

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



UN ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA CON
ESTUDIANTES DE INGENIERÍA MECÁNICA MEDIANTE UNA
SITUACIÓN PROBLEMA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

ANDRES COLLANTE HUANTO

ASESORA

KATIA VIGO INGAR

Abril, 2019

RESUMEN

En la presente tesis, realizamos un estudio de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) con estudiantes de ingeniería mecánica mediante una situación problema, justificamos este trabajo porque hemos revisado antecedentes de investigación que tienen como objeto matemático la EDO en donde se reportan dificultades que se presentan en su enseñanza y aprendizaje. Además, se presentan sílabos y mallas curriculares donde se aborda la EDO.

Diversas investigaciones señalan que los estudiantes frente a una EDO, hallan la representación algebraica de la solución mediante el uso de un método algebraico, pero presentan dificultades en hallar la representación gráfica de la solución a través de un método cualitativo. Esta dificultad está asociada a la enseñanza de la EDO desde el contexto algebraico. Enseguida planteamos el objetivo de analizar la contribución de una situación problema a la interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) realizada por estudiantes de ingeniería mecánica. El marco teórico utilizado en nuestra investigación son aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) que nos permite analizar una situación problema en el contexto de la ingeniería mecánica y como metodología usamos aspectos de la ingeniería didáctica que nos da el camino para desarrollar toda la tesis.

En esta investigación mostramos que el uso de un método cualitativo y la situación problema favorece a que los estudiantes hallen la representación e interpretación de la gráfica de las curvas solución de la EDOs. Para la obtención de la gráfica, los estudiantes movilizaron los significados de la derivada y para la interpretación, ayudó que la EDO esté vinculada a una situación problema en contexto de la ingeniería mecánica.

Palabras claves: Ecuación diferencial ordinaria, isoclinas, campo direccional y segmento tangente

ABSTRACT

This research, we made a study of the ordinary differential equation (ODE) with mechanical engineering students through a problem situation, we justify this work because we have reviewed research backgrounds that have the ODE as a mathematical object where difficulties are reported that arise in their teaching and learning. Further, syllabus and curricular meshes are presented where the EDO is considered.

Others research indicate that students in front of an ODE, find the algebraic representation of the solution by using an algebraic method, they have difficulties in finding the graphical representation of the solution through a qualitative method. This difficulty is associated with the teaching of ODE from the algebraic context. After that, we propose the objective of analyzing the contribution of a problem situation to the interpretation of solutions curves plotted in directional fields of ordinary differential equations (ODEs) made by students of mechanical engineering. The theoretical context used in our research are aspects of the Theory of Didactic Situations that allows us to analyze a problem situation in the context of mechanical engineering and as a methodology we use aspects of didactic engineering that gives us the path to develop the research.

In this research, we show that the use of a qualitative method and the problem situation contribute to the students finding the representation and interpretation of the graph of the solution curves of the ODEs. To obtain the graph, the students mobilized the meanings of the derivative and for interpretation, it helped that the ODE is linked to a problem situation in the context of mechanical engineering.

Keywords: Ordinary differential equation, isoclins, directional field and tangent segment

DEDICATORIA



Dedicado con mucho cariño a mi padre Victor y mi madre Guillermina, quienes me alentaron a culminar la maestría.

A mi esposa, Herminia, por su apoyo y comprensión en todo instante.

A mis hijos, Alejandro y María Fernanda, por ser la motivación para terminar esta investigación.

AGRADECIMIENTO

A la Dra. Katia Vigo Ingar, mi asesora de tesis, por su apoyo, exigencia, ánimo y asesoría constante a lo largo de esta investigación.

A la Dra. Jesús Flores Salazar por sus observaciones, que sin duda contribuyeron a la mejora de esta investigación.

A los miembros del jurado Dr. Gabriel Loureiro de Lima y Mg. Nelson Peñaloza Vara por sus aportes y observaciones en este trabajo de investigación.

A los Ing. Martin Casado, Ing. Uza Teruya y el Lic. Armando Venero por sus aportes y observaciones en la situación problema de este trabajo de investigación.

A la Universidad Nacional de Ingeniería por su apoyo en la elaboración del presente trabajo de investigación.

A la Universidad Nacional del Callao y a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía que participaron con entusiasmo en la presente investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus valiosas enseñanzas transmitidas durante las clases.

ÍNDICE

RESUMEN	i
ÍNDICE.....	v
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE CUADROS	xi
CONSIDERACIONES INICIALES	1
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA	3
1.1 Investigaciones de referencia.....	3
1.2 Justificación	14
1.3 Aspectos Teóricos.....	19
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación.....	26
1.5 Metodología de la investigación	27
CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO.....	33
2.1 Aspectos históricos de la Ecuación Diferencial Ordinaria.....	33
2.2 Ecuación diferencial de primer orden	38
2.3 Enseñanza de la ecuación diferencial de primer orden	52
CAPÍTULO III: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS.....	70
3.1 Escenario donde se desarrolla la Investigación.....	70
3.2 Sujetos de Investigación	70
3.3 Análisis de la situación problema	73
CONSIDERACIONES FINALES	118
REFERENCIAS	123
ANEXOS.....	126

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Dificultades presentes en el aprendizaje y la enseñanza de la EDO.	14
Figura 2. El desarrollo del curso de Matemática aplicada a la ingeniería en la malla curricular de la escuela profesional de Ingeniería Mecánica	16
Figura 3. Desarrollo del sílabo de Matemática aplicada a la ingeniería-FIME	17
Figura 4. El desarrollo del curso Ecuaciones Diferenciales Malla curricular.	17
Figura 5. Capítulos del sílabo de Ecuaciones Diferenciales-UNI	18
Figura 6. El desarrollo del curso Ecuaciones Diferenciales Malla curricular.	18
Figura 7: Desarrollo del sílabo de Cálculo Integral-PUCP	19
Figura 8. El triángulo didáctico	21
Figura 9. Interpretación cinemática	33
Figura 10. Curva C que separa los puntos A y B	34
Figura 11. Primer problema de Debaune	35
Figura 12. La catenaria diseñada por Leibniz.....	36
Figura 13. La catenaria y parábola.....	37
Figura 14. Definiciones de EDO y solución	39
Figura 15. Sistema de ecuaciones diferenciales	40
Figura 16. Problema de solución única	41
Figura 17. Solución única.....	41
Figura 18. Problema con múltiples soluciones	42
Figura 19. Múltiples soluciones	42
Figura 20. Esbozo gráfico	43
Figura 21. Ecuación diferencial autónoma	44
Figura 22. Ecuación diferencial de variable separable	44
Figura 23. Solución de una EDO variable separable	44
Figura 24. EDO de variable separable	45

Figura 25. Reducción a una ecuación lineal compleja	45
Figura 26. Ilustración del ejemplo 4	46
Figura 27. Definición de la función Lipschiziana	46
Figura 28. Lema de contracción	46
Figura 29. Prueba del Lema de contracción	47
Figura 30. Resultado del Lema de Contracción	47
Figura 31. Prueba del corolario 1.7	47
Figura 32. Teorema de Picard	48
Figura 33. Interpretación del teorema de Picard	48
Figura 34. Demostración del teorema de Picard	49
Figura 35. Continúa la prueba del teorema de Picard	49
Figura 36. Teorema de existencia y unicidad	50
Figura 37. Prueba del corolario 1.9	50
Figura 38. Teorema de Peano	50
Figura 39. Prueba del teorema de Peano	51
Figura 40. Ejemplo de una ecuación diferencial	53
Figura 41. Definición de ecuación diferencial	53
Figura 42. Definición de una EDO	53
Figura 43. Definición de una EDP	54
Figura 44. Definición de orden de una ecuación diferencial	54
Figura 45. Ecuación diferencial normal	55
Figura 46. Ejemplo de ecuación diferencial normal	55
Figura 47. Definición de una EDO lineal	55
Figura 48. Definición de solución de una EDO	55
Figura 49. Definición equivalente	56
Figura 50. Intervalo de definición	56

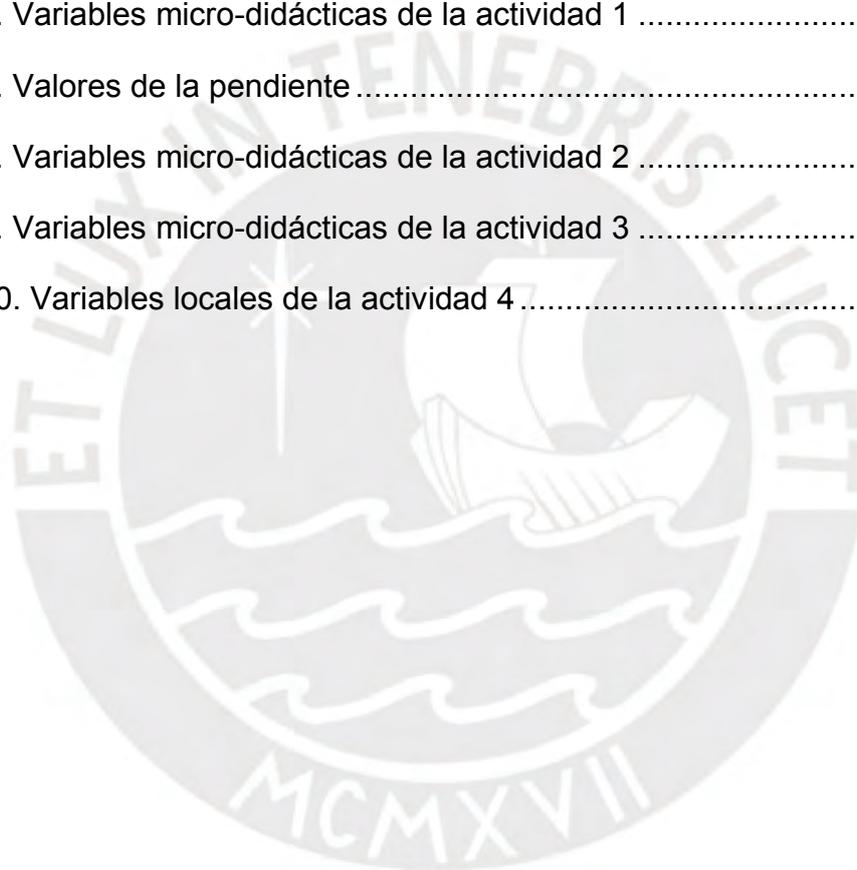
Figura 51. Verificación de una solución.....	57
Figura 52. Definición de curva solución.....	57
Figura 53. Función contra solución	58
Figura 54. Representación gráfica	58
Figura 55. Definición de solución implícita	59
Figura 56. Comprobación de una solución	59
Figura 57. Ejemplo de solución implícita y explícita.....	60
Figura 58. Familia de soluciones uniparamétricas.....	60
Figura 59. Familia de soluciones n-paramétricas	60
Figura 60. Solución definida por tramos	61
Figura 61. Soluciones particulares	61
Figura 62. Sistemas de ecuaciones diferenciales.....	62
Figura 63. Ejemplo de un sistema de EDO	62
Figura 64. Solución general	62
Figura 65. Problema de valores iniciales.....	63
Figura 66. EDO de primer orden y solución	63
Figura 67. EDO de segundo orden y solución	64
Figura 68. PVI tiene dos soluciones	64
Figura 69. Teorema de existencia y unicidad	64
Figura 70. Región R.....	65
Figura 71. Definición de modelo matemático	65
Figura 72. Modelo propagación de una enfermedad	66
Figura 73. Concepto de la derivada	67
Figura 74. Solución diferenciable	67
Figura 75. Pendiente de un elemento lineal	67
Figura 76. Elemento lineal en (2,3)	68

Figura 77. Las curvas solución siguen al campo direccional	68
Figura 78. Modelo de Maxwell	74
Figura 79. Actividades de la situación problema	78
Figura 80. Comportamiento del esfuerzo normal.....	80
Figura 81. Resorte y amortiguador.....	81
Figura 82. Subrayado de la pareja	84
Figura 83. Expresiones que identifica la pareja	84
Figura 84. La pareja identifica las preguntas de la actividad 1	85
Figura 85. Representación del esfuerzo total realizado por la pareja	86
Figura 86. Modelo matemático obtenido por la pareja.....	86
Figura 87. Solución algebraica realizada por la pareja.....	86
Figura 88. Esbozo del esfuerzo realizado por la pareja	87
Figura 89. Vector tangente.....	90
Figura 90. Segmento tangente.....	90
Figura 91. Subcuadrículas	90
Figura 92. Trazado de segmentos tangentes	91
Figura 93. Segmento de pendiente 2	93
Figura 94. Segmento tangente de pendiente 2	93
Figura 95. Segmento de pendiente $-4/3$	94
Figura 96. Segmento tangente de pendiente $-4/3$	94
Figura 97. Segmento tangente de pendiente -1	95
Figura 98. Subrayado de la actividad 2	96
Figura 99. La EDO en las nuevas variables	97
Figura 100. Cálculo de las pendientes en puntos de la recta $x = 1$	98
Figura 101. Cálculo de las pendientes en puntos de la recta $y = 3/2$	98
Figura 102. Cálculo de las pendientes en los puntos de la recta $y = 3$	99

Figura 103. Segmentos tangentes de la actividad 2	100
Figura 104. Conclusiones de la actividad 2	100
Figura 105. Curvas que se cortan	102
Figura 106. Solución de la actividad 3.....	103
Figura 107. Subrayado en la actividad 3	104
Figura 108. Primera formulación de la actividad 3.....	105
Figura 109. Las pendientes en la recta horizontal	106
Figura 110. El campo direccional y la recta tangente	106
Figura 111. Representación de la derivada.....	106
Figura 112. Curvas solución tangentes a los segmentos	107
Figura 113. La pareja resuelve la actividad 3	107
Figura 114. Curvas soluciones de la actividad 4	111
Figura 115. Subrayado en la actividad 4	113
Figura 116. Nuevas condiciones iniciales.....	113
Figura 117. Modelos de dos sistemas de amortiguación.....	113
Figura 118. Vector tangente para el sistema 1	114
Figura 119. Vector tangente para el sistema 2	114
Figura 120. Curvas solución para la actividad 4	115
Figura 121. Gráfica del esfuerzo en papel bond	115
Figura 122. Primera formulación de la actividad 4.....	115
Figura 123. Segunda formulación de la actividad 4	116

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Contenido del capítulo 1 del libro formal	39
Cuadro 2. Contenido del capítulo 1 del libro didáctico	52
Cuadro 3. Contenido del capítulo 2	66
Cuadro 4. Variables macro-didácticas o globales	71
Cuadro 5. Descripción de la situación problema	72
Cuadro 6. Variables micro-didácticas de la actividad 1	80
Cuadro 7. Valores de la pendiente	89
Cuadro 8. Variables micro-didácticas de la actividad 2	92
Cuadro 9. Variables micro-didácticas de la actividad 3	103
Cuadro 10. Variables locales de la actividad 4	111



CONSIDERACIONES INICIALES

Las investigaciones de Perdomo (2010), Dullius (2009), Arslan (2005) y Barros (2008) refieren que la enseñanza de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) viene sucediendo de modo que se concentra una mayor atención en las soluciones analíticas a partir de manipulaciones algebraicas de resolución, lo que puede contribuir a que los alumnos no perciban el potencial de esas ecuaciones y su importancia como herramienta matemática para resolver problemas relacionados con situaciones de la realidad, lo cual podría ser causante que los alumnos no muestren interés en aprender ese contenido. Esto ha provocado reflexiones sobre el tipo de enfoque de enseñanza de EDO que puede favorecer el aprendizaje de los alumnos.

Además, consideramos que la dificultad identificada en los estudiantes de ingeniería mecánica en hallar la representación gráfica de la solución de una EDO, utilizando métodos cualitativos para interpretar dicha gráfica, se deba a que se da prioridad a la enseñanza de la EDO desde el contexto algebraico. Asimismo, consideramos que la didáctica de la matemática nos proporciona el marco teórico y la metodología adecuada, planteamos diseñar una situación problema relacionada a la EDO.

El objetivo general es analizar la contribución de una situación problema a la interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de ecuaciones diferenciales (EDOs) realizada por estudiantes de ingeniería mecánica. Para lograr este objetivo estudiaremos el análisis que los estudiantes de ingeniería mecánica realizan en la situación problema respecto al comportamiento del esfuerzo normal en el modelo del sistema de amortiguación, después investigaremos las estrategias que los estudiantes de ingeniería mecánica realizan en la situación problema para identificar las isoclinas y para graficar algunas curvas solución utilizando el campo direccional de la EDO, luego estudiaremos las estrategias que los estudiantes de ingeniería mecánica desarrollan en la situación problema para la Interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de las EDOs del sistema de amortiguación. El contenido del trabajo está estructurado como sigue:

En el capítulo I, desarrollamos la problemática de investigación donde presentamos investigaciones relacionadas a la EDO, la justificación de nuestra investigación, y los

aspectos teóricos tomando como referencia la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), tanto para la elaboración y realización de la secuencia de enseñanza como para el análisis de los resultados, además presentamos la pregunta y objetivos de la investigación, y los aspectos metodológicos tomados de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), pues consideramos que esa metodología de investigación contempla las demandas de la complejidad del contexto de aula, además de permitir la validación de las hipótesis por la confrontación entre los análisis *a priori* y, *a posteriori*, además de favorecer el realineamiento de las actividades durante el desarrollo de las mismas.

En el capítulo II, presentamos el análisis preliminar donde mostramos aspectos históricos de la EDO, con el objetivo de ubicar el objeto de estudio en el campo del conocimiento humano, estudio matemático de la EDO de primer orden empleando un libro teórico de matemáticas, y la revisión de un libro didáctico de consulta para los estudiantes de ingeniería.

El capítulo III, explicamos el experimento y análisis, mediante la descripción del escenario donde se desarrolla la investigación, descripción de los sujetos de investigación y análisis de la situación problema. Finalmente, presentamos las consideraciones finales en base a los resultados obtenidos del capítulo III.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo mostramos diferentes estudios e investigaciones realizados en la enseñanza y aprendizaje de la EDO, concretamente su aplicación en la resolución de problemas de ingeniería. Estos estudios proporcionan un panorama de las investigaciones realizadas hasta el momento respecto a EDO. Seguidamente presentamos la justificación, aspectos teóricos, la formulación de la pregunta y los objetivos de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Para situar la problemática de esta investigación, esta sección es dedicada a describir y analizar el panorama de las principales investigaciones respecto a la enseñanza y aprendizaje de la EDO en Perú y otros países. Buscamos discutir y comparar qué resultados relevantes son encontrados, referentes a las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la EDO, específicamente, respecto a su solución cualitativa e interpretación. Puesto que, según Artigue (1992), en la enseñanza de las EDOs se dedica una gran cantidad de tiempo a desarrollar métodos para resolver ecuaciones bien clasificadas, y se da muy poco énfasis a la representación geométrica de las soluciones, o al análisis de los resultados. Un enfoque así, para la investigadora, da lugar a que en las mentes de los estudiantes se produzca una imagen restringida e insatisfactoria del comportamiento de las soluciones de una EDO.

Es por esto que, en esta sección mostramos trabajos elaborados por diversos investigadores los cuales incorporan la geometría de la solución de una EDO. Estas investigaciones permitirán tener un panorama de estudios realizados en relación a dicho objeto, para conocer las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las EDOs. Pues, de esta manera sabremos la situación de lo investigado hasta el momento respecto al objeto matemático en estudio.

Priorizamos tesis doctorales y de maestría buscados en los repositorios virtuales de universidades de Perú, Brasil, Argentina, España y Francia, artículos publicados en revistas científicas indexadas en los últimos catorce años dado que, en los últimos diez años existían pocas investigaciones relacionadas con el objeto de estudio concretamente, con la solución cualitativa de la EDO. La búsqueda fue hecha por medio de palabras clave relacionadas con el objeto de investigación.

Dentro de las investigaciones encontradas, los resultados relevantes fueron descritos y analizados a continuación.

El trabajo de Perdomo (2010) tiene dos etapas: la primera, es analizar los conocimientos que los estudiantes universitarios de las licenciaturas de Matemáticas y Física presentan al contestar preguntas y solucionar problemas vinculados con las EDOs; la segunda, realizar el diseño y el desarrollo en la clase de un Módulo de Enseñanza dirigido a alumnos del primer curso de la licenciatura en Química en una universidad española.

La autora utiliza como referencial teórico un marco conceptual formado por elementos de diferentes teorías, como aquellas que describen los elementos que intervienen en su aprendizaje y aquellas que permiten describir la comprensión de los estudiantes. En el primer caso considera a Kilpatrick (como se cita en Perdomo, 2010) y en el segundo caso a Duval (como se cita en Perdomo, 2010). La teoría cognitiva de Kilpatrick (como se cita en Perdomo, 2010), propone cinco conceptos que los estudiantes deben desarrollar como parte del aprendizaje de las matemáticas y que serían los aspectos cognitivos de la enseñanza: Comprensión conceptual, fluidez con los procedimientos, competencias estratégicas, razonamiento adaptivo y predisposición productiva. Para Perdomo (2010), estos conceptos para que sean útiles deben estar conectados, lo cual es importante para el desarrollo del conocimiento.

Según la investigadora estos cinco componentes se consideran para la elaboración de módulos de enseñanza. También, permiten analizar el conocimiento matemático y la competencia matemática de los estudiantes. En consecuencia, constituyen parte fundamental en las dos etapas de esta investigación. Sin embargo, no especifica puntualmente la metodología de su investigación, pero a nuestro entender utiliza la metodología cualitativa y se limita a describir el procedimiento metodológico. Luego, la investigadora describe los componentes seleccionados para diseñar el Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO en el primer curso de la licenciatura en Química: la Resolución de Problemas, Interacciones entre alumnos y el uso de Tecnología.

La autora refiere que en la primera etapa de investigación participaron veintiún estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas y Física. En el momento en que se

desarrolló la investigación, los estudiantes de ambas licenciaturas habían recibido la formación relativa al estudio de las EDO de primer y segundo orden. Perdomo (2010) señala que los profesores que impartieron estas materias eran completamente ajenos a esta investigación. Los instrumentos para recabar la información fueron: un cuestionario de once preguntas sobre ecuaciones diferenciales y una entrevista.

La autora refiere que el cuestionario se aplicó en forma individual cuando ya habían cursado la mitad de la asignatura, no intervino el profesor del curso y se evaluó contenidos desarrollados en clase como por ejemplo solución general y particular de una EDO, el campo de direcciones asociado a una EDO. Las entrevistas se elaboraron tomando en cuenta un primer análisis realizado a las respuestas de los estudiantes al cuestionario. La estructura general es la de una entrevista basada en tareas como se puede ver en Goldin (como se citó en Perdomo, 2010), consistió en responder a seis preguntas que fueron tomadas en el cuestionario y a otras cuatro.

La investigadora afirma que, en la primera etapa, la enseñanza de las EDO basada en la definición formal, clasificación de los tipos de ecuaciones diferenciales y en la resolución algebraica de las mismas lleva, pocas veces, a los estudiantes a movilizar representaciones gráficas de funciones, propiedades de las funciones y sus derivadas, integración, métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, pero no los utilizan de manera articulada para resolver problemas. También, señala que la enseñanza de EDO a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no brinda las herramientas necesarias para resolver problemas en un contexto diferente a los problemas resueltos en aula.

Asimismo, la autora señala que otra dificultad presente en el estudiante es el asignar únicamente un significado al concepto de solución de una EDO, esto es resolvían la ecuación y comparaban la expresión obtenida con la función dada o derivaban la función candidata a solución de la EDO y la sustituían en la ecuación, sin considerar ambas opciones. Además, asevera que presentan dificultad en relacionar el concepto de EDO y la derivada de una función como, por ejemplo, en la pregunta P7 del cuestionario de Ecuaciones Diferenciales, se pide determinar cuál es la población en un instante de tiempo determinado, sabiendo que su comportamiento responde a la ecuación $P' = K$, donde k es un valor constante positivo. Luego, la investigadora,

refiere que la pregunta no fue respondida por la mayoría de estudiantes, que hubiera sido respondida fácilmente interpretando a P' como la derivada de una función.

Perdomo (2010), asevera que los estudiantes tienen las siguientes dificultades: relacionar el sistema modelado con la EDO obtenida, a pesar que el modelo ya estaba propuesto de antemano; reconocer diferentes significados de la solución de una EDO, como por ejemplo solución general y solución particular; recordar los diferentes significados de la derivada, como la regla de la cadena; los estudiantes tienden a no utilizar la representación gráfica, especialmente cuando es un tema nuevo como por ejemplo el campo de direcciones relacionado con la EDO y establecer vínculos entre distintos tipos de representaciones, como por ejemplo de la representación algebraica a la representación gráfica.

Respecto a la segunda etapa, la autora inició la investigación con la elaboración del Módulo de Enseñanza, tomó en cuenta los objetivos planteados para esta etapa. Además, dicho Módulo debería contribuir a reafirmar los diferentes significados de la derivada, vincular la derivada de una función con la EDO. Asimismo, los problemas planteados estaban en contexto con la carrera profesional de los estudiantes. Según la autora, se realizaron las actividades con apoyo de la calculadora Voyage 200 y participaron quince estudiantes de un primer curso de la licenciatura en Química.

La investigadora afirma que el trabajo con los estudiantes se realizó en trece sesiones de clase, al final del segundo semestre del curso. De las trece sesiones, la primera se dedicó a la presentación de la Voyage 200, la segunda y la última a responder de forma individual el cuestionario. Así, el módulo de enseñanza fue desarrollado en 10 sesiones. Luego, se realizaron entrevistas a seis estudiantes que fueron elegidas tomando en cuenta sus respuestas a las preguntas del cuestionario y su trabajo en pareja durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza.

La autora señala que hay una discontinuidad de aprendizaje entre las ecuaciones algebraicas y las ecuaciones diferenciales, plantea realizar la investigación de cómo enseñar el concepto de EDO a través del concepto ecuación algebraica. Asimismo, asevera que, a partir de la aplicación de este Módulo de Enseñanza, pudo observar que las funciones constantes pueden ser fuentes de error en la solución de las EDO, debido a que, algunos estudiantes no toman en cuenta a la función constante para modelar situaciones en que la variación es nula. Además, la investigadora afirma que

los estudiantes en la primera etapa presentan dificultades en el proceso de llevar el lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa, esto también se evidencia al aplicar el Módulo de enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.

Para Perdomo (2010), la construcción del concepto de EDO relacionada con el concepto de derivada, se realiza al aplicar el Módulo de enseñanza, que se elabora utilizando elementos de diferentes teorías. Asimismo, la autora considera que el uso de la tecnología como la calculadora Voyage 200 permite que los estudiantes focalicen su atención en los procesos de razonamiento, reflexión y resolución de problemas, además, sean protagonistas y responsables de su propio aprendizaje.

La investigación de Dullius (2009) tiene por objetivo identificar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, elaborar una propuesta pedagógica que ayude en la superación de las dificultades identificadas, percibir la importancia del contenido para su formación, estudiar las bondades del uso de recursos computacionales en el proceso enseñanza-aprendizaje de las EDOs y, estudiar el aporte de la dialéctica entre el profesor-alumno-material didáctico, en el aprendizaje significativo. Participan en la investigación alumnos de los cursos de Química Industrial e Ingeniería Ambiental, Ingeniería de la producción, Ingeniería de la Automatización y Control, Ingeniería de la Computación del Centro Universitario UNIVATES (Brasil), matriculados en la asignatura de Cálculo III.

La investigadora usa como marco teórico la Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel y la Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky. La primera teoría, consiste en que los estudiantes asimilen de modo significativo un contenido matemático. La segunda, edifica su teoría a partir del desarrollo cognitivo del individuo como resultado de un proceso social-histórico-cultural, asimismo, a los saberes previos del estudiante los denomina subsumidores. Además, la metodología usada por la autora es la metodología cualitativa y en su desarrollo se limita a describir el procedimiento metodológico. En sus actividades usa la tecnología como el *software Powersim* y la Planilla de Cálculo de OpenOffice.

La autora, divide al estudio realizado en cuatro partes. En primer lugar, elabora un Estudio Preliminar, que consta de una entrevista, a dos profesores de física y a dos profesores de matemáticas. Además, toma un cuestionario y un diario de campo, a 34 estudiantes del curso Ciencias Exactas. En esta parte, la autora tiene el propósito de

identificar las dificultades de aprendizaje de las EDO. En segundo lugar, diseña el Estudio 1, que consta de un cuestionario, entrevista, guías de actividades y diario de campo, a 59 estudiantes de los cursos de Ingenierías y Química Industrial. En tercer lugar, elabora el Estudio 2, el cual está formado por un cuestionario, entrevista, guías de actividades, diario de campo, test inicial y final de conocimientos, a 31 alumnos de los cursos de Ingenierías y Química Industrial. En tercer lugar, diseña el Estudio 3, se realiza un cuestionario, entrevista, guías de actividades, diario de campo, test inicial y final de conocimientos, a 60 alumnos de los cursos de Ingenierías y Química Industrial.

Según Dullius (2009) el estudio preliminar realizado arrojó como resultado que los estudiantes presentan deficiencias en contenidos de matemática como por ejemplo sistemas lineales, integrales y derivadas. Además, asevera que los estudiantes tienen problemas con la interpretación de la derivada, concepto que está vinculado con la EDO. Así pues, afirma que los estudiantes no aceptan con facilidad a las funciones como solución de una EDO, debido a que están familiarizados únicamente a ver a los números como la solución de una ecuación algebraica. Asimismo, considera que la constante de proporcionalidad en la EDO es un número sin unidades, lo cual es un error. Además, manifiesta que los estudiantes le dan más importancia a la representación algebraica de una función que a la representación gráfica y numérica. Inclusive, sostiene que no comprenden el vínculo entre la EDO y el sistema modelado.

La investigadora, asevera que usualmente la enseñanza tradicional del tema de ecuaciones diferenciales empieza a partir de su definición, luego se presentan técnicas de análisis para su solución. Además, se abordan algunas aplicaciones, recogidas de los libros de texto. La prevalencia de los métodos de enseñanza tradicional frente a las alternativas más innovadoras, como por ejemplo uso de una calculadora o computadora, se debe a diversos motivos, como describe Moreno y Azcárate (como se cita en Dullius, 2009), entre los que tienen más relevancia, según los autores, son el confort de los profesores y la apatía por la enseñanza. En general, según Moreno y Azcárate (como se cita en Dullius, 2009), los profesores prefieren responsabilizar del fracaso de la enseñanza a sus estudiantes, por sus actitudes y su poca preparación matemática.

La autora, afirma que los estudiantes tienen dificultad para percibir que un problema se puede plantear de diferentes formas, por ejemplo, mediante el uso de un método

analítico para hallar la solución de una EDO o por medio del uso de la tecnología. También, manifiesta que a pesar de haber trabajado un semestre el método cualitativo para resolver una EDO, los estudiantes aun preferían usar un método analítico para hallar la solución.

Dullius (2009), refiere que los estudios indican que la metodología dominante en el contexto de enseñanza de ecuaciones diferenciales está fuertemente orientada a determinar la solución analítica lo que ocasiona un aprendizaje mecánico, sin que el alumno perciba su potencial y su importancia como una herramienta matemática para resolver problemas prácticos. En los métodos de enseñanza tradicional: prevalece hallar la solución analítica de una EDO, sobre la solución gráfica o numérica, el profesor proporciona al estudiante la información del tema matemático a través de clases magistrales y en las clases no se utilizan la tecnología para resolver EDO.

Según Moreno y Azcárate (como se cita en Dullius, 2009) los métodos de enseñanza tradicional siguen vigentes. En primer lugar, los profesores manifiestan que los estudiantes aprenden por imitación y memorización, además tienen escaso conocimiento matemático, escaso raciocinio y creación. En segundo lugar, una nueva forma de enseñar usando tecnología y problemas en contexto implicaría que a los profesores les tomaría más tiempo en preparar sus clases.

Según la investigadora, el uso de tecnología en las actividades motivó a los estudiantes a aprender y facilitó la visualización y resolución numérica de los problemas, pero reduce el tiempo para efectuar las soluciones analíticas y en su desarrollo presentaban falta de habilidades matemáticas básicas como derivar e integrar. Además, según la autora permitió hacer simulaciones con el *software Powersim* en poco tiempo y quedaban más motivados al trabajar con problemas vinculados a su carrera profesional.

El trabajo de Arslam (2005) tuvo por objetivo estudiar la posibilidad de realizar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo en una clase de Terminal S (último año de la escuela secundaria, modalidad científica) en Francia, donde ya enseñaban el tema desde un enfoque algebraico y numérico.

Enseguida, el autor elaboró un estudio histórico de las ecuaciones diferenciales y presentó tres modos de resolución de las EDO: algebraico, numérico y cualitativo. Tras una comparación didáctica de los mismos, eligió la resolución cualitativa y

justificó esta elección. Luego, presentó las hipótesis y preguntas de investigación. Además, utiliza como marco teórico La Teoría de los Campos conceptuales y la Teoría de registros de representación semiótica y como metodología la ingeniería didáctica. Arslam (2005) muestra los diferentes registros que se pueden utilizar para la construcción de una ingeniería para una clase Terminal. Luego, presentó una breve descripción del enfoque cualitativo en los programas de enseñanza.

El investigador realizó un estudio sobre el lugar que ocupan las ecuaciones diferenciales en el programa Terminal S. Además, con el fin de comprender mejor la evolución de la enseñanza de las EDO, tomó como referencia los programas escolares actuales y anteriores. También, examinaron investigaciones realizadas para conocer nuevos conceptos asociados al enfoque cualitativo. Para finalizar, se analizaron cuatro libros de textos sobre EDO, dos representaban a programas anteriores y dos a programas actualizados.

Seguidamente, efectuó un análisis *a priori* de las actividades propuestas. Luego, elaboró un análisis *a posteriori* y después mostró resultados de las actividades referidos a los estudiantes. Estos dieron a conocer que algunos estudiantes tienen dificultad en distinguir la recta tangente y la solución de una EDO. Incluso, una tendencia hacia lo algebraico puede ser un obstáculo para la enseñanza del enfoque cualitativo en principiantes. También en la investigación, el autor abordó y afirmó la importancia del tema de modelamiento.

La investigación de Barros (2008), tiene por objetivo construir una metodología para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, proporcionando un mayor entendimiento de los significados de la derivada como por ejemplo la tasa de variación, la investigación trabaja con modelamiento, utiliza la metodología cualitativa y hace uso de la tecnología, el *software Maple*.

El investigador plantea la siguiente pregunta ¿Cómo la ecuación diferencial con la resolución de problemas e iniciación al modelado en ciencias complementa el aprendizaje de la derivada, reafirmandola como tasa de variación? Para el autor esto es una preocupación pues en sus estudios de pregrado no tiene mucho contacto con las EDOs. Sin embargo, al impartir clases en la Universidad Estatal de Maranhão, observó que las Ecuaciones Diferenciales pueden ser trabajadas como una disciplina, teniendo como principal objetivo, la aplicación de los conceptos de tasa de variación

aprendidos en el Cálculo Diferencial, con resolución y formulación de problemas e iniciación al modelado de fenómenos de las ciencias. Barros (2008) asevera que la metodología utilizada no posibilitaba que los alumnos alcancen este objetivo, esto lo llevó a reflexionar sobre el trabajo con ecuaciones diferenciales, buscando soluciones metodológicas para fortalecer desempeño de los alumnos en esa disciplina.

El autor refiere que la disciplina Ecuaciones Diferenciales debe ser menos abstracta en su enseñanza y más aplicada, dando oportunidad al alumno, de participar en la construcción de conocimientos, a través del modelado matemático. Para el autor su investigación tiene como objetivo principal mostrar cómo la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales puede cimentar el entendimiento del concepto de derivada en el estudio de fenómenos de las ciencias, a través de tasa de variación. Según el investigador los sujetos de estudio fueron los estudiantes del curso de Licenciatura de Matemáticas de una universidad de Brasil, que llevaban el curso Ecuaciones Diferenciales en los períodos de 2007.1 y 2007.2.

Según el investigador se elaboraron tres actividades y una cuarta donde se utilizó el *software Maple*, la aplicación de esas actividades se realizó de tal forma que el estudiante fue llevado a modelar por intuición y aplicar los conocimientos adquiridos en ciencias y cálculo. El investigador organizó la clase 2007.1 en 15 duplas, y la de 2007.2 en 13 duplas, para facilitar la interacción y discusión de las actividades. El autor acompañó en el desarrollo de las actividades con pequeñas intervenciones en los momentos de sociabilización.

Los estudiantes de dicho estudio tienen las siguientes dificultades: En primer lugar, interpretar el texto de la actividad. En segundo lugar, elaborar una EDO que describa el problema planteado. En tercer lugar, graficar la solución de la actividad propuesta. En cuarto lugar, determinar las variables que intervienen en el proceso a modelar como por ejemplo tiempo, velocidad, aceleración etc.

Para el investigador, la enseñanza tradicional influye en el proceso de resolución y la elaboración de modelos matemáticos basados en las EDOs, pues el estudiante recurre más a la memoria y algoritmos que el ejercicio de pensar en las matemáticas. También, afirma que la metodología utilizada en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, debe cambiar para lograr una educación basada en el pensamiento crítico reflexivo. Asimismo, según el investigador, para los estudiantes un problema

de EDO está asociado a una solución analítica, lo que dificulta un análisis cualitativo del fenómeno. Además, Barros (2008) sostiene que las interacciones entre los estudiantes y profesor-investigador, permiten una mejor comprensión de los conceptos, lo que facilita al estudiante hacer nuevos descubrimientos, especialmente en la etapa de socialización de los resultados de las actividades de investigación.

El autor refiere que la tecnología es una herramienta que facilita el proceso de investigación, donde se puede graficar la solución, determinar la solución numérica de una EDO y algunas veces tener la solución analítica. La expectativa es que la utilización de la tecnología posibilite al estudiante un análisis más completo, riguroso y con profundidad en la resolución de problemas vinculados a las EDOs.

La investigación realizada por Zang, Metzen, y León (2015) tiene por objetivos estudiar en qué medida los estudiantes recurren a conocimientos básicos para la solución de situaciones problemáticas que usan las EDO, examinar las estrategias que utilizan en la resolución de problemas, los obstáculos más comunes a los que se enfrentan y elaborar propuestas de enseñanza que permitan reafirmar sus saberes previos, haciéndolos evolucionar hacia conocimientos nuevos. Las autoras usan como marco teórico aspectos de la TSD, usando como metodología la ingeniería didáctica. La investigación se llevó a cabo en las Facultades de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQN) y de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad Nacional de Misiones (UNM), Argentina.

Las autoras observaron y analizaron dos clases del curso de Análisis IV en el año 2012. Dicho curso se dicta en las carreras de Profesorado de Matemáticas y Profesorado de Física de FCEQN. Las edades de los alumnos varían entre 20 y 24 años.

Las investigadoras, observan la primera clase del curso donde se plantea un problema relacionado al modelado utilizando una EDO de primer orden, de manera que la ecuación diferencial que representa el fenómeno se presenta implícitamente en el enunciado. Según las investigadoras, la segunda lección observada, se da después que los alumnos ya habían cursado la mitad del curso, el tema que se trató fue sistemas de EDO de primer orden, se presentó un problema de una especie depredadora que convive con otra especie que es la presa (modelo Lotka-Volterra).

Según Zang, *et al.* (2015), los alumnos tienen dificultad en obtener la EDO que modele una situación didáctica, según Artigue (como se cita en Zang et al, 2015) tienen dificultad en la comprensión de temas de cálculo, como por ejemplo funciones, según Moreno (como se cita en Zang et al, 2015) tienen dificultad de abordar el problema mediante un tratamiento cualitativo y numérico, el primero a través de una representación gráfica, el segundo está vinculado a la solución aproximada.

