PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA DE PROBLEMAS CREADOS SOBRE PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO. UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

GREYSON MARTÍN CONTRERAS OCHOA

ASESOR:

ULDARICO VICTOR MALASPINA JURADO

Octubre, 2019

A Dios

Por brindarme siempre privilegios no merecidos, por la constante fortaleza que me brinda día a día y por el eterno amor que siempre me muestra.

A Erika y Kayleth

Mi compañera esposa y mi hijo que me alientan en todo momento con su amor, y su incansable comprensión en todo este trayecto.

A mis Padres

Por su amor, dedicación, consejos y apoyo durante toda mi vida.

RESUMEN

En la presente investigación mostramos un aporte a través del enfoque de la creación de problemas y del modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998); dicho aporte consistió en una propuesta de adaptación del modelo de Demanda Cognitiva de Smith y Stein (1998) para el estudio de tareas relacionadas con la parábola vista como lugar geométrico, en la formación de profesores de secundaria en servicio de la IEP Bertolt Becht. En nuestra propuesta, categorizamos a los problemas que crearon los profesores de la muestra, considerando para ello, las características que determinamos para los niveles del modelo de demanda cognitiva adaptado para los problemas que crean en torno al objeto matemático mencionado. La formulación de los objetivos y propósitos de la investigación, permitieron identificar los niveles de demanda cognitiva (memorización, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones y hacer matemáticas) predominantes en los problemas que crearon los profesores de secundaria en servicio; esto se llevó a cabo en un taller de creación de problemas denominado Creación de problemas de parábolas como lugar geométrico, de cuatro sesiones de trabajo.

Finalmente, mostramos las conclusiones de la investigación, además de algunas recomendaciones y reflexiones para proyectos de investigación futuros que estén vinculados con los objetivos y propuesta de nuestro estudio.

Palabras clave: Creación de problemas; modelo de demanda cognitiva; parábola como lugar geométrico; profesores de secundaria en servicio.

ABSTRACT

In the present investigation we show a contribution through the problem creation approach and the cognitive demand model of Smith and Stein (1998); This contribution consisted of a proposal to adapt the Cognitive Demand model of Smith and Stein (1998) for the study of tasks related to the parabola seen as a locus, in the training of secondary teachers in service of the IEP Bertolt Becht; In our proposal, we categorize the problems created by the aforementioned teachers, considering the characteristics that we determine for the levels of the cognitive demand model adapted for the problems that they create around the mathematical object in question.

The formulation of the objectives and purposes of the research, allowed to identify the levels of cognitive demand (memorization, procedures without connections, procedures with connections and doing mathematics) predominant in the problems created by secondary teachers in service, this was carried out in a problem-building workshop called (creation of parabola problems as a locus) of four work sessions.

Finally, we show the conclusions of the research, as well as some recommendations and reflections for future research projects that are linked to the objectives and proposal of our study.

Keywords: Problem posing; cognitive demand model; parabola as a locus; secondary teachers in service.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por brindarme la vida, un propósito en ella y la fortaleza necesaria en cada paso de esta hermosa travesía académica - profesional.

Agradezco de manera muy especial al Dr. Uldarico Malaspina Jurado, quien ha direccionado y aportado en sobremanera con la planificación, desarrollo y ejecución de esta investigación. No bastan algunos párrafos para describir toda la pasión que siente por la Matemática y por la intensa vocación de servicio.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú, por otorgarme el privilegio de integrar, en primer lugar, la comunidad universitaria, y en segundo lugar por brindarme la oportunidad de integrar la dignísima y muy bien reconocida escuela de posgrado.

También, agradezco de manera singular a todos los docentes de la Maestría de la Enseñanza de la Matemática, que han avivado a través de sus consejos, enseñanzas el verdadero espíritu de un investigador, son mis mayores referentes no sólo en el campo de la investigación, sino también en el ámbito profesional y personal.

A todos mis compañeros y amistades de la maestría, que me han brindado no sólo consejos sino el ánimo necesario antes, durante y después de la ejecución de este proyecto de investigación.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS/CUADROS

INTRODUCCIÓN

La investigación que presentamos en este documento está motivada por el interés en diseñar y crear problemas sobre parábolas, vistas como lugar geométrico, para la formación de profesores de secundaria en servicio. Esto llevó a buscar instrumentos que proporcionen a los profesores herramientas adecuadas para un aprendizaje significativo del objeto matemático en mención.

Un punto de partida se dio en lo mencionado por el National Council of Teachers of Mathematics National (NCTM, 2014), en donde, se considera al modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), como un instrumento notable que permite distinguir el nivel de complejidad entre dos o más problemas.

De este modo, trazamos el propósito de la investigación, el mismo que permitió; identificar los niveles predominantes de demanda cognitiva de los problemas que crean los sujetos que participaron del estudio (profesores de secundaria en servicio de la IEP Bertolt Brecht), mediante una secuencia de sesiones que forman parte de un taller.

La investigación está organizada en cuatro capítulos. En el primer capítulo, presentamos una revisión de diferentes resultados en torno a investigaciones anteriores a nuestro proyecto y que están relacionadas con profesores de secundaria y a la creación de problemas en la formación de profesores.

En segundo capítulo, focalizamos el objeto matemático en estudio, considerando tres aspectos: aspecto histórico/epistemológico; aspecto cognitivo y el aspecto didáctico de la parábola como lugar geométrico.

En el tercer capítulo, describimos el marco teórico, que da el fundamento necesario para el desarrollo de nuestra investigación, este marco teórico lo desarrollamos, a partir de dos enfoques: creación de problemas y el modelo de demanda cognitiva. Además, detallamos en esta sección las características para cada nivel del modelo de demanda cognitiva y elaboramos el instrumento que se adapta para el estudio de nuestro objeto matemático parábola como lugar geométrico.

Asimismo, mostramos la metodología del estudio de casos, el mismo que se utiliza en forma específica para las actividades desarrolladas por uno de los profesores de la muestra.

En el cuarto capítulo, presentamos la parte experimental y el análisis de la investigación; se menciona los episodios de clases (episodio 1, episodio 2, episodio 3 y el episodio 4) en donde, realizamos un análisis doble de los problemas que sugieren los profesores durante el taller que mencionamos párrafos anteriores, dicho análisis lo realizamos desde la mirada de la creación de problemas y del modelo adaptado de demanda cognitiva para nuestro objeto de estudio.
Además, en este capítulo presentamos un análisis específico por cada sesión trabajada en el taller de creación de problemas de parábolas como lugar geométrico con profesores de secundaria en servicio. A través de los instrumentos de evaluación como las rúbricas, precisamos las respuestas de los profesores en las sesiones del taller, asimismo, analizamos los problemas creados por los profesores de la muestra a partir del modelo de demanda cognitiva que proponemos para nuestro objeto de estudio, modelo que hemos adaptado del modelo de Smith y Stein (1998) y de los aportes al modelo realizado por Benedicto (2018)
Finalmente, mostramos algunas consideraciones y conclusiones que responden a los objetivos de nuestra investigación, así como algunas propuestas que puedan realizar investigaciones futuras, que se vinculen con nuestros objetivos y marco teórico.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En esta sección, mostramos investigaciones relacionadas a la creación de problemas, creación de problemas en la formación de profesores y modelo de demanda cognitiva. A partir de los trabajos de Silver (1994), Abu-Elwan (1999), Lavy y Shriki (2007), Kontorovich (2009), Malaspina, Mallart y Font (2015), Singer, Ellerton y Cai (2015) se expone una justificación de nuestro estudio. En la última parte se definen los objetivos de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Presentamos algunas investigaciones realizadas en torno a: la creación de problemas como enfoque teórico, la creación de problemas de matemática en la formación de profesores de secundaria, investigaciones relacionadas a nuestro objeto de estudio la parábola y, finalmente, nos detenemos en los niveles de demanda cognitiva de los problemas de matemáticas.

1.1.1 Creación de problemas como enfoque teórico

Halmos (1980), reconoce como causas principales de la existencia de la matemática a los axiomas, postulados, teoremas, conceptos, definiciones, teorías, fórmulas y métodos. Estos elementos son básicos y fundamentales en la matemática; sin embargo, ninguno de ellos, tal como afirma el autor forma al ser del matemático, debido a que la razón principal de su existencia es la de resolver problemas; a partir de lo mencionado, concluimos según Halmos (1980), que la naturaleza esencial de la matemática es la de resolver problemas.

Además, precisamos que, dentro de la actividad matemática, la creación de problemas o problem posing (PP) en inglés, no es considerada como una característica común dentro de las matemáticas. Sin embargo, en el trabajo de Silver (1994), se evidencia una inconsistencia con la afirmación anterior; el autor menciona que el objetivo principal dentro de la actividad matemática con la creación de problemas, es la de percibir el valor potencial que muestra la creación de problemas (lo llamaremos CP en adelante) como apoyo para generar habilidades en la resolución de problemas. A partir de esto, coincidimos con Halmos (1980) donde afirma que se debe "instruir a los estudiantes en la creación y la resolución de problemas, y esta instrucción debe ser dirigida por un profesor de matemáticas formado en la creación y la resolución de problemas" (Citado en Torres, 2016).

Por otro lado, en esta parte abordamos el contexto histórico de la CP, a partir de lo mencionado por Kontorovich (2009) en donde se resalta, que durante el s. XIX, el reconocimiento y establecimiento de la CP, se dio a partir de tres periodos principales en la historia: el primer periodo, entre los años 1935 y 1950, en donde se publicaron numerosos trabajos, de los que se distingue a Einstein e Infeld, Hadamard, Polya, por haber incluido como aspecto central de sus investigaciones a la CP; el segundo periodo de la historia se da entre 1970 y 1980, a partir de las investigaciones que consideran a la creación de problemas como una actividad de aprendizaje que permite promover el razonamiento matemático, la habilidad y la creatividad de los estudiantes en la resolución de problemas; el tercer y último periodo de la historia se desarrolla desde 1989 hasta la actualidad, es aquí en donde el reconocimiento de la CP se da a partir de la solicitud del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) para incrementar las actividades con CP en las diferentes prácticas matemáticas escolares (NCTM 1989).

En la investigación de Kontorovich (2009), se resalta que en el salón de clases o en la oficina del profesor, individualmente o a través de un grupo de estudiantes se puede crear problemas. El investigador además señala, que el contexto que presenta la CP está orientado a su naturaleza dinámica, a partir de lo cual es válido que supongamos que la complejidad de la CP depende fuertemente del nivel de complejidad del contexto.

Creemos que es necesario continuar aportando con investigaciones que fomenten la creación de problemas, fortalecemos nuestra afirmación con las conclusiones realizadas por Silver (1994), en donde señala que las actividades con la CP, proporciona a los investigadores, un panorama de observación de la forma en la que piensan los estudiantes al realizar prácticas matemáticas; además de proporcionar un área de estudio que aún falta explorar hasta la actualidad.

1.1.2 Creación de problemas de matemática en la formación de profesores de secundaria

Hemos mostrado en la sección anterior un breve panorama acerca de la creación de problemas desde el s. XIX hasta la actualidad; sin embargo, reconocemos que muchos de los estudiantes de educación secundaria no tienen la oportunidad aún de vivenciar la CP en su aprendizaje de las matemáticas y en la mayoría de los casos, son los profesores que siguen las normas, los reglamentos y procedimientos en lugar de utilizar diversos instrumentos para desarrollar la comprensión y el razonamiento en los estudiantes (Ernest; citado por Lavy y Shriki, 2007). Esto nos conduce a afirmar que los profesores no utilizan con frecuencia la CP dentro de su práctica pedagógica. Y uno de los motivos puede ser la complejidad de su implementación en las aulas o a que los profesores no cuentan con las habilidades necesarias para desarrollar la CP, en ambos casos existe una pérdida del desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes al resolver problemas. Coincidimos entonces con Southwell (s.f.), que: “la creación de problemas basados en problemas dados, puede ser una estrategia valiosa para desarrollar habilidades de resolución de problemas de matemáticas en la formación de profesores” (Citado por Lavy y Shriki, 2007). Es por ello por lo que centramos una especial atención en los estudios que involucran a la creación de problemas en la formación de profesores de secundaria, investigaciones como las de Abu-Elwan (1999), Malaspina, Mallart y Font (2015), Singer, Ellerton y Cai (2015), las mismas que consideramos como principales referentes para nuestra investigación.

En la primera parte del trabajo de Abu-Elwan (1999), se observa, la mención que realiza el autor en torno a la necesidad de orientar a los profesores en formación sobre la capacidad para resolver problemas; responsabilidad que cae directamente sobre los formadores de profesores. Además, en dicho trabajo se mostró el grado de responsabilidad que recae en los profesores, al avanzar y superar el rol que los orienta solo a resolver de problemas. Para ello, los profesores debieron promover una situación dentro o fuera del salón de clases que tuvo como eje central desarrollar la creatividad en los estudiantes al momento de resolver problemas; subyace además la capacidad de los maestros para crear adecuadamente los problemas de matemáticas; para ello el autor hace mención de dos recursos que tienen los estudiantes para resolver los problemas de matemáticas, dichos recursos son: libros de textos y los profesores. Por otro lado, dada la importancia del desarrollo de las habilidades de los estudiantes a través de la creación de problemas, el investigador propone crear problemas de matemáticas que sirvan de referencia para los futuros profesores de secundaria.

El desarrollo de la investigación de Abu-Elwan (1999) fue conducida a través de dos preguntas: ¿Cuáles son las habilidades necesarias para los futuros maestros de secundaria en la creación de problemas? ¿Cuál es la mejor estrategia que permite desarrollar habilidades en la creación de problemas matemáticos para futuros maestros de secundaria?

El autor plantea algunas estrategias para la creación de problemas. Asimismo, genera preguntas, como:

> ¿cuáles son las ideas importantes en este problema?, ¿dónde más hemos visto ideas como estas?, ¿podríamos haber usado esta información de una manera diferente para resolver el problema?, ¿tenemos suficiente información importante para resolver el problema?, ¿qué pasa si no se nos dio toda esta información para hacer un problema diferente? ¿cómo podría cambiar algo de esta información? ¿cuál podría ser el problema entonces? (p.3)

Las respuestas a estas preguntas permitieron a los futuros profesores de secundaria que carecen de experiencia en la creación de problemas, tener los instrumentos necesarios para abordar la creación de un problema en particular.

Otra estrategia que propuso el investigador para la creación de problemas fue de manipular las condiciones dadas y el objetivo de los problemas previamente planteados. El autor describe dos estrategias principales que empleó en su investigación para el abordaje pertinente de la creación de problemas; la primera estrategia consiste en crear problemas de matemáticas que tengan como punto de partida los problemas que se encuentran en los libros de texto, la técnica utilizada para desarrollar dicha estrategia es el método de Kilpatrick (1987) y esta consiste en seleccionar un problema de un libro de texto, a continuación, determinar la información brindada, y, finalmente, modificar las condiciones del problema (esto se puede dar de dos formas: añadiendo nuevas condiciones al problema o eliminar condiciones del problema para reformular la pregunta inicial). La segunda estrategia propuesta por Abu-Elwan (1999) para crear problemas se da a partir de situaciones abiertas; el autor hace referencia a problemas similares a los problemas originales, problemas con soluciones parecidas al original, problemas relacionados con teoremas específicos y problemas derivados de imágenes dadas a los estudiantes; el desarrollo de esta estrategia se dio presentando en primer lugar una situación abierta de la vida diaria, luego contemplaron dichas situaciones para plantear problemas a partir de lo resuelto, finalmente los estudiantes tuvieron que completar la situación y plantear preguntas a partir de lo resuelto.

Por último, para validar la pertinencia de dichas estrategias para la creación de problemas, el investigador propone un examen de habilidades que permite medir las capacidades de los estudiantes para aplicar las dos estrategias sugeridas anteriormente. Este examen consta de dos secciones: la primera parte mide las habilidades para la creación de problemas matemáticos basados en la estrategia de "crear problemas a partir de determinados libros de texto"; la segunda, mide las habilidades para crear problemas matemáticos relacionados a la estrategia de "crear problemas a partir de una situación abierta". En las conclusiones de la investigación de Abu-Elwan (1999) se muestra un resultado en torno a las estrategias propuestas descritas en los párrafos anteriores, afirmando que resultan ser eficientes para desarrollar habilidades en la creación de problemas en la formación de profesores de secundaria.

Otra investigación que consideramos relevante para nuestro estudio, que involucra a la creación de problemas en la formación de profesores de secundaria, es el trabajo realizado por Malaspina, Mallart y Font (2015), los mismos que desarrollaron una investigación cualitativa con quince profesores de matemáticas de secundaria en servicio, los investigadores propusieron como objetivos de su trabajo: mostrar cómo una estrategia idónea ayuda a estimular la capacidad de crear problemas matemáticos y mostrar a la creación de problemas como un medio para contribuir al desarrollo de las competencias didácticas y matemáticas de los docentes. La metodología que utilizaron los investigadores es de corte cualitativo que incluye observaciones, estudios de casos y estrategias.

La primera parte de la investigación se desarrolla actividades que consisten en elegir un objeto matemático y crear algunos problemas de naturaleza sencilla considerados como puntos de partida para posteriormente generar otros problemas. Los investigadores muestran una estrategia para la creación de problemas que permitió tener los recursos para el desarrollo de la actividad principal; a partir de ello los problemas fueron desarrollados en talleres y tuvieron la secuencia: resolver el problema, crear problemas a partir de la modificación del problema original con el fin de hacer más fácil la resolución, crear problemas modificando el problema original que tengan una alta demanda cognitiva (problemas posteriores). El desarrollo del taller, en un inicio fue individual y luego se realizó una socialización de los problemas creados por cada uno.

En la segunda parte de la investigación de Malaspina et al. (2015) se desarrollaron actividades en donde se solicitó a los profesores resolver un problema propuesto por los investigadores y a partir de él generar tres problemas pre (son problemas que se generan a partir del problema dado o inicial, de modo que su solución facilite la solución del problema original); luego, modificaron algunos aspectos en el problema inicial y de ese modo los profesores generaron cuatro problemas pos (son problemas que se generan a partir del problema dado o inicial, que tienen cierto grado de complejidad o retadores; que desafían a los estudiantes). Los investigadores concluyen que los problemas creados por los grupos de profesores tienen un alto potencial didáctico – matemático debido a que estos fueron creados en el salón de clases; además infieren que mientras mayores sean los antecedentes matemáticos, así como la experiencia docente los problemas creados serán de mejor calidad y resaltan las oportunidades que ofrece la creación de problemas en la vinculación y desarrollo de las competencias didácticas y matemáticas. Finalmente, en el trabajo de Malaspina et al. (2015) se concluyó, que las actividades desarrolladas por los quince profesores de secundaria en servicio de su investigación, mostraron una contribución al desarrollo de las competencias didácticas y matemáticas, además los autores precisaron que la creación de problemas brinda oportunidades en las que las dos competencias (didácticas y matemáticas) muestran una interacción de forma creativa. La investigación descrita en los párrafos anteriores contribuyó en la capacitación a los quince maestros en servicio de buenas oportunidades y orientaciones para la práctica de la creación de problemas.

1.1.3 Investigaciones sobre parábolas de los problemas de matemáticas.

Numerosas investigaciones (como, por ejemplo, Valdivia y Parraguez, 2012; López y Aldana, 2013; Lara, 2016) toman como foco central en sus estudios al objeto matemático parábola utilizándola como cónica y no como la representación de una función cuadrática, lo cual consideramos que se alinea al interés de estudio en torno al objeto matemático de nuestra investigación. A continuación, detallamos las investigaciones de Valdivia y Parraguez (2012) y Lara (2016), las mismas que consideramos como referencias básicas para nuestro objeto matemático parábola como lugar geométrico.

Valdivia y Parraguez (2012) realizaron un estudio en donde el objetivo principal se centró en identificar y analizar las diferentes construcciones mentales que realizaron cinco estudiantes en torno a la concepción que tienen de la parábola como lugar geométrico a través de las métricas: euclidiana, taxista y máximo, así como los conceptos de los elementos principales de dicho objeto. Este estudio se realizó con cinco estudiantes de la Universidad Católica de Valparaíso, emergió a raíz del tratamiento que le dan los libros de texto a la parábola en la enseñanza universitaria chilena, en donde los autores observaron a la parábola situada entre ecuaciones, parámetros y gráfica. Hecho que generó la pérdida de la definición de parábola, esto es, como lugar geométrico. Los investigadores utilizaron como marco teórico y metodológico a la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema).

Emplearon para el recojo de datos un cuestionario (de siete preguntas) y entrevistas (de ocho preguntas), mencionamos en esta parte que dos de los cinco estudiantes evidenciaron no tener los conocimientos necesarios de distancia de un punto a una recta (de acuerdo con la métrica euclidiana), ello no permitió que puedan construir el objeto parábola; retomando al recojo de dato estos fueron analizados mediante la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema); la evolución del concepto de parábola se analizó mediante la triada de la evolución de esquemas: Intra, Inter y Trans, en conjunto con dos métricas no euclidianas, la métrica del taxista y la métrica del máximo. A partir de esto los investigadores evidencian el comportamiento de la parábola y sus elementos principales cuando se usan las métricas mencionadas.

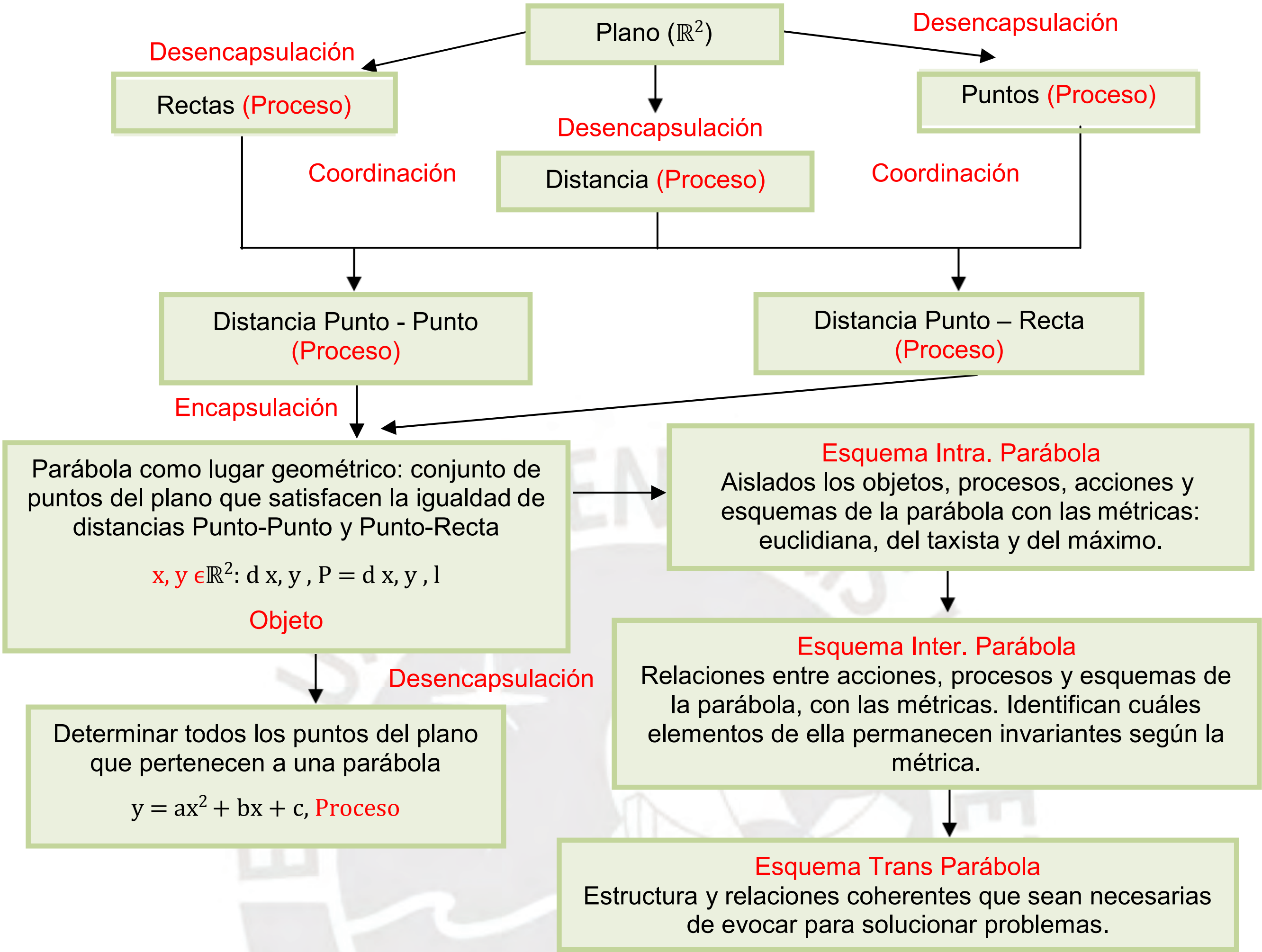


Figura 1. Descomposición genética hipotética del concepto de parábola como lugar geométrico y su evolución a través de la triada.

Fuente: Valdivia y Parraguez (2012, p. 596)

En la figura 1, observamos cuatro de las construcciones mentales de cinco estudiantes que realizaron al trabajar con la parábola como lugar geométrico, mediante tres métricas distintas, siendo éstas: distancias, rectas, puntos y planos. Los autores concluyeron, que se observaron hallazgos notables a partir de la descomposición genética de la parábola como lugar geométrico, como las situaciones a las que se enfrentan los estudiantes: plano cartesiano, distancia entre dos puntos, rectas, lugar geométrico con métricas diferentes.

A continuación, mostramos la figura 2 en donde observamos la invariabilidad de los elementos de la parábola en métricas diferentes.

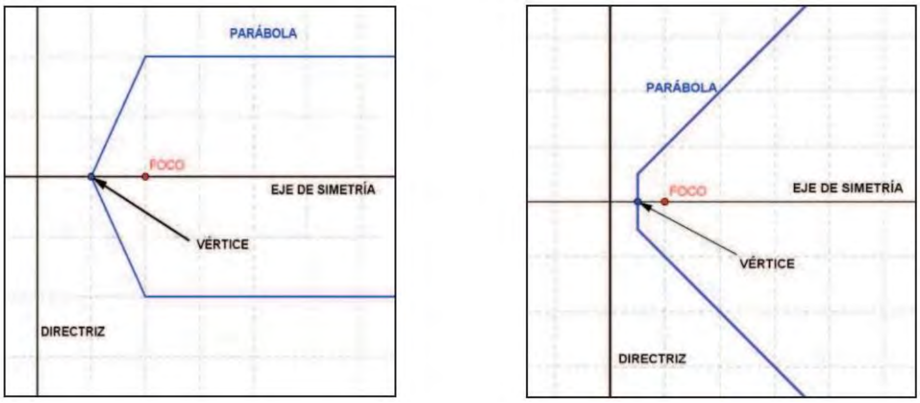


Figura 2. Ejemplo de Parábola y sus elementos principales, según la métrica del taxista (figura izquierda), y según la métrica del máximo (figura derecha).

Fuente: Valdivia y Parraguez (2012, p.600)

Un resultado fundamental realizado por los investigadores, gira en torno a la pérdida de la definición de la parábola y que la concepción de la misma solo queda relacionada o bien a una figura geométrica o a una ecuación cuadrática.

Otra referencia que utilizamos para nuestro objeto matemático parábola como lugar geométrico es la investigación realizada por Lara (2016) en donde se ocupó de investigar a la parábola como lugar geométrico en un entorno de formación continua de profesores. En la investigación participaron 15 profesores de Educación Básica Regular, que a su vez se encontraban estudiando la maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la PUCP. El estudio se desarrolló a través de una secuencia de 4 actividades, tal como se aprecia en la figura 3, en el entorno del Geogebra y como marco teórico utiliza la teoría de Registros de Duval (1995). La investigación se desarrolló en seis etapas, las cuales describimos a continuación: generación de situaciones a-didácticas, validación de tareas, aplicación de las situaciones, comparación de la validación de tareas con los resultados a los que llegan los estudiantes, análisis a priori y posteriori de las situaciones a-didácticas y entrevistas a los estudiantes.

Encuentro	Actividad	Contenido	Descripción
1	**Actividad 1:** Parábola como lugar geométrico	Parábola en base a la propiedad foco - directriz	En la primera actividad movilizaron los conocimientos previos como la distancia de un punto a una recta, mediatriz de un segmento y la propiedad foco directriz por medio de construcciones geométricas fundamentales para el desarrollo de la siguiente actividad. A su vez se plantean preguntas que permiten visualizar y conjeturar sobre el comportamiento de los elementos de la parábola y propiedades con la utilización del Geogebra.
	Actividad 2: Parábola como lugar geométrico	Parábola como lugar geométrico en base a la propiedad de la circunferencia	En la segunda actividad movilizaron los conocimientos previos como la circunferencia, recta tangente y la propiedad de la circunferencia por medio de construcciones geométricas fundamentales para el desarrollo de la siguiente actividad. A su vez se plantean preguntas que permiten visualizar y conjeturar sobre el comportamiento de los elementos de la parábola y propiedades con la utilización del Geogebra.
2	**Actividad 3:** Parábola en dominio de la geometría analítica	Parábola como lugar geométrico en el plano cartesiano	En la tercera actividad movilizaron las propiedades de la parábola y con puntos y elementos específicos para realizar la construcción geométrica. A su vez se plantean preguntas que permiten realizar tratamientos y conversiones entre registros gráfico y algebraico.
	Actividad 4: Aplicación de la parábola	Parábola como lugar geométrico en el plano cartesiano	En la cuarta actividad modelizaron el problema planteado y movilizaron las propiedades de la parábola para realizar la construcción geométrica. A su vez se plantean preguntas que permiten realizar tratamientos y conversiones entre registros.

Figura 3. Descripción de las actividades aplicadas en las sesiones con los profesores.

Fuente: Lara (2016, p. 62)

En la figura 3, se describe el conjunto de cuatro actividades desarrolladas con el uso del software Geogebra. En las conclusiones de la investigación, Lara (2016) afirma que los profesores en servicio obtuvieron una mayor capacidad de comprender al objeto parábola cuando realizaron sus construcciones mediante el registro figural y gráfico; sin embargo, emergieron dificultades al momento de realizar conversiones con los registros verbales y las conversiones entre los registros gráficos con el algebraico; asimismo, la investigadora percibió además, que algunos docentes no relacionaban adecuadamente a la parábola como lugar geométrico, esto es, debido a la confusión que se presenta con su registro gráfico.

1.2 Justificación

Hemos precisado en los antecedentes de nuestro estudio; en torno, a la creación de problemas, una propuesta desarrollada por Abu-Elwan (1999), al trabajar con la creación de problemas con profesores de secundaria en formación; el autor resaltó el hecho de que se debe guiar a los profesores cada vez más, en lograr la capacidad para resolver óptimamente problemas de matemáticas; y esta enorme tarea ha sido derivada a los formadores de los profesores, el autor, además realizó situaciones que evidenciaron el desarrollo de la creación de problemas por parte de los profesores en formación, utilizando para ello, algunos medios como los libros de textos y la aplicación de estrategias, a partir de las interrogantes: ¿cuáles son las ideas importantes en este problema?, ¿dónde más hemos visto ideas como estas?, ¿podríamos haber usado esta información de una manera diferente para resolver el problema?, ¿tenemos suficiente información importante para resolver el problema?, ¿qué pasa si no se nos dio toda esta información para hacer un problema diferente? ¿cómo podría cambiar algo de esta información? ¿cuál podría ser el problema entonces?

Otro punto importante y relevante para nuestro estudio que rescatamos de la investigación en mención es la propuesta de crear problemas de matemáticas que permitan ser fuentes de información para los futuros profesores de secundaria.

Kontorovich (2009), resaltó que, en el salón de clases, en la oficina del profesor, individualmente o a través de un grupo de estudiantes se puede crear un problema. El investigador señaló, que el contexto que presenta la CP está orientado a su naturaleza dinámica, a partir de lo cual es válido que supongamos que la complejidad de la CP depende fuertemente del nivel de complejidad del contexto.

Las investigaciones de Lavy y Shriki (2007), Kontorovich (2009), Malaspina, Mallart y Font (2015), Singer, Ellerton y Cai (2015); han sido abordadas en la sección 1.1 y resaltamos el contexto histórico de la CP que permite consolidar y reconocer a esta como una actividad de aprendizaje que promueve el razonamiento matemático, la habilidad y la creatividad de los estudiantes. De esta manera, los profesores deben incrementar las actividades con CP en las diferentes prácticas matemáticas escolares (NCTM 1989), además de desarrollar un hábito de trabajo en la CP, tal como afirma Halmos (citado en Torres, 2016): “Espero que, como profesores, en clases, en seminarios, en libros y artículos que escribimos lo enfaticemos más y más, de tal forma que instruyamos a nuestros estudiantes a ser mejores creadores y resolutores de problemas que nosotros”.

Esto último, subraya uno de los motivos que nos impulsa a desarrollar nuestra investigación, con los propósitos tanto de utilizar la creación de problemas en la práctica pedagógica de los profesores, como facilitar la comprensión y el uso del objeto matemático de la parábola. De esta forma, se concibe desarrollar las habilidades necesarias en los profesores de secundaria para que cuenten con los recursos suficientes para la creación de problemas con sus estudiantes, reafirmando lo mencionado por Malaspina (2012a) quien resalta la importancia de inducir la capacidad de la CP de matemáticas en la formación de profesores mediante la realización de talleres denominados por el investigador como fase de “entrenamiento”.

Por otro lado, precisamos que el enfoque de la creación de problemas de matemáticas se encuentra presente en la propuesta de enseñanza de las matemáticas en el Perú. Sustentamos este hecho desde lo propuesto en el Currículo Nacional de Educación Básica (MINEDU, 2016), y podemos mencionar que la Educación Básica Regular (EBR) en el Perú está organizado en siete ciclos, correspondiendo el VI y VII ciclo al nivel de Educación Secundaria, además el Currículo Nacional tiene treinta y un competencias; enfatizando la competencia veintiséis: resuelve problemas de forma, movimiento y localización, la misma que comprende cuatro capacidades, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Programa curricular de educación secundaria. Resolución de problemas y parábola en el VII ciclo.

COMPETENCIA No 26	CAPACIDADES	DESCRIPCIÓN DE LA COMPETENCIA
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	• Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Resuelve problemas en los que modela características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y
	• Comunica su comprensión sobre las formas y	

	relaciones geométricas.	propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y **parábola**; la ubicación, distancias inaccesibles, movimientos y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala.
	• Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio.	
	• Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas	

Fuente: Adaptada de Ministerio de Educación, Perú (2016)

Nuestra investigación, si bien no tiene una relación directa con las actividades que se desarrollan en el aula, dado que se encuentra orientada a desarrollar actividades en la formación de profesores de secundaria con la creación de problemas, nos resulta pertinente dirigir nuestra mirada a la competencia de resolución de problemas que está presente en el Currículo Nacional de Educación Básica (MINEDU, 2016); por otro lado, todo ello permite contribuir al desarrollo de la capacidad de crear problemas de matemáticas por parte de los profesores, así los maestros fortalecen sus capacidades para estimular el enfoque de la creación de problemas en los estudiantes, lo que conlleva a que profundicen sus conocimientos de una forma activa, dinámica.

Hasta el desarrollo de la presente investigación solo se han evidenciado estudios sobre el objeto parábola en contextos de geometría dinámica, resaltando las investigaciones de parábola vista como función cuadrática y no como lugar geométrico; sin embargo, en la literatura encontramos una investigación que tiene un ligero acercamiento a nuestro estudio, la investigación fue desarrollada por Lara (2016), donde estudia la parábola como lugar geométrico, a partir de una secuencia de actividades con el software Geogebra en la formación de profesores de matemáticas. Cabe hacer notar, que la investigadora desarrolla un trabajo distinto a nuestra propuesta al no trabajar en ningún momento desde la creación de problemas; además de no tener una propuesta metodológica como la que desarrollaremos en nuestra investigación.

Mencionado todo ello, podemos afirmar que en la literatura revisada no hemos hallado ni investigaciones ni experiencias didácticas que trabajen con la parábola desde la creación de problemas y enfatizando su definición como lugar geométrico; y a partir de ello, generar una propuesta para profesores de secundaria en servicio.

