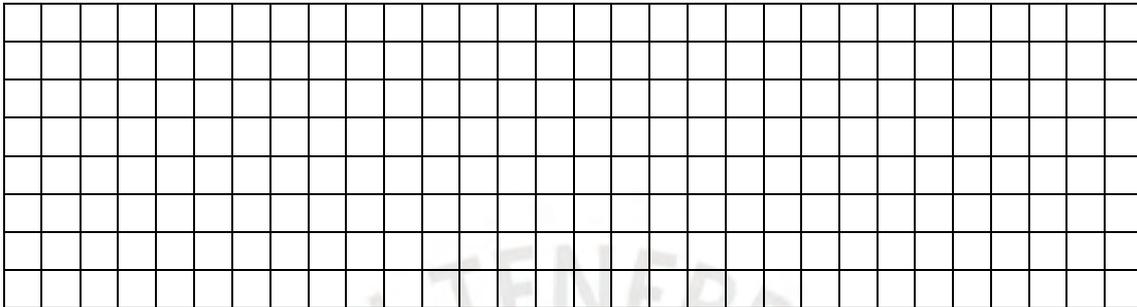


d) Haz un dibujo nuevamente, similar a las anteriores, pero usando hexágonos regulares y luego calcula las áreas de los hexágonos dibujados en los lados del triángulo rectángulo.

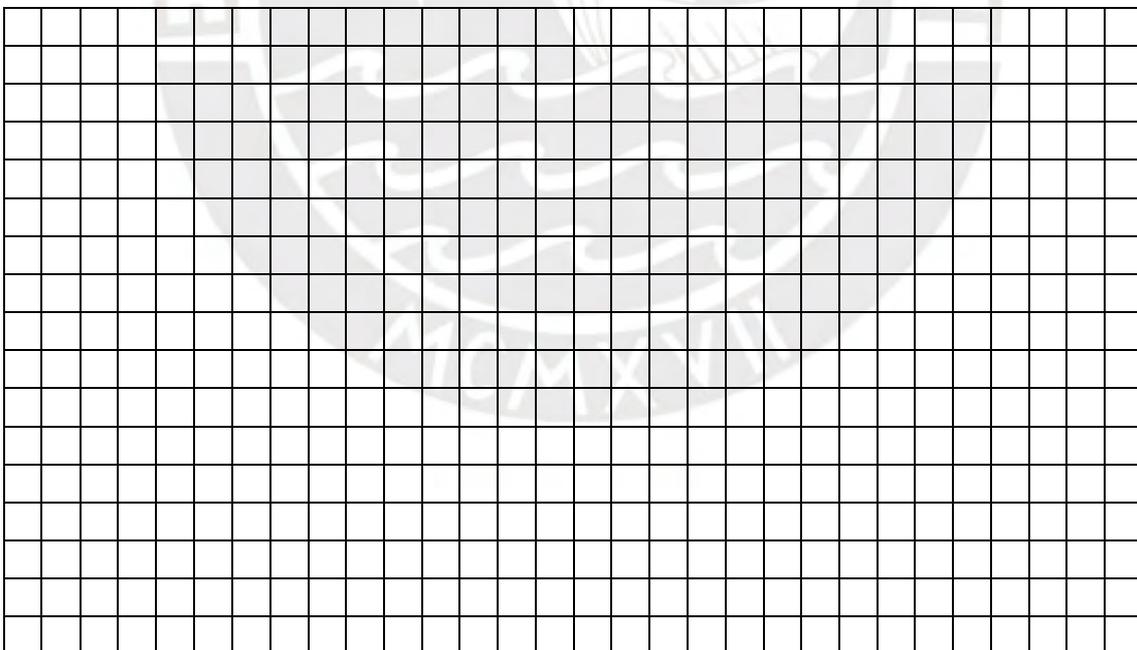




e) ¿Cómo relacionas entre si las áreas de los hexágonos?