Las investigadoras afirman: En primer lugar, en los textos se explica la elaboración de modelos matemáticos de ciertos fenómenos, ya que desarrollar un modelo matemático para las ciencias experimentales o sociales requiere tiempo y gran conocimiento científico. En segundo lugar, señalan que los estudiantes que participaron de las actividades no recurren de forma inmediata a sus conocimientos de derivada y función exponencial. En tercer lugar, afirman que el proceso de modelado no se desarrolla en forma instantánea, se requiere tiempo de las clases para el estudio y análisis. En cuarto lugar, mencionan que las actividades de este tipo permiten al estudiante compartir ideas, elaborar conjeturas, escuchar y debatir, por último, formular una propuesta grupal. En quinto lugar, refieren que este tipo de actividades incrementa el interés de los alumnos y reafirman contenidos matemáticos desarrollados en cursos anteriores. Asimismo, la intervención del profesor en las actividades puede afectar para bien o mal los resultados del trabajo.

Pinto y Lima (2017) presentan un avance de una tesis doctoral en desarrollo cuyo objetivo es discutir la enseñanza y el aprendizaje de EDOs lineales de 1ª y 2ª orden en un curso de Ingeniería Mecánica, bajo la óptica de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias. Además, afirman que en el trabajo están utilizando como base teórica, a las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC) y están usando la metodología cualitativa.

Según los investigadores refieren que los estudiantes presentan dificultades relacionadas al aprendizaje y aplicación de las EDO en el contexto de las Ingenierías. Uno de los factores que posiblemente contribuye al recurrente fracaso de los estudiantes en esta disciplina, es la frecuente desconexión con que los conceptos del Cálculo son trabajados en relación a sus aplicaciones en la Ingeniería.

Para los autores como Camarena, Javaroni y Dullius (como se cita en Pinto et al, 2017) en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales la metodología predominante

es aquella enfocada en la resolución de ejercicios, con énfasis en métodos y técnicas analíticas, llevando al estudiante a trabajar con el contenido de forma mecánica y sin interpretación o comprensión.

Pinto y Lima (2017) refieren que los objetivos de la tesis doctoral es el desarrollo de la secuencia de enseñanza contextualizada, para que el estudiante al desarrollarlo adquiriera el conocimiento de la EDO.

Los investigadores Perdomo (2010), Dullius (2009) y Barros (2008) en primer lugar, identifican las dificultades que presentan los estudiantes, en segundo lugar, utilizan la tecnología como una herramienta para superarlas. A continuación, mostramos las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la EDO en la figura 1.



Figura 1. Dificultades presentes en el aprendizaje y la enseñanza de la EDO.

Los trabajos revisados dan aportes para fijar el foco de investigación, en identificar el problema que se desea investigar y la formulación de la pregunta de investigación, así como los marcos teóricos y metodológicos que permitirá responder y realizar el análisis propio de los resultados.

Con respecto a ello, presentamos la justificación, basados en los antecedentes explicados y otros documentos formales de diferentes instituciones como el plan de estudios y los sílabos relacionados con la enseñanza de la EDO en tres universidades del Perú.

1.2 Justificación

En la presente sección señalaremos las razones por las cuales realizamos esta investigación y sus aportes al área de la Educación Matemática.

Según Camarena (2002), cualquier ciencia para estar sustentada científicamente acude a su representación matemática o matematización, es decir, la matemática es fundamental para cualquier ciencia que quiera cimentarse teóricamente. En otras palabras, trabajar la ingeniería científicamente requiere de ser descrita matemáticamente. En ese sentido la autora afirma que la matemática es una herramienta de apoyo a la ingeniería y materia formativa para los que la estudian. Motivo por el cual, el estudio de EDO es necesario no solo para las carreras de ingeniería sino para el área de Educación Matemática.

Perdomo (2010) afirma que los estudiantes presentan dificultad en relacionar el concepto de EDO y la derivada de una función como, por ejemplo, determinar cuál es la población en un instante de tiempo determinado, sabiendo que su comportamiento responde a la ecuación $P' = k$, donde k es un valor constante positivo. Asimismo, indica que la pregunta no fue respondida por la mayoría de estudiantes, la cual hubiese sido resuelto fácilmente sabiendo el significado de la derivada de una función. Además, según Dullius (2009), los estudiantes tienen problemas con la interpretación de la derivada, concepto que está vinculado con las EDO. Así pues, afirma que los estudiantes no aceptan con facilidad a las funciones como solución de una EDO, debido a que están habituados a ver números como solución de una ecuación algebraica.

Asimismo, para Barros (2008), su investigación tuvo por objetivo principal mostrar cómo la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a través del modelado puede reafirmar el entendimiento del concepto de derivada en el estudio de fenómenos de las ciencias, a través de la tasa de variación. También, Zang, Metzen, y León (2015) señalan que los estudiantes participantes de las actividades no recurren de forma inmediata a sus conocimientos de derivada. Por todo lo expuesto, observamos que la EDO y la derivada están íntimamente vinculados, por lo que amerita investigar cómo se relaciona una EDO con la derivada de una función. Además, según Perdomo (2010), Dullius (2009), y Arslan (2005) y Barros (2008) debido a la enseñanza tradicional, es decir, dar la definición de la EDO, clasificar las EDOs, presentar técnicas para resolver las diferentes EDOs sin usar tecnología, es que los estudiantes manejan más los procedimientos algebraicos para hallar la solución analítica de una EDO, que va en desmedro de que ellos hallen la solución gráfica y la solución numérica. Además, según Perdomo (2010), el uso de la calculadora Voyage 200

permite obtener la solución numérica, solución gráfica y solución analítica, que en muchos casos es difícil de obtener, por lo que se concluye que el uso de la tecnología es importante.

En este sentido, las EDOs son un tema pertinente a investigar, ya que es estudiado por la comunidad de Educación Matemática. Además, es utilizado en el área de ciencias básicas y de ingeniería. El uso de la tecnología en el desarrollo de la investigación se justificaría por los trabajos revisados como Perdomo (2010), Dullius (2009) y Barros (2008) quienes utilizan la tecnología en el desarrollo de sus actividades como una herramienta importante para el aprendizaje de la EDO. Pero en nuestra investigación vamos usar lápiz y papel porque el modelo con que trabajaremos no es complejo y no requiere mucho cálculo algebraico.

Enseguida, de la carrera profesional de Ingeniería Mecánica se muestran mallas curriculares y esquemas de sílabos de diferentes universidades del Perú en donde se enseña la EDO.

En primer lugar, en la facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía (FIME) de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) se desarrolla la EDO en el cuarto ciclo, en el curso de Matemática Aplicada a la Ingeniería el cual es prerequisite de cursos como Estadística Aplicada a la Ingeniería, Cálculo numérico y computacional, Metodología de la investigación científica y Maquinas hidráulicas conforme mostramos en la figura 2.

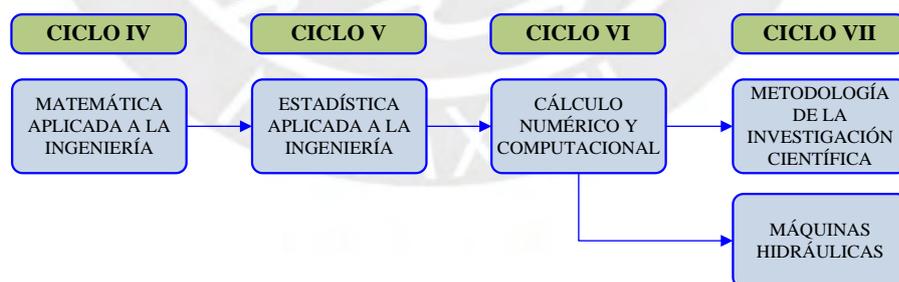


Figura 2. El desarrollo del curso de Matemática aplicada a la ingeniería en la malla curricular de la escuela profesional de Ingeniería Mecánica

Con respecto al desarrollo del curso de Matemática aplicada a la Ingeniería, la EDO se empieza abordar en la Unidad II la cual corresponde a EDOs, métodos de solución, tipos de EDOs y EDOs de orden superior, mostramos el desarrollo del curso como en la figura 3.

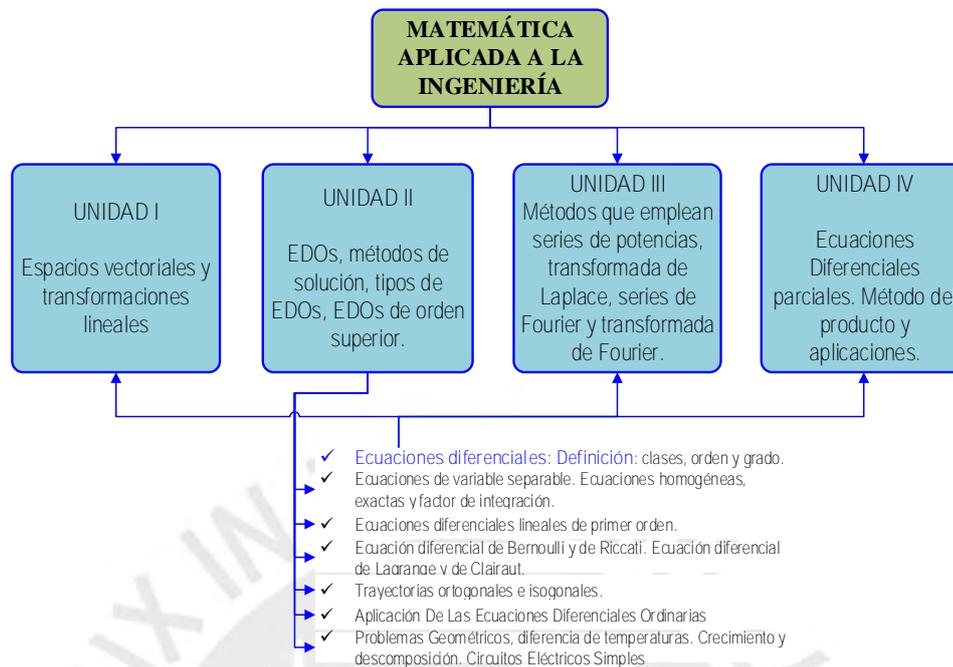


Figura 3. Desarrollo del sílabo de Matemática aplicada a la ingeniería-FIME

En la facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de ingeniería (UNI) se desarrolla la EDO en el curso de Ecuaciones Diferenciales el cual es prerrequisito del curso de Métodos Numéricos, el cual le permitirá a los estudiantes cursar la asignatura llamado Transferencia de calor y masa como se puede mostrar en la figura 4.

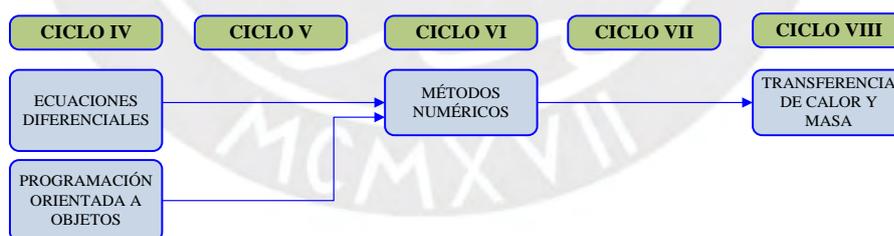


Figura 4. El desarrollo del curso Ecuaciones Diferenciales Malla curricular.

Con respecto al desarrollo del curso de Ecuaciones Diferenciales, la EDO se empieza a estudiar desde el capítulo I hasta el capítulo VI, como se puede observar en la figura 5.

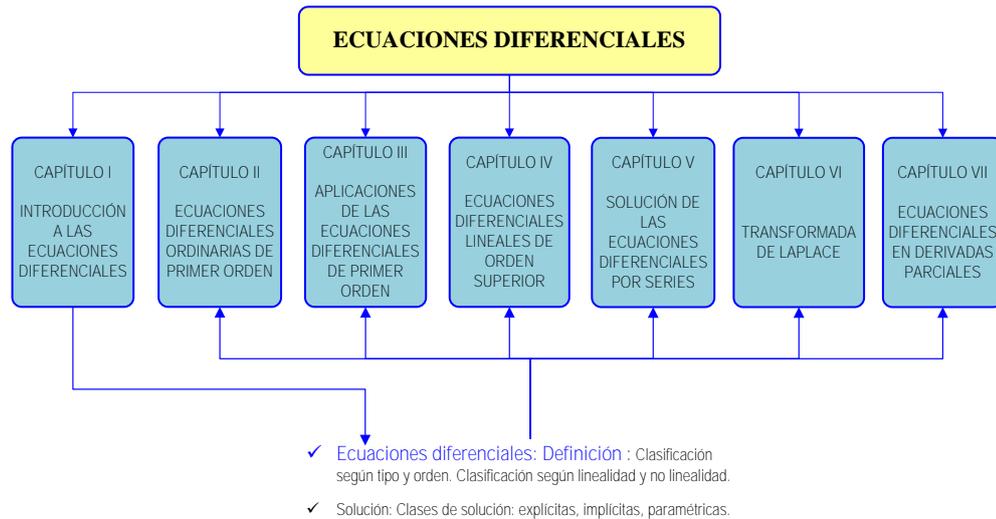


Figura 5. Capítulos del sílabo de Ecuaciones Diferenciales-UNI

En la facultad de Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) se desarrolla la EDO de orden n en el curso de Cálculo Integral el cual es prerequisite de cursos como Estadística, Estática, Dinámica, Resistencia de materiales I y Resistencia de materiales II como mostramos en la figura 6.

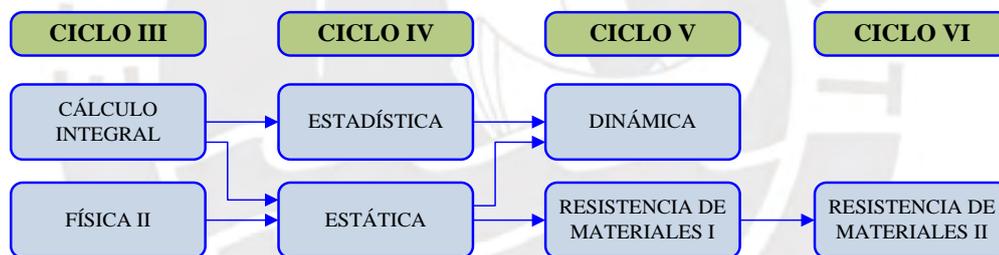


Figura 6. El desarrollo del curso Ecuaciones Diferenciales Malla curricular.

Con respecto al desarrollo del curso Cálculo Integral este empieza con el concepto de la integral definida y recién el capítulo IV se define la EDO de orden n , como se puede observar en la figura 7, cabe señalar que en un curso previo, Cálculo diferencial, se introduce el concepto de EDO de orden 1.

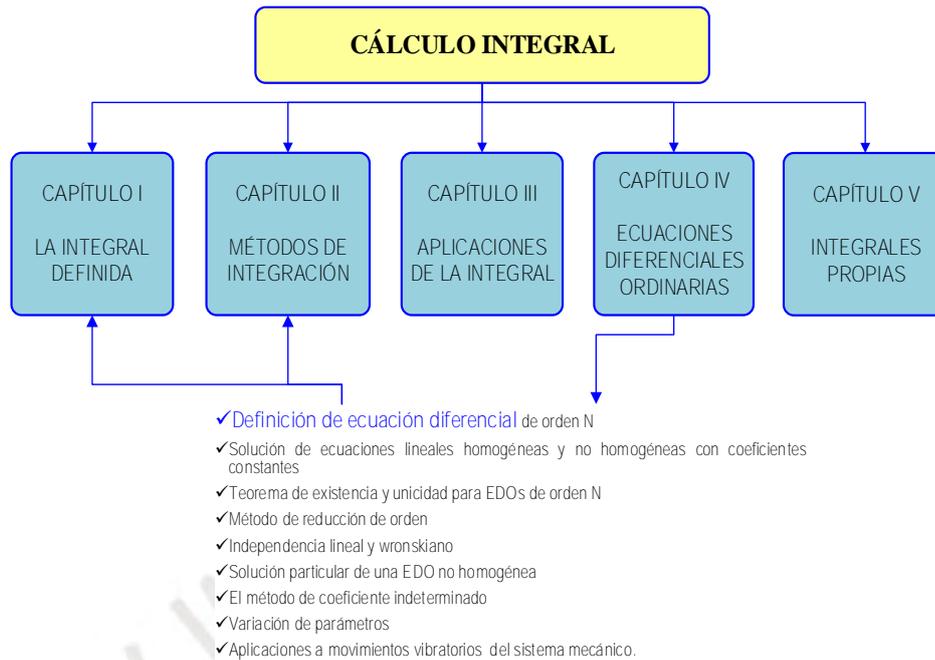


Figura 7: Desarrollo del sílabo de Cálculo Integral-PUCP

La pertinencia académica de esta investigación está justificada por las investigaciones estudiadas y mostradas en los antecedentes, donde se estudian a la EDO y en dichos trabajos se señalan las dificultades que presentan los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje de la EDO y que se presentan las principales dificultades en la figura 1. La pertinencia profesional se evidencia por las mallas curriculares y los sílabos presentados, las cuales se encuentran en nuestros anexos, muestran la importancia que tiene la EDO como herramienta en la formación de ingeniero. En este sentido, coincidimos con Camarena (2002) cuando afirma que la matemática es una herramienta de apoyo a la ingeniería y materia formativa para los que la estudian. Motivo por el cual, el estudio de EDO es necesario no solo para las carreras de ingeniería sino para el área de Educación Matemática.

1.3 Aspectos Teóricos

En esta parte, desarrollamos aspectos del marco teórico, la TSD, que busca crear un modelo de interacción entre el estudiante, el saber y el *milieu* (medio) en el cual el aprendizaje debe producirse. Fue elaborada por Guy Brousseau (1986).

Teoría de situaciones

Según Brousseau (2011),

La teoría de las situaciones matemáticas surgió en 1970. Nació como un método simple de descripción e interrogación matemática de dispositivos psicológicos y didácticos. Desde entonces, no ha dejado de desarrollarse bajo el doble efecto de nuevas preguntas y observaciones empíricas que se pretende producir y poner en relación (p.1, traducción nuestra).

Además, “**la teoría de situaciones matemáticas** modela las condiciones bajo las cuales los seres humanos producen, comunican y aprenden el conocimiento que reconocemos como matemático.” (Brousseau, 2011, p.2). Asimismo, según el autor estas condiciones están representadas por sistemas denominadas situaciones, que guían a los agentes a relacionarse con ellos para mostrar este conocimiento. “Las situaciones se diferencian por su estructura, reglas, funcionamiento, formas de conocimiento producidas, etc.” (Brousseau, 2011, p.2). El autor las agrupa en dos tipos:

Situaciones matemáticas, es cuando no se contempla una participación didáctica. Es decir, “aspiran a presentar los requisitos mínimos y necesarios para explicar o justificar la implementación de una declaración matemática por un agente o un grupo de agentes, sin participación didáctica externa” (Brousseau, 2011, p.2). El autor afirma que los ejercicios y problemas son las formas simples de situaciones matemáticas que se emplean en la educación.

Situación didáctica, “que incluyen una situación matemática, consagrado en un sistema de condiciones que llevan al sujeto a la adopción directa de comportamientos determinados únicamente por la intervención del maestro, ya sea que el alumno perciba o no la necesidad matemática” (Brousseau, 2011, p.2),

Teoría de situaciones didácticas

La teoría de las situaciones didácticas fue elaborada por Guy Brousseau en Francia con el fin de modelar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Según Almouloud (2014),

De esta forma, el objetivo de la teoría de las situaciones es caracterizar un proceso de aprendizaje por una serie de situaciones reproductivas, conduciendo a menudo la modificación de un conjunto de comportamientos de los alumnos. Esta modificación es rasgo de que el estudiante está adquiriendo

un determinado conjunto de conocimientos, produciéndose un aprendizaje significativo (pp. 31-32, traducción nuestra).

Para Almouloud (2014), el objeto principal de estudio en esta teoría es la situación didáctica no es el sujeto cognitivo. En la situación didáctica se determinan las interacciones constituidas entre el profesor, el alumno y el saber. Según Brousseau (como se cita en Almouloud, 2014), busca teorizar los fenómenos relacionados a esas interacciones, buscando la cualidad y condición del conocimiento enseñado.

De la figura 8, la interacción entre el profesor y el alumno se denomina transposición didáctica, donde se transforma el saber en un contenido a enseñar. Entre el profesor y el estudiante hay una interacción llamada relación pedagógica, donde el alumno toma el contenido a enseñar por el profesor. Para la interacción entre el saber, estudiante y el *milieu*, la TSD busca elaborar una situación didáctica que el estudiante acepta desarrollar y modifica su comportamiento llevándolo al aprendizaje esperado.

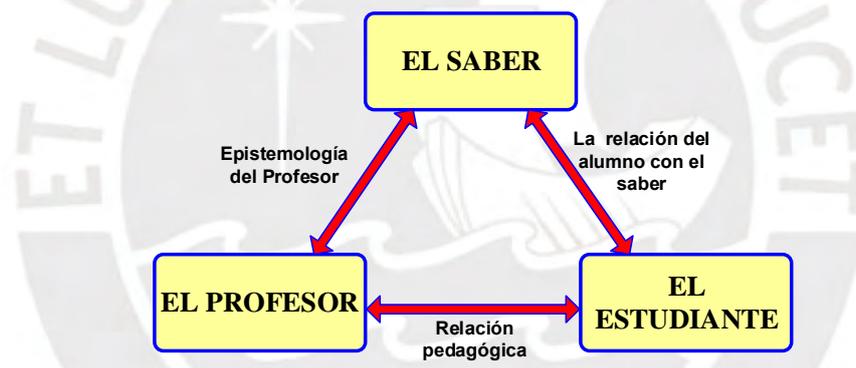


Figura 8. El triángulo didáctico
Fuente: Tomado de Almouloud, 2014

Para Almouloud (2014), las hipótesis sobre las que se basa la TSD son: En primer lugar, el estudiante aprende adecuándose a un *milieu* que es factor de desequilibrio, de contradicciones y de dificultades. En segundo lugar, el *milieu* carente de intenciones didácticas es insuficiente para que se produzca la adquisición de conocimientos para el estudiante. Para que tenga lugar una intención didáctica el profesor debe adecuar y organizar el *milieu* donde se desarrollará la situación y que sea capaz de provocar el aprendizaje. En tercer lugar, el *milieu* y la situación planteada deben relacionar los saberes previos adquiridos por el estudiante.

Milieu

Almouloud (2014) afirma

En la teoría de las situaciones, el *milieu* es un sistema antagonista al sujeto, siendo el *milieu* a-didáctico un sistema sin intención didáctica, exterior al sujeto, que, por sus retroacciones a las acciones del sujeto, permite su reflexión acerca de sus acciones y de su aprendizaje. Es decir, el aprendiz es el responsable del proceso de su aprendizaje (p. 35, traducción nuestra).

Cualquier sistema que permita al estudiante construir su aprendizaje forma parte del *milieu*, por ejemplo, los materiales (libros, computadoras, etc.) y no materiales (*software*, cursos de matemáticas, etc.) que el estudiante usa para dar solución a una situación.

Situación didáctica

El profesor modeliza esta situación, para que el estudiante adquiriera un conocimiento. Según Brousseau (como se cita en Almouloud, 2014) la situación didáctica está formada por las relaciones explícitas e implícitas entre estudiantes, el profesor y un *milieu*, con el objetivo que los estudiantes se apropien de un conocimiento matemático.

Situación a didáctica

Son momentos de aprendizaje. Almouloud (2014) refiere que es parte importante de la situación didáctica, donde el propósito de instruir no es comunicado al estudiante, pero fue ideada, planificada y elaborada por el profesor. Tiene las siguientes características: En primer lugar, el problema matemático elegido permite al estudiante reflexionar, actuar, hablar y evolucionar por sí mismo. En segundo lugar, el problema es elegido para que el estudiante aprenda nuevos conocimientos que se justifican por la lógica interna de la situación y que puedan ser elaborados sin recurrir a las razones didácticas. El estudiante se enfrenta solo en la solución del problema. En tercer lugar, a partir de las actividades propuestas, el estudiante realiza la construcción de sus conocimientos. El profesor es un mediador y crea las condiciones para que se logre dicha construcción.

Situación Fundamental

Brousseau (como se cita en Almouloud, 2014), señala que cada conocimiento puede ser representado por, al menos, una situación a didáctica que conserva su sentido y

que es llamada situación fundamental. Ella establece el conocimiento enseñado en un momento dado y el significado particular que ese conocimiento va a tomar al hacer variar las variables didácticas. Para Almouloud (2014), “una situación fundamental la constituye un grupo restringido de situaciones a didácticas cuya noción a enseñar es la respuesta considerada la más adecuada, situaciones que permiten introducir los conocimientos en el aula en una epistemología propiamente científica” (p. 34).

Devolución

Una situación didáctica se caracteriza por el juego de interacciones del alumno con los problemas propuestos por el profesor. La forma de plantear problemas al alumno es llamada devolución, y debe tener por objetivo provocar una interacción suficientemente rica que permita al alumno desarrollar autonomía (Almouloud, 2014). “El proceso de enseñanza y aprendizaje se apoya en la noción de devolución, definida como el acto por el cual el profesor hace al estudiante aceptar la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a didáctica) o de un problema aceptando las consecuencias de dicha transferencia.” (Almouloud, 2014, p. 35).

Contrato didáctico

Brousseau (como se cita en Almouloud, 2014), define el contrato didáctico como el conjunto de conductas de los alumnos esperados por el profesor y el conjunto de conductas determinadas del profesor esperado por los alumnos. Brousseau (como se cita en Almouloud, 2014) afirma, “este contrato es una relación que determina explícitamente en pequeña parte, pero sobre todo implícitamente lo que cada socio, profesor y alumno, tiene la responsabilidad de realizar y por el cual será, de una manera u otra, responsable ante el otro” (p. 89). Es decir, se dan las reglas de comportamiento que el profesor y el alumno deben tener, esto se declara al inicio de la situación didáctica.

Variable didáctica

Según Almouloud (2016), es una variable cognitiva que puede ser cambiada por el profesor, y que influye en las estrategias de solución, de una situación problema. Es decir, una variable didáctica de una situación problema es aquella cuyos valores pueden ser modificados por el profesor y cuyas modificaciones pueden influir sensiblemente en la conducta de los estudiantes en términos de aprendizaje, así como inducir procedimientos o tipos de respuesta diferentes. La elección apropiada de estas

variables puede provocar aprendizajes significativos y hacer emerger en los alumnos nuevos conocimientos como herramientas necesarias para resolver un problema. En realidad, la noción de variable traduce la necesidad de distinguir, clasificar y modelar las situaciones desde una perspectiva didáctica.

Según Almouloud (2016), uno de los aspectos más relevantes en la elección y/o construcción de situaciones-problema son las opciones que el profesor tiene a su disposición. La palabra variable designa, *a priori*, aquello que puede modificar en las situaciones de enseñanza y de aprendizaje. En la situación problema planteada, por ejemplo, en la actividad 2 una variable didáctica sería la recta horizontal, a lo largo de cada una de ellas se tiene segmentos tangentes con una misma pendiente.

Modelado de las situaciones a didácticas

Según Almouloud (2016) para estudiar el proceso del aprendizaje, la teoría de las situaciones divide este proceso en cuatro etapas diferentes, en las cuales el saber tiene funciones diferentes y el estudiante no tiene la misma relación con el saber. En estas etapas que están conectadas, se pueden ver tiempos dominantes de formulación, de acción, de validación y de institucionalización (Almouloud, 2016).

Situación de acción

Para Almouloud (2014) refiere que se trata de poner al estudiante en una situación, denominada situación de acción, tal que: Se propone al estudiante un problema cuya solución óptima, en las condiciones propuestas, es el conocimiento a enseñar; el alumno pueda actuar sobre esa situación y devuelve información sobre su acción. Una beneficiosa situación de acción no es sólo una situación de manejo libre o que exista una lista de instrucciones para su desarrollo. El estudiante debe tener la opción de evaluar el resultado de su acción y ajustarlo, si es necesario, sin la mediación del profesor, gracias a la retroacción del *milieu*. Así, el estudiante puede reformular o renunciar a su modelo para elaborar otro: la situación induce así un aprendizaje por adaptación. Esta etapa es importante para que el estudiante afirme sus elecciones y decisiones por acciones sobre el *milieu*.

En nuestra investigación, por ejemplo, una situación de acción, sería cuando el estudiante lee el enunciado del problema, subraya y hace anotaciones.

Situación de formulación

Es una situación donde se produce el intercambio de opiniones, ideas entre los estudiantes, utilizando mensajes orales, escritos o utilizando símbolos matemáticos.

Al respecto, Almouloud (2016) afirma “que en una situación de formulación se intercambia información y / o estrategias de resolución para producir sus acciones con colegas o profesores, usando para ello su lenguaje, aún sin la necesidad de justificarla” (p. 114).

En nuestra investigación, el momento de formulación, por ejemplo, sería cuando a los estudiantes, se les presenta la EDO, $y' = x^2 + y^2 + 1$, ellos afirman que la solución de dicha ecuación diferencial es una función creciente.

Situación de validación

Según Almouloud (2016) las relaciones que el estudiante establece con el saber y el sistema de enseñanza, pueden ser ubicados en la situación de validación, cuando se producen enunciados declarativos referentes a su actividad y se dan justificaciones o validaciones desde su punto de vista. En esta fase, se permite al estudiante argumentar, convencer, probar; elaborar una verdad colectivamente.

En nuestra investigación, por ejemplo, esto sucede cuando los estudiantes discuten, refutan y demuestran bajo argumentos pertinentes la validez de su propuesta, las cuales pueden ser expresadas en forma algebraica, literal o gráfica, no necesariamente llegando a dar la solución formal.

Institucionalización

Es aquí donde se formaliza el conocimiento matemático, considerando los resultados obtenidos por los estudiantes. El profesor recoge y ordena los resultados con la intención de darle un estatus científico.

Brousseau (como se cita en Almouloud, 2016), afirma

La fase institucionalización (parte constitutiva de la situación didáctica), desarrollada bajo la responsabilidad del profesor: define, entre otros, lo que el alumno debería aprehender de la situación global, estatuto social y científico al conocimiento / saber; establece los convenios, las notas / representaciones, el vocabulario; evidencia de lo que el alumno debe apropiarse en términos de conocimientos / saberes que en el futuro pueden ser usados en la resolución de nuevos problemas. Es decir, conocimientos que pasan a formar parte del *milieu* del alumno para resolución de nuevos problemas (p. 115, traducción nuestra).

En esta etapa aparece explícitamente la intencionalidad didáctica. Se socializa el saber que el estudiante debe aprender, este momento se asemeja a las clases tradicionales de un profesor. El estudiante por sí mismo no identifica que ha adquirido un nuevo conocimiento, es el docente quien tiene que organizar y sistematizar la información, siempre partiendo de lo producido por los estudiantes.

En nuestra investigación la institucionalización local, está dada por la institucionalización del saber en cada una de las actividades de nuestra situación problema y la institucionalización global es la institucionalización del saber que emerge de la situación problema, que en nuestro caso está formado por los saberes de las cuatro actividades.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

En esta sección planteamos la pregunta y objetivos de investigación. El marco teórico, también los antecedentes y la problemática en general permite establecer la pregunta de investigación y objetivos, éstos porque fijan de manera clara y ordenada, lo que pretendemos alcanzar con esta investigación.

La pregunta de investigación que planteamos es,

¿Cómo una situación problema contribuye a la interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de ecuaciones diferenciales ordinarias realizada por estudiantes de ingeniería mecánica?

Para poder responder la pregunta de investigación proponemos el siguiente objetivo general:

Objetivo general

Analizar la contribución de una situación problema a la interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de ecuaciones diferenciales ordinarias realizada por estudiantes de ingeniería mecánica.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar el análisis que los estudiantes de ingeniería mecánica realizan en la situación problema respecto al comportamiento del esfuerzo normal en el modelo del sistema de amortiguación.
- Investigar las estrategias que los estudiantes de ingeniería mecánica realizan en la situación problema para identificar las isoclinas y para graficar algunas curvas solución utilizando el campo direccional de la EDO.
- Estudiar las estrategias que los estudiantes de ingeniería mecánica desarrollan en la situación problema para la Interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de las EDOs del sistema de amortiguación.

1.5 Metodología de la investigación

En esta sección presentamos la metodología usada en esta investigación, que es la cualitativa, específicamente aspectos de la ingeniería didáctica.

Según Creswell (2010) afirma:

La investigación cualitativa es un enfoque para explorar y comprender el significado que los individuos o grupos atribuyen a un problema social o humano. El proceso de investigación implica preguntas y procedimientos emergentes, la recopilación de datos entorno de los participantes, el análisis de los datos se construye de manera inductiva desde temas particulares hasta temas generales, y el investigador realiza interpretaciones del significado de los datos. El informe final escrito tiene una estructura flexible. Quienes participan en esta forma de investigación apoyan una forma de ver la investigación que respeta un estilo inductivo, un enfoque en el significado individual y la importancia de informar la complejidad de una situación (p. 26).

El autor refiere que los seres humanos elaboran significados al interactuar con el mundo que están interpretando. Además, los investigadores cualitativos suelen utilizar preguntas abiertas para que los participantes puedan compartir sus opiniones

Bogdan y Biklen (1994) refiere que la investigación cualitativa tiene cinco características: a) el investigador está en contacto directo con el ambiente y los sujetos de la investigación; b) los datos se recopilan por medio de cuestionarios, entrevistas, entre otros instrumentos; c) es importante analizar, las actividades, los procedimientos y las interacciones con el medio; d) se analizan los datos de manera inductiva y se da interpretaciones a los significados de los datos; e) el significado de los individuos es importante, aquí se trata de entender lo que experimentan y como lo interpretan.

En esta investigación estaremos en contacto con los sujetos de investigación, recolectaremos información a través de dos grabadoras de audio, cámara fotográfica, dos cuadernillos de actividades y hojas bond, analizaremos los procedimientos que siguen los estudiantes en la interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de EDOs. Luego buscaremos los significados que los estudiantes manejan al desarrollar la situación problema. En consecuencia, por las razones mostradas afirmamos que nuestra investigación es cualitativa.

Como la investigación es cualitativa, se elige una metodología que permita cumplir con los objetivos, por ello, utilizaremos la Ingeniería Didáctica de Michelle Artigue que está asociada al marco teórico que utilizaremos, la TSD.

1.5.1 Aspectos de la ingeniería didáctica

Es indispensable elegir un método para alcanzar los objetivos de investigación, por ello, consideramos como método la Ingeniería Didáctica, cuya elección fundamentamos a continuación. Al respecto Brousseau (2013) afirma:

La ingeniería didáctica tiene que ver con la creación de modelos coherentes y relevantes y con dispositivos didácticos de conocimiento preciso, destinados a describir o predecir y a explicar los eventos observables de un episodio específico de enseñanza. (situaciones o plan de estudios) observado o propuestos: a) observado, con el fin de recopilar la información que hará posible explicar *a posteriori* su progreso y sus resultados, y permitir su reproducción. b) previsto, para determinar las condiciones reproducibles (factibles y comunicables) de su despliegue y sus resultados observables. El estudio de la consistencia y relevancia de estos modelos se refiere a un examen crítico de todos los conceptos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la propia constitución de la materia enseñada (p. 4, traducción nuestra).

Asimismo, Artigue (1995) reitera que “la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (p. 36).

Fases de la Ingeniería Didáctica

Según Artigue (1995), en Ingeniería didáctica se consideran cuatro fases:

Análisis Preliminar

La autora, refiere que esta fase comprende: análisis epistemológicos de los contenidos considerados en la enseñanza; análisis de la enseñanza tradicional y sus

efectos; análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; análisis del campo de restricciones donde se va efectuar la realización didáctica.

El análisis del campo de restricciones se realiza identificando tres dimensiones:

- **La dimensión epistemológica** está “asociado con las características del saber en juego” (Artigue, 1995, p.40). En nuestro trabajo, este ítem está formado por argumentos históricos y matemáticos de la EDO, es decir, cómo surge el EDO en la historia hasta que se establece como objeto matemático. Para realizar este estudio nos apoyamos en las investigaciones de Perdomo (2010), Dullius (2009) y Arslan (2005).

- **La dimensión cognitiva** está “asociado con las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza” (Artigue, 1995, p.40). Este trabajo se elabora al realizar la búsqueda de antecedentes, investigaciones de referencia, los cuales están vinculados, directa o indirectamente con el estudio, enseñanza y aprendizaje de la EDO y con las características de los sujetos considerados en el trabajo, por ejemplo, nivel similar de instrucción, formación matemática similar. Para esta parte utilizamos el libro de Jorge Sotomayor de ecuaciones diferenciales, que trata sobre el objeto matemático en estudio.

- **La dimensión didáctica** está “asociado con las características del funcionamiento del sistema de enseñanza” (Artigue, 1995, p.40). Este aspecto es tratado en la investigación al analizar el libro de Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado cuyo autor es Zill (2009), el cual figura como libro de consulta en el sílabo del curso Matemática Aplicada a la Ingeniería dictado en la escuela de Ingeniería Mecánica de la UNAC. Este análisis mostrará cómo la enseñanza del objeto de la EDO se transmite a los estudiantes.

Concepción y el análisis *a priori*

Según Artigue (1995), en esta fase se incluye la elección y actuación sobre las variables de comando, las no fijadas por restricciones que el investigador supone pertinentes, en las variables de comando identifica a las variables micro-didácticas o locales y las macro-didácticas o globales.

- **Variables micro-didácticas**, son “concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase” (Artigue, 1995, p. 42).
- **Variables macro-didácticas**, son “concernientes a la organización global de la ingeniería” (Artigue, 1995, 42).

Según Artigue (1995), el análisis *a priori* es concebido como un análisis del significado. La teoría de situaciones funciona como un control de las relaciones entre significado y situaciones. En esta etapa se pretende determinar cómo las secuencias preestablecidas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes, por lo que este análisis se basa en la formulación de la hipótesis. El mecanismo de validación interna, se pone en funcionamiento ya desde esta etapa.

La investigadora, refiere que aspectos tanto descriptivos como predictivos conforman este análisis: se describen las variables locales y las características de la situación didáctica que se desprenden de ellas; se analiza que está en juego en cuanto a la acción, selección, decisión, control y validación para el estudiante cuando se enfrente con la situación; se prevén los comportamientos posibles y se demuestra como el análisis controla el significado y se asegura que los comportamientos esperados sean resultados de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Por lo que se refiere a las variables, Almouloud (2014) sostiene que los dos tipos de variables pueden ser de orden general o depender del objeto matemático en estudio y el análisis de sus variables se pueden realizar en tres dimensiones: la epistemológica (asociada a la característica del saber), la cognitiva (asociado a las dimensiones cognitivas que están sujetos al aprendizaje) y didáctica (asociada a las características del sistema de enseñanza en el cual están los sujetos).

Según el investigador, el objetivo de un análisis *a priori* es determinar cómo las elecciones adecuadas de variables comando permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y explicar su significado. Asimismo, el análisis *a priori* es importante, pues de él depende el éxito de la situación problema, además, permite al profesor controlar la ejecución de las actividades realizadas por los alumnos y también permite identificar y comprender los sucesos observados.

Experimentación

Según Almouloud (2014), esta fase es el momento de poner en marcha todo el mecanismo construido, corrigiendo cuando los análisis locales del desarrollo identifican esa necesidad, lo que implica un regreso al análisis *a priori*, un proceso de complementación. Se recogen a lo largo de actividad observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con otros, como cuestionarios, entrevistas individuales, filmaciones, capturas de pantalla, etc.