Vemos pertinente abordar al objeto parábola en nuestra investigación, dada la importancia matemática que tiene dicha cónica en las diferentes aplicaciones de la ciencia e ingeniería, entre otras, del mundo actual. La parábola ha tenido a lo largo de los años diferentes concepciones y aplicaciones, reconociendo a Menecmo (375-325 a.C.) como creador de la parábola a partir de la identificación de las secciones planas de un cono. Este hallazgo proporcionó una solución al problema de la duplicación del cubo, conocido también como el problema de Delos ocurrido en Atenas en el año 429 a.C.

Años más tarde, Apolonio de Perga (262-190 a.C.) y Arquímedes (287-212 a.C.) dieron vida a la creación de máquinas bélicas, como el espejo reflectante, con el objetivo de defender su ciudad, por otro lado, la cuadratura de la parábola (tratado geométrico, que demuestra que el área de un segmento parabólico, esto es, el área encerrada por una parábola y una línea recta, es igual a los 4/3 del área del triángulo mixtilíneo inscrito), y finalmente, la determinación de los lugares geométricos; los hechos mencionados generaron a estos años como el siglo de oro de la matemática griega. Siglos después aparece el francés Rene Descartes, quien creó un método que permite relacionar las curvas halladas por los matemáticos griegos con las ecuaciones cuadráticas, asimismo los puntos del plano cartesiano con pares coordenados, método conocido como Geometría Analítica hoy en día, en la literatura podemos encontrar diversas aplicaciones de la parábola tales como las antenas parabólicas que concentran en el foco la señal de ondas electromagnéticas emitidas por el satélite lo cual genera la señal de la televisión; otra aplicación que podemos citar es la cocina solar que concentra en un punto toda la radiación solar a través de un reflector parabólico; en la ciencia de los materiales también encontramos una aplicación de la parábola a partir de una viga que está sometida a una carga formando una cúpula parabólica; en la arquitectura apreciamos los cables de acero de forma parabólica que sostienen todo el peso uniformemente de los puentes; finalmente, en la física la parábola tiene una amplia relación con las diferentes trayectorias, tales como el movimiento parabólico de un cuerpo al caer en tierra debido a la gravedad, proyectiles lanzados desde la superficie de la tierra, el arco parabólico utilizado en construcción, y en el campo de la óptica, los espejos cóncavos. Hemos visto, hasta el momento, una somera descripción de algunos eventos en un contexto histórico de la parábola, además de citar algunas aplicaciones del mismo objeto en la ingeniería, en la arquitectura, en la ciencia de los materiales, entre otros. A partir de ello podemos distinguir la amplia variedad no solo de aplicaciones de la parábola sino más bien de los beneficios que se obtienen a partir del estudio de los elementos y características que presenta el mismo objeto.

En nuestro estudio, analizaremos los problemas creados de la parábola como lugar geométrico que desarrollaron profesores de secundaria en servicio; mediante los niveles de demanda cognitiva, modelo desarrollado por Smith y Stein (1998). Las investigadoras hacen referencia a la demanda cognitiva como los procesos cognitivos que están inmersos en la solución de un problema, los mismos que se llevan a cabo al momento de comprender la tarea, como en la etapa de la resolución.

Así mismo, DISER MINEDU (2016), sostiene que la demanda cognitiva de los problemas es considerada como una oportunidad de aprendizaje, generando de este modo un mayor aprendizaje como consecuencia de un nivel mayor de demanda cognitiva de un determinado problema matemático.

A continuación, presentamos los niveles de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), que servirán de base para analizar los problemas creados por los profesores de secundaria en el estudio de la parábola, como lugar geométrico.

Tabla 2. Niveles de Demanda Cognitiva de Smith y Stein.

NIVEL INFERIOR (MEMORIZACIÓN)	NIVEL SUPERIOR (PROCEDIMIENTOS CON CONEXIONES)
• Reproduce hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidas. • No se puede resolver utilizando procedimientos.	• Enfoca la atención de los estudiantes en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar niveles más profundos de comprensión de conceptos matemáticos. • Por lo general, están representados de múltiples maneras, como diagramas visuales, manipulativos, símbolos y situaciones problemáticas.

• No son ambiguos.	
NIVEL INFERIOR (PROCEDIMIENTO SIN CONEXIONES)	**NIVEL SUPERIOR (HACIENDO MATEMÁTICA)**
• Son algorítmicos. • Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer y cómo hacerlo. • No tienen conexión con los conceptos o el significado que subyacen en el procedimiento que se utiliza.	• Exige un pensamiento complejo y no algorítmico. • Exige que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos matemáticos, procesos o relaciones. • Exige que los estudiantes tengan acceso a conocimientos y experiencias relevantes y hacer un uso apropiado de ellos al trabajar en la tarea. • Requiere un considerable esfuerzo cognitivo.

Fuente: Adaptada de Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice, Smith y Stein (1998, p. 348)

No se ha logrado encontrar investigaciones en torno a las dificultades que presentan los profesores en formación al estudiar la parábola como lugar geométrico, desde el enfoque de la creación de problemas y desde los niveles de demanda cognitiva.

Lo antes mencionado, nos permite justificar en esta sección el uso de la parábola para el desarrollo de nuestra investigación ligado a la creación de problemas en el ámbito de la formación de profesores de secundaria.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

En esta sección, y como consecuencia de los antecedentes y justificación de nuestro estudio, descritos líneas arriba, emerge la pregunta de investigación que centra al estudio de la parábola como lugar geométrico, desde la creación de problemas. Estos serán categorizados por los niveles de demanda cognitiva, en el proceso de formación de profesores de secundaria. Planteamos la pregunta:

¿Cuáles son los niveles de demanda cognitiva que predominan en los problemas que crean los profesores de secundaria al estudiar la parábola, como lugar geométrico, mediante la creación de problemas?

1.3.1 Objetivo General

Con la finalidad de estudiar nuestro problema de investigación, planteamos el objetivo general:

Analizar los niveles de demanda cognitiva predominantes en los problemas que crean un grupo de profesores de secundaria en servicio de la IEP Bertolt Brecht, al estudiar la parábola, como lugar geométrico, mediante una estrategia de creación de problemas.

1.3.2 Objetivos Específicos

Pretendemos alcanzar nuestro objetivo general, a partir de los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar los conocimientos de los profesores de la muestra en relación con la parábola, como lugar geométrico.

2. Analizar los niveles de demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores de la muestra, acerca de la parábola, como lugar geométrico, antes de desarrollar un taller sobre creación de problemas.

3. Analizar los niveles de demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores de la muestra, acerca de la parábola como lugar geométrico, luego de desarrollar un taller, aplicando una estrategia de creación de problemas.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En este capítulo, mostramos el estudio del objeto matemático de la parábola como lugar geométrico. Para ello, consideramos tres aspectos de investigación: histórico – epistemológico, aspecto cognitivo y el aspecto didáctico; el primer aspecto lo relacionamos al origen de la parábola y la evolución de su estudio, así como el estudio de dicho objeto matemático, como lugar geométrico; el segundo aspecto cognitivo, se lo relacionamos a los obstáculos que presenta el estudio de la enseñanza de la parábola como lugar geométrico en la formación de profesores; finalmente, el aspecto didáctico, tomamos como referencia dos libros de texto a la que recurren los profesores de secundaria para la enseñanza de la parábola.

2.1 Aspectos Históricos/Epistemológicos

En esta sección, desarrollamos el aspecto histórico/epistemológico de la parábola como lugar geométrico; hacemos referencia a la evolución histórica del estudio de la parábola como lugar geométrico, a través de dos momentos en la historia de las matemáticas. Para ello, consideramos le mencionado por Fernández (2011):

> El período desde el 350 a.C. a 500 d.C., donde se dieron los orígenes de estas curvas a partir de hacer cortes a un cono físico, privilegiando los trabajos de Menecmo (350 a.C.), quien fue el primero en publicar un trabajo acerca de las secciones cónicas, y Apolonio (262-190 a.C.), quien constituyó la primera estructura matemática conocida alrededor de estas curvas, con su obra titulada Las Cónicas.
> Los siglos XV y XVI, con los aportes de los geómetras y pintores alemanes Johannes Werner (1468-1528) y Alberto Durero (1471-1528). Al primero por reconocérsele un método para construir puntos de una parábola de parámetro con regla y compás, con el objeto de resolver el problema de la duplicación del cubo. Y al segundo, por haber forjado una influencia en el arte con base en las construcciones geométricas. En particular, se señala el interés de Durero por resolver el mismo problema geométrico punto por punto de las cónicas para plasmarlas en sus obras artísticas.
> El siglo XVII, período donde se reconoce el surgimiento del tratamiento moderno de las cónicas, analizando la obra matemática de Descartes (1596-1650) desde lo puntual y lo global (p. 42).

En cuanto, al primer momento de la historia, consideramos lo manifestado por Fernández (2011) el trabajo de Menecmo y la Obra de Apolonio, desde una perspectiva global de la parábola como lugar geométrico.

En ese momento de la historia, empezaron a circular tres problemas clásicos, los cuales las mencionamos, a continuación, según Fernández (2011): “la trisección del ángulo; la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo” (p. 44); para la parábola nos centramos en el problema de la duplicación de cubo. Según Fernández (2011) sostiene que:

> “Eratóstenes (s. III a.C.), relacionó este problema con la peste que se produjo en el año 429 a.C. la cual asoló Atenas y causó probablemente la muerte de Pericles, los atenienses enviaron una comisión al oráculo de Apolo en la ciudad de Delos (Grecia) para preguntar cómo podría acabarse con la epidemia de peste por la que atravesaba dicha ciudad, para ello, se planteó como respuesta la necesidad de duplicar el volumen del altar de forma cúbica de Apolo sin variar su forma; fue entonces que los atenienses construyeron otro altar cúbico duplicando la longitud de la arista del altar cúbico inicial con lo que el volumen aumento en ocho veces en lugar de dos y debido a ello no se pudo controlar la peste” (p. 46).

Por otro lado, la definición de curvas que poseían en este periodo era de dos tipos de acuerdo con lo investigado por Fernández (2011): “una curva se generaba cuando era por medio de composiciones de movimientos uniformes y la otra forma era mediante la intersección de superficies geométricas conocidas como: planos, esferas, cilindros, conos” (p. 46).

Fue entonces, cuando Menecmo consideró que seccionando mediante planos a un cono podrían resolver el problema de la duplicación del cubo (Fernández, 2011) un siglo antes a ese descubrimiento se conoció la media geométrica de dos números, es decir. la media geométrica “*x*” de los números “a” y “*b*”, esto representaba construir un cuadrado cuya área sea “$a.b$”, es decir la cuadratura de un rectángulo; siendo “*x*” la altura BD del triángulo rectángulo, tal como se aprecia en la figura 4, que tiene como hipotenusa la longitud “a+*b*”. Los geómetras de esa época, en particular Hipócrates encontró dos medias geométricas en proporción continua, es decir, “*x*” e “*y*” entre dos magnitudes dadas “a” y “b”:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

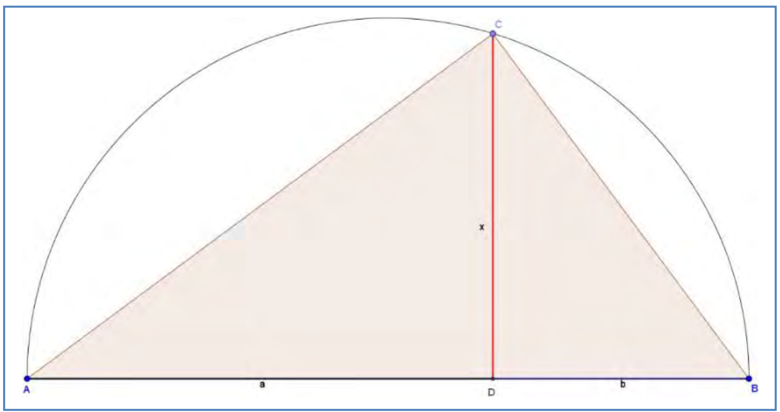


Figura 4. Construcción de la media geométrica.

Fuente: Fernández (2011, p. 45)

La resolución del problemas de la duplicación del cubo, de acuerdo con Fernández (2011), fue desarrollado por Hipócrates de Chios (s. V a.C.) quien, consideró tomar como "*a*" a la longitud de la arista del cubo inicial y "$b=2a$", de acuerdo a la expresión anterior se obtiene: $x^2= ay$; $y^2=bx$ reemplazando en esta última ecuación se obtuvo que, $y^2=2ax$, reemplazamos en esta última ecuación $y=x^2/a$, obtenemos finalmente, $x^3=2a^3$; y por tanto concluimos que "*x*" seria la nueva longitud de la arista del cubo, además cuyo volumen es el doble del primero.

"Menecmo, resolvió este problema hallando curvas, cuyos puntos verificasen las ecuaciones mostradas en el párrafo anterior, y esto lo logró seccionando un cono rectángulo con un plano perpendicular a una de sus generatrices, tal como se aprecia en la figura 5" (Fernández, 2011, p. 46).

A continuación, se explica la demostración de Menecmo del problema de la duplicación del cubo, esto evidenciado en la investigación de Fernández (2011):

> Considérese un cono rectángulo *OAB* con el vértice en *"O"* (Ver Figura 5) y al seccionarlo por un plano perpendicular a la generatriz *OB* en el punto "*C*" situado a una distancia "*a*" de "*O*". Por un punto "*P*" cualquiera de la curva-sección, pasa un plano paralelo a la base del cono que lo corta en la circunferencia de diámetro *RQ*. Sea el pie de la perpendicular desde "*P*" a este diámetro. Por el teorema de la altura, se verifica: $PM^2 = RM.MQ$. Además, $RM=DC$, $\frac{MQ}{DC}= \frac{CM}{a}$(por ser los triángulos y semejantes) y $DC^2 = 2a^2$. De estas igualdades se deduce $PM^2 = 2a.\ CM$. Si en el plano de la sección se toma un sistema de referencia con origen en "*C*" , eje de abscisas la recta que contiene al segmento *CM* y eje de ordenadas su perpendicular en "*C*" , la expresión anterior se escribiría $y^2 = 2ax$, que es la ecuación de una parábola.
>
> La intersección de dos parábolas ($y^2 = 2ax$; $x^2 = 2ay$) resuelve, como ya se indicó, el problema de la duplicación del cubo, prescindiendo de la condición restrictiva de emplear sólo la regla y el compás.

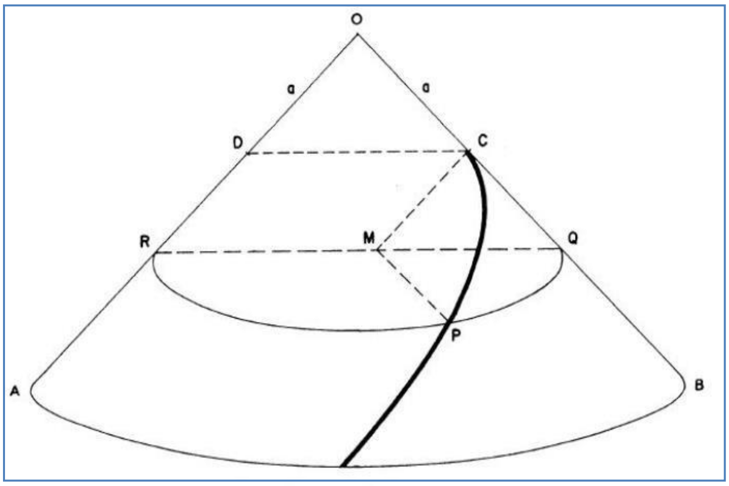


Figura 5. Parábola como sección cónica, según Menecmo.

Fuente: Fernández (2011, p. 47)

Fue el griego Apolonio de Perga (siglo III a. de C), quien plasmó mediante una de sus obras, las cónicas, desarrollada en Alejandría, los resultados que había mostrado Menecmo, así como las propiedades de los lugares geométricos que se traducen en básicas expresiones geométricas (lo que equivale hoy en día a ecuaciones algebraicas), todo ello conlleva a innumerables propiedades de las cónicas, según lo manifestado por Boyer (1974). En la figura 6, observamos la generación de las cónicas de Apolonio, a partir de la variación de la inclinación del plano que secciona al cono circular recto.

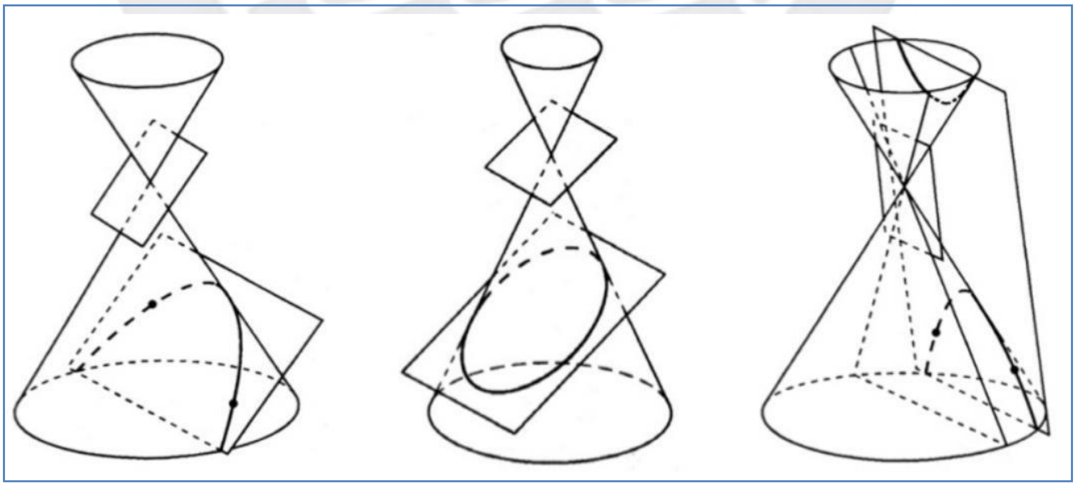


Figura 6. Generación de las Cónicas de Apolonio.

Fuente: Boyer (1974, p. 71)

En el primer cono de la figura 6, observamos a la cónica denominada parábola como la curva generada por un plano de corte paralelo a una sola generatriz del cono; en el segundo cono se observa la cónica elipse generada por un plano de corte que no es paralelo a ninguna de las generatrices del cono; finalmente, en el tercer cono se observa la generación de la hipérbola a partir de un plano de corte paralelo a dos de sus generatrices.

La obra de Apolonio titulada Las Cónicas, contiene ocho libros con un total de 487 proposiciones. De ellos se conservan los cuatro primeros reproducidos en manuscritos griegos de los siglos XII y XIII, y los tres siguientes en una traducción al árabe, escrita en 1290. El octavo libro se perdió, aunque en el siglo XVII el astrónomo Halley (1656-1742) llevó a cabo una reconstrucción de esta obra, basándose en las indicaciones de Pappus (290-350 d.C.).

A continuación, a partir de lo mencionado por Tapia (2002, citado en Aldana y López, 2018), se presenta en la tabla 3, una relación de los 8 libros presentes en la obra de Las Cónicas de Apolonio.

Tabla 3. Libros de la Obra Cónicas de Apolonio.

LIBROS	CONTENIDOS
I	Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas
II	Diámetros, ejes y asíntotas.
III	Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.
IV	Número de puntos de intersección de cónicas.
V	Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.
VI	Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.
VII	Relaciones métricas sobre diámetros.
VIII	Se desconoce su contenido. Tal vez teoremas y/o problemas sobre diámetros conjugados.

Fuente: Adaptada de APOLONIO, EL GEÓMETRA DE LA ANTIGÜEDAD, Tapia (2002, citado en Aldana y López, 2018, p. 5)

Como concluyeron en el trabajo de Boyer (1996); Río-Sánchez (1996); De Guzmán (2005) y Bongiovanni (2007) (citados por Fernández, 2011), las primeras generalizaciones sobre las cónicas, pertenecen a Apolonio, esto pues, han sido descritas en su obra; y algunas de la cuales son:

- No es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono. Este es un paso muy importante en el proceso de unificar los tres tipos de curvas en cuestión.
- Demostró que el cono no necesita ser un cono recto, es decir, tal que su eje sea perpendicular al plano de su base circular, sino que puede igualmente tomarse de entrada un cono circular oblicuo o escaleno y además demostró que las propiedades de las curvas son las mismas, sea que se obtengan como secciones de un cono cualquiera.

Es pertinente indicar que Apolonio no fue el primero en estudiar a profundidad la parábola ni los lugares geométricos, los griegos de acuerdo con Fernández (2011), clasificaban los lugares geométricos en tres categorías: “los lugares planos, son aquellos lugares geométricos rectilíneos o circulares; los lugares sólidos, que incluían a las cónicas; y los lugares lineales, que contenían las demás curvas (cuadratriz, espiral, cicloide, etc.” (p.51).

Asimismo, Fernández (2011) hace mención de la clasificación de problemas geométricos que planteaban los griegos:

- Los problemas planos son aquellos que son resolubles mediante rectas y circunferencias (regla y compás). Por ejemplo, la determinación del lugar de los puntos que equidistan de dos rectas fijas o de dos puntos fijos es un problema plano.
- Los problemas sólidos que se resuelven mediante secciones cónicas. Por ejemplo, la duplicación del cubo es uno de ellos, pues, como ya se ha indicado, puede ser resuelto mediante la intersección de dos parábolas, y
- Los problemas lineales que necesitan de otras curvas distintas. Por ejemplo, la trisección del ángulo fue considerada, en principio, como un problema lineal ya que se resolvía usando la curva trisectríz. Aunque, más tarde Pappus lo redujo a un problema sólido, al encontrar una solución empleando una circunferencia y una hipérbola (p. 51).

De acuerdo con esta clasificación, el autor manifestó que fue Apolonio de Perga, quien se centró en estudiar a los problemas sólidos, llegando a caracterizar a la parábola como un lugar geométrico no por medio de focos y directrices como se conoce en la actualidad, sino más bien, a través de propiedades o “síntomas” (en la actualidad se denomina ecuaciones) (Fernández, 2011, p. 51).

El segundo momento de la historia corresponde al periodo del renacimiento, en este periodo surgieron grandes pensadores y científicos; después de un largo tiempo de estancamiento y decadencia cultural, se generó un vínculo entre la ciencia y el arte que se reflejó en las construcciones geométricas de Werner y Durero.

Desde Pappus, no se evidenciaba un interés por la parábola, fue Werner, geógrafo y geómetra alemán, quien estudio a esta curva y a su vez, a la hipérbola, además escribió su obra, Elementos de las Cónicas, centrándose en la parábola; diseñó un método que permitió construir una parábola de parámetro “*p*” con regla y compas, como observamos en la figura 7, y de ese modo, se despierta nuevamente el interés y se concibe a la parábola como lugar geométrico; el cual detallamos a partir del trabajo de Río-Sánchez (1996):

> Se dibujan dos rectas perpendiculares “*r”* y “*s”* y que se cortan en un punto *V* . Sobre “*r*” se señala un punto *O* a una distancia “*2p”* de *V*. Se trazan circunferencias con el centro en la recta “*r”* y que pasan por *O* ; éstas cortan a la recta “*s*” en puntos *A*,*B*,*C*,... y a la recta “*r*” en *A´*,*B´*,*C´*... Se trasladan paralelamente los segmentos *VA,VB,VC,*... a los puntos respectivos *A´*,*B´*,*C´* obteniéndose los puntos *A´´*,*B´´*,*C´´*,.. los cuales pertenecen ya a la parábola de vértice *V* y parámetro “*p”* (junto con sus simétricos respecto de “*r*”). La justificación es sencilla puesto que la "ordenada" de cada punto, *A´A´´,* por ejemplo, es igual a *VA*, y $VA^2 = 2p.\ VA´$ (por el teorema de la altura aplicado al triángulo rectángulo *OAA´*). (citado por Fernández, 2011, p. 55).

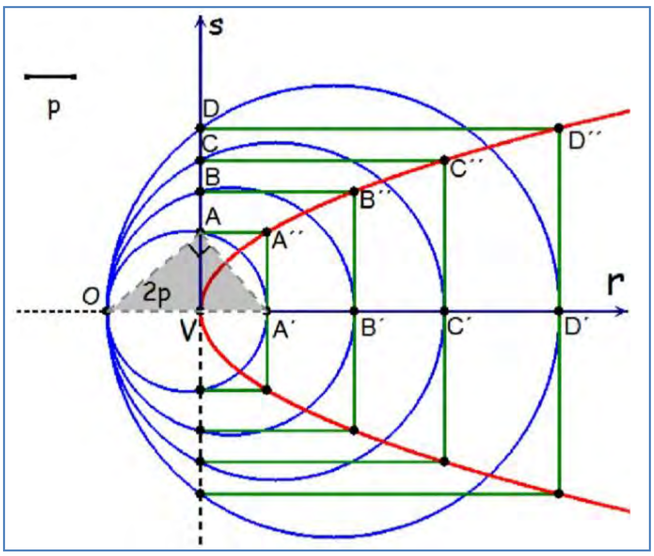


Figura 7. Trazado de la parábola de Werner.

Fuente: Fernández (2011, p. 56)

Para finalizar esta sección presentamos una demostración que permite determinar la curva que se genera, a partir de la intersección de un plano paralelo a la generatriz del cono y el cono, tal como se evidencia en Oteyza, Lan, Hernandez, Carrillo y Ramirez (2011), los investigadores proponen una muestra de la generación de la parábola como lugar geométrico, tal como se aprecia en la figura 8.

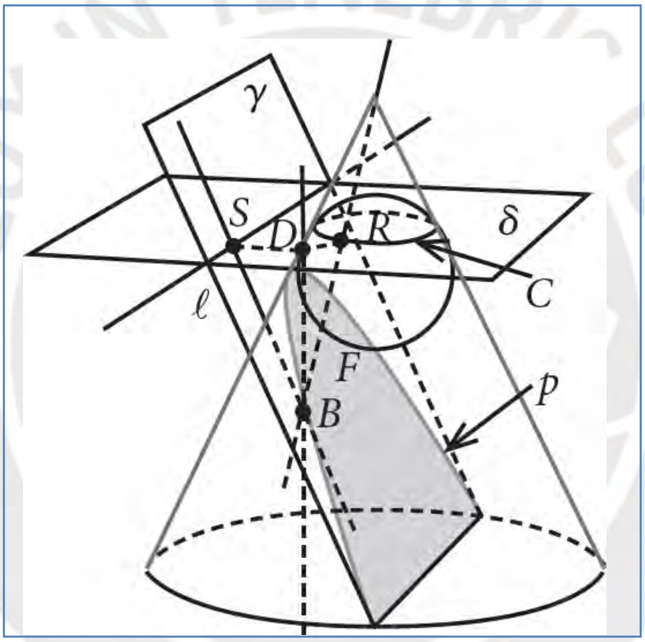


Figura 8. Determinación de la curva parábola, a partir de la intersección entre un plano paralelo a la generatriz de un cono.

Fuente: Oteyza, et al. (2011, p. 135)

En la figura 8, observamos a la curva parábola como lugar geométrico, a partir de la intersección de un plano secante a un cono y el mismo cono, se describe a través de una secuencia de pasos que conlleva a la comprobación de lo antes mencionado:

- Se considera dentro del cono una esfera que sea tangente al plano.
- La intersección de la esfera y el cono forma un círculo C. Este círculo está en un plano δ que es perpendicular al eje del cono.

- Los planos γ y δ se cortan en una recta ℓ, asimismo esta es la directriz de la parábola.
- EL punto F donde la esfera es tangente al plano γ es su foco.
- Se toma un punto B en la curva p.
- La recta que une B y el vértice del cono corta el círculo C en un punto R. Este punto está también en el plano δ.
- La recta que pasa por B corta el plano δ en un punto D.
- En el plano γ, se traza la recta perpendicular a ℓ que pasa por B. Esta recta corta ℓ en el punto S.
- La longitud del segmento $\overline{BS}$ es la distancia de B a ℓ .
- Es claro que, *BF* = *BR*, debido a que *BF* y *BR* son tangentes a la esfera, trazadas desde *B*.
- Como el plano *γ* tiene la misma inclinación que una generatriz del cono, los ángulos *RBD* y *DBS* son congruentes y los ángulos *RDB* y *DSB* son rectos, en consecuencia, los triángulos RBD y DBS son congruentes y, por tanto, *BS* = *BR* = *BF*; finalmente.
- La distancia de *B* a *F* es la misma que la distancia de *B* a ℓ. Como *B* era un punto arbitrario de la curva *p*, entonces *p* es una parábola.

El uso de hoy en día de diversos instrumentos de medición tales como: transportador, regla, transportador, entre otros. Permite a los educandos y maestros tanto en formación como en servicio la construcción del objeto matemático de la parábola como lugar geométrico, a continuación, se muestra tres construcciones; con regla y compás; con hilo y escuadra y con papel doblado.

- **Construcción con regla y compás:** Para ello, se debe poner en manifiesto que la directriz de la parábola y su foco *F* son elementos dados desde un inicio.
    - ❖ Se traza el eje *MF* de la parábola, el cual es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco *F*.
    - ❖ Se localiza el vértice *V* de la parábola, que es el punto medio del segmento *MF*.

- ❖ Para cualquier punto M_1 localizado a la derecha de *V* sobre el eje de la parábola, se traza una recta *AA'* perpendicular al eje *MF*. Todos los puntos de *AA'* distan MM_1 de ℓ .
- ❖ Se trazan arcos con centro en *F* y radio MM_1 que corten *AA'* en P_1 y Q_1.
- ❖ Los puntos P_1, Q_1 pertenecen a la parábola, debido a que las distancias de P_1 y Q_1 a la directriz son iguales a MM_1 que, por construcción, es igual a las distancias de P_1 y Q_1 al foco *F*.

- De este modo, al variar el punto M_1 se puede localizar tantos puntos de la parábola como se desee y trazarla según la conveniencia de cada sujeto (figura 9).

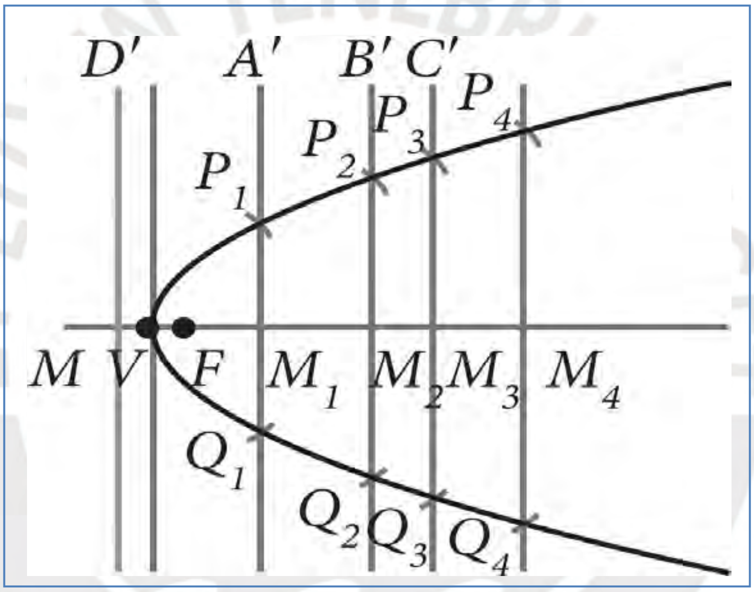


Figura 9. Construcción de la parábola como lugar geométrico utilizando regla y compás.

Fuente: Oteyza, et. al (2011, p. 235)

- **Construcción con hilo y escuadra:** Para ello, debemos de poner en manifiesto que la directriz "ℓ " de la parábola y su foco *F* son elementos dados desde un inicio.
  - ❖ Se traza el eje *MF* de la parábola, el cual es la recta perpendicular a la directriz "ℓ" que pasa por el foco *F*.
  - ❖ Se coloca una escuadra con un cateto $\overline{CB}$ en la directriz.
  - ❖ Se sujeta un extremo de un hilo de longitud $\overline{CA}$ en el extremo *A* de la escuadra y el otro extremo en el punto *F*.

- ❖ Finalmente, con un lápiz en P, se mantiene estirado el hilo y mover la escuadra sobre la directriz. Entonces $FP = PC$ y, por tanto, P describe una parábola, tal como se muestra en la figura 10.

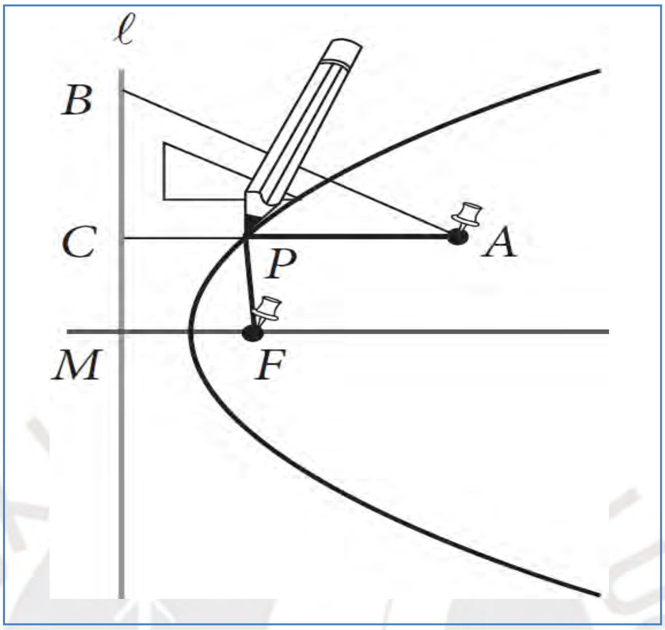


Figura 10. Construcción de la parábola como lugar geométrico utilizando hilo y escuadra.

Fuente: Oteyza, et. al (2011, p. 236)

- **Construcción con papel doblado:** Para ello, se debe poner en manifiesto, que se requiere de una hoja rectangular.

  - ❖ Se debe marcar un punto F cerca de un lado, aproximadamente a la mitad de la hoja.
  - ❖ Se dobla el papel de manera que un punto del lado inferior coincida sobre el punto F.
  - ❖ Se marca el doblez y se desdobla.
  - ❖ Finalmente, se continua con los dobleces de manera que los puntos del lado inferior coincidan con el punto F.

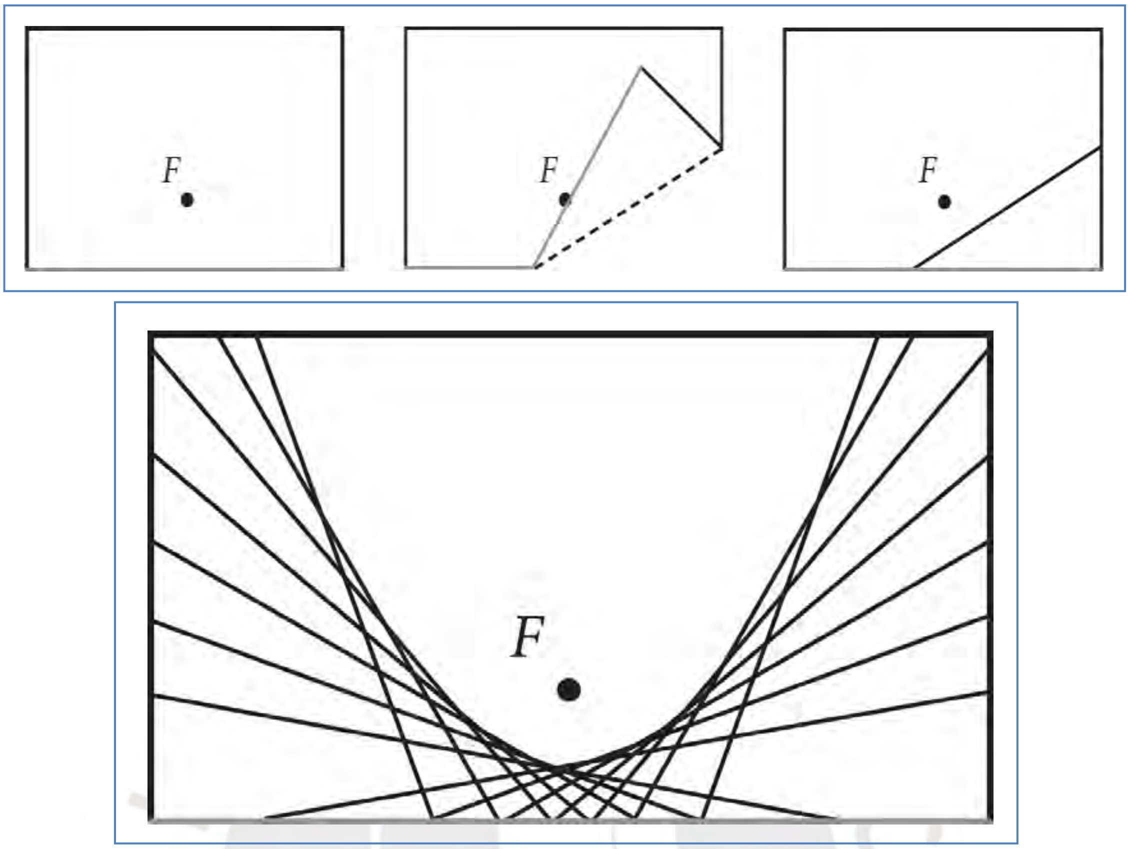


Figura 11. Construcción de la parábola como lugar geométrico utilizando papel doblado.