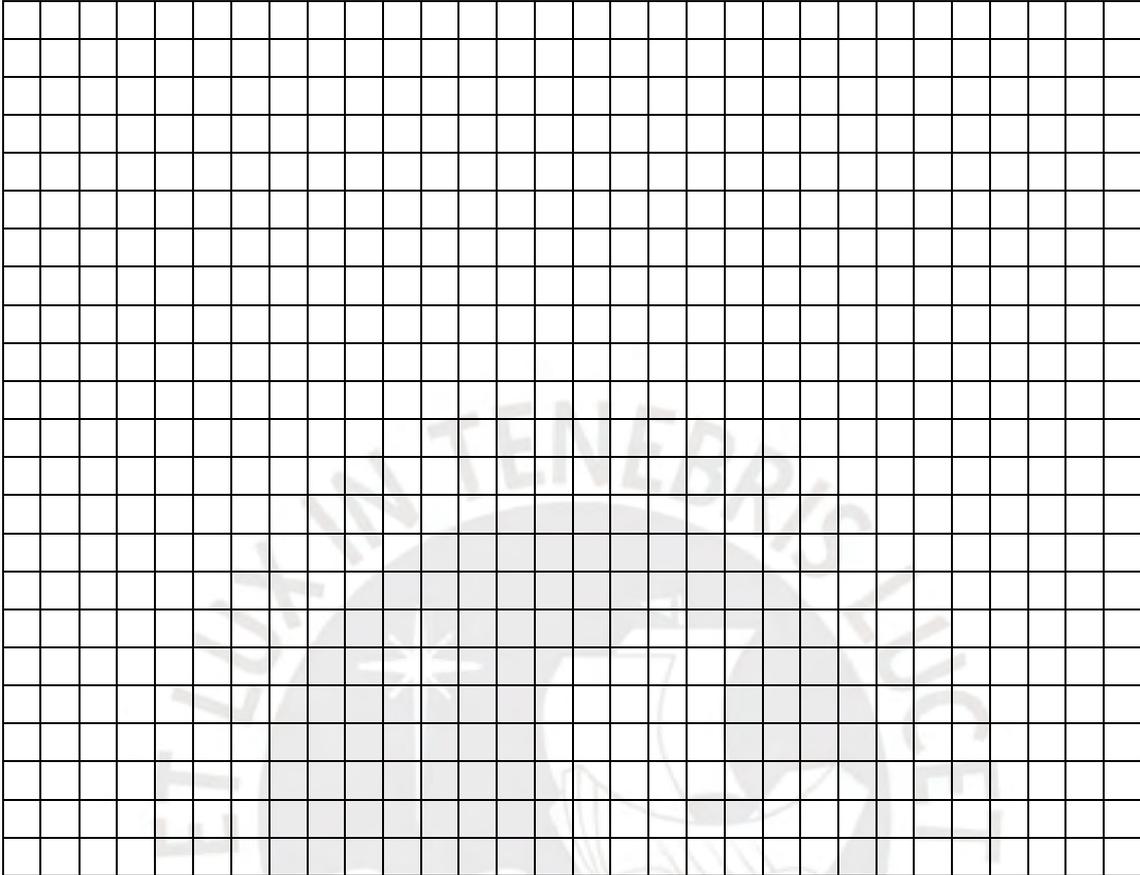


f) En los dibujos realizados con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares, ¿Las áreas de estas figuras dibujadas sobre los lados del triángulo rectángulo, tienen alguna propiedad en común? Explica

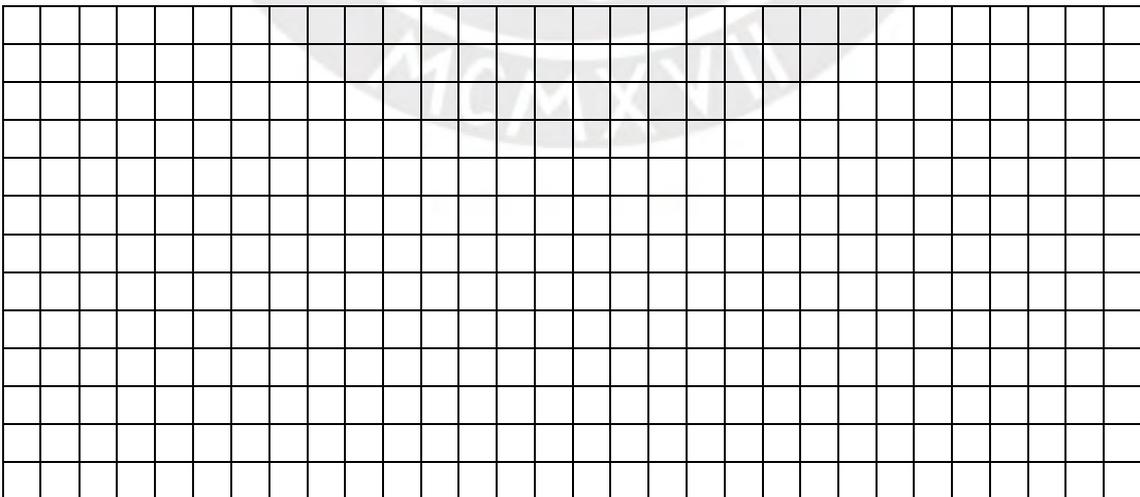


3. Escogiendo un punto P de una circunferencia de radio 6, se debe determinar la región triangular de la mayor área posible, cuyos vértices sean el punto P y los extremos de un diámetro dado AB de la circunferencia.