Análisis *a posteriori* y validación

Artique (1995), afirma que el análisis *a posteriori*

Se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el *a priori* y *a posteriori*, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (p. 48).

Según la investigadora el análisis *a posteriori* se basa en el análisis de observaciones realizadas en la secuencia de enseñanza y las producciones de los estudiantes en la experimentación. Además, la autora refiere que la validación de las hipótesis propuestas en la investigación se realiza cuando se da la confrontación o comparación entre el análisis *a posteriori* y *a priori*.

Según Almouloud (2014) el análisis *a posteriori* de una sesión está formado por los resultados que se puede obtener de la exploración de los datos recogidos y que contribuye a la mejora de los conocimientos didácticos que se tiene sobre las condiciones de la transmisión del saber que se quiere enseñar. Según el investigador es un análisis realizado a la luz del análisis *a priori*, de los fundamentos teóricos, de las hipótesis y de la problemática de investigación. El autor refiere que el análisis *a posteriori* depende de las herramientas técnicas (grabaciones, material didáctico, vídeo, etc.) o teóricas (teoría de las situaciones, contrato didáctico, etc.).

Recogeremos información de las actividades a lo largo de la experimentación a través de dos grabadoras de audio, cámara fotográfica, dos cuadernillos de actividades y hojas bond.

La validación de las hipótesis propuestas en la investigación se da en la confrontación o comparación entre el producto realizado por los estudiantes y lo que se espera que ellos respondan al desarrollar las actividades que conforman la situación problema planteada. Esto corresponde a lo que denomina la autora como validación interna.



CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

En este capítulo presentaremos el estudio de la EDO en tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. En la dimensión epistemológica, examinamos la evolución de la EDO. En la dimensión cognitiva realizamos un estudio de un texto formal que trata las EDO desde un punto de vista intramatemático y finalmente en la dimensión didáctica analizamos un texto que aborda nuestro objeto matemático y es utilizado por los sujetos de estudio.

2.1 Aspectos históricos de la Ecuación Diferencial Ordinaria

Guzmán (1975) manifiesta que los orígenes de las ecuaciones diferenciales tuvieron lugar a finales del siglo XVI e inicios del XVII. Enseguida presenta algunos problemas que la dieron origen como por ejemplo cuando John Naiper (1550-1617) elaboró tablas de logaritmos, para ello utilizó una interpretación cinemática en su construcción.

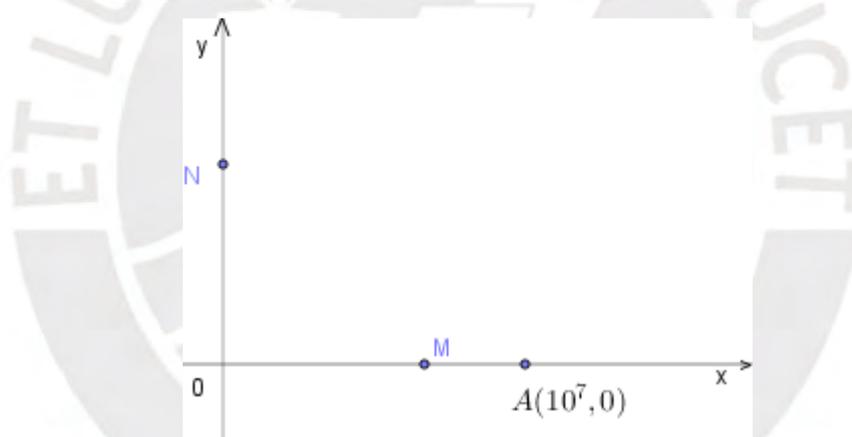


Figura 9. Interpretación cinemática
Fuente: Guzmán (1975, p. 1)

En la figura 9, según el autor en el eje X en el instante $t = 0$, un móvil M con una velocidad V sale de $A(10^7, 0)$, siendo $v(t)$ la velocidad en todo instante t proporcional a la distancia de M a 0. En el eje Y se tiene un móvil N que en el instante $t = 0$ parte de 0 con velocidad V constante. La distancia de M a 0 es $x(t)$ y de N a 0 es $y(t)$ en el instante t . Además, el autor afirma que Napier definió $y(t)$ como el logaritmo de $x(t)$. Asimismo, presenta como el problema se puede expresar usando terminología moderna con dos ecuaciones diferenciales $\frac{dx}{dt} = -\frac{Vx}{10^7}$ con la condición inicial $x(0) = 10^7$ y $\frac{dy}{dt} = V$, con $y(0) = 0$. De ahí resulta $\frac{dy}{dx} = -\frac{10^7}{x}$, $x(0) = 10^7$, $y(0) = 0$

donde se obtiene la solución $y = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$. Según el autor, los valores en las tablas de Napier son aproximaciones para esta última ecuación diferencial.

También Guzmán (1975) menciona que Galileo (1564-1642) y Descartes (1592-1650) estudiaron problemas vinculados a los fenómenos naturales, como el espacio recorrido de un cuerpo en caída libre, Galileo determinó el espacio recorrido $s(t)$, como el área de un triángulo rectángulo que tiene como catetos al tiempo t y la velocidad $v(t) = gt$, obteniendo $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Además, Descartes realizó trabajos en óptica, en 1628 planteó y resolvió el siguiente problema: se quiere hallar una curva C que separa a dos puntos fijos A y B de un plano, de tal manera que si toma cualquier punto X de la curva y en ella se traza la normal N_1N_2 , se tiene $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = k$, tal como se muestra en la figura 10.

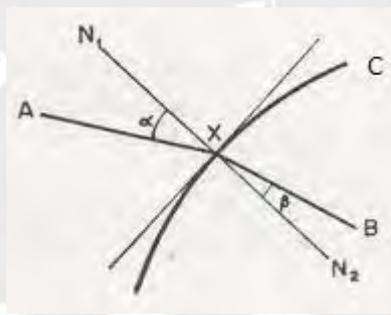


Figura 10. Curva C que separa los puntos A y B
Fuente: Guzmán (1975, p. 2)

Luego, el autor señala que la solución de este problema es el ovalo de Descartes de cuarto orden.

Wanner (1988) refiere que Debeaune (1601-1652) es lector de la "Geometría" de Descartes, publicado en 1637. En 1638, propone problemas que Descartes y Fermat habían tratado en vano de resolver. Entre estos problemas, está el de hallar una curva $y(x)$, donde para cada punto P de la curva se trazan la perpendicular PN y la tangente PT , además el segmento NT (subtangente) es de longitud constante, tal como se puede observar en la figura 11.

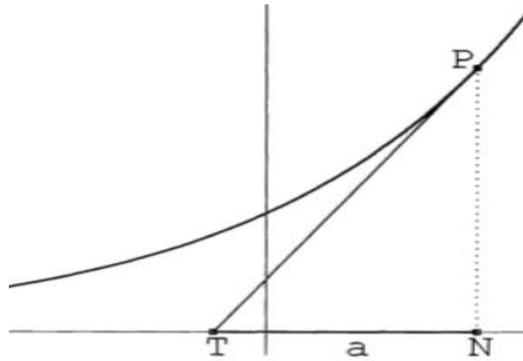


Figura 11. Primer problema de Debaune
Fuente: Wanner (1988, p. 366)

Además, Wanner (1988) refiere que Galileo en 1638 en su obra *Discurso y Demostración matemática público* que el problema de la cadena suspendida entre dos clavos tiene la forma de una parábola, esta afirmación era errada, más adelante se probó que era una catenaria.

Según Guzmán, hay un primer periodo del desarrollo de las ecuaciones diferenciales que se inicia en el último cuarto siglo XVII hasta el XVIII, empieza con los trabajos de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716).

Apóstol (1999), manifiesta que las ecuaciones diferenciales se empezaron a abordar en el siglo XVII, cuando algunas ecuaciones diferenciales simples de primer y segundo orden que aparecían en problemas de Geometría y Mecánica fueron resueltas por Newton, Leibniz y los Bernoulli. Estos resultados, se dieron alrededor de 1690, sugerían que las soluciones de las ecuaciones diferenciales que provenían de problemas geométricos y físicos podrían expresarse en términos de las funciones elementales de cálculo. Por consiguiente, al principio del trabajo se empezó con elaborar técnicas para resolver ecuaciones diferenciales a través de medios, como la suma, resta, multiplicación, división, composición e integración, aplicadas en un número finito de veces a las funciones comunes del cálculo.

Por otra parte, Arslan (2005) refiere que los científicos tan pronto entendieron el concepto de derivada y desarrollaron herramientas para trabajar en dicho concepto, surgieron ecuaciones que presentaban derivadas, dichas ecuaciones provenían de problemas, como por ejemplo el planteado por Galileo, quien buscaba determinar la forma de una cadena suspendida y por Debeaune, quien investigaba encontrar la curva que tenga la subtangente de longitud constante.

Además, Sanz y Dalí (2005) refieren que Galileo dio una solución errada al problema de la cadena, al afirmar que la forma del objeto suspendido era la de un arco de parábola. Los autores afirman que Jacob Bernoulli en 1690, publicó un artículo en la revista científica alemana llamada Acta Eruditorum, en el que se usa por primera vez la palabra Integral. Enseguida al finalizar el artículo y para mostrar las bondades del nuevo cálculo integral, Jacob plantea a la comunidad matemática de la época, determinar la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos una cadena de peso uniforme.

Wanner (1988) afirma que, en 1690 es resuelto el problema por Leibniz, Huygens y Johann Bernoulli, el hermano menor de Jacob, además señala que en 1691 Leibniz y Johann Bernoulli publican sus soluciones en el Acta Eruditorum, (ver figura 12). Según el autor, se llega a una ecuación diferencial de la forma $c dp = \sqrt{1 + p^2} dx$, donde $p = y'$, a partir de aquí los cálculos de Johann son complicados, pero ahora que se conocen las funciones hiperbólicas se facilita el cálculo, $c \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dx$ luego $arsinh(p) = \frac{x-x_0}{c}$, finalmente $y = k + c \cosh(\frac{x-x_0}{c})$.

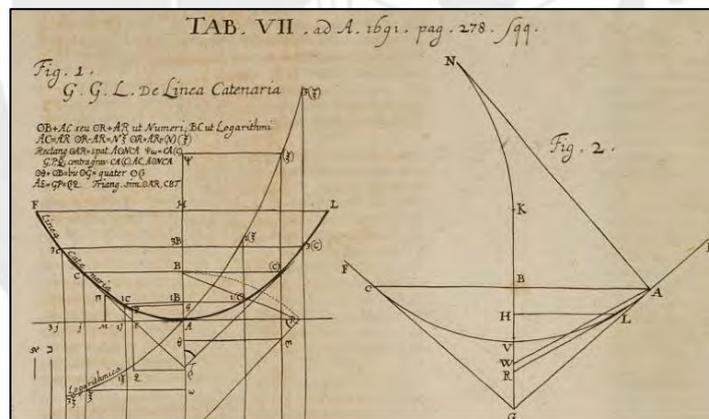


Figura 12. La catenaria diseñada por Leibniz
Fuente: Leibniz (1691, p. 278)

En la actualidad, la ecuación de la catenaria está dada por la función coseno hiperbólico $y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, sin embargo, en la época de Bernoulli, Leibniz y Huygens aún no se tenía conocimiento de la función exponencial (Sanz y Dalí, 2005).

En la figura 13, la curva de color azul es la de una catenaria y la de color rojo es la de una parábola.

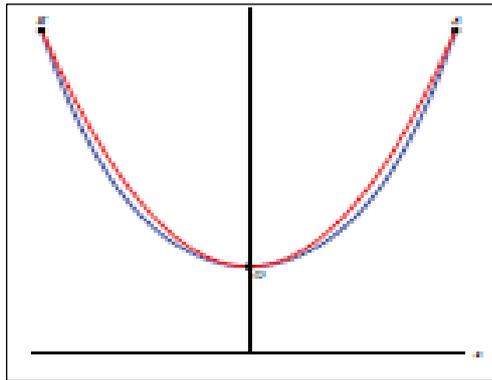


Figura 13. La catenaria y parábola
Fuente: Ciaurri (2013, p. 213)

Por otro lado, Descartes intentó resolver por métodos geométricos el problema planteado por Debeaune, pero no lo consiguió. Fue Leibniz quien lo resolvió.

Arslan (2005), sostiene que la EDO tiene su desarrollo en la geometría, mecánica y astronomía.

En la astronomía, según Ciaurri (2013) sostiene que las leyes de Kepler describen el movimiento planetario, las dos primeras fueron publicadas en 1609 en su obra *Astronomía Nova* y la tercera dada a conocer en 1619 en libro V de su obra *Harmonices Mundi*, que describen el movimiento de los planetas entorno al Sol. Cuando Kepler obtuvo sus famosas leyes, el cálculo diferencial estaba todavía escasamente desarrollado y su deducción fue prácticamente empírica, a partir de datos obtenidos de observaciones astronómicas, además menciona que las leyes de Newton, son importantes en las aplicaciones de vibraciones mecánicas.

Ciaurri (2013), afirma que uno de los problemas que tenían en física era la determinación de la trayectoria de un proyectil lanzado desde la superficie de la tierra con una cierta velocidad y formando un ángulo determinado con la horizontal, la ley de Newton, así como la resolución de una ecuación diferencial, era desconocida para Galileo y Torricelli, quienes obtuvieron las trayectorias utilizando argumentos geométricos de composición de movimientos. De hecho, los trabajos de Galileo fueron pieza fundamental en la obtención por Newton de las célebres leyes del movimiento.

Apostol (1999) señala que los métodos como separación de variables y el uso de factores integrantes se desarrollaron antes de finalizar el siglo XVII. Luego en el siglo XVIII Euler, Lagrange y Laplace elaboraron otros procedimientos. Enseguida los matemáticos se dieron cuenta que era vano intentar descubrir métodos para resolver

todas las ecuaciones diferenciales, en vez de ello vieron que era más fructífero ver si una ecuación diferencial tenía o no solución y cuando tenía intentar la deducción de las propiedades de la solución a partir de la misma ecuación diferencial.

Apostol (1999) afirma que en 1820, Cauchy dio el primer teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$. Por ejemplo, para la ecuación diferencial de Ricatti representada por $y'' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$, Cauchy trabajó en probar la existencia de una solución de la ecuación de Ricatti en cualquier intervalo de la forma $] - r, r[$, con la condición que P, Q y R se puedan expresar como serie de potencias en $] - r, r[$. José Liouville en 1841 probó que en algunas situaciones esa solución no puede determinarse usando conceptos básicos. Según el autor es difícil tener resultados generales con respecto a las soluciones de la EDO con excepción de algunos tipos como por ejemplo las ecuaciones diferenciales lineales.

Como conclusión afirmamos que las EDO surgen y se desarrollaron en el ámbito de la geometría, física, astronomía y mecánica, además la ecuación diferencial aparece después del desarrollo del objeto matemático de la derivada, que ve potenciada su desarrollo al aparecer el cálculo integral, lo cual da pie a resolver las ecuaciones diferenciales en forma algebraica, además dada una EDO no siempre se puede determinar la solución algebraica, por lo cual se recurre a determinar si una ecuación diferencial tiene o no solución y cuando tiene intentar la deducción de las propiedades de la solución a partir de la misma ecuación diferencial, que en nuestro caso será el uso del uso de la isoclina y el campo direccional.

2.2 Ecuación diferencial de primer orden

Presentamos el estudio formal de la EDO, el cual nos permite identificar las distintas representaciones que se utilizan para hallar la solución de la EDO. En el enfoque cualitativo determinar como a partir de la representación algebraica de la EDO de primer orden se determina la representación gráfica de la solución. Para ello se ha elegido un libro cuyo autor es Sotomayor, utilizado por estudiantes, futuros licenciados en Matemáticas.

Sotomayor (2011) presenta la ecuación diferencial de primer orden en el capítulo 1, con el título “Existencia y unicidad de soluciones” que empieza en la página 7 y finaliza en la página 35. Este capítulo está compuesto de seis secciones, la cuales

mostraremos en el cuadro 1, asimismo, se da una breve introducción del contenido del capítulo 1, explicando brevemente el contenido principal de cada sección.

Cuadro 1. Contenido del capítulo 1 del libro formal

CAPÍTULO 1: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES	
1. Preliminares	2. Un problema de Cauchy
3. Ejemplos	4. Teorema de Picard y de Peano
5. Soluciones máximas	6. Sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones de orden superior

En el capítulo 1, de la sección 1, subtitulada como preliminares, realiza primero una presentación de las representaciones que va utilizar. Así, observamos que representa simbólicamente por Ω a un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, donde $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, además menciona que un punto en $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ es representado por (t, x) donde $t \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertenece a \mathbb{E} . También representa por $|(t, x)|$ a una norma que se aplica al espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, que se define como $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$ donde $|x|$ representa una norma en \mathbb{E} . Enseguida realiza las representaciones simbólicas de una aplicación continua $f: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ y un intervalo I , utiliza algunas de estas representaciones en la definición 1.1, como se observa en la figura 14.

DEFINIÇÃO 1.1
 Uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$ chama-se *solução* da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

no intervalo I se:

- (i) o gráfico de φ em I , isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e
- (ii) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

A equação (1.1) chama-se *equação diferencial ordinária de primeira ordem* e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x).$$

Figura 14. Definiciones de EDO y solución
 Fuente: Sotomayor (2011 p. 8)

En la figura mencionada, Sotomayor (2011) define la solución de una EDO, donde representa simbólicamente, a la solución por $\varphi: I \rightarrow \mathbb{E}$ y la EDO por $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$. Además, utiliza el lenguaje natural y la representación simbólica para establecer las condiciones que debe cumplir φ para que sea solución. Enseguida, el autor define la EDO de primer orden como $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, luego menciona que esta también puede ser representada simbólicamente por $x' = f(t, x)$.

A continuación, el autor como se observa en la figura 15, representa las componentes de la solución φ como $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ donde cada $\varphi_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, Además $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ donde $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Sejam $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ as componentes de f ; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ com $\varphi_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (1.1) se, e somente se, cada φ_i é diferenciável em I , $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \frac{d\varphi_2}{dt}(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{array} \right. \quad (1.1')$$

para todo $t \in I$.

Figura 15. Sistema de ecuaciones diferenciales
Fuente: Sotomayor (2011, p. 8)

El autor refiere que la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales, que la representa simbólicamente en forma simplificada como $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Aquí el autor invita al lector para que entre en una situación de acción al llevar una representación a otra.

En el desarrollo de esta primera sección Sotomayor (2011) básicamente utiliza lengua natural y representación simbólica para definir la EDO y la solución de la EDO. El autor empieza definiendo la EDO de orden uno en forma vectorial, mientras que en los textos didácticos que son utilizados por los futuros ingenieros, por ejemplo, Dennis G. Zill, empieza definiendo la EDO como una ecuación escalar donde se presenta una función $y(x)$ y sus derivadas, en este caso Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

En la sección 2, titulada un problema de Cauchy, el autor empieza planteando dos ejemplos, el primer ejemplo (figura 16) en su enunciado utiliza el lenguaje natural, la

representación simbólica y algebraica ($\varphi(t) = c + \int_{t_0}^t g(s)ds$), se observa que Sotomayor (2011) no realiza los procedimientos algebraicos para hallar la solución, promoviendo que el estudiante lo realice.

(1) $\Omega = I \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = g(t)$, onde g é uma função contínua no intervalo I ; φ é uma solução de $x' = g(t)$ em I se, e somente se, $\varphi(t) = c + \int_{t_0}^t g(s)ds$ onde $t_0 \in I$ e c é uma constante.

Figura 16. Problema de solución única
Fuente: Sotomayor (2011, p. 9)

A continuación, en la figura 17 se grafican algunas curvas que representan a las soluciones de la EDO, estas curvas se representan simbólicamente por φ_{c_2} , φ_{c_1} , y φ_c que son soluciones que pasan por los puntos (t_0, c_2) , (t_0, c_1) y (t_0, c) respectivamente.

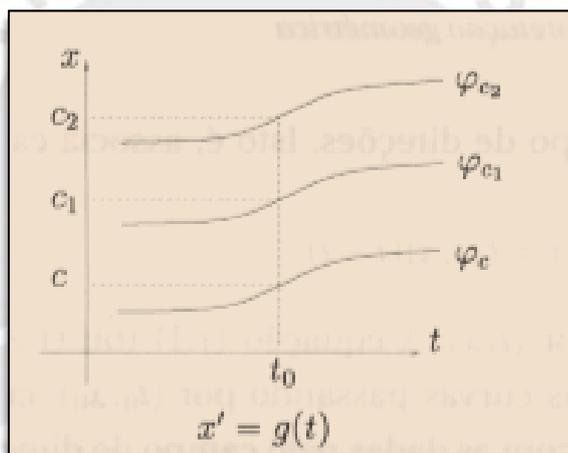


Figura 17. Solución única
Fuente: Sotomayor (2011, p. 9)

El autor realiza formulaciones como: a) La ecuación diferencial tiene infinitas soluciones, b) Para cada punto $(t_0, x_0) \in \Omega$, existe una única solución φ que verifica $\varphi(t_0) = x_0$. El autor no presenta una justificación de estas afirmaciones, quizás buscando que el lector entre en una situación de acción y justifique las afirmaciones.

En el enunciado del segundo ejemplo hace uso del lenguaje natural, representación simbólica y representación algebraica. Además, presenta la solución φ_c sin indicar el proceso algebraico seguido para su obtención. Aquí, el autor promueve a que el lector realice el proceso algebraico para hallar la función φ_c que es solución de la EDO $x' = 3x^{2/3}$ (ver figura 18). También el autor refiere que la función $\varphi = 0$ es solución de la EDO.

(2) $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = 3x^{2/3}$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \geq c \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$

é uma solução da equação $x' = 3x^{2/3}$ em $I = \mathbb{R}$, como se vê por verificação direta das condições (i) e (ii) da definição 1.1.

Figura 18. Problema con múltiples soluciones
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 9)

A continuación, a partir de la representación algebraica de la solución se halla su representación gráfica y además se indica que para cada punto $(t_0, 0) \in \Omega$ pasan infinitas soluciones (ver figura 19).

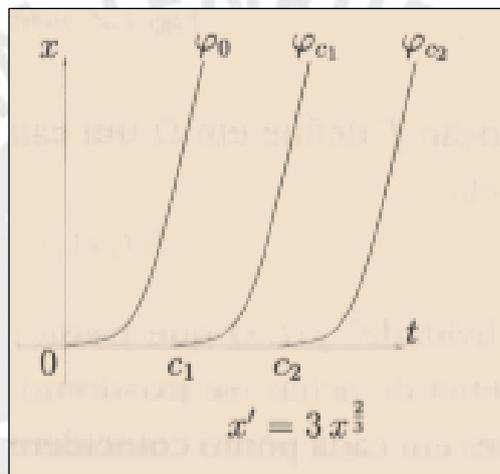


Figura 19. Múltiples soluciones
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 9)

Enseguida Sotomayor (2011) presenta al problema de Cauchy, que consiste en hallar una función $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, tal que sea solución de $x' = f(t, x)$ en I y satisfaga la condición $x(t_0) = x_0$, donde $t_0 \in I$, $(t_0, x_0) \in \Omega$. Además, el autor refiere que si f y $\frac{df}{dx}$ son continuas en Ω entonces existe una solución única φ definida en un intervalo que contiene a t_0 tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

El autor menciona que la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ es equivalente a la representación algebraica $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$, es decir φ es solución de la ecuación $x' = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$ si y solo si φ es solución de la ecuación $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$.

A continuación, se muestra la gráfica de la función φ que es solución de la EDO $x' = f(t, x)$, que pasa por el punto $(t, x) \in \Omega$, (ver figura 20). Además, presenta la gráfica de la recta $l(t, x): \xi - x = f(t, x)(\tau - t)$ que es tangente a la solución φ de la EDO, que pasa por el punto $(t, x) \in \Omega$, tiene como pendiente a $f(t, x)$ y (τ, ξ) representa cualquier punto de la recta $l(t, x)$. Así se elige otro punto $(t', x') \in \Omega$, luego se puede trazar otra recta $l(t', x'): \xi - x' = f(t', x')(\tau - t')$ que es tangente a otra solución de la EDO, de esta manera para cada punto que se elija de Ω se puede trazar una recta tangente a una solución de la EDO. De la recta $l(t, x)$ se puede elegir un pequeño segmento centrado en $(t, x) \in \Omega$, este procedimiento se puede realizar reiterativamente cada una de las rectas tangentes a las soluciones en otros puntos, así se obtiene un campo direccional o un campo de direcciones.

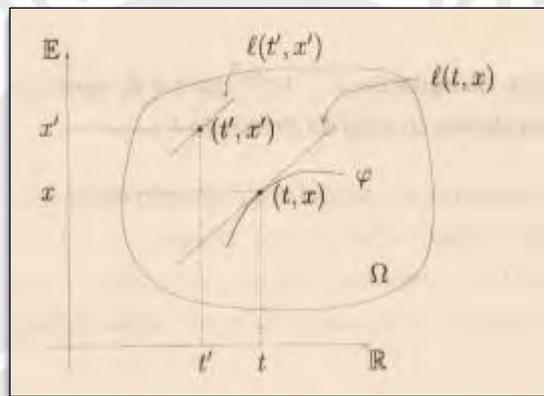


Figura 20. Esbozo gráfico
Fuente: Sotomayor (2011, p. 10)

En esta sección, Sotomayor (2011) presentó dos ejemplos donde en el primero las gráficas de sus soluciones no se cortan, ahí se da la unicidad de las soluciones, mientras que el segundo si se cortan, ahí no se da la unicidad de las soluciones, termina esta sección con la presentación del campo direccional.

La sección 3, se titula ejemplos, el autor presenta aquí cuatro ejemplos que abordan el tema de la existencia y unicidad. El enunciado del primer ejemplo utiliza representaciones simbólicas y lenguaje natural (ver figura 21), aborda la solución de las ecuaciones diferenciales autónomas de la forma $x' = f(x)$, con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, la solución que presenta es formal, utiliza la representación algebraica, representación simbólica.

EXEMPLO 1.2 Equações autônomas.

Seja $\Omega = \mathbb{R} \times (a_1, a_2)$ e $f(t, x) = f(x)$. Supomos que f é contínua e não se anula em (a_1, a_2) . Dados $x_0 \in (a_1, a_2)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, calculemos a solução para o problema de Cauchy

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

Figura 21. Ecuación diferencial autónoma
Fuente: Sotomayor (2011, p. 10)

Sotomayor (2011) representa la solución de la ecuación diferencial que está dada por $\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0)$, para $t \in (t_0 + b_1, t_0 + b_2)$ donde $F(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$. Además, promueve que el lector pruebe que $\varphi(t)$ es solución única.

Luego, enuncia el ejemplo 2 utilizando la representación algebraica, simbólica y lenguaje natural, aborda la ecuación diferencial de variables separables representado por $x' = g(t)f(x)$, con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ (ver figura 22).

EXEMPLO 1.3 Equações de variáveis separáveis.

Consideremos o problema de Cauchy

$$x' = g(t)f(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.7)$$

onde g e f são contínuas em intervalos abertos (t_1, t_2) e (a_1, a_2) , respectivamente, e f não se anula em (a_1, a_2) .

Figura 22. Ecuación diferencial de variable separable
Fuente: Sotomayor (2011, p. 12)

Enseguida el autor presenta la solución del ejemplo 2 (ver figura 23).

Procedendo como no exemplo anterior (que é o caso particular em que $g(t) \equiv 1$), se φ é solução de (1.7), obtemos

$$\varphi'(t) = g(t)f(\varphi(t)),$$

ou seja, definindo $F(x) = \int_{x_0}^x d\xi / f(\xi)$ obtemos,

$$g(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t).$$

Integrando ambos os lados entre t_0 e t resulta

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau = F(\varphi(t))$$

e daí, no intervalo I contendo t_0 tal que $t \in I$ implica $b_1 < \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau < b_2$, a solução é $\varphi(t) = F^{-1}\left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right)$.

O leitor deve verificar que esta é a única solução de (1.7).

Observe que a solução obtida é dada implicitamente, para constantes de integração apropriadas, pela relação

$$\int g(t) dt = \int \frac{dx}{f(x)}$$

entre as integrais indefinidas.

Figura 23. Solución de una EDO variable separable
Fuente: Sotomayor (2011, p. 12)

Sotomayor (2011) resuelve el ejemplo utilizando procedimientos matemáticos formales. Aquí el autor promueve a que el lector verifique que $\varphi(t) = F^{-1}(\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau)$ es solución de la EDO de variables separables.

En el ejemplo 3 el autor aborda las EDOs lineales, tal como se observa en figura 24.

<p>EXEMPLO 1.4 Equações lineares. Sejam $a(t)$ e $b(t)$ funções contínuas em (t_1, t_2) e consideremos o problema de Cauchy</p> $x' = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.8}$

Figura 24. EDO de variable separable
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 12)

El autor a través de procedimientos algebraicos y formales llega a que la solución es representada por $\varphi(t) = \gamma(t)\exp\left[\int_{t_0}^t a(r)dr\right]$, para $t \in (t_1, t_2)$ donde $\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s)\exp\left[-\int_{t_0}^s a(r)dr\right] ds$.

En el ejemplo 4, el autor aborda el tema de reducción de una ecuación lineal compleja, en su enunciado utiliza la representación algebraica y simbólica (ver figura 25). Se trata de un sistema de EDOs.

<p>EXEMPLO 1.5 Redução a uma equação linear complexa. Consideremos agora um sistema de duas equações lineares e o problema de Cauchy</p> $\begin{cases} x' = \alpha(t)x - \beta(t)y + \delta(t), \\ y' = \beta(t)x + \alpha(t)y + \eta(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.11}$ <p>onde α, β, δ e η são funções contínuas num intervalo (t_1, t_2) que contém o ponto t_0.</p>

Figura 25. Reducción a una ecuación lineal compleja
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 14)

El autor introduce la representación algebraica compleja $z = x + iy$, $a(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ y $b(t) = \delta(t) + i\eta(t)$, con el cual el sistema de ecuaciones se puede representar en la forma $z' = a(t)z + b(t)$, con la condición inicial $z(t_0) = z_0$. Además, el autor, muestra los diagramas de fase de la ecuación diferencial, la

obtención de las curvas no se detalla, promoviendo a que el lector las realice (ver figura 26).

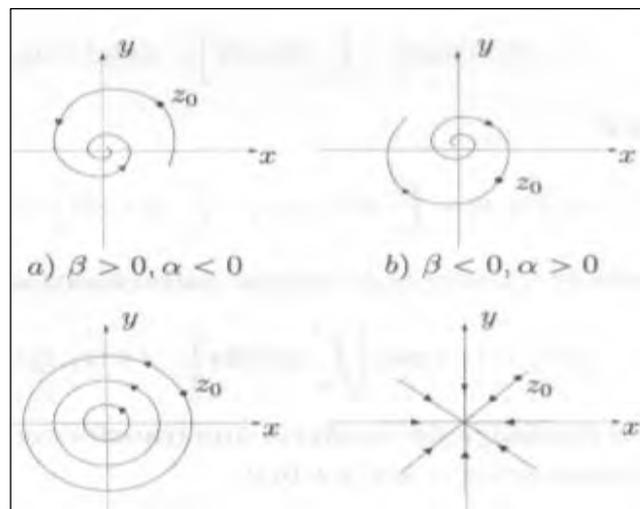


Figura 26. Ilustración del ejemplo 4
Fuente: Sotomayor (2011, p. 14)

La sección 4, inicia con la definición de la Función Lipschitziana, en donde en su enunciado utiliza lenguaje natural, representación simbólica y algebraica. Es una condición importante para demostrar la existencia y unicidad de las soluciones de una EDO, como se muestra en la figura 27.

Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se *Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável* ou, simplesmente, *Lipschitziana*, se existe uma constante K tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$. Uma K nestas condições chama-se de constante de Lipschitz de f .

Figura 27. Definición de la función Lipschitziana
Fuente: Sotomayor (2011, p. 15)

A continuación, el autor presenta el lema de la contracción. En su enunciado se utiliza lenguaje natural, representación algebraica y simbólica (ver figura 28).

LEMA 1.6 Lema da Contração

Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$, $0 \leq K < 1$. Existe um único ponto fixo p , para F , isto é, $F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F , isto é, $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ é definido por $F(F^{n-1}(x))$.

Figura 28. Lema de contracción
Fuente: Sotomayor (2011, p. 15)

En su demostración prevalece el uso de representación algebraica y simbólica, es intramatemático como se puede observar en la figura 29.

DEMONSTRAÇÃO
 Unicidade: sejam p e p_1 dois pontos fixos.

$$d(p, p_1) = d(F(p), F(p_1)) \leq Kd(p_1, p),$$

o que implica que $d(p, p_1) = 0$, donde $p_1 = p$.

Existência: sejam $x \in X$ e $x_n = F^n(x)$. Provaremos que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Realmente, $d(x_{n+r}, x_n) \leq K^n d(x, x_r)$ e

$$\begin{aligned} d(x, x_r) &\leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \dots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \\ &\leq (1 + K + K^2 + \dots + K^{r-1})d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Portanto, $d(x_{n+r}, x_n) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x, F(x))$. Logo, $\{x_n\}$ é convergente. Provemos que $\lim x_n = p$ é ponto fixo de F . De fato:

$$F(p) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = p. \quad \blacksquare$$

Figura 29. Prueba del Lema de contracción
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 16)

Sotomayor (2011) presenta un corolario utilizando lenguaje natural y representaciones simbólicas, esta es otra condición importante en la demostración de la existencia y unicidad de las soluciones, como lo muestra la figura 30 . Previamente ha presentado un lema de contracción de donde se obtiene el corolario.

COROLÁRIO 1.7
 Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \rightarrow X$ é contínua e, para algum m , F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo para F . Mais ainda, p é um atrator de F .

Figura 30. Resultado del Lema de Contracción
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 16)

El autor en la prueba usa el lenguaje natural y representación simbólica, su prueba es intramatemático, en su prueba hace uso del lema de contracción (figura 31).

DEMONSTRAÇÃO
 Seja p o ponto fixo atrator de F^m dado pelo Lema da Contração (Lema 1.6). Seja $n = mk + \ell$ com $0 \leq \ell < m$. Dado $x \in X$, como p é atrator de F^m , temos (já que $\{F^\ell(x)\}$, $0 \leq \ell < m$, é finito) $\{F^m\}^k(F^\ell(x)) \rightarrow p$, quando $k \rightarrow \infty$. Da relação $F^n(x) = \{F^m\}^k(F^\ell(x))$ e do fato que quando $n \rightarrow \infty$ tem-se $k \rightarrow \infty$, segue-se que $F^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é, p é um atrator de F . Provaremos agora que $F(p) = p$. Com efeito,

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p). \quad \blacksquare$$

Figura 31. Prueba del corolario 1.7
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 16)

Enseguida, Sotomayor (2011) presenta el Teorema de Picard, este nos asegura una única solución de la ecuación diferencial, aquí también utiliza en su enunciado el lenguaje natural, representación algebraica y simbólica (figura 32).

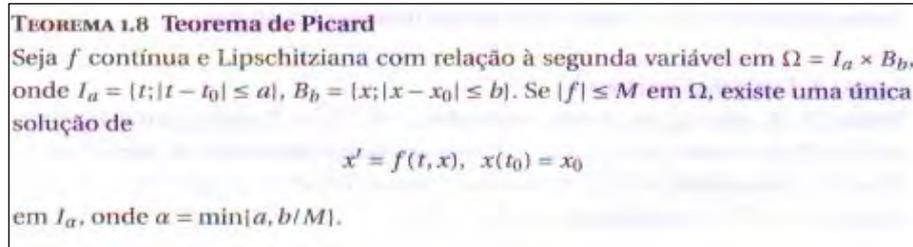


Figura 32. Teorema de Picard
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 16)

Enseguida, da una interpretación geométrica al teorema de Picard, mostrando una curva solución que pasa por el punto (t_0, x_0) como se muestra en la figura 33.

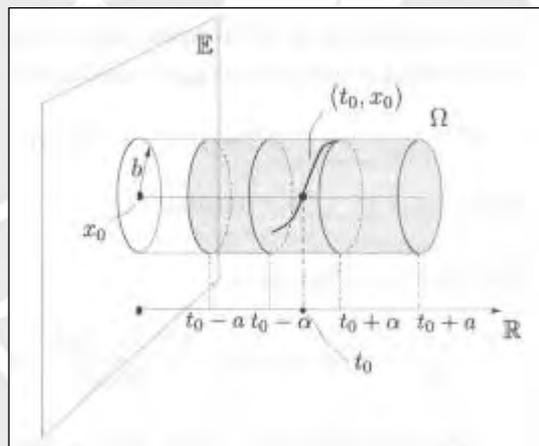


Figura 33. Interpretación del teorema de Picard
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 17)

A continuación, el autor presenta la demostración del teorema a través de la figura 34 y la figura 35 donde podemos observar el uso de lenguaje natural, representación algebraica y simbólica.

DEMONSTRAÇÃO
 Seja $X = \mathcal{C}(I_a, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi: I_a \rightarrow B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_a} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi): I_a \rightarrow E$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I_a.$$

Assim a correspondência $\varphi \rightarrow F(\varphi)$ define uma função F com as seguintes propriedades:

- (1) $F(X) \subset X$;
- (2) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Ou seja, $F: X \rightarrow X$ é uma função tal que F^n é uma contração.
 De fato, para todo $t \in I_a$,

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M\alpha \leq b.$$

Isto prova (1). Quanto a (2), para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$,

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_a, \quad (*)$$

Figura 34. Demostración del teorema de Picard
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 17)

En esta prueba es clave la construcción de la $F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. En la figura 35 continua la prueba del teorema de Picard.

onde K é a constante de Lipschitz de f . Verificamos esta desigualdade por indução em n . Para $n = 0$ ela é óbvia. Suponhamos que é válida para k . Então,

$$\begin{aligned} |F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K |F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^k (s - t_0)^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Portanto, $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$ e, para n grande, $K^n \alpha^n / n! < 1$, pois este é o termo geral de uma série cuja soma é $e^{K\alpha}$, donde F^n é uma contração em X . Pelo corolário do Lema da Contração, existe uma única $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. De fato, o ponto fixo φ é de classe C^1 e isto prova o teorema de Picard. ■

Figura 35. Continua la prueba del teorema de Picard
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 17)

Observamos que prevalece en la prueba el uso del lenguaje natural y la representación algebraica. También se observa procedimientos algebraicos.

A continuación, se presenta un resultado importante del teorema de Picard a través del siguiente corolario (figura 36).

COROLÁRIO 1.9
 Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times E$ e seja $f : \Omega \rightarrow E$ contínua com D_2f também contínua. Para todo ponto (t_0, x_0) em Ω existe uma vizinhança $V = I(t_0) \times B(x_0)$ tal que $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, tem uma única solução em $I(t_0)$. Além disso, o gráfico

Figura 36. Teorema de existencia y unicidad
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 18)

En la demostración se hace uso del lenguaje natural y la representación simbólica. La demostración se basa en un teorema anterior, como se observa en la figura 37.

DEMONSTRAÇÃO
 Seja U uma vizinhança de (t_0, x_0) tal que $f|U$ é Lipschitziana e $|f| \leq M$ em U . Seja $\alpha > 0$ suficientemente pequeno para que $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq U$, onde $b = \alpha M$. Conclui-se o argumento aplicando o Teorema 1.8. ■

Figura 37. Prueba del corolario 1.9
 Fuente: Sotomayor (2011, p. 18)

Aquí se debilita las condiciones para la existencia y unicidad, este corolario es usado en los libros didácticos, esta expresado utilizando lenguaje natural, representación simbólica y algebraica. Aquí se exige que f y D_2f sean continuas en Ω , para garantizar la unicidad de la solución que pase por un punto $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Aquí en el teorema de Peano se pide que f sea continua y acotada en Ω para garantizar por lo menos una solución (figura 38).