Fuente: Oteyza, et. al (2011, p. 236)

- En la figura 11, evidenciamos los pasos antes descritos y, asimismo, la curva que adopta la forma de la parábola al realizar tantos dobleces como sean necesarios, hay que precisar también que cada doblez representa una tangente a dicha parábola.

2.2 Aspecto Cognitivo

Para determinar la presencia de dificultades en el aprendizaje de nuestro objeto matemático parábola, con foco de atención en la formación de profesores de secundaria, nos apoyamos en la investigación desarrollada por Lara (2016), la investigadora identifica las principales dificultades que tienen los maestros en formación a la hora de trabajar con la parábola como lugar geométrico. Una dificultad se presenta cuando se realiza tratamientos en el registro algebraico, debido a una confusión involuntaria en el manejo de operaciones con signos. Un resultado favorable que muestra la investigadora en su trabajo es el tránsito de la dimensión geométrica a la dimensión analítica sin ninguna dificultad.

Una evidente dificultad que muestran los profesores al estudiar la parábola como lugar geométrico es la de realizar conversiones de los registros de lengua natural al registro gráfico, además presentan dificultades en las conversiones del registro gráfico al registro algebraico.

2.3 Aspecto Didáctico

En la siguiente sección, presentamos dos libros de texto: **Libro del Ministerio de Educación del Perú y del Instituto de Ciencias y Humanidades**, que tienen mayor presencia como fuente de información para los profesores de secundaria tanto en servicio como en formación de nuestra muestra, dichos libros son utilizados para la enseñanza de la parábola; a su vez, estos materiales de consulta nos permitirán analizar la concepción y el tratamiento de la parábola como lugar geométrico.

Tabla 4. Libros de texto de Enseñanza de La Parábola.

AUTOR	TÍTULO	AÑO	UNIDAD	PÁGINAS
Libro del Ministerio de Educación del Perú	Resolvamos problemas 5.	2018	Unidad 14 Las Cónicas	167-177
Instituto de Ciencias y Humanidades	Trigonometría	2013	Unidad 11 Secciones cónicas	791-794

En la tabla 4, mostramos un resumen en donde se precisa: el autor, el título, el año de publicación, la unidad y el número de páginas en donde se ubica el objeto matemático parábola como lugar geométrico.

A continuación, señalamos algunos aspectos relevantes en relación con lo propuesto en esta sección, nos ocupamos en un primer momento del libro de texto del MINEDU (2018).

Tabla 5. MINEDU (2018). Resolvamos Problemas 5.

LAS CÓNICAS		
Resolvamos problemas 5. MINEDU		
Unidad	Sección	Contenidos
Unidad: 14 - Las Cónicas Páginas: 167-177	La parábola	• Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen. • Situaciones intra-matemáticas. • Ecuaciones de la parábola con vértice en el punto *V(h,k)*. • Situaciones matemáticas resueltas y propuestas.

En el libro de texto del Ministerio, descrito en la Tabla 5, se muestran situaciones matemáticas contextualizadas, tal como se presenta en la figura 12, a partir de ellas se evidencia el propósito de los autores, al presentar, al objeto matemático de nuestro estudio, a partir de un problema contextualizado, el mismo que analiza, verifica, y presenta los conceptos de parábola en torno a las ecuaciones ordinaria y canónica.

Los puentes son algunas de las construcciones que han favorecido el transporte del ser humano sobre lugares muy complicados. En la imagen mostrada, se encuentra el puente de Puerto Maldonado, en el cual los pilares que lo sostienen están sobre el río. Se observa que los dos cables que van entre los pilares tienen una forma particular.

- Si la altura de los pilares es de 30 m y la distancia entre ellos es de 80 m, ¿a qué altura se encontrará el cable a 20 m del pilar? (Considera como referencia el nivel del agua).

Figura 12. Ejemplo de parábola del libro del Ministerio de Educación del Perú (2018).
Fuente: MINEDU (2017)

En la figura 12, mostramos al objeto matemático parábola en el libro de texto descrito en la tabla 5, los autores consideran a los cables de un puente como una representación de la parábola, Casanova (2009) hace referencia a la parábola y a la catenaria aminorando la diferencia entre ellas, la primera como la curva que adopta un cable que tenga que soportar una carga, un peso, uniformemente distribuido y la catenaria como la curva que adopta un cable sostenido por sus extremos debido a su propio peso, asimismo, hace mención de la forma exacta que adoptan los cables, no es más que una combinación de la catenaria con la parábola, y por un tema de tratamiento algebraico de la parábola en contraste con la ecuación de la catenaria. El problema que se propone, empieza con una breve descripción acerca de la utilidad de los puentes, como una construcción que favorece al transporte del ser humano y al acceso a otras comunidades en el interior del país; descrito ello, se solicita determinar la altura a la que se encuentran los cables que están a una distancia de 20m de un pilar del puente, considerando para ello, la altura de los pilares del puente y la distancia que existe entre ellos.

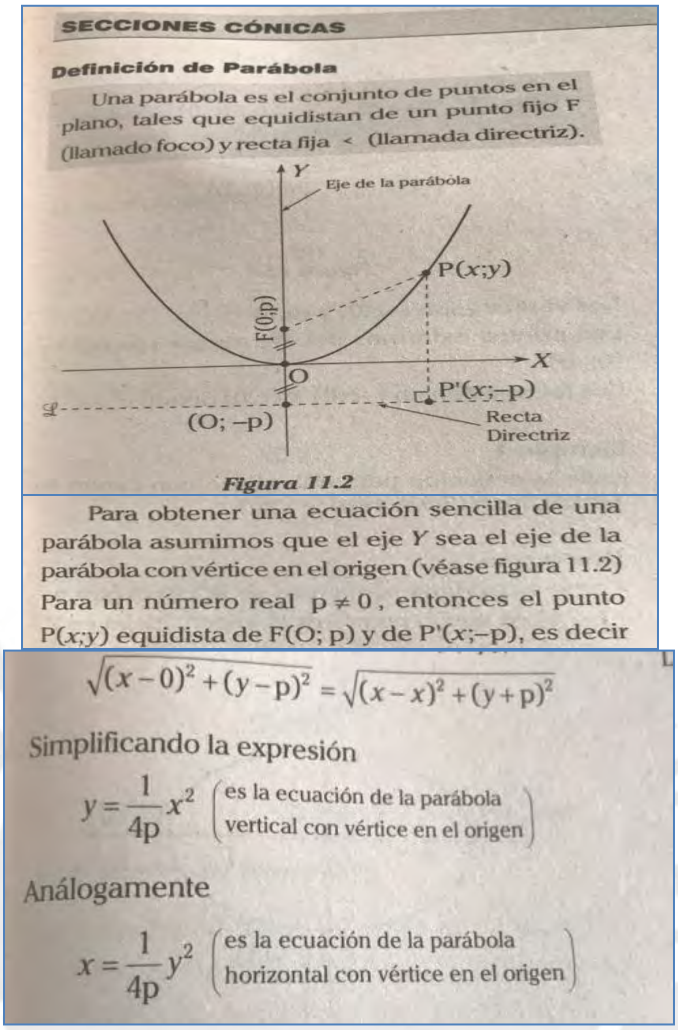
Por otro lado, centrándonos en el libro de texto de Lumbreras (2013), mostramos en la tabla 6 aspectos relevantes de la parábola.

Tabla 6. Trigonometría Lumbreras (2013).

SECCIONES CÓNICAS		
Trigonometría. Instituto de Ciencias y Humanidades		
Unidad	Sección	Contenidos
Unidad: 11 - Secciones	La parábola	• Definición de la parábola. • Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen.

Cónicas Páginas: 791-794		• Situaciones intra-matemáticas. • Situaciones matemáticas resueltas y propuestas.

Evidenciamos en la tabla 6, la ausencia de las ecuaciones de la parábola para el vértice *V(h,k)*, asimismo, no se mencionan lo elementos de la parábola, solo se centra en mostrar las ecuaciones de la parábola, y en presentar situaciones intra-matemáticas, se realiza en todo momento un tratamiento del objeto como algo terminado, todo lo mencionado se observa en la figura 13. Es preciso, mencionar que los autores desarrollan pocas aplicaciones en donde se registra el uso directo de la ecuación de la parábola con vértice en el origen.



SECCIONES CÓNICAS

Definición de Parábola

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano, tales que equidistan de un punto fijo F (llamado foco) y recta fija $\mathcal{L}$ (llamada directriz).

Figura 11.2

Para obtener una ecuación sencilla de una parábola asumimos que el eje Y sea el eje de la parábola con vértice en el origen (véase figura 11.2) Para un número real $p \neq 0$, entonces el punto $P(x;y)$ equidista de $F(O;p)$ y de $P'(x;-p)$, es decir

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

Simplificando la expresión

$$y=\frac{1}{4p}x^2 \quad \left(\begin{array}{l}\text{es la ecuación de la parábola}\\ \text{vertical con vértice en el origen}\end{array}\right)$$

Análogamente

$$x=\frac{1}{4p}y^2 \quad \left(\begin{array}{l}\text{es la ecuación de la parábola}\\ \text{horizontal con vértice en el origen}\end{array}\right)$$

Figura 13. Ejemplo de parábola del libro titulado Trigonometría del Instituto de Ciencias y Humanidades.

Fuente: Trigonometría (2013, p.791)

En la figura 13, presentamos la definición de la parábola, como el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto fijo "*F*" llamado foco y una recta fija denominada la directriz, a partir de ello, se representa gráficamente a la parábola señalando los elementos descritos en su definición, luego se deducen las ecuaciones de la parábola tanto horizontal como vertical, ambas con vértices en el origen de coordenadas. Se concluye que lo mostrado en el libro de texto del Instituto de Ciencias y Humanidades, presenta una postura enteramente cognitiva academicista y no genera situaciones que permitan un óptimo aprendizaje de la parábola como lugar geométrico.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En esta sección, se muestra el marco de la creación de problemas, asimismo el modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), las características de cada nivel del modelo de demanda cognitiva, el proceso de implementación del nuevo modelo adaptado de demanda cognitiva para problemas de parábolas como lugar geométrico.

3.1 Marco teórico

La importancia y necesidad de incluir la CP en la práctica pedagógica, así como en la formación de profesores (tanto en servicio, como en formación), está sustentado por diversos científicos, matemáticos y numerosos investigadores en educación matemática. Hoy en día, se cuenta con un amplio número de trabajos e importantes publicaciones que abordan diversos aspectos de la CP, tal como afirma Malaspina (2017), estos trabajos están relacionados con la formación matemática de los estudiantes de todos los niveles educativos y con la formación docente.

Sin embargo, hasta el momento aún no se logra consolidar el trabajo con la CP en la práctica pedagógica con los estudiantes, ni tampoco en la formación docente, debido a que se considera a este enfoque en muchos de los casos, como tarea sólo de profesionales expertos, especialistas en la CP, además, existe aún el trabajo en la práctica pedagógica con problemas de matemáticas tomados básicamente de los libros de textos como de internet.

Por otro lado, coincidimos con lo afirmado con Ellerton (2013), en sostener, que a lo largo de los años la resolución de problemas ha sido reconocida como el foco central de la educación matemática, que requiere tal como sostiene Lester (citado por Singer, Ellerton y Cai; 2015) mucho más que memorizar datos, fórmulas y procedimientos que involucran el pensamiento matemático de los estudiantes; por otro lado, en el trabajo de Singer et al. (2015) afirman que la CP se ha convertido en una parte integral de la reforma de la educación matemática, a partir de la observación en la resolución de problemas.

De este modo, concordamos con las conclusiones que presenta Malaspina (2017), en relación a la ubicación de la creación de problemas dentro de los planes de estudio y en el trabajo con los estudiantes en las aulas; el investigador manifestó que la creación de problemas ayuda a estimular la creatividad de los estudiantes, además de conducirlos a la identificación y planteamiento de preguntas, siendo éstas dos capacidades fundamentales del área de matemática que se deben desarrollar tanto con los estudiantes como con los profesores.

En esta sección, abordaremos el marco teórico de nuestra investigación, el mismo que contemplará a la creación de problemas en un primer momento, además mencionamos en una segunda parte a los niveles de demanda cognitiva. Esto último permitirá jerarquizar los problemas creados por los profesores de secundaria en servicio al estudiar la parábola como lugar geométrico en un taller con CP.

3.1.1 Creación de Problemas

Tal como se menciona, en Singer et al. (2015), la CP es reconocida como una actividad cognitiva útil centrada en una perspectiva constructivista. Y esta, recibiendo una especial atención desde 1989; debido a que, el Estándar de Currículo y Evaluación para Matemáticas Escolares reconoce a la creación de problemas y la resolución de problemas en el aula de matemáticas.

En la investigación de Singer et al. (2015) se definió a los cuatro elementos fundamentales presentes en todo problema de matemática: Información, Requerimiento, Contexto y Entorno Matemático.

- Información: Está relacionado la información, como los datos cuantitativos que nos proporciona el problema de matemática.
- Requerimiento: Hace mención de lo solicitado por el problema, siendo éstos, determinar, encontrar, concluir, calcular, entre otros; pudiendo ser cuantitativo o cualitativo.
- Contexto: Está orientado a la naturaleza del problema, pudiendo ser de carácter intra-matemático (por ejemplo, algoritmos algebraicos) o intra-matemático (problemas contextualizados).
- Entorno Matemático: Es el marco teórico matemático en el cual se posicionan los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución del problema (por citar algunos ejemplos: matrices; determinantes; geometría analítica).

Por otro lado, en el trabajo de Malaspina (2017) el investigador hizo referencia a la creación de problemas, como los procesos que conducirán a la emergencia de un nuevo problema matemático; dichos procesos pueden ser de dos tipos: por variación o por elaboración de un problema.

- Por variación: Es el proceso que permite generar un nuevo problema, a partir de la modificación de uno o más atributos (elementos), de un problema dado.
- Por elaboración: Es el proceso que permite construir un nuevo problema, a partir de una situación matemática que puede ser dada o modificada por el autor de este, es preciso mencionar que el contexto del problema se origina en la situación misma pudiendo ser ésta no necesariamente extra-matemática. Este problema puede tener un énfasis didáctico o un énfasis matemático. En este proceso, si el énfasis solicitado es didáctico es frecuente partir de un contexto extra matemático; mientras que, si el énfasis es matemático, el contexto suele ser el intra-matemático.

Es pertinente mencionar, para el desarrollo del taller que proponemos en nuestra investigación, nos apoyamos del proceso de elaboración, para la creación de problemas por parte de los profesores en servicio al estudiar a la parábola como lugar geométrico; para el desarrollo de este proceso se propondrá trabajar con la estrategia empleada por Malaspina (2017), la cual se desarrolla mediante el Episodio, Problema Pre, Problema Pos (EPP).

A continuación, se brindará algunas sugerencias que ayudarán a estimular la creación de problemas, a partir de la variación de problemas; por parte de los profesores; para ello Malaspina (2013) propone realizar un trabajo en tres bloques, el trabajo individual, el trabajo grupal y la socialización. El autor propone iniciar con el trabajo individual, y en esta parte se busca resolver de diversas maneras el problema inicial, y realizar la pregunta ¿Qué pasaría si ...?, al inicio, durante o al final del desarrollo, de esta forma los profesores se preguntarán que sucede al cambiar algún elemento del problema inicial, como por ejemplo (información, requerimiento, entorno matemático o contexto).

Por otro lado, en el bloque del trabajo grupal se socializa las diferentes soluciones dadas al problema inicial en el bloque anterior y las preguntas creadas, a partir de

¿Qué pasaría si ...? Por un tema de tiempo y cantidad, el investigador sugiere formar grupo de a lo más cuatro integrantes para que todos puedan participar. En esta etapa se seleccionan las preguntas y posibles respuestas que será de apoyo para modificar el problema dado inicialmente; se deberá redactar el enunciado y resolver el problema con las modificaciones realizadas en el trabajo grupal; finalmente, en esta etapa se socializa dicho problema a otros grupos con la intención de que lo resuelvan y hagan llegar sus comentarios acerca del mismo.

Finalmente, en el bloque de la socialización se presentarán los problemas mediante exposiciones grupales, con el fin de recibir sugerencias y opiniones, asimismo, en esta etapa también, se revisará tanto la redacción como las ideas o conceptos matemáticos que hayan emergido durante todo el proceso de la creación de problemas, a partir de la variación de un problema dado inicialmente. A modo de resumen se presenta la figura 14, en donde se concretiza las ideas presentadas para la variación de un problema dado.

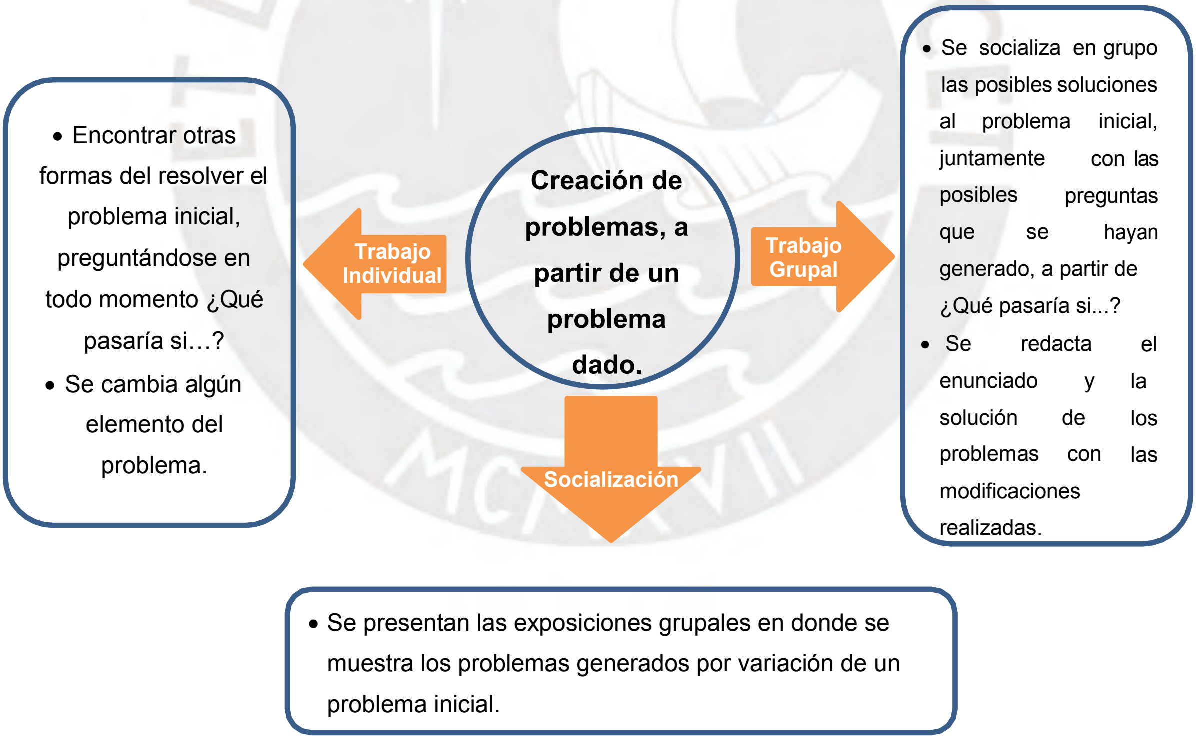


Figura 14. Creación de un problema, a partir de problema dado.

Fuente: Malaspina (2013, p.10)

A modo de brindar algunas estrategias que ayuden a estimular la elaboración de problemas a partir de una situación matemática dada, la misma que será creada por los profesores; para ello se recomienda trabajar mediante tres momentos de acuerdo con Malaspina (2013); y estos son: trabajo individual, trabajo grupal y la socialización. En el trabajo individual se debe registrar las relaciones matemáticas y lógicas que se pueden presentar, a partir de la situación planteada, además de seleccionar la información que sea importante y guarde conexión con las relaciones señaladas anteriormente.

Posteriormente, en el trabajo grupal se debe compartir lo trabajado en la fase de trabajo individual, se someten a evaluación los requerimientos que se pueden lograr con la información de la situación matemática, se seleccionará un requerimiento considerando el contexto (intra-matemático o extra-matemático) de la situación, además del entorno y nivel educativo a quienes va dirigido el problema, luego de realizar dicho trabajo se procede a redactar, resolver el problema del grupo, se sugiere fraccionar dicho problema en uno o más problemas de corte sencillo, si se presentará alguna dificultad con el mismo, este momento se finaliza compartiendo con otros grupos dicho problema generado, para que pueda ser comentado y se brinden algunas sugerencias.

Finalmente, el momento de la socialización hace referencia al momento de la presentación de los problemas mediante exposiciones grupales, en este momento se debe fortalecer el intercambio de sugerencias y opiniones, y así culminar con la revisión tanto de la redacción de los problemas como de las ideas o conceptos matemáticos que aparecen durante todo el proceso de la creación de los problemas, a partir de una situación dada inicialmente.

En resumen, se presenta en la figura 15, una sugerencia para estimular la elaboración de problemas, a partir de una situación dada.

Figura 15. Elaboración de un problema, a partir de una situación dada.

Fuente: Malaspina (2013, p. 13)

Hasta el momento, numerosas investigaciones se limitan a explorar cómo los profesores en la práctica pedagógica resuelven tareas matemáticas y reformulan las tareas dadas secuencialmente durante el mismo intervalo de tiempo. Por lo tanto, explorar la relación entre la resolución de problemas de matemática por parte de los docentes y las actividades con creación de problemas realizadas por los mismos será probablemente fructífera (Singer, Ellerton y Cai; 2015).

Finalmente, consideramos oportuno justificar nuestro elemento teórico de la CP por parte de los profesores de secundaria en servicio; a partir de lo mencionado en el trabajo de Singer et al. (2015). Las investigadoras sostienen que, para que los profesores se conviertan en creadores de problemas autónomos, deberán de tener experiencias sustanciales con el trabajo de CP en su práctica pedagógica; sin embargo, la literatura documenta que muchos profesores (en servicio, y en formación) carecen de las habilidades y la confianza necesaria, para ir más allá de la resolución de un problema.

3.1.2 Modelo de Demanda Cognitiva

Según la NCTM (2014) reconocen la validez del modelo de demanda cognitiva como una herramienta que permite identificar las tareas y clasificarlas en niveles de demanda cognitiva, además se menciona la pertinencia del modelo tanto para el diseño como para la elaboración de tareas idóneas, esto debido a los criterios teóricos que permiten detectar la complejidad del razonamiento indispensable para resolver situaciones, problemas matemáticos propuestos en los libros de texto o por los profesores de matemáticas.

¿Por qué la demanda cognitiva de las tareas, de los problemas son tan importantes? Como se mencionó, en la NCTM (1991) las oportunidades para el aprendizaje de los estudiantes no son creadas simplemente por trabajar con los estudiantes en grupos (trabajo cooperativo); por manipular en frente de ellos algunos materiales concretos; o por el uso de la calculadora; más bien, es el nivel y tipo de pensamiento que los estudiantes involucran, lo que determina lo que realmente aprenderán. Las tareas y/o actividades con la que los estudiantes empiezan su involucramiento en las aulas, forman las bases de sus oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas.

Una vez que los objetivos de aprendizaje para los estudiantes se han articulado claramente, las tareas y problemas pueden ser seleccionados o creados para que coincida con estos objetivos; siendo conscientes que la demanda cognitiva de los mismos es una consideración central en esta sección.

A continuación, se explica el modelo de demanda cognitiva a partir de lo mencionado en el trabajo de Benedicto (2018). La investigadora concibe al modelo de demanda "como un instrumento que permite valorar el esfuerzo cognitivo que deben realizar los estudiantes al resolver problemas de matemáticas" (p. 53). Dicho modelo permite clasificar las actividades de acuerdo con el grado de complejidad que presente, siendo estos grados bajo y alto.

En el grado bajo se considera, dos niveles de demanda cognitiva:

a. Memorización: Este nivel considera a aquellas tareas matemáticas que son resueltas a partir de la reproducción de fórmulas, propiedades, teoremas, definiciones entre otros, que provienen directamente del enunciado.
b. Algoritmos sin conexiones: Este nivel considera a aquellas tareas matemáticas que son resueltas a partir de la aplicación de algoritmos previamente estudiados o a partir de la secuencia de pasos memorizados de alguna forma. Cabe resaltar que no hay necesidad en este grado de llegar a la comprensión de los contenidos.

En el grado alto se considera, dos niveles de demanda cognitiva:

c. Algoritmos con conexiones: Este nivel considera a aquellas tareas, que a pesar de haber sido resueltas a través de algoritmos se requiere que exista la comprensión de los contenidos previamente trabajados. Las tareas no tienen un proceso de resolución evidente, además se presentan en la búsqueda de la resolución dos aspectos; como debe resolverse y que procedimiento debo utilizar para resolver exitosamente la tarea.
d. Hacer matemáticas: Este nivel considera a aquellas tareas, que se resuelven a partir de la aplicación de un razonamiento complejo, no pueden ser resueltas mediante la aplicación de algoritmos se requiere tener un pensamiento abstracto, así como comprender las relaciones que subyacen a las definiciones y conceptos trabajados.

En la tabla 7 se muestra las características de los cuatro niveles de demanda cognitiva propuestos por las investigadoras Smith y Stein (1998).

Tabla 7. Características del modelo de demanda cognitiva de acuerdo con Smith y Stein (1998).

Nivel de Demanda Cognitiva	Características
Memorización	1.1 Suponen la reproducción de elementos previamente aprendidos, datos, reglas, fórmulas o definiciones, o el aprendizaje memorístico de datos, reglas, fórmulas o definiciones. 1.2 No pueden ser resueltas usando algoritmos, porque no existe un algoritmo o porque el tiempo disponible para resolver la tarea es demasiado corto para usar un algoritmo. 1.3 No son ambiguas. Estas tareas suponen la reproducción exacta de un material visto previamente, y expresan clara y directamente cómo representarlo. 1.4 No tienen conexión con los conceptos o el significado subyacentes a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
Algoritmos sin conexiones	2.1 Son algorítmicas. Se utiliza un algoritmo específicamente señalado o que es evidente por la instrucción previa, experiencia o ubicación de la actividad. 2.2 Su resolución con éxito requiere de un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo. 2.3 No hay conexión con los conceptos o el significado subyacentes al algoritmo usado. 2.4 Están enfocadas a producir respuestas correctas en vez de al desarrollo de la comprensión matemática. 2.5 No requiere explicaciones, o se dan breves explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.

Algoritmos con conexiones	3.1 Dirigen la atención de los estudiantes al uso de algoritmos con el objetivo de que profundicen en los niveles de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas. 3.2 Sugieren explícita o implícitamente vías a seguir, que son algoritmos generales que tienen conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes, al contrario que algoritmos específicos que son opacos respecto a los conceptos subyacentes. 3.3 Generalmente se representan de varias formas, como diagramas visuales, manipulativos, símbolos y situaciones problemáticas. Establecer conexiones entre diferentes representaciones ayuda a desarrollar un significado. 3.4 Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden utilizar algoritmos generales, no se pueden seguir sin estar atentos. Los estudiantes necesitan considerar ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos necesarios para resolver con éxito la tarea y que desarrollan la comprensión.
Hacer Matemáticas	4.1 Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. La tarea, sus instrucciones o un ejemplo práctico no sugieren explícitamente un enfoque predecible o una vía ensayada. 4.2 Requieren que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de conceptos, procesos o relaciones matemáticas. 4.3 Necesitan autocontrol o autorregulación de los propios procesos cognitivos. 4.4 Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y que hagan uso adecuado de ellos durante la resolución de la tarea. 4.5 Requieren que los estudiantes analicen la tarea y examinen activamente las restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones. 4.6 Requieren un considerable esfuerzo cognitivo y pueden implicar cierto grado de ansiedad para el estudiante debido a la naturaleza impredecible del proceso de resolución.

Fuente: Adaptado de Smith y Stein (1998)

En la tabla 7, precisamos las características específicas de cada nivel de demanda cognitiva según Smith y Stein (1998), las mismas que son empleadas en numerosas investigaciones para analizar las tareas matemáticas propuestas en los libros de texto, planteadas o creadas por los profesores. Cabe precisar de acuerdo con el estudio de Benedicto (2018), que dichas tareas en gran parte están relacionadas al ámbito aritmético, algebraico.

Creemos pertinente para nuestra investigación ahondar en la concepción del término de esfuerzo cognitivo que se evidencia en la tabla 3. La alusión que más se relaciona a nuestro estudio es presentada en el trabajo de Benedicto (2018), en donde se usa el término esfuerzo cognitivo en función de la complejidad que se presenta al momento de resolver una tarea matemática. Benedicto (2018) dice:

> El esfuerzo cognitivo (E) necesario (esperado o real) para resolver una tarea, dependerá de la complejidad que se suponga saber qué hacer o cómo hacer para resolver con éxito la tarea. Los diferentes calificativos usados para diferenciar los niveles (apenas, limitado, cierto y considerable) son algo sutiles y su significado resulta muy subjetivo, ya que no existe una métrica para evaluar el esfuerzo cognitivo. (p. 63)

A continuación, se muestra la tabla 8, en donde se hace una distinción entre los calificativos de apenas, limitado, cierto y considerable, en referencia al esfuerzo cognitivo, según Benedicto (2018).

Tabla 8. Descripción de los calificativos del esfuerzo cognitivo.

Calificativos del esfuerzo cognitivo		**Características**
BAJO	**Apenas**	No se requiere tomar decisiones, sino sólo consiste en reproducir datos a partir de la memorización de conceptos, teoremas, propiedades.
	Limitado	Es necesario aplicar algoritmos de resolución que resultan ser evidentes a partir del enunciado. La resolución de la tarea se da en forma práctica y directa.
ALTO	**Cierto**	Los resolutores requieren deducir y luego aplicar un algoritmo que considera implícitamente los contenidos matemáticos en juego.
	Considerable	Los resolutores necesitan generar estrategias

	propias para la resolución de tareas

En el trabajo de Smith y Stein (1998), observamos los niveles de demanda cognitiva movilizados a través de un ejemplo que nos da luces de cómo podemos clasificar a una tarea matemática en un determinado nivel de demanda cognitiva, hecho que es altamente relevante para nuestra investigación; en el ejemplo que hacen mención en su trabajo Smith y Stein (1998), se hace referencia a las diferentes representaciones de una fracción; tal como se muestra en la tabla 9, en ella se aprecia cuatro formas diferentes en las que pueden pensar los estudiantes acerca de las relaciones entre las diferentes representaciones de una cantidad fraccionaria; cada una de éstas dan lugar a niveles de demanda cognitiva diferentes en los estudiantes.

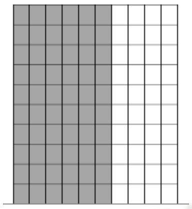
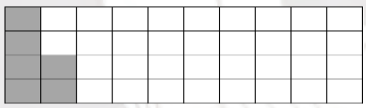
Las tareas con bajo nivel de demanda consisten en memorizar las equivalencias de cantidades fraccionarias específicas (por ejemplo, 1/2 = 0.5 = 50%), para ello se realizan conversiones de fracciones a porcentajes o decimales utilizando algoritmos de conversiones; estas tareas de bajo nivel son clasificadas por las autoras como memorización y procedimientos sin realizar conexiones para entender su significado o concepto de un objeto matemático.

Otra forma en la que los estudiantes pueden pensar acerca de las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes, son las que presentan un alto nivel de demanda cognitiva, en la que también podría utilizarse procedimientos; haciéndolo de una forma que cree conexiones con algunos conceptos subyacentes a un determinado objeto matemático; por ejemplo, en la figura 16 se solicita a los estudiantes que utilicen una malla de 10x10 para ilustrar cómo la fracción 3/5 representa la misma cantidad que 0.6 o 60%, y a su vez, se pide que registren sus resultados en un gráfico que contenga decimales, fracciones, porcentajes y representaciones gráficas; éstas tareas son clasificadas por las autoras como procedimientos con conexiones para entender el significado o concepto de un objeto matemático.

Otra tarea de alto nivel mencionado por las autoras es clasificada como el hacer matemáticas. Citando el ejemplo descrito en el párrafo anterior, implicaría pedir a los estudiantes que exploren las relaciones en las diferentes formas de representar cantidades fraccionarias; las investigadoras muestran cómo los estudiantes inicialmente no lograrían desarrollar la tarea, debido a que no recibieron la capacitación de los procedimientos de conversión que se requieren, es por ello, que los sujetos de estudio ven la forma de resolver la tarea utilizando nuevamente las mallas, que no necesariamente serían de tamaño de 10x10. Se observa en la tabla 8, esta estrategia utilizada por los estudiantes a detalle, en donde se aprecia el uso de seis cuadrados contenidos en un rectángulo de 4x10, y representar el área sombreada como un porcentaje, un decimal y una fracción.

Tabla 9. Ejemplos de los Niveles de Demanda Cognitiva según Smith y Stein.

Niveles de baja demanda	Niveles de alta demanda

<u>Memorización</u> ¿Cuáles son los decimales y porcentajes equivalentes para las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$? Respuesta esperada del estudiante: $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ $\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$	<u>Procedimientos con conexiones</u> Utilizando una malla de 10x10, identificar el decimal y porcentaje equivalente a $\frac{3}{5}$ Respuesta esperada del estudiante: Tabular / Fracción / Decimal / Porcentaje  $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ / 0.6 / 60%
<u>Procedimiento sin conexiones</u> Convertir la fracción $\frac{3}{8}$ a decimales y en porcentaje. Respuesta esperada del estudiante: Fracción $\frac{3}{8}$ Decimal 0.375 Porcentaje 37.5%	<u>Haciendo Matemáticas</u> Utilizando 6 cuadrados pequeños en un rectángulo de 4x10, explicar cómo se determina a) el porcentaje del área que está sombreada, b) la parte decimal del área que está sombreada y c) la parte fraccional del área que está sombreada. Respuesta esperada del estudiante:  a) Una de las columnas sombreadas representa el 10% de todas las columnas, entonces 4 cuadrados representan el 10% y 2 cuadrados el 5%, en consecuencia 6 cuadrados representan el 15% del total. b) Cada columna representa 0.1 del total y la mitad de una columna 0.05, entonces 6 cuadrados representan 0.15 del total. c) 6 cuadrados sombreadas de un total de 40, se reduce a: $\frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

Fuente: Adaptado de Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice, Smith y Stein (1998)

De acuerdo con la literatura revisada en torno a la identificación de los niveles de demanda cognitiva al que pertenecen algunas tareas matemáticas, se evidencia que el modelo creado por Smith y Stein, se enfoca en analizar problemas con características muy específicas, tanto en el entorno aritmético como algebraico, es por ello que se infiere que los criterios teóricos que utiliza el modelo están dirigidos a características de un cierto tipo de problemas

De este modo, coincidimos con Benedicto (2018), en afirmar que existen dificultades y debilidades para identificar los niveles de demanda cognitiva en tareas dentro del ámbito de la geometría, área en la cual se ubica nuestro objeto de estudio, la parábola como lugar geométrico. La autora, a su vez, genera tres preguntas que son materia de su investigación, que permitirá extender el modelo de demanda cognitiva a otros tópicos de la matemática. Dos de las preguntas son pertinentes para nuestro estudio, y se mencionan a continuación:

a. ¿Cómo se puede mejorar el modelo de demanda cognitiva, de tal modo que se utilice como herramienta para analizar una mayor variedad de tareas matemáticas?
b. ¿Cómo se puede adaptar el modelo de demanda cognitiva para favorecer el análisis de tareas concretas?