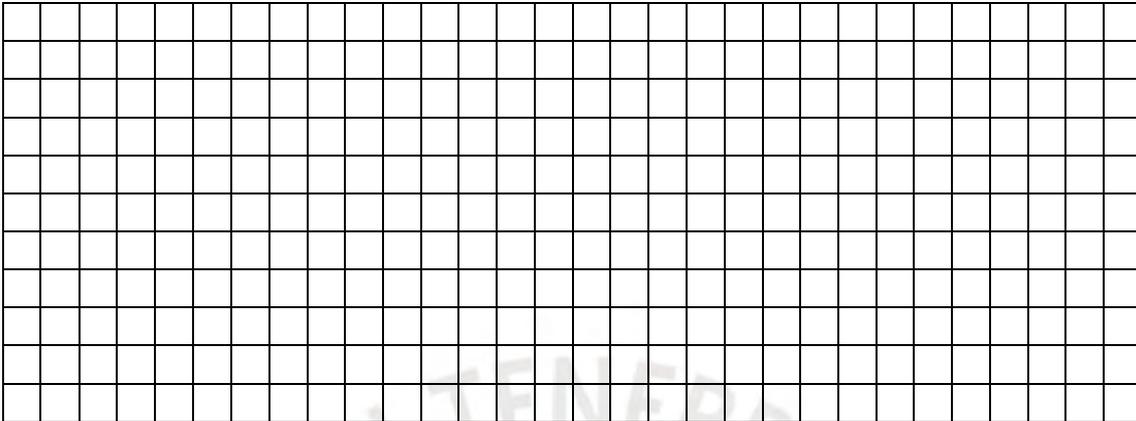
- a) Calcula el área de la región triangular con vértices ABP, si P se ubica de modo que la altura del triángulo respecto al lado AB es 4.



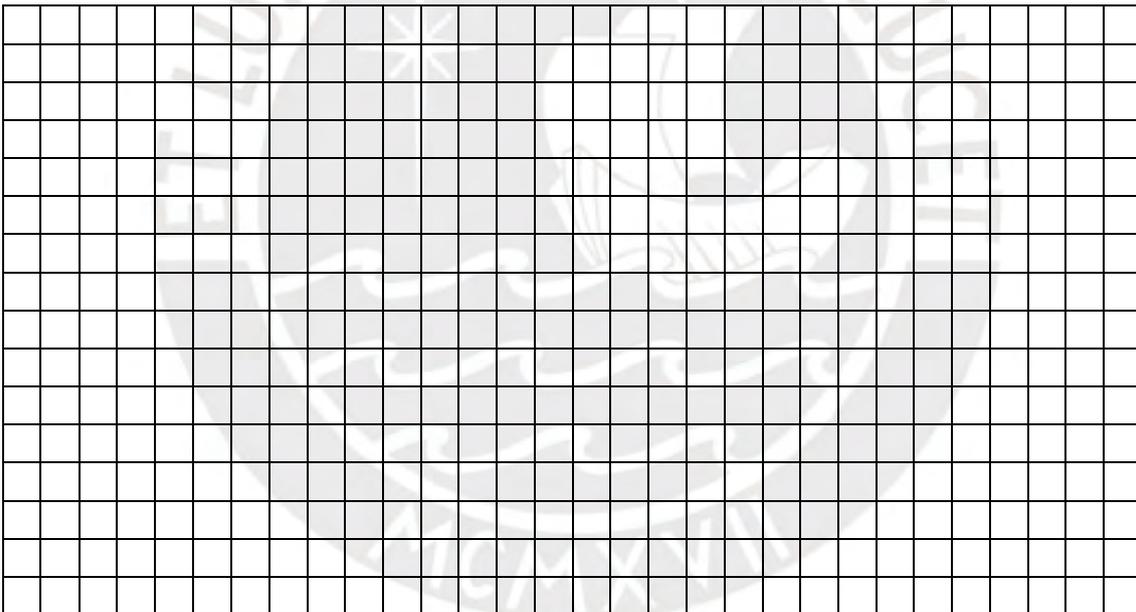
- b) ¿Dónde ubicarías el punto P para obtener tal región triangular de área máxima? Explica el por qué de tu respuesta.