TEOREMA 1.13 Teorema de Peano
 Seja f contínua em $\Omega = I_a \times B_b$ como no Teorema 1.8. Se $|f| < M$ em Ω , (1.2) tem pelo menos uma solução em I_a , onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Figura 38. Teorema de Peano
 Fuente: Sotomayor (2011, p.19)

En la prueba del teorema se utiliza lenguaje natural, representación simbólica y algebraica, en el proceso de la demostración se usa conceptos intramatemáticos, como se muestra en la figura 39.

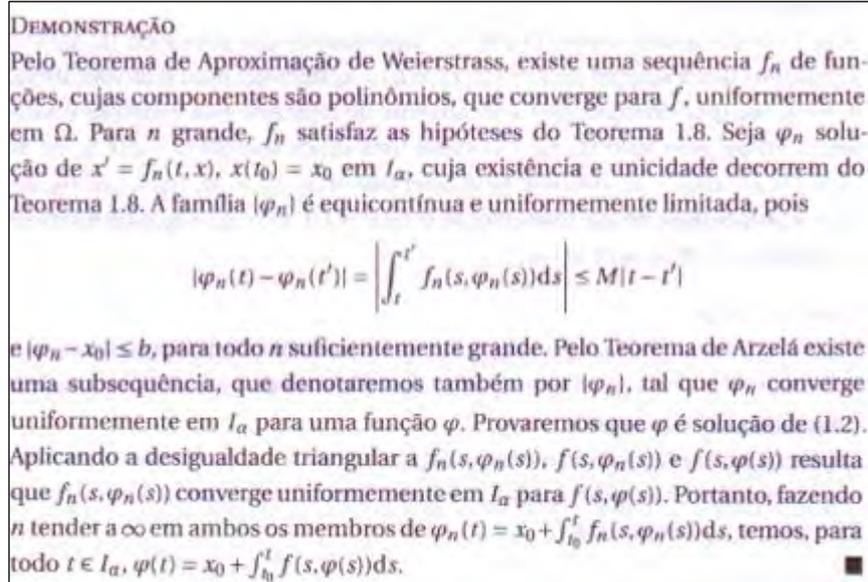


Figura 39. Prueba del teorema de Peano
 Fuente: Sotomayor (2011, p.19)

A continuación, presentamos algunas características que se presentan en el texto:

Las definiciones, Lemas, teoremas corolarios y ejercicios son escritos de manera formal.

Sotomayor (2011) da énfasis a las cuestiones que involucran condiciones de existencia y unicidad de la EDO de primer orden.

Se inicia el estudio de la EDO dando una definición vectorial, que luego lo explicita a un sistema de EDO de primer orden.

Además, los problemas que se presentan como ejemplos y propuestos están situados en un contexto intramatemático.

En el texto se utiliza el lenguaje natural, representación algebraica, representación gráfica y simbólica. Se presentan el paso del lenguaje natural a la representación algebraica y está casi ausente el recíproco. También se halla presente el pasaje del lenguaje natural y la representación algebraica a la representación gráfica, mientras que es nulo el pasaje recíproco. Los procedimientos algebraicos realizados no se hallan explicitados, invitando al lector a realizarlo.

Los ejercicios están al final del capítulo y hacen referencia a las EDO, se puede observar que sus enunciados sugieren el uso de definiciones, Lemas, teoremas y corolarios tratados a lo largo de este capítulo, se privilegian las demostraciones.

Los ejercicios en su mayoría se desarrollan en forma algebraica, no se sugiere el paso de una representación hacia otra representación y mucho menos, no hay una coordinación entre ellos.

2.3 Enseñanza de la ecuación diferencial de primer orden

De acuerdo a la ingeniería Didáctica de Artigue (1995), se está en la fase preliminar, en el estudio del aspecto didáctico, que para nuestra investigación es ver cómo es la enseñanza de la EDO en los estudiantes que están vinculados con nuestro estudio y están llevando el curso de Matemática Aplicada a la Ingeniería, específicamente la carrera de Ingeniería Mecánica.

Para conseguir nuestro propósito, hemos elegido un texto de consulta de la referencia bibliográfica del sílabo del curso mencionado, con el fin de revisar cómo se abordan las EDOs en el nivel universitario.

El libro escogido es el de Zill (2009), analizaremos el capítulo 1 (ver cuadro 2) y parte del capítulo 2. El primer capítulo se titula “Introducción a las ecuaciones diferenciales”, empieza con un pequeño preámbulo y está dividido en tres secciones como se muestra en el cuadro 2. El segundo capítulo se titula “ecuaciones diferenciales de primer orden” aquí también empieza con un pequeño preámbulo y está dividido en seis secciones como se indica en el cuadro 3.

Cuadro 2. Contenido del capítulo 1 del libro didáctico

Capítulo 1. Introducción a las ecuaciones diferenciales
1.1 Definiciones y terminología
1.2 Problemas con valores iniciales
1.3 Ecuaciones diferenciales. con modelos matemáticos

La sección 1.1, está titulada como **Definiciones y terminología**, al inicio el autor presenta los saberes previos que el alumno debe manejar para empezar el estudio de las ecuaciones diferenciales, como: a) definición de derivada, b) reglas de derivación, c) derivada como una razón de cambio, d) primera derivada y crecimiento/decrecimiento, y e) segunda derivada y concavidad.

El autor presenta un ejemplo donde se utiliza lenguaje natural, representación simbólica y algebraica. Además, provoca en el alumno movilizar propiedades de la derivada y de su representación simbólica, con el objetivo de presentar una ecuación diferencial como se muestra en la figura 40.

INTRODUCCIÓN La derivada dy/dx de una función $y = \phi(x)$ es otra función $\phi'(x)$ que se encuentra con una regla apropiada. La función $y = e^{0.1x^2}$ es derivable en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y usando la regla de la cadena, su derivada es $dy/dx = 0.2xe^{0.1x^2}$. Si sustituimos $e^{0.1x^2}$ en el lado derecho de la última ecuación por y , la derivada será

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy. \quad (1)$$

Figura 40. Ejemplo de una ecuación diferencial
Fuente: Zill, D. (2009, p. 2)

A continuación, Zill (2009) presenta una definición de la ecuación diferencial utilizando un discurso escrito en español (ver figura 41).

DEFINICIÓN 1.1.1 Ecuación diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**.

Figura 41. Definición de ecuación diferencial
Fuente: Zill, D. (2009, p. 2)

Además, el autor realiza una clasificación de las EDOs de acuerdo: a) tipo, b) orden, y c) linealidad.

Según el autor, en la **clasificación por tipo**, se toma en cuenta el número de variables independientes que intervienen en la ecuación diferencial. Por consiguiente, se divide en dos tipos: en **EDO** y **ecuación diferencial parcial (EDP)**, en la figura 42 se presenta una definición para el primer tipo, utiliza un discurso escrito y da ejemplos utilizando representación simbólica y algebraica.

Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo,

Una ED puede contener más de una variable dependiente.

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad y \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \quad (2)$$

Figura 42. Definición de una EDO

Fuente: Zill, D. (2009, p. 2)

Enseguida, Zill (2009) presenta una definición para el segundo tipo, (ver figura 43). Aquí, también utiliza discurso escrito y en los ejemplos utiliza la representación simbólica y algebraica.

Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (EDP)**. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Figura 43. Definición de una EDP

Fuente: Zill, D. (2009, pp. 2-3)

El autor, en la **clasificación por orden**, utiliza un discurso escrito, presenta un ejemplo de una EDO donde se hace uso de la representación simbólica y algebraica, como se muestra en la figura 44. Aquí, falta colocar un ejemplo para una EDP.

CLASIFICACIÓN POR ORDEN El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Por ejemplo,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Figura 44. Definición de orden de una ecuación diferencial

Fuente: Zill, D. (2009, p. 3)

En seguida, en el texto se presenta una representación simbólica de una EDO de n ésimo orden, donde x es la variable independiente e y la variable dependiente, dada “ por $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ ”(Zill,2009, p. 3).

A continuación, el autor define una ecuación diferencial normal, tal como se muestra en la figura 45.

La ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5)$$

donde f es una función continua con valores reales, se conoce como la **forma normal** de la ecuación (4).

Figura 45. Ecuación diferencial normal
Fuente: Zill, D. (2009, p. 4)

Seguidamente se presenta ejemplos, utilizando representación algebraica para entender la definición de una ecuación diferencial normal, (ver figura 46).

Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden $4xy' + y = x$ es $y' = (x - y)/4x$; la forma normal de la ecuación de segundo orden $y'' - y' + 6y = 0$ es $y'' = y' - 6y$.

Figura 46. Ejemplo de ecuación diferencial normal
Fuente: Zill, D. (2009, p. 4)

En la **clasificación por linealidad**, Zill (2009) define a una EDO lineal y no lineal, este último es aquella EDO que no es lineal. Además, en la definición del primer objeto matemático utiliza un discurso escrito, una representación simbólica y una representación algebraica como se muestra en la figura 47.

Una ecuación diferencial de n -ésimo orden (4) se dice que es **lineal** si F es lineal en $y, y', \dots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n -ésimo orden es lineal cuando la ecuación (4) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (6)$$

Figura 47. Definición de una EDO lineal
Fuente: Zill, D. (2009, p. 4)

Según el autor, el objetivo del curso es resolver o hallar soluciones de EDO. A continuación, presenta una definición de solución de una EDO utilizando un lenguaje natural y representación simbólica, tal como se observa en la figura 48.

DEFINICIÓN 1.1.2 Solución de una EDO

Cualquier función ϕ , definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I , las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en el intervalo.

Figura 48. Definición de solución de una EDO
Fuente: Zill, D. (2009, p. 5)

Luego, con el objetivo de aclarar la definición inicial de solución de una EDO, se presenta otra definición equivalente donde se muestra la representación simbólica de una solución ϕ que satisface una ecuación diferencial de orden n , como se observa en la figura 49.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden (4) es una función ϕ que posee al menos n derivadas para las que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } I.$$

Figura 49. Definición equivalente
Fuente: Zill, D. (2009, p. 5)

A continuación, Zill (2009) utiliza un lenguaje natural y simbólico para dar detalles del intervalo de definición I , es decir del intervalo donde está definida la solución de una EDO, (ver figura 50).

INTERVALO DE DEFINICIÓN No podemos pensar en la *solución* de una ecuación diferencial ordinaria sin simultáneamente pensar en un *intervalo*. El intervalo I en la definición 1.1.2 también se conoce con otros nombres como son **intervalo de definición**, **intervalo de existencia**, **intervalo de validez**, o **dominio de la solución** y puede ser un intervalo abierto (a, b) , un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞) , etcétera.

Figura 50. Intervalo de definición
Fuente: Zill, D. (2009, p. 5)

Enseguida, en el texto haciendo uso de la representación escrita, simbólica y algebraica, presenta un ejemplo con dos ejercicios, donde en cada uno de ellos se proporciona una EDO, una función y un intervalo. Se pide verificar que la función dada es una solución de la EDO en el intervalo proporcionado. Además, se indica que la función $y = 0$ es otra solución de las EDOs, (ver figura 51).

EJEMPLO 1 Verificación de una solución

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

a) $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}; y = \frac{1}{16}x^4$ b) $y'' - 2y' + y = 0; y = xe^x$

SOLUCIÓN Una forma de verificar que la función dada es una solución, es ver, una vez que se ha sustituido, si cada lado de la ecuación es el mismo para toda x en el intervalo.

a) De

lado izquierdo: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4 \cdot x^3) = \frac{1}{4}x^3,$

lado derecho: $xy^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3.$

veamos que cada lado de la ecuación es el mismo para todo número real x . Observe que $y^{1/2} = \frac{1}{4}x^2$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $\frac{1}{16}x^4$.

b) De las derivadas $y' = xe^x + e^x$ y $y'' = xe^x + 2e^x$ tenemos que para todo número real x ,

lado izquierdo: $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0,$

lado derecho: $0.$ ■

En el ejemplo 1, observe también, que cada ecuación diferencial tiene la solución constante $y = 0, -\infty < x < \infty$. Una solución de una ecuación diferencial que es igual a cero en un intervalo I se dice que es la **solución trivial**.

Figura 51. Verificación de una solución
Fuente: Zill, D. (2009, p. 5)

Zill (2009), define la curva solución de una EDO, utiliza un discurso escrito y representación simbólica, (ver figura 52).

CURVA SOLUCIÓN La gráfica de una solución ϕ de una EDO se llama **curva solución**. Puesto que ϕ es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I .

Figura 52. Definición de curva solución
Fuente: Zill, D. (2009, p. 5)

Asimismo, el autor hace notar la diferencia entre la gráfica de una función ϕ y la gráfica de una solución ϕ de una EDO, para ello utiliza un ejemplo 2, (ver figura 53).

EJEMPLO 2 Función contra solución

El dominio de $y = 1/x$, considerado simplemente como una *función*, es el conjunto de todos los números reales x excepto el 0. Cuando trazamos la gráfica de $y = 1/x$, dibujamos los puntos en el plano xy correspondientes a un juicioso muestreo de números tomados del dominio. La función racional $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, en la figura 1.1.1a se muestra su gráfica, en una vecindad del origen. La función $y = 1/x$ no es derivable en $x = 0$, ya que el eje y (cuya ecuación es $x = 0$) es una asíntota vertical de la gráfica.

Ahora $y = 1/x$ es también una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' + y = 0$ (Compruebe). Pero cuando decimos que $y = 1/x$ es una *solución* de esta ED, significa que es una función definida en un intervalo I en el que es derivable y satisface la ecuación. En otras palabras, $y = 1/x$ es una solución de la ED en *cualquier* intervalo que no contenga 0, tal como $(-3, -1)$, $(\frac{1}{5}, 10)$, $(-\infty, 0)$, o $(0, \infty)$. Porque las curvas solución definidas por $y = 1/x$ para $-3 < x < -1$ y $\frac{1}{2} < x < 10$ son simplemente tramos, o partes, de las curvas solución definidas por $y = 1/x$ para $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$, respectivamente, esto hace que tenga sentido tomar el intervalo I tan grande como sea posible. Así tomamos I ya sea como $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. La curva solución en $(0, \infty)$ es como se muestra en la figura 1.1.1b.

Figura 53. Función contra solución
Fuente: Zill, D. (2009, p. 6)

Además, el autor la explicación del ejemplo 2 mediante la representación gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ y la solución $y = \frac{1}{x}$, $x \in < 0, \infty >$ de la ecuación $xy' + y = 0$, como se muestra en la figura 54.

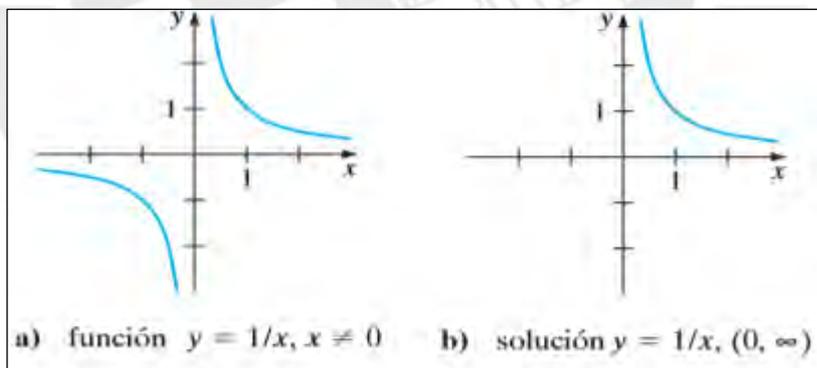


Figura 54. Representación gráfica
Fuente: Zill, D. (2009, p. 6)

Zill (2009), a una solución de una ecuación diferencial la clasifica en dos tipos: **Solución explícita** es “una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes” (Zill, D. 2009, p. 6). Asimismo, en el texto se representa simbólicamente como $y = \phi(x)$, donde x es llamada variable independiente e y es la variable dependiente. Además, en el texto se presenta ejemplos donde utiliza la representación algebraica, $y = \frac{1}{16}x^4$, $y = xe^x$ y

$y = 1/x$ son soluciones explícitas, respectivamente, de $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$, $y'' - 2y + y = 0$, y $xy' + y = 0$ (Zill, 2009, p. 6).

Solución implícita, según el texto al resolver una EDO no siempre se tiene una expresión de la forma $y = \phi(x)$, “Con frecuencia se tiene que conformar con una relación o expresión $G(x, y) = 0$ que define una solución ϕ ” (Zill, D. 2009, p. 6). A continuación, el Zill (2009) presenta una definición para esta solución, (ver figura 55).

DEFINICIÓN 1.1.3 Solución implícita de una EDO

Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria (4) en un intervalo I , suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I .

Figura 55. Definición de solución implícita
Fuente: Zill, D. (2009, p. 6)

Enseguida, el autor presenta un ejemplo donde hay una ecuación y una EDO, se deriva implícitamente la ecuación, obteniéndose una EDO, que mediante manipulación algebraica se llega a obtener la EDO presentada al inicio. Esto prueba que la ecuación es solución implícita de la EDO, (ver figura 56).

EJEMPLO 3 Comprobación de una solución implícita

La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (8)$$

en el intervalo abierto $(-5, 5)$. Derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \quad \text{o} \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Resolviendo la última ecuación para dy/dx se obtiene (8). Además, resolviendo $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Las dos funciones $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ satisfacen la relación (que es, $x^2 + \phi_1^2 = 25$ y $x^2 + \phi_2^2 = 25$) y son las soluciones explícitas definidas en el intervalo $(-5, 5)$. Las curvas solución dadas en las figuras 1.1.2b y 1.1.2c son tramos de la gráfica de la solución implícita de la figura 1.1.2a. ■

Figura 56. Comprobación de una solución
Fuente: Zill, D. (2009, p. 7)

Zill (2009) utiliza la representación gráfica para ilustrar las soluciones que se indican en la figura 56, este sirve de apoyo para la comprensión del concepto de solución implícita y solución explícita, (ver figura 57).

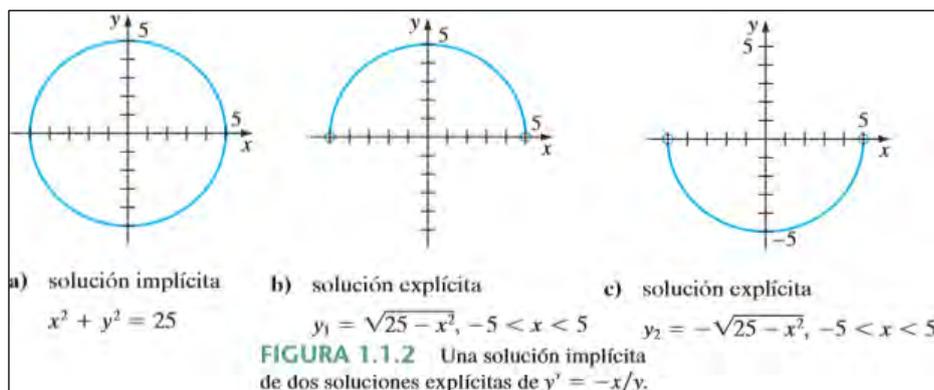


Figura 57. Ejemplo de solución implícita y explícita
 Fuente: Zill, D. (2009, p. 7)

En el estudio de la EDO, algunos textos afirman que, “una solución ϕ es algunas veces llamada integral de la ecuación y su gráfica se llama curva integral” (Zill, 2009). Además, el autor sostiene que una EDO de primer orden $F(x, y, y') = 0$ tiene como solución a una familia de soluciones $G(x, y, c) = 0$, donde c es una constante arbitraria, como se muestra en la figura 58.

cuando resolvemos una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, normalmente obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro c . Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones llamado **familia de soluciones uniparamétrica**.

Figura 58. Familia de soluciones uniparamétricas
 Fuente: Zill, D. (2009, p. 7)

En seguida, en el texto se generaliza la idea presentada en la figura 58, es decir, si se tiene una EDO de orden n , representada simbólicamente por $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ entonces se tiene una familia de soluciones $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes arbitrarias, (ver figura 59).

Cuando resolvemos una ecuación diferencial de orden n , $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, buscamos una **familia de soluciones n-paramétrica** $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$. Esto significa que *una sola ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones* correspondiendo a un número ilimitado de elecciones de los parámetros.

Figura 59. Familia de soluciones n-paramétricas
 Fuente: Zill, D. (2009, p. 7)

A continuación, Zill (2009) refiere a la **solución particular** como aquella que se obtiene de la familia de soluciones al dar valores a las constantes arbitrarias, por

ejemplo, se tiene la ecuación diferencial $xy' - y = x^2 \text{sen}x$ cuya familia de soluciones es $y = cx - x \cos x$, luego $y = -x \cos x$ es una solución particular que se logra haciendo $c = 0$, y la **solución singular** como aquella que no proviene de la familia de soluciones, por ejemplo, dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ que tiene como familia de soluciones a $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$ y como solución singular a $y = 0$, donde notamos que esta no se puede obtener de la familia de soluciones.

En esta parte del texto se presenta dos ejemplos, resalta uno de ellos (ver figura 60) donde a partir de la familia de soluciones, construye una solución particular, esta es una función definida por tramos.

EJEMPLO 5 Una solución definida por tramos

Debe comprobar que la familia uni-paramétrica $y = cx^4$ es una familia de soluciones uni-paramétrica de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase la figura 1.1.4a. La función derivable definida por tramos

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución particular de la ecuación pero no se puede obtener de la familia $y = cx^4$ por una sola elección de c ; la solución se construye a partir de la familia eligiendo $c = -1$ para $x < 0$ y $c = 1$ para $x \geq 0$. Véase la figura 1.1.4b.

Figura 60. Solución definida por tramos
Fuente: Zill, D. (2009, p. 8)

Para un mejor entendimiento del ejemplo 5, se presenta las representaciones gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$, que tiene como familia de soluciones a $y = cx^4$, a partir de esta solución se construyen las soluciones particulares mostradas en la figura 61.

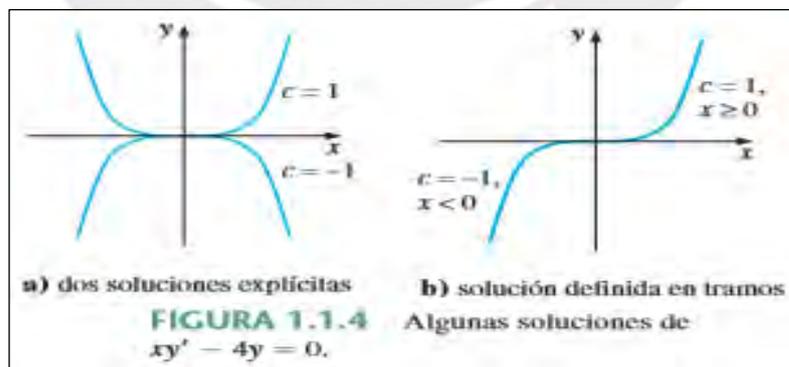


Figura 61. Soluciones particulares
Fuente: Zill, D. (2009, p. 8)

Zill (2009), como último tema a tratar de la sección 1.1, define **Un sistema de EDOs** utilizando una representación escrita, (ver figura 62).

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Hasta este momento hemos analizado sólo ecuaciones diferenciales que contienen una función incógnita. Pero con frecuencia en la teoría, así como en muchas aplicaciones, debemos tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** tiene dos o más ecuaciones que implican derivadas de dos o más funciones incógnitas de una sola variable independiente.

Figura 62. Sistemas de ecuaciones diferenciales
Fuente: Zill, D. (2009, p. 8)

En el texto se muestra un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales, con dos ecuaciones diferenciales para el cual utiliza la representación simbólica. Asimismo, las variables x , y son llamadas variables dependientes y t variable independiente (Zill, 2009), tal como se observa en la figura 63.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y). \end{aligned}$$

Figura 63. Ejemplo de un sistema de EDO
Fuente: Zill, D. (2009, p. 8)

Además, una solución del sistema mostrado en la figura 63, son las funciones derivables $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ que satisfacen el sistema en un intervalo I (Zill, 2009).

Finaliza la sección 1.1, mediante un resumen de los temas tratados, es importante rescatar que aquí se introduce el término de **solución general**, (ver figura 64), que es en si la familia de soluciones vistos en la figura 59.

Si toda solución de una EDO de n -ésimo orden $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I se puede obtener a partir de una familia n -parámetros $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ eligiendo apropiadamente los parámetros c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, entonces diremos que la familia es la **solución general** de la ED.

Figura 64. Solución general
Fuente: Zill, D. (2009, p. 9)

La sección 1.2, esta titulada como **Problemas con valores iniciales**, al inicio Zill (2009) presenta los saberes previos que el alumno debe conocer, para empezar el estudio de esta sección, como: a) Forma normal de una ecuación diferencial, b) Solución de una ecuación diferencial, y c) Familia de soluciones.

A continuación, en el texto se define el concepto de problema con valores iniciales (PVI) que es una ecuación diferencial de orden n en su forma normal, sujeto a condiciones iniciales como se muestra en la figura 65.

INTRODUCCIÓN Con frecuencia nos interesan problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial tal que $y(x)$ satisface condiciones prescritas, es decir, condiciones impuestas sobre una $y(x)$ desconocida o sus derivadas. En algún intervalo I que contiene a x_0 el problema

Resolver:
$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Sujeto a:
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

donde y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son constantes reales arbitrarias dadas se llama **problema con valores iniciales (PVI)**. Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto x_0 , $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se llaman **condiciones iniciales**.

Figura 65. Problema de valores iniciales

Fuente: Zill, D. (2009, p. 13)

El autor, muestra una representación simbólica de una ecuación diferencial de primer orden con una condición inicial y enseguida hace un esbozo de su solución que pasa por el punto (x_0, y_0) como se puede observar en la figura 66.

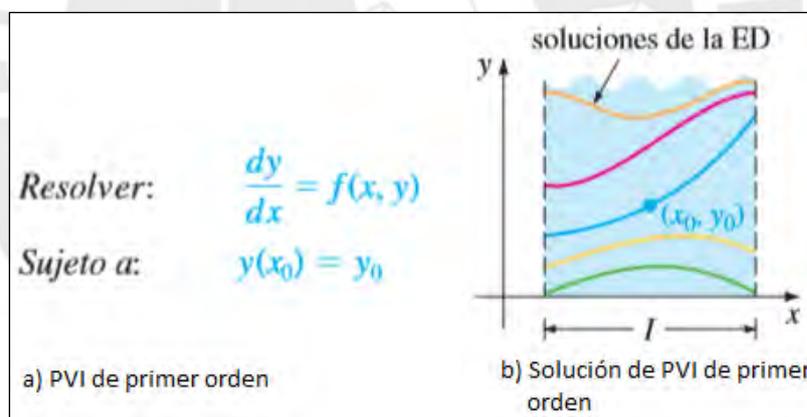


Figura 66. EDO de primer orden y solución

Fuente: Zill, D. (2009, p. 13)

Además, Zill (2009) muestra un PVI de segundo orden y a continuación realiza un esbozo de su solución, el cual tiene que pasar por el punto (x_0, y_0) y tener como pendiente en ese punto el valor de y_1 , (ver figura 67).

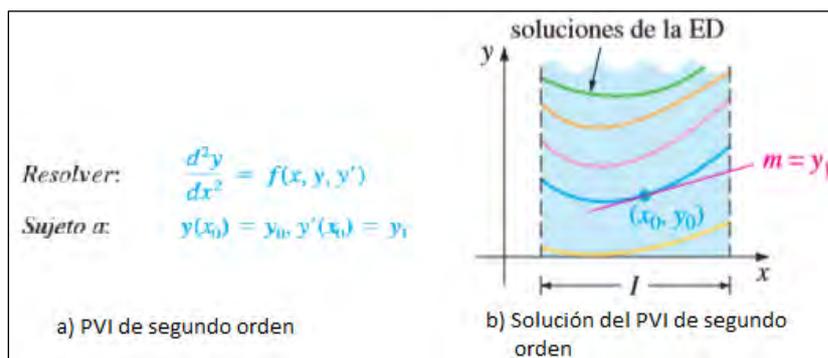


Figura 67. EDO de segundo orden y solución
Fuente: Zill, D. (2009, p. 13)

El autor, presenta un ejemplo de un PVI de primer orden que tiene dos soluciones y que pasan por el punto (0,0), como se muestra en la figura 68.

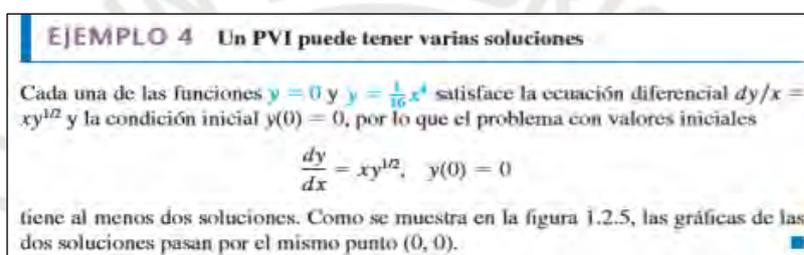


Figura 68. PVI tiene dos soluciones
Fuente: Zill, D. (2009, p. 15)

A la pregunta ¿Cuáles son las condiciones suficientes para que un PVI de primer orden tenga solución única?, esta es contestada con el siguiente teorema, (ver figura 69).

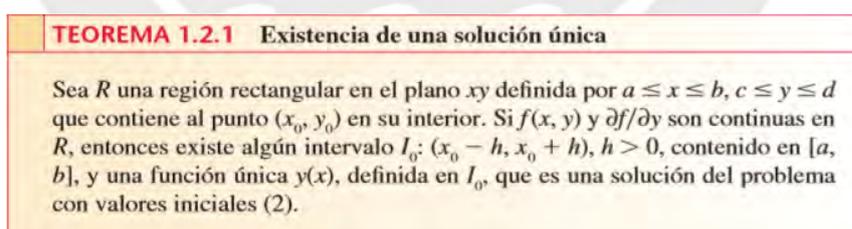


Figura 69. Teorema de existencia y unicidad
Fuente: Zill, D. (2009, p. 15)

En el texto, el resultado del teorema es representado gráficamente, (ver figura 70).

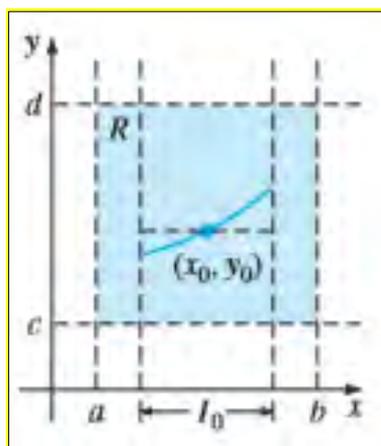


Figura 70. Región R
Fuente: Zill, D. (2009, p. 15)

La sección 1.3 del texto, se titula **Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos**. Aquí se presenta la idea de una EDO como un modelo matemático, para ello se presenta algunos modelos en biología, química y física (Zill, 2009). Además, se da un concepto de modelo matemático, para ello utiliza un lenguaje natural como se muestra en la figura 71.

MODELOS MATEMÁTICOS Con frecuencia es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático** y se construye con ciertos objetivos. Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto ecosistema al estudiar el crecimiento de la población animal en ese sistema, o podemos desear datar fósiles y analizar el decaimiento de una sustancia radiactiva ya sea en el fósil o en el estrato en que éste fue descubierto.

Figura 71. Definición de modelo matemático
Fuente: Zill, D. (2009, p. 19)

En esta sección Zill (2009) utiliza lenguaje natural, representación simbólica y algebraica para describir diferentes modelos como: dinámica poblacional, decaimiento radiactivo, ley de enfriamiento de Newton, propagación de una enfermedad, reacciones químicas, mezclas, drenado de un tanque, circuito en serie, cuerpos en caída, cuerpos en caída y resistencia del aire, cables suspendidos. Como por ejemplo el modelo de propagación de una enfermedad presentado en la figura 72.

PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD Una enfermedad contagiosa, por ejemplo un virus de gripe, se propaga a través de una comunidad por personas que han estado en contacto con otras personas enfermas. Sea que $x(t)$ denote el número de personas que han contraído la enfermedad y sea que $y(t)$ denote el número de personas que aún no han sido expuestas al contagio. Es lógico suponer que la razón dx/dt con la que se propaga la enfermedad es proporcional al número de encuentros, o *interacciones*, entre estos dos grupos de personas. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)$ y $y(t)$, esto es, proporcional al producto xy , entonces

$$\frac{dx}{dt} = kxy, \quad (4)$$

donde k es la constante usual de proporcionalidad. Suponga que una pequeña comunidad tiene una población fija de n personas. Si se introduce una persona infectada dentro de esta comunidad, entonces se podría argumentar que $x(t)$ y $y(t)$ están relacionadas por $x + y = n + 1$. Utilizando esta última ecuación para eliminar y en la ecuación (4) se obtiene el modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x). \quad (5)$$

Una condición inicial obvia que acompaña a la ecuación (5) es $x(0) = 1$.

Figura 72. Modelo propagación de una enfermedad
Fuente: Zill, D. (2009, p. 22)

El autor, en el capítulo 2 presenta seis secciones, que comprende desde la página 31 hasta la página 81.

Cuadro 3. Contenido del capítulo 2

CAPÍTULO 2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	
2.1	Curvas solución sin una solución
2.2	Variables Separables
2.3	Ecuaciones lineales
2.4	Ecuaciones exactas
2.5	Soluciones por sustitución
2.6	Métodos numéricos

Según lo mostrado en el cuadro 3 nuestro interés de estudio es la sección 2.1 cuyo título es **Curvas solución sin una solución**, aquí el autor plantea que dada una EDO de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ y suponiendo que no se cuenta con ninguna técnica para hallar una solución entonces la misma ecuación diferencial puede indicar el comportamiento de sus soluciones. Se dan dos técnicas cualitativas para analizar una ecuación diferencial que permite graficar aproximadamente la curva solución sin resolver la ecuación. Específicamente estudiaremos la subsección 2.1.1, cuyo título

es **Campo direccional**, en la sección 1.2 la continuidad de las funciones $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ permiten contestar preguntas cualitativas acerca de las existencias y unicidad de las soluciones.

En esta sección, Zill (2009) plantea otras preguntas cualitativas acerca de las soluciones. ¿Cómo se comporta una solución cerca de un punto dado? ¿Cómo se comporta una solución cuando $x \rightarrow \infty$?. El autor refiere que estas preguntas se pueden responder cuando la función f depende sólo de la variable y . En el texto se empieza con un concepto elemental de cálculo, (ver figura 73).

Una derivada dy/dx de una función derivable $y = y(x)$ da las pendientes de las rectas tangentes en puntos de su gráfica.

Figura 73. Concepto de la derivada
Fuente: Zill, D. (2009, p. 35)

El autor utiliza el lenguaje natural y la representación simbólica, para afirmar el hecho que una solución de una ecuación diferencial de orden uno, es diferenciable en I , además es continua en I , (ver figura 74).

PENDIENTE Debido a que una solución $y = y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

es necesariamente una función derivable en su intervalo I de definición, debe también ser continua en I .

Figura 74. Solución diferenciable
Fuente: Zill, D. (2009, p. 35)

Además, según el autor el valor $f(x_0, y(x_0))$ representa la pendiente de la recta tangente a una curva solución $y(x)$ en el punto $(x_0, y(x_0))$. Además, denomina elemento lineal a un segmento pequeño que es parte de la recta tangente y pasa por el punto $(x_0, y(x_0))$. A continuación, se da un ejemplo donde se hace uso de una representación escrita y algebraica, como se puede observar en la figura 75.

Por ejemplo, considere la ecuación $dy/dx = 0.2xy$, donde $f(x, y) = 0.2xy$. En el punto $(2, 3)$ la pendiente de un elemento lineal es $f(2, 3) = 0.2(2)(3) = 1.2$.

Figura 75. Pendiente de un elemento lineal
Fuente: Zill, D. (2009, p. 35)

Además, Zill (2009) hace uso de la representación gráfica para una mejor comprensión del ejemplo desarrollado, como se observa en la figura 76.

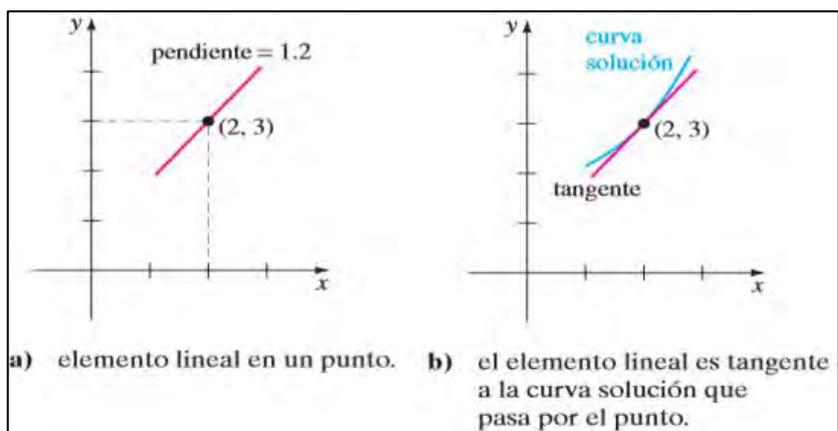


Figura 76. Elemento lineal en (2,3)
Fuente: Zill, D. (2009, p. 35)

El autor da una definición de campo direccional, como se ve

Si evaluamos sistemáticamente a f en una malla rectangular de puntos en el plano xy y se dibuja un elemento lineal en cada punto (x, y) de la malla con pendiente $f(x, y)$, entonces al conjunto de todos estos elementos lineales se le llama campo direccional o campo de pendiente de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. (Zill, 2009, p. 35).

Según el texto el campo direccional nos permite ver la forma de una familia de curvas solución de una ecuación diferencial.

De la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \text{sen}(x + y)$, en la figura 77 se muestra como las curvas solución siguen al campo direccional.

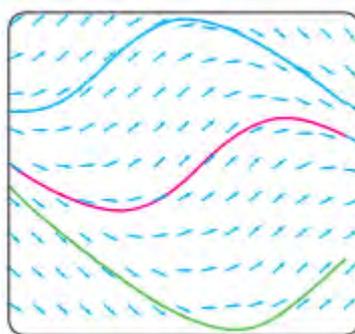
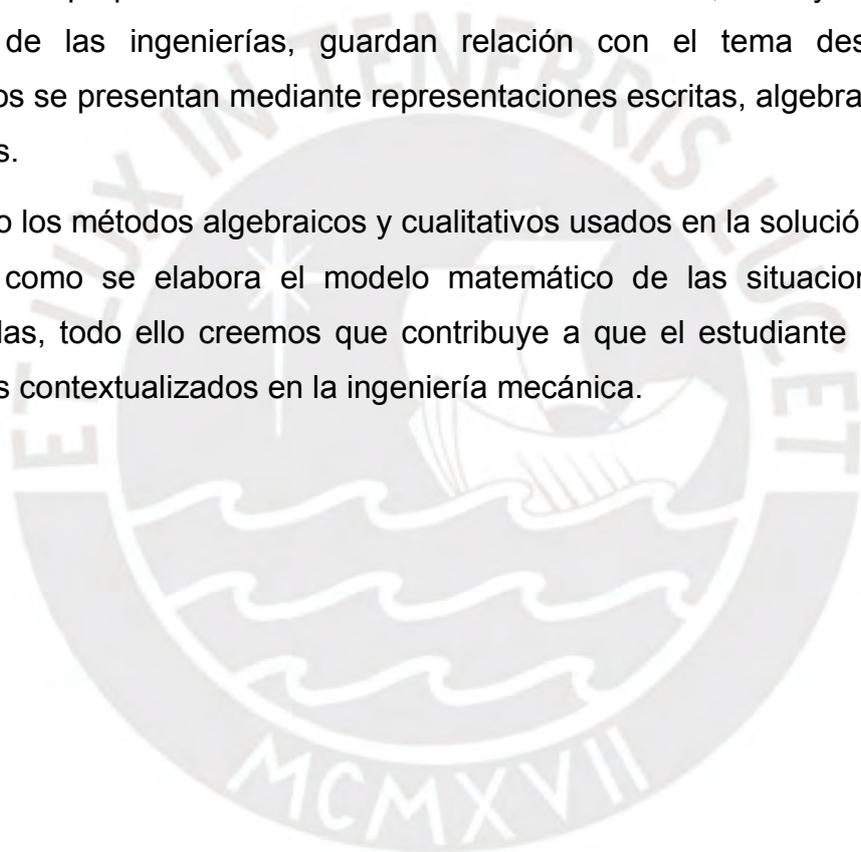


Figura 77. Las curvas solución siguen al campo direccional
Fuente: Zill, D. (2009, p. 36)

Las secciones analizadas presentan ejercicios aplicados a diversas carreras profesionales, como ingeniería civil, economía, ingeniería pesquera, ingeniería mecánica, ingeniería química, biología, física, etc. Casi ningún ejercicio requiere de una demostración formal, en su resolución hay predominio de la parte algebraica. El texto presenta problemas que se movilizan del lenguaje natural a la representación algebraica y casi ausente el pasaje recíproco, se halla presente el pasaje de la representación algebraica hacia la representación gráfica y casi ausente el pasaje recíproco.