De acuerdo a lo mencionado en los párrafos anteriores, inferimos que existió la necesidad de generar características particulares para el modelo de demanda cognitiva, según Benedicto (2018); y ello permitió facilitar el análisis de los problemas creados por los profesores en torno a la parábola como lugar geométrico; a partir de una adaptación al modelo de Smith y Stein (1998). De ese modo, se utilizó la secuencia de reestructuración y complementación de las características de los niveles del modelo y particularizamos la caracterización teórica del modelo para nuestro objeto de estudio. Y a partir del trabajo de Benedicto (2018), podemos identificar seis categorías (el procedimiento de resolución, los objetivos, el esfuerzo cognitivo, los contenidos, las explicaciones y las representaciones), de cada nivel del modelo que se enfocan en los diferentes aspectos que ocurren en el proceso de la resolución de problemas.

Esta clasificación de las categorías permitió reconocer que algunos niveles del modelo de demanda cognitiva pueden ser completados, es por ello que pretendimos describir cada nivel del modelo a través de las categorías mencionadas en el párrafo anterior.

La definición y presentación según Benedicto (2018), de las categorías mencionadas, sirven de recurso para organizar los niveles de demanda cognitiva, además permiten identificar algunos vacíos que se presentan en los niveles de demanda cognitiva propuestos por Smith y Stein (1998). En la tabla 10, distinguimos las 6 categorías que se utiliza para cada nivel del modelo de demanda.

Tabla 10. Categorías (Dominios) para cada nivel del modelo de demanda cognitiva.

Categoría	Descripción
Procedimientos de resolución	Hace referencia a la estrategia o método que se espera para resolver el problema, esto consiste en: • Reproducción de datos. • Aplicación de estrategias de resolución de problemas. • Reproducir una secuencia de pasos revisados anteriormente. • Uso de un algoritmo que requiera establecer relaciones entre los objetos matemáticos presentes en los problemas.
Objetivos	Es la finalidad con la que se propone o resuelven los problemas, estos pueden alternar en: • Reproducir elementos vistos con anterioridad. • Obtener un resultado exitoso. • Comprender la concordancia entre las propiedades y conceptos en la resolución de problemas. • Indagar a profundidad la organización matemática presente en la resolución.
Esfuerzo Cognitivo	Hace referencia a la complejidad de saber qué hacer o cómo realizar un determinado proceso para resolver con éxito un problema. Existen cuatro calificativos (apenas, limitado, cierto y considerable) del esfuerzo cognitivo, los mismos han sido descritos en la tabla 4.
Contenidos	Hace alusión a los contenidos matemáticos como las definiciones, teoremas, propiedades, entre otros; a partir de ello se distingue 3 casos: • No existe nexo entre las resoluciones y los contenidos

	matemáticos. • Existe nexo, pero no es necesario la comprensión para resolver los problemas. • Existe nexo y es necesario emplearla para la inferencia de resultados nuevos.
Explicaciones	Las explicaciones pueden ser solicitadas o dadas, a partir de: • No se solicita justificar el problema o el proceso de resolución. • La argumentación del problema o del proceso de resolución debe evidenciar que los resolutores entienden los contenidos matemáticos.
Representaciones	Las representaciones pueden ser: aritmética, verbal, algebraica, tabular, gráfica. Pueden relacionarse más de una representación en la resolución de un problema.

Fuente: Benedicto (2018)

Con el propósito de generar un modelo de demanda cognitiva dirigido para nuestro objeto matemático parábola como lugar geométrico, se requiere completar algunas de las características que no se evidencian en la tabla 7 referida al modelo de Smith y Stein (1998), las mismas que corresponden a los dominios de cada nivel del modelo. Es así como en esa búsqueda Benedicto (2018), nos muestra una mejora muy significativa del modelo con las características mencionadas.

Tabla 11. Características añadidas al modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998).

Niveles de Demanda Cognitiva	Características añadidas

Memorización	1.5 (Explicaciones). No requieren explicaciones. 1.6 (Representaciones). Se utilizan representaciones simples en el contexto de los problemas.
Procedimientos sin conexiones	2.6 (Representaciones). Pueden utilizarse diferentes representaciones (verbal, gráfica, tabular, entre otras), no se establecen relaciones entre las representaciones y los contenidos matemáticos.
Procedimientos con conexiones	3.5 (Explicaciones). Se utilizan con el propósito de citar a los contenidos matemáticos.
Hacer matemáticas	4.7 (Explicaciones). Requieren explicaciones que se centran en la demostración de los resultados encontrados. 4.8 (Representaciones). El uso de las representaciones ayuda a la resolución de problemas y resume de forma abstracta toda la información que se presenta.

Fuente: Adaptado de Benedicto (2018)

En esta sección, presentamos la tabla 12 que muestra una propuesta de adaptación al modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), para problemas de parábolas vista como lugar geométrico; en dicho modelo definimos los niveles de demanda cognitiva (memorización, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones, hacer matemáticas) con las seis categorías (dominios) para cada nivel, propuestas en la investigación de Benedicto (2018), además cada categoría contiene algunas características propias del objeto matemático parábola como lugar geométrico. Asimismo, veremos en páginas posteriores el análisis de los problemas que crean los profesores en servicio de nuestra muestra, entorno a nuestro objeto matemático en estudio, desarrollados en un taller de creación de problemas.

Tabla 12. Modelo de demanda cognitiva modificado para problemas de parábolas como lugar geométrico.

Niveles de Demanda Cognitiva	**Categorías**	**Características**
Memorización	Procedimientos	Las soluciones a los problemas son demasiado directas.
	Objetivos	Implica la reproducción de la definición de parábola como lugar geométrico aprendida previamente.
	Esfuerzo Cognitivo	El requerimiento se establece clara y directamente.
	Contenidos	No tiene conexión con otros conceptos o significados relacionados a la parábola, fórmulas.
	Explicaciones	No requieren explicaciones.
	Representaciones	Se utilizan representaciones simples en el contexto de los problemas.

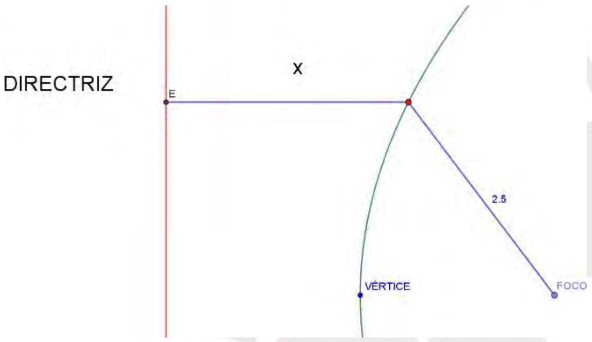
Procedimientos sin conexiones	Procedimientos	Los problemas son algorítmicos. El uso de la definición de parábola se requiere específicamente o es explícito a partir del enunciado del problema.
	Objetivos	Los problemas están enfocados a producir respuestas correctas, más que a desarrollar el entendimiento matemático.
	Esfuerzo Cognitivo	No requiere de mayor esfuerzo cognitivo para una solución exitosa. Existe claridad sobre el requerimiento y cómo obtenerlo
	Contenidos	No tiene conexión con otros conceptos o significados relacionados a la parábola; fórmulas, propiedades. No se requieren conocer las relaciones implícitas matemáticas en los problemas para resolverlos.
	Explicaciones	Sólo se enfocan en describir el procedimiento utilizado.
	Representaciones	Son muy directas e independientes y no requieren hacer conexiones entre las representaciones, ni con los conceptos de la parábola como lugar geométrico.
Procedimientos con conexiones	Procedimientos	Los problemas requieren una secuencia de operaciones algebraicas basadas en gráficos que revelan el uso de la definición de parábola como LG, en el contexto del problema. La solución no es la mera utilización de algoritmos.
	Objetivos	Los problemas están enfocados a desarrollar el entendimiento matemático.
	Esfuerzo Cognitivo	Se requiere el uso de la idea conceptual que subyace en los procedimientos para completar los problemas con éxito.

	Contenidos	Requieren conocer las relaciones implícitas matemáticas en los problemas para así poder resolverlos. Los profesores deben participar con ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos para completar las tareas con éxito.
	Explicaciones	Se hace uso de tratamientos y conversiones entre los registros algebraico y gráfico. Se centran en las relaciones subyacentes mediante el uso de ejemplos específicos.
	Representaciones	Requieren utilizar conexiones entre las representaciones, utilizando para ello, el concepto de parábola como lugar geométrico y esto conllevará a resolver los problemas con éxito.
	Procedimientos	No son algorítmicos, el proceso de resolución no es sugerido en el enunciado del problema.
	Objetivos	Los problemas están enfocados a desarrollar el entendimiento matemático, la profundización del concepto de la parábola como lugar geométrico y sus conexiones con otros objetos matemáticos
Hacer Matemáticas	Esfuerzo Cognitivo	Requieren un esfuerzo cognitivo considerable.
	Contenidos	Exigen que se debe acceder a conocimientos, contenidos, experiencias y hacer un uso adecuado de ellos y de sus interrelaciones, en la resolución de los problemas.
	Explicaciones	Exigen que se exploren y entiendan la naturaleza del concepto de la parábola como lugar geométrico y se expliciten las relaciones matemáticas subyacentes.
	Representaciones	Requieren utilizar conexiones, así como conversiones entre diferentes registros de representación, utilizando para ello, el concepto de parábola como lugar geométrico.

A continuación, mostramos algunas propuestas de problemas en torno al objeto matemático parábola como lugar geométrico, con el propósito de ilustrar, a través del análisis de los mismos como es que el modelo de demanda adaptado mostrado en la (Tabla 12) ha requerido cierta especificación en cada nivel de demanda.

Problema 1

Determine el valor de “*x*” en la figura, si *V* es el vértice de una parábola:



Problema 2

En la figura, el punto *A* es el foco de la parábola y el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a la directriz de dicha parábola. Determine el valor de “*x*”.

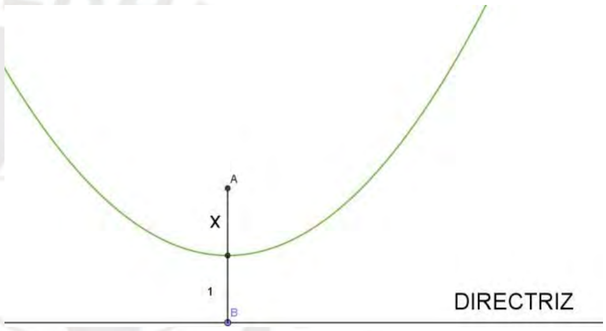


Figura 16. Ejemplos de problemas que corresponden al nivel de memorización.

Fuente: Creación propia.

Las resoluciones de los problemas 1 y 2, mostrados en la figura 16, las consideramos dentro del nivel de memorización, según la tabla 12, dado que ambas verifican una característica señalada en la categoría de los procedimientos del nivel de demanda cognitiva en mención mostrada en la tabla 12, esto es:

- Se resuelven en forma directa, aplicando la definición de la parábola como lugar geométrico previamente memorizada. No se requiere realizar explicaciones de ningún tipo.

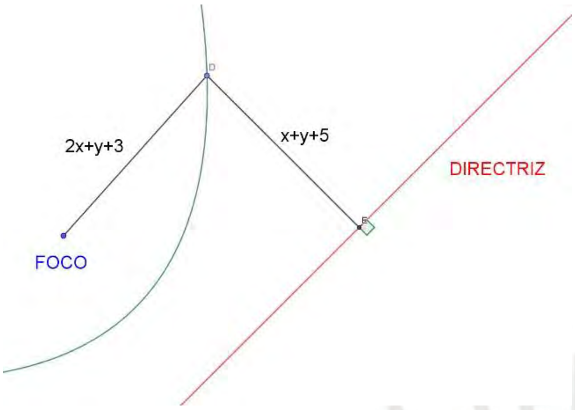
Problema 3	Problema 4
Calcule “*x*”, sabiendo que *y>0* 	Dibuje una parábola cuyo foco sea el punto cuyas coordenadas son *(2;1)* y la ecuación de la directriz sea la recta de ecuación *y=-2*.

Figura 17. Ejemplos de problemas que corresponden al nivel de procedimientos sin conexiones.

Fuente: Creación propia.

Las resoluciones de los problemas 3 y 4, mostrados en la figura 17, las consideramos dentro del nivel de procedimientos sin conexiones, según la tabla 12, dado que ambas guardan relación con las características señaladas en las categorías de procedimientos, esfuerzo cognitivo y representaciones del nivel en mención, esto es:

- El problema 3 se resuelve haciendo uso de ecuaciones lineales con dos incógnitas y cuya finalidad es obtener el valor de “*x*”. Tan solo se requiere comprender los tratamientos en la ecuación lineal. El problema presentado no requiere mayor explicación y sólo se utiliza una forma de representación algebraica.
- El problema 4, requiere para su solución utilizar el algoritmo de distancia de un punto a otro punto (foco) y a una recta (directriz), con el propósito de evidenciar la definición de la parábola como lugar geométrico. No requiere mayor explicación y se utiliza la representación gráfica del objeto parábola de manera independiente.

Problema 5	Problema 6
Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano cartesiano, de tal forma que su distancia de la recta *x+3=0* es siempre 2 unidades mayor que su distancia al punto cuyas coordenadas son *(1; 1).*	Una parábola pasa por los puntos cuyas coordenadas son *A (-2; 4) y B (8; -1),* y su directriz es la recta *L* cuya ecuación es *y+6=0*. Determine la ecuación de la parábola.

Figura 18. Ejemplos de problemas del nivel de procedimientos con conexiones.
Fuente: Creación propia.

Las resoluciones de los problemas 5 y 6, mostrados en la figura 18, las consideramos dentro del nivel de procedimientos con conexiones, según la tabla 12, dado que ambas guardan relación con las características señaladas en las categorías de dicho nivel de demanda cognitiva, esto es:

Las resoluciones de los problemas 5 y 6 son referidas al nivel de procedimientos con conexiones, en donde:

- El problema 5 se resuelve haciendo uso de un algoritmo algebraico que se evoca a partir del enunciado. El propósito de este problema está dirigido a movilizar los conceptos de distancias de un punto a otro punto y la distancia de un punto a una recta. Además, es necesario identificar la ecuación de una parábola para poder representarlo gráficamente, en torno a explicación; ésta es pertinente para comprender que el punto cuyas coordenadas son *(1; 1)* no corresponde a las coordenadas del foco de una parábola y mucho menos suponer que el lugar geométrico resultante sea una parábola.
- El problema 6, requiere para su solución aplicar un algoritmo evocado también al igual que el problema 5 de su enunciado, este especifica que la resolución pasa por una aplicación directa de la definición de parábola y, asimismo, el registro gráfico inicial de los puntos y la directriz permite inferir que son dos parábolas que cumplen con los requerimientos dados. Además, el problema no puede sin antes identificar la relación entre los puntos *A y B* con la directriz de la parábola. El propósito del problema pasa por comprender los contenidos

subyacentes a la parábola tanto por la definición como por su representación gráfica, es necesario una explicación que haga referencia a lo descrito.

Problema 7	Problema 8
Determine el lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta *L: y-1=0* y a la circunferencia cuya ecuación es $x^2+y^2=9$.	Determine la ecuación de la parábola que tiene como directriz a la recta cuya ecuación es *y-3=0*, sabiendo que dos de los puntos que pertenecen a la parábola son*: (3; 1) y (6; -1).*

Figura 19. Ejemplos de problemas del nivel de hacer matemáticas.
Fuente: Creación propia.

Las resoluciones de los problemas 7 y 8, mostrados en la figura 19, las consideramos dentro del nivel de hacer matemáticas, según la tabla 12, dado que ambas guardan relación con las características señaladas en las categorías de dicho nivel de demanda cognitiva, esto es:

- El problema 7 no puede ser resuelto por un algoritmo; en un primer momento los profesores deben analizar el problema y comprender el significado subyacente de la parábola vista como lugar geométrico, a partir de los significados de distancias tanto de punto a punto como la de un punto a una recta (directriz), se establecen relaciones entre las representaciones algebraicas que permiten alcanzar las ecuaciones de dos parábolas con eje focal paralelo al eje de ordenadas, el proceso de resolución requiere de una explicación para comprender los resultados obtenidos.
- El problema 8 de igual manera que el problema anterior no puede ser resuelto por un algoritmo, los profesores deben analizar y a partir de las distancias de un punto a un punto fijo (el cual es el foco de la parábola) y de un punto a una recta (directriz de la parábola) deben encontrar una representación algebraica de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas; al resolver dichas ecuaciones se obtienen dos coordenadas diferentes para el foco, esto tiene coherencia con la representación gráfica “inicial” de los puntos *(3;1) y (6; -1)* y de la directriz; todo el proceso de resolución requiere ser explicado para su comprensión.

3.2 Metodología y procedimientos

En la siguiente sección, mostramos la metodología utilizada en el desarrollo de nuestra investigación, la misma que presenta una naturaleza cualitativa; así mismo, argumentamos la elección del método dentro del área de la educación matemática.

3.2.1 Método del estudio de casos en la Educación Matemática

De acuerdo con el objetivo general de nuestra investigación, buscamos analizar los niveles de demanda cognitiva de los problemas que son creados por profesores de secundaria de nuestra muestra, al estudiar la parábola como lugar geométrico, mediante la creación de problemas; a partir de ello, vemos pertinente utilizar el método cualitativo del estudio de casos; la elección del método en mención está sustentada en las referencias que serán mencionadas a continuación:

Por un lado, coincidimos con Yin (2004) en justificar la importancia del método de estudio de casos para el desarrollo de una investigación, a partir del involucramiento en la educación y en las ciencias sociales, entre otras ciencias.

Es pertinente mencionar también, en esta línea de referencias, a Ponte (2006), el investigador afirmó que el método de estudio de casos no solo ha sido utilizado para realizar investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes, sino también como herramienta metodológica para la investigación de profesores en servicio.

Así mismo, el estudio de casos, de acuerdo con Stake (Citado por Cortés y Sanabria, 2012), se considera una técnica de investigación cualitativa, que puede interpretarse como una exploración de lo particular y complejo de un caso singular, pudiendo ser este: individual, grupal o un programa de enseñanza.

Consideramos los tipos de estudio de casos, según la investigación de Pérez (citado por Torres, 2016) como: descriptivos, interpretativos y evaluativos. En relación con nuestro trabajo, mencionamos que nuestra investigación tendrá un estudio de corte interpretativo, dado que el interés de la investigación fue analizar los problemas que crean los profesores de secundaria de la muestra; a través de los niveles de demanda cognitiva que hemos adaptado del modelo de Smith y Stein (1998), ello se aprecia en la tabla 12, para la parábola como lugar geométrico.

Finalmente, mencionamos que el análisis interpretativo de la información será recogido a través de entrevistas directas (opiniones de los profesores de la muestral al trabajar con la creación de problemas, al estudiar la parábola como lugar geométrico), análisis de documentos (actividades con creación de problemas), ello permitió detectar y determinar las dificultades específicas presentadas al momento del desarrollo del taller con los profesores, de tal modo, que al analizar y reflexionar sobre ellas sirvieron de punto de partida para el planteamiento de nuevas hipótesis en la enseñanza de la Matemática desde la creación de problemas.

3.2.2 Procedimientos e Instrumentos

Para nuestra investigación se obtuvo distintos tipos de información y datos, para ello se utilizó las técnicas, mencionadas en el trabajo de Ponte (2006): observación participativa, observación directa, análisis, charlas. Precisamos algunas técnicas que son consideradas en nuestra investigación:

a) Observación no participativa (consiste en observar todo lo que ocurre durante las sesiones y se registrarán los hechos en lenguaje natural, se tratará de no interactuar con los profesores cuando estén creando los problemas en torno a la parábola como lugar geométrico; de esta manera toda la atención se centrará exclusivamente en los problemas creados por ellos).
b) Entrevista directa (esta técnica permitirá conocer en profundidad la concepción que tienen los profesores antes y después de realizar el taller de la creación de problemas en torno a la parábola como lugar geométrico).
c) Análisis de las respuestas a las evaluaciones exploratorias inicial y final (permitirá realizar un contraste entre los conocimientos previos de los profesores en torno a la parábola como lugar geométrico y los conocimientos de los profesores luego de realizar el taller de creación de problemas del mismo objeto).
d) Análisis de la demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores de secundaria en torno a la parábola como lugar geométrico (esta técnica nos brindará los recursos necesarios para responder a nuestro objetivo general de la investigación).

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, presentamos los aspectos principales relacionados al taller de creación de problemas de parábolas, vistas como lugar geométrico; se da inicio con la presentación y la descripción del taller. A su vez, se hacen comentarios acerca del desarrollo del taller de creación de problemas y analizamos las soluciones o respuestas de los profesores en servicio; finalmente, se presenta un caso seleccionado para el objetivo de la investigación.

4.1 Presentación del Taller de creación de problemas con profesores de secundaria en servicio

De acuerdo, a lo mencionado en el capítulo anterior en torno al taller de creación de problemas, este aplica la estrategia de Malaspina, Mallart y Font (2015), para la creación de problemas pre, utilizando para ello, los episodios de clase, estos episodios de clases se enmarcan en el contexto de la parábola vista como lugar geométrico, el análisis de dichos episodios será mostrados en la siguiente sección de metodología y descripción del taller.

De este modo, y remitiéndonos a los objetivos planteados en nuestro estudio, trabajaremos con la estrategia EPP (Episodio en clase, problema Pre y problema Pos) del enfoque de problemas, colocando especial atención en los problemas pre; precisamos que los problemas pos no han sido considerados dentro de nuestro estudio debido a su alta complejidad en la práctica pedagógica; en torno a los problemas pre, ellos presentan los siguientes objetivos, según Malaspina (2017):

- Facilitar la comprensión y las soluciones de los problemas propuestos en los episodios; y
- Evidenciar las competencias y capacidades matemáticas de los profesores antes, durante y después de la creación de problemas, respectivamente (p. 3)

Asimismo, a través del modelo adaptado de los niveles de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), que proponemos en la tabla 12, para el tópico en particular de la parábola como lugar geométrico; nos permitió identificar los niveles de demanda cognitiva que predominan en los problemas que crean los profesores de la muestra, antes y después del desarrollo del taller.

4.2 Metodología y Descripción

El taller de creación de problemas se basó en episodios de clase de la parábola vista como lugar geométrico, a través del enfoque de la creación de problemas, las estrategias de creación de problemas por variación de un problema dado y elaboración a partir de una situación dada.

Este taller se implementó con el propósito de aplicar, previa adaptación, una caracterización de los niveles de demanda cognitiva que predominan en los problemas que crean los profesores de la muestra, antes y después de realizar taller.

4.2.1 Organización del Taller

El taller se realizó del 12 de octubre al 10 de noviembre del 2018 en la sede de Carabayllo del Colegio Particular Bertolt Brecht. Asimismo, el taller se denominó: Creación de problemas de matemáticas sobre parábolas como lugar geométrico, el mismo que tuvo una duración de 8 horas aproximadamente, y que fueron distribuidas en cuatro sesiones de trabajo de 2 horas cada uno.

4.2.2 Diseño de las Sesiones

En esta sección, describimos las sesiones y actividades del taller en torno a la creación de problemas de parábolas como lugar geométrico y los niveles de demanda cognitiva de dichos problemas. Además, observamos en el Anexo 1.1 toda la organización del taller, así como los objetivos que se proponen:

- Difundir el enfoque de la creación de problemas como una estrategia para optimizar la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.
- Analizar los niveles de demanda cognitiva predominantes en los problemas que crean los profesores de secundaria en servicio de la muestra, al estudiar la parábola, como lugar geométrico.

En las siguientes líneas mencionamos, el diseño de cada una de las sesiones del taller:

Diseño de la Primera Sesión

A1. Elaboración del cuestionario de información complementaria (ver Anexo A.1) para recoger los datos referenciales de los participantes respecto a su pericia académica, formación profesional y fuentes bibliográficas que utiliza para la enseñanza de nuestro objeto matemático. Además, dicho cuestionario permitió recabar el interés sobre la creación de problemas matemáticos y su implicancia en la enseñanza y el aprendizaje.

A2. Elaboración de la evaluación diagnóstica (ver Anexo A.2), la cual permitió obtener información acerca de los conocimientos previos de los profesores sobre la parábola como lugar geométrico, y además brindó información suficiente que permitió alcanzar nuestro primer objetivo específico.

Diseño de la Segunda Sesión

B1. Elaboración de una presentación con diapositivas para explicar el enfoque de la creación de problemas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas (ver Anexo B.1), en cuyo contenido se evidenció los aspectos y cualidades de este enfoque, desarrollado por Malaspina (2015a).

B2. Elaboración de una presentación con diapositivas del modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (ver Anexo B.2), ello contribuyó en la identificación de los niveles de demanda cognitiva que son predominantes, en los problemas creados por los profesores de secundaria de la muestra antes y después de realizar el taller, entorno a la parábola como lugar geométrico.

B3. Elaboración de una ficha (ver Anexo B.3) sobre creación de problemas de la parábola como lugar geométrico, que tendrá la secuencia:

a. Problema en el marco de un episodio de clase.
b. Realización de un trabajo individual para problemas pre.

Diseño de la Tercera Sesión

C1. Elaboración de una presentación con diapositivas de la propuesta de modelo de demanda cognitiva adaptado para el objeto matemático de parábola vista como lugar geométrico (ver Anexo C.1), ello contribuyó a analizar e identificar minuciosamente los problemas creados por los profesores de la muestra en las actividades propuestas, además permitió reconocer cual o cuales son los niveles de demanda cognitiva predominantes, en los problemas creados por los mismos antes y después de realizar el taller.

C2. Elaboración de una ficha (ver Anexo C.2) sobre creación de problemas de la parábola como lugar geométrico, que presenta la secuencia:

a. Problema en el marco de un episodio de clase,

b. Realización de un trabajo cooperativo por parejas para un problema pre y
c. Socialización de los problemas generados.

C3. Elaboración de una ficha (ver Anexo C.3) sobre creación de problemas de la parábola como lugar geométrico, que presenta la secuencia:

a. Problema en el marco de un episodio de clase,
b. Realización de un trabajo individual para problemas pre.

Diseño de la Cuarta Sesión

D1. Elaboración de la evaluación diagnóstica final (ver Anexo D.1), en la cual se solicitó a los profesores de la muestra la creación de problemas de parábolas vistas como lugar geométrico, a partir de un problema dado.

4.2.3 Participantes

Los participantes fueron 13 profesores en servicio de educación secundaria de la especialidad de matemáticas, que asistieron a la primera sesión; en la segunda sesión debido a actividades propias de la institución educativa por el contexto de aniversario solo asistieron 10 profesores. En la tercera sesión asistieron 8 profesores que desarrollaron las actividades propias a los episodios; y finalmente, en la última sesión y cierre del taller asistieron solo 6 profesores, los mismos que son evaluados a través del instrumento denominado evaluación diagnóstica final (ver Anexo D1).

4.2.4 Desarrollo de las sesiones

A continuación, detallamos el desarrollo de las sesiones del taller de creación de problemas:

A. Primera sesión

En esta primera etapa del taller se socializó los objetivos de todas las sesiones (ver Anexo 1.1). Posteriormente a ello, los profesores completaron una primera ficha denominada ficha de información complementaria (ver Anexo A1), la cual tuvo como objetivo organizar a los sujetos de estudio para nuestro caso profesores de secundaria. Este instrumento consistió en un cuestionario con preguntas relacionadas a: la formación profesional de los profesores, a conocer la fuente principal de problemas para sus clases, y para saber si existe alguna experiencia previa con la creación de problemas, además de conocer el tiempo que lleva dictando el objeto matemático de la parábola como lugar geométrico en su centro de labores.

En un segundo momento, los profesores de la muestra resolvieron la Prueba exploratoria, la cual se denominó Evaluación Diagnóstica, este instrumento tiene por objetivo identificar los conocimientos de los profesores en torno al estudio de la parábola como lugar geométrico. Presentamos en dicha evaluación ítems relacionados a comprender por qué la parábola es considerada cónica, a identificar los objetos matemáticos que se requieren para estudiar a la parábola como lugar geométrico, a establecer comparaciones y diferencias entre dos parábolas cuyas ecuaciones están relacionadas por $x^2=4py$, $y^2=4px$, y finalmente se solicita las ecuaciones y representarlas gráficamente de dos parábolas que tengan como coordenadas del foco al origen *(0,0)*, y finalmente, un ítem relacionado a determinar las ecuaciones de dos parábolas y representarlas gráficamente dada la condición que tengan la misma directriz.

Se comparte experiencias de la evaluación diagnóstica y se resuelve las inquietudes de parte de los profesores.

A.1 Análisis de las respuestas de los profesores en el taller de creación de problemas

A partir de la información recogida en la primera sesión del taller de creación de problemas, presentamos a continuación el análisis de la misma.

A.1.1 Análisis de la ficha de información

En esta sección, detallamos el análisis de la ficha informativa entregada a los profesores asistentes a la primera sesión del taller de creación de problemas. El desarrollo del análisis lo hemos dividido en dos partes: perfil de los profesores; y percepción y experiencia en la creación de problemas en la enseñanza de la parábola como lugar geométrico.

En torno al perfil de los profesores pudimos constatar mediante la ficha informativa (ver Anexo A.1), aspectos relacionados a:

a. Formación profesional.
b. Grados académicos (Profesionales - Posgrado)
c. Cantidad de horas de dictado del curso de Matemáticas en su centro de labores.
d. Fuente principal de problemas de matemáticas que utiliza para sus clases.

A continuación, presentamos la Tabla 13, en donde se evidencian los aspectos mencionados anteriormente y la información recogida mediante la ficha informativa. Para ello, consideramos las informaciones de 13 profesores que asistieron a la primera sesión del taller de creación de problemas.

Tabla 13. Perfil de los profesores de la Institución Educativa Bertolt Brecht.

Formación Profesional		**Institución de Estudios Profesionales**		**Institución de Estudios de Posgrado**		**Horas de dictado del curso de Matemáticas**				**Fuente principal de problemas**			
Profesores de Matemáticas	Matemáticos	UNMSM	UNAC	UNMSM	UCV	28h semanales	30h semanales	32h semanales	34h semanales			Otros	
9	4	4	9	5	8	4	3	2	4	7	4	2	0

Como observamos en la tabla 13, todos los profesores de la IEP Bertolt Brecht de la muestra son profesionales, siendo en mayor cantidad profesores de carrera; asimismo, todos cursaban estudios de posgrado. Por otro lado, la dedicación de los profesores en mención a la docencia en secundaria se evidencia por el número de horas de dictado (entre 28 y 34 horas semanales), finalmente, podemos mencionar que la fuente que utilizan los profesores de la muestra para la preparación de sus actividades en un mayor número son extraídos de libros de textos, precisando que existen tan solo dos profesores que consideran a la creación de problemas dentro de su práctica pedagógica.

En torno a la creación de problemas y a la enseñanza de la parábola como lugar geométrico, pudimos constatar a través de la ficha informativa (ver ANEXO A.1), aspectos relacionados a:

a. Experiencia en la creación de problemas.

b. Conocimiento sobre el objeto matemático de la parábola como lugar geométrico.

Mostramos a continuación la Tabla 14, en donde evidenciamos los aspectos mencionados y la información recogida a través de la ficha informativa. Consideramos para el análisis, la información de los 13 profesores que asistieron a la primera sesión del taller.

Tabla 14. Perfil de los profesores en torno a la creación de problemas y conocimiento sobre parábola como lugar geométrico.

Tiene experiencia en la Creación de Problemas		**¿Considera importante usar la creación de problemas como medio para el aprendizaje de las matemáticas?**		**¿Ha enseñado el tema de parábola en estos dos últimos años?**	
SI	NO	SI	NO	SI	NO
10	3	12	1	9	4

A.1.2 Análisis de la Evaluación Diagnóstica

En la Tabla 15, mostramos la calificación basada en las escalas A: Nivel Logrado, B: Nivel En proceso, C: Nivel No logrado; dicha calificación está vinculada a las habilidades de resolución de problemas en el contexto de la parábola como lugar geométrico (L.G.) que poseen los profesores de la muestra.

El análisis de la información recogida a través de la evaluación diagnóstica (ver Anexo A.2) fue evaluado mediante las escalas mencionadas en el párrafo anterior. Precisamos que el puntaje es asignado a cada ítem de la evaluación.

Tabla 15. Análisis mediante escalas de la Evaluación Diagnóstica – Sesión 1.

Profesores	**Indicadores**				
	Justifica porqué la parábola es una cónica	Identifica cuatro objetos matemáticos para definir la parábola como L.G.	Establece diferencias y características comunes entre las parábolas: $x^2=4py$, $y^2=4px$	Representa gráficamente parábolas con foco en el origen de coordenadas	Representa gráficamente parábolas que posean la misma directriz
P1	A	A	A	B	B
P2	A	A	A	A	A
P3	A	B	B	A	C
P4	A	B	A	A	B
P5	B	A	A	A	B
P6	C	C	B	B	C
P7	C	B	C	B	B
P8	A	B	B	A	A
P9	A	A	A	A	A
P10	A	A	B	A	A
P11	B	A	A	A	A
P12	A	A	B	B	B

P13	A	A	A	A	B

En la tabla 15, observamos en un primer momento que 10 de los 13 profesores evaluados justificaron adecuadamente, porque la parábola es considerada cónica, además 8 profesores identificaron cuatro objetos matemáticos (distancia de un punto a otro punto, distancia de un punto a una recta, recta, entre otros) que permitieron definir correctamente la parábola como lugar geométrico, concluimos que en promedio 7 profesores presentaron conocimientos en torno a nuestro objeto matemático en estudio, sin embargo, también se evidencia que existe una dificultad en torno a la representación gráfica de parábolas que poseen la misma directriz, debido a ello, solo 5 profesores respondieron adecuadamente a este indicador. Finalmente, mencionamos que los profesores (P2 y P9), los mismos que asistieron a todas las sesiones del taller de creación de problemas, fueron los únicos que respondieron de manera óptima todas las preguntas de la evaluación diagnóstica, de ese modo obtuvieron el puntaje más alto, gracias a dichos resultados podrá permitirnos tener profesores referentes para nuestro análisis en torno a las respuestas que ellos generen.

A.1.3 Análisis de la Evaluación Diagnóstica en torno al uso de la Creación de Problemas en la práctica pedagógica

En esta sección analizaremos la información recogida a través de la evaluación diagnóstica (ver Anexo A.2) en torno al uso de la creación de problemas dentro de la práctica pedagógica de los profesores de la muestra.

Para ello, analizamos los ítems 4 y 5 de la evaluación diagnóstica; estas preguntas están dirigidas a generar problemas de parábolas cumpliendo con los requerimientos dados, tal como se aprecia en la Tabla 16. Consideraremos para el análisis las representaciones gráficas, algebraicas de la parábola y la coherencia entre dichos registros de representación.

Tabla 16. Análisis de la Evaluación Diagnóstica en torno al enfoque de la Creación de Problemas.

Profesor	**Ítem 4**			**Ítem 5**		
	Representa correctamente al menos dos gráficas de parábolas que posean como foco al origen de coordenadas	Determina al menos dos ecuaciones de la parábola correctamente.	Coherencia entre los registros gráfico y algebraico	Representa correctamente al menos dos gráficas de parábolas que posean la misma directriz.	Determina al menos dos ecuaciones de la parábola correctamente.	Coherencia entre los registros gráfico y algebraico
1	NO	NO	NO	SÍ	NO	NO
2	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
3	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO	NO
4	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SI	SI
5	SI	SI	SI	SI	NO	NO
6	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO
7	NO	SÍ	SÍ	SI	SI	SI
8	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
9	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ

10	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
11	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
12	SÍ	NO	NO	SI	SI	SI
13	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	NO

A partir de la tabla 16, para el ítem 4 de la evaluación diagnóstica, podemos identificar que 11 profesores lograron representar gráficamente parábolas cuyos focos estén en el origen de coordenadas, además, 10 profesores lograron representar correctamente las ecuaciones de las parábolas de la primera parte del ítem 4, esto conlleva, a afirmar que aproximadamente el 76% de profesores evaluados lograron tener una coherencia entre los registros gráficos y algebraicos. Para el ítem 5 de la evaluación diagnóstica, podemos apreciar en la Tabla 16 que 9 profesores lograron representar correctamente al menos dos gráficas de parábolas que posean la misma directriz, además 9 profesores lograron determinar las ecuaciones correspondientes a las parábolas que representaron en la primera parte del ítem 5, a raíz de lo manifestado para los ítems 4 y 5; concluimos que los profesores (P2, P8, P9, P10 y P11), lograron responder correctamente a los dos ítems (4 y 5) de la evaluación diagnóstica.