- c) ¿Qué puedes comentar si en el problema, en lugar de pedir la ubicación de P para formar una región triangular de la mayor área posible, se pide la región triangular de la menor área posible?



4. Si tienes una hoja cuadrada, ¿de cuántas maneras la puedes doblar para mostrar una figura cuya área sea la mitad del área de la hoja? Dibujar las maneras.



ANEXO 11

Cuadro de resumen del test

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | TOTAL |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| E1 | | | | | | | | | | | |
| E2 | | | | | | | | | | | |
| E3 | | | | | | | | | | | |
| E4 | | | | | | | | | | | |
| E5 | | | | | | | | | | | |
| E6 | | | | | | | | | | | |
| E7 | | | | | | | | | | | |
| E8 | | | | | | | | | | | |
| E9 | | | | | | | | | | | |
| E10 | | | | | | | | | | | |
| TOTAL | | | | | | | | | | | |

Análisis del ítem 01

- a) La gráfica realizada es correcta.

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

- b) Existe proporcionalidad en las medidas del garaje, con las medidas del terreno

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

- c) Calcula correctamente el área del césped

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

- d) Plantea distintas formas de calcular el área.

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

e) La explicación de procedimiento es:

- 1.- Inadecuado 2.- Adecuado

Análisis del ítem 02

a) La relación aritmética establecida conduce al teorema de Pitágoras.

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

b) La gráfica realizada, en (b) y (d) muestra proporcionalidad con la figura solicitada

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

c) La relación establecida en (c) y (e) conduce al teorema de Pitágoras

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

d) La explicación de la pregunta “f” es:

- 1.- Inadecuado 2.-Adecuado

Análisis del ítem 03

a) La respuesta es correcta

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

b) La ubicación del punto “P” es adecuado.

| | |
|----|----|
| SI | NO |
|----|----|

c) La explicación es:

1.-Inadecuada 2.-Adecuada

Análisis del ítem 04

a) Logra r dobleces:

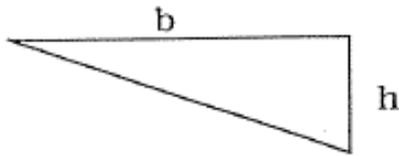
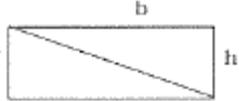
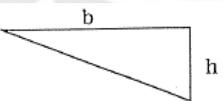
1.- Uno 2.- dos 3.- tres 4.- más de tres

ANEXO 12

Cuadro de consolidado.

| | <i>ítem 01</i> | | | | | <i>ítem 02</i> | | | | <i>ítem 03</i> | | | <i>ítem 04</i> |
|-----|-----------------------|----------|----------|----------|----------|-----------------------|----------|----------|----------|-----------------------|----------|----------|-----------------------|
| | a | b | c | d | e | a | b | c | d | a | b | c | a |
| E1 | | | | | | | | | | | | | |
| E2 | | | | | | | | | | | | | |
| E3 | | | | | | | | | | | | | |
| E4 | | | | | | | | | | | | | |
| E5 | | | | | | | | | | | | | |
| E6 | | | | | | | | | | | | | |
| E7 | | | | | | | | | | | | | |
| E8 | | | | | | | | | | | | | |
| E9 | | | | | | | | | | | | | |
| E10 | | | | | | | | | | | | | |

PROCESO DE INDAGACIÓN SOBRE ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES, ANTE UNA SITUACIÓN DADA

| | |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>PROBLEMA</p> | <p>Ana le pide a Eva que trate de explicar por qué el área de este triángulo es igual a base por altura sobre dos. $A=bxh/2$</p>  |
| <p>CONJETURA</p> | <p>Eva formula la siguiente conjetura: “El área de este triángulo es igual a la mitad del área de un rectángulo cuyos lados son b y h.</p> |
| <p>VARIABLES</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Área del triángulo • Lados del triángulo • Área de un rectángulo |
| <p>PLANIFICACIÓN Y PROCESAMIENTO DE DATOS</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Dibujar un rectángulo de lados b y h en una cartulina. • Trazar una diagonal del rectángulo. • Recortar el rectángulo. |
| <p>ANÁLISIS DEL PROCESO</p> | <p>Si tengo el rectángulo de lados b y h,</p>  <p>entonces el área del rectángulo es: bxh.</p> <p>luego:</p>  <p>tiene como área=$bxh/2$</p> |
| <p>CONCLUSIONES</p> | <p>El área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del área del rectángulo que se construye con dos triángulos congruentes con el triángulo dado.</p> |