Los ejercicios propuestos al final de cada sección del texto, la mayor parte están en contexto de las ingenierías, guardan relación con el tema desarrollado, sus enunciados se presentan mediante representaciones escritas, algebraicas, gráficas y simbólicas.

En el texto los métodos algebraicos y cualitativos usados en la solución de las EDOs, la forma como se elabora el modelo matemático de las situaciones problemas presentadas, todo ello creemos que contribuye a que el estudiante pueda resolver problemas contextualizados en la ingeniería mecánica.



CAPÍTULO III: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En el presente capítulo señalaremos las características de los sujetos de investigación, asimismo de los recursos que se utilizaron para la realización de las actividades de la fase experimental. Además, mencionaremos los instrumentos que se usaron para la recolección de datos, finalizando con el desarrollo del análisis *a priori*, *a posteriori* y la validación de la ingeniería, como lo señala la metodología de la Ingeniería Didáctica.

3.1 Escenario donde se desarrolla la Investigación

La experimentación de la investigación se desarrolló en la Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) en un salón de clase, cuya capacidad era para 60 personas, tenía 60 carpetas unipersonales, una pizarra, un proyector, un ecra y una computadora para uso del profesor.

3.2 Sujetos de Investigación

En el presente trabajo, los sujetos de investigación son estudiantes de Ingeniería Mecánica que en ese momento estaban cursando la asignatura de Matemática aplicada a la Ingeniería durante el ciclo académico 2018-B, había dos grupos horarios donde se impartía el mismo curso. Nuestro objeto matemático de estudio, la EDO, se desarrolla a partir de la cuarta semana de clases donde se inicia con la definición de la ecuación diferencial, el orden, grado, tipos de soluciones, curva solución y se ven métodos algebraicos para resolver una EDO, previamente se ha desarrollado el tema de espacios vectoriales y transformaciones lineales, conforme se muestra en el anexo A, el sílabo del curso.

Ellos cuentan con conocimientos previos como: conceptos de funciones reales de variable real, límites de funciones reales de variable real, continuidad de una función real de variable real, derivada de una función real de variable real y cálculo de antiderivadas; estos temas fueron tratados en el curso Cálculo Diferencial. También han llevado el curso Complemento de Matemática donde se desarrollan temas como vectores, cónicas con un enfoque vectorial, sistemas de ecuaciones lineales y números complejos. Asimismo, tienen conocimientos que adquirieron en el curso de Cálculo Integral como: sumatorias, la integral definida como el límite de las sumas de

Riemann y la interpretación de la integral como el área bajo la curva y se abordan diferentes técnicas para resolver una integral. Además, los sujetos de investigación han llevado el curso de Cálculo multivariable, donde ven funciones vectoriales, funciones de varias variables y se tratan técnicas para resolver integrales dobles, triples, línea y de superficie. Es imprescindible que ellos tengan conocimiento de la derivada y sus propiedades. Asimismo, ellos han llevado cursos de física como: Fundamentos Físicos de la Mecánica, Estática y Física Molecular.

Desarrollamos la parte experimental con solo 4 estudiantes, agrupados en parejas, quienes se presentaron de manera voluntaria y dieron su consentimiento (ver Anexo D), pero en el análisis solo consideramos a una pareja debido a que permanecieron desde el inicio de la experimentación hasta el final. Para nuestro análisis, de aquí en adelante cuando se escriba “pareja” se referirán a los estudiantes José y Pedro. Asimismo, cabe señalar que la pareja tiene conocimientos de métodos algebraicos para resolver una EDO, pero no saben graficar las curvas solución utilizando un campo direccional de una EDO.

En esta investigación para la fase de experimentación hemos utilizado las siguientes variables globales, ver cuadro 4.

Cuadro 4. Variables macro-didácticas o globales

Variable macro- didáctica	Descripción
Distribución de los estudiantes	Los estudiantes trabajarán en parejas
Ambiente de elaboración	Lápiz y papel
Cuadernillo de actividades	Impreso las cuatro actividades
Cuadrículas de las figuras	Realizadas en GeoGebra
Modelo del sistema de amortiguación.	Modelo de Maxwell
La recta vertical	$x = 1$

Elegimos el ambiente, lápiz y papel porque, de acuerdo con Camacho-Machin (como se cita en Perdomo, 2010), el objetivo era establecer parte de la red de significados que los estudiantes asociaban al concepto de derivada, considerando éste como punto de partida para la construcción del concepto de EDO. Además, Perdomo refiere que no todas las situaciones pueden ser resueltas empleando tecnología, o que no siempre resulta más sencillo emplear tecnología en lugar de realizar los cálculos o procedimientos empleando lápiz y papel, además nuestra situación problemática no exigió muchos procedimientos algebraicos. Por consiguiente, no era necesario usar un *software*.

El modelo de Maxwell fue elegido pues, su modelamiento necesita de una EDO de variables separables y en el contexto de la ingeniería mecánica es el modelo más simple que presentamos al estudiante y no exige procedimientos algebraicos complejos y el estudio cualitativo de su solución es apropiada para que el estudiante construya su conocimiento.

La modelo de Maxwell se obtuvo del libro titulado Ordinary differential equations with applications to mechanics de autores Soare, Teodorescu, y Toma (2007).

Elegimos $x = 1$ como una recta guía pues, didácticamente es más simple para que el estudiante visualice que a lo largo de esa recta las pendientes de los segmentos tangentes a la curva solución están variando.

La situación problema que elaboramos se sitúa en el contexto de la ingeniería mecánica, en el área de sistema de amortiguación de un automóvil, dentro de esta situación problema presentamos cuatro actividades las cuales se realizaron en un día, en dos sesiones, cuya descripción se detalla en el cuadro 5.

Cuadro 5. Descripción de la situación problema

SITUACIÓN PROBLEMA		Tiempo estimado
Actividad 1	El estudio del comportamiento del esfuerzo normal en el modelo del sistema de amortiguación.	50 minutos
Actividad 2	Construcción de la noción de isoclina.	60 minutos
Actividad 3	Representación gráfica de algunas curvas solución utilizando el campo direccional de la EDO.	60 minutos
Actividad 4	Interpretación de las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de las EDOs del sistema de amortiguación.	90 minutos

Las actividades presentadas como parte de la situación problema han sido adaptadas de la investigación de Arslan (2005).

3.3 Análisis de la situación problema

La experimentación se compone de una situación problema puesto que nos permite vincular dos áreas del conocimiento, las matemáticas avanzadas con el tema de vibraciones mecánicas, tema visto por un ingeniero mecánico egresado de las universidades en Perú.

Al respecto, Almouloud (2016), refiere que una situación problema está formado por un conjunto de preguntas abiertas y / o cerradas expresadas en un contexto más o menos matemático, que compromete un campo de problemas planteados en uno o varios ámbitos del saber y conocimientos. Su labor principal es el uso implícito, y luego explícito, de nuevos objetos matemáticos, a través de preguntas de los alumnos en el momento de la solución del problema.

Además, el autor afirma que los estudiantes deben entender los datos del problema e intervenir en su solución usando sus saberes previos. También, asevera que la situación problema debe poner en juego el campo conceptual que se desea explorar en donde se encuentra el conocimiento que se quiere enseñar. Asimismo, el autor afirma que el estudiante se da cuenta que sus saberes previos son insuficiente para resolver el problema en forma inmediata.

En la recolección de datos de la pareja se utilizó una grabadora de audio, cámara fotográfica, cuadernillo de actividades donde la pareja responde las preguntas que se le pide y hojas bond donde se desarrolla las preguntas. Además, la pareja para resolver las preguntas utilizó: lapiceros de diferente color, una regla y calculadora.

Situación problema. En este trabajo tiene la característica de ser una situación en el contexto de la ingeniera mecánica, detallamos los términos propios de la ingeniería citado en Soare et al. (2007).

Sobre el esfuerzo, Gere y Timoshenko (2002) refieren:

La relación lineal. entre el esfuerzo y la deformación unitaria en una barra sometida a tensión o compresión simple se expresa por la ecuación $\sigma = E\varepsilon$, en donde σ es el esfuerzo axial, ε es la deformación unitaria axial y E es una

constante de proporcionalidad llamada módulo de elasticidad del material. (p. 22).

El esfuerzo axial σ es llamado también esfuerzo normal, y la deformación unitaria axial ε se denomina deformación elástica. Además, el módulo de elasticidad E se llama a menudo módulo de Young.

También, Gere y Timoshenko (2002) afirman:

La ecuación $\sigma = E\varepsilon$, se conoce como ley de Hooke. En honor al famoso científico inglés Robert Hooke (1635-1703). Hooke fue la primera persona en investigar las propiedades elásticas de diversos materiales como metales, madera, piedra, hueso y tendones

Soare et al (2007) refiere que el modelo de Maxwell está definido como una combinación en serie de un modelo de Hooke (elástico) y un modelo de Newton (viscoso), como podemos observar en la figura 78.

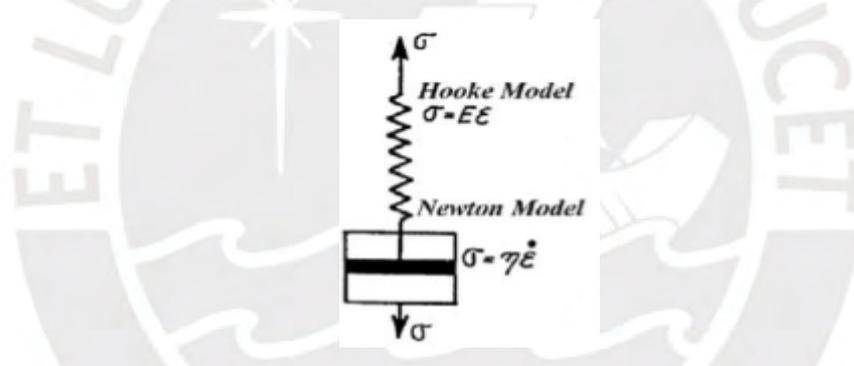


Figura 78. Modelo de Maxwell
Fuente: Soare, et al (2007. p.46).

El modelo Newton, para fluidos define al esfuerzo σ como $\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$, donde ε es la deformación viscosa y η es el coeficiente de viscosidad es constante.

Según Soare et al (2007), plantea que la deformación total ε_0 es la suma de la deformación elástica ε y la deformación viscosa ε_{visc} , además para el sistema planteado en la figura 78 la deformación total se considera constante, es decir

$$\varepsilon_0 = \varepsilon + \varepsilon_{visc}$$

Objetivo de la situación problema: interpretar las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de EDOs

Sistema de amortiguación

La empresa Sagitario, dedicada al ensamblaje de autobuses y metalmecánica, se encuentra analizando dos sistemas de amortiguación, el sistema que se considere más adecuado será usado en el ensamblaje de un vehículo, colocándose un amortiguador al lado de cada rueda.

Estos sistemas se comportan como un modelo Maxwell, es decir, como una combinación en serie de un modelo de Hooke (elástico) y de Newton (viscoso). El modelo de Maxwell se caracteriza porque, cuando un esfuerzo normal $\sigma(\text{N/m}^2)$ se aplica sobre un sistema, el esfuerzo lo recibe tanto el resorte como el amortiguador. La deformación total ε_0 (constante en el tiempo), es la suma de las deformaciones:

1) La elástica del resorte $\varepsilon_{elasticidad}$, que según el modelo de Hooke viene dada por $\varepsilon_{elasticidad} = \frac{\sigma(t)}{E}$, y

2) La viscosa ε_{visc} del amortiguador, la que según el modelo de Newton verifica $\frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\eta}$;

Donde el módulo de Young E y el coeficiente de viscosidad dinámica η son constantes.

Por lo tanto, al tener la variación instantánea de la deformación total, respecto al tiempo, se obtiene el modelo matemático para el sistema de amortiguación.

Actividad 1.

A partir del modelo matemático para el sistema de amortiguación, estudie los casos donde el esfuerzo σ sea:

- a) monótono creciente,
- b) monótono decreciente y
- c) donde sea constante.

Actividad 2

El ingeniero de la empresa Sagitario convierte la ecuación diferencial que modela el sistema de amortiguación, con los valores de $E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$ y $\eta = 0.03 \frac{N s}{m^2}$, (correspondientes al primer sistema de amortiguación: tabla A1), en una equivalente, al aplicar el cambio de variables: $x = 10^{13} t$, $y = \frac{\sigma}{10^7}$.

Esto permite tener una mejor visualización en el sistema XY de las gráficas que se pide hallar a continuación, utilizando la figura A1:

- a) Calcule las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $A_1(1; -3)$, $B_1(1; -2)$, $C_1(1; -1)$, $D_1(1; 0)$, $E_1(1; 1)$, $F_1(1; 2)$, $G_1(1; 3)$, y represente gráficamente estos puntos así como cada recta tangente por un pequeño segmento que es parte de dicha recta, cuyo centro es el punto de tangencia, lo que se denominará segmento tangente.
- b) Aplique el procedimiento del párrafo anterior a los puntos: $A_2(0; 3/2)$, $B_2(1; 3/2)$, $C_2(2; 3/2)$, $D_2(3; 3/2)$, $E_2(4; 3/2)$, $F_2(5; 3/2)$.
- c) Luego, aplique el mismo procedimiento para los puntos: $A_3(0; 3)$, $B_3(1; 3)$, $C_3(2; 3)$, $D_3(3; 3)$, $E_3(4; 3)$, $F_3(5; 3)$.
- d) ¿Qué se puede concluir de la gráfica obtenida?

Tabla A 1:

Valores estimados del módulo de Young y coeficiente viscosidad

	Sistema 1	Sistema 2
Módulo de Young (E)	$200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$	$210 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$
Coefficiente de viscosidad dinámica (η)	$0.03 \frac{N s}{m^2}$	$0.1 \frac{N s}{m^2}$

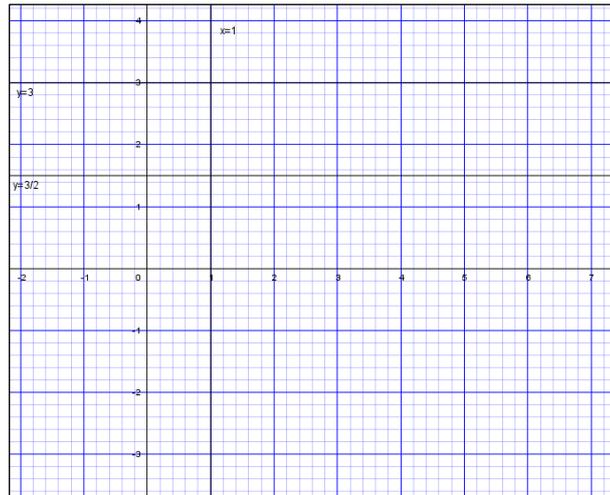


Figura A1

Actividad 3

En la nueva ecuación diferencial, reemplace la pendiente y' por una constante c , con lo cual obtendrá una isoclina. Para cada valor real de c estará asociada una isoclina. Al trazar varias isoclinas, con sus correspondientes segmentos tangentes (como en la actividad 2), se obtendrá el “campo direccional” de la ecuación diferencial. Este campo direccional se visualizará mejor si se omiten las isoclinas.

Grafique en la figura A2 la curva que es solución de la ecuación diferencial que pase por el punto A . Repetir este procedimiento para cada uno de los puntos B, C, D, E y F .

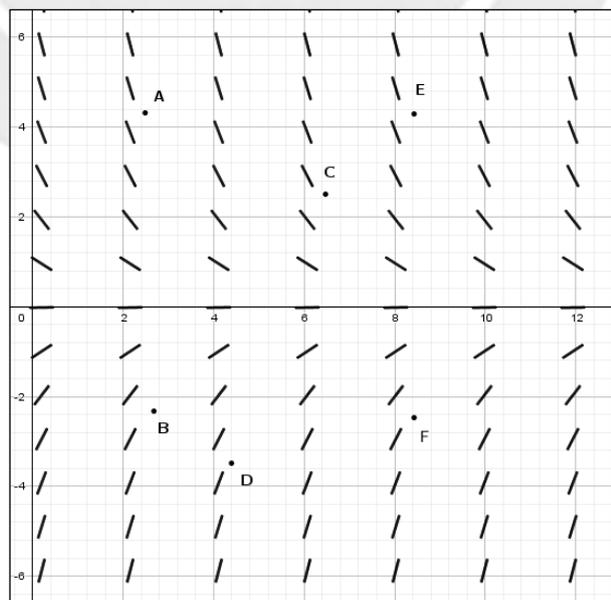


Figura A2

Actividad 4

Considerando un esfuerzo inicial $\sigma(0) = 5 \times 10^7 \frac{N}{m^2}$ con los cambios de variable realizados en la actividad 2 para algunos valores de c , en la gráfica de su isoclina asociada, ubique al menos ocho puntos uniformemente distanciados, dibujando en cada uno de ellos dos segmentos tangentes; uno por cada sistema de amortiguación. A partir de allí, grafique la solución de los dos sistemas de amortiguación y determine ¿cuál de los sistemas provoca una mejor amortiguación? Utilice la figura A3.

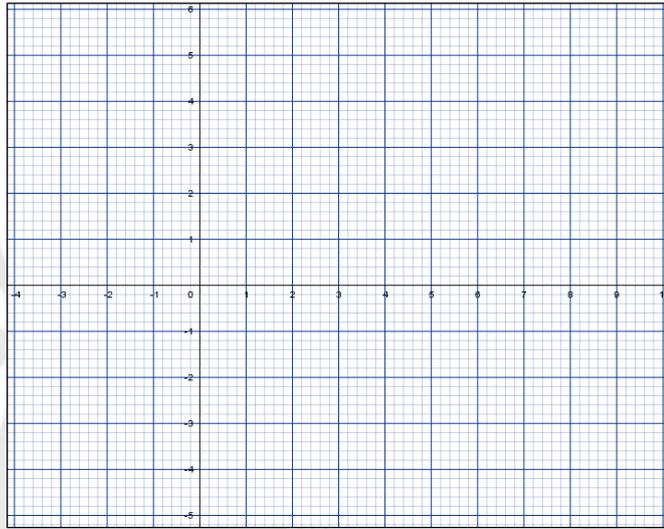


Figura A3

Figura 79. Actividades de la situación problema

Fuente: Han sido adaptados de Arslan, S. (2005) pp.235-238

Análisis *a priori* de la actividad 1

Objetivo de la actividad 1: Estudiar el comportamiento del esfuerzo normal en el modelo del sistema de amortiguación.

Una posible solución matemática (ambiente lápiz/papel)

De la información dada identificamos el tiempo como variable independiente, representada por t . Luego el esfuerzo σ es la variable dependiente que está en unidades de Newton por metro al cuadrado (N/m^2) y la razón de cambio del esfuerzo en el sistema de amortiguación con respecto al tiempo lo representamos por $\sigma'(t)$. Después reconocemos que $\varepsilon_0 = \varepsilon_{elasticidad} + \varepsilon_{visc}$, donde la deformación total ε_0 es constante en el tiempo, $\varepsilon_{elasticidad} = \frac{\sigma}{E}$ es la deformación elástica en el cual E es una constante llamada módulo de elasticidad o módulo de Young y ε_{visc} es la deformación

viscosa. Enseguida se deriva la expresión $\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{visc}$ respecto al tiempo t , obteniendo la EDO $\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = 0$, se reconoce la ley de Newton dada por $\frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}$ donde η es una constante llamada coeficiente de viscosidad, se reemplaza $\frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}$ en la ecuación diferencial obtenida y después de operaciones algebraicas obtenemos $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$. Por el contexto del problema, supondremos que la solución σ está definida para $t \geq 0$ ($[0, a]$).

Se hace $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ para conseguir puntos críticos del esfuerzo σ , en este caso se tiene que $-\frac{E}{\eta}\sigma = 0$, luego $\sigma = 0$ pues E, η son constantes positivas.

De aquí para efecto de ver si σ es una función monótona, se tomarán tres casos : Primero si $\sigma < 0 \Leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma > 0 \Leftrightarrow \sigma' > 0$ entonces σ es monótona creciente para $t \geq 0$, en conclusión, si $\sigma < 0$ para $t \geq 0$ entonces σ es monótona creciente para $t \geq 0$ (responde la parte a)). Segundo si $\sigma > 0 \Leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma < 0 \Leftrightarrow \sigma' < 0$ entonces σ es monótona decreciente para $t \geq 0$, en conclusión, si $\sigma > 0$ para $t \geq 0$ entonces σ es monótona decreciente para $t \geq 0$ (responde la parte b)). Tercero si $\sigma = 0 \Leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma' = 0$, además si se considera que la función esfuerzo es constante es decir $\sigma(t) = c$ donde c es una constante, esta se reemplaza en la EDO $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$ obteniendo $\frac{d}{dt}(c) = -\frac{E}{\eta}(c)$, se deriva $0 = -\frac{E}{\eta}c$ de aquí $c = 0$, luego $\sigma(t) = 0$ en $[0, +\infty >$, en conclusión la solución constante es $\sigma(t) = 0$ en $[0, +\infty >$ (responde la parte c)). Los resultados obtenidos en esta última parte también pueden ser representados mediante el siguiente esbozo del comportamiento de la función σ (ver figura 80).

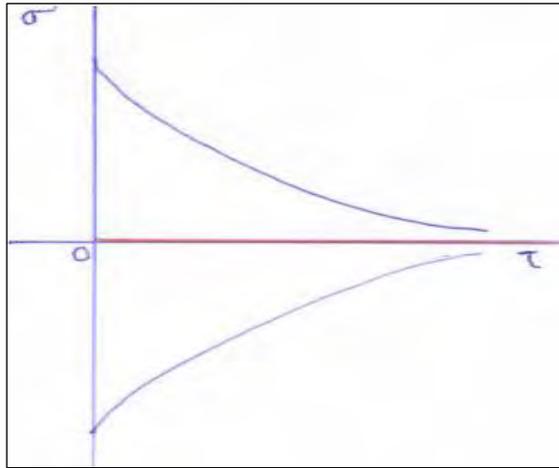


Figura 80. Comportamiento del esfuerzo normal.

En el cuadro 6 presentamos las variables micro didácticas presentes en la actividad 1

Cuadro 6. Variables micro-didácticas de la actividad 1

Variable didáctica	valores
Esfuerzo normal σ	<ul style="list-style-type: none"> • Monótono creciente • Monótono decreciente • Constante

A continuación, analizaremos **las posibles respuestas** de la pareja de estudiantes.

Esperamos que la pareja, como parte de sus acciones lean la actividad 1, subraye los párrafos y realice anotaciones en papel, relacionando lo escrito con sus respectivas representaciones algebraicas, como, por ejemplo, la deformación total en el modelo de Maxwell es representada por $\varepsilon_0 = \varepsilon_{elasticidad} + \varepsilon_{visc}$. Además, de la representación simbólica $\sigma(t)$, la pareja identificaría que t es una variable independiente que representa al tiempo, pues en problemas físicos y de ingeniería es común denotar al tiempo como dicha variable. Enseguida, reconocería al esfuerzo como variable dependiente, y se espera que la represente con el símbolo σ , aquí la pareja movilizaría sus conocimientos previos, el esfuerzo normal se representaría por la letra griega σ (situación de acción). Se supone, también, que la pareja reconozca que las unidades de la variable esfuerzo están expresadas en unidades de Newton por metro al cuadrado (N/m^2).

Luego, la pareja podría elaborar un bosquejo del sistema de amortiguación, por ejemplo, el mostrado en la figura 81 dado que, esta noción es parte de sus conocimientos previos pues, ellos han llevado cursos de física donde han trabajado con términos de amortiguador y resorte, ver en el anexo B, la malla curricular (situación de acción).

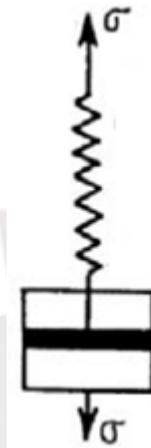


Figura 81. Resorte y amortiguador

Seguidamente, en base a las instrucciones de la actividad, esperamos que la pareja reconozca como deformación elástica a la expresión $\varepsilon_{elasticidad} = \frac{\sigma(t)}{E}$ e identifique que E es una constante llamada módulo de elasticidad o módulo de Young, seguidamente reemplazarla $\varepsilon_{elasticidad} = \frac{\sigma(t)}{E}$ en la representación algebraica de la deformación total y así obtener la representación $\varepsilon_0 = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon_{visc}$ (situación de acción). Luego, suponemos que la pareja podría relacionar la variación instantánea de la deformación total respecto al tiempo con la derivada de la función deformación total y formular que dicha variación es la derivada pues, la noción de derivada es parte de sus saberes previos. Enseguida, pensamos que aplicaría la derivada a ambos miembros de la expresión $\varepsilon_0 = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon_{visc}$ y obtendría la representación algebraica $\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = 0$ (situación de acción).

Asimismo, como parte de sus acciones, la pareja reconocería en el texto la ley de Newton para fluidos $\frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\eta}$ e identificaría que η es una constante llamada coeficiente de viscosidad, seguidamente reemplazaría $\frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}$ en la EDO

$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = 0$, es decir, $\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0$. Luego, esperamos que despeje la derivada del esfuerzo con respecto al tiempo, obteniendo la expresión $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta} \sigma$.

Enseguida la pareja podría formular que $t \geq 0$, lo que validaría llevando a la variable tiempo t al contexto de la situación problema.

A continuación, presentamos tres procedimientos que la pareja podría seguir para dar solución a la actividad 1:

En primer lugar, la pareja podría identificar el tipo de ecuación diferencial y formular que puede resolverla por medio del método de separación de variables, expresando la ecuación diferencial en la forma $\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt$. Posteriormente, integraría cada miembro de la ecuación, seguidamente obtendría la función $\sigma(t) = ce^{-\frac{E}{\eta}t}$, que es la solución de la EDO (situación de acción).

A continuación, esperamos que la pareja derive la solución $\sigma(t) = ce^{-\frac{E}{\eta}t}$, obteniendo la representación $\sigma'(t) = -c \frac{E}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t}$ (situación de acción). Después, formularía que c podría tomar una de las tres posibilidades: $c > 0$, $c = 0$, o $c < 0$, posibilidades que esperamos validen utilizando la propiedad de tricotomía de los números reales, es decir, si $a \in \mathbb{R}$, entonces una de las siguientes relaciones se cumple: $a > 0$, $a = 0$ o $a < 0$. Primero, para $c > 0$, la pareja la usaría en $\sigma(t) = ce^{-\frac{E}{\eta}t}$ y $\sigma'(t) = -c \frac{E}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t}$ obtendría $\sigma(t) > 0$ y $\sigma'(t) < 0$, de la expresión $\sigma'(t) < 0$ formularía que σ es monótona decreciente, la que sería validada al hacer uso de un significado de la derivada que establece “ Si $f'(x) < 0$ en un intervalo entonces f es monótona decreciente en ese intervalo”, en resumen diría para $c > 0$ se tiene que $\sigma(t) > 0$ y σ es monótona decreciente(variable didáctica) para $t \geq 0$. Segundo para $c < 0$, la pareja la usaría en $\sigma(t)$ y $\sigma'(t)$ obtendría $\sigma(t) < 0$ y $\sigma'(t) > 0$, de la expresión $\sigma'(t) > 0$ formularía que σ es monótona creciente, la que sería validada al hacer uso de un significado de la derivada que establece “ Si $f'(x) > 0$ en un intervalo entonces f es monótona creciente en ese intervalo”, en resumen diría para $c < 0$ se tiene que $\sigma(t) < 0$ y σ es monótona creciente(variable didáctica) para $t \geq 0$. Tercero, para $c = 0$, la pareja la usaría en $\sigma'(t) = -c \frac{E}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t}$ obteniendo $\sigma'(t) = 0$, además usando

$c = 0$ en $\sigma(t) = ce^{-\frac{E}{\eta}t}$, la pareja tendría la expresión $\sigma(t) = 0$, en resumen para $c = 0$, se tiene $\sigma'(t) = 0$ y $\sigma(t) = 0$ función constante(variable didáctica) para $t \geq 0$.

En segundo lugar, la pareja a partir de la ecuación diferencial $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$ formularía que la función $\sigma(t) = e^{-\frac{E}{\eta}t}$ es una solución, la que validaría en base a sus conocimientos de solución de una EDO, reemplazaría $\sigma(t) = e^{-\frac{E}{\eta}t}$ en la EDO, es decir $\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) = -\frac{E}{\eta}e^{-\frac{E}{\eta}t}$, que al derivar verificaría la igualdad $-\frac{E}{\eta}e^{-\frac{E}{\eta}t} = -\frac{E}{\eta}e^{-\frac{E}{\eta}t}$.

Luego, derivaría la función $\sigma(t) = e^{-\frac{E}{\eta}t}$, teniendo como resultado $\sigma'(t) = -\frac{E}{\eta}e^{-\frac{E}{\eta}t}$,

como $\frac{E}{\eta}e^{-\frac{E}{\eta}t}$ es positivo se tiene que $\sigma'(t) < 0$, enseguida la pareja formularía que σ es monótona decreciente (variable didáctica) que la validaría por un significado de la derivada que dice “ Si $f'(x) < 0$ en un intervalo entonces f es monótona decreciente en ese intervalo”. En resumen, si $\sigma(t) = e^{-\frac{E}{\eta}t}$ entonces $\sigma(t)$ es monótona decreciente (variable didáctica) y $\sigma(t) > 0$ para $t \in [0, \infty >$ (parte de sus acciones). En este caso la pareja tendría una solución parcial.

En tercer lugar, seguidamente como parte de sus acciones la pareja haría que $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ para conseguir puntos críticos del esfuerzo σ , en este caso se tiene que $-\frac{E}{\eta}\sigma = 0$, luego $\sigma = 0$ pues E, η son constantes positivas. De aquí la pareja, como parte de sus acciones, podría plantear el estudio σ en todos los reales, para realizar ello podría considerar el estudio de la función esfuerzo para $\sigma < 0$, $\sigma > 0$ o $\sigma = 0$ (situación de acción): Primero, si $\sigma < 0 \leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma > 0 \leftrightarrow \sigma' > 0$ entonces formularía que σ es monótona creciente(variable didáctica) para $t \geq 0$ que sería validada por un saber previo de la derivada que establece “Si $f'(x) > 0$ en un intervalo entonces f es monótona creciente en ese intervalo”, en conclusión, si $\sigma < 0$ para $t \geq 0$ entonces σ es monótona creciente(variable didáctica) para $t \geq 0$ (responde la parte a)). Segundo si $\sigma > 0 \leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma < 0 \leftrightarrow \sigma' < 0$ entonces formularía que σ es monótona decreciente(variable didáctica) para $t \geq 0$ que sería validada por un significado de la derivada que establece “ Si $f'(x) < 0$ en un intervalo entonces f es monótona decreciente en ese intervalo”, en conclusión, si $\sigma > 0$ para $t \geq 0$ entonces que σ es

monótona decreciente (variable didáctica) para $t \geq 0$ (responde la parte b)). Tercero si $\sigma = 0 \leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma = 0 \leftrightarrow \sigma' = 0$, de aquí $\sigma = 0$ función constante (variable didáctica) en $[0, \infty >$ (responde la parte c)). De estos últimos resultados la pareja podría realizar un esbozo del comportamiento de la función σ (ver figura 80).

Análisis *a posteriori* de la actividad 1

La pareja como parte de sus acciones leyeron, subrayaron el enunciado de la situación problema e intercambiaron ideas como estaba previsto en el análisis *a priori*, conforme mostramos en la figura 82.

La empresa Sagitario, dedicada al ensamblaje de autobuses y metalmecánica, se encuentra analizando dos sistemas de amortiguación, el sistema que se considere más adecuado será usado en el ensamblaje de un vehículo, colocándose un amortiguador al lado de cada rueda.

Estos sistemas se comportan como un modelo Maxwell, es decir, como una combinación en serie de un modelo de Hooke (elástico) y de Newton (viscoso). El modelo de Maxwell se caracteriza porque, cuando un esfuerzo normal σ (N/m²) se

Figura 82. Subrayado de la pareja

También, la pareja subrayó y encerró expresiones relevantes, para la pareja, que será usado en la solución de la actividad 1, como podemos ver en la figura 83.

La deformación total ε_0 (constante en el tiempo), es la suma de las deformaciones:

- 1) La elástica del resorte $\varepsilon_{elastividad}$, que según el modelo de Hooke viene dada por $\varepsilon_{elastividad} = \frac{\sigma(t)}{E}$, y
- 2) La viscosa ε_{visc} del amortiguador, la que según el modelo de Newton verifica $\frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\eta}$. Donde el módulo de Young E y el coeficiente de viscosidad dinámica η son constantes positivas.

Figura 83. Expresiones que identifica la pareja

Asimismo, la pareja identificó lo que va a realizar en la actividad 1, ello se evidencia en el subrayado que se muestra en la figura 84.

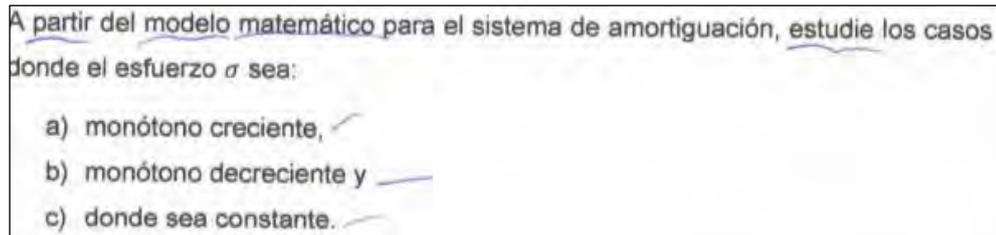


Figura 84. La pareja identifica las preguntas de la actividad 1

Además, la pareja realizó formulaciones: a) los términos, monótona creciente, monótona decreciente y constante está relacionado al curso de matemáticas 1, b) los términos, monótona creciente, monótona decreciente tiene que ver con la derivada c) hallar el modelo matemático para resolver el problema. Ello se evidencia en la transcripción del siguiente audio:

Pareja: Esto es matemática 1, monótona creciente, monótona decreciente y constante, tiene que ver con derivadas, depende de la gráfica, no te dan la gráfica, no te dan la función para sacar la derivada, hay que hallar el modelo matemático.

La parte a), b) la validan por sus conocimientos previos que se imparten en el curso de Cálculo diferencial y c) porque al leer la actividad observan que no tienen la función en forma explícita.

Luego, la pareja formula que el coeficiente de viscosidad η y la deformación total ε_0 son constantes, lo que valida no solo con lo que dice la actividad si no hace uso de sus saberes previo visto en los cursos de física donde evocan al sistema masa resorte, como se evidencia en la transcripción del audio:

La pareja: El módulo de Young varia, depende del material, pero, este sí es constante. ¿Te acuerdas el sistema masa resorte?, armar esa ecuación diferencial. ¿El coeficiente de viscosidad es constante? En este caso es constante. La deformación total es constante en el tiempo.

Enseguida, a partir del texto de la situación problema la pareja identificó propiedades y representó algebraicamente la deformación total (situación de acción), como mostramos en la figura 85, hecho que coincide con nuestro análisis *a priori*.

Tenemos: $\epsilon_{\text{elastocidad}} = \frac{\sigma(t)}{E}$
 $\frac{d\epsilon_{\text{viscosidad}}}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\eta}$
 $\epsilon_0 = \epsilon_{\text{elastocidad}} + \epsilon_{\text{viscosidad}}$

Figura 85. Representación del esfuerzo total realizado por la pareja

A continuación, la pareja movilizó sus conocimientos de variación instantánea (concepto aprendido en el primer año de estudios), para aplicarlo en la ecuación obtenida de la deformación total, obteniendo el modelo matemático, estas acciones son mostradas en la figura 86, como habíamos supuesto en el análisis *a priori*.

Derivamos: $0 = \frac{d\sigma(t)}{dt} \cdot \left(\frac{1}{E}\right) + \frac{\sigma(t)}{\eta}$
 $0 = \frac{1}{E} \sigma'(t) + \frac{\sigma(t)}{\eta}$
 (1)... $0 = \eta \sigma'(t) + E \sigma(t)$... ecuación diferencial de primer orden lineal

Figura 86. Modelo matemático obtenido por la pareja.

Seguidamente, la pareja movilizó sus conocimientos respecto a la resolución de una ecuación diferencial de primer orden y realizó acciones (procedimientos algebraicos propios del cálculo diferencial e integral) para encontrar la solución de la ecuación diferencial en forma algebraica, hecho que coincide con las apreciaciones realizadas por los investigadores mencionados en nuestros antecedentes y con nuestro análisis *a priori*, conforme se muestra en la figura 87.

Separando variables y despejando:
 $-E \sigma(t) = \eta \sigma'(t)$
 $-E \sigma(t) = \eta \frac{d\sigma(t)}{dt}$
 $-\frac{E}{\eta} \int dt = \int \frac{1}{\sigma(t)} d\sigma(t) \Rightarrow -\frac{E}{\eta} t = \ln(\sigma(t))$
 $\sigma(t) = k e^{-\frac{E}{\eta} t}, t \geq 0$

Figura 87. Solución algebraica realizada por la pareja.

A partir de la solución algebraica, la pareja procedió a formular el comportamiento del esfuerzo, según evidenciamos en el audio

La pareja: Para k positivo, la función es decreciente (variable didáctica) y para k negativa, la función es creciente (variable didáctica).

Además, la pareja esbozó el comportamiento del esfuerzo normal $\sigma(t)$ (situación de acción), conforme mostramos en la figura 88. Observemos aquí que la solución constante se indica en dicha figura con color rojo.

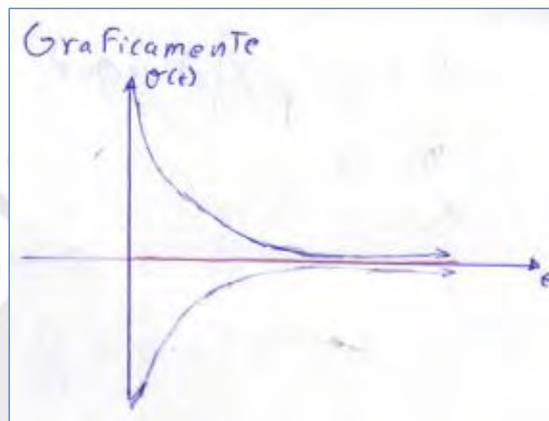


Figura 88. Esbozo del esfuerzo realizado por la pareja

El esbozo coincide con nuestro análisis *a priori*, pero se obtienen de razonamientos diferentes la pareja obtiene el esbozo a partir de la solución de la EDO, hecho que no coincide con el análisis *a priori*, pues ahí se toma en cuenta el análisis en la EDO.

Como parte de la metodología, la validación, característica de la Ingeniería Didáctica, se contrasta el análisis *a priori* y *a posteriori*. Afirmamos que se cumplió el objetivo de la actividad 1, pues la pareja logró estudiar el comportamiento del esfuerzo normal en el modelo del sistema de amortiguación, a partir de la solución general de la EDO, hecho que no habíamos contemplado en el análisis *a priori*, también, hemos identificado las acciones, formulaciones y validaciones realizadas por la pareja, lo que contribuye en lograr los objetivos específicos.

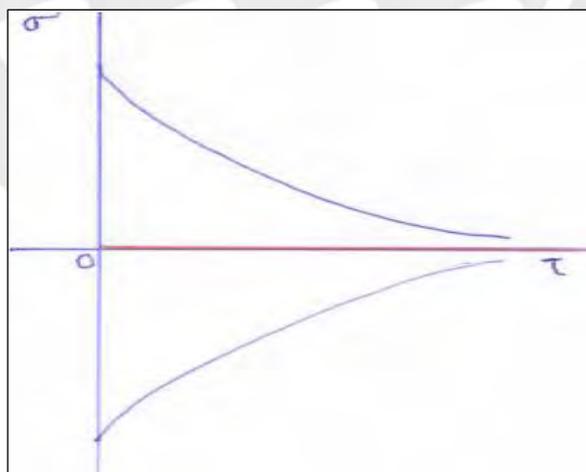
Institucionalización local de la actividad 1

Según Brousseau (como se cita en Almouloud, 2016), la institucionalización es una cuarta fase que forma parte de la situación didáctica, esta es elaborada por el profesor, donde define lo que debe aprender el estudiante como: representaciones,

vocabulario, notaciones y saberes que más adelante pueden usarse en la solución de nuevos problemas. Al finalizar la actividad 1, institucionalizamos de manera local.

El modelo matemático del sistema de amortiguación es $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$, donde que E, η son constantes positivas, por el contexto del problema vamos a suponer que la solución σ está definida para $t \geq 0$ (o un intervalo de la forma $[0, a]$).

Hacemos $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ para conseguir puntos críticos del esfuerzo σ , en este caso se tiene que $-\frac{E}{\eta}\sigma = 0$, luego $\sigma = 0$ pues E, η son constantes positivas. De aquí para un estudio de σ en todos los reales se considera tomar tres casos : Primero si $\sigma < 0 \leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma > 0 \leftrightarrow \sigma' > 0$ entonces σ es monótona creciente para $t \geq 0$, en conclusión, si $\sigma < 0$ para $t \geq 0$ entonces σ es monótona creciente para $t \geq 0$ (responde la parte a)). Segundo si $\sigma > 0 \leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma < 0 \leftrightarrow \sigma' < 0$ entonces σ es monótona decreciente para $t \geq 0$, en conclusión, si $\sigma > 0$ para $t \geq 0$ entonces σ es monótona decreciente para $t \geq 0$ (responde la parte b)). Tercero si $\sigma = 0 \leftrightarrow -\frac{E}{\eta}\sigma = 0 \leftrightarrow \sigma' = 0$, además tomando en cuenta a) y b) podemos concluir que la solución constante es $\sigma(t) = 0$ en $[0, +\infty >$ (responde la parte c)). Los resultados obtenidos también pueden ser representados mediante el siguiente esbozo del comportamiento de σ .



Análisis a priori de la actividad 2

En esta actividad consideramos realizar un cambio de variables para tener una mejor visualización de las gráficas, para ello se proporciona los cambios de variables, pues

el objetivo de la actividad no es probar la capacidad del estudiante en elegir un cambio de variable apropiado, sino el de construir el concepto de isoclina. Además, proporcionamos rectas guías $y = 3$, $y = 3/2$, $x = 1$ que permiten graficar los puntos proporcionados y los segmentos tangentes con mayor precisión.

Objetivo de la actividad 2: Construir la noción de isoclina.

Resolución matemática en un ambiente lápiz/papel de la actividad 2

En la actividad 1 se obtuvo el modelo matemático para el sistema de amortiguación $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$, reemplazando $E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$, $\eta = 0.03 \frac{Ns}{m^2}$, se consigue $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{3} 10^{13} \sigma$, luego tomando en cuenta los cambios de variables $x = 10^{13}t$, $y = \frac{\sigma}{10^7}$, derivando cada uno de ellos obtenemos $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10^7} \frac{d\sigma}{dx}$. Aplicando la regla de la cadena en el miembro izquierdo de la expresión $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{3} 10^{13} \sigma$ obtenemos $\frac{d\sigma}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3} 10^{13} \sigma$, aquí reemplazamos el término $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$ entonces se consigue $\frac{d\sigma}{dx} 10^{13} = -\frac{2}{3} 10^{13} \sigma$, que simplificando se tiene $\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{2}{3} \sigma$, este se multiplica por $\frac{1}{10^7}$, obteniendo $\frac{1}{10^7} \frac{d\sigma}{dx} = -\frac{2}{3} \frac{\sigma}{10^7}$, aquí se utiliza $y = \frac{\sigma}{10^7}$, para conseguir $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} y$.

Hallamos las pendientes de las rectas tangentes a las curvas solución de la EDO en los puntos presentados en los ítems a), b) y c). Como se mostramos en el cuadro 7.

Cuadro 7. Valores de la pendiente

Puntos	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$	Puntos	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$	Puntos	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$
$A_1(1; -3)$	2	$A_2(0; 3/2)$	-1	$A_3(0; 3)$	-2
$B_1(1; -2)$	4/3	$B_2(1; 3/2)$	-1	$B_3(1; 3)$	-2
$C_1(1; -1)$	2/3	$C_2(2; 3/2)$	-1	$C_3(2; 3)$	-2
$D_1(1; 0)$	0	$D_2(3; 3/2)$	-1	$D_3(3; 3)$	-2
$E_1(1; 1)$	-2/3	$E_2(4; 3/2)$	-1	$E_3(4; 3)$	-2
$F_1(1; 2)$	-4/3	$F_2(5; 3/2)$	-1	$F_3(5; 3)$	-2
$G_1(1; 3)$	-2				

En la parte a), b) y c) para representar gráficamente los puntos $A_1 \dots G_1$, $A_2 \dots F_2$, $A_3 \dots F_3$ no presenta dificultad, pues se trabaja en una hoja que tiene cuadrículas,

además la recta guía $y = 3/2$ ayuda a graficar los puntos $A_2 \dots F_2$, ahora para graficar los segmentos tangentes por ejemplo en el punto $A_1(1; -3)$ se dibuja el vector $(1, m)$ donde m es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y(x)$ en este caso $m = 2$, se ubica en el punto $A_1(1; -3)$, se avanza horizontalmente en 1 unidad hacia la derecha y se mueve verticalmente hacia arriba en 2 unidades, la unión del punto de inicio hasta el punto de llegada nos proporciona el vector deseado el cual está contenido en la recta tangente tal como se observa en la figura 89.

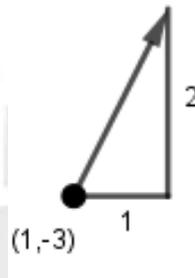


Figura 89. Vector tangente

A partir de allí podemos trazar un pequeño segmento que es parte de dicha recta cuyo centro es el punto de tangencia (ver figura 90).

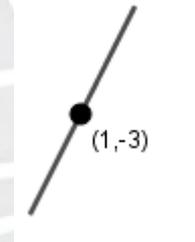


Figura 90. Segmento tangente

En este caso ayuda el hecho que las cuadrículas tengan subcuadrículas, (ver figura 91).

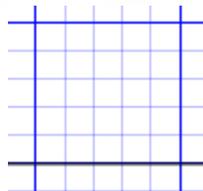


Figura 91. Subcuadrículas

Si m toma un valor negativo entonces el desplazamiento horizontal es hacia abajo, así de esta manera se puede trazar todos los segmentos tangentes, como se muestra en la figura 92.

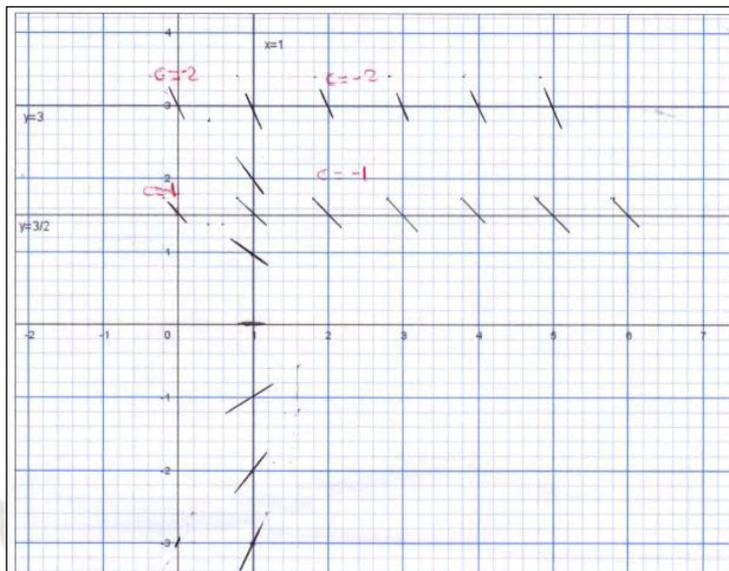


Figura 92. Trazado de segmentos tangentes

- d) En las rectas $y = 3$, $y = 3/2$ los segmentos pequeños trazados a lo largo de cada recta tienen pendientes iguales, mientras que en la recta $x = 1$, los segmentos tienen diferentes pendientes.

En la recta horizontal $y = c$, donde $c \in \mathbb{R}$, tomamos un punto (x_0, c) y evaluamos en $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$ se obtiene $\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{2}{3}c$ que es la pendiente del segmento tangente que pasa por el punto (x_0, c) , al variar x_0 en \mathbb{R} , observamos que la pendiente no varía y el punto (x_0, c) sigue estando en la recta $y = c$, por lo tanto se puede concluir que a lo largo de la recta $y = c$ la pendiente de los segmentos tangentes no varía. En general, para cada recta horizontal que se elija, los segmentos tangentes trazados a lo largo de ella tienen una misma pendiente.

En cuanto a la recta vertical $x = k$, donde $k \in \mathbb{R}$, tomamos de ella un punto (k, y_0) , que se evalúa en $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$ y se obtiene la pendiente $\frac{dy}{dx}(k) = -\frac{2}{3}y_0$, del segmento tangente que pasa por el punto (k, y_0) , al variar y_0 en \mathbb{R} , se observa que la pendiente varía y el punto (k, y_0) permanece en la recta $x = k$, por lo tanto podemos concluir que a lo largo de la recta $x = k$ la pendiente de los segmentos tangentes varía. En general, para cada recta vertical que se elija,

los segmentos tangentes trazados a lo largo de ella tienen pendientes que están variando.

En el cuadro 8 presentamos las variables micro-didácticas presentes en la actividad 2.

Cuadro 8. Variables micro-didácticas de la actividad 2

Variable didáctica	Valores
Recta guía horizontal	<ul style="list-style-type: none"> • $y = 3$ • $y = 3/2$
El Punto de la recta $x = 1$	<ul style="list-style-type: none"> • A_2, \dots, G_2

Respuestas esperadas

Pensamos que la pareja, como parte de sus acciones, leerá el texto, realizará anotaciones y subrayará las ideas principales, además suponemos que identificará que el módulo de Young E toma valores grandes y el coeficiente de viscosidad η toma valores pequeños, además esperamos que reemplacen los valores $E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$,

$\eta = 0.03 \frac{Ns}{m^2}$ en el modelo matemático $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$, con el que tendría la expresión

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{3}10^{13}\sigma.$$

Luego consideramos que la pareja tomaría en cuenta los cambios de variables $x = 10^{13}t$, $y = \frac{\sigma}{10^7}$, para derivarlos con respecto a t y x respectivamente, con el que

obtendría las expresiones $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10^7} \frac{d\sigma}{dx}$. Seguidamente pensamos que

aplicaría la regla de la cadena en el miembro izquierdo de la expresión $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{3}10^{13}\sigma$,

para tener la expresión $\frac{d\sigma}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3}10^{13}\sigma$, aquí reemplazaría el término $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$

entonces se tendría $\frac{d\sigma}{dx} 10^{13} = -\frac{2}{3}10^{13}\sigma$, a continuación simplificaría el término

constante para tener $\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{2}{3}\sigma$, está la multiplicaría por $\frac{1}{10^7}$, con el que obtendría

$\frac{1}{10^7} \frac{d\sigma}{dx} = -\frac{2}{3} \frac{\sigma}{10^7}$, aquí utilizaría el cambio de variable $y = \frac{\sigma}{10^7}$, luego conseguiría el

modelo matemático en las nueva coordenadas $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$ (situación de acción).

En la parte a) de la actividad 2 pensamos que la pareja representará gráficamente los puntos $A_1 \dots G_1$ sin ninguna dificultad pues trabajará en una hoja que tiene cuadrículas (situación de acción).

Esperamos que tome el punto $A_1(1; -3)$, lo evalúe en $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$, para tener la pendiente $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{2}{3}(-3)$ y simplifique para tener $\frac{dy}{dx}(1) = 2$, pensamos que expresará el número dos como $2 = \frac{2}{1}$, para determinar cuántas unidades debe desplazarse horizontalmente que estaría indicado por el número del denominador y cuántas unidades debe desplazarse verticalmente que estaría dado por el número del numerador (situación de acción).

Para graficar el segmento tangente, esperamos que la pareja se ubique en el punto $A_1(1; -3)$, se desplace horizontalmente una subcuadrícula a la derecha, después verticalmente hacia arriba dos subcuadrículas, luego uniendo el punto inicial y final obtendría el segmento tangente de pendiente 2 (situación de acción), como se muestra en la figura 93.

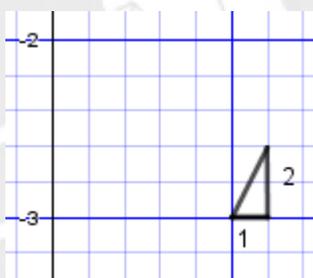


Figura 93. Segmento de pendiente 2

Enseguida esperamos que prolonguen este segmento hacia abajo, luego trazará un pequeño segmento que es parte de la recta tangente cuyo centro es el punto de tangencia (situación de acción), como se puede observar en la figura 94.

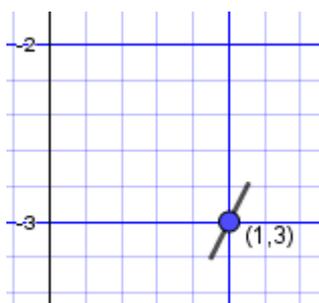


Figura 94. Segmento tangente de pendiente 2

Consideramos que la pareja seguirá el mismo procedimiento para graficar los segmentos tangentes en los puntos $B_1(1; -2)$, $C_1(1; -1)$, $D_1(1; 0)$, $E_1(1; 1)$, $F_1(1; 2)$, $G_1(1; 3)$.

La pareja podría tener dificultad en graficar el segmento tangente que pasa por el punto $F_1(1; 2)$ cuya pendiente es $-4/3$ que, primero esperamos que se ubiquen en el punto mencionado y se desplacen horizontalmente 3 subcuadrículas hacia la derecha, luego se desplacen verticalmente hacia abajo 4 subcuadrículas, porque el numerador es el número negativo -4 (situación de acción), tal como se muestra en la figura 95.

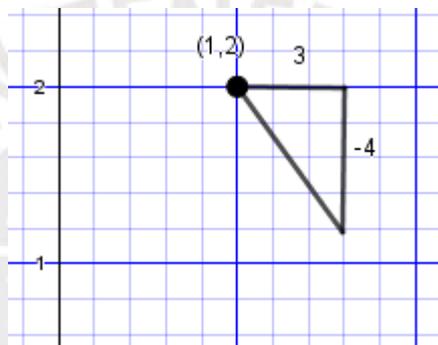


Figura 95. Segmento de pendiente $-4/3$

Pensamos que prolongará este segmento hacia arriba, luego trazará un pequeño segmento que es parte de la recta tangente cuyo centro es el punto de tangencia (situación de acción), tal como se puede observar en la figura 96.

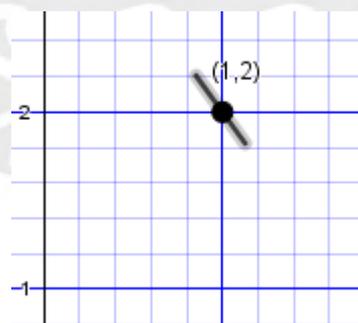


Figura 96. Segmento tangente de pendiente $-4/3$

Para el ítem b) la pareja podría tener dificultad en graficar los segmentos tangentes en la recta $y = \frac{3}{2}$ a lo largo de los puntos $A_2(0; 3/2)$, $B_2(1; 3/2)$, $C_2(2; 3/2)$, $D_2(3; 3/2)$, $E_2(4; 3/2)$, $F_2(5; \frac{3}{2})$, debido a que la recta corta en la mitad de una subcuadrícula, por ejemplo en el $A_2(0; 3/2)$ calcularía la pendiente

$\frac{dy}{dx}(0) = -\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1$, luego a partir de este punto se desplazaría horizontalmente una subcuadrícula hacia la izquierda, luego una subcuadrícula verticalmente hacia arriba, esta última subcuadrícula equivaldría a la suma de la de las mitades de una sub cuadrícula, luego la pareja prolongaría el segmento hacia abajo como se puede observar en la figura 97.

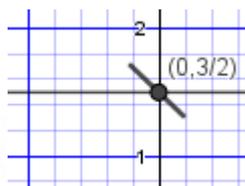


Figura 97. Segmento tangente de pendiente -1

Así continuaría en obtener la gráfica de los otros segmentos en los demás puntos.

Para el ítem c) esperamos que la pareja siga el mismo procedimiento realizado en el ítem a) (situación de acción).

Para el desarrollo del ítem d), consideramos que la pareja formularía que en las rectas $y = 3$, $y = 3/2$ (variable didáctica) los segmentos pequeños trazados a lo largo de cada recta tienen pendientes -2 y -1, mientras que en la recta $x = 1$, los segmentos tienen diferentes pendientes, lo que validaría por los cálculos realizados al hallar las pendientes en cada punto. Además, podría formular que en cada punto de la recta $y = 3$ (variable didáctica) se puede trazar un segmento tangente de pendiente -2, lo que validarían tomando un punto genérico de la recta de la forma $(x_0, 3)$, enseguida lo evaluaría en la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$ para verificar que da el valor de -2, de forma similar haría para validar la formulación que para cualquier punto de la recta $y = 3/2$ los segmentos tangentes tienen pendiente -1.

La pareja también podría formular que para cada recta horizontal a lo largo de ella se pueden trazar segmentos tangentes que tienen una misma pendiente. La pareja lo validaría por ejemplo al tomar la recta $y = 5$ y los puntos $(0,5)$, $(6,5)$ para reemplazarlo en la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$, obtendrían $\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{2}{3}(5) = -\frac{10}{3}$ y $\frac{dy}{dx}(6) = -\frac{2}{3}(5) = -\frac{10}{3}$, así la pareja podría observar que obtiene una misma pendiente. Seguidamente, pensamos que elegiría otra recta horizontal y seguiría el mismo procedimiento.

Asimismo, la pareja podría formular que para cada recta vertical a lo largo de ella se pueden trazar segmentos tangentes que tienen diferentes pendientes, lo que validaría tomando por ejemplo una recta $x = 5$, enseguida elegiría un punto los puntos $(5, 3)$ y $(5, 10)$, para evaluarlo en $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$ obteniendo las pendientes $\frac{dy}{dx}(5) = -\frac{2}{3}(3) = -2$ y $\frac{dy}{dx}(5) = -\frac{2}{3}(10) = -\frac{20}{3}$, verificando que tienen pendientes diferentes. Pensamos que podría elegir otra recta vertical y seguir el mismo procedimiento por lo que llegarían a la misma conclusión.

Análisis a posteriori de la actividad 2

En esta actividad la pareja leyó el enunciado que se planteó, además identificó y subrayó los valores que toma el módulo de Young E y la constante de viscosidad η , así como los cambios de variables a realizar, también reconoce que el tiempo está expresado en unidades de segundo, estas acciones se muestran en la figura 98, hecho que coincide con nuestro análisis a priori.

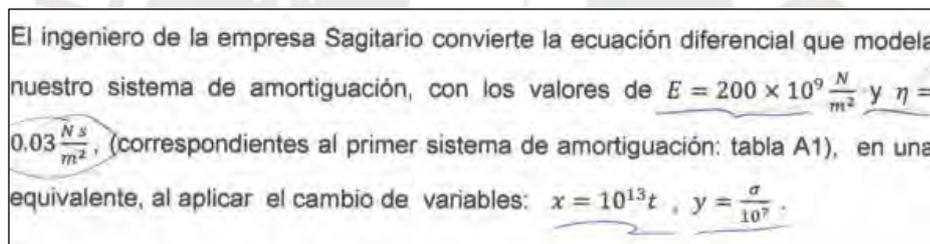


Figura 98. Subrayado de la actividad 2

En el hojas bond escribe el modelo matemático obtenido $0 = \eta\sigma'(t) + E\sigma(t)$, luego deriva con respecto a t el cambio de variable $x = 10^{13}t$ obteniendo $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$, seguidamente deriva con respecto a t el cambio de variable $y = \frac{\sigma}{10^7}$, teniendo como resultado una expresión errada $\frac{dy}{dt} = \frac{\sigma}{10^7}\sigma'$, la forma correcta hubiera sido $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{10^7}\sigma'$, en la expresión $\frac{dy}{dt} = \frac{\sigma}{10^7}\sigma'$ utilizan la regla de la cadena $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{10^7}\sigma'$ donde se observa que se corrige el error cometido, seguidamente reemplaza $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$ en $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{10^7}\sigma'$, para tener $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10^{20}}\sigma'(t)$ (situación de acción).

Luego utiliza $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10^{20}}\sigma'(t)$, $y = \frac{\sigma}{10^7}$ en el modelo matemático $\eta\sigma'(t) + E\sigma(t) = 0$, obteniendo la expresión algebraica $\eta 10^{20} \frac{dy}{dx} + E10^7 y = 0$, seguidamente utiliza en

ella los valores de $E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$, $\eta = 0.03 \frac{Ns}{m^2}$ para obtener $3 \times 10^{18} \frac{dy}{dx} + 2 \times 10^{18} y = 0$, simplificando llegan a la expresión algebraica $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} y$ resultado que coincide con nuestro análisis *a priori*, acciones que se evidencian en la figura 99.

Recordemos $0 = n \sigma'(\epsilon) + E \sigma(\epsilon) \dots (1)$

$x = 10^{13} \epsilon$ $y = \frac{\sigma}{10^7}$

$\frac{dx}{d\epsilon} = 10^{13}$ $\frac{dy}{d\epsilon} = \frac{\sigma}{10^7} \cdot \sigma'$

$\frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\epsilon} = \frac{1}{10^7} \sigma'$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10^{20}} \sigma'(\epsilon)$

Reemplazando en (1)

$0 = n \cdot 10^{20} \frac{dy}{dx} + E \cdot 10^7 y$

$0 = 3 \cdot 10^{18} \frac{dy}{dx} + 2 \cdot 10^{18} y$

Despejando

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} y$

DJO: solo depende de la ordenada

Figura 99. La EDO en las nuevas variables

La pareja realizó una pregunta con respecto a la actividad 2, según la transcripción del audio.

La pareja: ¿Esto hacemos para el sistema 1 y 2?

Aquí hay un obstáculo en la comprensión del texto, el investigador realizó la devolución con una afirmación, según la transcripción del audio.

Investigador: Hacer lo que te pide el problema.

Del ítem a), la pareja, graficó los puntos $A_1 \dots G_1$ en la figura proporcionada, luego halló las pendientes de las rectas tangentes a las curvas solución de la EDO en los puntos proporcionados, para ello utiliza la nueva ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} y$ y movilizó sus conocimientos de derivada, estas acciones se evidencian en la figura 100. Comparando con nuestro análisis *a priori*, consideramos que la gráfica de los segmentos tangentes lo harían por desplazamientos de horizontales y verticales, lo cual no coincide con nuestro análisis *a posteriori* donde la pareja usa sus conceptos de trigonometría.

Siendo: m : pendiente

$$\begin{array}{l}
 A) \quad A_1(1, -3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(-3) = 2 \\
 B_1(1, -2) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(-2) = \frac{4}{3} \\
 C_1(1, -1) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(-1) = \frac{2}{3} \\
 D_1(1, 0) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(0) = 0 \\
 E_1(1, 1) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(1) = -\frac{2}{3}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 F_1(1, 2) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(2) = -\frac{4}{3} \\
 G_1(1, 3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(3) = -2
 \end{array}
 \right\}$$

Figura 100. Cálculo de las pendientes en puntos de la recta $x = 1$.

Enseguida, la pareja graficó los segmentos tangentes que pasan por los puntos $A_1 \dots G_1$ (variable didáctica) aquí la pareja presentó cierta dificultad para trazar los segmentos tangentes, pues en cada punto varía la pendiente, aquí es de gran ayuda las subcuadrículas, empezó con el punto $(1, -3)$ que está asociada a un segmento tangente de pendiente 2, menciona a la función trigonométrica tangente (situación de acción), como se evidencia en la transcripción del audio.

La pareja: la tangente es cateto opuesto, cateto adyacente, cateto opuesto es dos.

Todo parece indicar que utilizaron las subcuadrículas y formaron un triángulo rectángulo de lado uno y dos, donde el cateto opuesto tiene el valor de dos, hicieron uso de sus conocimientos previos de trigonometría. La pareja siguió el mismo procedimiento para graficar el resto de segmentos tangentes (situación de acción).

Enseguida en el ítem b), la pareja graficó los puntos A_2, \dots, F_2 , en la figura proporcionada en el cuadernillo de actividades. A continuación halló las pendientes de las rectas tangentes a las curvas solución de la EDO en los puntos proporcionados (situación de acción), estas acciones se pueden observar en la figura 101.

$$\begin{array}{l}
 B) \quad A_2(0; \frac{3}{2}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(\frac{3}{2}) = -1 \\
 B_2(1; \frac{3}{2}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(\frac{3}{2}) = -1 \\
 C_2(2; \frac{3}{2}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(\frac{3}{2}) = -1
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 D_2(3; \frac{3}{2}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(\frac{3}{2}) = -1 \\
 E_2(4; \frac{3}{2}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(\frac{3}{2}) = -1 \\
 F_2(5; \frac{3}{2}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(\frac{3}{2}) = -1
 \end{array}
 \right\}$$

Figura 101. Cálculo de las pendientes en puntos de la recta $y = 3/2$

Luego, la pareja empezó a construir el segmento tangente en el punto $(0, \frac{3}{2})$, aquí tuvo dificultad lo que coincide con nuestro análisis *a priori*, pues en este caso la recta $y = 3/2$ (variable didáctica) corta a la mitad de un cuadrado pequeño y la derivada en el punto $(0, \frac{3}{2})$, toma el valor $\frac{dy}{dx}(0) = -\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1$, según la transcripción del audio, están planteando una estrategia para graficar el segmento tangente de pendiente -1 (situación de acción).

La pareja: Cero en la recta tres medios, cuando es cero es -1, en el punto cero, toma la mitad. Este pequeñito es 0.5, si agarro todo es 1.5, márcalo con un pequeño punto.

Entendemos que la pareja intenta construir un triángulo rectángulo de catetos 1.5 y 1.5, las unidades de referencia son los cuadrados pequeños de las subcuadrículas. Para el resto de puntos sigue el mismo procedimiento. (situación de acción).

En el ítem c), la pareja empieza como en el ítem b), graficó los puntos en la figura, a continuación, halló las pendientes en los puntos dados, este último se evidencia en la figura 102.

$$\begin{array}{l}
 c) \ A_3(0,3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(3) = -2 \\
 \quad B_3(1,3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(3) = -2 \\
 \quad C_3(2,3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(3) = -2 \\
 \quad D_3(3,3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(3) = -2 \\
 \quad E_3(4,3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(3) = -2 \\
 \quad F_3(5,3) \rightarrow \frac{dy}{dx} = m = -\frac{2}{3}(3) = -2
 \end{array}$$

Figura 102. Cálculo de las pendientes en los puntos de la recta $y = 3$

Además, para la gráfica de los segmentos tangentes la pareja siguió el procedimiento anterior.

Cabe señalar que la pareja hace uso de sus saberes previos de la derivada asociada a la pendiente de la recta tangente y de la función trigonométrica, específicamente de la función tangente, tal como se observa en la figura 103 donde se muestra la gráfica de los segmentos tangentes.

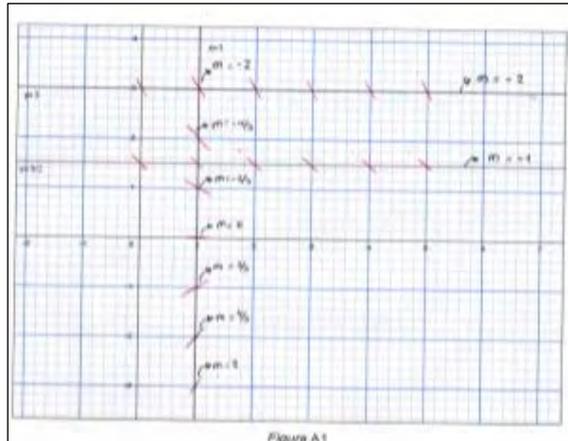


Figura 103. Segmentos tangentes de la actividad 2

Para responder la parte d) la pareja formuló: “La pendiente m depende solamente de la ordenada y ”, ello lo validan tomando en cuenta la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$, esto se evidencia en la figura 99. Además, formulan: “Para cada y constante la pendiente es igual en cualquier abscisa x ” esto se puede interpretar como que a lo largo de una recta horizontal, las pendientes de las rectas tangentes a las curvas solución de la EDO son constantes. También, formulan: “si y no es una constante entonces para cada abscisa, la pendiente varía y así en cualquier abscisa x ” esto se puede entender como que a lo largo una recta vertical las pendientes de los segmentos tangentes está variando, estas formulaciones se evidencian en la figura 104. Hecho que coincide con nuestro análisis *a priori*. Estas dos últimas formulaciones tratan de ser validadas usando la gráfica obtenida.

D) La pendiente m depende solamente de la ordenada (y)
 Por lo que:
 1) Para un y constante la pendiente es igual en cualquier abscisa " x "
 2) Si " y " no es constante entonces para una abscisa, la pendiente varía " y " así en cualquier abscisa " x ".

- La gráfica nos indica grados a la pendiente el decrecimiento y el crecimiento, recordamos que la p derivado de " y " nos da la pendiente de la recta tangente

Figura 104. Conclusiones de la actividad 2

Al comparar nuestro análisis *a priori* realizado con lo desarrollado por la pareja en el análisis *a posteriori*, podemos afirmar que la pareja logró graficar los segmentos tangentes, hallar la diferencia entre los segmentos tangentes de las rectas horizontales y los segmentos tangentes de la recta vertical, en el primero a lo largo de cada recta los segmentos tiene una misma pendiente mientras que en el segundo los segmentos tangentes varían sus pendientes, con lo cual logramos el objetivo de la actividad, además, hemos identificado las acciones, formulaciones y validaciones realizadas por la pareja, con lo cual estamos en camino de alcanzar los objetivos específicos. Cabe señalar que en nuestro análisis *a priori* los segmentos tangentes fueron graficados utilizando desplazamientos mientras que la pareja uso la función trigonométrica tangente, finalmente estas dos técnicas son equivalentes.

Institucionalización local de la actividad 2

Aquí presentamos la institucionalización local de la actividad 2, de la siguiente manera

Sea la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, se llama **isoclima** a cualquier miembro de la familia $f(x, y) = c$, donde c es una constante. Aquí c representa la pendiente de la recta tangente a la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial. Dicha recta tangente puede ser representado gráficamente por un pequeño segmento con centro en (x, y) y de pendiente c . Por ejemplo en el modelo matemático en la actividad 2 en las coordenadas XY está dada $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$, luego $-\frac{2}{3}y = c$ es la familia de isoclinas, en este caso son rectas, para una pendiente $c = -2$ se tiene $-\frac{2}{3}y = -2$, luego $y = 3$, si $c = -1$ se tiene $-\frac{2}{3}y = -1$, simplificando se obtiene $y = \frac{3}{2}$. En conclusión $y = 3$ $y = \frac{3}{2}$ son isoclinas que tienen segmentos tangentes de pendientes -2 y -1 respectivamente.

Análisis *a priori* de la actividad 3

Por sus saberes previos la pareja conoce el concepto de curva solución, sabe que una sola EDO puede tener infinitas curva soluciones.

Objetivo de la actividad 3: Graficar algunas curvas solución utilizando el campo direccional de la EDO.

Resolución matemática en un ambiente lápiz/papel de la actividad 3

La nueva ecuación diferencial está representada por $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$, la que se obtuvo en la actividad 2. Siguiendo la indicación de la actividad, reemplazamos y' por una constante c , obtenemos una isoclina $-\frac{2}{3}y = c$. Al variar c en todos los reales se tiene una familia de isoclinas, que en este caso es una familia de rectas horizontales. Cada isoclina tiene segmentos tangentes que tienen una misma pendiente y cada segmento tangente es tangente a una curva solución de la EDO.

Tomando en cuenta la actividad 1, sabemos el comportamiento de la curva solución, pues la EDO obtenida en la actividad 1 es equivalente a la EDO obtenida en la actividad 2.

Como presentamos el campo direccional de la ecuación direccional, primero trazamos una curva solución que pase por el punto A y por la actividad 1 esta es una curva que es decreciente, no corta al eje X y además cada punto de la curva solución está asociada a un segmento tangente que a su vez está vinculada a una isoclina, en el campo direccional que nos presenta no están todos los segmentos tangentes por lo que hay puntos de la curva solución por donde no se observa un segmento tangente. Se repite el procedimiento para los puntos B, C, D, E y F (ver la solución en la figura 106).

Se observa que las curvas solución no se cortan, suponiendo que hay dos curvas de solución que se cortan, como se muestra en la figura 105.

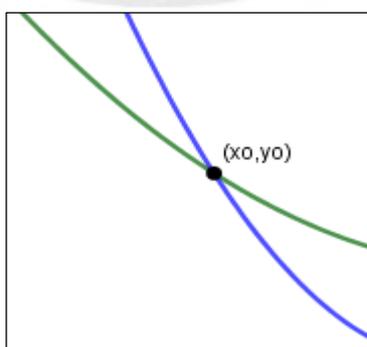


Figura 105. Curvas que se cortan

por el punto de intercepción pasarían dos segmentos tangentes lo que no puede ocurrir pues para el punto (x_0, y_0) esta asociado una pendiente dada por $\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{2}{3}y_0$, que corresponde a la pendiente de un solo segmento tangente.

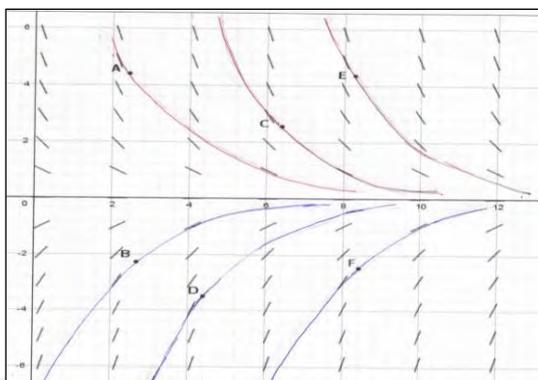


Figura 106. Solución de la actividad 3

En el cuadro 9 presentamos las variables micro-didácticas presentes en la actividad 3

Cuadro 9. Variables micro-didácticas de la actividad 3

Variable didáctica	valores
Puntos del plano cartesiano	A, B, C, D, E, F

Respuestas esperadas

Pensamos que la pareja, como parte de sus acciones, leerá el texto, realizará anotaciones, subrayará las ideas bases y utilizaría los conceptos aprendidos en la actividad 2, además suponemos que comprenderá el concepto de isocлина y campo direccional (situación de acción).

La pareja podría usar la solución $y = ke^{-\frac{2}{3}x}$ para trazar la curva que pasa por el punto A (situación de acción), además formularía que en cada punto de la curva solución se puede trazar un segmento tangente, que la validaría mediante el uso de la derivada y sus significados.

Pensamos que la pareja formule que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$ tiene más de una solución, ello lo validaría haciendo uso de la solución $y = ke^{-\frac{2}{3}x}$, también la pareja

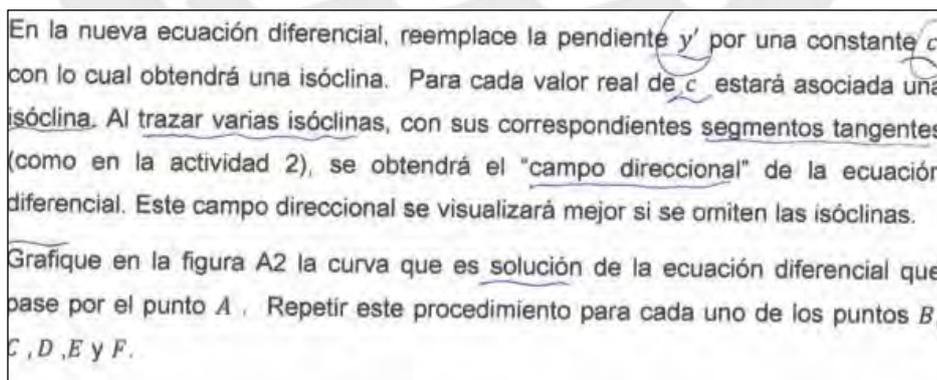
podría validar usando sus conocimientos previos de que una ecuación diferencial tiene infinitas soluciones.

Consideramos que la pareja formularía que las curvas solución no se cortan y serían validadas usando la EDO $y' = -\frac{2}{3}y$ donde observaría que para cualquier punto que evalué en la EDO solo se va conseguir una pendiente, si se cortan se debe tener dos pendientes para los segmentos tangentes que se cortan, cosa que no se obtiene.

Al trazar la curva solución que pasa por A , se encuentran con la dificultad para prolongar la curva, pues hace falta en la figura A2 la gráfica de más segmentos tangentes, pensamos que la pareja se dará cuenta de esta falta y prolongaran la curva adecuadamente. Este mismo problema podrían ocurrir al trazar las curvas solución que pasan por los B, C, D, E, F . Enseguida la pareja graficaría las curvas soluciones como se muestra en la figura 106.

Análisis a posteriori de la actividad 3

Al iniciar la actividad la pareja leyó el enunciado e intercambiaron opiniones e ideas tal como se menciona en nuestro análisis *a priori*. Enseguida la pareja subrayó términos y frases que explican cómo se forma un campo direccional, además la pareja identificó lo que le pide la actividad, estas acciones se evidencia en la figura 107.



En la nueva ecuación diferencial, reemplace la pendiente y' por una constante c , con lo cual obtendrá una isóclina. Para cada valor real de c estará asociada una isóclina. Al trazar varias isóclinas, con sus correspondientes segmentos tangentes (como en la actividad 2), se obtendrá el "campo direccional" de la ecuación diferencial. Este campo direccional se visualizará mejor si se omiten las isóclinas. Grafique en la figura A2 la curva que es solución de la ecuación diferencial que pase por el punto A . Repetir este procedimiento para cada uno de los puntos B, C, D, E y F .

Figura 107. Subrayado en la actividad 3

La pareja dentro de sus acciones, intercambio ideas, luego formula que el punto A (variable didáctica) tiene coordenadas $(2.4, 4.4)$, esto lo valida tomando en cuenta la ubicación del punto A en la figura proporcionada, como parte de sus acciones tiene la idea de reemplazar este punto en la solución algebraica de la actividad 1, el cual al

ser expresado en las variables y, x sería $y = ke^{-\frac{2}{3}x}$, coincidente con nuestro análisis *a priori* en el uso de esta función, aquí al reemplazar el punto A tendría la expresión $4.4 = k2^{-\left(\frac{2}{3}\right)(2.4)}$, enseguida obtendría el valor de k , de esta forma la función estaría totalmente identificada, tomaría un punto que tenga la misma abscisa del punto C que sería 6 y algo más, lo evaluarían en la función hallada, así podrían decir si el punto C esta arriba o abajo del valor hallado, estas acciones se evidencian en la transcripción del audio.

La pareja: El A es 2.4 y 4.4, esta es la función que tenemos, 4.4 va a ser igual a un k por e a la menos dos tercios, al reemplazar tenemos k , tenemos la función completa, por acá hallamos un puntito, por ejemplo 6 punto y algo para guiarnos por lo menos, allí vemos si el que C pertenece, por ejemplo tenemos la función, no sabemos si es que C pertenece, vemos en el perfil, si es que C pertenece o no, si sale más abajo o más arriba que C .

Seguidamente, la pareja planteó hacer lo mismo para cada punto de la actividad y tener funciones, estas acciones que son ideas se evidencian en la transcripción del audio.

La pareja: Pero allí vamos a tener una sola curva solo para el punto A , no te va salir varias, nos va salir una sola curva solo para él A , así hacemos para C y los demás, tenemos que hallar el k .

Luego del intercambio de idea, la pareja presentó una primera formulación, donde en forma implícita señala que las curvas solución no se va cortar, (ver figura 108), coincide en cierta forma con nuestro análisis *a priori*.

Actividad 3:
 • Para cada punto de la curva solución no existe una pendiente de la recta tangente.

Figura 108. Primera formulación de la actividad 3

Pero no hace explícito su validación, pensamos que aquí la valida mediante la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$ donde señala que depende solo de la ordenada, (ver figura 99).

Luego, la pareja recordó la conclusión de la actividad 2, donde a lo largo de una recta horizontal los segmentos tangentes tienen una misma pendiente (situación de acción), esto se evidencia en la figura 109.

De lo anterior, de la actividad 2 tenemos que:
 para una ordenada constante la pendiente de la
 recta tangente es igual en cualquier abscisa

Figura 109. Las pendientes en la recta horizontal

Enseguida, la pareja utilizó el campo direccional para ver el comportamiento de la pendiente de la recta tangente de la curva solución (situación de acción), esto se evidencia en la figura 110.

Utilizamos el campo de direcciones para observar como
 varían la pendiente de la recta tangente a lo largo
 de la curva solución.

Figura 110. El campo direccional y la recta tangente

A continuación, la pareja recuerda sus conocimientos de la derivada y muestra una representación gráfica (situación de acción). Esto se evidencia en la figura 111.

Relacionamos las dos curvas: la función $f(x)$ y la recta
 tangente L_T
 Al derivar una función $f(x)$, obtenemos la pendiente de
 la recta tangente

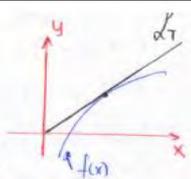


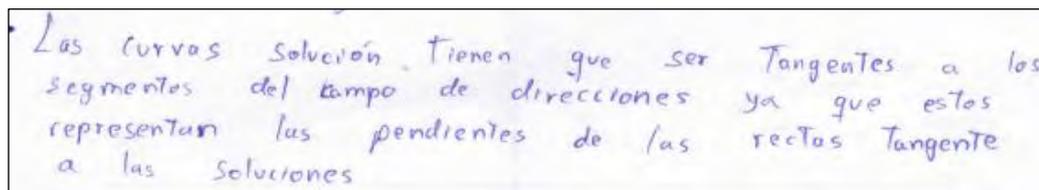
Figura 111. Representación de la derivada

En esta parte, la pareja observa el campo direccional y formula que hay infinitas soluciones pero que van a trabajar con un número determinado de ellas, como se puede evidenciar en el audio.

La pareja: El campo direccional de las rectas tangentes se denota por un pequeño segmento, estas son las tangentes a la curva solución, aunque bueno son diferentes curvas solución, aquí va ver infinitas, solamente vamos a trabajar con estas.

La pareja no presentó una validación, de porqué hay infinitas soluciones, salvo que estén pensando en la solución $y = ke^{-\frac{2}{3}x}$ utilizada al inicio donde k puede ser cualquier número real o estén utilizando sus conocimientos previos de la EDO.

Después la pareja presentó una formulación con respecto a las curvas solución y los segmentos del campo direccional, seguidamente la validan, esto se evidencia en la figura 112.



Las curvas solución tienen que ser Tangentes a los segmentos del campo de direcciones ya que estos representan las pendientes de las rectas tangente a las soluciones

Figura 112. Curvas solución tangentes a los segmentos

Aquí, en esta actividad, la pareja presenta dificultades en trazar las curvas solución que pasan por los puntos A, B, C, D, E, F (variables didácticas). Pero finalmente la pareja logra representar gráficamente algunas curvas solución utilizando un campo direccional de una EDO.

Presentamos, la gráfica desarrollada por la pareja, figura 113.

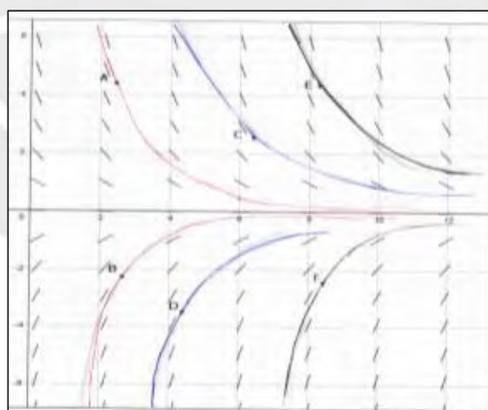


Figura 113. La pareja resuelve la actividad 3

En esta actividad, la pareja logró graficar las curvas solución, después de comprender que en el campo direccional no están todos los segmentos tangentes asociados a una curva solución.

Al comparar nuestro análisis *a priori* realizado con lo desarrollado por la pareja en el análisis *a posteriori* podemos afirmar que la pareja logró graficar las curvas solución que pasan por los puntos indicados, utilizando un campo direccional, con lo cual se cumple el objetivo de la actividad, asimismo, se ha determinado las acciones, formulaciones y validaciones realizadas por la pareja, con lo cual estamos en camino de alcanzar los objetivos específicos.

Institucionalización local de la actividad 3

Presentamos la institucionalización local de la manera siguiente.

Sea la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde f es continua en $D \subset \mathbb{R}^2$. Se llama campo direccional o campo de pendientes a la gráfica de un conjunto de segmentos tangentes o elementos lineales que tienen como punto medio al punto $(x, y) \in D$ y pendiente $f(x, y)$.

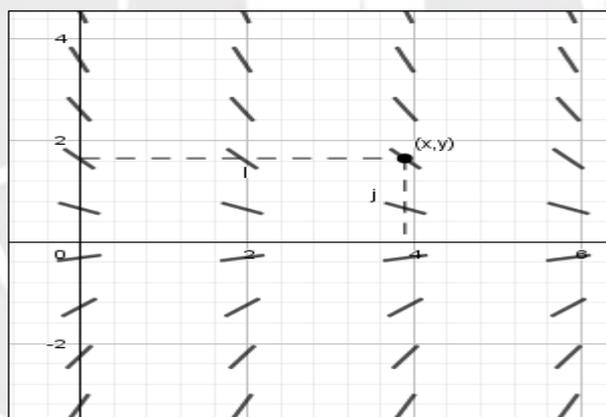
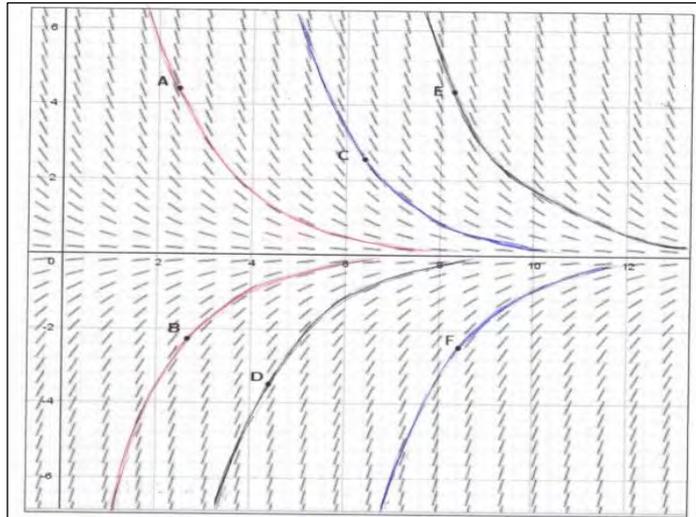


Figura B 1. Campo direccional

Cuanto más cerca estén los segmentos lineales, se logra una mejor gráfica de las curvas solución como se puede observar en la Figura B 1



Una curva solución que pasa por un punto es tangente al elemento lineal en ese punto, este elemento lineal es un representante de la recta tangente en ese punto.

Análisis *a priori* de la actividad 4

Objetivo de la actividad 4: Interpretar las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de las EDOs del sistema de amortiguación.

Resolución matemática en un ambiente lápiz/papel de la actividad 4

En la actividad 2, tenemos que el sistema 1 de amortiguación en las nuevas coordenadas está modelado por la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$. Sabemos que $x = 10^{13}t$, despejando la variable t se tiene la expresión $t = \frac{x}{10^{13}}$. De aquí observamos que si $t = 0$ entonces $x = 0$ que se utiliza en $y(t) = \frac{\sigma(t)}{10^7}$, pero antes se expresa como $y(t(x)) = \frac{\sigma(t(x))}{10^7}$, luego $y(t(0)) = \frac{\sigma(t(0))}{10^7}$, luego utilizamos $\sigma(0) = 5 \times 10^7 \frac{N}{m^2}$ en $y(0) = \frac{\sigma(0)}{10^7}$, se tiene la condición inicial $y(0) = \frac{5 \times 10^7}{10^7}$, simplificamos y obtenemos $y(0) = 5$, condición inicial para el sistema 1 y sistema 2.

Para el sistema 2 de amortiguación, consideramos la ecuación diferencial $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$, con los valores de $E = 210 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$, $\eta = 0.1 \frac{Ns}{m^2}$, luego simplificando obtenemos que

$\frac{d\sigma}{dt} = -0.21 \times 10^{13} \sigma$, enseguida aplicamos la derivada a los cambios de variables $x = 10^{13} t$, $y = \frac{\sigma}{10^7}$, para obtener $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10^7} \frac{d\sigma}{dx}$. A continuación, aplicamos la regla de la cadena en la parte izquierda de la expresión $\frac{d\sigma}{dt} = -0.21 \times 10^{13} \sigma$, para tener $\frac{d\sigma}{dx} \frac{dx}{dt} = -0.21 \times 10^{13} \sigma$, aquí utilizamos $\frac{dx}{dt} = 10^{13}$ con el que tenemos la expresión $\frac{d\sigma}{dx} 10^{13} = -0.21 \times 10^{13} \sigma$, simplificando para tener $\frac{d\sigma}{dx} = -0.21 \sigma$, multiplicando por $\frac{1}{10^7}$, se consigue $\frac{1}{10^7} \frac{d\sigma}{dx} = -0.21 \frac{\sigma}{10^7}$. Por último $\frac{dy}{dx} = -0.21 y$.

El primer sistema tiene como isoclinas a las rectas $-\frac{2}{3}y = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ y representa las pendientes de las rectas tangentes a las curvas solución de la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$, de $-\frac{2}{3}y = c$ despejamos y para tener $y = -\frac{3}{2}c$, por comodidad conviene tener como isoclinas a las rectas $y = 1, y = 2, y = 3, y = 4, y = 5$, que se obtendrían si se considera las pendientes $c = -\frac{2}{3}, c = -\frac{4}{3}, c = -2, c = -\frac{8}{3}, c = -\frac{10}{3}$ respectivamente.

Las isoclinas del segundo sistema son las rectas $-0.21y = k$, aquí también conviene que las isoclinas sean las rectas mencionadas anteriormente, despejando y de $-0.21y = k$ se tendría $y = -\frac{1}{0.21}k$, entonces $k = -0.21, k = -0.42, k = -0.63, k = -0.84, k = -1.05$ son los valores de las pendientes de los segmentos tangentes.

Observamos que la recta $y = 1$ es una isoclina para ambos sistemas, por el punto $(1,1)$ pasan dos segmentos tangentes con pendientes, $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{2}{3}(1) = -\frac{2}{3}$, y $\frac{dy}{dx}(1) = -0.21(1) = -0.21$. Por el punto $(1,1)$, pasan segmentos pequeños de pendientes: $-\frac{2}{3}$ correspondiente al sistema 1 que está de color azul y -0.21 correspondiente al sistema 2 que está dibujado de color rojo. Así sucesivamente, se pueden hallar las pendientes de los segmentos que se dibujan a continuación, figura 114.

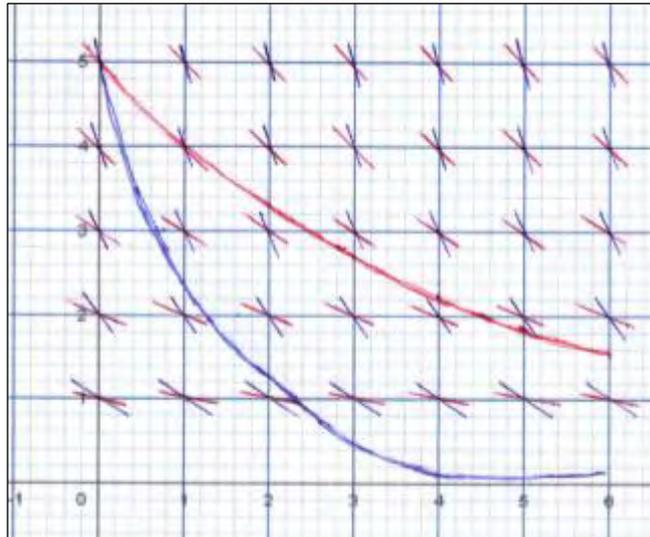


Figura 114. Curvas soluciones de la actividad 4

El mejor sistema de amortiguación es la curva de color azul, que corresponde al sistema 1, pues este disipa el esfuerzo inicial más rápidamente que el sistema 2.

En el cuadro 10 presentamos las variables micro-didácticas presentes en la actividad 4.

Cuadro 10. Variables locales de la actividad 4

Variable didáctica	Valores
Módulo de Young (E)	<ul style="list-style-type: none"> • $E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$ • $E = 210 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$
Coefficiente de viscosidad dinámica (η)	<ul style="list-style-type: none"> • $\eta = 0.03 \frac{N \cdot s}{m^2}$ • $\eta = 0.1 \frac{N \cdot s}{m^2}$

Respuestas esperadas

Esperamos que la pareja, dentro de sus acciones lea, subrayen el texto, movilicen los resultados que obtuvieron en la actividad 2, en donde el modelo matemático del sistema 1 se expresó en las nuevas coordenadas, es decir $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y$, pensamos que realizará similares acciones para expresar el sistema 2 como una ecuación diferencial

$\frac{dy}{dx} = -0.21y$, enseguida suponemos que identifica los cambios de variables $x = 10^{13}t$,

$y(t) = \frac{\sigma(t)}{10^7}$, del primero podría observar que si $x = 0$ entonces $t = 0$, del segundo la pareja podría expresarlo como $y(t(x)) = \frac{\sigma(t(x))}{10^7}$ de donde para $x = 0$ se tiene $y(t(0)) = \frac{\sigma(t(0))}{10^7}$, enseguida $y(0) = \frac{\sigma(0)}{10^7}$ en donde utilizaría la expresión $\sigma(0) = 5 \times 10^7 \frac{N}{m^2}$ para tener $y(0) = 5$. Enseguida, suponemos que la pareja, como parte de sus acciones, tomará en cuenta la actividad 3, construiría el campo direccional, para ello determinaría las isoclinas, que para el sistema 1, lo expresaría como $-\frac{2}{3}y = c$, observarían que dado un c vendría a ser la pendiente de una recta tangente a la solución de la ecuación diferencial, despejaría $y = -\frac{3}{2}c$, tomarían como como isoclinas a las rectas $y = 1, y = 2, y = 3, y = 4, y = 5$, que corresponde para los valores de la pendiente $c = -\frac{2}{3}, c = -\frac{4}{3}, c = -2, c = -\frac{8}{3}, c = -\frac{10}{3}$ respectivamente (situación de acción).

Para el segundo sistema como parte de sus acciones la pareja plantearía las isoclinas $-0.21y = k$, específicamente las isoclinas mencionadas anteriormente, despejando y tendría $y = -\frac{1}{0.21}k$, entonces $k = -0.21, k = -0.42, k = -0.63, k = -0.84, k = -1.05$ serían los valores de las pendientes. La recta $y = 1$ es una isoclina para ambos sistemas, por el punto $(1,1)$ pasarían dos segmentos tangentes con pendientes, $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{2}{3}(1) = -\frac{2}{3}$, y $\frac{dy}{dx}(1) = -0.21(1) = -0.21$. (situación de acción).

Pensamos que la pareja trazaría por el punto $(1,1)$ un segmento tangente de pendiente $-\frac{2}{3}$ correspondiente al sistema 1 que estaría de color azul, luego por dicho punto trazaría otro segmento tangente de pendiente -0.21 correspondiente al sistema 2 que estaría dibujado de color rojo. Así sucesivamente, podemos hallar las pendientes de dichos segmentos. Luego, suponemos puede que la pareja partiendo de la condición inicial trazaría las curvas solución que se dibujan a continuación (situación de acción), como podemos observar en la figura 114.

Por último, la pareja formularía que el sistema 1 provoca una mejor amortiguación, lo que validaría interpretando las gráficas obtenidas, pues la curva del sistema 1 es la primera curva de color azul que se acerca más rápidamente al eje X después está la curva del sistema 2 de color rojo (ver la figura 114).

Análisis a posteriori de la actividad 4

En esta actividad como parte de sus acciones la pareja ha leído el texto de la actividad 4, intercambió ideas y seguidamente empezó a subrayar las expresiones significativas para la actividad, como se puede ver la figura 115, coincide con el análisis a priori,

Considerando un esfuerzo inicial $\sigma(0) = 5 \times 10^7 \frac{N}{m^2}$ con los cambios de variable realizados en la actividad 2 para algunos valores de c , en la gráfica de su isóclina asociada, ubique al menos ocho puntos uniformemente distanciados, dibujando en cada uno de ellos dos segmentos tangentes; uno por cada sistema de amortiguación. A partir de allí, grafique la solución de los dos sistemas de amortiguación y determine ¿cuál de los sistemas provoca una mejor amortiguación? Utilice la figura A3.

Figura 115. Subrayado en la actividad 4

Enseguida el esfuerzo inicial se expresa en las nuevas variables, esta acción se evidencia en la figura 116.

Actividad 4

$$\sigma(0) = 5 \cdot 10^7 \quad \left. \begin{array}{l} x = 10^3 c \\ y = \frac{\sigma}{10^7} \end{array} \right\} \epsilon = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 5 \end{array} \right.$$

Punto Inicial (0; 5)

Figura 116. Nuevas condiciones iniciales

A continuación, la pareja expresó el sistema de amortiguación 1 y 2, en las nuevas coordenadas y sus isoclinas respectivas, estas acciones se evidencian en la figura 117.

<p>Sistema 1</p> $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}y = C$ $y = -\frac{3}{2}C$	<p>Sistema 2</p> $\frac{dy}{dx} = -\frac{21}{100}y = C$ $y = -\frac{100}{21}C$
--	--

Figura 117. Modelos de dos sistemas de amortiguación

La pareja, realizó acciones con el fin de graficar los segmentos tangentes, para el primer sistema, eligió cinco rectas horizontales. Para $y = 5 = -\frac{3}{2}C$, de donde

$c = -3.33$, planeó seguir las mismas acciones para las rectas $y = 4$, $y = 3$, $y = 2$, $y = 1$. En el primer caso la pareja obtuvo el vector $(1, -3.33)$, todo ello se evidencia en la transcripción del audio.

La pareja: Que $y = 5$, $y = 4$, $y = 3$, $y = 2$, $y = 1$. Si $y = 5$, el c cuanto sería?, está bien? Se me ha ocurrido algo, con esto voy a tener un vector, para esto hacemos $y = 4$, $y = 3$, pero esto lo vamos hacer con el color azul, con eso sale una gráfica, ahora con el rojo o negro, hacemos el otro, que va estar otro lado, va ser diferente, va hacer aproximado. Que $y = 5$, diez entre tres, -3.33 , el vector sería $(1, -3.33)$.

La pareja planeó seguir el mismo procedimiento para el segundo sistema. Además, la transcripción del audio es reafirmada con la figura 118, donde se presenta la pendiente, la isocлина y el vector tangente para el sistema 1.

$c = -3,33$	$y = 5$	$(1, -3,33)$
$c = -2,66$	$y = 4$	$(1, -2,66)$
$c = -2$	$y = 3$	$(1, -2)$
$c = -1,33$	$y = 2$	$(1, -1,33)$
$c = -0,66$	$y = 1$	$(1, -0,66)$

Figura 118. Vector tangente para el sistema 1

A continuación, la pareja presentó la pendiente, la isocлина y el vector tangente para el sistema 2, por ejemplo, para la isocлина $y = 5$ se tiene la pendiente $c = -1.05$ de los segmentos tangentes y el vector tangente a la curva está dada por $(1, -1.05)$, ver estas acciones en la figura 119.

$c = -1,05$	$y = 5$	$(1, -1,05)$
$c = -0,84$	$y = 4$	$(1, -0,84)$
$c = -0,63$	$y = 3$	$(1, -0,63)$
$c = -0,42$	$y = 2$	$(1, -0,42)$
$c = -0,21$	$y = 1$	$(1, -0,21)$

Figura 119. Vector tangente para el sistema 2

Seguidamente, la pareja graficó dos campos direccionales en un mismo sistema de coordenadas y graficó las soluciones de los dos sistemas, esto se evidencia en la figura 120, hecho que coincide con nuestro análisis *a priori*.

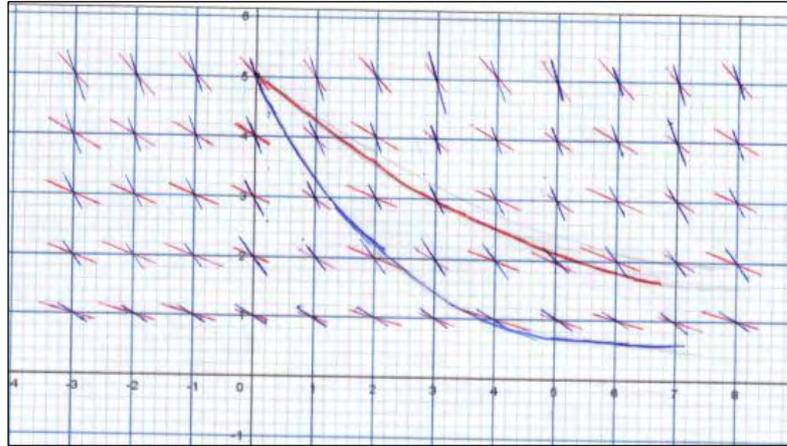


Figura 120. Curvas solución para la actividad 4

Luego, la pareja graficó en un papel bond y señala cual es la solución de cada sistema (situación de acción), como se puede observar en la figura 121.

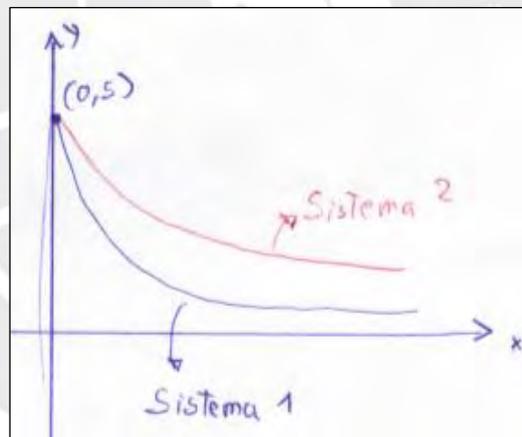


Figura 121. Gráfica del esfuerzo en papel bond

A continuación, la pareja formuló que el sistema 1 provoca una mejor amortiguación e intenta validar tomando en cuenta la gráfica obtenida, ello se evidencia en la figura 122.

> El sistema 1 provoca una mejor amortiguación debido a que genera menos esfuerzo al amortiguar. (Se puede observar en la gráfica).

Figura 122. Primera formulación de la actividad 4

En la figura 122, la pareja formuló que el sistema 1 amortigua mejor, intenta validar usando un proceso físico como el de un bache, esto se evidencia en figura 123.

La condición inicial que dice que por ejemplo para por un tiempo muere o bache. Luego se va disipando conforme pasa el tiempo. En su gráfica el sistema 1 disipa más rápido el golpe, mientras que el sistema 2 toma más tiempo en disiparse. Finalmente el sistema 1 amortigua mejor.

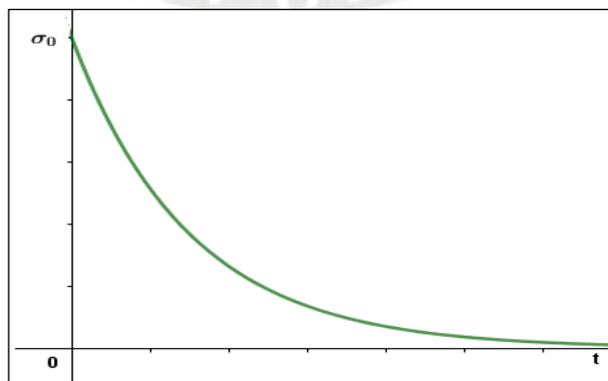
Figura 123. Segunda formulación de la actividad 4

Se logra el objetivo de interpretar las curvas soluciones trazadas en campos direccionales, cabe señalar que para validar cuál de los sistemas amortigua mejor, la pareja utiliza un proceso físico hecho que no habíamos contemplado en nuestro análisis *a priori*.

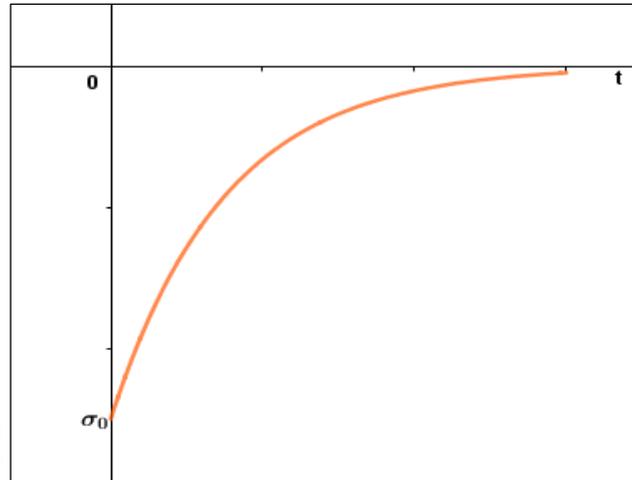
Luego de comparar el análisis *a priori* realizado con lo desarrollado por la pareja en nuestro análisis *a posteriori* podemos afirmar que la pareja logró graficar dos curvas soluciones asociadas a dos sistemas de amortiguación, enseguida dio una interpretación de ellas, con lo cual se cumple el objetivo de la actividad, asimismo, se han identificado las acciones, formulaciones y validaciones realizadas por la pareja, con lo cual estamos en camino de lograr los objetivos específicos.

Institucionalización local de la actividad 4

Sea la ecuación diferencial que modela nuestro sistema de amortiguación $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$, si el esfuerzo inicial es $\sigma(0) = \sigma_0 > 0$, entonces estamos ante un proceso de tracción es decir la esfuerzo actúa ante el sistema en forma perpendicular saliendo del sistema y la forma de la solución es



si el esfuerzo inicial es $\sigma(0) = \sigma_0 < 0$, entonces se está ante un proceso de compresión es decir el esfuerzo actúa ante el sistema en forma perpendicular entrando al sistema y la forma de la solución es



Institucionalización global

Al término de las actividades se presentan todas las institucionalizaciones locales a modo de consolidar los saberes aprendidos.

CONSIDERACIONES FINALES

Para Dullius (2009), hay muy pocos estudios que exploran el tema de la enseñanza y/o aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, de aquí inferimos que el tema de interpretar y trazar las curvas solución en un campo direccional de una EDO, está presente en pocas investigaciones. Las dificultades que presentan los estudiantes en este tema, motivaron la realización de este estudio.

Iniciamos nuestro trabajo realizando un estudio de las investigaciones que tuvieron como objeto de estudio, la EDO, además, investigaciones relacionadas a la problemática que hay en la enseñanza de la EDO, en nuestros antecedentes Perdomo (2010), Dullius (2009), Arslan (2005), y Barros (2008), se encuentra el hecho que el estudiante frente a una ecuación diferencial tiende a hallar la solución utilizando métodos algebraicos, dejando de lado los métodos cualitativos.

Nuestro marco teórico, basado en La Teoría de las Situaciones didácticas, de Brousseau (1986), permitió que la pareja de estudiantes movilice sus conocimientos previos para interpretar las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de EDOs. Para que la pareja desarrolle la construcción del saber matemático, se diseñó una situación problema, la cual estuvo conformada por cuatro situaciones *a didácticas*, que se denomine *a didáctica* no implica falta de intención de enseñar sino lo contrario, el profesor diseña todo esto para enseñar un saber, se llama así porque el saber a enseñar no se comunica al alumno, en la experimentación de cada situación *a didáctica* el alumno pasa por situaciones de acción, formulación y validación, de forma que el saber emerge del trabajo realizado en las actividades. Por los resultados obtenidos en la experimentación de la situación problema, pudimos verificar el logro de los objetivos planteados en cada actividad.

En la actividad 1, consistió en estudiar del comportamiento del esfuerzo normal en el modelo del sistema de amortiguación, es decir llevar el lenguaje natural (texto de la actividad 1) a una representación algebraica (EDO), aquí la pareja moviliza sus saberes previos de monótona creciente, monótona decreciente, tasa de variación, variación instantánea, ley de Hooke, esfuerzo normal, deformación normal y viscosa, ello provocó en la pareja situaciones de acción, formulación y validación; conducir la representación algebraica (EDO) hacia otra representación algebraica (solución de la

EDO), aquí la pareja uso una estrategia algebraica para hallar la solución de la EDO, movilizó en la pareja situaciones de acción, formulación y validación; de la representación algebraica (solución de la EDO) se logró determinar el comportamiento del esfuerzo, la pareja movilizó situaciones de acción y formulación.

Respecto de la actividad 1, podemos concluir que la pareja logró convertir el lenguaje natural (sistema de amortiguación) hacia la representación algebraica (EDO), luego para determinar el comportamiento del esfuerzo normal, la pareja siguió una estrategia algebraica, es decir resolver la EDO, la pareja tenía conocimientos de métodos algebraicos para resolver una ecuación diferencial, de aquí podemos afirmar que la enseñanza del enfoque algebraico es un obstáculo para la enseñanza de un enfoque cualitativo, afirmación que coincide con Arslam (2005). Al inicio, la pareja tuvo dificultad en pasar del lenguaje natural (sistema de amortiguación) a la representación algebraica (EDO).

El primer objetivo específico se ha logrado por medio de esta actividad pues al comparar nuestro análisis *a priori* y *a posteriori* observamos que la pareja, a partir de la solución de la EDO, determinó el comportamiento del esfuerzo normal hecho que no coincide con nuestro análisis *a priori*.

En la actividad 2, buscábamos construir la noción de isoclina, es decir llevar el lenguaje natural (texto de la actividad 2) y la representación algebraica (EDO de la actividad 1) a una representación algebraica (nueva EDO) movilizó en la pareja situaciones de acción, formulación y validación, la pareja utilizó la estrategia de la regla de la cadena; conducir la representación algebraica (nueva EDO) hacia una representación gráfica (segmentos tangentes) movilizó en la pareja situaciones de acción, formulación y validación, la pareja utilizó las estrategias del significado geométrico de la derivada de una función en un punto y de funciones las trigonométricas; de la representación gráfica (segmentos tangentes) se logró construir la noción de isoclina, lo que provocó en la pareja situaciones de acción, formulación y validación.

Respecto a la actividad 2, podemos concluir que la pareja logró utilizar: un significado de la derivada (la regla de la cadena) y el significado geométrico de la derivada de una función en un punto. Al inicio tuvo dificultad en usar los significados de la derivada y en la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

El segundo objetivo específico se ha logrado parcialmente por medio de la actividad 2. Las estrategias que la pareja realizan para identificar las isoclinas es usar la regla de la cadena, significado geométrico de la derivada de una función en un punto y las funciones trigonométricas. El uso de la pareja de las funciones trigonométricas no coincide con nuestro análisis *a priori*.

En la actividad 3, buscábamos representar gráficamente algunas curvas solución utilizando el campo direccional de la EDO, es decir del lenguaje natural (texto de la actividad 3), de la representación algebraica (EDO de la actividad 2) la pareja plantea la estrategia de resolver la EDO, obteniendo $y = ke^{(-\frac{2}{3})x}$, luego la estrategia de aproximar las coordenadas del punto $A(2.4, 4.4)$ y reemplazarlo en $y = ke^{(-\frac{2}{3})x}$, con el que la pareja tendría el valor de k . Para el punto C aproximarían sus coordenadas, la abscisa lo reemplazarían en $y = ke^{(-\frac{2}{3})x}$, de esta forma observarían si el punto C esta abajo o arriba de la curva descrita por la solución. Repetirían el proceso para el resto de puntos. La pareja formuló que los segmentos tangentes no se cortan la que no llegan a validar completamente. De la actividad 2, las rectas horizontales tienen segmentos tangentes a la curva solución, que tienen una misma pendiente, la pareja observa el campo direccional proporcionado para ver el comportamiento de la pendiente de la recta tangente, la pareja recuerda el significado geométrico de la derivada en un punto. Viendo el campo direccional formula que la EDO tiene infinitas soluciones, la pareja no lo valida salvo que piensen en la solución $y = ke^{(-\frac{2}{3})x}$, donde k varia. La pareja formuló que las curvas solución tienen que ser tangente a los segmentos del campo direccional. Luego la pareja logra trazar las curvas soluciones que pasan por los puntos A, B, \dots, F , lo que en proceso de la actividad originó en la pareja situaciones de acción, formulación y validación.

Respecto de la actividad 3, el campo direccional facilitado y la afirmación hecha por la pareja, que para cada punto de la curva solución existe una sola pendiente ayudó a superar la dificultad de pensar que las soluciones se cortan.

El segundo objetivo específico se ha logrado parcialmente por medio de la actividad 3. Las estrategias que utilizó la pareja para graficar algunas curvas solución utilizando un campo direccional de la EDO son el hallar la solución de la EDO de la actividad 2, Aproximar las coordenadas de los puntos A, B, \dots, F , usar estos puntos en la

solución $y = ke^{(-\frac{2}{3})x}$, los segmentos en el campo direccional son tangentes a la solución de la EDO, la pareja trazo las curvas solución, significado geométrico de la derivada de una función en un punto.

Hasta aquí podemos afirmar que el segundo objetivo específico se ha logrado por medio del desarrollo de la actividad 2 y 3. En estas actividades, se identificó las estrategias utilizadas por la pareja y se realizó en cada actividad la comparación nuestro análisis *a priori* y el *a posteriori*.

La actividad 4, consistió en interpretar las curvas soluciones trazadas en campos direccionales de las EDOs del sistema de amortiguación es decir llevar el lenguaje natural (texto de la actividad 4) y tomando en cuenta la información de los sistemas de amortiguación la pareja obtuvo dos EDOs con sus condiciones iniciales en las nuevas coordenadas XY, se determinan las isoclinas de cada sistema, la pareja tomó como isoclinas las rectas $y = 1, y = 2, y = 3, y = 4, y = 5$ para ambos sistemas, la pareja eligió los mismos punto a lo largo de las isoclinas para graficar los segmentos tangentes, se trazaron de color azul para el primer sistema 1 y color rojo para el sistema 2. Hasta aquí, la pareja utiliza lo aprendido en la actividad 2 y actividad 3. Debido a que es una situación problema en contexto la pareja logra interpretar las curvas soluciones trazadas en campos direccionales.

Respecto de la actividad 4, la pareja logró elegir las rectas horizontales adecuadas, en elegir los puntos apropiados donde trazar los segmentos tangentes, logró en dar una interpretación a las curvas solución.

El tercer objetivo específico se ha logrado por medio de esta actividad. En esta actividad, se ha utilizado las estrategias aprendidas en la actividad 2 y 3, además sus saberes previos de física. Hemos identificado las situaciones de acción, formulación y validación, producidas por la pareja.

Los tres objetivos específicos de investigación se lograron alcanzar a través de las actividades.

Al lograr los objetivos específicos de investigación, podemos afirmar que se logró alcanzar el objetivo general de investigación.

De acuerdo a la ingeniería Didáctica de Artigue (1995), podemos decir que el análisis de las actividades de la experimentación se realizó mediante la confrontación entre el análisis *a priori* y el *a posteriori* de las actividades.

Al lograr el objetivo general de investigación conseguimos responder la pregunta de investigación.

De esta manera, hemos logrado comprender el proceso realizado por los estudiantes para determinar el comportamiento del esfuerzo normal en un modelo del sistema de amortiguación, de la construcción de la noción de isoclina, de la gráfica de las curvas solución en un campo direccional e interpretación de las curvas soluciones de un sistema de amortiguación.

Perspectivas futuras

Las actividades de esta investigación se podrían adecuar para la elaboración de otra situación problema vinculada con otras áreas de la ingeniería.

Sugerimos realizar investigaciones donde se utilice otro método cualitativo como el uso del diagrama de fase para determinar el comportamiento de la solución de una EDO.

Recomendamos a futuro incidir en el estudio de las EDO, deben ser asistidas por enfoques cualitativos y destacamos las necesidades dar prioridad en la enseñanza de las EDO

Si bien en esta tesis no se usó un *software* se recomienda su uso cuando se aborde modelos complejos que demanden mayor cálculo algebraico.

Sugerimos el diseño de una situación didáctica donde se aplique el método numérico como una alternativa para resolver una EDO de primer orden y extender el estudio a la EDO de segundo orden.

REFERENCIAS

- Almouloud, S. A. (2014). Fundamentos da didáctica da matemática. Editora UFPR.
- Almouloud, S. A. (2016). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 11(2), 109-141. Recuperado de <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p109/33631>
- Apostol, T. M. (1999). *Calculus, vol. II*. México: Editora Reverté SA.
- Arslan, S. (2005). *L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S: est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences?* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf>
- Artigue, M. (1992). *In the Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, edited by G. Harel and E. Dubinsky (Washington, DC: The Mathematical Association of America). pp. 109-132.
- Barros, A. M. (2008) Equações diferenciais ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, resolução de problemas e Introdução à Modelagem Matemática. (Tesis maestría). Pontificia Universidade Minas Gerais. Brasil. Recuperado de http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_AlvesMB_1.pdf
- Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). Investigación qualitativa em educação. Trad. María Álvarez, Sara Bahia y Telmo Mourinho. Portugal: Porto Editora.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, pp 33-115. Recuperado de <http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentosBrousseau.pdf>

- Brousseau G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, 5 (1), 1-6. Recuperado de <https://journals.openedition.org/educationdidactique/1005>.
- Brousseau G. (2013). Introduction à l'Ingénierie Didactique. Recuperado de <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-l'ing%C3%A9nierie-didactique3.pdf>
- Camarena, P. (2002). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. *Revista Innovación Educativa*, 2(10), 22-27. Recuperado de <https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/09/metodolog%C3%ADa-curricular-camarena.pdf>
- Ciaurri, O. (2013). Instantáneas Diferenciales. Métodos Elementales de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Estudio del Problema de Cauchy y Teoría de Ecuaciones y Sistemas Lineales. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=528070>
- Creswell, J. W. (2010). Proyecto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto. In *Proyecto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto*.
- Dullius, M. M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. (Tesis doctoral). Universidad de Burgos. España. Recuperado de <http://riubu.ubu.es/bitstream/10259/110/1/Dullius.pdf>
- Gere, J. M., Timoshenko, S. (2002). *Resistencia de materiales: Timoshenko*. Paraninfo.
- Guzmán, M. D. (1975). *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*. Madrid, España: Alhambra.
- Leibniz, G. W. (1691) De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos. *Acta Eruditorum*, 10(s/n), 277-281. Recuperado de <https://play.google.com/books/reader?id=unNIAAAAcAAJ&hl=es&pg=GBS.PA277>
- Perdomo, D. J. (2010). Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de resolución de problemas. (Tesis doctoral). Universidad de la Laguna. España.

- Pinto, R. L., & Lima, G. L. (2017). Ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia Mecânica. *Revista de Produção Discente em Educação*. Recuperado de <https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/35417/24243>
- Sanz, A. P. y Dalí, I. S. (noviembre de 2005). Curvas en la Naturaleza. Raúl Ibáñez y Marta Macho Stadler (organizadores), *Un paseo por la geometría*. Conferencias de la octava edición del Ciclo “Un Paseo por la Geometría”, organizado desde el Departamento de Matemáticas de la UPV/EHU, España. Recuperado de http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10884%3Aun-paseo-por-la-geometria&catid=136%3Acursos-y-ciclos-de-conferencias&directory=67&limitstart=8
- Soare, M. V., Teodorescu, P. P., & Toma, I. (2007). *Ordinary differential equations with applications to mechanics* (Vol. 585). Dordrecht: Springer.
- Sotomayor, J. (2011). *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Sao Paulo, Brasil: Livraria da Física
- Wanner, G. (1988). *Les équations différentielles ont 350 ans*. Université de Genève-Section de mathématiques. Recuperado de <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001:1988:34::158#555>
- Zang, C. M., Metzen, G. A. y León, M. N. (2015). Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales. *UNIÓN*, (42), 150-165. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/42/42_Artigo7.pdf
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado*, México: Thomson.

ANEXOS



Anexo A. Sílabo del Curso

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA MECÁNICA

I. DATOS GENERALES

1.1. Asignatura	:	MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA
1.2. Código	:	M0418
1.3. Condición	:	Obligatorio
1.4. Requisito	:	M0313
1.5. N° de Horas de Clase	:	06 horas semanales
1.5.1. Teóricas	:	04 horas semanales
1.5.2. Practicas	:	02 horas semanales
1.6. N° de Créditos	:	5
1.7. Ciclo	:	IV
1.8. Semestre Académico	:	2018-B
1.9. Duración	:	17 semanas;102 horas
1.10.Docente(s)	:	Rogelio Cerna Reyes

II. SUMILLA

La asignatura pertenece al área curricular de Estudios Generales, es de **naturaleza** teórico práctica y de carácter obligatorio. Tiene como **propósito** desarrollar en el estudiante las capacidades conceptuales, procedimentales y actitudinales, para resolver problemas de; ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales utilizando los diferentes métodos o técnicas como series de potencias, Transformada de Laplace y Fourier. Su **contenido** comprende las siguientes unidades: Unidad I. Espacios vectoriales, transformaciones lineales. Unidad II. Ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos de solución de ecuaciones diferenciales, tipos de ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales de orden superior. Unidad III. Métodos que emplean series de potencias, transformada de Laplace, series de Fourier y transformada de Fourier. Unidad IV. Ecuaciones diferenciales parciales. Método del producto y aplicaciones.

III. COMPETENCIA DE LA ASIGNATURA

4.1. COMPETENCIAS GENERALES

El estudiante desarrolla su creatividad con responsabilidad social y adquiere una formación académica sólida en conocimientos de ciencia y tecnología aplicados a la investigación científica, con competencias para el diseño de máquinas y equipos industriales, para la transformación de la energía y la manufactura, con especializaciones en automatización y control de procesos industriales, producción y proyecto de máquinas industriales y energéticos para el desarrollo socioeconómico y cultural, sostenido y sustentable, del país.

4.2. COMPETENCIAS DE LA ASIGNATURA

Conoce, comprende, aplica, relaciona, organiza, analiza los conceptos y propiedades básicas de cada unidad temática de la asignatura en la solución de problemas didácticos demostrando disposición al trabajo en equipo, con ética, actitud creativa y crítica.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CAPACIDADES Y ACTITUDES

COMPETENCIAS	CAPACIDADES	ACTITUDES
• Conoce, comprende, aplica, relaciona, organiza, analiza los conceptos y propiedades	• Conoce, comprende y aplica las definiciones y propiedades de espacios vectoriales y transformaciones lineales en el	• Muestra pensamiento lógico y analítico.

<p>básicas de cada unidad temática de la asignatura.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resuelve problemas didácticos en cada unidad temática de la asignatura. • Demuestra disposición al trabajo en equipo, con ética, actitud creativa y crítica. 	<p>análisis y solución de problemas didácticos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conoce, comprende, interpreta cualitativamente y aplica conceptos, propiedades y métodos de solución de ecuaciones diferenciales hasta de orden superior en el análisis y solución de problemas didácticos. • Conoce, comprende y aplica los Métodos que emplean series de potencias, transformada de Laplace, series de Fourier y transformada de Fourier en el análisis y solución de problemas didácticos. • Conoce, comprende y aplica, el método del producto y de curvas características en el análisis y solución de problemas didácticos relacionados con la ingeniería. 	<ul style="list-style-type: none"> • Presenta la relación de lo aprendido con los procesos en la Ingeniería. • Muestra disposición al trabajo en equipo, con ética, actitud creativa y crítica.
--	--	---

IV. PROGRAMACIÓN POR UNIDADES DE APRENDIZAJE

UNIDAD I. Espacios vectoriales y transformaciones lineales

DURACIÓN: Semanas: 1ra. y 2da. Semana

Fecha de inicio: 13/08/2018 Fecha de Término: 24/08/2018

CAPACIDAD DE LA UNIDAD:

1. Conoce, comprende y aplica las definiciones y propiedades de espacios vectoriales y transformaciones lineales en el análisis y solución de problemas didácticos.
2. Identifica el problema y propone el título del trabajo de tesina.

SEMANA	CONTENIDO CONCEPTUAL	CONTENIDO PROCEDIMENTAL	CONTENIDO ACTITUDINAL	INDICADORES
1.	<p>Introducción al álgebra lineal. Espacios Vectoriales. Subespacios. Operaciones con Subespacios. Combinación e independencia lineal. Envolvente Lineal. Bases y Dimensión. Matriz de Cambio de Base.</p>	<p>Verbaliza la estructura matemática de espacio vectorial. Verifica espacios y subespacios vectoriales. Verifica y obtiene independencia lineal, envolvente lineal, bases y matriz de cambio de base.</p>	<p>Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N° 1. Manifiesta interés por investigar aspectos relacionados con la ingeniería.</p>	<p>Resuelve ejercicios didácticos sobre espacios y subespacios vectoriales, independencia lineal, envolvente lineal, bases y matriz de cambio de base. Presenta el título del trabajo de Tesina y los</p>

				integrantes de su grupo.
2.	Transformaciones lineales. Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Autovalores y autovectores.	Expresa y maneja las definiciones y propiedades de transformación lineal, matriz asociada, autovalores y autovectores.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N° 2. Manifiesta interés por investigar aspectos relacionados con la ingeniería	Resuelve ejercicios didácticos sobre transformaciones lineales, matriz asociada, autovalores y autovectores. Muestra interés y mejora el título del trabajo de Tesina.

UNIDAD II. Ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos de solución de ecuaciones diferenciales, tipos de ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales de orden superior.

DURACIÓN: Semanas: 3ra., 4ta., 5ta., 6ta., 7ma. Semana

Fecha de inicio: 27/08/2018 Fecha de Término: 28/09/2018

CAPACIDAD DE LA UNIDAD:

1. Conoce, comprende, interpreta cualitativamente y aplica conceptos, propiedades y métodos de solución de ecuaciones diferenciales hasta de orden superior en el análisis y solución de problemas didácticos.
2. Desarrolla y presenta el avance parcial del trabajo de tesina de acuerdo al formato de la Unidad de investigación.

SEMANA	CONTENIDO CONCEPTUAL	CONTENIDO PROCEDIMENTAL	CONTENIDO ACTITUDINAL	INDICADORES
3.	ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Ecuaciones diferenciales: Definición clases, orden y grado. Ecuaciones de variable separable. Ecuaciones homogéneas, exactas y factor de integración Practica calificada N° 1.	Expone y maneja las definiciones y propiedades de Ecuaciones diferenciales, clases, orden y grado. Transforma y resuelve Ecuaciones de variable separable. Ecuaciones homogéneas, exactas y factor de integración	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 3. Manifiesta interés por relacionar las ecuaciones diferenciales con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas.	Resuelve ejercicios didácticos sobre Ecuaciones diferenciales: Definición clases, orden y grado. Ecuaciones de variable separable. Ecuaciones homogéneas, exactas y factor de integración.
4.	Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Ecuación diferencial de Bernoulli y de Riccati. Ecuación diferencial de Lagrange y de Clairaut. Trayectorias ortogonales e isogonales.	Expone y maneja las definiciones y propiedades de Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Ecuación diferencial de Bernoulli y de	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 4. Manifiesta interés por relacionar las ecuaciones	Resuelve ejercicios didácticos sobre Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Ecuación

		Riccati. Ecuación diferencial de Lagrange y de Clairaut. Trayectorias ortogonales e isogonales.	diferenciales con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas	diferencial de Bernoulli y de Riccati. Ecuación diferencial de Lagrange y de Clairaut. Trayectorias ortogonales e isogonales.
5.	APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Problemas Geométricos, diferencia de temperaturas. Crecimiento y descomposición. Circuitos Eléctricos Simples	Expone, maneja y aplica las definiciones y propiedades de las ecuaciones diferenciales a Problemas Geométricos, diferencia de temperaturas. Crecimiento y descomposición. Circuitos Eléctricos Simples	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 5. Manifiesta interés por la aplicación de las ecuaciones diferenciales con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas.	Resuelve ejercicios didácticos sobre Problemas Geométricos, diferencia de temperaturas. Crecimiento y descomposición. Circuitos Eléctricos Simples.
6.	ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior. Tipos. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes. Ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas Practica calificada N° 2	Expone, maneja y aplica las definiciones y propiedades de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior. Tipos. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes. Ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 6. Manifiesta interés por la aplicación de las ecuaciones diferenciales con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas	Resuelve ejercicios didácticos sobre Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior. Tipos. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes. Ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas.
7.	Métodos de solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficiente constante: Coeficientes indeterminados y variación de parámetros. Operadores diferenciales inversas (métodos abreviados). Ecuación de Euler. Aplicación a movimientos vibratorios. VERIFICAR EL AVANCE DE LOS TRABAJOS DE TESIS, DE ACUERDO A LOS FORMATOS.	Expone, maneja y aplica las definiciones y propiedades de Métodos de solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficiente constante: Coeficientes indeterminados y variación de parámetros. Operadores diferenciales inversas (métodos	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 7. Manifiesta interés por la aplicación de las ecuaciones diferenciales con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas	Resuelve ejercicios didácticos sobre Métodos de solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficiente constante: Coeficientes indeterminados y variación de parámetros. Operadores diferenciales inversas (métodos

		abreviados). Ecuación de Euler. Aplicación a movimientos vibratorios.		abreviados). Ecuación de Euler. Aplicación a movimientos vibratorios.
8.	Examen Parcial			

UNIDAD III. Métodos que emplean series de potencias, transformada de Laplace, series de Fourier y transformada de Fourier.

DURACIÓN: Semanas: 9na., 10ma., 11ava., 12ava., 13ava. Semana

Fecha de inicio: 08/10/2018 Fecha de Término: 09/11/2018

CAPACIDAD DE LA UNIDAD:

1. Conoce, comprende y aplica los Métodos que emplean series de potencias, transformada de Laplace, series de Fourier y transformada de Fourier en el análisis y solución de problemas didácticos.
2. Desarrolla y consulta el avance del trabajo de tesina de acuerdo al formato de la Unidad de investigación.

SEMANA	CONTENIDO CONCEPTUAL	CONTENIDO PROCEDIMENTAL	CONTENIDO ACTITUDINAL	INDICADORES
9.	ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES MÉTODO: SERIES DE POTENCIAS. Series de Potencias. Solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden de coeficientes variables mediante series de potencias. Métodos de Frobenius. Funciones de Bessel y propiedades.	Expone y maneja las definiciones y propiedades de Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables y el método de las series de potencias.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 8. Manifiesta interés por relacionar las ecuaciones diferenciales con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas	Resuelve ejercicios didácticos sobre Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables y el método de las series de potencias.
10.	TRANSFORMADA DE LAPLACE Transformada de Laplace - Propiedades de la Transformada de las funciones: Escalón Unitario y Delta de Dirac. Transformada de las funciones periódicas. Transformada inversa de Laplace.	Expone y maneja las definiciones y propiedades de Transformada de Laplace - Propiedades de la Transformada de las funciones: Escalón Unitario y Delta de Dirac. Transformada de las funciones periódicas. Transformada inversa de Laplace.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 9. Manifiesta interés por relacionar la transformada de Laplace con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas	Resuelve ejercicios didácticos sobre Transformada de Laplace - Propiedades de la Transformada de las funciones: Escalón Unitario y Delta de Dirac. Transformada de las funciones periódicas.

				Transformada inversa de Laplace.
11.	Aplicación de la transformada de Laplace a: Resolución de Ecuaciones diferenciales ordinarias. Aplicación o Problemas físicos. Teoría de convolución Practica calificada N° 3	Expone, maneja y aplica la transformada de Laplace, la teoría de convolución de Ecuaciones diferenciales ordinarias y Problemas físicos.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 10. Manifiesta interés por la Aplicación de la transformada de Laplace y la teoría de convolución a Problemas físicos.	Resuelve ejercicios didácticos sobre transformada de Laplace y la teoría de convolución.
12.	SERIES DE FOURIER Series de Fourier de periodo 2π y de periodo arbitrario. Series de Fourier de medio rango (Series de funciones periódicas pares e impares)	Expone, maneja y aplica las definiciones y propiedades de Series de Fourier de periodo 2π y de periodo arbitrario. Series de Fourier de medio rango (Series de funciones periódicas pares e impares).	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 11. Manifiesta interés por la aplicación de las Series de Fourier de periodo 2π y de periodo arbitrario. Series de Fourier de medio rango (Series de funciones periódicas pares e impares)	Resuelve ejercicios didácticos sobre Series de Fourier de periodo 2π y de periodo arbitrario. Series de Fourier de medio rango (Series de funciones periódicas pares e impares).
13.	TRANSFORMADA DE FOURIER Transformada finita de Fourier. Propiedades y aplicaciones. Transformada inversa finita de Fourier.	Expone, maneja y aplica las definiciones y propiedades de Transformada finita de Fourier. Propiedades y aplicaciones. Transformada inversa finita de Fourier.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 12. Manifiesta interés por la aplicación de la Transformada finita de Fourier. Propiedades y aplicaciones. Transformada inversa finita de Fourier.	Resuelve ejercicios didácticos sobre Transformada finita de Fourier. Propiedades y aplicaciones. Transformada inversa finita de Fourier.

UNIDAD IV. Ecuaciones diferenciales parciales. Método del producto y aplicaciones.

DURACIÓN: Semanas: 14ava., 15ava. Semana

Fecha de inicio: 12/11/2018 Fecha de Término: 23/11/2018

CAPACIDAD DE LA UNIDAD:

1. Conoce, comprende y aplica conceptos, el método del producto y de curvas características en el análisis y solución de problemas didácticos relacionados con la ingeniería.
2. Desarrolla y presenta el informe final del trabajo de tesina de acuerdo al formato de la Unidad de investigación

SEMANA	CONTENIDO CONCEPTUAL	CONTENIDO PROCEDIMENTAL	CONTENIDO ACTITUDINAL	INDICADORES
14.	RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DERIVADAS PARCIALES Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones iniciales y de frontera. Tipos y métodos de solución. Aplicaciones Practica calificada N° 4	Expone y maneja las definiciones y propiedades de las Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones iniciales y de frontera. Tipos y métodos de solución.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 13. Manifiesta interés por relacionar las Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones iniciales y de frontera con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas	Resuelve ejercicios didácticos sobre Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones iniciales y de frontera.
15.	Método clásico: separación de variables Utilizando la transformada finita de Fourier RECEPCIÓN DE LOS TRABAJOS DE TESINA, DE FORMA DIGITAL O IMPRESA.	Expone y maneja las definiciones y propiedades del Método clásico: separación de variables Utilizando la transformada finita de Fourier.	Manifiesta interés en la resolución de los ejercicios del Taller N.º 14. Manifiesta interés por relacionar la aplicación del método de separación de variables con temas de la ingeniería. Creativo y Crítico en la solución de problemas	Resuelve ejercicios didácticos sobre Método clásico: separación de variables Utilizando la transformada finita de Fourier.
16.	Examen Final			
17.	Examen Sustitutorio			

IV. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

4.1. Estrategias centradas en la enseñanza

- 4.1.1. Clase expositiva
- 4.1.2. Exposición problemática
- 4.1.3. Demostración

4.2. Estrategias centradas en el aprendizaje

- 4.2.1. Dinámicas grupales. Talleres
- 4.2.2. Exposición dialogada
- 4.2.3. Listados de ejercicios y problemas adicionales para que el estudiante complete y profundice su conocimiento.

V. MATERIALES EDUCATIVOS Y OTROS RECURSOS DIDÁCTICOS

5.1. Equipos informáticos

- 5.2. Fuentes de información
- 5.3. Multimedia
- 5.4. Separatas

VIII. EVALUACIÓN

La evaluación es un componente del proceso formativo que implica el recojo de información sobre los rendimientos y desempeños del estudiante. Permite el análisis para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje. Se evalúa antes, durante y al finalizar el proceso.

Antes: evaluación inicial, para recoger los saberes que posee el estudiante para asumir la asignatura y se aplica con una prueba de entrada cuyo resultado no interviene en el cálculo de la calificación de la asignatura.

Durante: se evalúa el desempeño del estudiante en el cumplimiento de tareas académicas de manera procesal (monografías, proyectos, planes, estudios de mercado, etc.) que originan la nota de proceso.

Final: evalúa los productos del aprendizaje, al finalizar una o más unidades de aprendizaje, usándose la prueba escrita como instrumento de medición (examen parcial y examen final).

Para efectos de calcular el resultado final de la evaluación asignatura, se utiliza la siguiente fórmula:

	PONDERACIÓN (%)
• Examen Parcial escrito del programa silábico	30
• Examen Final escrito restante del sílabo	30
• Promedio de Practicas, laboratorios y trabajos domiciliarios	15
• Trabajos de investigación en sus diferentes niveles	15
• Participación activa en aula	10

Para efectos de calcular el resultado final de la evaluación de la asignatura, se utiliza la siguiente fórmula:

$$NF = 0.3EP + 0.3EF + 0.15PPLTD + 0.15TI + 0.10PAA$$

Donde:

NF: Nota Final

EP: Examen Parcial.

EF: Examen Final.

PPLTD: Promedio de Prácticas, Laboratorios y Trabajos Domiciliarios.

Ti: Trabajos de Investigación (Presentación y exposición).

PAA: Participación Activa en Aula.

La escala de calificación es de cero (0) a veinte (20), siendo la nota mínima aprobatoria de 10.50 que equivale a once (11) y que debe ser registrado en el Acta Final.

El estudiante de pregrado, que al final del periodo académico excede el 30% de inasistencias, sobre el total de horas de clases programadas, será desaprobado en la asignatura.

Si la nota final $NF \geq 05$ rendirá un examen sustitutorio (ES); que reemplaza al menor calificativo de EP o EF.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- **DENNIS G. Zill, Michael R. Cullen.** Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Séptima edición. CENGAGE Learning 2009

- **DENNIS G. Zill, Michael R. Cullen.** “Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera”. Editorial Thomson Editores, S. A de C. V. 2006.
- **KREYSZYG, Erwin.** “Matemáticas Avanzadas para Ingeniería”. Editorial Mc. Graw Hill 1997.
- **SIMMONS George F.** “Ecuaciones diferenciales”. Ed. Mc Graw Hill México 1995
- **O'NEILL Peter V.** “Matemáticas Avanzadas para ingeniería”. Ed. Continental México 1994
- **GLENN LEDDER** “Ecuaciones diferenciales un enfoque modelado”. Editorial Mc Graw Hill. México 2006.
- **SPIEGEL Murray R.** “Transformada de Laplace”. Editorial Mc. Graw Hill. México 1995
- **KELLS L. M.** “Ecuaciones diferenciales elementales”. ED. Mc. Graw Hill México 1991
- **ESPINOZA RAMOS Eduardo.** “Ecuaciones Diferenciales”. 5ta edición.
- **C.H. Edwards, Jr. David E. Penney.** “Ecuaciones diferenciales Elementales” Ed. Prentice Hall. 1993
- **HSU Hwei P.** “Análisis de Fourier”. Ed. Addison Wesley Iberoamericana USA 1987
- **Bernard Kolman. Hill, David R.** Algebra Lineal. Pearson Educación, México 2006

Bellavista, agosto del 2018



Anexo C- Situación Problema

Sistema de amortiguación

La empresa Sagitario, dedicada al ensamblaje de autobuses y metalmecánica, se encuentra analizando dos sistemas de amortiguación, el sistema que se considere más adecuado será usado en el ensamblaje de un vehículo, colocándose un amortiguador al lado de cada rueda.

Estos sistemas se comportan como un modelo Maxwell, es decir, como una combinación en serie de un modelo de Hooke (elástico) y de Newton (viscoso). El modelo de Maxwell se caracteriza porque, cuando un esfuerzo normal σ (N/m²) se aplica sobre un sistema, el esfuerzo lo recibe tanto el resorte como el amortiguador. La deformación total ε_0 (constante en el tiempo), es la suma de las deformaciones:

1) La elástica del resorte $\varepsilon_{elasticidad}$, que según el modelo de Hooke viene dada por

$$\varepsilon_{elasticidad} = \frac{\sigma(t)}{E}, \text{ y}$$

2) La viscosa ε_{visc} del amortiguador, la que según el modelo de Newton verifica $\frac{d\varepsilon_{visc}}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\eta}$; Donde el módulo de Young E y el coeficiente de viscosidad dinámica η son constantes positivas.

Por lo tanto, al tener la variación instantánea de la deformación total, respecto al tiempo, se obtiene el modelo matemático para el sistema de amortiguación.

Actividad 1.

A partir del modelo matemático para el sistema de amortiguación, estudie los casos donde el esfuerzo σ sea:

- d) monótono creciente,
- e) monótono decreciente y
- f) donde sea constante.

Actividad 2

El ingeniero de la empresa Sagitario convierte la ecuación diferencial que modela nuestro sistema de amortiguación, con los valores de $E = 200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$ y $\eta = 0.03 \frac{Ns}{m^2}$, (correspondientes al primer sistema de amortiguación: tabla A1), en una equivalente, al aplicar el cambio de variables: $x = 10^{13}t$, $y = \frac{\sigma}{10^7}$.

Esto permite tener una mejor visualización en el sistema XY de las gráficas que se pide hallar a continuación, utilizando la figura A1:

- e) Calcule las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $A_1(1; -3)$, $B_1(1; -2)$, $C_1(1; -1)$, $D_1(1; 0)$, $E_1(1; 1)$, $F_1(1; 2)$, $G_1(1; 3)$, y represente gráficamente estos puntos así como cada recta tangente por un pequeño segmento que es parte de dicha recta, cuyo centro es el punto de tangencia, lo que se denominará segmento tangente.
- f) Aplique el procedimiento del párrafo anterior a los puntos: $A_2(0; 3/2)$, $B_2(1; 3/2)$, $C_2(2; 3/2)$, $D_2(3; 3/2)$, $E_2(4; 3/2)$, $F_2(5; \frac{3}{2})$.
- g) Luego, aplique el mismo procedimiento para los puntos: $A_3(0; 3)$, $B_3(1; 3)$, $C_3(2; 3)$, $D_3(3; 3)$, $E_3(4; 3)$, $F_3(5; 3)$.
- h) ¿Qué se puede concluir de la gráfica obtenida?

Tabla A 2:

Valores estimados del módulo de Young y coeficiente de viscosidad

	Sistema 1	Sistema 2
Módulo de Young (E)	$200 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$	$210 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$
Coficiente de viscosidad dinámica (η)	$0.03 \frac{Ns}{m^2}$	$0.1 \frac{Ns}{m^2}$

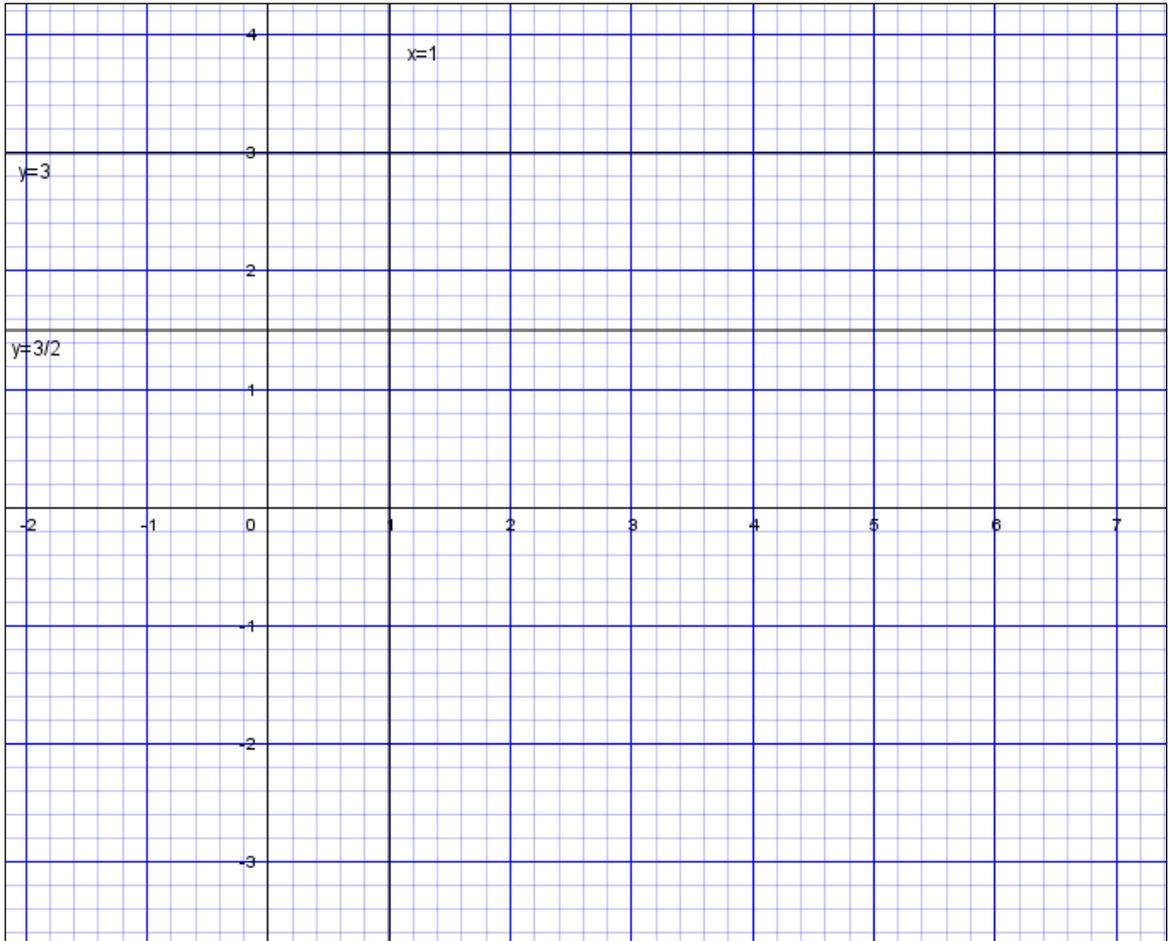
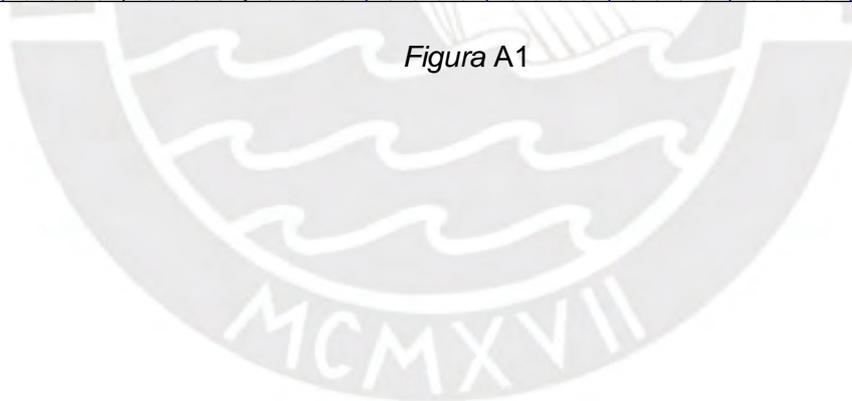


Figura A1



Actividad 3

En la nueva ecuación diferencial, reemplace la pendiente y' por una constante c , con lo cual obtendrá una isoclinas. Para cada valor real de c estará asociada una isoclinas. Al trazar varias isoclinas, con sus correspondientes segmentos tangentes (como en la actividad 2), se obtendrá el “campo direccional” de la ecuación diferencial. Este campo direccional se visualizará mejor si se omiten las isoclinas.

Grafique en la figura A2 la curva que es solución de la ecuación diferencial que pase por el punto A . Repetir este procedimiento para cada uno de los puntos B, C, D, E y F .

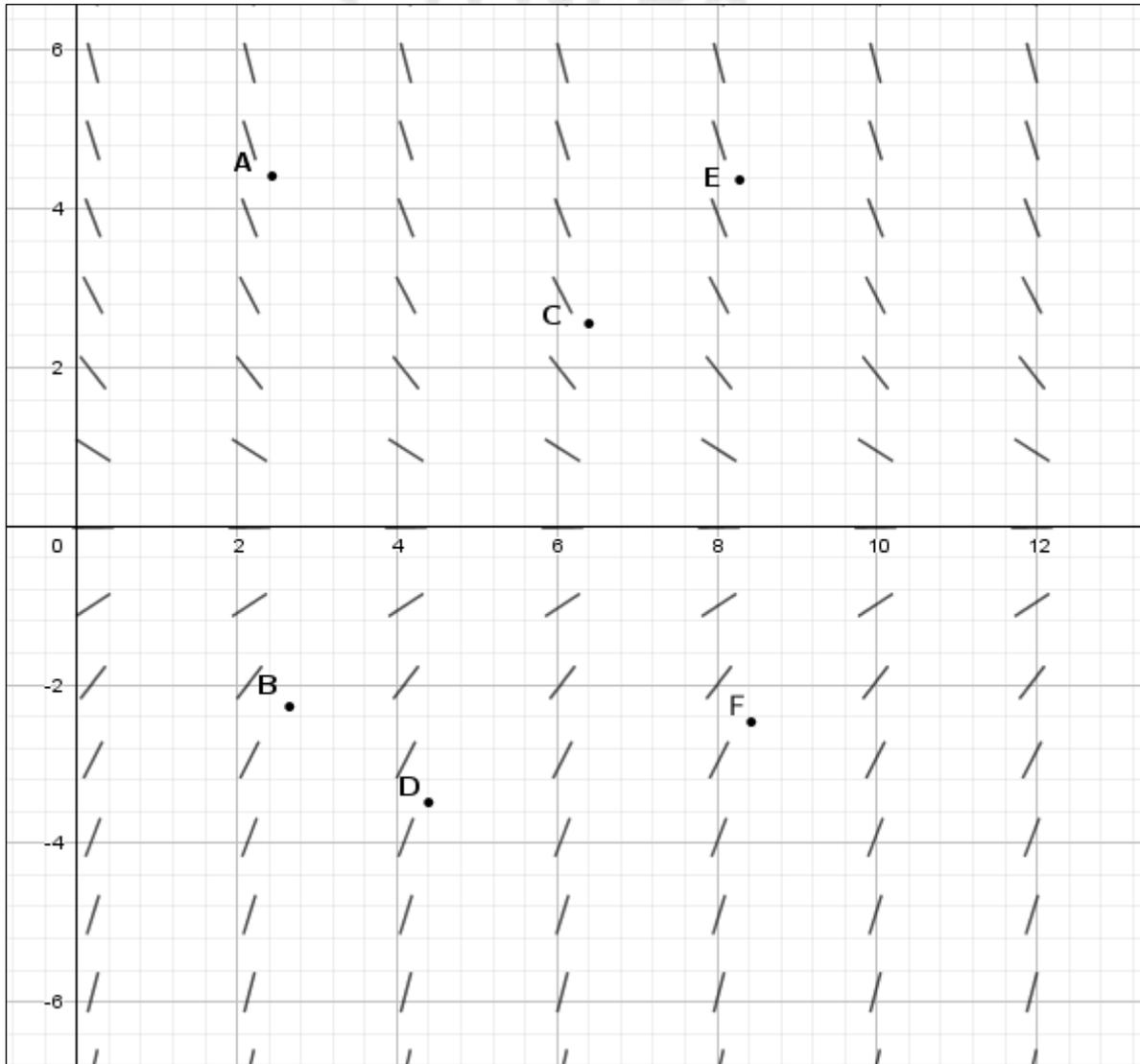


Figura A2

Actividad 4

Considerando un esfuerzo inicial $\sigma(0) = 5 \times 10^7 \frac{N}{m^2}$ con los cambios de variable realizados en la actividad 2 para algunos valores de c , en la gráfica de su isoclina asociada, ubique al menos ocho puntos uniformemente distanciados, dibujando en cada uno de ellos dos segmentos tangentes; uno por cada sistema de amortiguación. A partir de allí, grafique la solución de los dos sistemas de amortiguación y determine ¿cuál de los sistemas provoca una mejor amortiguación? Utilice la figura A3.

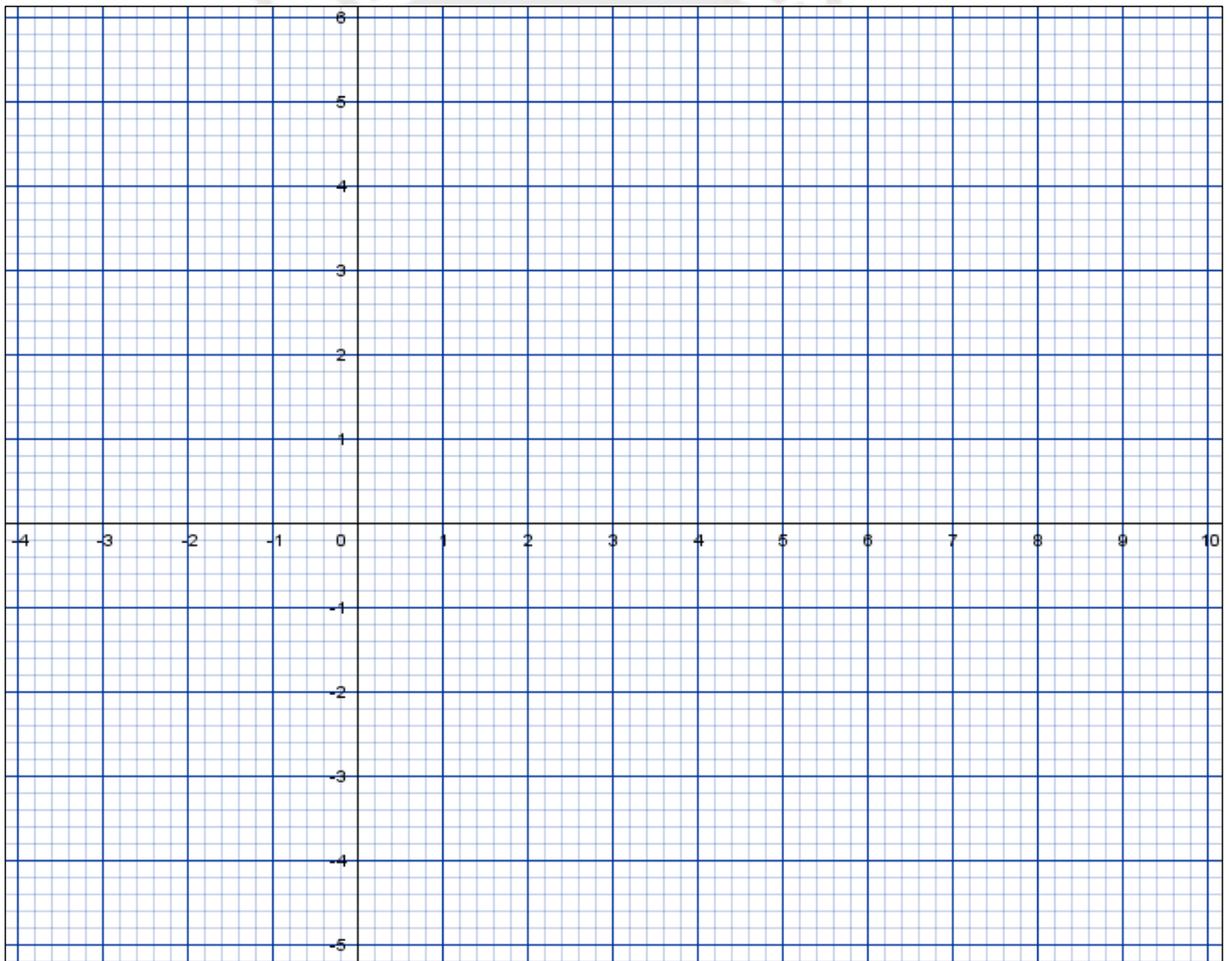


Figura A3

Anexo D Protocolo de consentimiento informado por el Comité de Ética de la PUCP

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES¹

El propósito de este protocolo es brindar a los y a las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por _____ (nombre del investigador o investigadora a cargo) de la Universidad _____. La meta de este estudio es _____

Si usted accede a participar en este estudio, se le pedirá responder una entrevista (encuesta o lo que fuera pertinente), lo que le tomará ____ minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que usted haya expresado.

Su participación será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por usted serán confidenciales, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar su participación en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted. Si se sintiera incómoda o incómodo, frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, _____ doy mi consentimiento para participar en el estudio y soy consciente de que mi participación es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta (de ser el caso que se haya proporcionado información escrita sobre la investigación). He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que mis datos personales, incluyendo datos relacionados a mi salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, puedan ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que estoy participando.

Entiendo que puedo finalizar mi participación en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mí.

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con _____ al correo (o al teléfono) _____.

Nombre completo del (de la) participante	Firma	Fecha
--	-------	-------

Nombre del Investigador responsable	Firma	Fecha
-------------------------------------	-------	-------

¹ Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