B. SEGUNDA SESIÓN

Participaron diez profesores, se procedió en un primer momento, a compartir las diapositivas del enfoque de la creación de problemas (ver Anexo B.1), bajo tres aspectos, el primero en función de lo que significa crear problemas de matemáticas y para ello hacemos referencia de las investigaciones de Silver (1994) y de Lavy y Shriki (2007); el segundo aspecto describió el enfoque de la creación de problemas a partir de lo manifestado en Silver (1993) y en Malaspina (2015), cuyos aportes son suficientes para mostrar la naturaleza de la creación de problemas; el tercer aspecto a considerar fue dar a conocer los elementos que contiene todo problema, esto fue desarrollado a partir de la investigación de Malaspina (2013), en donde hace mención el investigador de los cuatro elementos que posee todo problema, y estos son: Información, Requerimiento, Contexto y el Entorno matemático al cual corresponde el problema.

En un segundo momento, presentamos las diapositivas del modelo de demanda cognitiva (ver Anexo B.2), en donde evidenciamos en primera instancia los niveles de demanda cognitiva con sus características de acuerdo al modelo de Smith y Stein (1998), seguidamente, presentamos la caracterización del modelo de demanda cognitiva de acuerdo con Benedicto y Gutiérrez (2017), basada en seis categorías que permitió cubrir algunos vacíos del modelo original de Smith y Stein (1998), luego se consideró un problema del trabajo de Benedicto y Gutiérrez (2017), relacionado a patrones geométricos, finalmente, en esta sección presentamos con diapositivas presentamos el análisis del problema de patrones geométricos, dicho análisis de acuerdo con los investigadores Benedicto y Gutiérrez (2017) permitió identificar a dicho problema en el segundo nivel de demanda cognitiva, esto es, el nivel de procedimientos sin conexiones.

En el tercer y último momento de la sesión, presentamos una ficha sobre creación de problemas pre, por variación de un problema dado (ver Anexo B.3), en torno a la parábola como lugar geométrico, que tiene la secuencia: problema en el marco de un episodio de clase, la realización de un trabajo individual para crear problemas pre, respecto al problema del episodio; y la socialización de los problemas generados.

B.1 Análisis de las soluciones del problema del episodio de clase desarrollado en la segunda sesión del taller de creación de problemas

B.1.1 Análisis en torno a la solución del problema del episodio No 1

Durante el desarrollo de la sesión presentamos el primer problema dentro de un episodio de clase (denominado Episodio de Clase No 1), el cual fue resuelto de manera individual; solicitamos a los profesores del taller, las actividades: resolver el problema del episodio, crear un problema pre del problema presentado y la solución del problema pre creado.

En este episodio de clase se involucra un problema que evidenciamos en la Tabla 17 y en donde además es resuelto; en cuanto al análisis de las soluciones de los profesores que asisten a la segunda sesión del taller de creación de problemas, presentamos la Tabla 18, en donde sintetizamos las características de las respuestas de los profesores al episodio de clase.

EPISODIO DE CLASE No 1

En el tercer momento de la segunda sesión presentamos como instrumento inicial para el taller sobre creación de problemas un episodio de clase de naturaleza sencilla, en el contexto de la parábola como lugar geométrico. La Tabla 17 muestra el episodio de clase que fue desarrollado en el taller, el mismo que se basó en un problema de naturaleza sencilla y es ubicado en un contexto intra-matemático sobre parábola como lugar geométrico y permitió movilizar los conocimientos de los profesores entorno a la creación de problemas por variación, no teniendo conocimiento aún del enfoque de creación de problemas.

Tabla 17. Episodio de clase No 1 de la parábola vista como lugar geométrico.

En una clase, en un taller de formación de profesores, el profesor Rojas propuso el siguiente problema:
Encuentre el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $x-1=0$, y del punto cuyas coordenadas son $(7;2)$.
Algunos de los profesores participantes en el taller manifestaron lo siguiente: José: ¿Qué quiere decir equidistantes? Arturo: ¿Cuántos puntos debo encontrar? Graciela: La ecuación será una curva que corta a la recta $x-1=0$
Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones: 1. Resuelva el problema dado. 2. Cree un problema-pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado). 3. Resuelva el problema-pre creado.

Desarrollo referencial de los ítems de la actividad individual propuesta

A continuación, mostramos los ítems de la actividad propuesta y a su vez, proponemos un desarrollo, que consideraremos como referencial.

Ítem 1: Problema:

Encuentre el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta *x-1=0*, y del punto cuya coordenada es *(7;2).*

1. Solución

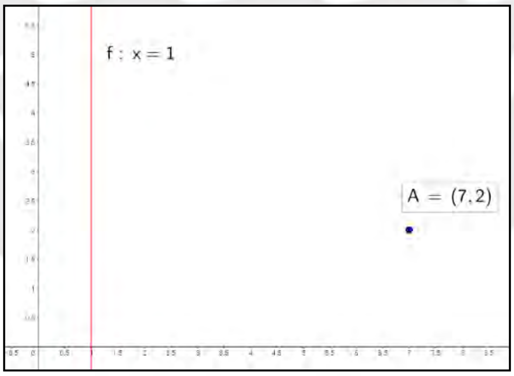
1.1 Identificación de los elementos del problema

- ✓ Información:

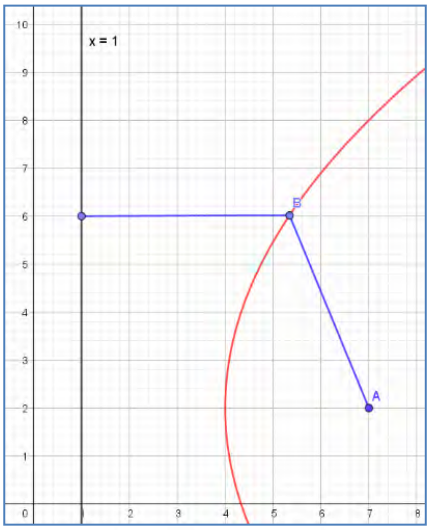
  x-1=0 (Directriz)

  (7;2) (Foco)
- ✓ Requerimiento: Determinar el lugar geométrico de los puntos en el plano que cumplen una cierta condición.
- ✓ Contexto: El problema es de carácter intra-matemático.
- ✓ Entorno Matemático: Los contenidos matemáticos inmersos en la solución del problema son:
  a) Distancia de un punto a un punto.
  b) Distancia de un punto a una recta.

1.2 Representación gráfica inicial del problema



1.3 Aplicamos la definición de parábola, como el lugar geométrico que equidista de un punto $A\ 7;\ 2$, foco de la parábola, y de la directriz $x - 1 = 0$. Para ello, ubicamos el punto $B\ x; y$ que pertenece a la parábola, y a partir de él se traza los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ (Véase la figura adjunta).



1.4 Procedemos a igualar las dos expresiones algebraicas relacionadas a las distancias, esto es:

A partir de, *B (x;y), C(1;y) y A (7;2)*

d(B; C)=d(B;A)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$$

A partir de la ecuación anterior, se obtiene lo solicitado:

$$(y-2)^2=12x-48 \quad \blacksquare$$

Ítem 2: Creación de un problema pre como variación del problema inicial:

Problema Inicial:

Encuentre el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta *x-1=0*, y del punto cuyas coordenadas son *(7;2).*

La generación de este problema se dio a partir de una modificación de un elemento del problema inicial. La variación se dio al cambiar la información de la recta *x-1=0* por la recta *x=0*, de este modo el problema pre que se propuso fue:

¿Se puede decir que las siguientes distancias son iguales?, la distancia de un punto *A*, cuyas coordenadas son *(5;2*$\sqrt{6}$*)* al punto *B*, de coordenadas *(4;0)* y la distancia del punto *A*, a la recta cuya ecuación es *x=0*.

Ítem 3: Resolución del problema pre creado

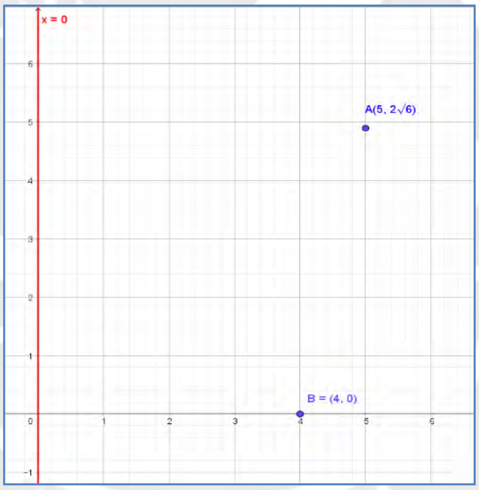
3.1. Identificación de los elementos del problema

- ✓ Información: Coordenadas de los puntos *A= (5;2*$\sqrt{6}$*) y B= (4;0).* Ecuación de la recta vertical *(x=0)*
- ✓ Requerimiento: Comparamos las distancias de *A* hacia *B* y de *A* hacia la recta.
- ✓ Contexto: El problema es de carácter intra-matemático.
- ✓ Entorno Matemático: Los contenidos matemáticos inmersos en la solución del problema son:

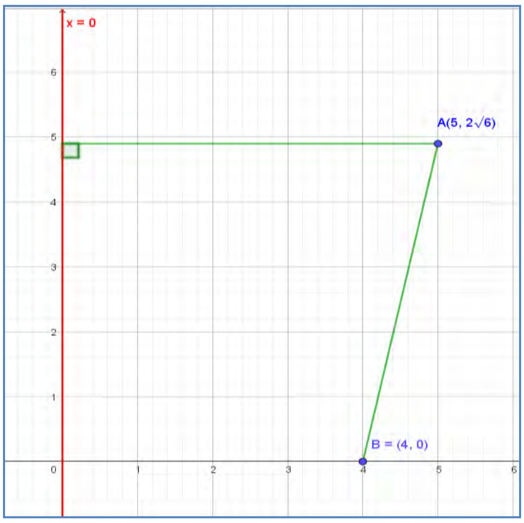
a) Distancia de un punto a un punto.

b) Distancia de un punto a una recta.

3.2. Representación gráfica inicial del problema



3.3. Aplicamos la definición de distancia entre dos puntos *(A y B)*, además de distancia del punto *A*, a la recta *x=0*. (Véase la figura adjunta).



3.4 Procedemos a calcular las distancias, esto es:

A partir de, *A (5; 2$\sqrt{6}$), B (4;0)* y la recta de ecuación *x=0*

$$d\ (A;\ B) = \sqrt{5-4^{\,2}+2\sqrt{6}-0^{\,2}}$$

$$d\ (A;\ B) = 5$$

Distancia del punto *A*, a la recta *x=0 (eje Y)*, esto es:

$$d\ (A;\ recta) = |5|$$

$$d\ (A;\ recta) = 5$$

Por tanto, concluimos que es afirmativa la respuesta a la pregunta planteada en el enunciado del problema.

APRECIACIONES EN TORNO A LAS RESPUESTAS DE LOS PROFESORES EN SERVICIO EN LA SESIÓN 2.

Realizamos algunas observaciones en cuanto a la sesión número 2 tanto a la participación de los profesores como al desarrollo del problema del episodio.

1. Sólo ocho profesores detallaron sus soluciones, sin embargo, seis profesores respondieron al requerimiento del problema del episodio. Dos profesores presentaban respuestas erróneas, mientras que dos profesores no resolvieron el problema del episodio en mención.
2. El problema del episodio fue ubicado en el tópico de parábola definida como lugar geométrico, solo seis profesores explicitaron que correspondía al lugar geométrico de la parábola; por otro lado, dos profesores encontraron la ecuación de la parábola sin analizar el requerimiento del problema; finalmente, dos profesores no resolvieron nada.
3. Observamos en siete profesores el uso de registros algebraico y gráfico, mientras que un profesor utilizó el registro algebraico para determinar el lugar geométrico.
4. Para determinar el lugar geométrico del problema del episodio, seis profesores utilizaron la definición de parábola como lugar geométrico, para ello empelaron la noción de distancia entre puntos y de un punto a una recta.

Dos profesores presupusieron que el lugar geométrico correspondía a la parábola, a partir de ello, calcularon las coordenadas del vértice utilizando la fórmula del punto de medio de un segmento.

5. Los dos profesores que no resolvieron el problema del episodio evidenciaron un desconocimiento del tópico en mención.
6. Realizamos una reflexión en torno a que mostramos en la tabla 18, y a partir de las respuestas de los profesores en servicio a los ítems 1,2,3 del episodio de clase No1.

En el ítem 1, los profesores 2, 3, 5, 6, 7 y 8 resolvieron correctamente el problema del episodio, utilizando para ello los registros gráficos y algebraicos adecuados.

En el ítem 2, solo el profesor 2, creó un problema pre idóneo con respecto al problema del episodio, sin embargo, los profesores 1, 2, 3, 7 y 8 crearon problemas con una alta similitud y coherencia con el problema del episodio y dos profesores crearon problemas que no guardan relación con el problema del episodio.

En el ítem 3, los profesores 1, 2, 3, 4, 5 y 6 resolvieron correctamente el problema pre creado por ellos mismos, mientras que dos profesores no lo resolvieron adecuadamente teniendo errores en los tratamientos dentro del registro algebraico; 5 profesores resolvieron con una alta coincidencia a la resolución del problema del episodio visto en el ítem 2.

Tabla 18. Análisis del episodio de clase No 1 – Actividad Individual.

Profesor	Ítem 1				Ítem 2							Ítem 3				
	Resuelve correctamente	No presupone que es una parábola	Utiliza representación gráfica adecuada	Coherencia entre los registros gráfico y algebraico	Tiene características de problema PRE	El problema tiene mucha similitud con el problema del episodio No 1.			Tiene coherencia con el problema del episodio			Resuelve correctamente	Existe comparación con el problema del episodio			Utiliza representación gráfica adecuada
						Alto	Medio	Bajo	Alto	Medio	Bajo		0	1	2	
1	NO	SÍ	NO	NO	NO	X			X			SÍ			X	NO
2	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	X			X			SÍ			X	SÍ
3	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	X			X			SÍ			X	SÍ

4	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO			X			X	SÍ	X			SÍ
5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO			X			X	SÍ			X	SÍ
6	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ		X			X		SÍ	X			NO
7	SÍ	NO	SÍ	SÍ	NO	X			X			NO			X	NO
8	SÍ	NO	SÍ	SÍ	NO	X			X			NO	X			NO
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

El indicador para las respuestas de los profesores en servicio en el episodio de clase No 1 son: 0 es no muy buena, 1 se distingue deficientemente, 2 es óptimo y bueno.

B.1.2 Análisis del nivel de esfuerzo cognitivo en el episodio de clase No1

Identificamos el esfuerzo cognitivo visto como una categoría o dominio de los niveles del modelo adaptado de demanda cognitiva, a partir de lo señalado por Benedicto (2018), utilizamos las características de los calificativos del esfuerzo cognitivo (apenas, limitado, cierto y considerable), tal como lo mostramos la Tabla 8.

El problema del episodio consideró la ecuación de una recta paralela al eje de ordenadas (eje *"Y"*) y las coordenadas de un punto *(7; 2);* a partir de la información brindada se solicita encontrar el lugar geométrico que corresponde a los puntos en el plano cartesiano que equidistan de la recta y del punto.

En una clase, en un taller de formación de profesores, el profesor Rojas propuso el siguiente problema:

Encuentre el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta *x-1=0*, y del punto cuyas coordenadas son *(7;2).*

Algunos de los profesores manifestaron lo siguiente:

José: ¿Qué quiere decir equidistantes?

Arturo: ¿Cuántos puntos debo encontrar?

Graciela: La ecuación será una curva que corta a la recta *x-1=0*

Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones:

1. Resuelva el problema dado.
2. Cree un problema – pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).
3. Resuelva el problema – pre creado**.**

Figura 20. Problema del Episodio de clase 1.
Fuente: Creación propia.

Para realizar el análisis teórico del esfuerzo cognitivo, el cual fue necesario para resolver el problema del episodio, tomamos en consideración las respuestas de los profesores bajo dos tipos de soluciones:

- Las que consideran al problema del episodio de alto esfuerzo cognitivo para resolverlo y al problema pre creado de bajo esfuerzo cognitivo.
- Las que consideran al problema del episodio y al problema pre creado de bajo esfuerzo cognitivo para resolverlo en ambos casos.

Dicho análisis se realizó a través de dos recorridos distintos, evidenciamos al mayor nivel de esfuerzo cognitivo del problema del episodio respecto a los problemas pre creados por los profesores.

Estos recorridos teóricos mostraron al eje horizontal como el eje que contiene a los dos calificativos del esfuerzo cognitivo (alto y bajo), mientras que el eje vertical hace mención de las dos soluciones (problema del episodio como 1, problema pre creado como 2), lo descrito lo evidenciamos en la Tabla 19.

Concluimos que, es válido afirmar que la altura de las barras presentes en la figura 21, representan la clasificación de los problemas que crean los profesores de la muestra, de acuerdo con el esfuerzo cognitivo que demanda la resolución del mismo (Figura 21), ocurre lo mismo con el problema pre creado por los profesores, con respecto al problema del mismo episodio

Tabla 19. Análisis del esfuerzo cognitivo del problema episodio No 1.

Figura 21. Recorrido teórico del problema del episodio y de los problemas pre creados por los profesores, en torno al esfuerzo cognitivo.

En la figura 21, observamos el recorrido teórico de los profesores que resuelven el problema del episodio No 1, considerando que para su resolución requieren los profesores utilizar un algoritmo que considera la definición de parábola como lugar geométrico, mientras que para resolver los problemas pre generados por los profesores de la muestran requieren de un bajo esfuerzo cognitivo, lo cual implica que no se requiere deducir algoritmos, sino tan solo reproducir la definición de parábola previamente memorizada.

Figura 22. Recorrido teórico del problema del episodio y del problema pre en torno al esfuerzo cognitivo.

En la figura 22, observamos que el recorrido teórico de los profesores que resolvieron el problema tanto del episodio de clase, como el problema pre creado por ellos mismos, consideramos que para su resolución se requiere de un bajo esfuerzo cognitivo en ambos casos, lo cual implica que no se requiere de deducir algoritmos, sino por el contrario solo reproducir en forma directa la definición de parábola previamente memorizada.

C. TERCERA SESIÓN

Esta sesión se desarrolló con ocho profesores de la muestra (profesores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), que a su vez asistieron a la sesión anterior, todos los docentes pertenecen al nivel secundario. Mostramos, la sesión a partir de cuatro momentos:

En un primer momento, presentamos a los profesores diapositivas (ver Anexo C1), en donde evidenciamos el modelo de demanda cognitiva modificado (ver tabla 8) para nuestro objeto matemático de la parábola vista como lugar geométrico, además las categorías (dominios) correspondientes para cada nivel del modelo mencionado. Asimismo, describimos cada categoría y de la influencia de ella, en cada nivel de del modelo de demanda cognitiva adaptado (Tabla 8).

En un segundo momento socializamos con los profesores una ficha de actividad grupal sobre creación de problemas en torno a la parábola como lugar geométrico (ver Anexo C2), la misma, que tiene la secuencia: problema en el marco del mismo episodio de clase desarrollado en la segunda sesión (ver Anexo B3), y a partir de ello, solicitamos generar problemas pre respecto al problema del episodio en parejas.

En un tercer momento se pide a los profesores de la muestra generar nuevos problemas (pre) del mismo episodio, seguidamente, socializamos los problemas (pre) creados.

Finalmente, en el cuarto momento de la sesión del taller, presentamos una ficha con un problema relacionado a la parábola como lugar geométrico (ver Anexo C3), a partir del cual se solicita generar problemas pre de manera individual. Consecuentemente, al igual que en el segundo momento de la sesión se solicita a los profesores generar problemas (pre) en parejas del problema de clase, y finalmente, socializar los problemas (pre) creados.

C.1 Análisis en torno a la solución del problema del episodio de clase No 2

Durante el desarrollo de la sesión llevamos a cabo la presentación de la segunda actividad del taller de creación de problemas, y esta la ubicamos dentro de un episodio de clase (denominado Episodio de Clase No 2), la cual fue resuelta en forma grupal, asimismo, solicitamos a los profesores, las siguientes actividades:

- Compartir resultados y experiencias en torno a la actividad individual del episodio No 1.
- Crear un problema-pre del problema presentado.
- Resolver el problema pre creado.

Este episodio de clase involucró un problema que evidenciamos en la Tabla 20, en cuanto al análisis de las soluciones de los profesores que asisten a la segunda sesión del taller de creación de problemas, se elabora la Tabla 22 en donde sintetizamos las características de las respuestas de los profesores al problema del episodio de clase.

EPISODIO DE CLASE No 2

En el segundo momento de la tercera sesión presentamos el mismo problema del episodio No 1. En la Tabla 20 mostramos el episodio de clase, el mismo que se basa en un problema de naturaleza sencilla y la ubicamos dentro de un contexto intra-matemático sobre parábola como lugar geométrico, además permitió movilizar los conocimientos de los profesores entorno a la creación de problemas pre.

Tabla 20. Episodio de Clase No 2 de la parábola como lugar geométrico.

En una clase en un taller de formación de profesores, el profesor Rojas propuso el siguiente problema:
Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta *x-1=0*, y del punto cuya coordenada es *(7;2).*
Algunos de los profesores manifestaron lo siguiente: José: ¿Qué quiere decir equidistantes? Arturo: ¿Cuántos puntos debo encontrar? Graciela: La ecuación será una curva que corta a la recta x-1=0
Desarrolle en grupo las siguientes cuestiones: 1. Compartir resultados y experiencias en torno a la actividad individual. 2. Crear un problema pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema inicial). 3. Resolver el problema-pre creado.

Según la Tabla 20, proponemos desarrollar el primer ítem a partir de un compartir de experiencias en torno a la actividad individual del episodio No 1.

La actividad se desarrolló en forma grupal, para ello se reunieron 2 grupos de 3 profesores (denominados, Grupo 1: profesor 5, profesor 8 y profesor 1 y Grupo 3: profesor 4 y profesor 6) y 1 grupo de 2 profesores (denominado Grupo 2: profesor 3, profesor 7 y profesor 2), resaltamos que 2 profesores se retiraron antes de la aplicación de la actividad. Para el análisis de este ítem utilizamos la Tabla 21, en donde mostramos de manera organizada los resultados de cada profesor al problema del episodio No 1.

Tabla 21. Análisis del primer ítem del problema del episodio No 2.

Criterios	**Profesores**							
	Grupo 1			**Grupo 2**		**Grupo 3**		
	Profesor 5	Profesor 8	Profesor 1	Profesor 3	Profesor 7	Profesor 2	Profesor 4	Profesor 6
Resuelve correctamente el problema del episodio No1	Sí	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Identifica la definición de parábola como lugar geométrico	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

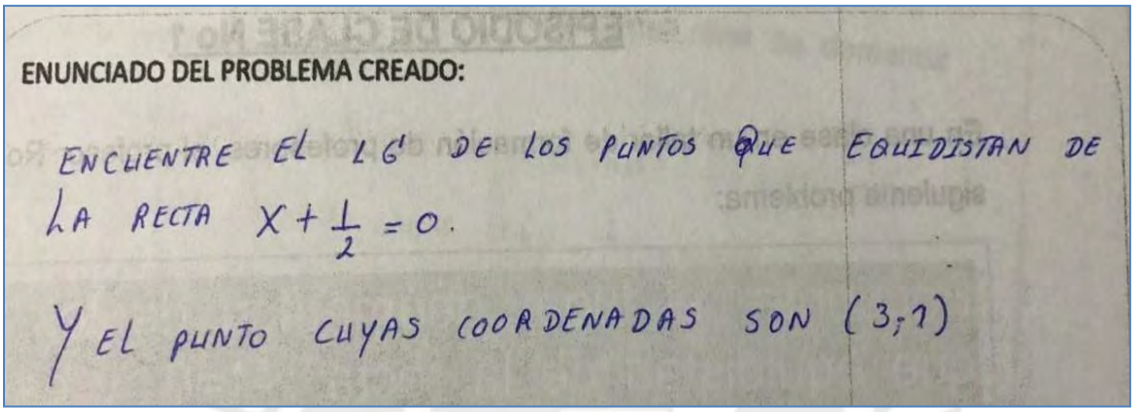
En el segundo ítem del problema del episodio No 2, solicitamos crear un problema pre a partir del problema dado en el episodio 1, además presentamos las figuras 13, 14 y 15 con los problemas pre creados por los grupos de profesores mencionados en la Tabla 21.

Enunciado del Problema del episodio No 2:

Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta *x-1=0*, y del punto cuyas coordenadas son *(7;2).*

Enunciados de los problemas pre creados:

- Problema pre creado por el grupo 2, conformado por los profesores 3 y 7.

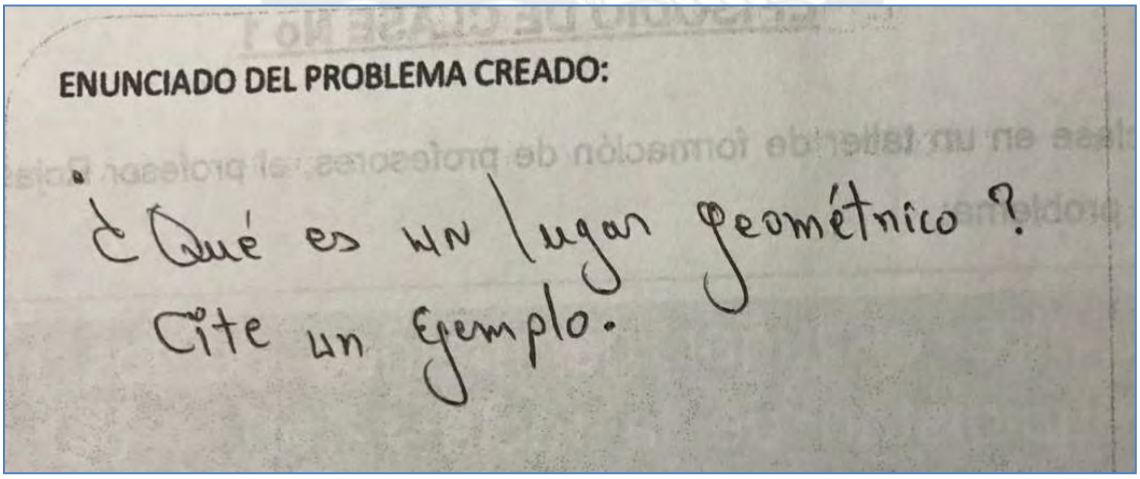

ENUNCIADO DEL PROBLEMA CREADO:

ENCUENTRE EL LG DE LOS PUNTOS QUE EQUIDISTAN DE LA RECTA $X + \frac{1}{2} = 0$.

Y EL PUNTO CUYAS COORDENADAS SON (3;1)

Figura 23. Problema pre creado por el grupo 2 de profesores.

- Problema pre creado por el grupo 3, conformado por los profesores 2,4 y 6.


ENUNCIADO DEL PROBLEMA CREADO:

¿Qué es un lugar geométrico?

Cite un ejemplo.

Figura 24. Problema pre creado por el grupo 3 de profesores.

- Problema pre creado por el grupo 1, conformado por los profesores 5, 8 y 1.

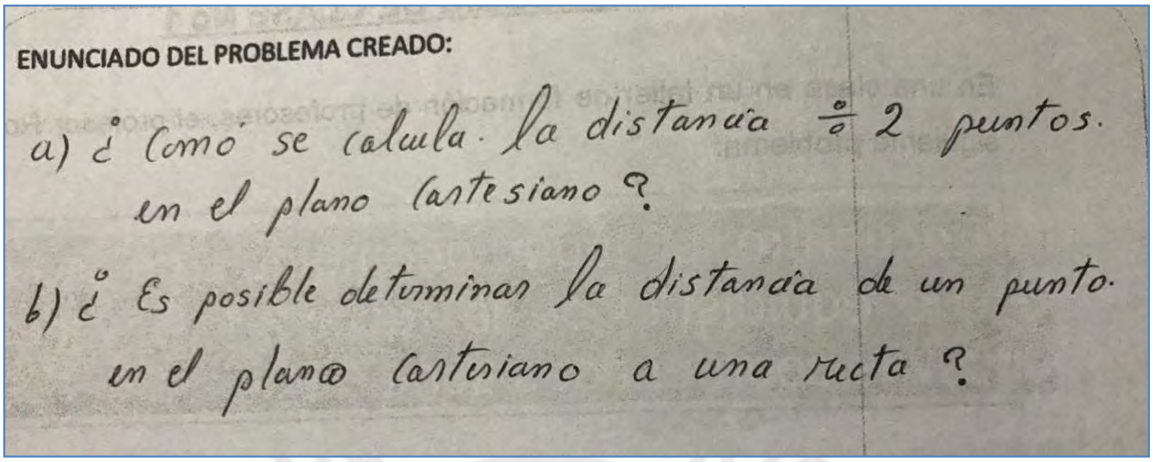


Figura 25. Problema pre creado por el grupo 1 de profesores.

En el tercer ítem del problema del episodio No 2 (Tabla 20), solicitamos resolver el problema pre planteado en el ítem anterior, de ese modo presentamos las figuras 16, 17 y 18 con las soluciones a dichos problemas.

- Solución del problema pre creado por el grupo 2, conformado por los profesores 3 y 7.

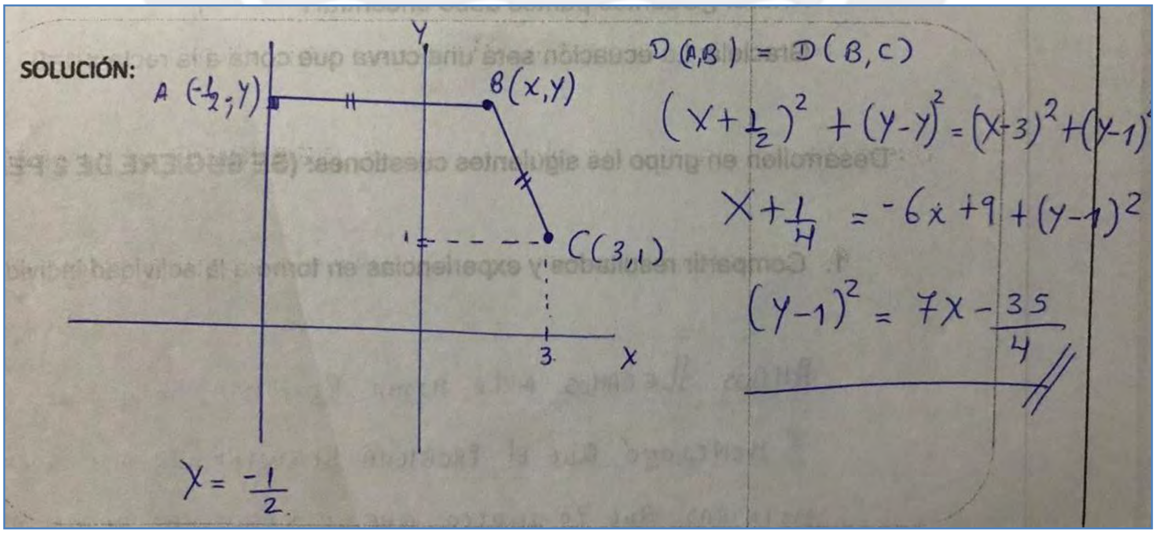
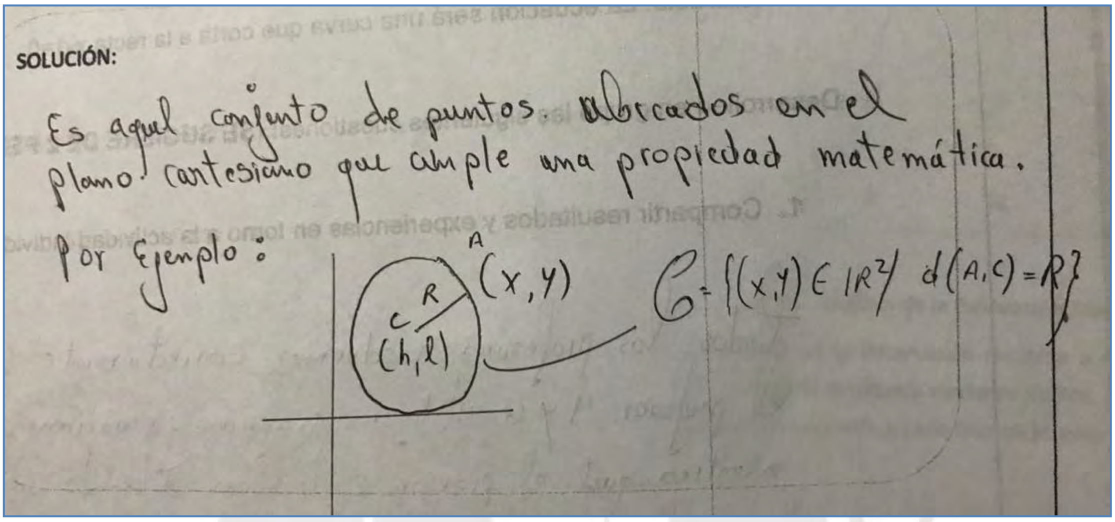


Figura 26. Solución del problema pre creado por el grupo 2 de profesores de la muestra.

- Solución del problema pre creado por el grupo 3, conformado por los profesores 2,4 y 6.


SOLUCIÓN:

Es aquel conjunto de puntos ubicados en el plano cartesiano que cumple una propiedad matemática.

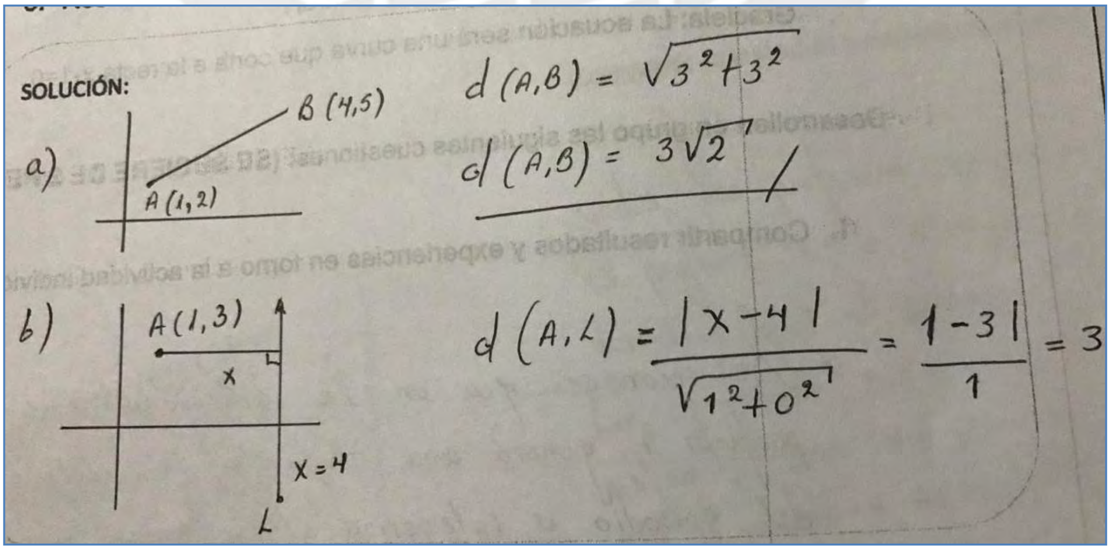
Por ejemplo:

$A(x,y)$, R, $C(h,l)$

$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / d(A,C) = R\}$

Figura 27. Solución del problema pre creado por el grupo 3 de profesores de la muestra.

- Solución del problema pre creado por el grupo 1, conformado por los profesores 5, 8 y 1.


SOLUCIÓN:

a) $A(1,2)$, $B(4,5)$

$d(A,B) = \sqrt{3^2+3^2}$

$d(A,B) = 3\sqrt{2}$

b) $A(1,3)$, x, $x=4$, L

$d(A,L) = \dfrac{|x-4|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \dfrac{|-3|}{1} = 3$

Figura 28. Solución del problema pre creado por el grupo 1 de profesores de la muestra.

APRECIACIONES EN TORNO A LAS RESPUESTAS DE LOS PROFESORES DE LA MUESTRA

Realizamos algunas observaciones en torno a la sesión número 3, y estas van dirigidas a la participación de los profesores.