PROCESO DE INDAGACIÓN SOBRE ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES, ANTE UNA SITUACIÓN DADA

**(Plantea conjeturas, escribe resultados, plantea preguntas o
inventa problemas)**

| | |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| PROBLEMA | Dibuja un cuadrilátero convexo en cartulina, localiza los puntos medios de los lados y únelos, se formará cuatro triángulos, y el cuadrilátero P. a) ¿Qué puedes decir del cuadrilátero P? b) ¿Qué relación o relaciones encuentras entre el área del paralelogramo y el área del cuadrilátero? |
| CONJETURA | |
| VARIABLES | |
| PLANIFICACIÓN Y PROCESAMIENTO DE DATOS | |
| ANÁLISIS DEL PROCESO | |
| CONCLUSIONES | |

FICHA PARA EL ANÁLISIS DE CREACIÓN DE PROBLEMAS POR ELABORACIÓN.

Bajo: 0-18 Regular: 19-36 Alto: 37-54 Muy alto: 55-72

| ELEMENTOS DE UN PROBLEMA CREADO | CRITERIOS | NIVEL | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-------------|----------|--------------|
| | | BAJO (1) | REGULAR (2) | ALTO (3) | MUY ALTO (4) |
| ORIGINALIDAD | Hay diferencia entre este problema y los problemas propuestos por los otros participantes. | | | | |
| FLEXIBILIDAD | Existe modificación cuantitativa y cualitativa de datos. | | | | |
| | El problema considera nuevos trazos a la gráfica propuesta. | | | | |
| | El problema considera una representación gráfica diferente a la propuesta | | | | |
| FLUIDEZ | Considera un ítem en el requerimiento. | | | | |
| | Considera dos ítems en el requerimiento. | | | | |
| | Considera tres o más ítems en el requerimiento. | | | | |
| | Crea dos o más problemas sobre la misma situación, pero no dependientes entre sí. | | | | |
| CLARIDAD | El problema tiene coherencia lógica y matemática | | | | |
| | La redacción del problema es adecuada | | | | |

| | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|--|--|--|--|
| | El problema tiene contexto extra-matemático adecuado. | | | | |
| | El problema tiene contexto intra-matemático adecuado. | | | | |
| | Las preguntas son pertinentes. | | | | |
| PREGUNTAS DE INDAGACIÓN | Las preguntas se relacionan con lo trabajado en las fases anteriores. | | | | |
| | Las preguntas reflejan creatividad | | | | |
| | Predomina lo intra-matemático | | | | |
| | Predomina lo extra-matemático | | | | |
| | Sirven de base para los problemas creados | | | | |
| OTRAS OBSERVACIONES: | | | | | |

Entrevista a estudiantes participantes.

En las entrevistas realizadas posteriormente a los estudiantes participantes, tenemos comentarios interesantes, que demuestra el interés de los discentes hacia esta forma de enseñanza y aprendizaje en una materia difícil para algunos alumnos. A continuación, transcribimos el comentario:

Docente: ¿Les pareció interesante el taller realizado?

Estudiante 01: la actividad fue interesante y divertido, distinto a lo que nos enseña en las aulas los docentes.

Docente: ¿Qué pueden decir sobre indagación?

Estudiante 02: la indagación lo hemos visto más en el curso de CTA (Ciencia Tecnología y Ambiente).

Estudiante 05: Los profesores de matemática se dedican más a resolver los problemas, no se dedican a preguntar sobre el problema.

Estudiante 03: en el curso de matemática solo realizamos más ejercicios, aplicamos formulas.

Docente: Después de los talleres han aplicado el método de creación de problemas.

Estudiante 01: Lo he aplicado cuando enseñé matemática a mi hermano.

Estudiante 02: No he aplicado aun, pero la enseñanza de las matemáticas debe ser más lúdica y más concretas, vivirlo en la realidad, y no solo copiar los problemas.