1. De acuerdo con la Tabla 21, podemos mencionar que durante el compartir de experiencias sólo seis profesores resolvieron exitosamente el problema del episodio No 1. Asimismo, siete profesores lograron identificar la definición de la parábola como lugar geométrico.
2. Solo dos de los problemas pre creados por los profesores se pueden utilizar para facilitar la resolución del problema del episodio, siendo estos: el problema generado por el grupo 3 (figura 24) y el problema generado por el grupo 1 (figura 25). El tercer problema pre creado, este es el problema generado por el grupo 2 (figura 23), es un problema con características similares al problema del episodio No 2, ello no permitió ayudar para la resolución del episodio en mención.
3. La categorización de los problemas pre creados utilizando el modelo de demanda cognitiva, la analizamos en la siguiente sección.

C.2 Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva para el episodio de clase No 2.

En esta sección mostramos el análisis de las respuestas de los profesores en torno a las soluciones de los problemas pre creados por ellos mismos.
Identificamos tres estrategias de resolución con diferentes respuestas, para ello se hacemos uso del modelo de demanda cognitiva adaptado para el tópico de parábola como lugar geométrico (Tabla 22), por consiguiente, como consecuencia del análisis e identificación de las diferentes estrategias de resolución inferimos el nivel de demanda cognitiva correspondiente.

- Primera estrategia: El grupo 2 de profesores, propusieron el problema pre (figura 23) el cual proporciona la ecuación de la recta y las coordenadas del punto (*3; 1).*

A continuación, mostramos la tabla 22 en donde justificamos el análisis de la estrategia utilizada por los profesores para la resolución del problema pre creado.

Tabla 22. Análisis de la resolución del problema pre creado por el grupo 2 de profesores de la muestra, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado a la parábola como lugar geométrico.

Descripción – Solución del Problema Pre	**Características del Nivel de procedimientos sin conexiones.**
El problema pre creado tiene características similares al problema del episodio No 2, sin embargo, consideramos necesario realizar el análisis de la resolución, para determinar el nivel de demanda cognitiva al que pertenece. Los profesores utilizaron de forma directa las nociones de distancias, esto es, la distancia de un punto a otro punto y la distancia de un punto a la recta dada. Esto se da a partir del enunciado del problema pre. De este modo, generaron la ecuación de la parábola como el lugar geométrico solicitado, entonces el tratamiento de distancias inferimos la identificación de la parábola como lugar geométrico.	**Procedimientos:** Se resolvió en forma directa, a partir de lo mencionado por el enunciado del problema pre. **Objetivos:** Encontrar el lugar geométrico de los puntos que verifiquen las condiciones del problema pre. **Esfuerzo cognitivo:** Es necesario que se haya aplicado un algoritmo de resolución que resulta ser evidente a partir del enunciado, en consecuencia, presentó un bajo (limitado) esfuerzo cognitivo. **Contenidos:** Existió una conexión tácita entre el enunciado del problema pre y el algoritmo que se utilizó para su resolución, no existió la necesidad de comprender la relación entre el objeto matemático de estudio y el enunciado del problema. **Explicaciones:** Solo se enfocaron a mencionar la estrategia utilizada para su resolución.

	No existieron dudas de cómo resolver el problema, ya que su cálculo se dio en forma directa a partir del enunciado del problema pre. **Representaciones:** Utilizaron tres representaciones: verbal (enunciado del problema), algebraica (algoritmo de distancias) y geométrica para resolver con éxito el problema.

- Segunda estrategia: El grupo 3 de profesores, propusieron el problema pre (figura 24) en donde el enunciado del mismo preguntó acerca de la concepción de lugar geométrico, además de citar un ejemplo.
  Al resolver dicho problema, tal como apreciamos en la figura 27, identificamos a dicha estrategia dentro del nivel de memorización. En la tabla 23 mostramos el análisis de la estrategia utilizada por los profesores para resolver el problema pre creado.

Tabla 23. Análisis de la resolución del problema pre creado por el grupo 3 de profesores, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado.

Descripción – Solución del Problema Pre	Características del Nivel de Memorización.
Los profesores plantearon un problema pre, el cual consistió responder qué es un lugar geométrico. La respuesta que brindaron los profesores fue directa en relación con la definición de lugar geométrico previamente aprendida. Asimismo, también se solicitó citar un ejemplo de lugar geométrico, y para ello utilizaron la circunferencia como representación gráfica de aquellos puntos del plano que equidistan una longitud denominada radio (R) de un punto fijo llamado centro (C).	**Procedimientos:** Se resolvió en forma directa, a partir de lo mencionado por el enunciado del problema pre. **Objetivos:** Definir lugar geométrico y citar un ejemplo. **Esfuerzo Cognitivo:** No se requirió tomar decisiones, solo consistió en reproducir la definición de lugar geométrico, en consecuencia, responde a un bajo (apenas) esfuerzo cognitivo. **Contenidos:** No existieron algoritmos a utilizarse, sólo se presenta una definición clara y directa del objeto matemático de lugar geométrico. **Explicaciones:** Solo se enfocaron a definir el

	lugar geométrico, no amerita explicaciones. No existe dudas en cómo resolver el problema **Representaciones:** Se utilizaron dos representaciones, una del tipo verbal (definición de lugar geométrico), algebraica (ecuación del lugar geométrico de la circunferencia) y geométrica (circunferencia).

- Tercera estrategia: El grupo 1 de profesores, propusieron el problema pre (figura 25). El enunciado del problema estuvo dirigido a responder dos preguntas que estaban relacionadas a las distancias de un punto a otro punto y de un punto a una recta.

  Al resolver dicho problema tal como se aprecia en la figura 28, identificamos a dicha estrategia dentro del nivel de procedimientos sin conexiones. En la tabla 24 mostramos el análisis correspondiente a la estrategia utilizada por los profesores para resolver el problema pre creado

Tabla 24. Análisis de la resolución del problema pre creado por el grupo 1 de profesores, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado.

Descripción del Problema Pre	Características del Nivel de Memorización.
Los profesores de este grupo plantearon dos preguntas, con el propósito de conocer el manejo de distancias entre puntos y de un punto a una recta, este problema pre permitió resolver de manera directa el problema del episodio No 2.	**Procedimientos:** Se resolvió de forma directa, a partir de las definiciones de distancias entre puntos y de un punto a una recta. **Objetivos:** Definir las distancias entre dos puntos mediante un ejemplo. Definir la distancia de un punto a una recta mediante un ejemplo. **Explicaciones:** No fue necesario realizar explicaciones en torno a la solución. **Contenidos:** No existieron algoritmos a utilizarse, sólo se presentaron dos ejemplos que dan una definición clara y directa del objeto matemático de distancias (entre puntos y de un punto a una recta).

	Explicaciones: Se enfocaron en mencionar dos ejemplos que describan el requerimiento pedido. **Representaciones:** Se utilizaron dos representaciones, por un lado, la representación algebraica (aplicación del algoritmo de distancias) y la representación geométrica para representar las distancias.

C.3 Análisis en torno a la solución del problema del episodio No 3

En esta sesión llevamos a cabo la presentación del tercer problema en torno a la parábola como lugar geométrico (ver Anexo C3), el cual será resuelto de manera individual, asimismo, solicitamos a los profesores del taller, las actividades: resolver el problema presentado, crear un problema pre del problema presentado, y finalmente resolver el problema pre creado, finalmente, se solicita identificar el nivel de demanda cognitiva del problema pre creado.

Este episodio de clase involucra un problema que evidenciamos en la Tabla 25, y en torno al análisis de las soluciones de los profesores, esta se detalla en la Tabla 26, en donde sintetizamos las características de las respuestas de los profesores a dicho episodio de clase.

EPISODIO DE CLASE No 3

En el tercer momento de la sesión 3, presentamos la actividad del taller sobre creación de problemas, en el contexto de la parábola como lugar geométrico. En la Tabla 25 mostramos el episodio de clase, que se basa en un problema que ubicamos un contexto intra-matemático.

Tabla 25. Episodio de clase No 3 de la parábola vista como lugar geométrico.

En una clase en un taller de formación de profesores, el profesor Solari propuso el siguiente problema:

Sea ℓ la directriz de una parábola, tal como se muestra en la figura 29, y dos puntos A y B que pertenecen a dicha parábola, la distancia de dichos puntos hacia la recta son 5u y 8u respectivamente. Además, el foco de la parábola, el punto A y el punto B son colineales. Determine la ecuación de la parábola.

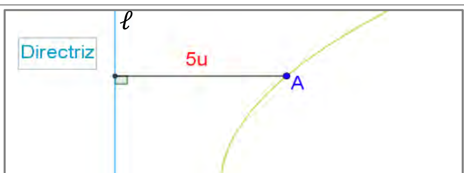


Figura 29. Problema del Episodio de Clase No 3.

Algunos de los profesores participantes del taller manifestaron lo siguiente:

José: ¿Qué quiere decir que los puntos A y B pertenezcan a la parábola?

Arturo: La condición de colineal, permite identificar el vértice de la parábola.

Graciela: ¿Qué contenido se requiere para resolver el problema con éxito?

Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones:

1. Resuelva el problema dado.
2. Cree un problema-pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).
3. Resuelva el problema-pre creado.

A continuación, mostraremos una solución al problema del episodio la cual consideramos referencial, posteriormente, mencionamos algunas apreciaciones en torno a lo evidenciado en el desarrollo del episodio de clase por parte de los profesores de la muestra, finalmente, realizamos el análisis de los resultados gestados por los profesores participantes en la sesión de trabajo.

Solución referencial para el problema del episodio

Problema:

Sea ℓ la directriz de una parábola (véase en el gráfico adjunto), y dos puntos A y B que pertenecen a dicha parábola, la distancia de dichos puntos hacia la recta son 5u y 8u respectivamente. Además, el foco de la parábola, el punto A y el punto B son colineales. Determine la ecuación de la parábola.

1. Resolver el problema dado

1.1. Identificación de los elementos del problema

- ✓ Información:

  Distancia del punto A que pertenece a la parábola, hacia la directriz de la parábola es de 5u.

  Distancia del punto B que pertenece a la parábola, hacia la directriz de la parábola es de 8u.

  El punto F es el foco de la parábola.

  Los puntos A, B y F son colineales.
- ✓ Requerimiento: Determinar la ecuación de la parábola.
- ✓ Contexto: El problema es de carácter intra-matemático.
- ✓ Entorno Matemático: Los contenidos matemáticos inmersos en la solución del problema son:

  a) Distancia de un punto a un punto.

  b) Distancia de un punto a una recta.

  c) Propiedad sobre trapecios.

1.2. Representación gráfica inicial del problema

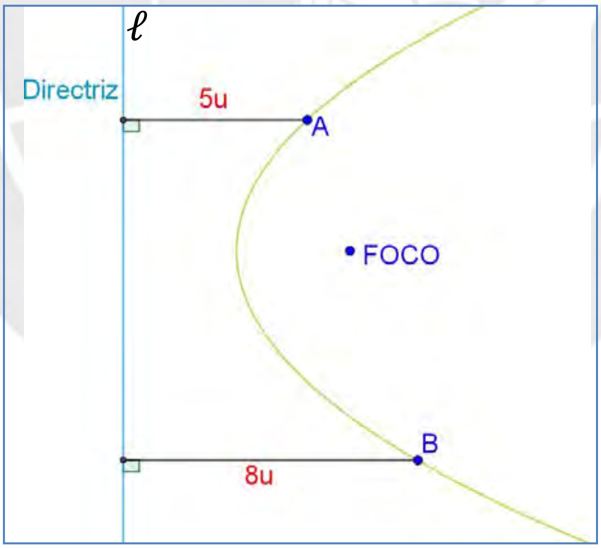
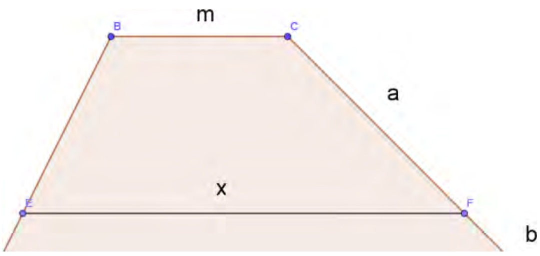


Figura 30. Representación gráfica inicial del problema del Episodio No 3.

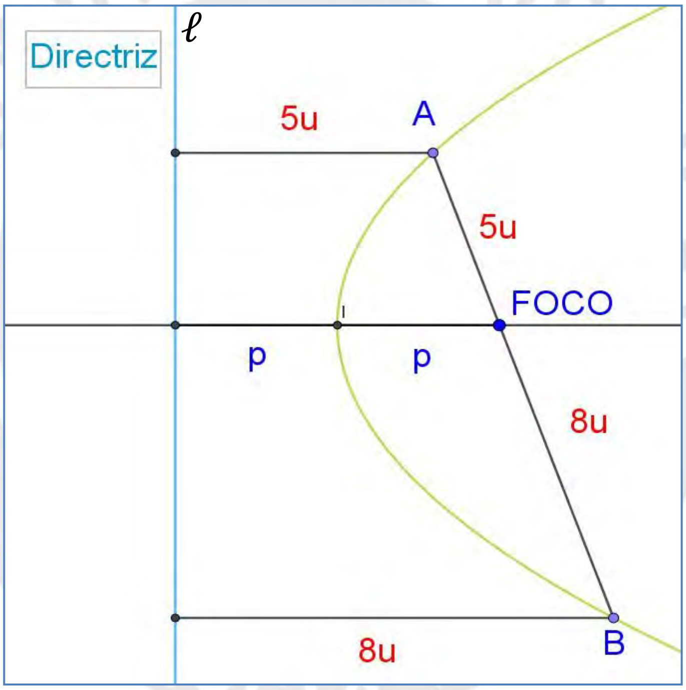
1.3. Para resolver el problema con éxito se requiere contar con el conocimiento en torno al objeto trapecio, específicamente, de la propiedad que se ilustra a continuación.



$$x = \frac{a.n + b.m}{a + b}$$

Figura 31. Propiedad de los trapecios.

1.5 Procedemos a generar el trapecio (tal como se aprecia en la figura 32), con dos vértices sobre la directriz y los otros dos sobre la parábola. Luego, dado la parábola y haciendo uso de su definición como lugar geométrico, podemos identificar que, *AF=5u, BF= 8u*.



$$2\text{p} = \frac{8.5 + 5.8}{8 + 5}$$

$$2\text{p} = \frac{80}{13}$$

$$4\text{p} = \frac{160}{13}$$

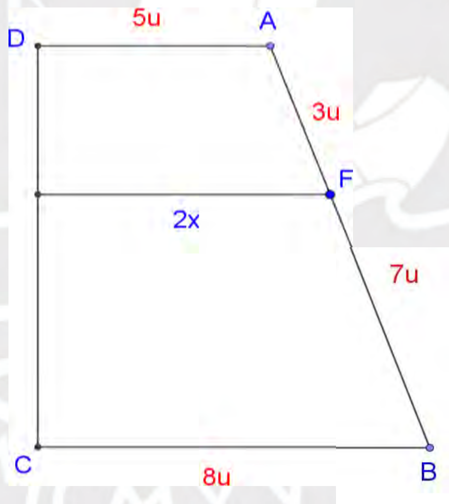
Por tanto, establecemos como eje de coordenadas al eje paralelo a la directriz y como origen de coordenadas el vértice de la parábola, de ese modo obtenemos la ecuación de la parábola solicitada en el requerimiento del episodio.

$$y^2 = \frac{160}{13}x$$

2. Creación de un problema pre a partir de la variación del problema del episodio:

Propuesta de problema pre

Sea ℓ la directriz de una parábola, tal como se muestra en la figura adjunta, y dos puntos *A y B* que pertenecen a dicha parábola, la distancia de dichos puntos hacia la recta son *5u y 8u* respectivamente. Además, el foco de la parábola, el punto *A* y el punto *B* son colineales. Determine la ecuación de la parábola.



3. Resolución del problema pre creado

3.1. Identificación de los elementos del problema

- ✓ Información: Longitudes de los lados del trapecio, a excepción de la altura de este.
- ✓ Requerimiento: Manejo adecuado de la fórmula que relaciona la medida del segmento que une dos puntos de los lados no paralelos y las longitudes de las bases de este y las medidas de un lado no paralelo.
- ✓ Contexto: El problema es de carácter intra-matemático.

✓ Entorno Matemático: Los contenidos matemáticos inmersos en la solución del problema son:

a) Ecuación algebraica de primer grado y con una sola variable.

3.2. Representación algebraica de la fórmula en trapecios

$$2x = \frac{5.7 + 8.3}{3 + 7}$$

$$x = 5{,}9 \quad \blacksquare$$

APRECIACIONES EN TORNO A LAS RESPUESTAS DE LOS PROFESORES EN SERVICIO.

Realizamos algunas observaciones en torno a la sesión 3 tanto a la participación de los profesores como al desarrollo del problema del episodio (Tabla 26).

1. Sólo seis profesores detallaron sus soluciones, sin embargo, los ocho profesores asistentes respondieron al requerimiento del problema.
2. Se observó en los ocho profesores el uso de registros algebraico y gráfico en la resolución de los problemas (episodio – pre).
3. Para determinar la ecuación de la parábola solicitada, los profesores utilizaron la definición de parábola como lugar geométrico, ello permitió conocer las medidas de uno de los lados no paralelos en el trapecio, y en consecuencia pudo aplicarse directamente la propiedad de trapecios.

A continuación, a partir de la tabla 26, podemos evidenciar las respuestas del episodio de clase No 3 (Tabla 25) de manera organizada, en donde detallamos el análisis para cada ítem del episodio de clase en mención.

En el ítem 1 los ocho profesores asistentes resuelven correctamente el problema del episodio, para ello, utilizaron adecuadamente los registros gráfico y algebraico en la resolución de este.

En el ítem 2, los profesores 2, 3, 6, 7 y 11 crean problemas con características de problemas pre, sin embargo, es por lo que dichos problemas tienen una mediana o baja similitud con el problema del episodio, lo cual hace inferir que se ha institucionalizado el enfoque de la creación de problemas, sólo dos profesores crean problemas que no guardan relación con el problema inicial debido a que poseen una alta similitud con problema del episodio.

En el ítem 3, de forma similar al ítem 1 se observa que cinco profesores resuelven correctamente el problema pre generado por ellos mismos, además utilizan adecuadamente los registros gráfico y algebraico en la resolución de este.

Tabla 26. Análisis del episodio de clase No 3 – Actividad Individual.

Profesor	Ítem 1				Ítem 2							Ítem 3		
	Resuelve correctamente	No presupone que el foco F es punto medio del segmento que une A con B.	Utiliza representación gráfica adecuada	Coherencia entre los registros gráfico y algebraico	Tiene características de problema PRE	Tiene similitud con el problema del episodio			Tiene coherencia con el problema del episodio			Resuelve correctamente	Utiliza representación gráfica adecuada	Coherencia entre los registros gráfico y algebraico
						Alto	Medio	Bajo	Alto	Medio	Bajo			
2	sí	sí	sí	sí	sí		X		X			sí	sí	sí
3	sí	sí	sí	sí	sí			X	X			sí	sí	sí

5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	X				X		SÍ	SÍ	SÍ
6	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ		X			X		NO	SÍ	SÍ
7	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ		X		X			SÍ	SÍ	SÍ
8	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	X			X			NO	SÍ	SÍ
11	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ		X			X		NO	SÍ	SÍ
13	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	X			X			SÍ	SÍ	SÍ

C.4 Análisis de los niveles de Demanda Cognitiva de los problemas creados por los profesores en el episodio de clase No 3.

Para identificar los niveles de demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores, utilizaremos el modelo de demanda cognitiva modificado para problemas de parábolas como lugar geométrico (ver Tabla 12), y para dicho análisis identificamos y justificamos los niveles de demanda cognitiva de los problemas y las características propias de cada uno, respectivamente. A continuación, mostramos los problemas creados por los profesores 2, 6 y 7; los mismos que hemos considerado para nuestro análisis a partir del desarrollo correcto de toda la actividad individual (profesor 2 y profesor 7) y a su vez, el profesor 6 por generar un problema con un alto índice de similitud con el problema del episodio 3.

Enunciados de los problemas pre creados por los profesores 2, 6 y 7:

- Problema pre creado por profesor 2.

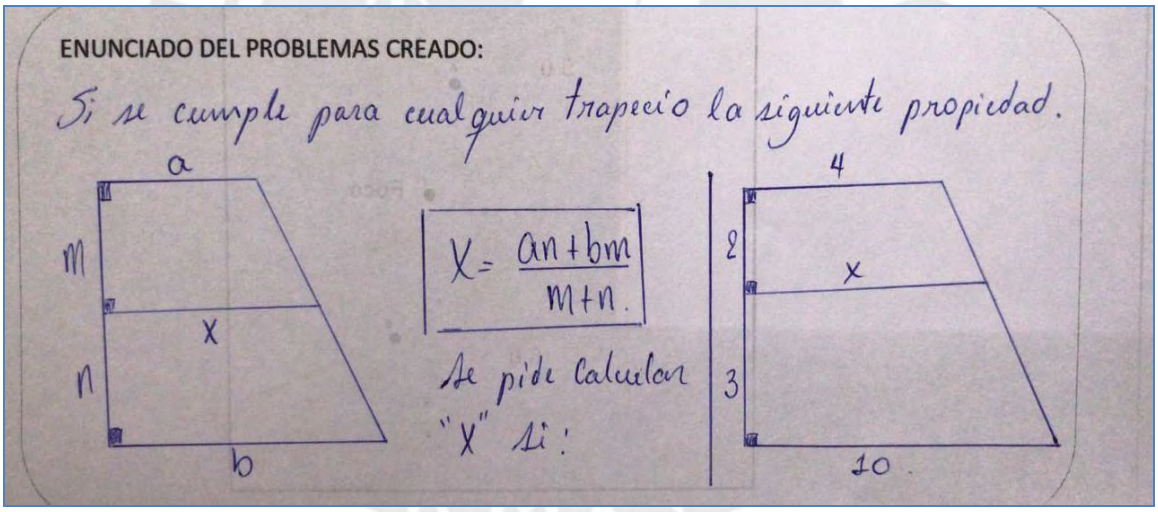
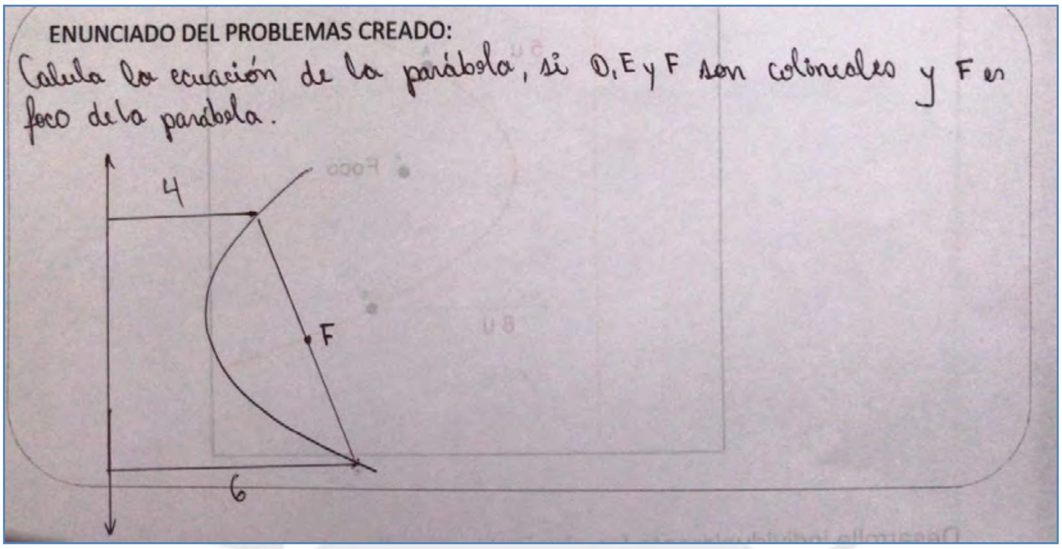


Figura 32. Problema pre creado por el profesor 2 del Episodio No 3.

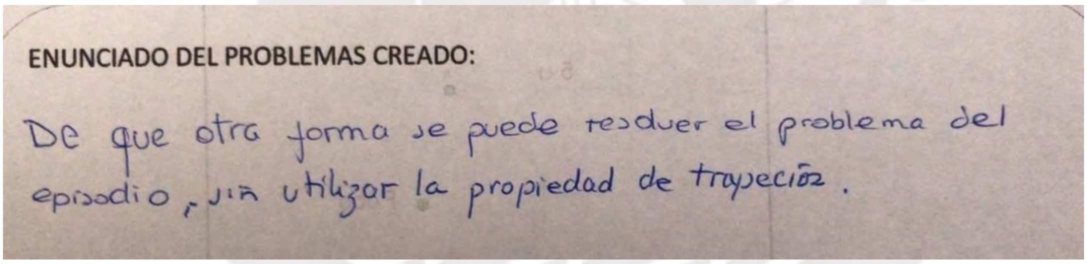
- Problema pre creado por el profesor 6.


ENUNCIADO DEL PROBLEMAS CREADO:

Calcula la ecuación de la parábola, si D, E y F son colineales y F es foco de la parábola.

Figura 33. Problema pre creado por el profesor 6 del Episodio No 3.

- Problema pre creado por el profesor 7.

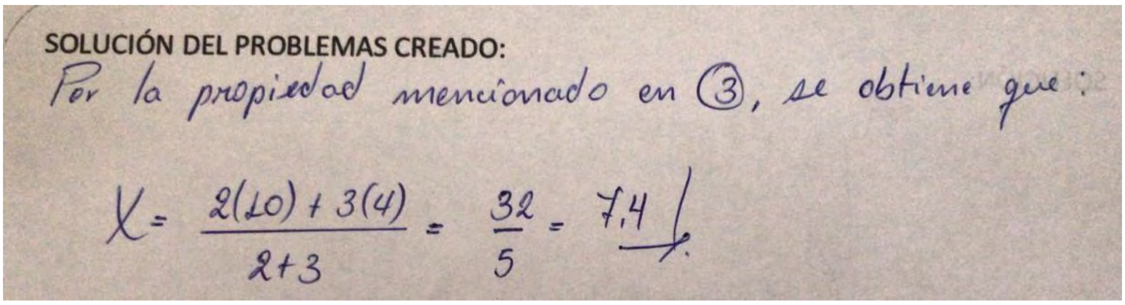

ENUNCIADO DEL PROBLEMAS CREADO:

De que otra forma se puede resolver el problema del episodio, sin utilizar la propiedad de trayección.

Figura 34. Problema pre creado por el profesor 7 del Episodio No 3.

Asimismo, mostramos la resolución de los problemas pre mencionados anteriormente de cada profesor, para ello presentamos las figuras 33, 34 y 35 con las soluciones a dichos problemas.

- Solución del problema pre creado por el profesor 2.


SOLUCIÓN DEL PROBLEMAS CREADO:

Por la propiedad mencionado en 3, se obtiene que:

$$X = \frac{2(10)+3(4)}{2+3} = \frac{32}{5} = 7,4$$

Figura 35. Solución del problema pre creado el profesor 2 del Episodio No 3.

- Solución del problema pre creado por el profesor 6.

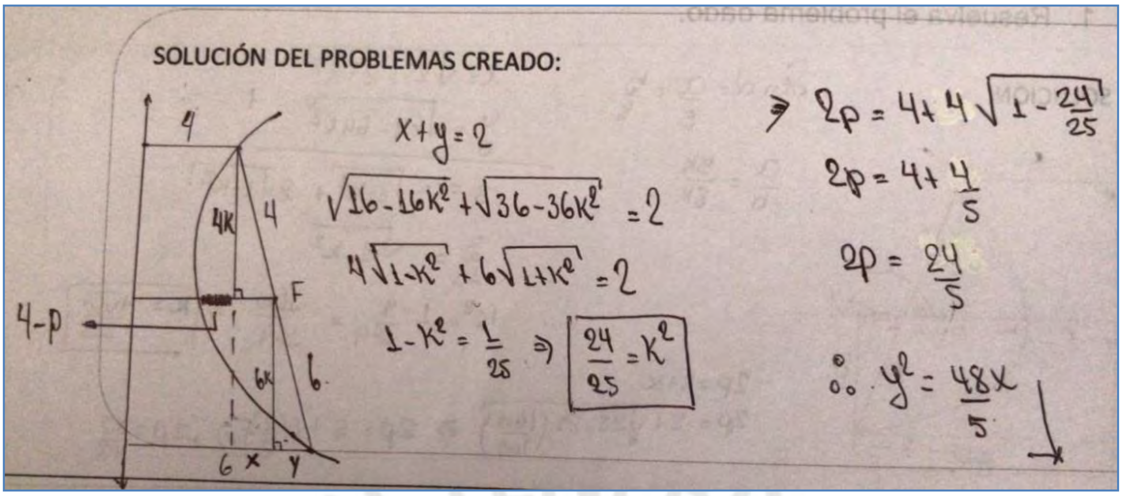


Figura 36. Solución del problema pre creado el profesor 6 del Episodio No 3.

- Solución del problema pre creado por el profesor 7.

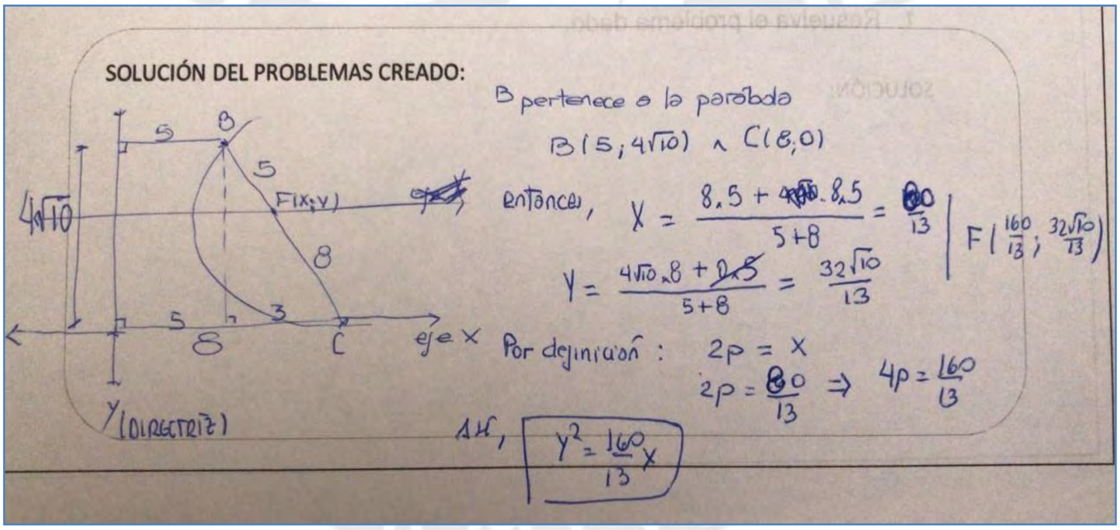


Figura 37. Solución del problema pre creado el profesor 6 del Episodio No 3.

C.5 Análisis teórico de los niveles de demanda cognitiva para el episodio de clase No3.

En esta sección mostramos el análisis de las respuestas de los profesores en torno a las soluciones de los problemas pre creados por ellos mismos en el episodio de clase No 3.

Para ello, identificamos 3 estrategias de resolución adoptadas en cada problema por los profesores; además es pertinente utilizar el modelo de demanda cognitiva adaptado para el tópico de parábola como lugar geométrico (Tabla 12), y como consecuencia del análisis e identificación de las diferentes estrategias de resolución inferimos el nivel de demanda cognitiva correspondiente.

- Primera estrategia: El profesor 2, propuso el problema pre (figura 32). Podemos afirmar que el enunciado del problema, proporciona la propiedad de trapecios, de este modo podemos determinar la medida de un segmento que une dos puntos de los lados no paralelos en función de las longitudes de las bases y de las longitudes de uno de los lados no paralelos.

  Para resolver dicho problema identificamos que la estrategia utilizada pertenece al nivel cognitivo de procedimientos sin conexiones. En la tabla 27 mostramos el análisis y justificación de la elección del nivel de demanda cognitiva para el problema pre creado por el profesor 2.

Tabla 27. Análisis de la resolución del problema pre creado por el profesor 2 del episodio de clase No 3, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado a la parábola como lugar geométrico.

Descripción – Solución del Problema Pre	Características del Nivel de procedimientos sin conexiones.
El profesor vio pertinente plantear un problema en donde se solicitó determinar la medida de un segmento que une dos puntos de los lados no	**Procedimientos:** Se resolvió en forma directa, a partir de lo mencionado por el enunciado del problema pre. **Objetivos:** Utilizó la fórmula planteada en el enunciado del problema. **Esfuerzo cognitivo:** Fue necesario aplicar un algoritmo de resolución que resulta ser evidente a partir del enunciado, en

paralelos del trapecio. A partir de la fórmula planteada en el enunciado del problema, esto respondió al requerimiento del problema pre.	consecuencia, presenta un bajo (limitado) esfuerzo cognitivo. **Contenidos:** Existió una conexión tácita entre el enunciado del problema pre y el algoritmo que se utiliza para su resolución. **Explicaciones:** Se enfocó en mencionar la estrategia utilizada para su resolución. No existió dudas en cómo resolver el problema, ya que su cálculo se dio en forma directa a partir de la fórmula planteada en el enunciado. **Representaciones:** Se utilizaron tres representaciones: verbal (enunciado del problema), algebraica y geométrica para resolver con éxito el problema.

- Segunda estrategia: El profesor 6, propuso el problema pre (figura 33). En el cual, se solicitó determinar la ecuación de la parábola, para ello precisamos que se consideró a este problema dado que, tiene una alta similitud con el problema del episodio.
  Para resolver dicho problema identificamos la estrategia que pertenece al nivel de procedimientos con conexiones. En la tabla 28 mostramos el análisis y justificación de la elección del nivel de demanda cognitiva para el problema pre creado por el profesor 6.

Tabla 28. Análisis de la resolución del problema pre creado por el profesor 6 del episodio de clase No 3, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado a la parábola como lugar geométrico.

Descripción – Solución del Problema Pre	Características del Nivel de procedimientos con conexiones.
El profesor 6 generó un problema con un alto índice de similitud al problema del episodio, hizo notar que la utilización de este problema permitió identificar y generar alguna experiencia para poder resolver el problema del episodio de manera directa.	**Procedimientos:** No se resolvió en forma directa, dado que requiere de una secuencia de operaciones algebraicas (ecuaciones lineales, cuadráticas). **Objetivos:** Estuvo enfocado en desarrollar el pensamiento matemático en torno al uso de una propiedad de trapecios.

Precisamos que el ítem 3 del problema se resolvió de manera incorrecta, evidenciando una dificultad en el tratamiento algebraico (figura 34).	**Esfuerzo Cognitivo:** Se requirió tomar decisiones, y el uso de la noción de triángulos rectángulos para generar las operaciones algebraicas, es por ello que se necesitó de un (considerable) esfuerzo cognitivo. **Contenidos:** El profesor debió interactuar con los objetos matemáticos de trapecios, teorema de Pitágoras, ecuaciones cuadráticas. **Explicaciones:** Se hizo uso de tratamientos algebraicos y conversiones entre los registros gráfico - algebraico. Es por ello por lo que, Se requirió explicar el procedimiento utilizado por el profesor para el desarrollo del problema. **Representaciones:** Se utilizó tres representaciones, del tipo verbal (enunciado del problema), algebraica y geométrica.

- Tercera estrategia: El profesor 7, propuso el problema pre (figura 34). El enunciado del problema estuvo dirigido a generar una resolución alternativa a la realizada por el profesor, en donde no se requirió el uso de la fórmula de trapecios.

  Para resolver dicho problema identificamos a la estrategia que pertenece al nivel de procedimientos con conexiones. En la tabla 29 mostramos el análisis y justificación de la elección del nivel de demanda cognitiva para el problema pre creado por el profesor 7.

Tabla 29. Análisis de la resolución del problema pre creado por el profesor 7 del episodio de clase No 3, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado a la parábola como lugar geométrico.