Estudiante 06: Crear problemas es interesante porque eres tu quien se hace preguntas a tu manera y buscar a tu manera de resolverlos, plantar los datos y es divertido porque

Estudiante 07: Es más llamativo porque te haces preguntas de lo que no entiendes y eso lo hace más divertido resolverlo. Es interesante porque tu quieres responderte las preguntas que te has hecho

Estudiante 08: Crear problemas te hace razonar

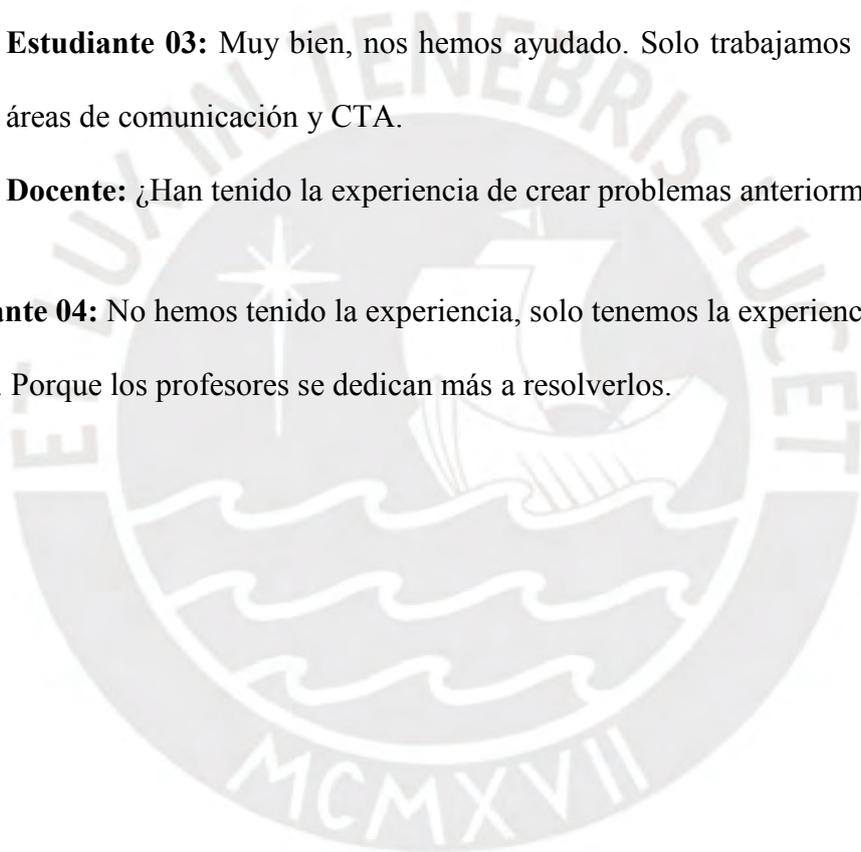
Estudiante 09: crear problemas es llamativo, porque controlas todo, despierta la creatividad.

Docente: ¿Cómo se han sentido trabajando en equipo?

Estudiante 03: Muy bien, nos hemos ayudado. Solo trabajamos en equipo en las áreas de comunicación y CTA.

Docente: ¿Han tenido la experiencia de crear problemas anteriormente?

Estudiante 04: No hemos tenido la experiencia, solo tenemos la experiencia de resolver problemas. Porque los profesores se dedican más a resolverlos.



ANEXO 20

Experiencia en el nivel de primaria.

La experiencia de crear problemas, antes de resolverlas es interesante, tuve la oportunidad de conversar con una docente de primaria sobre este tema y a la docente le intereso esta estrategia, conversamos varios días y se documentó sobre el tema.

Un día me invitó a participar en una sesión de clase y pude observar como los niños del tercer grado de primaria lograron crear un problema, a partir de la siguiente situación: **Sabiendo que un litro se puede repartir en cuatro vasos de un cuarto cada uno.** A partir de ello, la maestra solicita a los estudiantes que ya estaban formados en equipos a crear problemas.

Transcribimos el problema creado: En mi casa va ser una fiesta y van a venir 48 invitados cada invitado va tomar un cuarto de gaseosa ¿Cuántos litros necesito?

The image shows a student's handwritten work on a math problem. At the top, the title "Situación Problemática" is written in red. Below it, the problem is written in black ink: "En mi casa va a ser una fiesta y van a venir 48 invitados cada invitado va a tomar un 1/4 cuarto de gaseosa ¿Cuántos litros necesito?". Below the text, there are two multiplication problems. The first is $12 \times 4 = 48$, with a red 'X' over the 12. The second is $48 \div 4 = 12$. Below the calculations, there are two rows of six colorful mugs, each with a fraction written on it. The first row contains mugs with $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/4$, and $1/4$. The second row contains mugs with $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/4$, and $1/4$. At the bottom, the answer is written: "Respuesta 12 litros necesito."