Descripción del Problema Pre	Características del Nivel de Procedimientos con Conexiones.
El profesor 7 planteó una alternativa diferente para la	**Procedimientos:** No se resolvió en forma directa, dado que requirió de una secuencia de operaciones algebraicas y el ámbito de la geometría analítica.

resolución del problema del episodio, que no consideró la fórmula de trapecio que utiliza en la solución inicial del mismo; para ello, la resolución del problema pre (figura 35), consideró determinar las coordenadas de los puntos B y C a partir de las longitudes mostradas en el problema, luego mediante el uso de la fórmula de las coordenadas de un punto de un segmento a partir de una razón dada.	**Objetivos:** Estuvo enfocado en desarrollar otra solución al problema del episodio. **Esfuerzo Cognitivo:** Se requirió el manejo de propiedades en la geometría analítica, es por ello que se necesitó de un (considerable) esfuerzo cognitivo. **Contenidos:** El profesor debió interactuar en el contexto de la geometría analítica con la ubicación de coordenadas en el plano cartesiano y también del cálculo de las coordenadas de un segmento a partir de una razón dada. **Explicaciones:** Se hizo uso de tratamientos en los registros gráfico - algebraico. Es por ello por lo que, Se requirió explicar el procedimiento utilizado por el profesor para el desarrollo del problema. **Representaciones:** Se utilizó tres representaciones, del tipo verbal (enunciado del problema), algebraica y geométrica (en el contexto de la geometría analítica) y algebraica.

CUARTA SESIÓN

Esta sesión se desarrolló al igual que todas, en las instalaciones de la IEP Bertolt Brecht Sede Carabayllo, en donde participaron 6 profesores del nivel de secundaria de matemáticas en servicio, ellos mostraron la disposición e interés por la ejecución de la evaluación final, la cual tuvo una duración de 105 minutos.

Los profesores rindieron la prueba final (ver Anexo D.1) en forma individual, en donde se presentó el episodio de clase No 4, a partir del cual solicitamos: resolver el problema planteado, crear un problema pre a partir del problema inicial, finalmente resolver el problema pre creado.

La Tabla 30 muestra el episodio de clase, el mismo que se basa en un problema que se ubica en un contexto intra-matemático.

Tabla 30. Problema de la evaluación final, en torno a la parábola como lugar geométrico.

En una clase en un taller de formación de profesores, el profesor Castillo propuso el siguiente problema:
Determine la ecuación de una parábola que pasa por los puntos A (7; 3), B (-1; -5), además las coordenadas del foco son (11; 0).

Algunos de los profesores manifestaron lo siguiente:

José: ¿Qué quiere decir que pasa por unos puntos?

Arturo: ¿Se puede conocer a partir del enunciado la ecuación de la parábola?

Graciela: ¿Se puede asumir que el vértice de la parábola es el origen de coordenadas?

Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones:

1. Resuelva el problema del episodio.
2. Cree un problema-pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).
3. Resuelva el problema pre creado en el ítem 2

APRECIACIONES EN TORNO A LAS RESPUESTAS DE LOS PROFESORES EN SERVICIO EN LA SESIÓN 4.

Realizamos algunas observaciones en torno a la sesión 4, dirigidas tanto a la participación de los profesores como al desarrollo del problema del episodio.

1. Sólo cuatro profesores detallaron sus soluciones, sin embargo, los seis profesores asistentes respondieron al requerimiento del problema del episodio.
2. Se observó en los seis profesores el uso de diferentes registros de representación tales como: algebraico, verbal, gráfico.
3. Para determinar la ecuación de la parábola solicitada, 3 de los profesores emplearon la definición de parábola como lugar geométrico, ello permitió conocer las coordenadas del vértice, el parámetro "*p*" y finalmente, con la suma de todo ello se llegó a determinar lo solicitado.
4. Analizamos los problemas pre creados y sus resoluciones respectivas, desarrollados por los profesores 2 y 3; esto debido a que ambos problemas guardan una similitud con el problema de la evaluación.

5. Se consideró lo generado por los profesores 2 y 3, dado que son los únicos problemas que guardan coherencia con lo solicitado en la evaluación, y además sirvieron de referencia para nuestro estudio.

A continuación, mostramos la Tabla 31 en donde identificamos las características propias de cada profesor en torno a la solución de la evaluación final (ver Tabla 30). Con ello pretendemos mostrar cómo se desarrolló el primer ítem de la evaluación. Además, se analizó cada respuesta de todos los ítems de la evaluación en mención.

En el ítem 1 de la evaluación, cinco profesores resolvieron correctamente el problema del episodio, sólo cuatro de ellos utilizaron adecuadamente los registros gráfico y algebraico en la resolución de este, mientras que un profesor sólo utilizó el registro algebraico, y el profesor 8 resolvió incorrectamente el problema en mención

En el ítem 2 de la evaluación, tres profesores crearon problemas con características de problemas pre, sin embargo, estos problemas tuvieron una mediana o baja similitud con el problema del episodio, lo cual permitió inferir que la influencia del enfoque de la creación de problemas es pertinente para este tipo de taller con profesores, por otro lado tres profesores crearon problemas que no guardan ninguna relación con el problema inicial debido a que poseían una alta similitud con problema del episodio.

En el ítem 3 y último de la evaluación, de forma similar al ítem 1 se observó que cuatro profesores resolvieron correctamente el problema pre generado por ellos mismos, además utilizaron adecuadamente los registros gráfico y algebraico en la resolución de este.

Tabla 31. Análisis del episodio de clase No 4 – Actividad Individual.

Profesor	**Ítem 1**				**Ítem 2**							**Ítem 3**		
	Resuelve correctamente	No presupone que la parábola es cóncava hacia la izquierda	Utiliza representación gráfica adecuada	Coherencia entre los registros gráfico y algebraico	Tiene características de problema PRE	Tiene similitud con el problema del episodio			Tiene coherencia con el problema del episodio			Resuelve correctamente	Utiliza representación gráfica adecuada	Coherencia entre los registros gráfico y algebraico
						Alto	Medio	Bajo	Alto	Medio	Bajo			
2	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ			X	X			SÍ	SÍ	SÍ
3	SÍ	SÍ	NO	SÍ	SÍ			X	X			SÍ	NO	NO
5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO		X			X		SÍ	SÍ	SÍ

6	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO		X			X		NO	SÍ	SÍ
7	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ		X			X		SÍ	SÍ	SÍ
8	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	X				X		NO	SÍ	SÍ

EPISODIO 4 (EVALUACIÓN FINAL)

De acuerdo con el ítem 2 de la evaluación final, mostramos a continuación los enunciados de los problemas pre creados por los profesores 2, y 3:

- Problema pre creado por el profesor 2.

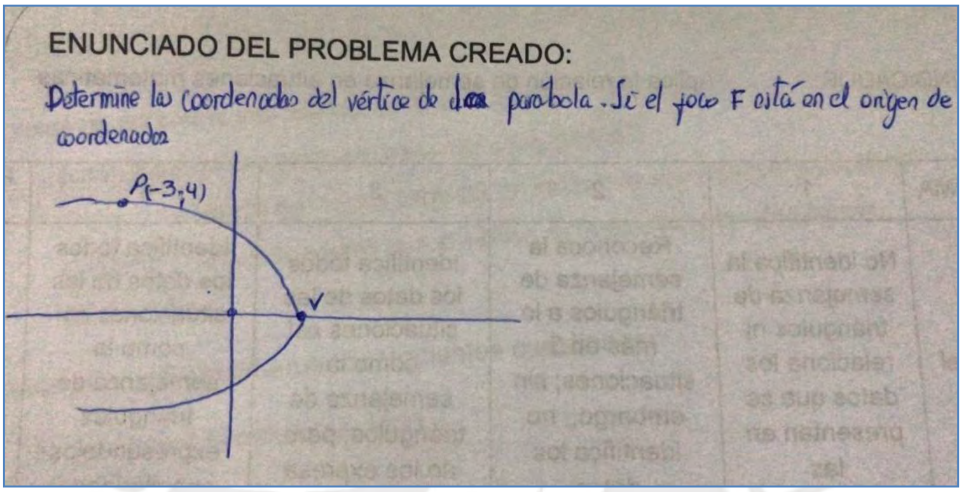


Figura 38. Problema pre creado por el profesor 2 del Episodio de Clase No 4.

- Problema pre creado por el profesor 3.

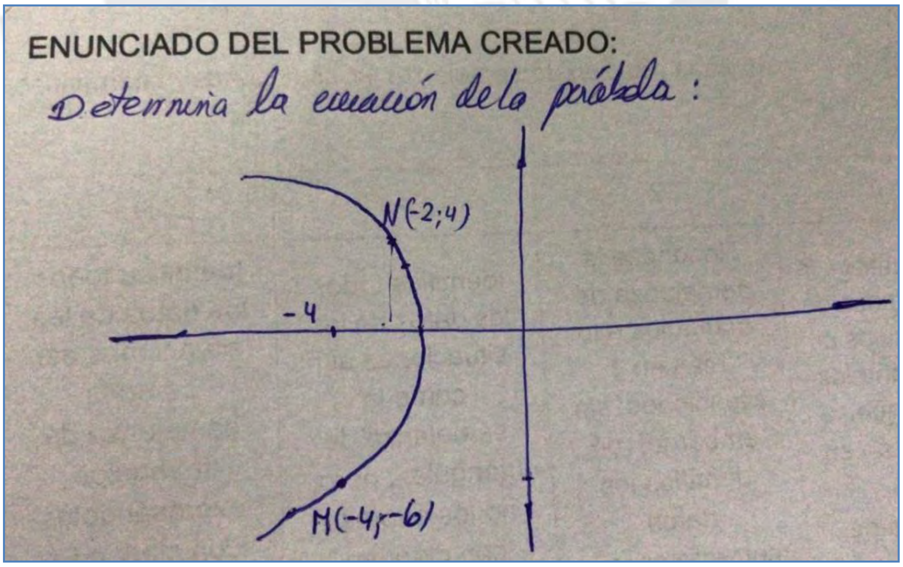


Figura 39. Problema pre creado por el profesor 3 del Episodio de Clase No 4.

Encontramos en ambos problemas presentados por los profesores 2 y 3, una referencia para resolver el problema de la evaluación, siendo el problema creado por el profesor 3 de mayor relevancia que el otro problema, dado que tiene una mayor similitud al problema de la evaluación; sin embargo, como problema pre debemos sostener que no cumple con las características como tal, como sostiene Malaspina (2017) a “facilitar la comprensión y la solución del problema del episodio” (p. 24).

Con respecto al tercer ítem del problema del episodio No 4, en donde se solicitó resolver problemas pre planteados en el ítem 2 de la evaluación desarrollados líneas arriba, a raíz de ello presentamos la figura 38 y 39, además mostramos las soluciones a dichos problemas generados por los profesores 2 y 3.

- Solución del problema pre creado por el profesor 2.

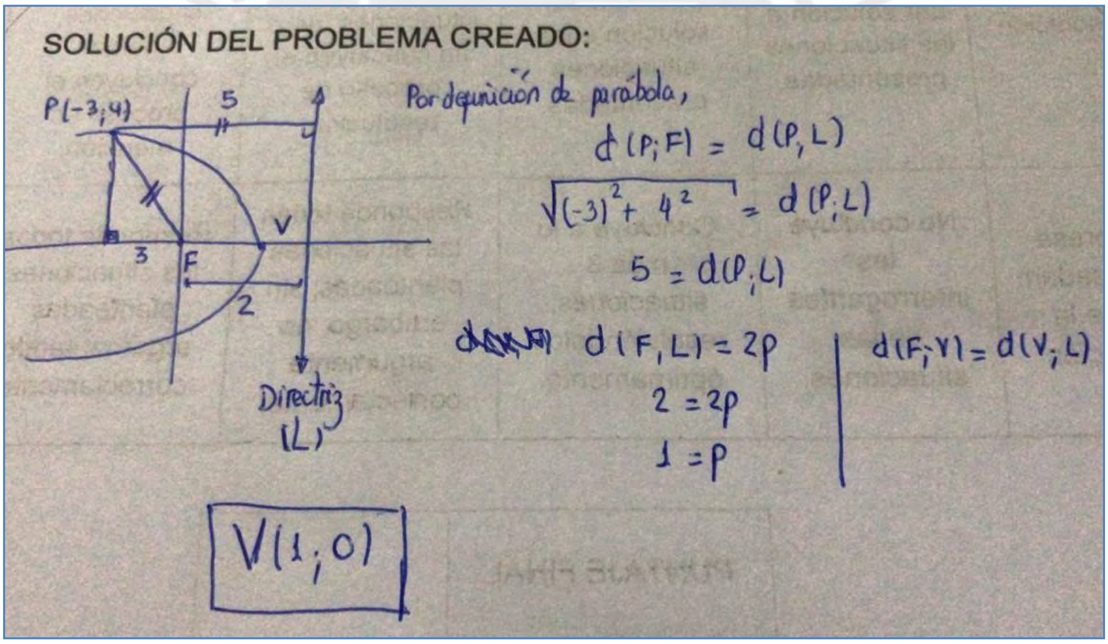
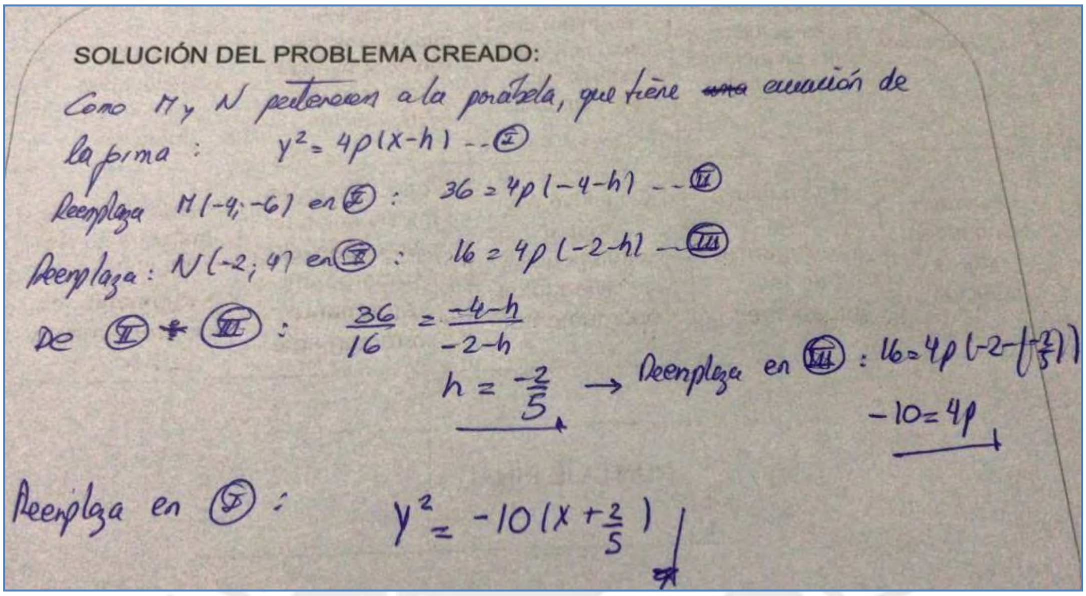


Figura 40. Solución del problema pre creado el profesor 2 del Episodio No 4.

- Solución del problema pre creado por el profesor 3.



SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CREADO:

Como M y N pertenecen a la parábola, que tiene ~~una~~ ecuación de la forma : $y^2 = 4p(x-h)$ ... (I)

Reemplaza $M(-4;-6)$ en (I) : $36 = 4p(-4-h)$ ... (II)

Reemplaza : $N(-2;4)$ en (I) : $16 = 4p(-2-h)$ ... (III)

De (II) ÷ (III) : $\frac{36}{16} = \frac{-4-h}{-2-h}$

$h = \frac{-2}{5}$ → Reemplaza en (III) : $16 = 4p(-2-(-\frac{2}{5}))$

$-10 = 4p$

Reemplaza en (I) : $y^2 = -10(x+\frac{2}{5})$

Figura 41. Solución del problema pre creado el profesor 3 del Episodio No 4.

D.2 Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva para el episodio de clase No 4.

En esta sección mostramos el análisis de las respuestas de los profesores en torno a las soluciones de los problemas pre creados por ellos mismos en el episodio de clase No 4.

Identificamos las estrategias de resolución para cada problema, para ello hacemos uso del modelo de demanda cognitiva adaptado para el tópico de parábola como lugar geométrico (Tabla 12), y como consecuencia del análisis e identificación de las diferentes estrategias de resolución inferimos el nivel de demanda cognitiva.

- Primera estrategia: El profesor 2, propone el problema pre (figura 40). El enunciado solicitó determinar las coordenadas del vértice de la parábola, cuyo foco se encuentra sobre el origen de coordenadas y el eje de la parábola es el eje "*x*". En la tabla 32 mostramos el análisis de la estrategia utilizada por el profesor para resolver el problema pre creado.

Tabla 32. Análisis de la resolución del problema pre creado por el profesor 2 del episodio de clase No 4, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado a la parábola como lugar geométrico.

Descripción – Solución del Problema Pre	**Características del Nivel de procedimientos sin conexiones.**
El profesor empleó la definición de parábola como lugar geométrico para determinar la longitud de la distancia del punto P a la directriz (figura 38), de este modo, calculó en el plano cartesiano la distancia del foco a la recta directriz, finalmente esto conllevó a determinar las coordenadas del vértice a partir del conocimiento que el vértice es el punto medio de la distancia que existe entre el foco y la directriz de la parábola.	**Procedimientos:** Se resolvió empleando la definición de parábola como lugar geométrico y reconociendo que el punto medio entre el foco y la directriz de una parábola es el vértice. **Objetivos:** Calcular las coordenadas del vértice de una parábola. **Esfuerzo cognitivo:** Fue necesario aplicar un algoritmo de resolución que resultó ser evidente a partir del enunciado, en consecuencia, presentó un bajo (limitado) esfuerzo cognitivo según las descripciones de los niveles de esfuerzo cognitivo (Tabla 8). **Contenidos:** Existió una conexión entre el enunciado del problema pre y el algoritmo que se utilizó para su resolución. **Explicaciones:** Solo se enfocó a mencionar la estrategia utilizada para su resolución. Además, existieron pocas dudas en cómo resolver el problema, ya que se calculó de manera directa, a partir de la definición de la parábola. **Representaciones:** Se utilizó tres representaciones, verbal (enunciado del problema), algebraica y geométrica para resolver con éxito el problema.

- Segunda estrategia: El profesor 3, propuso el problema pre (figura 41). A partir del cual solicitó determinar la ecuación de la parábola, a partir de dos puntos que pertenecen a la misma.

  Para resolver dicho problema identificamos la estrategia que pertenece al nivel de procedimientos con conexiones. En la tabla 33 mostramos el análisis de la estrategia utilizada por el profesor 3, para resolver el problema pre creado.

Tabla 33. Análisis de la resolución del problema pre creado por el profesor 3 del episodio de clase No 4, mediante el modelo de demanda cognitiva adaptado a la parábola como lugar geométrico.

Descripción – Solución del Problema Pre	**Características del Nivel de procedimientos con conexiones.**
El profesor propuso un problema que posee diferentes resoluciones y en diferentes contextos (geométrico, algebraico), de ese modo el profesor 3 utilizó sólo el registro algebraico, además identificó la forma de la ecuación de la parábola: $\boldsymbol{y^2 = 4p\ x - h}$ para luego reemplazar los puntos *M* y *N* en la ecuación, de esa manera obtiene el valor de "*h*" y del parámetro "*p*", finalmente reemplazó los valores hallados en la ecuación de la parábola (figura 39).	**Procedimientos:** Se resolvió reemplazando los puntos en la ecuación de la parábola definida por el profesor. **Objetivos:** Determinar la ecuación de la parábola conociendo dos puntos de ella. **Esfuerzo cognitivo:** Fue necesario aplicar un algoritmo de resolución que no resulta ser evidente del enunciado, por lo que, presentó un alto (cierto) esfuerzo cognitivo, según las descripciones de los niveles de esfuerzo cognitivo (Tabla 8). **Contenidos:** Existió una conexión entre el enunciado del problema pre y el algoritmo que se utiliza para su resolución. **Explicaciones:** Se enfocó a mencionar la estrategia utilizada para su resolución. **Representaciones:** Utilizó sólo la representación algebraica para resolver con éxito el problema.

Vemos pertinente, detallar a continuación, una vez culminado todas las sesiones del taller de creación de problemas para nuestro objeto de estudio la parábola como lugar geométrico; la Tabla 34, en donde reunimos los aspectos fundamentales del análisis realizado a las sesiones del taller, evidenciaremos a raíz de ello, la influencia tanto de la estrategia EP (episodio, problema pre) de la creación de problemas y de los niveles de demanda cognitiva adaptado para nuestro objeto de estudio parábola vista como lugar geométrico.

Tabla 34. Influencia de la estrategia EP y de los niveles de demanda cognitiva del modelo adaptado para la parábola como lugar geométrico, antes y después de realizar el taller de creación de problemas con los profesores de la muestra.

Antes del Taller de Creación de Problemas	Después del Taller de Creación de Problemas
Para esta parte consideramos los resultados de la Tabla 15, análisis que realizamos para la **Evaluación Diagnóstica,** en donde los profesores de la muestra desconocían tanto la estrategia EP (episodio, problema pre), y los niveles de demanda cognitiva; en dicho análisis evidenciamos que el 69% de profesores tenían conocimiento de la parábola como lugar geométrico.	A partir de la Tabla 2, Tabla 23 y Tabla 24, donde analizamos la actividad grupal del episodio 2 que se desarrolló en forma individual durante la **sesión 3** del taller**,** evidenciamos una diferencia significativa con el grupo 2 conformado por los profesores 2,3, y 7; incrementaron el nivel de demanda cognitiva del problema que crearon de manera grupal, sin embargo, aún los grupos 3 y 1 de profesores presentaron problemas del mismo nivel de demanda cognitiva que en los episodios anteriores.
A partir de la Tabla 18, donde analizamos el episodio de clase No 1 que se desarrolló en la **sesión 2** del taller, como consecuencia, evidenciamos que los profesores de la muestra presentaron serias dificultades para generar problema de un nivel alto de	A partir de la Tabla 26, donde analizamos el episodio de clase No 3 que se desarrolló en la **sesión 3** del taller, esto trajo como consecuencia la evidencia que ya a esta altura los problemas que formularon algunos profesores presentaron un nivel alto de complejidad en comparación

demanda cognitiva.	con las sesiones anteriores.
	De las Tablas 31, 32 y 33, donde analizamos la evaluación final que se llevó a cabo en la **sesión 4**, del taller de creación de problemas, ello trajo como consecuencia la evidencia de una diferencia significativa pero notable en comparación con las tablas y episodios de clases, mencionados anteriormente, debido a ello identificamos que el nivel que predomina en los problemas que crean los profesores de la muestra en torno a la parábola como lugar geométrico, corresponde al nivel 2 del modelo de demanda cognitiva adaptado para nuestro objeto de estudio, esto es, corresponde al nivel de procedimientos sin conexiones.

4.3 Planteamiento del Estudio de Caso

En esta sección, analizamos en un ámbito general, situaciones que se relacionan con el enfoque de creación de problemas y el modelo de demanda cognitiva adaptado para el estudio de nuestro objeto matemático, que se trabajó en el taller de creación de problemas. Asimismo, de acuerdo con los objetivos de nuestra investigación planteamos el caso de estudio desarrollado por el profesor 2; a partir de la presencia del profesor en todas las sesiones del taller, además observamos que el docente realizó de manera exitosa todas las actividades planteadas en el taller. Realizamos el análisis tanto de los problemas creados como la relación con el modelo de demanda cognitiva adaptado a la parábola como lugar geométrico.

4.3.1 Caso 1: Profesor 2

Presentamos el caso del profesor 2, que desarrolló el estudio de la parábola como lugar geométrico en el taller de creación de problemas; además categorizamos de acuerdo con el modelo de demanda cognitiva los problemas generados por el profesor en mención.

El profesor 2, es un docente en servicio del nivel de secundaria de la muestra que cuenta con 7 años de experiencia en el dictado del área de Matemática, además es bachiller de la carrera de matemática pura de la Universidad Nacional del Callao (UNAC), y al momento de realizar el taller de creación de problemas, el profesor encontraba cursando el segundo semestre de la maestría en educación con mención en Docencia Universitaria en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM).

4.3.1.1 Resultados del profesor 2 en el episodio de clase No 1

En la figura 42, mostramos el problema pre creado por el profesor 2, para el episodio de clase No 1 cuya actividad se desarrolló de manera individual, esto se produjo en la sesión 2 del taller de creación de problemas. Además, mostramos la solución al problema mencionado y la identificación del esfuerzo cognitivo de acuerdo con la (Tabla 8) del problema creado.

Enunciado del problema pre creado por el profesor 2 del episodio de clase No 1

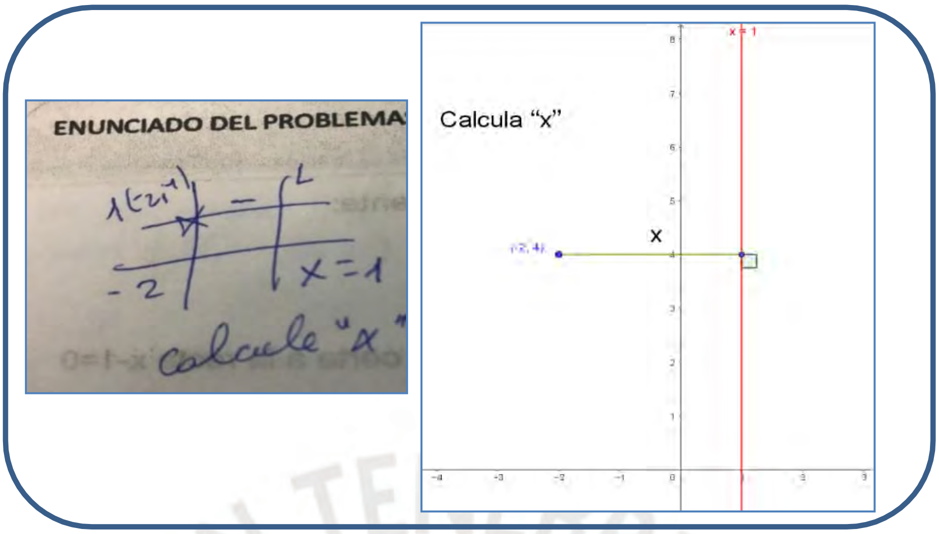


Figura 42. Enunciado del Problema pre creado por el profesor 2 en el Episodio de Clase No 1.

A continuación, mostramos, la solución al problema pre creado por el profesor 2 del episodio de clase No 1.

Solución del problema pre propuesto por el profesor 2.

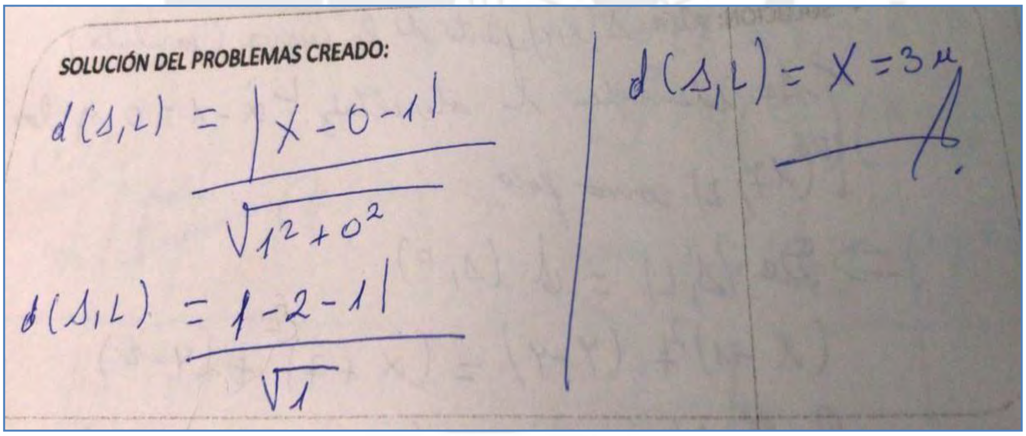


Figura 43. Solución del Problema pre propuesto por el profesor 2 en el Episodio de Clase No 1.

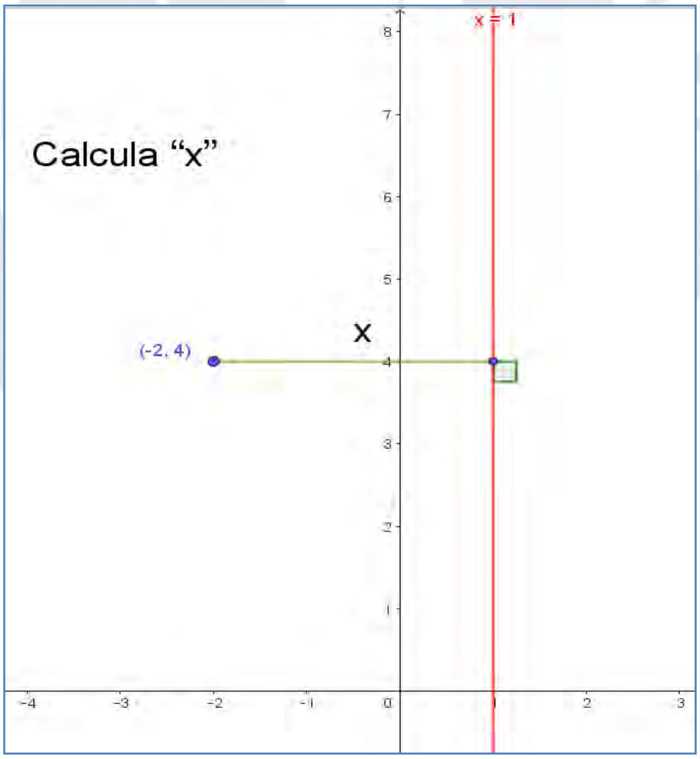
Solución referencial del problema pre creado por el profesor 2

Esta sección tiene por objetivo mostrar aspectos relacionados que no son considerados por el profesor 2 en la resolución de su problema pre creado, estos aspectos están en un primer momento están orientados a describir los elementos del problema de acuerdo con Malaspina (2017), además mostramos en un segundo momento haciendo uso de la Tabla 8, la identificación pertinente del esfuerzo cognitivo requerido para resolver el problema pre creado.

Resolución referencial del problema pre creado por el profesor 2

- Identificación de los elementos del problema
  - ✓ Información: Ecuación de la recta (*x=1*)
    Coordenadas de un punto en el plano cartesiano *(-2; 4)*
  - ✓ Requerimiento: Determinar la distancia del punto de coordenadas *(-2; 4)* a La recta de ecuación *x=1*.
  - ✓ Contexto: El problema es de carácter intra-matemático.
  - ✓ Entorno Matemático: Los contenidos matemáticos inmersos en la solución del problema son:

    a) Distancia de un punto a recta.
- Representación gráfica inicial del problema



- Aplicamos en forma directa la distancia de la abscisa -2, hacia la recta *x=1* y dado que es una recta paralela al eje de ordenadas la distancia desde -2 hasta *x=1*, será: $|-2| + 1 = 3$. Por tanto, el valor de "*x*" será igual a 3. ■

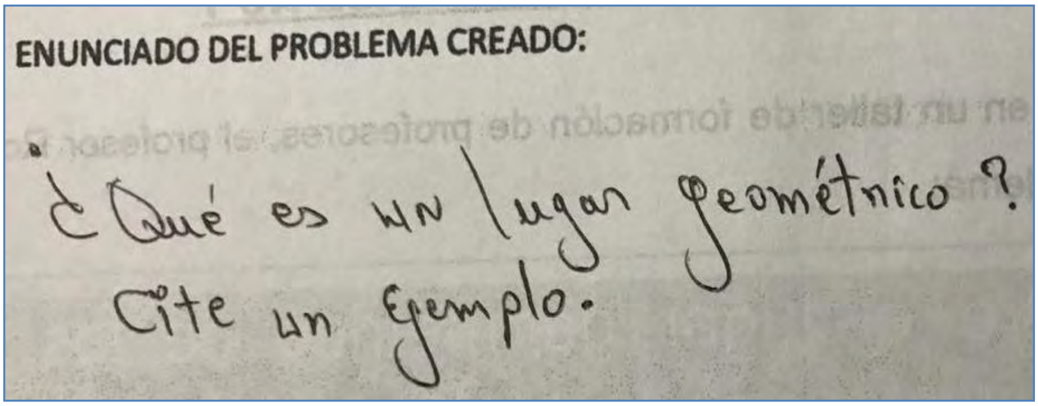
- Identificación del Nivel de Esfuerzo Cognitivo

NIVEL DE ESFUERZO COGNITIVO	CARACTERÍSTICAS
Bajo (Limitado)	a. El problema no requirió un análisis profundo del enunciado, dado que para resolverlo sólo se debió tener presente la aplicación de distancia entre dos valores en el eje de abscisas. b. La resolución al problema pre se dió en forma práctica y directa.

4.3.1.2 Resultados del profesor 2 en el episodio de clase No 2

En la figura 42, mostramos el problema pre creado por el profesor 2, en el episodio de clase No 2 cuya actividad se desarrolló en forma grupal, todo ello se realizó en la sesión 3 del taller de creación de problemas. Además, mostramos la solución al problema mencionado y la identificación de al menos 2 características del nivel de demanda cognitiva que presenta el problema en mención.

Enunciado del problema pre creado por el profesor 2 del episodio de clase No 2


ENUNCIADO DEL PROBLEMA CREADO:

¿Qué es un lugar geométrico?
Cite un ejemplo.

Figura 44. Enunciado del problema pre creado por el profesor 2 del Episodio de Clase No 2.

Mostramos a continuación, la solución al problema pre, creado por el profesor 2 en el episodio de clase No 2.

Solución del problema pre propuesto por el profesor 2.

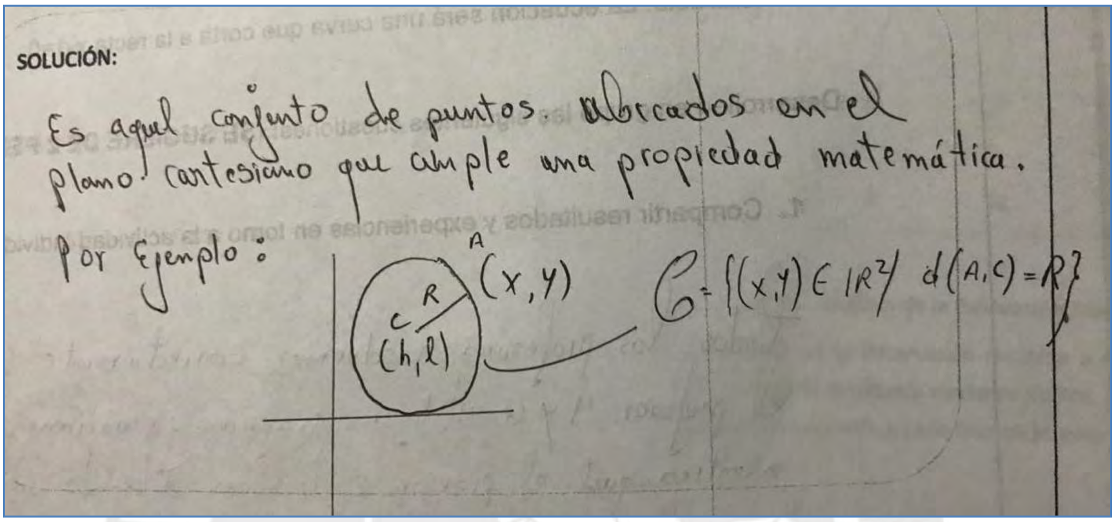


Figura 45. Solución del Problema pre creado por el profesor 2 en el Episodio de Clase No 2.

Solución referencial del problema creado por el profesor 2 en el episodio No 2.

Esta sección tiene por objetivo mostrar aspectos relacionados que no son considerados por el profesor 2 en la resolución de su problema pre creado, estos aspectos están orientados a describir los elementos del problema en un primer momento, según Malaspina (2013), además mostramos en un segundo momento haciendo uso de la Tabla 12, la identificación del nivel de demanda cognitiva del problema pre creado por el profesor 2.

Resolución referencial del problema pre creado por el profesor 2

- Identificación de los elementos del problema:

  - ✓ Información: No precisa
  - ✓ Requerimiento: Definir el objeto matemático, lugar geométrico.
  - ✓ Contexto: El problema es de carácter intra-matemático.

- ✓ Entorno Matemático: Los contenidos matemáticos inmersos en la solución del problema son:
  a) Lugar Geométrico.

- La solución al problema se dio en forma directa a partir del enunciado; el lugar geométrico representado algebraicamente por una ecuación de la forma *f(x,y)=0* cuyas soluciones reales para valores correspondientes de "*x*" e "*y*" son todas las coordenadas en el plano cartesiano, de aquellos puntos que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen al lugar geométrico. Además, solicitamos indicar un ejemplo de lugar geométrico, y éste lo mostramos en la figura 46.

- Un punto se mueve en el plano cartesiano de tal manera que su distancia al origen de coordenadas es siempre igual a 2. Determine la ecuación de su lugar geométrico y realice una representación gráfica.

  Solución:

  a. $\left|\overline{OP}\right| = 2$

  b. $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$

  c. El lugar geométrico es una circunferencia

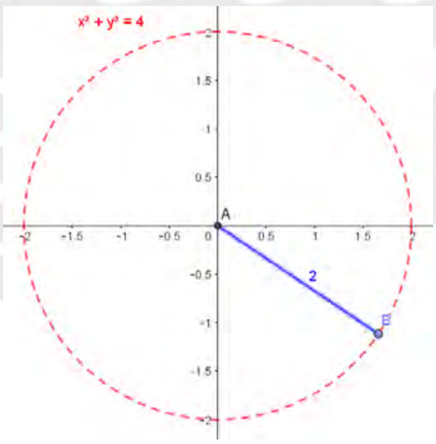
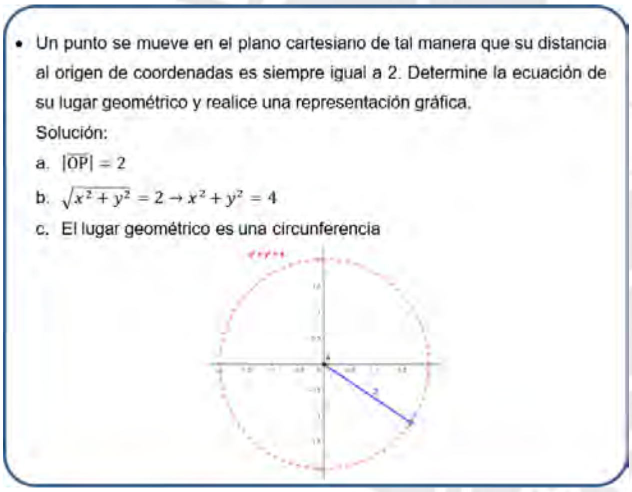


Figura 46. Ejemplo de lugar geométrico de la solución experta al problema pre creado por el profesor 2. en el Episodio de Clase No 2.

- Identificación del Nivel de Demanda Cognitiva del problema pre creado por el profesor 2 en el episodio de clase No 2.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características del Nivel de Memorización.</th></tr>
<tr><td>
El problema pre, consistió en identificar: ¿qué es un lugar geométrico?, a partir de su definición y a través de un ejemplo utilizando para ello la representación gráfica.

En el ejemplo de lugar geométrico (figura 46), se presentó la resolución haciendo uso del algoritmo de distancia entre dos puntos, a partir del cual se obtiene la ecuación que corresponde a una circunferencia de radio 2.



</td><td>
Procedimientos: Se resolvió en forma directa, a partir de lo mencionado por el enunciado del problema pre.
Objetivos: Definir lugar geométrico y citar un ejemplo.
Esfuerzo Cognitivo: No se requirió tomar decisiones, solo consistió en reproducir la definición de lugar geométrico, en consecuencia, respondió a un bajo (apenas) esfuerzo cognitivo.
Contenidos: No existieron algoritmos a utilizarse, sólo se presentó una definición clara y directa del objeto matemático de lugar geométrico.
Explicaciones: Solo se enfocó a definir el lugar geométrico, por lo que no ameritó explicaciones.
No existieron dudas en cómo resolver el problema.
Representaciones: Se utilizó tres representaciones, verbal (definición de lugar geométrico), algebraica (ecuación del lugar geométrico de la circunferencia) y gráfica (circunferencia de radio 2).
</td></tr>
</table>

CONSIDERACIONES FINALES / CONCLUSIONES

En esta sección mostramos, las conclusiones del trabajo de investigación, para ello, como punto de partida consideramos los objetivos propuestos en el capítulo I. Además, pretendemos dar algunas consideraciones para futuros trabajos en torno a los niveles de demanda cognitiva de problemas de parábolas como lugar geométrico creados por profesores de secundaria en servicio.

Las conclusiones emergen del desarrollo del trabajo de investigación, y están dirigidas a tomar en cuenta los objetivos específicos y generales propuestos en nuestro estudio.

- Consideramos que existió un manejo adecuado del objeto matemático; esta afirmación la sustentamos a raíz del análisis de la evaluación diagnóstica (ver Tabla 15), en donde evidenciamos que 8 de 13 profesores logran identificar a la parábola como lugar geométrico, por lo que, podemos inferir que el 69% de profesores evidenciaron tener conocimientos en torno a nuestro objeto matemático en estudio. Concluimos a partir, de lo mencionado que el instrumento utilizado (evaluación diagnóstica) ha permitido que identifiquemos los conocimientos de los profesores en relación con la parábola, como lugar geométrico.
- A través del análisis del episodio de clase No 1 actividad individual (sesión 2), y de la rúbrica (ver Tabla 18), concluimos que los profesores presentaron serias dificultades en generar problemas de un nivel alto de demanda cognitiva. Esto lo percibimos tanto en la solución a los problemas del episodio de clase No 1, como en los problemas pre, que crearon los profesores a partir del problema del mismo episodio. Esto confirma la importancia del conocimiento de los niveles de demanda cognitiva y de nuestra propuesta de adaptación del modelo de demanda cognitiva para problemas de parábolas como lugar geométrico. Esto permitió analizar los niveles de demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores de secundaria, acerca de la parábola, como lugar geométrico, antes de desarrollar un taller sobre creación de problemas.
- Mediante el análisis del episodio de clase No 3 (sesión 3), y de la rúbrica presentada en la Tabla 26, concluimos que el modelo de demanda cognitiva para problemas de parábolas como lugar geométrico permitió - considerando las características propias de cada nivel del modelo - generar problemas con un alto

nivel de complejidad. La adaptación realizada del modelo original de demanda cognitiva, permitió analizar los niveles de demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores de secundaria, acerca de la parábola, como lugar geométrico, después de desarrollar un taller sobre creación de problemas.

- El análisis que realizamos en las Tablas 22, 23 y 24 correspondientes a la sesión 3 y el análisis que realizamos en las Tablas 31, 32 y 33 correspondiente a la evaluación final, nos permitió sostener que existe una diferencia notable, en contraste con lo mostrado en la Tabla 18 correspondiente a los niveles de demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores de la muestra, por lo que inferimos de este modo que el nivel de demanda cognitiva que predominan en los problemas que crean los profesores de secundaria logran ubicarse dentro del nivel 2 (procedimientos sin conexiones) del modelo de demanda cognitiva adaptado para nuestro objeto parábola como lugar geométrico.
- Observamos que la estrategia EPP (episodio, problema pre, problema pos), que se implementó en el taller de creación de problemas, con la explicación de los niveles de demanda cognitiva, influyeron en la mejora de los niveles de demanda cognitiva de los problemas que crean los profesores de la muestra. En la Tabla 34, presentamos evidencias de las diferencias emergidas antes y después de la realización del taller de creación de problemas.

Otras conclusiones, no relacionadas a nuestros objetivos de investigación, son mencionadas a continuación:

- La particularización del modelo de demanda cognitiva al contexto de problemas de parábolas como lugar geométrico facilitó y otorgó, características (dominios) particulares para cada nivel de demanda, lo cual permitió un análisis específico de los problemas creados por los profesores de secundaria de la muestra.
- A través de este estudio de investigación pretendemos aportar una propuesta para el análisis de problemas de parábolas vistas como lugar geométrico, a través del modelo de demanda cognitiva adaptado.

Perspectivas Futuras

En esta parte, mostramos algunas reflexiones a ser consideradas para trabajos futuros, que guarden relación con el marco teórico y los objetivos de nuestra investigación.

- Mencionamos que una dificultad para la investigación fue el tamaño de la muestra, la cual fue variable en todas las sesiones, por lo que recomendamos ejecutar investigaciones para grupos numerosos de profesores en servicio o en curso regular para docentes del área de matemáticas.
- Corroborar que el modelo adaptado de demanda cognitiva para parábola como lugar geométrico permite al profesorado diseñar buenas prácticas docentes.
- Analizar mediante el Modelo de Demanda Cognitiva adaptado al objeto matemático en estudio, tareas con problemas pre y pos creados por profesores de secundaria en servicio o en formación.
- Proponer un Modelo de Demanda Cognitiva para el tópico de cónicas y experimentarlo a través de la creación de problemas generados por profesores de secundaria en servicio o en formación.
- Tomar las ideas y experiencias desarrolladas en esta investigación para delinear pasos específicos en el marco de una propuesta de formación de profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

Abu-Elwan, R. (1999). The development of mathematical problem posing skills for prospective middle school teachers. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International conference on Mathematical Education into the 21st Century: Social Challenges, Issues and Approaches, II*, pp. 1-8. Cairo, Egypt.

Aldana, E. y López, J. (2018). Estudio Histórico - Epistemológico y Didáctico de la Parábola. (Spanish). *Revista Praxis & Saber*, 9(19), 63-88.

Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* (Doctoral dissertation). Universitat de Valéncia, España.

Casanova, G. (2009). Cónicas por siempre cónicas: un lugar en el mundo. *Revista argentina de psicopedagogía*, (62), 5.

Cortés, J. y Sanabria, F. (2012). *Concepciones y creencias de profesores de matemáticas sobre resolución de problemas: Un estudio de casos*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

DISER MINEDU (2016). Normas para la creación y funcionamiento de los centros rurales de formación en alternancia del nivel de secundaria de la educación básica regular.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia

Halmos, P.R. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*pp. 519-524.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? *Cognitive science and mathematics education*, 123-147.

Kontorovich, I. (2009). Essential aspects for inclusion in future consolidated problem posing frameworks. *In Proceeding of the sixth International Conference on Excellent in Academia*. Retrieved from http://edu.technion.ac.il/personal_files/1531380050705.pdf

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Lara, I. M. (2016). La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. [Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas]. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Lavy, I., & Shriki, A. (2007). Problem Posing as a means for developing Mathematical knowledge of prospective teachers. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129-136).

López, J. H. y Aldana, E. (2013). La comprensión del concepto de Parábola: Un estudio de Caso. *Actas del VII CIBEM*. Recuperado de: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/211.pdf

Lumbreras. (2013). Trigonometría (4ta edición, p. 791-794). Lima.

Malaspina, U. (2012a). Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (32), pp. 9 –27. Recuperado de:

http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/32/archivo5_volumen32.pdf

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. *Actas del VII CIBEM ISSN*, *2301*(0797), 129. Recuperado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/727.pdf

Malaspina, U. (2014). Papiroflexia y elementos para construir indicadores sobre creación de problemas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática* (38), 135–141.

Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: CERME

Malaspina, U. (2015a). Problem posing: its potentials in mathematics teaching and learning. In *Conference given at IACME XIV*.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. In *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico. ugr. es/civeos. html*.

MINEDU (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. Recuperado de: www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf.

MINEDU (2018). Resolvemos problemas 5. Lima. Recuperado de: http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/MINEDU/5835.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teacher of Mathematics.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales (original en inglés 2000).

NCTM (2014). Principles to actions. Ensuring mathematical success for all. Reston, VA: NCTM.

Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., y Ramírez, A. (2005). Geometría analítica. México: Editorial Prentice Hall, Pearson Educación.

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática, *Bolema*, 105-132.

Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing for research to Effective Practice*. Research in Mathematics Education (pp. 587). Springer.

Silver, E. (1994). *On mathematical problem posing*. For the Learning of Mathematics, 14(1), 19-28.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 3(5), 344-350

Stein, M. K. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics; New York: Teachers College Press, c2009

Torres, C. (2016). *Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico*. [Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas]. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Valdivia, C., y Parraguez, M. (2012). Evolución Cognitiva del Concepto Parábola como lugar geométrico: Una mirada desde la Teoría APOE. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*

Yin, R. (2004). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Trad. Daniel Grassi. Bookman: Porto Alegre.

ANEXOS

ANEXOS 1: DEL TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMA DE PARÁBOLAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO

ANEXOS 1.1:

Organización de la sesión 1 para el taller sobre creación de problemas.

SESIONES Y ACTIVIDADES DEL TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS				
		INSTRUMENTOS	ACTIVIDADES PROPUESTAS	
			DESCRIPCIÓN	OBJETIVOS
DÍA 1	SESIÓN 1	Ficha de información complementaria.	Cuestionario de preguntas.	Organizar a los sujetos de estudio.
		Evaluación exploratoria	Evaluación Diagnóstica	Identificar los conocimientos de los profesores sobre parábolas como lugar geométrico.
DÍA 2	SESIÓN 2	Creación de Problemas	Presentación con diapositivas del enfoque de CP.	Difundir la Creación de Problemas como estrategia que favorece al aprendizaje de las matemáticas.
		Modelo de Demanda Cognitiva	Presentación con diapositivas de los Niveles de Demanda Cognitiva de Stein.	Caracterizar los niveles de demanda cognitiva para el análisis de los problemas que crean los profesores en el taller.

DÍA 3	SESIÓN 3	Ficha de un episodio de clase No 1	Creación de problemas pre por variación de un problema.	Creación de problemas por variación de un problema.
		Modelo de Demanda Cognitiva Adaptado	Presentación con diapositivas de las categorías (dominios) para cada nivel de Demanda Cognitiva.	Analizar e identificar mediante el modelo adaptado de demanda cognitiva los problemas de parábolas que crean los profesores en servicio.
		Ficha del episodio de clase No 2	Creación de problemas pre de manera grupal.	Identificar la demanda cognitiva que se requiere para resolver los problemas creados (pre o pos) por parte de los profesores.
		Ficha del episodio de clase No 3	Creación de problemas pre de manera individual	Crear problemas pre a partir del problema mencionado.
DÍA 4	SESIÓN 4	Evaluación – Problema No 4	Evaluación Final	Identificar los conocimientos de los profesores sobre parábolas como lugar geométrico. Identificar los niveles de demanda cognitiva que de los problemas que crean los profesores.

SESIÓN 1

No

ANEXOS A: INSTRUMENTOS DE LA SESIÓN 1 DEL TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS

ANEXO A.1: Cuestionario para recoger información de los docentes.

FICHA DE INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

DATOS INFORMATIVOS
I.E. A LA QUE PERTENECE:
AÑOS DE EXPERIENCIA EN LA DOCENCIA:
GRADOS DE ENSEÑANZA EN LOS ÚLTIMOS CINCO AÑOS:
GRADO ACADÉMICO MÁS ALTO:
LUGAR DE ESTUDIOS PROFESIONALES:
LUGAR DE ESTUDIOS DE POSGRADO
¿Cuántas horas a la semana dicta cursos de matemáticas en su centro de labores?
¿Cuál es su fuente **principal** de problemas de matemáticas para sus clases? (   ) Libros (   ) Material virtual (   ) Creación propia

¿Usted tiene experiencia en la creación de problemas de matemáticas? ( ) Si ( ) No En caso afirmativo, dé una breve explicación sobre tal experiencia.
¿Considera importante usar la creación de problemas como medio para el aprendizaje de las matemáticas? ( ) Sí ( ) No Justifique su respuesta.
¿Cuál considera usted que es el conocimiento previo más importante que debe tener el estudiante, para que entienda la parábola como un lugar geométrico? ¿Por qué?
¿Ha enseñado el tema de parábola en estos dos últimos años? ( ) Sí ( ) No En caso afirmativo, explique su mayor dificultad en la enseñanza de este tema.

No

ANEXO A.2: Evaluación Diagnóstica

UN ESTUDIO DE LA PARÁBOLA DESDE LA CREACIÓN DE PROBLEMAS. UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE SECUNDARIA

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Apellidos y Nombres del docente: ....

Grado de enseñanza: ....

1. ¿Por qué se dice que la parábola es una cónica? Justifique su respuesta.

....

....

2. Escriba cuatro objetos matemáticos que considera Ud. Esenciales para definir una parábola como lugar geométrico.

a. .... c. ....

b. .... d. ....

3. ¿Qué diferencias fundamentales y que características comunes encuentra Ud. Entre las parábolas cuyas ecuaciones son: $x^2=4py$, $y^2=4px$?

Características Comunes	Diferencias

Comentarios:

4. Dibuje tres parábolas que posean como foco el origen de coordenadas. Determine las ecuaciones de las parábolas.

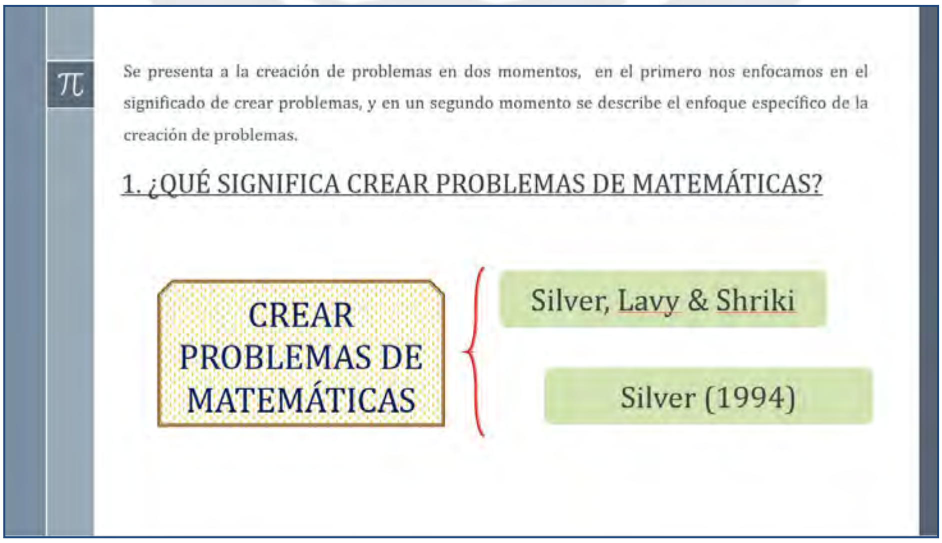
Gráfico 1	**Gráfico 2**	**Gráfico 3**
Ecuación de la Parábola	Ecuación de la Parábola	Ecuación de la Parábola

5. Dibuje dos parábolas que posean la misma directriz. Especifique la directriz y las ecuaciones de las parábolas.

Ecuación de la Directriz:	
Gráfico de la Parábola 1	Gráfico de la Parábola 2
Ecuación de la Parábola 1	Ecuación de la Parábola 1

SESIÓN 2

ANEXO B.1: **Presentación con diapositivas del enfoque de la creación de problemas.**

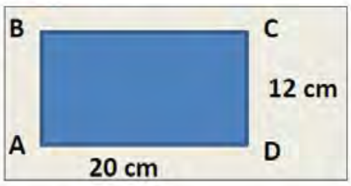


2. MARCO TEÓRICO DE LA CREACIÓN DE PROBLEMAS

3. ELEMENTOS DE UN PROBLEMA

Los problemas que se mencionan, a continuación han sido extraídos del trabajo de Malaspina (2015)

EJEMPLO: Creación de Problema por VARIACIÓN



Enunciado del problema creado:

Pedro tiene una hoja rectangular de papel ABCD, de 20 cm de largo por 12 cm de ancho. Pedro dobla la hoja de modo que el vértice C se ubica en el lado AD y el lado CD se superpone sobre el lado AD.

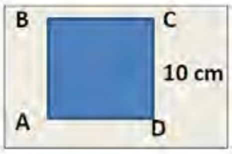
Se pide:

a) ¿Es verdad que el área del trapecio que se visualiza es el 75% del área del rectángulo ABCD? ¿Por qué?

Problema creado:

Lucía tiene una hoja cuadrada de papel ABCD, de 10 centímetros de lado como se ilustra en la figura.

Su profesor le pide que realizando dobleces en la hoja muestre de forma visual el 25% del área del cuadrado original. ¿ De cuántas maneras Lucía podría hacer dobleces para mostrar de forma visual el 25% del cuadrado original?



EJEMPLO: Creación de Problema por ELABORACIÓN

Situación:

María dispone de una lámina de cartulina en la cual está representado un rectángulo de 27 cm de ancho y 36 cm de largo.

Problemas creados, por elaboración, ante la situación dada

1.Si el rectángulo dibujado representa el piso de un patio, en una escala de 1/100, ¿cuáles serán las dimensiones de las losas cuadradas más grandes que se usen sin partir, para embaldosar el patio?

2.¿Cuánto debo aumentar al ancho y disminuir al largo para obtener un cuadrado del mismo perímetro que el rectángulo dibujado?

ANEXO B.2: Presentación con diapositivas del modelo de demanda cognitiva de Stein.

MODELO DE DEMANDA COGNITIVA

4. NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA DE SMITH & STEIN

El modelo de demanda cognitiva se determina después de realizar el proceso de caracterización de tareas matemáticas (Smith y Stein, 1998).

El modelo presenta cuatro niveles de demanda cognitiva que evalúan el esfuerzo cognitivo requerido de profesores y estudiantes para resolver una tarea matemática. Estos niveles son: la memorización, procedimientos sin conexiones a conceptos o significados, procedimientos con conexiones a conceptos y significados, y hacer matemáticas. Cada nivel está definido por un conjunto de características que prestan atención a diferentes aspectos de las soluciones de problemas. Se presenta en la Tabla 1 las características de los niveles de demanda cognitiva.

NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA	CARACTERÍSTICAS
Memorización	Son aquellas tareas que solicitan a los sujetos que reproduzcan hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidas o información presentada explícitamente en la tarea.
Procedimientos sin Conexiones	Son algorítmicos. El uso del procedimiento se requiere específicamente o es evidente a partir de la instrucción previa, la experiencia o la presentación de la tarea. Requiere una demanda cognitiva limitada para una solución exitosa. No tiene conexión con los conceptos o el significado que subyacen en el procedimiento que se está utilizando. No requiera explicaciones que se centren únicamente en describir el procedimiento que se utilizó.

NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA	CARACTERÍSTICAS
Procedimientos con Conexiones	Enfoca la atención de los sujetos en el uso de procedimientos con el fin de desarrollar niveles más profundos de comprensión de conceptos o ideas matemáticas. Se representan de múltiples maneras, como representaciones gráficas, objetos manipulables, símbolos y situaciones problemáticas. Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Los sujetos deben participar con ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos para completar la tarea con éxito y así desarrollar la comprensión.
Hacer Matemáticas	Son aquellas tareas que requieren un pensamiento complejo y no algorítmico por parte de los sujetos. Deben comprender los contenidos matemáticos subyacentes y explorar sus relaciones.

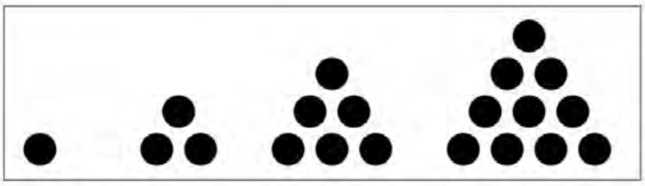
5. CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA

BENEDICTO Y GUTIÉRREZ (2017)

- Procedimientos
- Objetivos
- Esfuerzo Cognitivo
- Contenidos
- Explicaciones
- Representaciones

El problema que se menciona, a continuación es una situación de patrones geométricos, que ha sido extraído del trabajo de Benedicto y Gutiérrez (2017)

EJEMPLO: En el gráfico se observa una figura conformada con un punto, otra hecha con tres puntos, y así sucesivamente.



Adaptación del problema de patrones geométricos.

(Benedicto y Gutiérrez, p.2797 , 2017)

PREGUNTAS:

- ¿Cuántos puntos habrá en la cuarta figura?
- ¿Cuántos puntos habrá en la sexta figura?
- ¿Cuántos puntos habrá en la figura cuya posición es la 20. ¿Cómo saberlo?
- ¿Existe alguna regla que permita calcular el número de puntos de cualquier figura, como por ejemplo en la posición 100? Justifique su respuesta.
- ¿Existe alguna regla que permita calcular el número de puntos de cualquier figura, como por ejemplo en la posición "n"? Justifique su respuesta

6. ANÁLISIS DE LOS NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA ANTERIOR

En el trabajo de Benedicto y Gutiérrez (2017), se presenta el análisis del problema anterior, las características del nivel correspondiente al problema mencionado, el nivel de procedimientos sin conexiones.

DOMINIOS	PROCEDIMIENTOS SIN CONEXIONES
PROCEDIMIENTOS	Son algorítmicos. El procedimiento consiste en dibujar algunos términos siguiendo el patrón de los términos en la declaración y contando los elementos. Se puede seguir sin la necesidad de conectarse a la estructura aritmética de la secuencia.
OBJETIVOS	Enfoque la atención de los estudiantes en producir una respuesta correcta, la cantidad de elementos en un plazo inmediato o cercano, pero no en desarrollar la comprensión de la estructura de la secuencia.

ESFUERZO COGNITIVO	Resolverlo correctamente requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer y cómo hacerlo, porque la declaración claramente muestra cómo continuar la secuencia.
CONTENIDOS	Existe una conexión implícita entre la estructura subyacente de la secuencia y el procedimiento utilizado. Sin embargo, los estudiantes no necesitan estar conscientes de ello y pueden responder la pregunta dibujando términos y contando sus elementos.
EXPLICACIONES	Requieren explicaciones que se centren solo en describir el procedimiento utilizado. No es necesario identificar la relación entre la respuesta y el término.
REPRESENTACIONES	Se utiliza una representación geométrica para obtener el número de elementos y una aritmética. Los alumnos utilizan las representaciones sin establecer conexiones ni entre ellas ni con la estructura de la secuencia.

No

ANEXO B.3: **Episodio de Clase No 1 – Actividad Individual.**

PROBLEMA DE CLASE No 1

En una clase, en un taller de formación de profesores, el profesor Rojas propuso el siguiente problema:

Encuentre el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta x-1=0, y del punto cuyas

Algunos de los profesores manifestaron lo siguiente:

José: ¿Qué quiere decir equidistantes?

Arturo: ¿Cuántos puntos debo encontrar?

Graciela: La ecuación será una curva que corta a la recta x-1=0

Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones:

1. Resuelva el problema dado.
2. Cree un problema – pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).
3. Resuelva el problema – pre creado.

Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones:

1. Resuelva el problema dado.

SOLUCIÓN:

2. Cree un problema-pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA CREADO:

3. Resuelva el problema-pre creado.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CREADO:

SESIÓN 3

ANEXO C.1: **Presentación con diapositivas del modelo de demanda cognitiva adaptado para el objeto matemático de la parábola vista como lugar geométrico.**

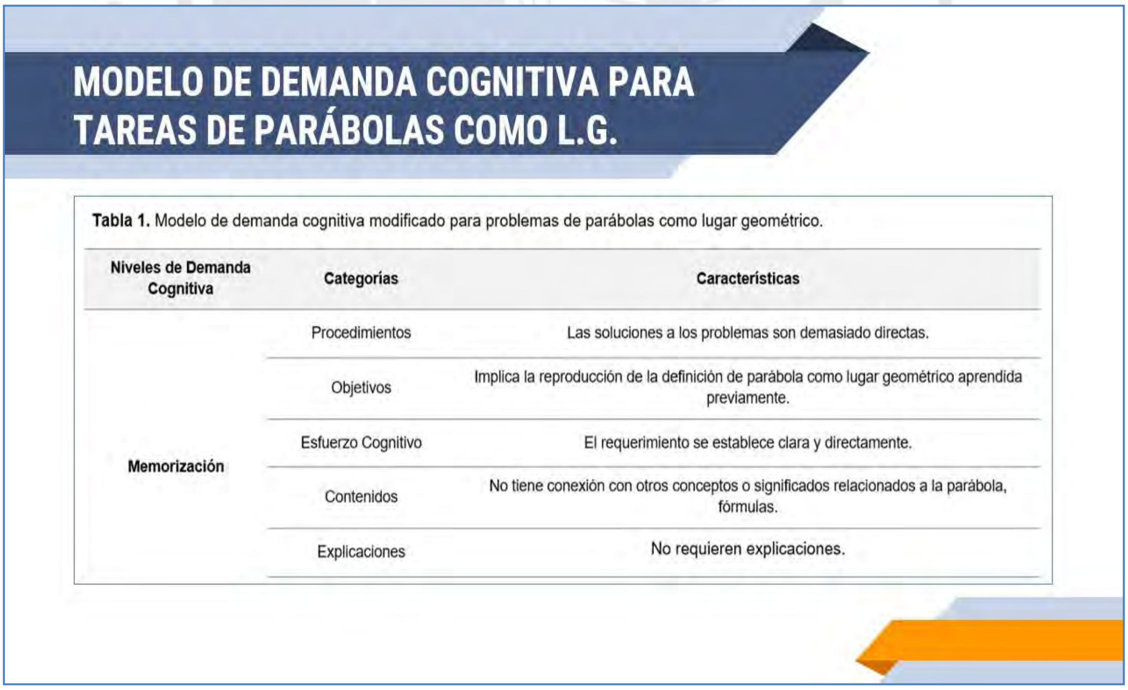


Tabla 1. Modelo de demanda cognitiva modificado para problemas de parábolas como lugar geométrico.

Niveles de Demanda Cognitiva	Categorías	Características
Memorización	Procedimientos	Las soluciones a los problemas son demasiado directas.
	Objetivos	Implica la reproducción de la definición de parábola como lugar geométrico aprendida previamente.
	Esfuerzo Cognitivo	El requerimiento se establece clara y directamente.
	Contenidos	No tiene conexión con otros conceptos o significados relacionados a la parábola, fórmulas.
	Explicaciones	No requieren explicaciones.

MODELO DE DEMANDA COGNITIVA PARA TAREAS DE PARÁBOLAS COMO L.G.

Procedimientos sin conexiones	Procedimientos	Los problemas son algorítmicos. El uso de la definición de parábola se requiere específicamente o es explícito a partir del enunciado del problema.
	Objetivos	Los problemas están enfocados a producir respuestas correctas, más que a desarrollar el entendimiento matemático.
	Esfuerzo Cognitivo	No requiere de mayor esfuerzo cognitivo para una solución exitosa. Existe claridad sobre el requerimiento y cómo obtenerlo
	Contenidos	No tiene conexión con otros conceptos o significados relacionados a la parábola; fórmulas, propiedades. No se requieren conocer las relaciones implícitas matemáticas en los problemas para resolverlos.
	Explicaciones	Sólo se enfocan en describir el procedimiento utilizado.
	Representaciones	Son muy directas e independientes y no requieren hacer conexiones entre las representaciones, ni con los conceptos de la parábola como lugar geométrico.

MODELO DE DEMANDA COGNITIVA PARA TAREAS DE PARÁBOLAS COMO L.G.

Procedimientos con conexiones	Procedimientos	Los problemas requieren una secuencia de operaciones algebraicas basadas en gráficos que revelan el uso de la definición de parábola como LG, en el contexto del problema. La solución no es la mera utilización de algoritmos.
	Objetivos	Los problemas están enfocados a desarrollar el entendimiento matemático.
	Esfuerzo Cognitivo	Se requiere el uso de la idea conceptual que subyace en los procedimientos para completar los problemas con éxito.
	Contenidos	Requieren conocer las relaciones implícitas matemáticas en los problemas para así poder resolverlos. Los profesores deben participar con ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos para completar las tareas con éxito.
	Explicaciones	Se hace uso de tratamientos y conversiones entre los registros algebraico y gráfico. Se centran en las relaciones subyacentes mediante el uso de ejemplos específicos.
	Representaciones	Requieren utilizar conexiones entre las representaciones, utilizando para ello, el concepto de parábola como lugar geométrico y esto conllevará a resolver los problemas con éxito.

MODELO DE DEMANDA COGNITIVA PARA TAREAS DE PARÁBOLAS COMO L.G.

Hacer Matemáticas	Procedimientos	No son algorítmicos, el proceso de resolución no es sugerido en el enunciado del problema.
	Objetivos	Los problemas están enfocados a desarrollar el entendimiento matemático, la profundización del concepto de la parábola como lugar geométrico y sus conexiones con otros objetos matemáticos
	Esfuerzo Cognitivo	Requieren un esfuerzo cognitivo considerable.
	Contenidos	Exigen que se debe acceder a conocimientos, contenidos, experiencias y hacer un uso adecuado de ellos y de sus interrelaciones, en la resolución de los problemas.
	Explicaciones	Exigen que se exploren y entiendan la naturaleza del concepto de la parábola como lugar geométrico y se expliciten las relaciones matemáticas subyacentes.
	Representaciones	Requieren utilizar conexiones, así como conversiones entre diferentes registros de representación, utilizando para ello, el concepto de parábola como L.G.

ANEXO C.2: Episodio de Clase No 2 – Actividad Grupal.

No

<u>PROBLEMA DE CLASE No 2</u>

En una clase en un taller de formación de profesores, el profesor Rojas propuso el siguiente problema:

Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta x-1=0, y del punto cuya coordenada es (7;2).

Algunos de los profesores manifestaron lo siguiente:

José: ¿Qué quiere decir equidistantes?

Arturo: ¿Cuántos puntos debo encontrar?

Graciela: La ecuación será una curva que corta a la recta x-1=0

Desarrollen en grupo las siguientes cuestiones: **(SE SUGIERE DE 2 PERSONAS)**

1. Compartir resultados y experiencias en torno a la actividad individual.

2. Cree un problema-pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA CREADO:

3. Resuelvan el problema-pre creado.

SOLUCIÓN:

No

ANEXO C.3: Episodio de Clase No 3 - Actividad Individual.

PROBLEMA DE CLASE No 3

En una clase en un taller de formación de profesores, el profesor Solari propuso el siguiente problema:

Sea ℓ la directriz de una parábola, tal como se muestra en la figura 32, y dos puntos A y B que pertenecen a dicha parábola, la distancia de dichos puntos hacia la recta son 5u y 8u respectivamente. Además, el foco de la parábola, el punto A y el punto B son colineales. Determine la ecuación de la parábola.

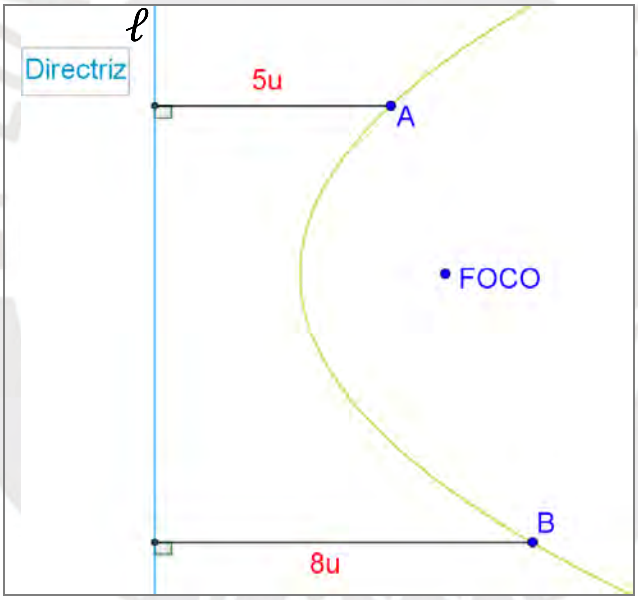


Figura 47. Problema del Episodio No 3.

Algunos de los profesores manifestaron lo siguiente:

José: ¿Qué quiere decir que los puntos A y B pertenezcan a la parábola?

Arturo: La condición de colineal, permite identificar el vértice de la parábola.

Graciela: ¿Qué contenido se requiere para resolver el problema con éxito?

Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones:

1. Resuelva el problema dado.

SOLUCIÓN:

2. Cree un problema-pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA CREADO:

3. Resuelva el problema-pre creado.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CREADO:

SESIÓN 4

ANEXO D.1: Evaluación Final

No

EVALUACIÓN FINAL

PROBLEMA DE EPISODIO DE CLASE No 4

En una clase en un taller de formación de profesores, el profesor Castillo propuso el siguiente problema:

Determine la ecuación de una parábola que pasa por los puntos A (7; 3), B (-1; -5), además las coordenadas del foco son (11; 0).

Algunos de los profesores manifestaron lo siguiente:

José: ¿Qué quiere decir que pasa por unos puntos?

Arturo: ¿Se puede conocer a partir del enunciado la ecuación de la parábola?

Graciela: ¿Se puede asumir que el vértice de la parábola es el origen de coordenadas?

Desarrolle individualmente las siguientes cuestiones:

1. Resuelva el problema dado.

SOLUCIÓN:

2. Cree un problema-pre del problema presentado (es decir, un problema que favorezca la comprensión y resolución del problema presentado).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA CREADO:

3. Resuelva el problema-pre creado

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CREADO: