

Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado



Representaciones de grupos simétricos y alternantes

Tesis para optar el grado de
Magíster en Matemáticas

José Luis HENOSTROZA GAMBOA

Asesor

Dr. ALFREDO BERNARDO POIRIER SCHMITZ

Jurados

Dr. Julio César Alcántara Bode
Dr. Rudy José Rosas Bazán.

Lima - Perú
Noviembre - 2018

REPRESENTACIONES DE GRUPOS SIMÉTRICOS y ALTERNANTES.

José Luis Henostroza Gamboa

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemáticas.

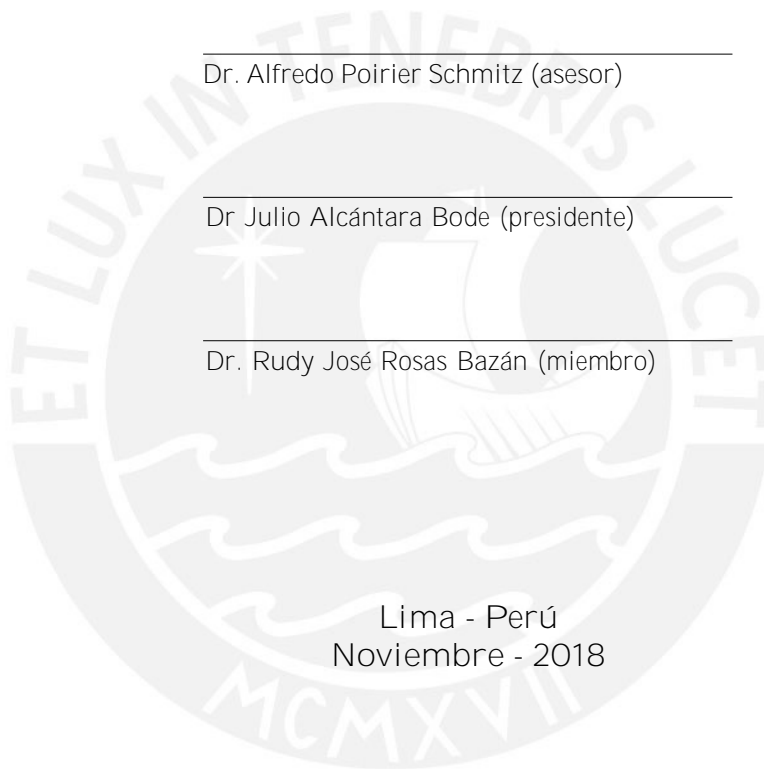
Miembros de Jurado:

Dr. Alfredo Poirier Schmitz (asesor)

Dr Julio Alcántara Bode (presidente)

Dr. Rudy José Rosas Bazán (miembro)

Lima - Perú
Noviembre - 2018



Resumen

El objetivo central de nuestro trabajo es la descripción detallada de la representación de grupos simétricos (o de permutaciones). Para tal efecto estructuramos la exposición en tres **capítulos**. En el primero se efectúa un estudio detallado de los grupos simétricos en cuanto a propiedades algebraicas, con énfasis en describir cómo opera en dichos grupos la relación de conjugación. En el **capítulo 2** se desarrolla una teoría general de la representación lineal de grupos en espacios vectoriales. Cobran importancia las representaciones irreducibles como instrumentos que permiten construir estructuras más generales. Finalmente en el **capítulo 3** se desarrollan los **vínculos** existentes entre representaciones irreducibles de grupos simétricos y los diagramas de Young y se llega a identificar cada representación irreducible con un objeto algebraico abstracto denominado módulo de Specht.

Abstract

The main objective of our work is the detailed description of the representation of symmetric groups (known also as permutations). For this purpose we organize the work in three chapters. In the first, a study is carried out of the symmetric groups in terms of algebraic properties, with emphasis in describing how conjugation operates within. In Chapter 2 a general theory of linear representation of groups in vector spaces is developed. Irreducible representations are important as instruments that allow us to build more general structures. Finally, in Chapter 3, the existing links between irreducible representations and Young diagrams are exposed, and it get to identify each irreducible representation with an abstract algebraic object called the Specht module.

Índice general

1. Grupos simétricos y alternantes	2
1.1. Preliminares	2
1.2. Ciclos de descomposición	3
1.3. Permutaciones pares e impares	6
1.4. Grupos alternantes	9
1.5. Conjugación en S_n y en A_n	13
2. Representación de grupos	24
2.1. Preliminares	24
2.2. Acción de grupos	25
2.3. Representación lineal de grupos finitos	27
2.4. Suma directa de representaciones	30
2.5. Representaciones irreducibles	32
2.6. Caracteres de representaciones	36
2.7. Producto tensorial de representaciones	41
2.8. Ortogonalidad de caracteres	43
3. Tablas y diagramas de Young	55
3.1. Particiones y diagramas de Young	55
3.2. Tablas de Young	56
3.3. Orden en las particiones	58
3.4. La acción de S_n en diagramas y tablas de Young	59
3.5. Subgrupos de Young	60
3.6. Tabloides y simetrizadores de Young	64
3.7. Politableoides y módulos de Specht	71
3.8. Módulos de Specht y representaciones	79
3.9. Representaciones irreducibles de S_5	92

Introducción

La aparición del concepto de grupo, término utilizado por primera vez por Evariste Galois hacia 1830, marcó un hito en la historia de las matemáticas modernas y en su devenir hacia los tiempos actuales. Específicamente el estudio los grupos de orden finito como por ejemplo los grupos simétricos ha cobrado importancia especial a fines del siglo XIX con Burnside, Frobenius y Schür.

Representar un grupo simétrico en particular consiste en identificar cada elemento del grupo con un isomorfismo de un espacio vectorial específico en sí mismo. En este caso, la identificación de elementos de un grupo con objetos tan externos o distintos (por lo menos en apariencia) ayudan a entender más a fondo la estructura interna del grupo y de ello, descubrir aplicaciones insospechadas en otras disciplinas. Las matemáticas actuales proporcionan muchos ejemplos de tales tipos de identificaciones.

Aún limitado el problema a grupos finitos, el estudio de las representaciones de cualquier grupo en espacios vectoriales sobre cualquier cuerpo es una tarea ambiciosa y difícil que suministra problemas aún por resolver. Es por ello que consideramos necesario delimitar el ámbito de nuestro trabajo. Se trata del estudio de las representaciones del grupo de las permutaciones de n elementos (llamado grupo simétrico S_n) en espacios vectoriales sobre un cuerpo de característica cero, como en los complejos. Las representaciones irreducibles son las piezas elementales que permiten construir otras representaciones en espacios vectoriales cada vez más abstractos; de allí la necesidad de precisar cuáles son y cómo se construyen.

Para ello dedicamos el capítulo 1 al estudio de los grupos simétricos S_n con especial énfasis en describir las clases de equivalencia determinadas por la relación de conjugación. Cada una de ellas entrará en correspondencia con una representación irreducible del grupo. Es lógico esperar que a mayor cantidad de clases, necesitemos más herramientas para detectar las representaciones irreducibles. Si bien hay libros, artículos y tesis que se ocupan del particular, expondremos en el capítulo 2 nuestro propio enfoque teórico complementado con explicaciones y ejemplos que provean al lector de un material coherente. Se completa el trabajo con el capítulo 3 en donde las tablas y diagramas de Young cobran protagonismo: relacionamos así particiones de n , clases de conjugación de S_n y representaciones irreducibles de S_n . Con las nociones de álgebra de grupo y módulos de Specht damos por concluida la descripción de las representaciones. En resumen, buscamos ofrecer al lector una presentación coherente, detallada e ilustrada con ejemplos varios que contribuyan a la claridad de la exposición.

Capítulo 1

Grupos simétricos y alternantes

1.1. Preliminares

El tema de nuestro trabajo se enmarca en la **teoría** de grupos y sus representaciones en espacios vectoriales complejos. Uno de los grupos finitos que más se utiliza lo conforman las permutaciones. Su importancia se hace notar por ejemplo en el teorema de Cayley, el cual establece que cualquier grupo finito es isomorfo a un subgrupo de cierto grupo de permutaciones. Por otro lado, el grupo de permutaciones de las **raíces** de un polinomio permite determinar la solubilidad de una ecuación algebraica asociada a dicho polinomio; resultado que se enmarca en la **teoría** de Galois. A fin de abordar con detalle los grupos de permutaciones, asumiremos y usaremos los resultados elementales de la **teoría** de grupos.

Para $n \in \mathbb{Z}$, consideremos el conjunto $1, 2, 3, \dots, n$ al que denotaremos por $[n]$. Una permutación de elementos de $[n]$ es cualquier función biyectiva de $[n]$ en sí mismo.

Si σ es la permutación definida por $\sigma(1) = \sigma_1, \sigma(2) = \sigma_2, \dots, \sigma(n) = \sigma_n$, la exhibiremos como

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{matrix}$$

El conjunto de todas las permutaciones de elementos de $[n]$ forma un grupo con la composición de funciones. Éste es el grupo de las permutaciones de n , llamado también grupo simétrico, al cual denotaremos por S_n . Si σ y τ son elementos de S_n , el producto $\sigma\tau$ se interpreta como $\sigma\tau(i) = (\tau \circ \sigma)(i) = \tau(\sigma(i))$, para cada $i \in [n]$. El orden del grupo S_n evidentemente es $n!$.

Ejemplo. Si $\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$ y $\tau = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$ en S_3 , entonces se cumple

$$\tau\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \sigma\tau = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Notemos que se tiene $\sigma\tau \neq \tau\sigma$. Como consecuencia es fácil concluir que, para $n \geq 3$, el grupo S_n no es conmutativo.

Para terminar esta presentación preliminar, y dado que parte importante de nuestro trabajo se centra en las representaciones de grupos, enunciemos

y demostramos un resultado que de paso nos ofrece un primer ejemplo de representación.

Proposición 1.1 (Teorema de Cayley) *Sea G un grupo finito. Entonces G es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones S_n para algún entero positivo n .*

Prueba. Sea $A(G)$ el conjunto de las funciones biyectivas del conjunto G en sí mismo. Se sabe que $A(G)$ es un grupo con la composición de funciones, donde $f \circ g$ lo interpretamos como gf , para todo $f, g \in A(G)$. El orden de $A(G)$ es $n!$, donde n es el número de elementos de G y además $A(G)$ es isomorfo al grupo de permutaciones S_n . Para cada $g \in G$, definimos la aplicación de G en G denotada por φ_g , llamada traslación a la derecha inducida por g , vía $\varphi_g(x) = xg$, para todo $x \in G$. Por las propiedades de los grupos, esta aplicación φ_g es biyectiva y por lo tanto se tiene $\varphi_g \in A(G)$.

De este modo queda definida una función φ de G en $A(G)$ a través de $\varphi(g) = \varphi_g$ para cada $g \in G$. Es más, φ es un monomorfismo de grupos. En efecto, sean $g_1, g_2 \in G$. Entonces para todo $x \in G$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{g_1 g_2}(x) &= x(g_1 g_2) = (xg_1)g_2 = (\varphi_{g_1}(x))g_2 \\ &= \varphi_{g_2}(\varphi_{g_1}(x)) = (\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1})(x) = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}$. Ahora supongamos que φ_g es la identidad en G . Entonces por definición se tiene $\varphi_g(x) = x$, para todo $x \in G$ y en particular $\varphi_g(e) = e$. Esto implica $eg = e$, de donde deducimos $g = e$. En otras palabras, φ es inyectiva, y como tal, por lo trabajado al inicio del párrafo, es un homomorfismo de grupos.

Si consideramos H la imagen de φ contenida en $A(G)$, resultados de la teoría elemental de homomorfismos de grupos nos permiten concluir que G es isomorfo a H . ■

1.2. Ciclos de descomposición

Dada σ en S_n , decimos que σ mueve m si $\sigma(m) \neq m$; en caso contrario decimos que σ fija m . Al conjunto de elementos de $[n]$ que son movidos por σ se le llama soporte de la permutación σ y se le denota por A_σ . Dos permutaciones σ y τ son disjuntas cuando tienen soportes disjuntos.

Notemos que para permutaciones disjuntas σ y τ , podemos asegurar que si σ mueve a m , entonces τ fija a m . Por otro lado, no es necesariamente cierto que si σ fija a m , entonces τ mueve m .

Ejemplo. Consideremos en S_6 las siguientes permutaciones:

$$\sigma = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} \Sigma \\ \sigma = \end{matrix} & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \tau = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} \Sigma \\ \tau = \end{matrix} & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{matrix}$$

Para ellas se tiene $A_\sigma = 1, 4$ y $A_\tau = 2, 3, 5$. Como $A_\sigma \cap A_\tau = \emptyset$, por definición σ y τ son disjuntas. Notemos que a pesar de ser disjuntas, ambas permutaciones fijan 6.

Notemos también que se cumple $\sigma\tau = \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, es decir, en este caso σ y τ conmutan.

Indicamos que, en general, esto es cierto para permutaciones disjuntas, como se establece en la siguiente proposición.

Proposición 1.2 *Dos permutaciones disjuntas conmutan.*

Prueba. Sean σ y τ en S_n disjuntas. Para todo $m \in [n]$, en virtud de la definición es cierta una y sólo una de estas dos posibilidades: ambas σ y τ fijan m o sólo una de ellas, digamos σ , mueve m .

Para el primer caso se tiene $\sigma\tau(m) = m = \tau\sigma(m)$; es decir, se cumple $\sigma\tau(m) = \tau\sigma(m)$.

Si asumimos el segundo caso, sea $\sigma(m) = k$, con $m \neq k$. Como σ es inyectiva, se tiene $\sigma(k) = m$. Ahora, como τ es disjunta con σ , se tiene que τ fija tanto m como k . Es decir, se tiene

$$\tau\sigma(m) = \tau(k) = k = \sigma(m) = \sigma\tau(m).$$

Esto prueba que se cumple $\sigma\tau(m) = \tau\sigma(m)$ para todo $m \in [n]$, y por tanto se tiene $\sigma\tau = \tau\sigma$. ■

Sea σ una permutación en S_n y $s \in [n]$. La órbita de s bajo la permutación σ , denotada por σ_s , es el conjunto $\{s, \sigma(s), \sigma^2(s), \sigma^3(s), \dots\}$.

Al estar contenido en S_n , este conjunto es finito. Mayor precisión lo brinda el siguiente resultado.

Proposición 1.3 *Para cada $s \in [n]$, existe un número entero positivo k (que depende de s), tal que $\sigma_s = \{s, \sigma(s), \sigma^2(s), \dots, \sigma^{k-1}(s)\}$.*

Prueba. Como el conjunto $\{s, \sigma(s), \sigma^2(s), \sigma^3(s), \dots, \sigma^n(s), \dots\}$ es finito, entonces debe haber elementos repetidos. Por lo tanto existen subíndices i, j tales que $\sigma^i(s) = \sigma^j(s)$, con $i < j$. Es decir, $\sigma^{j-i}(s) = s$. Sea $t = j - i$ y sea k el m'ınimo valor de t que cumple $\sigma^t(s) = s$. Afirmamos que los elementos $s, \sigma(s), \sigma^2(s), \sigma^3(s), \dots, \sigma^{k-1}(s)$ son todos diferentes.

Efectivamente, si hubiera elementos repetidos, por ejemplo para $h < l$, con $0 \leq h < k$, $0 \leq l < k$, se tendr'ıa $\sigma^h(s) = \sigma^l(s)$. Esto conduce a $\sigma^{l-h}(s) = s$ con $l-h < k$, y ello contradice la minimalidad de k .

Finalmente, sea p cualquier entero positivo. Por el teorema fundamental de divisibilidad, existen enteros q y r tales que $\Sigma p = qk + r$, con $0 \leq r < k$. Por lo tanto se tiene $\sigma^p(s) = \sigma^{qk+r}(s) = \sigma^r \circ \sigma^{qk}(s) = \sigma^r(s)$. ■

Ejemplo. En S_8 , las órbitas bajo la permutación

$$\sigma = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \Sigma & & & & & & & & \\ \sigma & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 8 & 3 & 6 \end{matrix}$$

son $\sigma_1 = \sigma_4 = \{1, 4\}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_7 = \{2, 7, 3\}$, $\sigma_5 = \{5\}$ y $\sigma_6 = \sigma_8 = \{6, 8\}$. Estos cuatro conjuntos determinan una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Sea σ una permutación en S_n . Definimos la relación \sim en $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ del siguiente modo:

$$s_1 \sim s_2 \text{ si y sólo si } s_2 = \sigma^i(s_1) \text{ para algún } i \in \mathbb{Z}^+.$$

Claramente, estamos frente a una relación de equivalencia. En este contexto cada clase de equivalencia en $[n]$ es una órbita bajo σ . En consecuencia, el conjunto $[n]$ queda particionado en órbitas no vacías y disjuntas. Dado $\sigma \in S_n$, la órbita de un elemento s bajo σ es una permutación **cíclica** que se denota por $(s \sigma(s) \sigma^2(s) \sigma^3(s) \dots \sigma^{r-1}(s))$ a la que uno se refiere como ciclo de longitud r . A continuación brindamos mayor precisión.

Dado un grupo simétrico S_n , una permutación σ es un ciclo de longitud r (o un r -ciclo) si existen elementos distintos $a_1, a_2, \dots, a_r \in [n]$, tales que

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{r-1}) = a_r, \sigma(a_r) = a_1$$

y $\sigma(x) = x$, para $x \in [n] - \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. En tal caso, escribimos $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_r)$ para resumir esta información.

Ejemplo. En S_6 , la permutación $\sigma = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \Sigma & & & & & & \\ \sigma & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{matrix}$ se escribe en

notación **cíclica** como $\sigma = (2 \ 5 \ 6 \ 3)$. Notemos que esta presentación no es única, puesto que se cumple $(2 \ 5 \ 6 \ 3) = (5 \ 6 \ 3 \ 2) = (6 \ 3 \ 2 \ 5) = (3 \ 2 \ 5 \ 6)$.

Ejemplo. En S_6 , la permutación identidad $I = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \Sigma & & & & & & \\ I & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$ se

escribe en notación **cíclica** como $\sigma = (1)$. Evidentemente, también es aceptable $(1) = (2) = (3) = (4) = (5) = (6)$.

El producto de dos (o más) ciclos es la composición de las permutaciones que ellos representan. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. La permutación $\sigma = (2 \ 4)(3 \ 5)(4 \ 6)$ en S_7 se escribe de manera **explícita** como

$$\sigma = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \Sigma & & & & & & & \\ \sigma & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 7 \end{matrix}$$

Ejemplo. En S_6 , dados los ciclos $\sigma = (1 \ 4 \ 5 \ 6)$ y $\tau = (2 \ 1 \ 5)$, se tiene

$$\sigma\tau = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \Sigma & & & & & & \\ \sigma\tau & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \tau\sigma = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \Sigma & & & & & & \\ \tau\sigma & 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Se desprende de este ejemplo que el producto de dos ciclos no necesariamente es un ciclo.

Ejemplo. Consideremos la permutación $\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 & 5 & 9 & 7 & 6 & 1 & 2 \end{matrix}$.

Las órbitas distintas son $\sigma_1 = \{1, 3, 8\}$, $\sigma_2 = \{2, 4, 5, 9\}$ y $\sigma_6 = \{6, 7\}$, con ciclos correspondientes $c_1 = (1\ 3\ 8)$; $c_2 = (2\ 4\ 5\ 9)$ y $c_3 = (6\ 7)$. Notemos que σ es igual al producto de sus ciclos $c_1 c_2 c_3$. Este resultado se generaliza en la siguiente proposición.

Proposición 1.4 *Cualquier permutación de un grupo simétrico S_n se escribe como un producto de ciclos disjuntos.*

Prueba. Descomponemos $[n]$ en órbitas disjuntas que originan ciclos disjuntos c_1, c_2, \dots, c_t . Afirmamos que se cumple $\sigma = c_1 c_2 \dots c_t$ (sin importar el orden).

Para ello, tomemos $s \in [n]$. Notemos que s aparece en sólo uno de los ciclos, por ejemplo en c_i con $1 \leq i \leq t$. Entonces se cumple

$$c_1 c_2 \dots c_t(s) = c_1 c_2 \dots c_{i-1} c_i c_{i+1} \dots c_t(s) = (c_i c_{i+1} \dots c_t)(s) = (c_{i+1} \dots c_t) \sigma(s) = \sigma(s),$$

con lo que queda probada la proposición. ■

Respecto a las proposiciones 1.2, 1.3 y 1.4 podemos consignar dos observaciones que serán de utilidad más adelante.

- Sea $\sigma = c_1 c_2 \dots c_t$; donde los c_i son ciclos disjuntos. Entonces σ conmuta con cada uno de los c_i . En efecto, esto es consecuencia directa de que los ciclos disjuntos (que son en particular permutaciones disjuntas) conmutan (proposición 1.2). Efectuamos el cálculo y se tiene

$$\sigma c_i = c_1 c_2 \dots c_i \dots c_t c_i = c_i c_1 c_2 \dots c_i \dots c_t = c_i \sigma.$$

- Cualquier ciclo conmuta con sus potencias, además de conmutar con otras permutaciones disjuntas. Esto se debe a que las potencias de un ciclo no mueven elementos que estén fuera del soporte de dicho ciclo.

1.3. Permutaciones pares e impares

Una transposición es un ciclo de longitud 2. Es decir, una transposición es una permutación que deja fijos todos los elementos de $[n]$ excepto dos y lleva a cada uno de estos dos elementos en el otro. A modo de observación, notemos que si σ es el ciclo $(a_1\ a_2 \dots\ a_r)$, entonces σ se puede escribir como el producto de transposiciones

$$(a_1\ a_2) (a_1\ a_3) \dots (a_1\ a_r).$$

Para confirmar esto, tomemos $s \in [n]$. Si $s \notin \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, entonces se cumple

$$(a_1\ a_2) (a_1\ a_3) \dots (a_1\ a_r)(s) = s = \sigma(s).$$

Si tomamos por el contrario $s \in \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, debemos considerar varios casos. Si por ejemplo $s = a_1$, entonces se cumple

$$(a_1 a_2) \dots (a_1 a_r) (s) = (a_1 a_2) \dots (a_1 a_r) (a_1) = a_2 = \sigma(a_1) = \sigma(s).$$

En el caso $s = a_t$, con $1 < t < r$, se tiene

$$\begin{aligned} (a_1 a_2) \dots (a_1 a_r) (s) &= (a_1 a_2) \dots (a_1 a_{t-1}) (a_1 a_t) (a_1 a_{t+1}) \dots (a_1 a_r) (a_t) \\ &= (a_1 a_t) (a_1 a_{t+1}) \dots (a_1 a_r) (a_t) = a_{t+1} = \sigma(s). \end{aligned}$$

Y finalmente en el caso $s = a_r$, se cumple

$$(a_1 a_2) \dots (a_1 a_r) (s) = (a_1 a_2) \dots (a_1 a_r) (a_r) = a_1 = \sigma(a_r) = \sigma(s).$$

Lema 1.5 *Toda permutación de un grupo simétrico S_n con $n \geq 2$ se puede expresar como un producto de transposiciones.*

Prueba. Primero expresamos la permutación como un producto de ciclos disjuntos (Proposición 1.4), y a continuación, en virtud de la observación anterior, cada ciclo se expresa como un producto de transposiciones. ■

Ejemplo. Sea $\sigma = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \Sigma & 10 & 1 & 4 & 6 & 5 & 12 & 11 & 9 & 8 & 2 & 7 & 3 \end{matrix}$.

Primero expresamos esta permutación como un producto de ciclos, y obtenemos

$$\sigma = (1 10 2)(3 4 6 12)(5)(7 11)(8 9),$$

y, luego, como producto de transposiciones para llegar a

$$\sigma = (1 10)(1 2)(3 4)(3 6)(3 12)(7 11)(8 9).$$

Notemos que, a diferencia de la descomposición en producto de ciclos disjuntos, la descomposición en transposiciones no es única. En efecto, en el ejemplo anterior se tiene también

$$\sigma = (10 2)(10 1)(6 12)(6 3)(6 4)(7 11)(9 8).$$

Con respecto a la descomposición de una permutación en transposiciones, hay un resultado fundamental: ninguna permutación se puede expresar a la vez como el producto de un número par y de un número impar de transposiciones. Este hecho es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 1.6 *Sea σ una permutación en un grupo simétrico S_n . Entonces σ no se puede expresar independientemente como el producto de un número par e impar de transposiciones.*

Prueba. Primero analizamos descomposiciones de la identidad I . Curiosamente éste es el caso más difícil. Sea entonces $I = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ donde cada τ_i es una transposición. Afirmamos que k debe ser par. En efecto, sea $m \in [n]$ movido por alguna de las τ_i , y supongamos que τ_j es la primera transposición

(de izquierda a derecha) que mueve m . Debemos notar que tal τ_j no puede ser τ_k , pues si τ_k mueve m y las anteriores transposiciones no lo hacen, el producto $\tau_1\tau_2\dots\tau_k$ no podría ser la identidad. Concluimos que se cumple $j < k$. Sea $\tau_j = (m, x)$, con $x \in [n]$. Entonces τ_{j+1} mueve m o no lo hace. Si τ_{j+1} mueve m , entonces el producto $\tau_j\tau_{j+1}$ se reduce a los dos casos siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_j\tau_{j+1} &= (m, x)(m, x) = I, \text{ o} \\ \tau_j\tau_{j+1} &= (m, x)(m, y) = (x, y)(x, m), \text{ con } x \neq y.\end{aligned}$$

Si τ_{j+1} no mueve m , entonces el producto $\tau_j\tau_{j+1}$ puede reducirse a los dos casos siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_j\tau_{j+1} &= (m, x)(y, z) = (y, z)(x, m), \text{ o} \\ \tau_j\tau_{j+1} &= (m, x)(x, y) = (x, y)(y, m).\end{aligned}$$

Imaginemos a partir de estas igualdades qué ocurre al sustituir $\tau_j\tau_{j+1}$ en la igualdad $I = \tau_1\tau_2\dots\tau_k$. En el primer caso eliminamos por completo m de dicha igualdad y reducimos en dos el número k de transposiciones. En los otros tres casos corremos la primera aparición de m un lugar a la derecha. Puesto que m no puede aparecer por primera vez en la transposición final, de repetirse el proceso, en algún momento debe ocurrir la situación $(m, x)(m, x) = I$ y tras haber apuntado cuántos pares de transposiciones hemos cancelado, habremos eliminado toda referencia a m .

A continuación elegimos otro entero en la igualdad reducida y lo eliminamos mediante un proceso similar. Así continuamos hasta que en el segundo miembro de la igualdad $I = \tau_1\tau_2\dots\tau_k$ aparezca I . Dado que cada vez que sustituimos una identidad el número k permanece igual o se reduce en dos unidades, vemos que k debe haber sido par desde un inicio.

Ahora, para el caso general, tomemos como σ una permutación cualquiera y consideremos dos posibles descomposiciones de σ como producto de transposiciones. Es decir

$$\sigma = \tau_1\tau_2\dots\tau_r = \eta_1\eta_2\dots\eta_s.$$

Como la inversa de cualquier transposición es ella misma, obtenemos

$$\begin{aligned}I &= \sigma\sigma^{-1} = (\tau_1\tau_2\dots\tau_r)(\eta_1\eta_2\dots\eta_s)^{-1} = \tau_1\tau_2\dots\tau_r\eta_s^{-1}\dots\eta_2^{-1}\eta_1^{-1} \\ &= \tau_1\tau_2\dots\tau_r\eta_s\dots\eta_2\eta_1.\end{aligned}$$

Por la primera parte $r + s$ debe ser un número par, de donde r y s deben tener la misma paridad. ■

La proposición anterior asegura la buena definición del siguiente concepto. Una permutación es par o impar si puede expresarse como el producto de un número par de transposiciones o como el producto de un número impar de transposiciones, respectivamente.

Ejemplo. La permutación

$$\sigma = \begin{matrix} & & & & & & & & & & & & \Sigma \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \sigma = & 10 & 1 & 4 & 6 & 5 & 12 & 11 & 9 & 8 & 2 & 7 & 3 \end{matrix}$$

con descomposición cíclica $\sigma = (1\ 10\ 2)(3\ 4\ 6\ 12)(5)(7\ 11)(8\ 9)$ puede expresarse como $\sigma = (1\ 10)(1\ 2)(3\ 4)(3\ 6)(3\ 12)(7\ 11)(8\ 9)$. Por consiguiente, es una permutación impar de S_{12} .

1.4. Grupos alternantes

Dado un grupo de permutaciones S_n con $n \geq 2$, el grupo alternante de n elementos, que se denota por A_n , es el conjunto de las permutaciones pares de S_n provisto de la composición de funciones. Es importante hacer notar que, a pesar de ser un subgrupo de S_n , el estudio de A_n como grupo individual ha sido importante en el desarrollo de las matemáticas. En el siguiente resultado se presentan las **características** saltantes de A_n .

Proposición 1.7 *El grupo de las permutaciones pares A_n es un subgrupo normal de S_n de orden $n!/2$.*

Prueba. El producto de dos permutaciones pares es par. Por otro lado, puesto que una transposición es inversa de sí misma, el elemento identidad de S_n es una permutación par. También, dada una permutación par (expresada como producto de un número par de transposiciones), el inverso de dicha permutación es el producto de dichas transposiciones tomadas en orden opuesto, por consiguiente el inverso de una permutación par también es par. Ello asegura que A_n es un subgrupo de S_n .

Sea $U = \{-1; 1\}$, el cual constituye un grupo multiplicativo. Consideremos $\phi : S_n \rightarrow U$ definida mediante

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & , \text{ si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Como el producto de dos permutaciones pares o de dos permutaciones impares es par, y el producto de una permutación par con una impar es impar, es fácil concluir que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo de grupos, con núcleo igual a A_n . Por consiguiente, A_n es un subgrupo normal cuya cardinalidad es el cociente de $n!$ (el tamaño de S_n) y 2 (la cardinalidad de U). ■

Recordemos que un grupo G con elemento identidad e_n es simple si no posee subgrupos normales no triviales (es decir, más allá de los subgrupos G y $\{e_n\}$).

Si bien A_n es un subgrupo de S_n , como grupos independientes ambos han contribuido al desarrollo del álgebra abstracta. Por ejemplo, un hecho fundamental acerca de los grupos alternantes es la simplicidad de A_n cuando $n \geq 5$. Las proposiciones que se utilizan para establecer dicho resultado permiten conocer más acerca de los grupos simétricos y alternantes, motivo por el cual nos sentimos obligados a dedicarles unas páginas de nuestro trabajo.

Lema 1.8 Sean $\sigma = (1\ 2)$ y $\tau = (1\ 2\ \dots\ n)$ en S_n , con $n \geq 3$. Entonces σ y τ generan todas las transposiciones de la forma $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), \dots, (n-1\ n), (n\ 1)$.

Prueba. Iniciamos la prueba con el cálculo de $\tau^{-1}\sigma\tau$.

- $\tau^{-1}\sigma\tau(1) = \sigma\tau(n) = \tau(n) = 1,$
- $\tau^{-1}\sigma\tau(2) = \sigma\tau(1) = \tau(2) = 3,$
- $\tau^{-1}\sigma\tau(3) = \sigma\tau(2) = \tau(1) = 2,$
- para $3 < s \leq n$ se tiene $\tau^{-1}\sigma\tau(s) = \sigma\tau(s-1) = \tau(s-1) = s.$

Por lo tanto, se cumple $\tau^{-1}\sigma\tau = (2\ 3) = (\tau(1)\ \tau(2))$. Es decir, hemos demostrado que $\tau^{-1}\sigma\tau$ equivale a la transposición $(\tau(1), \tau(2))$.

Cálculos similares nos permiten concluir que, para cualquier número entero positivo k , se cumple $\tau^{-k}\sigma\tau^k = \tau^k(1)\ \tau^k(2)$.

En conclusión, las permutaciones $\sigma = (1\ 2)$ y $\tau = (1\ 2\ \dots\ n)$ generan todas las transposiciones de la forma $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), \dots, (n-1\ n), (n\ 1)$. ■

Lema 1.9 Los elementos $(1\ 2)$ y $(1\ 2\ \dots\ n)$ generan todas las transposiciones de la forma $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$.

Prueba. Basta ver cómo se genera una transposición de la forma $(1\ a)$ para $3 \leq a \leq n$. Para ello vamos a calcular el producto $(1\ a-1)(a-1\ a)(1\ a-1)$:

- $(1\ a-1)(a-1\ a)(1\ a-1)(1) = a,$
- Si $1 < t < a-1$, se cumple $(1\ a-1)(a-1\ a)(1\ a-1)(t) = t,$
- $(1\ a-1)(a-1\ a)(1\ a-1)(a-1) = a-1,$
- $(1\ a-1)(a-1\ a)(1\ a-1)(a) = 1,$
- finalmente, para $a < t \leq n$ obtenemos

$$(1\ a-1)(a-1\ a)(1\ a-1)(t) = t.$$

Así, hemos probado la igualdad

$$(1\ a-1)(a-1\ a)(1\ a-1) = (1\ a),$$

que muestra cómo se generan inductivamente las transposiciones $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$. ■

Lema 1.10 *Las trasposiciones $(12), (13), \dots, (1n)$ generan todas las trasposiciones de S_n .*

Prueba. Basta notar que se cumple $(ab) = (1a)(1b)(1a)$ cuando a y b son distintos entre sí y diferentes de 1. De ello y de los lemas anteriores, deducimos de paso que (ab) se puede expresar a través de (12) y $(12 \dots n)$ ■

Proposición 1.11 *El grupo simétrico S_n es generado por $\sigma = (12)$ y $\tau = (12 \dots n)$.*

Prueba. Basta recordar que cualquier permutación ϕ de S_n se escribe como producto de trasposiciones y apelar a los lemas anteriores. ■

Lema 1.12 *Para $n \geq 3$, el subgrupo de S_n que generan los 3-ciclos es A_n .*

Prueba. Sea H el subgrupo generado por los 3-ciclos de S_n . De la igualdad $(abc) = (ab)(ac)$, se deduce de inmediato $H \subset A_n$. Probaremos ahora que se cumple $A_n \subset H$. Si $\sigma \in A_n$, entonces σ es producto de un número par de trasposiciones. Afirmamos que el producto de dos trasposiciones es un 3-ciclo o un producto de 3-ciclos. En efecto, los dos únicos casos no triviales posibles son

- $(ab)(ac) = (bca) = (abc)$ y
- $(ab)(cd) = (ab)(ac)(ac)(cd) = (abc)(cad)$.

Por lo tanto se tiene $\sigma \in H$, con lo cual se completa la prueba. ■

Lema 1.13 *Para $n \geq 3$, el grupo A_n es generado por los 3-ciclos $(123), (124), \dots, (12n)$ de S_n .*

Prueba. Para $n = 3$ el resultado es inmediato, pues A_3 es de orden 3 y por tanto, cíclico. Para ser más precisos, $A_3 = \{Id, (123), (132)\}$ y un generador de A_3 es (123) . Para el caso general, queremos mostrar que un ciclo arbitrario (a, b, c) se puede expresar como producto de ciclos de la forma $(123), (124), \dots, (12n)$ o sus inversos. El resultado se cumple trivialmente en los casos $a = 1$ y $b = 2$, o $a = 2$ y $b = 1$, pues es obvio que se tiene $(12c) = (12c)$ y también $(21c) = (12c)^{-1}$, para cualquier c . Para verificar el caso general, podemos rotar cíclicamente los valores y asumir $c = 1$ y $b = 2$ y considerar los casos siguientes. Si $a = 1$ y $b = 2$, tenemos $(12c)(12b)(12c)^{-1} = (1bc) = (abc)$. Ahora, si $a = 2$ y $b = 1$, comprobamos $(12b)^{-1}(12c)(12b) = (2bc) = (abc)$. En caso contrario efectuamos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} (12c)^{-1}(12a)^{-1}(12b)(12a)(12c) &= (c21)(a21)(12b)(12a)(12c) \\ &= (abc), \end{aligned}$$

con lo cual queda establecido el resultado. ■

Hasta el momento, hemos exhibido una colección de generadores del grupo alternante A_n . El siguiente paso consiste en establecer la simplicidad de A_n , para $n \geq 5$. Como comentario previo, hacemos constar que el grupo A_4 no es simple. En efecto, no es tarea difícil verificar que

$$H = \{Id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

es un subgrupo normal propio de A_4 . El siguiente resultado nos ubicará muy cerca de la meta propuesta.

Lema 1.14 *Sea N un subgrupo normal de A_n , para $n \geq 5$. Si N contiene un 3-ciclo, entonces $N = A_n$.*

Prueba. Sea $(a\ b\ c) \in N$ un 3-ciclo. Bastará probar que N contiene cualquier 3-ciclo. En efecto, sea $(i\ j\ k)$ un 3-ciclo. Por cierto, existe una permutación $\sigma \in S_n$ que cumple

$$\sigma(a) = i, \sigma(b) = j \text{ y } \sigma(c) = k.$$

Un cálculo simple muestra que, para tal σ se cumple $\sigma^{-1}(a\ b\ c)\sigma = (i\ j\ k)$. Si σ es par, entonces la normalidad de N asegura $(i\ j\ k) \in N$. En caso contrario, consideremos una transposición $\tau = (m\ n)$, donde $m, n \notin \{i, j, k\}$ (lo cual es posible gracias a la hipótesis $n \geq 5$). Ahora el elemento $\sigma\tau$ es par y cumple la igualdad

$$(\sigma\tau)^{-1}(a\ b\ c)\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma^{-1}(a\ b\ c)\sigma\tau = (i\ j\ k),$$

elemento de N por ser éste un subgrupo normal de A_n . Es decir, N contiene cualquier 3-ciclo y como consecuencia del lema 1.13, queda probado que N coincide con A_n . ■

La simplicidad del grupo alternante A_n para $n \geq 5$ es un resultado fundamental en la teoría de grupos. En los textos de álgebra abstracta y teoría de grupos encontramos diversos métodos de demostración para este teorema. El camino que empleamos en nuestro trabajo para demostrar el resultado se reduce a comprobar la presencia de un ciclo de longitud 3 en cualquier subgrupo normal no trivial de A_n . Es el momento de redondear la faena.

Proposición 1.15 *Para $n \geq 5$, el grupo A_n es simple.*

Prueba. Sea N un subgrupo normal no trivial de A_n . Será suficiente probar que N contiene un 3-ciclo. El camino que proponemos consiste en construir tal 3-ciclo como la permutación en N que fija la mayor cantidad posible de elementos. Para tal efecto sea $\sigma = I$ en N con una cantidad maximal de elementos fijos. Supongamos que σ no es un 3-ciclo. En tal situación, la descomposición de σ en producto de ciclos disjuntos dada por la proposición 1.4 se sujeta a alguna de las siguientes variantes.

1. Aparece en dicho producto, entre otros, un ciclo de longitud mayor o igual que 5, como por ejemplo

$$(i_1 \dots i_5 \dots).$$

2. Aparece en el producto un ciclo de longitud 4 y una transposición u otro 4-ciclo (para asegurar la paridad), como por ejemplo $(i_1 \dots i_4)(i_5 i_6 \dots)$.
3. Hay dos ciclos de longitud 3, como por ejemplo $(i_1 i_2 i_3)(i_4 i_5 i_6)$.
4. Hay un único 3-ciclo y al menos dos transposiciones, con lo cual σ toma la forma $(i_1 i_2 i_3)(i_4 i_5)(i_6 i_7)$, y
5. Sólo existen transposiciones (al menos dos de ellas, por supuesto), tales como $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$.

Notemos que en el caso 5 la permutación σ mueve al menos los cuatro elementos del conjunto $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, y en los otros cuatro casos, σ mueve un elemento adicional (digamos i_5). Consideremos el 3-ciclo $\tau = (i_3 i_4 i_5)$. Vamos a revisar caso por caso para confirmar que se cumple $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma$. En el primer caso se tiene por ejemplo $\tau^{-1}\sigma\tau(i_2) = i_4 = \sigma(i_2)$. En el segundo caso se cumple $\tau^{-1}\sigma\tau(i_4) = i_5 = \sigma(i_4)$. En el caso 3 se cumple $\tau^{-1}\sigma\tau(i_3) = i_6 = \sigma(i_3)$. En el caso 4 tenemos en especial $\tau^{-1}\sigma\tau(i_3) = i_5 = \sigma(i_5)$. Finalmente en el quinto caso ocurre por ejemplo $\tau^{-1}\sigma\tau(i_3) = i_3 = \sigma(i_3)$. De la afirmación $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma$ se deduce $\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau = I$. Llamemos ϕ a la permutación $\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau \in N$.

El 3-ciclo τ fija cualquier elemento i_k con $k > 5$. Por ello, cuando estos elementos son fijados por σ también deben ser fijados por ϕ . Notemos también que se cumple $\phi(i_2) = i_2$.

En los cuatro primeros casos, los posibles elementos fijados por σ son de la forma i_k con $k > 5$. Pero ϕ fija por lo menos un elemento más, lo cual es una contradicción.

En el último caso, los posibles elementos fijados por σ son los i_k con $k \geq 5$. En tal caso, el elemento adicional i_5 que no se sabe si es fijado por σ se “compensa” con i_2 , fijado por ϕ . Pero en este quinto caso también se cumple

$$\phi(i_1) = \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau(i_1) = \tau^{-1}\sigma\tau(i_2) = \sigma\tau(i_2) = \tau(i_1) = i_1.$$

Al fijar ϕ al menos un elemento más que σ , obtenemos nuevamente una contradicción.

Por lo tanto, la permutación σ debe ser un 3-ciclo. En virtud del lema 1.14, queda probado el resultado. ■

1.5. Conjugación en S_n y en A_n

Nos corresponde ahora definir una relación de equivalencia en un grupo G que nos remite a los conceptos de clase de conjugación y normalizador. Dada la importancia de estos conceptos para la construcción de las representaciones de los grupos simétricos y alternantes, nos centraremos primero en tratar los temas en los grupos simétricos S_n , para luego obtener las correspondientes propiedades en A_n .

Decimos que dos elementos a y b de un grupo G están conjugados si existe un c en G tal que $b = cac^{-1}$.

Notemos que si e es el elemento neutro de G , entonces $a = eae^{-1}$ para cualquier a . También, si se tiene $b = cac^{-1}$, entonces esto equivale a $a = c^{-1}bc$; es decir, se cumple $a = c^{-1}b(c^{-1})^{-1}$. Y por último, si $q = cpc^{-1}$ y $r = dqd^{-1}$, entonces se cumple $r = dqd^{-1} = dcpc^{-1}d^{-1} = (dc)p(dc)^{-1}$. Esto prueba que la relación de conjugación es una relación de equivalencia en G , a cuyas clases llamamos clases de conjugación. La clase de conjugación de $a \in G$ se denota por $[a]_{\sim}$ o simplemente por $[a]$ si es claro el grupo con el cual se está trabajando.

La clase de equivalencia del elemento identidad e es trivial en el sentido que consta de un solo elemento, y por ello, es la única clase de equivalencia que constituye de por sí un subgrupo de G . Si $o(c(a))$ cuenta el número de elementos de la clase de conjugación correspondiente a a , es claro que el orden del grupo G está dado por $o(G) = \sum o(c(a))$, donde se toma en la suma un representante de cada clase de conjugación.

Dado un grupo G y un elemento $a \in G$, el centralizador de a , al que denotamos por $Z_G(a)$ (o simplemente, por $Z(a)$ si no hay lugar a confusión), es el conjunto de todos los elementos de G que conmutan con a ; es decir, se tiene $Z(a) = \{g \in G : ag = ga\}$. En general, para un subconjunto A de G , el centralizador de A , que se denota por $Z(A)$, se define por

$$Z(A) = \{g \in G : ag = ga, \text{ para todo } a \in A\}.$$

El conjunto $Z(G)$ se llama centro de G y lo conforman los elementos de G que conmutan con todos los elementos de G .

Es evidente que se satisface $e \in Z(a)$ para cualquier a . Sean ahora g y h en $Z(a)$, es decir se cumple $ag = ga$ y $ah = ha$. De ello se logra $agh = gah$, y de ahí se pasa a $a(gh) = (gh)a$. Esto prueba $gh \in Z(a)$. Por último, si $ag = ga$, entonces se tiene $a = gag^{-1}$, es decir, se cumple $g^{-1}a = ag^{-1}$. Por lo tanto, $Z(a)$ es un subgrupo de G para todo a .

Al ser $Z(a)$ un subgrupo de G , vienen a nuestra mente los conceptos de clase lateral e índice de $Z(a)$ en G . La siguiente proposición relaciona dichos conceptos con las clases de equivalencia de conjugación.

Proposición 1.16 *Si G es finito y $a \in G$, entonces $o(c(a))$ es igual al índice de $Z(a)$ en G .*

Prueba. Recordemos primero que la aplicación $\varphi_a : G \rightarrow G$, definida por $\varphi_a(g) = aga^{-1}$ es un isomorfismo de G en G (llamado un automorfismo interno de G). Definamos $f_a : G/Z(a) \rightarrow G$ de modo que a cada clase lateral $gZ(a)$ se le asigne $f_a(gZ(a)) = \varphi_g(a) = gag^{-1}$. Si $b \in gZ(a)$, entonces $b = gk$ para cierto $k \in Z(a)$. De ello se desprende

$$bab^{-1} = gka(gk)^{-1} = gkak^{-1}g^{-1} = gakk^{-1}g^{-1} = gag^{-1},$$

pues k conmuta con a , lo cual garantiza la buena definición de la aplicación f_a .

Probaremos a continuación que f_a es inyectiva y tiene como imagen la clase de a . Supongamos que se tenga $f_a(gZ(a)) = f_a(hZ(a))$. Esto implica $gag^{-1} = hah^{-1}$, lo cual a su vez es equivalente a $h^{-1}ga = ah^{-1}g$, lo cual significa $h^{-1}g \in Z(a)$. Es decir, hemos probado la igualdad $gZ(a) = hZ(a)$; y con ello la inyectividad de f_a . Ahora, si $g \in [a]$, entonces $g = pap^{-1}$ para cierto $p \in G$. Luego, $\varphi_p(a) = g$; es decir se tiene $f_a(pZ(a)) = g$. Cuando g recorre G , la expresión $f_a(gZ(a)) = gag^{-1} = \varphi_g(a)$ recorre la clase de equivalencia de a . Es decir queda probada la biyectividad de f_a sobre $[a]$. Esta biyección nos permite contar: hay tantos elementos en $[a]$ como clases respecto a $Z(a)$, es decir, el **índice** de $Z(a)$ en G . ■

Notemos a modo de observación que la proposición anterior traducida numéricamente no significa otra cosa que la igualdad

$$o(c(a)) = [G : Z(a)] = \frac{o(G)}{o(Z(a))}.$$

Retomando el contexto de los grupos simétricos, dadas las permutaciones σ y τ en S_n , decimos que σ y τ están conjugadas si existe θ en S_n tal que $\tau = \theta^{-1}\sigma\theta$. Nuestro objetivo es describir la conjugación en S_n y en A_n como base para el estudio de las representaciones de dichos grupos. A modo de ejemplo introductorio describimos la conjugación en S_3 y A_3 .

Ejemplo. Los seis elementos de S_3 son ciclos. Podemos escribirlos en notación **cíclica** como (1) , $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$. Efectuando los cálculos correspondientes obtenemos las clases de conjugación.

- $[(1)]_{S_3} = \{(1)\}$,
- $[(1\ 2)]_{S_3} = [(1\ 3)]_{S_3} = [(2\ 3)]_{S_3} = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ y
- $[(1\ 2\ 3)]_{S_3} = [(1\ 3\ 2)]_{S_3} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

El grupo alternante correspondiente es $A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Por ser un grupo de tres elementos, A_3 es **cíclico** y abeliano, por lo cual sus clases de conjugación son unitarias.

- $[(1)]_{A_3} = \{(1)\}$,
- $[(1\ 2\ 3)]_{A_3} = \{(1\ 2\ 3)\}$,
- $[(1\ 3\ 2)]_{A_3} = \{(1\ 3\ 2)\}$,

Notemos que la clase de equivalencia de $(1\ 2\ 3)$ respecto a S_3 se parte en dos clases de equivalencia respecto a A_3 . Es decir, abusando un poco de la notación, se tiene $[(1\ 2\ 3)]_{S_3} = [(1\ 2\ 3)]_{A_3} \cup [(1\ 3\ 2)]_{A_3}$.

Proposición 1.20 *Las clases de conjugación del grupo simétrico S_n son los conjuntos de permutaciones con la misma descomposición en producto de ciclos disjuntos. El número de clases de conjugación en S_n es igual al número de particiones de n .*

Prueba. Como consecuencia del lema 1.18 y la proposición 1.19, todas las permutaciones que tienen la misma estructura **cíclica** son conjugadas. Si tomamos en cuenta que ciclos disjuntos conmutan, observamos que cada forma de expresar n como $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, donde $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ está vinculada con una permutación σ expresada como un producto de ciclos disjuntos ordenados de mayor a menor tamaño, cuyas longitudes son n_1, n_2, \dots, n_k , respectivamente. Tal σ es un representante de su clase de conjugación. ■

Ejemplo. Consideremos la partición $12 = 5 + 4 + 2 + 1$. Tal partición está asociada, por ejemplo, con la clase de conjugación de la permutación

$$\sigma = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \Sigma & & & & & & & & & & & & \\ \sigma = & 8 & 4 & 1 & 7 & 9 & 6 & 11 & 12 & 5 & 3 & 2 & 10 \end{matrix},$$

la cual se expresa en descomposición **cíclica** mediante la igualdad

$$\sigma = (1\ 8\ 12\ 10\ 3)(4\ 7\ 11\ 2)(5\ 9)(6).$$

Los siguientes resultados se fundamentan en principios elementales de conteo y serán útiles más adelante.

- Recordemos que un r -ciclo es un arreglo sin repetición, de la forma $(c_1\ c_2\ \dots\ c_r)$. Hay $\frac{n!}{(n-r)!}$ arreglos similares en S_n . Pero, al tener en cuenta que un r -ciclo puede ser escrito de r maneras distintas, se deduce que el número de r -ciclos en S_n es $\frac{n!}{(n-r)!r}$.
- En particular, el número de transposiciones en S_n es $\frac{n!}{(n-2)!2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- El número de n -ciclos en S_n es $\frac{n!}{(n-n)!n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. En tal caso debemos notar que es imposible la existencia de dos n -ciclos disjuntos.

Dados números enteros z_i , con $1 \leq i \leq k \leq n$, decimos que una permutación σ en S_n es del tipo $[z_1\ z_2\ \dots\ z_k]$ si en la descomposición de σ en producto de ciclos disjuntos se tienen z_1 ciclos de longitud 1, z_2 ciclos de longitud 2, etcétera, como sugiere el gráfico

$$\sigma = \overbrace{(\cdot) \dots (\cdot)}^{z_1} \overbrace{(\cdot \cdot) \dots (\cdot \cdot)}^{z_2} \dots \overbrace{(\cdot \cdot \cdot \dots \cdot) \dots (\cdot \cdot \cdot \dots \cdot)}^{z_k}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_k$

donde $\overbrace{(\cdot \cdot \cdot \dots \cdot)}^t$ alude a un ciclo de longitud t .

Proposición 1.21 *La cantidad de tipos distintos de permutaciones en S_n es igual al número de particiones del número entero n .*

Prueba. Según lo anterior, y si notamos que por cada elemento que fija σ estamos contando el 1-ciclo correspondiente, es claro que se cumple

$$1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + \dots + k \cdot z_k = n.$$

Por convención podemos escribir los ciclos de σ ordenados de menor a mayor tamaño y también poner $z_j = 0$ si no hay j -ciclos. De este modo, la relación anterior puede escribirse cual

$$1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + \dots + n \cdot z_n = n.$$

Si bien es conceptualmente obvio que el número de tipos distintos es igual al número de particiones, es bueno poder establecer manualmente la equivalencia. Para ello, para cada i de 1 a n ponemos $c_i = z_i + z_{i+1} + \dots + z_n$, con lo que resulta evidente a partir de las dos definiciones que se cumple $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ y $c_1 + c_2 + \dots + c_n = n$, es decir, los números enteros c_i forman una partición de n . Recíprocamente, dada una partición (c_1, c_2, \dots, c_k) de n , si ponemos $z_i = c_i - c_{i+1}$, se cumple $z_i \geq 0$ y $1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + \dots + k \cdot z_k = n$. ■

Hemos probado a través de las dos últimas proposiciones que el número de tipos distintos de permutaciones en S_n es igual al número de particiones de n , pues cada uno a su vez es igual al número de clases de conjugación en S_n . Corresponde ahora contar el número de permutaciones distintas de tipo fijo (es decir, el número de elementos en cada clase de conjugación de S_n).

Proposición 1.22 (*Fórmula de Cauchy*) *El número de permutaciones distintas de tipo $[z_1 z_2 \dots z_n]$ (donde $z_j = 0$ si no hay ciclos de longitud j) es*

$$\frac{n!}{1^{z_1} \cdot z_1! \cdot 2^{z_2} \cdot z_2! \cdot \dots \cdot n^{z_n} \cdot z_n!}$$

Prueba. Hay $n!$ formas distintas de ubicar los n elementos del conjunto $[n]$ en las casillas del gráfico que representa el tipo $[z_1 z_2 \dots z_n]$, pero evidentemente no todas esas formas corresponden a permutaciones distintas por diversas razones.

En primer lugar, por ser los ciclos disjuntos, éstos pueden permutarse entre sí y dar el mismo elemento de S_n . En concreto, para cualquier k de 1 a n , los z_k ciclos de longitud k pueden permutarse de $z_k!$ maneras y por lo tanto, la misma partición $n = 1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + \dots + n \cdot z_n$ correspondiente al tipo $[z_1 z_2 \dots z_n]$ se obtiene de $z_1! z_2! \dots z_n!$ formas distintas.

Además, un mismo ciclo de longitud k puede escribirse de k maneras distintas. De ello deducimos que los z_k ciclos de longitud k pueden expresarse de k^{z_k} formas distintas y, por lo tanto, cada permutación del tipo $[z_1 z_2 \dots z_n]$ está contada $1^{z_1} \cdot 2^{z_2} \cdot \dots \cdot n^{z_n}$ veces. Queda establecido el resultado. ■

Es importante reiterar que dada $\sigma \in S_n$, donde σ es de tipo $[z_1 z_2 \dots z_n]$, la Proposición 1.19 y la fórmula de Cauchy aseguran la igualdad

$$o(c(\sigma)) = \frac{n!}{1^{z_1} \cdot z_1! \cdot 2^{z_2} \cdot z_2! \cdot \dots \cdot n^{z_n} \cdot z_n!}.$$

De pasada, a partir de la Proposición 1.16 se deduce la igualdad

$$o(Z(\sigma)) = 1^{z_1} \cdot z_1! \cdot 2^{z_2} \cdot z_2! \cdot \dots \cdot n^{z_n} \cdot z_n!,$$

que nos permite saber cuántos elementos de S_n conmutan con σ . Este resultado depende del tipo que σ adopta al escribirla como un producto de ciclos disjuntos, y nos permite precisar las observaciones presentadas en la página 6. Se impone la presencia de algunos ejemplos.

Ejemplo. En cualquier grupo simétrico S_n la identidad Id tiene tipo $[n, 0, \dots, 0]$. La igualdad

$$o(Z(Id)) = 1^n \cdot n! \cdot 2^0 \cdot 0! \cdot \dots \cdot n^0 \cdot 0! = n!$$

nos confirma que la permutación identidad conmuta con todo elemento de S_n .

Ejemplo. Sea σ un n -ciclo en el grupo simétrico S_n . Tal permutación σ es del tipo $[0, 0, \dots, 1]$. Al aplicar la fórmula anterior se tiene

$$o(Z(\sigma)) = 1^0 \cdot 0! \cdot 2^0 \cdot 0! \cdot \dots \cdot n^1 \cdot 1! = n.$$

Al no haber otras permutaciones disjuntas a σ , el resultado nos indica que un n -ciclo en S_n conmuta únicamente con sus potencias.

Ejemplo. Consideremos $\sigma = (2\ 4\ 3)$ en S_5 . En este caso σ es del tipo $[2, 0, 1, 0, 0]$. La cantidad de elementos de S_5 que conmutan con σ está dada por

$$o(Z(\sigma)) = 1^2 \cdot 2! \cdot 2^0 \cdot 0! \cdot 3^1 \cdot 1! \cdot 4^0 \cdot 0! \cdot 5^0 \cdot 0! = 6$$

Dichos elementos son σ , $\sigma^2 = (2\ 3\ 4)$, $\sigma^3 = Id$, el ciclo $(1\ 5)$ y los productos $\sigma(1\ 5)$ y $\sigma^2(1\ 5)$.

Ejemplo. En S_{11} consideremos $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)$. Dicha permutación es del tipo $[4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. Al calcular el cardinal de su centralizador se obtiene

$$o(Z(\sigma)) = 1^4 \cdot 4! \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot 3^1 \cdot 1! = 288,$$

cantidad relativamente pequeña en comparación al orden de S_{11} . Algunos de los elementos de S_{11} que conmutan con σ (que tiene orden 6) son:

- las potencias σ , σ^2 , σ^3 , σ^4 , σ^5 y $\sigma^6 = Id$,
- los seis ciclos de longitud 4, los ocho ciclos de longitud 3 y los 6 ciclos de longitud 2 que se forman con los elementos del conjunto $\{8, 9, 10, 11\}$.

Corresponde ahora precisar cómo se comportan las clases de conjugación en los grupos S_n y en A_n . Los siguientes resultados establecen una **característica** importante de los centros de dichos grupos.

Proposición 1.23 *Si $n \geq 3$, entonces el centro de S_n es trivial (consta sólo de la identidad).*

Prueba. Asumamos por el absurdo que existe $\sigma \in Z(S_n)$ con $\sigma \neq I$, y consideremos la descomposición de σ en ciclos disjuntos. Si $\sigma \in S_n$ tiene un ciclo de la forma $(i_1 i_2 i_3 \dots i_r)$, con $r \geq 3$, en su descomposición **cíclica**, es fácil verificar que σ no conmuta con la transposición $(i_1 i_2)$; de modo que $\sigma \notin Z(S_n)$. Si σ no tiene ciclos de longitud mayor o igual que 3, entonces se puede asumir que $(i_1 i_2)$ aparece en su descomposición **cíclica**. De ser así, si $i_3 \neq i_2$, se verifica que σ no conmuta con $(i_1 i_3)$, de donde obtenemos $\sigma \notin Z(S_n)$. Esta franca contradicción nos permite concluir el resultado. ■

Proposición 1.24 *Si $n \geq 4$, entonces el centro de A_n es trivial.*

Prueba. Sea $\sigma \in A_n$ distinto de la identidad. En la descomposición de σ en ciclos disjuntos ocurrirá alguna de las siguientes situaciones: σ tiene un ciclo de la forma $(i_1 i_2 \dots i_r)$ con $r \geq 3$, o en su defecto, σ contiene el producto de un número par de transposiciones disjuntas, de la forma $(i_1 i_2)(i_3 i_4) \dots$. En el primer caso, σ no conmuta con la permutación par $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$, y en el segundo, no conmuta con la permutación par $(i_1 i_2 i_3)$. De ello se concluye $\sigma \notin Z(A_n)$. ■

En grupos no abelianos como S_n y A_n , los conceptos de centralizador y centro son una especie de “**medida de conmutatividad**” para estos grupos. El siguiente resultado relaciona la estructura **cíclica** de un elemento de A_n con su centralizador.

Lema 1.25 *Sea $\sigma \in A_n$ una permutación de tipo $[z_1 z_2 \dots z_n]$. Entonces para que se cumpla $Z_{S_n}(\sigma) \subset A_n$ es necesario y suficiente que se satisfaga $z_i = 0$ para todo i par y $z_i \leq 1$ para todo i impar.*

Prueba. Recordemos que, según las observaciones escritas en la página 6, los ciclos conmutan con sus potencias y con permutaciones de soportes disjuntos al suyo. Recordemos también que las potencias de un ciclo no mueven elementos fuera de su soporte y toda permutación conmuta con cada uno de los ciclos presentes en su escritura como un producto de ciclos disjuntos. Supongamos que se cumple $Z_{S_n}(\sigma) \subset A_n$. Esto significa que σ conmuta solamente con permutaciones pares de S_n . Pero como σ también conmuta con cada uno de los ciclos de su descomposición, deducimos que estos ciclos tienen que ser permutaciones pares (es decir, tienen longitud impar). Ello prueba que para cualquier i par el número de ciclos de longitud i en la descomposición **cíclica** de σ es 0.

Para asegurar $z_i \leq 1$ para todo i impar, nos falta probar que en la descomposición de σ en ciclos disjuntos no existen dos ciclos distintos con una misma longitud i impar. Supongamos por el absurdo que para algún i impar se tiene $\sigma = \dots(a_1 a_2 \dots a_i)(b_1 b_2 \dots b_i)\dots$. Un simple cálculo verifica que los ciclos $(a_1 a_2 \dots a_i)$ y $(b_1 b_2 \dots b_i)$ son conjugados por la permutación

$\theta = (a_1 b_1)(a_2 b_2)\dots(a_i b_i)$, es decir, se cumple $\theta^{-1}(a_1 a_2 \dots a_i)\theta = (b_1 b_2 \dots b_i)$. Notemos también que $\theta \notin A_n$, pues se trata de un producto de un número impar de transposiciones disjuntas. Ahora, al efectuar el cálculo de $\theta\sigma\theta^{-1}$ se obtiene $\theta\sigma\theta^{-1} = \dots(a_1 a_2 \dots a_i)(b_1 b_2 \dots b_i)\dots = \sigma$. Pero la igualdad $\theta\sigma\theta^{-1} = \sigma$ nos dice $\theta\sigma = \sigma\theta$, es decir, σ conmuta con θ . Esto es una contradicción a la hipótesis $Z_{S_n}(\sigma) \subset A_n$.

Recíprocamente, supongamos que la descomposición cíclica de σ es como en el enunciado y sea τ una permutación que conmuta con σ (es decir, $\tau \in Z_{S_n}(\sigma)$). Al ser así, τ conmuta con cada ciclo ϕ presente en la descomposición de σ en ciclos disjuntos. De ello se sigue que τ actúa como una potencia λ_ϕ de ϕ en los elementos que ϕ mueve. Así, τ es producto de elementos λ_ϕ , es decir, se tiene $\tau \in A_n$. ■

La proposición anterior nos permite —a modo de cierre— precisar cómo se comporta la clase de conjugación de una permutación par en el grupo simétrico S_n y en el grupo alternante A_n .

Proposición 1.26 *La clase de conjugación en S_n de un elemento σ de A_n es o bien una clase de conjugación en A_n , o, en su defecto, la unión de dos clases de conjugación en A_n con igual número de elementos. Esto último ocurre cuando y solo cuando $Z_{S_n}(\sigma) \subset A_n$.*

Prueba. Recordemos que $Z_G(\sigma)$ denota el centralizador de σ en el grupo G y $c_G(\sigma)$, la clase de conjugación de σ en G . Recordemos también, por la proposición 1.7, que el grupo de permutaciones pares A_n contiene exactamente la mitad del total de elementos de S_n . Supongamos que $Z_{S_n}(\sigma)$ no está contenido en A_n . Esto significa que $Z_{S_n}(\sigma)$ contiene permutaciones impares. En tal caso, claramente se cumple la igualdad $o(Z_{A_n}(\sigma)) = \frac{1}{2} o(Z_{S_n}(\sigma))$. Ello y la proposición 1.16 conducen a

$$\begin{aligned} o(C_{A_n}(\sigma)) &= [A_n : Z_{A_n}(\sigma)] = \frac{o(A_n)}{o(Z_{A_n}(\sigma))} \\ &= \frac{1}{2} \frac{o(S_n)}{o(Z_{S_n}(\sigma))} = [S_n : Z_{S_n}(\sigma)] = o(C_{S_n}(\sigma)). \end{aligned}$$

En el caso en que $Z_{S_n}(\sigma)$ está contenido en A_n , se cumple la igualdad $o(Z_{A_n}(\sigma)) = o(Z_{S_n}(\sigma))$. De ello se tiene

$$\begin{aligned} o(C_{A_n}(\sigma)) &= [A_n : Z_{A_n}(\sigma)] = \frac{o(A_n)}{o(Z_{A_n}(\sigma))} \\ &= \frac{1}{2} \frac{o(S_n)}{o(Z_{S_n}(\sigma))} = \frac{1}{2} [S_n : Z_{S_n}(\sigma)] = \frac{1}{2} o(C_{S_n}(\sigma)), \end{aligned}$$

lo cual culmina la prueba. ■

Veamos a modo de ejemplo las clases de conjugación del grupo simétrico S_4 y el grupo alternante A_4 . Hay cinco particiones de 4, las cuales son $1+1+1+1$, $1+1+2$, $2+2$, $1+3$ y 4 . Por tanto, los 24 elementos de S_4 se distribuyen en las siguientes cinco clases de conjugación:

- La clase del elemento identidad $[(1)]_{S_4}$ cuyo número de elementos es $\frac{4!}{4!} = 1$, asociada a la partición $1+1+1+1$,
- $[(1\ 2)]_{S_4}$ que tiene como cardinal $\frac{4!}{2! \cdot 2} = 6$, asociada a $2+1+1$,
- $[(1\ 2)(3\ 4)]_{S_4}$ con $\frac{4!}{2^2 \cdot 2!} = 3$ elementos, asociada a $2+2$,
- $[(1\ 2\ 3)]_{S_4}$ que posee cardinal $\frac{4!}{1! \cdot 3} = 8$, en relación con $3+1$, y
- la clase de los 4-ciclos $[(1\ 2\ 3\ 4)]_{S_4}$, cuyo número de elementos es $(4-1)! = 6$ y se relaciona con la partición 4 .

El grupo alternante A_4 es igual a la unión de las clases de conjugación de permutaciones pares $[(1)]_{S_4}$, $[(1\ 2\ 3)]_{S_4}$ y $[(1\ 2)(3\ 4)]_{S_4}$. Es oportuno detallar los elementos de dichas clases. Así tenemos

- $[(1)]_{S_4} = \{(1)\}$,
- $[(1\ 2\ 3)]_{S_4} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$,
- $[(1\ 2)(3\ 4)]_{S_4} = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

El lema 1.25 y la proposición 1.26 nos permiten describir las clases de conjugación en A_4 . De acuerdo con dichos resultados, la clase $[(1\ 2\ 3)]_{S_4}$, por ser del tipo $[1, 0, 1, 0]$, se escinde en dos clases de conjugación distintas en A_4 , cada una con cuatro elementos; mientras que la clase $[(1\ 2)(3\ 4)]_{S_4}$, de tipo $[0, 2, 0, 0]$, persiste en una exclusiva clase de conjugación en A_4 . Las clases de conjugación en A_4 vienen dadas entonces por

- $[(1)]_{A_4} = \{(1)\}$,
- $[(1\ 2)(3\ 4)]_{A_4} = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$,
- $[(1\ 2\ 3)]_{A_4} = \{(2\ 4\ 3), (4\ 1\ 3), (4\ 2\ 1), (1\ 2\ 3)\}$ y
- $[(1\ 3\ 2)]_{A_4} = \{(1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4)\}$.

Estos resultados serán de utilidad en el capítulo 3, donde describiremos las representaciones del grupo simétrico S_n en particular. Previo a ello corresponde abordar el estudio general de la representación de grupos.

Capítulo 2

Representación de grupos

2.1. Preliminares

El objetivo central de nuestro trabajo es construir las representaciones irreducibles de los grupos simétricos y alternantes a través de los diagramas de Young. Si bien dicha temática se abordará con detalle en el capítulo 3, para contar con un contexto adecuado en el desarrollo del tema consideramos necesario reseñar conceptos, procesos y resultados importantes relacionados con la representación de grupos. Dicho marco teórico se ha desarrollado con detalle en un reciente trabajo de tesis (véase [9]). Existen también textos clásicos acerca de representación de grupos como [3], [6] y [10].

En tal sentido, haremos mención a resultados fundamentales en lo que toca a espacios vectoriales y transformaciones lineales, los mismos que tienen incidencia en el tema de representación de grupos; ilustraremos los conceptos clave con ejemplos, y enunciaremos los resultados que serán empleados más adelante.

Denotaremos por \mathbf{K} un cuerpo arbitrario y por \mathbf{K}^* su conjunto multiplicativo $\mathbf{K} \setminus \{0\}$. Tengamos presente, no obstante, que nuestro ambiente natural de trabajo será el cuerpo \mathbf{C} de los números complejos. Dado un espacio vectorial V sobre \mathbf{K} , denotaremos por $\text{End}(V)$ al espacio vectorial de las transformaciones lineales de V en sí mismo. Asimismo, denotaremos por $GL(V)$ al subconjunto de $\text{End}(V)$ formado por las transformaciones lineales biyectivas (automorfismos) de V en V .

Un elemento T de $GL(V)$ es por definición una transformación lineal de V en V que admite inversa T^{-1} , también lineal. Si V es de dimensión n y consideramos una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V , la transformación lineal T se representa por una matriz cuadrada (a_{ij}) de orden $n \times n$. Los coeficientes a_{ij} se calculan al

expresar $T(e_j)$ en la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ mediante la igualdad $T(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.

Decir que T es isomorfismo equivale a afirmar que el determinante de la matriz (a_{ij}) que representa a T no se anula. De este modo, el grupo $GL(V)$ se identifica con las matrices cuadradas invertibles de orden $n \times n$.

2.2. Acción de grupos

El concepto de acción de un grupo sobre un conjunto es fundamental para deducir resultados acerca de la estructura del propio grupo. En el contexto de nuestro trabajo, dicho concepto nos permitirá relacionar un grupo G con un espacio vectorial, para así definir y estudiar las representaciones de G .

Dado un conjunto X y un grupo G con elemento neutro denotado por 1 , una acción de G en X es una operación $\cdot : G \times X \rightarrow X$ que satisface

- $1 \cdot x = x$,
- $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$,

para todo x en X , y para todo g, h en G .

Ejemplo. Sea $X = G$ y consideremos la operación $\cdot : G \times X \rightarrow X$ definida vía $g \cdot h = gh$, para todo g, h en G . Es evidente que se trata de una acción de grupos. Usualmente a esta acción se le denomina acción regular a izquierda.

Ejemplo. Sea $X = G$ y consideremos la operación $\cdot : G \times X \rightarrow X$ definida por $g \cdot h = ghg^{-1}$, para todo g, h en G . Se cumple $1 \cdot h = 1h1^{-1} = h$. También, para g, h, k en G se verifica

$$g \cdot (h \cdot k) = g \cdot (hkh^{-1}) = g(hkh^{-1})g^{-1} = (gh)k(gh)^{-1} = gh \cdot k.$$

Es decir, la operación \cdot es una acción de grupos, denominada acción adjunta o por conjugación.

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, \dots, n\}$ y $G = S_n$. El grupo simétrico S_n actúa sobre X a través de la operación $\cdot : S_n \times X \rightarrow X$ definida vía $\sigma \cdot x = \sigma^{-1}(x)$, para todo σ en S_n , x en X . Esta acción “baraja” los elementos de X . La presencia –que podría parecer poco natural– del inverso se debe a que nosotros hemos convenido en poner $\tau\sigma = \sigma \circ \tau$.

Ejemplo. Para n entero positivo y K un cuerpo (y a la vez, un espacio vectorial sobre sí mismo), consideremos $X = K^n$ y $G = GL(K^n)$. La operación

$$\cdot : GL(K^n) \times K^n \rightarrow K^n \text{ definida vía } A \cdot v = Av$$

nos muestra que el grupo lineal $GL(K^n)$ de las matrices cuadradas invertibles de orden $n \times n$ actúa por multiplicación en K^n .

Sea G un grupo, V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y $\cdot : G \times V \rightarrow V$ una acción de grupos. Decimos que \cdot es una acción lineal de G en V , o que G actúa linealmente sobre V , si se cumple

- $g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w$,
- $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$, para todo g en G , u, v en V y λ en K .

Las siguientes proposiciones establecen un estrecho vínculo entre las acciones lineales de un grupo G sobre un espacio vectorial V de dimensión finita y los homomorfismos que van de G a $GL(V)$. Esta relación de paso nos acerca al tema central de este capítulo.

Proposición 2.1 *Una acción lineal $\cdot : G \times V \rightarrow V$ induce un homomorfismo entre los grupos G y $GL(V)$.*

Prueba. Construyamos una función $\phi : G \rightarrow GL(V)$ del siguiente modo: para cada $g \in G$, definimos $\phi(g) : V \rightarrow V$ por $\phi(g)(v) = g \cdot v$.

La acción lineal \cdot asegura que tal $\phi(g)$ es una transformación lineal biyectiva de V en V . En efecto, dados v y w en V , se cumple

$$\phi(g)(v + w) = g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w = \phi(g)(v) + \phi(g)(w).$$

Asimismo, dado $\lambda \in \mathbf{K}$ se tiene

$$\phi(g)(\lambda v) = g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v) = \lambda\phi(g)(v).$$

Supongamos ahora $\phi(g)(v) = \phi(g)(w)$, lo cual equivale a $g \cdot v = g \cdot w$. De ello se tiene $g^{-1} \cdot (g \cdot v) = g^{-1} \cdot (g \cdot w)$, es decir $g^{-1}g \cdot v = g^{-1}g \cdot w$, de lo cual deducimos $v = w$. Hemos probado así que $\phi(g)$ es inyectiva; pero como V es de dimensión finita, queda de paso asegurada su sobreyectividad.

Afirmamos que ϕ es homomorfismo de grupos. En efecto, para g y h en G y v en V se tiene

$$\begin{aligned} \phi(gh)(v) &= (gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v) = g \cdot \phi(h)(v) \\ &= \phi(g)(\phi(h)(v)) = (\phi(g) \circ \phi(h))(v). \end{aligned}$$

Ello prueba la igualdad $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$, es decir, que $\phi : G \rightarrow GL(V)$ es homomorfismo de grupos. ■

Proposición 2.2 *Todo homomorfismo $\phi : G \rightarrow GL(V)$ induce una acción lineal de G en V .*

Prueba. Definamos la función $\cdot : G \times V \rightarrow V$ del siguiente modo: para $(g, v) \in G \times V$, pongamos $g \cdot v = \phi(g)v$. La función \cdot es una acción lineal de G en V . En efecto, se tiene

- $1 \cdot v = \phi(1)v = Id(v) = v$, para todo $v \in V$;
- $g \cdot (h \cdot v) = g \cdot \phi(h)(v) = \phi(g)(\phi(h)(v)) = (\phi(g) \circ \phi(h))(v) = \phi(gh)(v) = gh \cdot v$, para todo $v \in V$, g, h en G ;
- $g \cdot (v + w) = \phi(g)(v + w) = \phi(g)(v) + \phi(g)(w) = g \cdot v + g \cdot w$, para todo $v, w \in V$, g en G ;
- $g \cdot (\lambda v) = \phi(g)(\lambda v) = \lambda\phi(g)(v) = \lambda(g \cdot v)$.

Con lo cual queda confirmado el resultado. ■

De esta manera, hemos establecido una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las acciones lineales de un grupo G en un espacio vectorial de dimensión finita y el conjunto de los homomorfismos de G en $GL(V)$.

2.3. Representación lineal de grupos finitos

Sea G un grupo y V un espacio vectorial sobre un cuerpo K . Una representación lineal de G en V es un homomorfismo de grupos, digamos ϕ , de G en $GL(V)$. En tal caso, decimos que V es un espacio de representación de G . El grado de la representación es la dimensión de V . Ilustraremos el concepto con varios ejemplos.

Ejemplo. Sea V un espacio vectorial y sea Id_V la función identidad de V en V . La función $\phi : G \rightarrow GL(V)$, definida por $\phi(g) = Id_V$, para todo $g \in G$ es una representación. En tal caso, para cada $g \in G$ se tiene $\phi(g)(v) = v$, cuando $v \in V$. Si $\dim(V) = 1$, diremos que ϕ es la representación trivial de G y que G actúa de manera trivial sobre V .

Ejemplo. Consideremos el grupo aditivo \mathbf{R} y el grupo multiplicativo de las matrices cuadradas no singulares de orden 2×2 , denotado por M_2 . La función

$\phi : \mathbf{R} \rightarrow M_2$ definida por $\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un homomorfismo de grupos.

En efecto, se cumple

$$\phi(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(x) \cdot \phi(y), \text{ y}$$

$$\phi(-x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \phi(x)^{-1}$$

Dado que M_2 se identifica con $GL(\mathbf{R}^2)$, el homomorfismo ϕ define una representación lineal de \mathbf{R} en \mathbf{R}^2 .

Ejemplo. Sea $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto de n elementos ordenados y enumerados, y consideremos $V = \{f : X_n \rightarrow \mathbf{C}\}$ el espacio vectorial de las funciones de X_n en \mathbf{C} . Si queremos representar el grupo simétrico S_n en V , tendremos que construir un homomorfismo $\phi : S_n \rightarrow GL(V)$. Lo haremos del siguiente modo. A cada elemento σ de S_n le haremos corresponder $\phi(\sigma) = \phi_\sigma \in GL(V)$. Pero $f \in V$ significa que f es una función que va de X_n en \mathbf{C} , y por ello, $\phi_\sigma(f)$ debe hacer lo propio. Para garantizar la compatibilidad con la igualdad $\sigma\tau(x) = \tau(\sigma(x))$, se debe definir $\phi_\sigma(f)$ por $\phi_\sigma(f)(x) = f(\sigma(x))$. Para demostrar que estamos frente a una acción de grupos, tomemos σ y τ en S_n . Entonces, se cumple

$$\phi_{\sigma\tau}(f)(x) = f[\sigma\tau(x)] = f[\tau(\sigma(x))].$$

Pero también se tiene

$$[(\phi_\sigma\phi_\tau)(f)](x) = \phi_\tau(f)(\sigma(x)) = f[\tau(\sigma(x))].$$

Es decir, se satisface $\phi_{\sigma\tau} = \phi_\sigma\phi_\tau$. Para concluir $\phi_\sigma \in GL(V)$, debemos asegurar la inyectividad. Para tal efecto, dadas f y g en V , la igualdad

$\phi_\sigma(f) = \phi_\sigma(g)$ significa $f(\sigma(x)) = g(\sigma(x))$, para todo $x \in X_n$. Esto implica $f = g$. Por lo tanto, hemos obtenido una representación lineal de S_n en V .

Ejemplo. Sea \mathbf{C}^* el grupo multiplicativo de los números complejos no nulos y G un grupo finito de orden n con elemento neutro e . Una representación lineal de grado 1 para G , o un caracter, es un homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbf{C}^*$. Dado que se cumple $g^n = e$, para todo $g \in G$, se tiene $\phi(g)^n = \phi(g^n) = \phi(e) = 1$. Las imágenes $\phi(g)$ son así raíces n -ésimas de la unidad.

Ejemplo. Sea G un grupo finito de orden n . En \mathbf{C}^n identificamos cada dirección canónica con un elemento de G , y de esta manera, tenemos una base $B = \{e_g\}$, con $g \in G$ indexada por los elementos de G . Un homomorfismo ϕ de G en $GL(\mathbf{C}^n)$ quedará definido al indicar cómo actúa el grupo G en la base B . Dado $g \in G$, simplemente definimos ϕ_g como la transformación lineal dada por $\phi_g(e_h) = e_{gh}$, para cada $h \in G$. Ésta es la representación regular de G , y su grado es n .

Una representación es fiel (o fehaciente) cuando es inyectiva. Afirmamos, a modo de ejemplo, que la representación regular de un grupo G de n elementos es fiel. Para probar tal afirmación debemos constatar que su núcleo contiene sólo el elemento identidad e de G . En efecto, si $g \in \text{Ker}(\phi)$, entonces $\phi_g = \text{Id}_{\mathbf{C}^n}$. Ello significa que para cada $h \in G$ se cumple $\phi_g(e_h) = e_{gh} = e_h$; por lo tanto, se tiene $gh = h$. Al cumplirse esta igualdad, se deduce que g es la identidad e del grupo G .

Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación lineal, y sea W un subespacio vectorial de V . Decimos que W es estable por la operación de G (o G -invariante) si para cualquier $x \in W$ se cumple $\phi_g(x) \in W$, para todo $g \in G$. En tal situación, la restricción de ϕ_g a W es un automorfismo de W (con la estructura heredada de $GL(V)$) y la función $\phi_W : G \rightarrow GL(W)$ dada por ϕ restringida a W es una representación lineal de G en W . Decimos en tal caso que W es una subrepresentación de G .

Ejemplo. Si $\phi : G \rightarrow GL(V)$ es una representación lineal del grupo G , entonces los subespacios $\{0\}$ y V son subrepresentaciones de G puesto que, para cualquier $g \in G$, la imagen de $\{0\}$ a través de ϕ_g es $\{0\}$ y la imagen de V a través de ϕ_g es V .

Ejemplo. Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ la representación regular del grupo G . Consideremos $B = \{e_g, \text{ con } g \in G\}$ una base de V indexada por los elementos de G . El elemento $v = \sum_{g \in G} e_g$ genera un subespacio G -invariante de dimensión

1. En efecto, para cualquier $h \in G$ se tiene

$$\phi_h(v) = \phi_h \left(\sum_{g \in G} e_g \right) = \sum_{g \in G} (\phi_h(e_g)) = \sum_{g \in G} e_{hg}.$$

Notemos en este punto que hg barre todos los elementos del grupo G , ya que se cumple la igualdad $hG = G$. En efecto, cambiamos de variable en la igualdad anterior y obtenemos

$$\phi_h(v) = \sum_{g \in \mathfrak{H}} e_{hg} = \sum_{k \in \mathfrak{H}} e_k = \sum_{k \in \mathfrak{H}} e_k = v.$$

Esto prueba que el subespacio W es G -invariante y, por lo tanto, ϕ_W es una subrepresentación de G , de grado 1, pues es generada por un único vector.

Ejemplo. Sea G el grupo aditivo \mathbb{Z} y V el espacio vectorial \mathbb{R}^2 . Los elementos de $GL(V)$ en este caso se identifican con las matrices cuadradas no singulares de orden 2×2 . Consideremos la representación $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow GL(\mathbb{R}^2)$ definida vía

$\phi_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. El subespacio $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una subrepresentación de G , pues $\phi_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es elemento de W . Afirmamos que esta subrepresentación (identificada con el eje X), junto con $\{0\}$ y \mathbb{R}^2 , son las únicas subrepresentaciones de G . En efecto, si hubiera otra subrepresentación W' , tendría que ser de dimensión 1, y por ende, generada por un autovector de $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (para que sea un subespacio invariante). Pero el único autovector de tales matrices es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, el mismo que genera el subespacio W ya contabilizado.

Ejemplo. Sea G un grupo de tres elementos (es decir, isomorfo a $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$). Veamos más de cerca la representación regular de G en \mathbb{R}^3 y sus subrepresentaciones. A cada elemento de G le corresponde un automorfismo

de \mathbb{R}^3 , identificado con una matriz 3×3 . Definimos $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$ los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 , y denotemos por M_0, M_1 y M_2 los isomorfismos asignados por la representación regular a los elementos de G .

- M_0 es la matriz identidad, pues a 0 le debe corresponder el elemento neutro de $GL(\mathbb{R}^3)$.
- Para calcular M_1 basta tener en cuenta las relaciones $M_1(e_0) = e_{0+1} = e_1$; $M_1(e_1) = e_2$ y $M_1(e_2) = e_0$. Desarrollando esto se llega a

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Análogamente $M_2(e_0) = e_2$; $M_2(e_1) = e_0$ y $M_2(e_2) = e_1$ implica la representación $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para ver cuáles son las direcciones invariantes calculamos primero los autovalores de M_1 y M_2 . Un cálculo simple muestra que los autovalores son las raíces cúbicas de la unidad: 1 , $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Veamos

qué ocurre con el subespacio generado por $e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$. Evidentemente se cumple $M_0(e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2) = e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2$. Al evaluar en las otras matrices obtenemos

$$M_1(e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} = \omega^2 e_0 + \omega e_1 + \omega e_2 = \omega (e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2)$$

y también

$$M_2(e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^2 (e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2).$$

Ello muestra que el subespacio $(e_0 + \omega e_1 + \omega^2 e_2)$ es una subrepresentación de la representación regular de Z_3 . No es difícil comprobar, razonando de manera similar, que otra subrepresentación es el subespacio $(e_0 + \omega^2 e_1 + \omega e_2)$.

2.4. Suma directa de representaciones

La suma directa de representaciones está íntimamente ligada a resultados fundamentales de espacios vectoriales, los cuales resulta oportuno recordar.

Sea V un espacio vectorial, W y W^j subespacios de V . Decimos que V es suma directa de W y W^j , y lo denotamos por $V = W \oplus W^j$, si cada $x \in V$ se puede escribir de manera única en la forma $x = w + w^j$, con $w \in W$ y $w^j \in W^j$. Debido a esto, es inmediato que se cumple $W \cap W^j = \{0\}$ y $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^j)$. Si se tiene $V = W \oplus W^j$, decimos que W^j es el complementario de W en V . La función $\pi : V \rightarrow W$ que a cada $x \in V$ le hace corresponder su componente $w \in W$ se llama proyección de V sobre W asociada a la descomposición $V = W \oplus W^j$. El rango de π es W y se

cumple $\pi(x) = x$, para todo $x \in W$. Recíprocamente, si W es un subespacio de V y existe una transformación lineal $\pi : V \rightarrow V$ cuyo rango es W y que cumple $\pi(x) = x$, para todo $x \in W$, se prueba trivialmente que V es suma directa de W y el núcleo de π . De este modo, queda establecida una biyección entre las proyecciones de V sobre W y los subespacios complementarios de W en V .

Dado un grupo G , corresponde ahora relacionar descomposiciones en suma directa y subespacios G -invariantes. Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, presentamos dos ejemplos.

Ejemplo. Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ la representación regular del grupo G . Tomemos $B = \{e_g, \text{ donde } g \in G\}$ como una base de V . Consideremos $v = \sum_{g \in G} e_g$ y el subespacio $W = \langle v \rangle$ de dimensión 1, generado por v . Denotemos por 1 al elemento neutro del grupo G , y definamos $W^\perp = \langle B - \{e_1\} \rangle$. Al cumplirse $W \cap W^\perp = \{0\}$ y $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$, se tiene $V = W \oplus W^\perp$. Afirmamos que W^\perp no es G -invariante. En efecto, sea $g \neq 1$ un elemento de G . Entonces se tiene $e_g \in W^\perp$, pero sin embargo $\phi_{g^{-1}}(e_g) = e_{g^{-1}g} = e_1$ no pertenece a W^\perp . En este caso, V es suma directa de un subespacio G -invariante con un subespacio que no es G -invariante.

Ejemplo. Consideremos la representación regular de un grupo G de dos elementos, isomorfo al grupo multiplicativo $\{-1, 1\}$ en \mathbb{R}^2 . Sea $W = \langle v \rangle$, donde $v = \sum_{g \in G} e_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el cual constituye una subrepresentación de G .

Completamos una base de \mathbb{R}^2 como por ejemplo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y definimos la proyección π sobre W , vía $\pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Es claro que π tiene como rango W y como núcleo $W^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que se identifica con el eje Y.

Preguntémonos si W^\perp es G -invariante. La representación asocia a los elementos -1 y 1 dos automorfismos de \mathbb{R}^2 . Al elemento identidad 1 le asocia la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 , denotada por M_+ ; y a -1 le corresponde la matriz involutiva $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denotada por M_- . Un cálculo simple nos muestra que se tiene

$$M_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el cual no pertenece a W^\perp , de manera que W^\perp no es G -invariante.

La siguiente proposición asegura la existencia de esa aparentemente elusiva subrepresentación complementaria y de paso nos enseña cómo construirla.

Proposición 2.3 Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación lineal de un grupo finito G en V , y sea $W \subset V$ una subrepresentación. Entonces existe una subrepresentación W_0 tal que $V = W \oplus W_0$.

Prueba. Sea π cualquier proyección de V sobre W . Definimos la función π_0 via

$$\pi_0 = \sum_{g \in G} \frac{1}{o(G)} \phi_g \pi \phi_{g^{-1}}.$$

Notemos en primer lugar que π_0 es una proyección sobre W . En efecto, ante todo π_0 es una función de V en W ; y puesto que π es proyección y W es subrepresentación, para $w \in W$, se tiene

$$\begin{aligned} (\phi_g \pi \phi_{g^{-1}})(w) &= \phi_g(\pi(\phi_{g^{-1}}(w))) = \phi_g(\phi_{g^{-1}}(w)) \\ &= \phi_g(g^{-1} \cdot w) = g \cdot (g^{-1} \cdot w) = w. \end{aligned}$$

Por el teorema del rango en transformaciones lineales, el núcleo de π_0 , denotado por $\text{Ker}(\pi_0)$, es un subespacio complementario de W . Sólo nos resta probar que $\text{Ker}(\pi_0)$ es invariante por G y, por lo tanto, es el W_0 buscado. Pues bien, si $w \in \text{Ker}(\pi_0)$ y $g \in G$, debemos demostrar que se cumple $\phi_g(w) \in \text{Ker}(\pi_0)$. Para ello, notemos primero que, cuando $h \in G$, se satisface

$$\begin{aligned} \phi_h \pi_0 \phi_{h^{-1}} &= \phi_h \sum_{g \in G} \frac{1}{o(G)} \phi_g \pi \phi_{g^{-1}} \phi_{h^{-1}} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \phi_h (\phi_g \pi \phi_{g^{-1}}) \phi_{h^{-1}} \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \phi_{hg} \pi \phi_{g^{-1}h^{-1}} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \phi_{hg} \pi \phi_{(hg)^{-1}} \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{k \in G} \phi_k \pi \phi_{k^{-1}} = \pi_0. \end{aligned}$$

Esto significa que se cumple $\phi_h \pi_0 \phi_{h^{-1}} = \pi_0$, para cualquier $h \in G$, es decir, se tiene $\phi_h \pi_0 = \pi_0 \phi_h$, lo cual nos dice que π_0 conmuta con los $\phi_h \in GL(V)$, para cualquier $h \in G$.

Para finalizar la prueba, tomemos $w \in \text{Ker}(\pi_0)$, esto es, sujeto a $\pi_0(w) = 0$. Así, para cualquier $g \in G$ se tiene $\phi_g \pi_0(w) = 0$. Por la observación anterior, esto equivale a $\pi_0 \phi_g(w) = 0$, es decir, a $\phi_g(w) \in \text{Ker}(\pi_0)$.

De este modo, al poner $W_0 = \text{Ker}(\pi_0)$ logramos $V = W \oplus W_0$. ■

2.5. Representaciones irreducibles.

Decimos que una representación lineal $\phi : G \rightarrow GL(V)$ es irreducible si $V \neq \{0\}$ y ningún subespacio de V es estable por G , excepto $\{0\}$ y V . Debido a la proposición 2.3, ser representación irreducible de un grupo finito equivale a no poder expresarse como suma directa de dos subrepresentaciones, salvo, por supuesto, en la forma trivial $V = \{0\} \oplus V$.

Por ejemplo, las representaciones de grado 1 son irreducibles.

La siguiente proposición (conocida como teorema de Maschke) nos muestra la importancia de las representaciones irreducibles.

Proposición 2.4 *Toda representación de un grupo finito es suma directa de representaciones irreducibles.*

Prueba. Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación de G , de grado n , donde $\dim(V) = n$. Si $n = 1$, entonces se sigue que ϕ es irreducible. Supongamos entonces $n > 1$. Si ϕ es irreducible, no hay nada que demostrar. De lo contrario, por la proposición 2.3, el espacio V se puede descomponer como suma directa de W y W^\perp , subespacios de V , con $\dim(W) < n$ y $\dim(W^\perp) < n$. Por inducción, W y W^\perp a su vez se expresan como suma directa de representaciones irreducibles, al igual que V . ■

La descomposición por cierto no tiene por qué ser única. Por ejemplo el espacio vectorial \mathbf{R}^3 puede expresarse como suma directa de subespacios de dimensión 1 (rectas) de muchas maneras. Ante esta interrogante, las matemáticas casi siempre responden con un concepto unificador que rescata aquello que tienen en común muchos objetos diversos. En el álgebra abstracta y álgebra lineal, este concepto es el de morfismo.

Sean V y W dos espacios vectoriales y sean

$$\phi^V : G \rightarrow GL(V) \text{ y } \phi^W : G \rightarrow GL(W)$$

dos representaciones de un mismo grupo finito G . Un G -morfismo de V en W es un homomorfismo (digamos φ) de V en W , sujeto a $\varphi \circ \phi^V = \phi^W \circ \varphi$, para cada $g \in G$. Si φ además es isomorfismo, decimos que V y W son representaciones equivalentes. Denotamos por $Hom_G(V, W)$ al conjunto de G -morfismos de V en W . Puesto de modo gráfico, la función φ es un G -morfismo de V en W si para cada $g \in G$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \phi_g^V \downarrow & & \downarrow \phi_g^W \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

conmuta.

En un G -morfismo de V en W se presentan los conceptos de núcleo e imagen. El siguiente lema establece una **característica** importante.

Lema 2.5 *Sean V y W representaciones de dimensión finita de un grupo G . Si $\varphi \in Hom_G(V, W)$, entonces el núcleo de φ es una subrepresentación de V y la imagen de φ es una subrepresentación de W .*

Prueba. Para demostrar la primera afirmación, consideremos la representación ϕ_g^V restringida a $\ker(\varphi)$. Debemos demostrar que $\ker(\varphi)$ es invariante por la acción de ϕ_g^V , para cualquier $g \in G$. Ello significa probar que, dado v en

$\ker(\varphi)$, se cumple $\phi_g^V(v) \in \ker(\varphi)$. Pero $v \in \ker(\varphi)$ significa $\varphi(v) = 0_W$. Al aplicar la condición $\varphi \in \text{Hom}_U(V, W)$, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\varphi) & \xrightarrow{\varphi} & \{0_W\} \\ \phi_g^V \downarrow & & \downarrow \phi_g^W \\ \{0_V\} & \xrightarrow{\varphi} & \{0_W\} \end{array}$$

muestra que se cumple $\varphi(\phi_g^V(v)) = \phi_g^W(\varphi(v)) = \phi_g^W(0_W) = 0_W$.

Para demostrar la segunda afirmación debemos considerar la restricción de ϕ_g^W al conjunto $\text{Im}(\varphi)$ contenido en W , y demostrar que dado $w \in \text{Im}(\varphi)$, se cumple $\phi_g^W(w) \in \text{Im}(\varphi)$, para cualquier g en G . Notemos que $w \in \text{Im}(\varphi)$ significa que existe una preimagen (llamémosla $v \in V$) que satisface $\varphi(v) = w$.

El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \text{Im}(\varphi) \\ \phi_g^V \downarrow & & \downarrow \phi_g^W \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

permite escribir las relaciones $\varphi(\phi_g^V(v)) = \phi_g^W(\varphi(v)) = \phi_g^W(w)$. Ello demuestra $\phi_g^W(w) \in \text{Im}(\varphi)$, con lo cual concluye la prueba. ■

La siguiente proposición describe el comportamiento de los G -morfismos en el contexto de representaciones irreducibles. La prueba es casi inmediata en función del lema anterior.

Proposición 2.6 (Lema de Schür) Dado un grupo finito G , fijemos dos representaciones irreducibles $\phi^V : G \rightarrow GL(V)$ y $\phi^W : G \rightarrow GL(W)$. Sea $\varphi \in \text{Hom}_U(V, W)$. Entonces se cumple lo siguiente.

- O bien φ es un isomorfismo, o en su defecto $\varphi = 0$.
- Si $V = W$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi = \lambda(\text{Id}_V)$.

Prueba. Para demostrar la primera aseveración supongamos que φ no es isomorfismo de V en W . Ello implica que, o bien el núcleo de φ (denotado por $\text{Ker}(\varphi)$) es distinto de $\{0\}$ o en su defecto, la imagen de φ (denotada por $\text{Im}(\varphi)$) es distinta de W . Supongamos se tenga $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$. Como $\text{Ker}(\varphi)$ es una subrepresentación de V y ϕ^V es irreducible, concluimos la igualdad $\text{Ker}(\varphi) = V$. Es decir, φ es idénticamente nula. Si la imagen de φ es distinta de W , se razona igual.

Para la otra afirmación notemos que, de $\varphi = 0$, concluimos trivialmente la igualdad $\varphi = 0(\text{Id}_V)$. Por otro lado, si $\varphi \neq 0$, de la primera parte sabemos que φ es isomorfismo y por lo tanto, es invertible. De ello inferimos que existe un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y por lo tanto, el operador $T = \varphi - \lambda(\text{Id}_V)$ no es inyectivo.

Nuevamente de la primera parte se deduce que T es idénticamente nulo, es decir, cumple $\phi = \lambda(\text{Id}_V)$. ■

Antes de continuar avanzando en nuestra exposición, describamos ciertas representaciones importantes.

Ejemplo. Los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ forman la base canónica de \mathbf{C}^3 . La representación permutación del grupo S_3 se define del siguiente modo: para cada $\sigma \in S_3$ ponemos $\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}$ para $i = 1, 2, 3$. Las imágenes que brinda esta representación se identifican con la matrices de orden 3×3 que resultan de permutar las columnas de la matriz identidad. De este modo, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{\text{Id}_{S_3}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \phi_{(1\ 3\ 2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi_{(1\ 2\ 3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \phi_{(1\ 2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi_{(1\ 3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{y } \phi_{(2\ 3)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo. En general, sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbf{C}^n . La representación regular del grupo S_n toma el nombre particular de representación permutación de S_n y se define del siguiente modo: para cada $\sigma \in S_n$ ponemos $\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. La igualdades

$$\phi_{\sigma\tau}(e_i) = e_{(\sigma\tau)^{-1}(i)} = e_{(\tau^{-1}\sigma^{-1})(i)} = e_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i))} \text{ y}$$

$$\phi_\sigma(\phi_\tau(e_i)) = \phi_\sigma(e_{\tau^{-1}(i)}) = e_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i))}$$

aseguran el cumplimiento de $\phi_{\sigma\tau} = \phi_\sigma \circ \phi_\tau$.

Es importante acotar que la representación permutación del grupo S_n no es irreducible. Para justificar este hecho consideremos el vector

$$v = \sum_{i=1}^n e_i = (1, 1, \dots, 1)^t$$

y el subespacio unidimensional $W = \langle v \rangle$. Dicho subespacio es S_n -invariante, pues para cualquier $\sigma \in S_n$ y $w = kv \in W$ se cumple $\phi_\sigma(w) = \phi_\sigma(kv) = k \phi_\sigma(v) = kv = w$. Consideremos ahora el subespacio W^\perp generado por los vectores de la forma $(z_1, z_2, \dots, z_n)^t$ tales que $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$. Ocurre que se tiene $\mathbf{C}^n = W \oplus W^\perp$. Más adelante justificaremos que W^\perp es una representación irreducible de S_n , cuya dimensión es $n - 1$ y que se conoce como representación estándar.

Ejemplo. Hallemos las matrices correspondientes a la representación estándar del grupo S_3 . Con respecto a la base canónica de \mathbf{C}^3 , un cálculo simple muestra que el conjunto $B = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\} = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ es una base del subespacio W formado por los (z_1, z_2, z_3) tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Las matrices de orden 2×2 que aparecen en esta representación son

$$\begin{aligned} \phi_{Id_{S_3}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \phi_{(1\ 2\ 3)} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi_{(1\ 3\ 2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & \phi_{(1\ 2)} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \phi_{(1\ 3)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{y } \phi_{(2\ 3)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo. En el capítulo 1 se demostró que toda permutación del grupo simétrico S_n se expresa como producto de un número, o bien par o sino impar de transposiciones (proposición 1.6). En tal sentido, asignamos 1 a las permutaciones pares, y -1 , a las impares. Ello nos permite definir una representación ϕ de S_n en el grupo multiplicativo $\{1, -1\}$ contenido en $\mathbf{C}^* = GL(\mathbf{C})$. Esta es la representación signo, la cual es irreducible por ser de dimensión 1.

2.6. Caracteres de representaciones

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n y T una transformación lineal de V en V , cuya matriz asociada a una base $\{e_i\}$ de V es (a_{ij}) . La traza de T , denotada por $Tr(T)$ es la suma de los elementos de la diagonal principal de (a_{ij}) . Es decir, $Tr(T) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Recordemos que la traza es la suma de los autovalores de T contados con su multiplicidad, y por tanto no depende de la base elegida para V .

Dada $\phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación lineal de un grupo finito G en un espacio vectorial V , el carácter de ϕ es la función denotada por $\chi_\phi : G \rightarrow \mathbf{C}$, definida **v** $\chi_\phi(g) = Tr(\phi_g)$, para cada $g \in G$.

En ocasiones, el carácter de ϕ se denota por χ_V para resaltar V como espacio de representación para G . El carácter rescata los elementos que aparecen en la diagonal de las matrices ϕ_g . Con esto se puede dar la impresión de que se está perdiendo valiosa información acerca de la representación; pero en un momento veremos cómo más bien el carácter la determina completamente.

Proposición 2.7 *Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación lineal de grado n de un grupo finito G con elemento identidad 1. Entonces se cumple:*

1. $\chi_\phi(1) = n$;
2. $\chi_\phi(g^{-1}) = \overline{\chi_\phi(g)}$, para todo $g \in G$;
3. $\chi_\phi(ghg^{-1}) = \chi_\phi(h)$, para todo $g, h \in G$.

Prueba. La afirmación 1 es claramente trivial. La afirmación 2 expresa la relación entre los autovalores de una matriz y aquellos de su inversa, puesto que todos los autovalores han de ser raíces de la unidad cuando el grupo es finito. La tercera afirmación nos dice que el carácter es constante por clases de conjugación en el grupo G . Esta propiedad es consecuencia de la igualdad $Tr(AB) = Tr(BA)$ para matrices A y B , pues aplicando dicha igualdad se obtiene $\chi_\phi(\mathbf{ghg}^{-1}) = \chi_\phi(\mathbf{h})$. ■

A partir de la definición misma se pueden formular dos observaciones importantes acerca de los caracteres de grupos finitos.

- Si 1 denota el elemento neutro del grupo finito G de orden n , entonces ϕ_1 es el homomorfismo identidad de V en V . A partir de ello se tiene $\dim V = \chi_\phi(1)$.
- Supongamos $\dim(V) = n$. Dado un elemento $\mathbf{g} \in G$, podemos calcular los autovalores λ_i de $\phi_{\mathbf{g}}$ resolviendo el sistema $\chi_V(\mathbf{g}^k) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k$, para $k = 1, 2, \dots, n$. En efecto, todo elemento $\mathbf{g} \in G$ es de orden finito y, de ello, las matrices asociadas a $\phi_{\mathbf{g}}, \phi_{\mathbf{g}}^2, \dots, \phi_{\mathbf{g}}^n$ son al menos triangulables. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de $\phi_{\mathbf{g}}$, se sabe también que $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ son los autovalores de $\phi_{\mathbf{g}}^k$ para cualquier k desde 2 hasta n . Pero las sumas de la forma $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k$ son las trazas de las matrices asociadas a los automorfismos $\phi_{\mathbf{g}}^k$; es decir, dichas sumas son los caracteres de los $\phi_{\mathbf{g}}^k$ para $2 \leq k \leq n$.

Ejemplo. Conocemos tres representaciones del grupo simétrico S_3 : la identidad, la del signo y la estándar dada en la página 35 (más adelante probaremos que son las únicas irreducibles). El concepto de carácter y sus propiedades nos brindan herramientas más eficientes (y económicas por así decirlo) para estudiar al detalle dichas representaciones. Como los caracteres son constantes por clase de conjugación (proposición 2.7), basta con evaluarlos en representantes de dichas clases, tales como $\sigma = (1\ 2)$ y $\tau = (1\ 2\ 3)$. La información que hemos recabado acerca de las tres representaciones que conocemos de S_3 se puede resumir en la siguiente tabla:

Representación	Dimensión	Autovalores de ϕ_σ	Autovalores de ϕ_τ
Identidad	1	1	1
Signo	1	-1	1
Estándar	2	1 y -1	ω y ω^2 .

En la página 14 se detallan las clases de conjugación del grupo simétrico S_3 . Los representantes elegidos para dichas clases son Id_{S_3} , cuya clase de conjugación es unitaria, $\sigma = (1\ 2)$, cuya clase de conjugación tiene tres elementos, y $\tau = (1\ 2\ 3)$, que representa una clase de conjugación de dos elementos. Al evaluar los caracteres de cada representación en los elementos Id_{S_3}, σ y τ obtenemos la siguiente tabla de caracteres:

	(1) $\phi_{Id_{S_3}}$	(3) ϕ_σ	(2) ϕ_τ
Identidad	1	1	1
Signo	1	-1	1
Estándar	2	$0 = 1 - 1$	$-1 = \omega + \omega^2$

Antes de examinar los caracteres de otras representaciones (que ya no serán irreducibles) del grupo S_3 y la relación que ellas guardan con las representaciones irreducibles, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 2.8 Sean $\phi^V : G \rightarrow GL(V)$ y $\phi^W : G \rightarrow GL(W)$ representaciones de G , con caracteres χ_V y χ_W . Entonces se cumple $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

Prueba. Para cualquier $g \in G$, si ϕ_g^V y ϕ_g^W se expresan matricialmente mediante M_g^V y M_g^W , respectivamente, entonces la forma matricial de la representación $V \oplus W$ es $\begin{pmatrix} M_g^V & 0 \\ 0 & M_g^W \end{pmatrix}$. Al calcular la traza de esta matriz, se deduce el resultado. ■

Ejemplo. Sea ϕ la representación de S_3 que permuta los ejes (representación permutación), la cual es de dimensión 3.

- Las matrices de esta representación son $\phi_{Id_{S_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $\phi_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\phi_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Al calcular las trazas respectivas, obtenemos

$$\chi_\phi(Id_{S_3}) = 3, \chi_\phi(\sigma) = 1 \text{ y } \chi_\phi(\tau) = 0.$$

- Para proponer una descomposición de esta representación en suma directa de las representaciones *Ident*, *sgn* y *estándar* de S_3 (como lo establece la proposición 2.4) de modo tentativo hallamos los valores de las posibles multiplicidades a, b y c que verifican la siguiente igualdad matricial (o de automorfismos) $M^\phi = M^{Ident}{}^a \oplus (M^{sgn})^b \oplus M^{estándar}{}^c$. Traducida esta igualdad a caracteres, esto equivale a $\chi_\phi = a(\chi_{Ident}) + b(\chi_{sgn}) + c(\chi_{estándar})$. Al evaluar cada miembro de la igualdad en los elementos Id_{S_3} , σ y τ , respectivamente, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3 &= a + b + 2c \\ 1 &= a - b \\ 0 &= a + b - c. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema, se obtiene $a = 1, b = 0$ y $c = 1$. Y en efecto no es difícil verificar que se cumple $M^\phi = M^{Ident} \oplus M^{estándar}$. Esto se terminará

de formalizar con la proposición 2.19, pues de ello se deducirá que S_3 acepta exactamente tres representaciones irreducibles.

Ejemplo. Sea ϕ la representación regular de S_3 . Esta vez estamos ante una representación de grado 6. Para describirla, escribimos el grupo como $S_3 = \langle Id_{S_3}, \sigma, \tau, \tau^2, \sigma\tau, \sigma\tau^2 \rangle$ y asociamos a dichos elementos los vectores de la base canónica e_1, e_2, \dots, e_6 de \mathbb{R}^6 , en ese orden. Así por ejemplo, tenemos

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{Id_{S_3}}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{\sigma} \text{ y } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{\tau}.$$

- El homomorfismo $\phi_{Id_{S_3}}$ es la matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto se cumple $\chi_{\phi}(Id_{S_3}) = 6$.

- El cálculo de los vectores fila correspondientes a ϕ_{σ} es el siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma}(e_1) &= e_{\sigma} = e_2, & \phi_{\sigma}(e_{\sigma}) &= e_{\sigma^2} = e_1, & \phi_{\sigma}(e_{\tau}) &= e_{\sigma\tau} = e_5 \\ \phi_{\sigma}(e_{\tau^2}) &= e_{\sigma\tau^2} = e_6, & \phi_{\sigma}(e_{\sigma\tau}) &= e_{\sigma(\sigma\tau)} = e_3, & \phi_{\sigma}(e_{\sigma\tau^2}) &= e_{\sigma(\sigma\tau^2)} = e_4. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De este modo, obtenemos $\phi_{\sigma} =$ y por consiguiente

$$\chi_{\phi}(\sigma) = 0.$$

- Análogamente, calculamos los vectores fila correspondientes a ϕ_{τ} , como

$$\begin{aligned} \phi_{\tau}(e_1) &= e_{\tau} = e_3, & \phi_{\tau}(e_{\sigma}) &= e_{\tau\sigma} = e_6, & \phi_{\tau}(e_{\tau}) &= e_{\tau^2} = e_4 \\ \phi_{\tau}(e_{\tau^2}) &= e_{\tau^3} = e_1, & \phi_{\tau}(e_{\sigma\tau}) &= e_{\tau(\sigma\tau)} = e_2, & \phi_{\tau}(e_{\sigma\tau^2}) &= e_{\tau(\sigma\tau^2)} = e_5, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para obtener $\phi_{\tau} =$ y con ello $\chi_{\phi}(\tau) = 0$.

Para expresar la representación regular como suma directa de las tres representaciones conocidas de S_3 planteamos la potencial igualdad

$$M^{\phi} = M^{Ident} \sum_a \oplus (M^{sgn})^b \oplus M^{estandar} \sum_c.$$

donde debemos hallar los valores de a , b y c . Esta igualdad traducida a caracteres equivale a

$$\chi_\phi = a(\chi_{Ident}) + b(\chi_{sgn}) + c(\chi_{estandar}).$$

Al evaluar cada miembro de la igualdad en los elementos Id_{S_3} , σ y τ , respectivamente, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6 &= a + b + 2c \\ 0 &= a - b \\ 0 &= a + b - c. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene $a = 1$, $b = 1$ y $c = 2$. Es decir, se cumple $M^\phi = M^{Ident} \oplus M^{Sgn} \oplus M^{estandar}$ (asumiendo que sean exactamente estas tres las representaciones irreducibles de S_3).

Para concluir con esta presentación de los caracteres, definimos un espacio de representación que va a ser de suma utilidad.

Sea V un espacio vectorial complejo. El espacio dual de V , denotado por V^* es el conjunto formado por los homomorfismos de V en \mathbf{C} . Es decir, se define por la igualdad $V^* = Hom(V, \mathbf{C})$. Los elementos de V^* se denominan formas lineales (o funcionales lineales). Recordemos que si $dim(V) = n$, entonces $dim(V^*) = n$. Asimismo, dada una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ para V , las funciones f_i definidas **v**

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n$ forman una base de V^* . Para cada i, j , la expresión $f_i(v_j)$ se denota por δ_{ij} . Dado $f \in V^*$, la base dual $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ asegura la existencia de escalares $\beta_i \in \mathbf{C}$ que permiten escribir $f = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i$. Notemos que para cada j desde 1 hasta n se cumple $f(v_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(v_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_{ij} = \beta_j$.

En consecuencia, todo elemento $f \in V^*$ se deja escribir $f = \sum_{i=1}^n f(v_i) f_i$.

Si V es un espacio de representación de un grupo G , entonces V^* es también un espacio de representación de G llamado representación dual (o contra-gradiante) del grupo G . Esta representación está dada expresamente por la siguiente acción de grupos

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v), \text{ para } g \in G, f \in V^*, v \in V.$$

Para ser más precisos, supongamos que $\phi : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de un grupo finito G . Denotemos por ϕ^* a esta representación “inducida” por ϕ en el espacio dual V^* , es decir, $\phi^* : G \rightarrow GL(V^*)$. La siguiente proposición describe la presentación matricial de ϕ^* .

Proposición 2.9 Sea $\phi : G \rightarrow GL(V)$ una representación de G en un espacio de dimensión finita. Entonces, para cada $g \in G$, la matriz de ϕ_g^* en la base dual es la transpuesta de la matriz $\phi_{g^{-1}}$. Además se cumple $\chi_{\phi^*} = \overline{\chi_{\phi}}$.

Prueba. Sea $\{v_i\}$ una base de V y $\{f_i\}$ la base dual en V^* dada por $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Dado $g \in G$, supongamos que la matriz de ϕ_g en la base $\{v_i\}$ sea $(A_{ij}(g))$, es decir se cumple $g \cdot v_i = \sum_k A_{ki}(g)v_k$. De ahí pasamos a

$$\begin{aligned} g \cdot f_i &= \sum_k (g \cdot f_i)(v_k) f_k = \sum_k f_i(g^{-1} \cdot v_k) f_k \\ &= \sum_k \sum_j A_{jk}(g^{-1}) f_i(v_j) f_k = \sum_k \sum_j A_{jk}(g^{-1}) \delta_{ij} f_k \\ &= \sum_k A_{ik}(g^{-1}) f_k \end{aligned}$$

Es decir, la matriz de la representación dual ϕ_g^* en la base $\{f_i\}$ es la transpuesta de la matriz $(A_{ij}(g^{-1}))$. Por lo tanto se cumple $\phi_g^* = (\phi_{g^{-1}})^t$.

Como consecuencia, y también a partir de la parte 2 de la proposición 2.7, para cada $g \in G$ se tiene

$$\chi_{\phi_g^*} = \text{Tr}(\phi_g^*) = \text{Tr}((\phi_{g^{-1}})^t) = \text{Tr}(\phi_{g^{-1}}) = \chi_{\phi_{g^{-1}}} = \overline{\chi_{\phi_g}}$$

con lo cual queda establecido el resultado. ■

2.7. Producto tensorial de representaciones.

Recordaremos brevemente el lenguaje relacionado con el producto tensorial de dos espacios vectoriales. Sean V, W y U espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbf{K} . Una forma bilineal es una función $\beta : V \times W \rightarrow U$ que cumple

$$\beta(\lambda v + u, w) = \lambda \beta(v, w) + \beta(u, w) \text{ y}$$

$$\beta(v, \lambda u + w) = \lambda \beta(v, u) + \beta(v, w),$$

para todo $v, u \in V, u, w \in W, \lambda \in \mathbf{K}$.

Específicamente, si $V = W$, una forma bilineal es una transformación bilineal $\beta : V \times V \rightarrow \mathbf{K}$.

Una forma bilineal β es simétrica si $\beta(v, w) = \beta(w, v)$, para todo $v, w \in V$. Si se cumple $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$, para todo $v, w \in V$, se dice que la forma bilineal β es antisimétrica.

Denotamos por $\text{Bil}(V)$ al conjunto de las formas bilineales $\beta : V \times V \rightarrow \mathbf{K}$, y denotamos por $\text{Sym}(V)$ y $\text{Alt}(V)$ los subconjuntos de formas bilineales simétricas y antisimétricas, respectivamente. Es claro que $\text{Bil}(V)$ posee la estructura de espacio vectorial sobre \mathbf{K} y los subconjuntos $\text{Sym}(V)$ y $\text{Alt}(V)$ son subespacios de $\text{Bil}(V)$. Es este el lugar natural del siguiente resultado.

Lema 2.10 Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 y V un espacio vectorial sobre K . Entonces se cumple $Bil(V) = Sym(V) \oplus Alt(V)$.

Prueba. Si $\beta \in Sym(V)$ y $\beta \in Alt(V)$, obtenemos $\beta(w, v) = -\beta(w, v)$, es decir, $\beta(w, v) = 0$, para todo $v, w \in V$. De ello se tiene $Sym(V) \cap Alt(V) = \{0\}$. Para continuar con la prueba, sea $\beta \in Bil(V)$. Definimos β_1 y β_2 vía $\beta_1(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) + \beta(w, v))$ y $\beta_2(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v))$. Se comprueba de inmediato la igualdad $\beta = \beta_1 + \beta_2$ y que β_1 es simétrica, mientras β_2 , antisimétrica. ■

Dados V y W espacios vectoriales sobre K , denotaremos por $V \otimes W$ al espacio vectorial generado por los símbolos de la forma $v \otimes w$ sujetos a las relaciones:

$$\begin{aligned} v_1 \otimes w + v_2 \otimes w &= (v_1 + v_2) \otimes w, \\ v \otimes w_1 + v \otimes w_2 &= v \otimes (w_1 + w_2), \text{ y} \\ \lambda v \otimes w &= v \otimes \lambda w = \lambda(v \otimes w) \end{aligned}$$

para todo $v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W, c \in K$. Sea S el subespacio de $V \otimes W$ generado por los elementos de la forma $\lambda v \otimes w - v \otimes \lambda w$, con $\lambda \in K, v \in V, w \in W$. El producto tensorial de V y W , denotado por $V \otimes W$, es el espacio cociente $(V \otimes W)/S$. Es decir, $V \otimes W = (V \otimes W)/S$. La función $\pi : (V \otimes W) \rightarrow V \otimes W$ definida vía $\pi(v \otimes w) = v \otimes w$ es la proyección canónica.

Cabe indicar que existen muchas maneras de definir el producto tensorial (hemos mostrado una de ellas, presentada en [9]). En todo caso, se demuestra que tal producto tensorial siempre existe. El producto tensorial $\otimes W$ junto con la proyección canónica π se caracterizan por la siguiente propiedad universal. Si U es un espacio vectorial sobre K y $\beta : V \times W \rightarrow U$ es una forma bilineal, entonces existe una única transformación lineal $\hat{\beta} : V \otimes W \rightarrow U$ tal que $\beta = \hat{\beta} \circ \pi$.

Volviendo al contexto de las representaciones, sean V y W dos espacios vectoriales y $\phi^V : G \rightarrow GL(V)$ y $\phi^W : G \rightarrow GL(W)$ dos representaciones del grupo finito G . Definimos el producto tensorial de ϕ^V y ϕ^W , denotado por $\phi^V \otimes \phi^W$, mediante la fórmula

$$(\phi^V \otimes \phi^W)_g(v, w) = \phi^V_g(v) \otimes \phi^W_g(w), \text{ para } g \in G, v \in V, w \in W.$$

En [7] se justifica al detalle por qué $\phi^V \otimes \phi^W$ es una representación lineal de G en $V \otimes W$, aunque esto es obvio intuitivamente.

Proposición 2.11 Sean $\phi^V : G \rightarrow GL(V)$ y $\phi^W : G \rightarrow GL(W)$ representaciones de G , con caracteres χ_V y χ_W . Entonces se cumple $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$.

Prueba. Dado $g \in G$, sean v_1, v_2, \dots, v_n autovectores de ϕ_g^V , asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; y sean w_1, w_2, \dots, w_m autovectores de ϕ_g^W , asociados a los autovalores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$. Por resultados fundamentales de álgebra lineal se sabe que la familia $\{v_i \otimes w_j\}$ es una base de $V \otimes W$. Notemos además que se cumple

$$\phi_g^V \otimes \phi_g^W (v_i \otimes w_j) = \phi_g^V (v_i) \otimes \phi_g^W (w_j) = \lambda_i v_i \otimes \mu_j w_j = \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j),$$

es decir, cada elemento $v_i \otimes w_j$ es un autovector de $\phi_g^V \otimes \phi_g^W$ asociado al autovalor $\lambda_i \mu_j$. Por lo tanto, se tiene

$$\chi_{V \otimes W}(g) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j = \sum_i \lambda_i \sum_j \mu_j = \chi_V(g) \cdot \chi_W(g).$$

Esto demuestra la igualdad $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$. ■

2.8. Ortogonalidad de caracteres.

Los resultados que presentaremos a continuación son corolarios del lema de Schür. Se utilizan para demostrar propiedades importantes de los caracteres de representaciones irreducibles, las mismas que se denominan relaciones de ortogonalidad de caracteres, por motivos obvios.

Proposición 2.12 Sean $\phi^V : G \rightarrow GL(V)$ y $\phi^W : G \rightarrow GL(W)$ representaciones irreducibles de un grupo finito G y sea $\varphi : V \rightarrow W$ una transformación lineal cualquiera. Definimos $\hat{\varphi} : V \rightarrow W$ por

$$\hat{\varphi}(v) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \phi_{g^{-1}}^W \circ \varphi \circ \phi_g^V (v).$$

Si $V = W$, entonces se cumple $\hat{\varphi} = \frac{\text{Tr}(\varphi)}{\dim(V)} Id_V$. Si la representación V no es isomorfa a W , entonces $\hat{\varphi} = 0$.

Prueba. Notemos primero que la definición de $\hat{\varphi}$ en términos de acción de grupos se escribe también cual

$$\hat{\varphi}(v) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \phi_{g^{-1}}^W \circ \varphi \circ \phi_g^V (v) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \varphi(g \cdot v).$$

Mostremos que $\hat{\varphi}$ es un G -morfismo. En efecto, para $v \in V, h \in G$, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(h \cdot v) &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} g^{-1} \cdot \varphi(gh \cdot v) \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{gh^{-1} \in G} (gh^{-1})^{-1} \cdot \varphi(gh^{-1}h \cdot v) \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} hg^{-1} \cdot \varphi(g \cdot v) = h \cdot \hat{\varphi}(v). \end{aligned}$$

Ahora rematamos la prueba. Si V no es isomorfo a W , entonces como ϕ^V y ϕ^W son irreducibles, el lema de Schür (proposición 2.6) permite concluir $\hat{\phi} = 0$. Mientras que si $V = W$, nuevamente la proposición 2.6 asegura que existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\phi = \lambda Id_V$. Tomando traza a ambos miembros de esta igualdad se llega a

$$\lambda \dim(V) = \text{Tr}(\hat{\phi}) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\phi^V \circ \phi \circ \phi^V) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\phi) = \text{Tr}(\phi).$$

Por lo tanto, $\lambda = \frac{\text{Tr}(\phi)}{\dim(V)}$, con lo cual queda probada la proposición. ■

Vamos a reexpresar este resultado en forma matricial para utilizarlo más cómodamente. En tal sentido, dado $g \in G$, escribamos

$$\phi_g^V = (A_{ij}(g)), \quad \phi_g^W = (B_{ij}(g)).$$

Supongamos además que se tenga $\phi = (C_{ij})$ y $\hat{\phi} = (D_{ij})$. Al escribir la definición de $\hat{\phi}$ en forma matricial se obtiene $D = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} B(g^{-1})CA(g)$. En particular para cada i, j se tiene $D_{ij} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{k, l} B_{ik}(g^{-1})C_{kl}A_{lj}(g)$.

Recordemos que ϕ es una transformación lineal cualquiera de V a W , por lo cual la matriz C es libre de ser elegida. Por lo tanto, para k_0 y l_0 dados podemos poner $C_{ij} = \delta_{ik_0} \delta_{jl_0}$ con lo cual se tendrá $C_{ij} = 0$ para todos los índices excepto para el par k_0, l_0 donde se tiene $C_{k_0 l_0} = 1$.

- En el caso que V no es isomorfo a W , se tiene $\hat{\phi} = 0$ y con ello se cumple $0 = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{k, l} B_{ik}(g^{-1})C_{kl}A_{lj}(g)$. Por la elección de C , esta igualdad implica $0 = \sum_{g \in G} B_{ik_0}(g^{-1})A_{l_0 j}(g)$, para todo i, j .
- En el caso $V = W$, se tiene $A = B$ y la proposición 2.12 implica $D = \frac{\text{Tr}(C)}{\dim(V)} I$, es decir, se cumple

$$D_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\dim(V)} \sum_k C_{kk} = \frac{\delta_{ij}}{\dim(V)} \delta_{k_0 l_0}.$$

En este caso, la igualdad

$$D_{ij} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{k, l} A_{ik}(g^{-1})C_{kl}A_{lj}(g)$$

queda reescrita cual

$$\frac{\delta_{ij}}{\dim(V)} \delta_{k_0 l_0} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{k, l} A_{ik}(g^{-1})C_{kl}A_{lj}(g).$$

La elección de C nos permite concluir la igualdad

$$\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} A_{iko}(g^{-1})A_{løj}(g) = \frac{1}{\dim(V)} \delta_{ij} \delta_{kolo}.$$

Es el momento de abordar las relaciones de ortogonalidad entre caracteres de representaciones irreducibles. Para ello, dadas χ y χ' funciones de un grupo

finito G en \mathbf{C} , definimos (χ, χ') por la fórmula $(\chi, \chi') = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi'(g)}$.

No es difícil comprobar que (\cdot, \cdot) define un producto interno hermitiano en el espacio vectorial de las funciones de G en \mathbf{C} (en [7] se pueden encontrar los detalles de la prueba). Este producto interno permitirá establecer relaciones de ortonormalidad entre los caracteres.

Proposición 2.13 Para $\phi^V : G \rightarrow GL(V)$ y $\phi^W : G \rightarrow GL(W)$ representaciones irreducibles no isomorfas de un grupo finito G se cumple

1. $(\chi_V, \chi_V) = 1$ y

2. $(\chi_V, \chi_W) = 0$.

Prueba. Dado $g \in G$, sean las matrices $\phi^V(g) = A_{ij}(g)$, $\phi^W(g) = B_{ij}(g)$. Entonces se tiene $\chi_V = \sum_i A_{ii}(g)$ y $\chi_W = \sum_i B_{ii}(g)$. Con ello se cumple

$$\begin{aligned} (\chi_V, \chi_V) &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_V(g)} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_V(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} A_{ii}(g) A_{jj}(g^{-1}) = \sum_{i,j} \frac{1}{\dim(V)} \delta_{ij}^2 = 1. \end{aligned}$$

La cuarta igualdad es consecuencia de la relación

$$\frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} A_{ik}(g^{-1})A_{lj}(g) = \frac{1}{\dim(V)} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

justificada en la observación anterior. Con esto queda demostrada la afirmación 1.

Asimismo, si V y W son no isomorfos, se tiene

$$\begin{aligned} (\chi_V, \chi_W) &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} A_{ii}(g) B_{jj}(g^{-1}) = 0, \end{aligned}$$

donde la igualdad $\sum_{g \in G} B_{ik}(g^{-1})A_{lj}(g) = 0$ fue establecida en la observación anterior. ■

En términos del producto interno, el teorema anterior asegura que los caracteres de las representaciones irreducibles son vectores unitarios, y los caracteres de dos representaciones irreducibles no isomorfas son ortogonales. Estos resultados y el hecho de que los caracteres son constantes a lo largo de clases de conjugación permiten concluir que *la cantidad de representaciones irreducibles de un grupo finito es igual a lo mucho al número de clases de conjugación del grupo*. De ello se deduce, en particular, que solo existe un número finito de ellas. En las páginas que siguen demostraremos que el número de representaciones irreducibles de un grupo finito coincide con el número de clases de conjugación de dicho grupo. Para continuar en tal dirección, denotaremos por V_1, V_2, \dots, V_s a los representantes de clases de equivalencia de representaciones irreducibles isomorfas y denotaremos por m_i la dimensión de V_i . En tal sentido la proposición anterior nos dice que, dadas V_i, V_j , se cumple

$$\chi_{V_i}, \chi_{V_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Las siguientes proposiciones deberían terminar de convencernos de la importancia de los caracteres para el estudio de las representaciones irreducibles.

Corolario 2.14 *Sea W una representación con descomposición en suma directa de irreducibles dada por $W = V_1^{a_1} \oplus V_2^{a_2} \oplus \dots \oplus V_s^{a_s}$. Entonces se cumple*

$a_i = (\chi_W, \chi_{V_i})$, para todo $i = 1, \dots, s$.

Prueba. A partir de la escritura de W en suma directa, se tiene $\chi_W = \sum_j a_j \chi_{V_j}$, lo cual nos conduce a

$$(\chi_W, \chi_{V_i}) = \sum_j a_j \chi_{V_j}, \chi_{V_i} = \sum_j a_j (\chi_{V_j}, \chi_{V_i}) = \sum_j a_j \delta_{ji} = a_i.$$

Corolario 2.15 *Sean V y W dos representaciones de dimensión finita de un grupo G . Si $\chi_V = \chi_W$, entonces V y W son isomorfas.*

Prueba. Consideremos las descomposiciones de V y W en sumas directas de representaciones irreducibles, expresadas como $V = V_1^{a_1} \oplus V_2^{a_2} \oplus \dots \oplus V_s^{a_s}$ y $W = V_1^{b_1} \oplus V_2^{b_2} \oplus \dots \oplus V_s^{b_s}$. De la hipótesis $\chi_V = \chi_W$, y del corolario anterior, para todo i se cumple $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i}) = (\chi_W, \chi_{V_i}) = b_i$. Por lo tanto V y W son isomorfas. ■

Corolario 2.16 *Sean V y W dos representaciones de dimensión finita de un grupo G . Entonces se cumple $\dim \text{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.*

Prueba. Sea $\phi \in \text{Hom}_G(V, W)$. Según el lema de Schür, si V y W son irreducibles, se tiene $\phi = 0$ si $V \neq W$, y $\phi = \lambda(\text{Id}_V)$ si $V = W$. Esto equivale

a afirmar $\text{Hom}_U(V, W) = \{0\}$ si $V \not\cong W$, y $\text{Hom}_U(V, W) = (Id_V)$ si $V = W$. En términos de dimensiones, esto es equivalente a

$$(\chi_V, \chi_W) = \dim \text{Hom}_U(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V = W \\ 0 & \text{si } V \neq W. \end{cases}$$

Para V y W representaciones (ya no necesariamente irreducibles) consideremos descomposiciones en suma directa de representaciones irreducibles, dadas por

$$V = V_1^{a_1} \oplus V_2^{a_2} \oplus \dots \oplus V_s^{a_s} = \sum_i V_i^{a_i}, \text{ y}$$

$$W = V_1^{b_1} \oplus V_2^{b_2} \oplus \dots \oplus V_s^{b_s} = \sum_j V_j^{b_j}.$$

Se tienen los siguientes isomorfismos:

$$\text{Hom}_U(V, W) = \text{Hom}_U \left(\sum_i V_i^{a_i}, \sum_j V_j^{b_j} \right) \cong \sum_{i,j} \text{Hom}_U(V_i^{a_i}, V_j^{b_j})$$

$$\cong \sum_{i,j} \delta_{ij} K^{a_i b_j} \cong \sum_i K^{a_i b_i}.$$

Debido a ello se obtiene $\dim \text{Hom}_U(V, W) = \sum_i a_i b_i = (\chi_V, \chi_W)$. ■

La siguiente proposición establece una caracterización de las representaciones irreducibles en términos de sus caracteres.

Corolario 2.17 *Una representación V de un grupo G es irreducible si y sólo si $(\chi_V, \chi_V) = 1$.*

Prueba. En la proposición 2.13 se demostró que la irreducibilidad de V es condición suficiente para tener $(\chi_V, \chi_V) = 1$. Para demostrar que la condición también es necesaria, supongamos $(\chi_V, \chi_V) = 1$, donde V se descompone en suma directa de representaciones irreducibles mediante $V = V_1^{a_1} \oplus V_2^{a_2} \oplus \dots \oplus V_s^{a_s}$.

Así, se tiene $1 = (\chi_V, \chi_V) = \sum_{i,j} a_i a_j (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{ij} = \sum_i a_i^2$. Pero los a_i son números enteros positivos, por tanto, para que ocurra la igualdad $1 = \sum_i a_i^2$, es obligatorio tener $a_i = 0$ para todo i excepto para un k tal que $a_k = 1$. De este modo $V = V_k$ y con ello V resulta irreducible. ■

Corolario 2.18 *Si V es una representación irreducible del grupo G , entonces la representación dual V^* también es irreducible.*

Prueba. Si χ_{V^*} denota el carácter de V^* , a partir de los corolarios anteriores y de la proposición 2.9 obtenemos

$$(\chi_{V^*}, \chi_{V^*}) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi_{V^*}(g) \overline{\chi_{V^*}(g)} = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_V(g)$$

$$= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_V(g) = (\chi_V, \chi_V) = 1.$$

Por el corolario 2.17, V^* es irreducible. ■

Ejemplo. Las proposiciones demostradas sobre ortogonalidad de caracteres permiten extraer conclusiones acerca de las representaciones irreducibles del grupo simétrico S_3 . Con las matrices de la representación estándar, exhibidas en la página 36 calculamos el carácter de dicha representación mediante las igualdades

$$\chi(\text{Id}_{S_3}) = 2, \chi((1\ 2\ 3)) = \chi((1\ 3\ 2)) = -1, \chi((1\ 2)) = \chi((1\ 3)) = \chi((2\ 3)) = 0.$$

Ahora, si llamamos V a dicha representación estándar, verificamos

$$(\chi, \chi^V) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{1}{6} (2(2) + 2(-1)(-1) + 3(0)(0)) = 1,$$

resultado que por el corolario 2.17 permite concluir la irreducibilidad de dicha representación.

Para continuar la exposición, analicemos la representación regular de un grupo G . Para lograr mayor precisión vamos a introducir la noción de álgebra de grupo. Recordemos que un álgebra sobre un cuerpo \mathbf{K} es un espacio vectorial A provisto de una multiplicación $\cdot : A \times A \rightarrow A$ asociativa y con unidad, tal que, para todo $a, b, c \in A, \lambda \in \mathbf{K}$ verifica

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c, \text{ y} \\ \lambda(a \cdot b) &= (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b). \end{aligned}$$

Dado un grupo G , el álgebra de grupo de G , denotada por $\mathbf{K}G$ es el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base la familia $\{e_g\}_{g \in G}$, y un producto definido en los elementos de la base $\mathbf{v} \mathbf{a} e_g \cdot e_h = e_{gh}$, para $g, h \in G$. El elemento unidad del álgebra se denota por e_1 y por definición de base de un espacio vectorial, cada elemento u de $\mathbf{K}G$ se escribe como una combinación lineal formal finita de elementos de G y coeficientes en \mathbf{K} ; es decir, se tiene $u = \sum_g \lambda_g e_g$, con $\lambda_g \in \mathbf{K}$.

Dado un grupo G , la representación regular de G es en realidad un homomorfismo de G en $GL(\mathbf{C}G)$. Se denota por $R_{\mathbf{u}} : G \rightarrow GL(\mathbf{C}G)$ y se define $\mathbf{v} \mathbf{a} R_{\mathbf{u}}(g)(e_h) = e_{gh}$. Respecto a su carácter, es fácil comprobar que se satisface

$$\chi_{R_G}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1, \\ o(G) & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

Ello permite establecer el siguiente resultado respecto a la descomposición de $\mathbf{C}G$ en suma directa de representaciones irreducibles.

Proposición 2.19 Sean V_1, V_2, \dots, V_s representantes de las clases de equivalencia de representaciones irreducibles isomorfas de un grupo G y sea m_i la dimensión de V_i . Entonces se cumple $\mathbf{C}G = V_1^{m_1} \oplus V_2^{m_2} \oplus \dots \oplus V_s^{m_s}$.

Prueba. Para cada $i = 1, \dots, s$ se tiene por definición y el corolario 2.14 la igualdad

$$\begin{aligned} (\chi_{R_G}, \chi_{V_i}) &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi_{R_G}(g) \overline{\chi_{V_i}(g)} \\ &= \frac{1}{o(G)} o(G) \chi_{V_i}(1) = m_i, \end{aligned}$$

la misma que prueba el resultado. ■

Consignamos a modo de observación tres consecuencias importantes que se desprenden de estos resultados.

- El carácter de la representación regular puede expresarse como

$$\chi_{R_G} = \sum_{i=1}^s m_i \chi_{V_i}$$

- Al evaluar dicha igualdad en el elemento neutro de G obtenemos

$$o(G) = \sum_{i=1}^s m_i$$

- Además se cumple $0 = \sum_{i=1}^s m_i \chi_{V_i}(g)$, cuando $g \neq 1$.

Lo expresado en el segundo comentario sirve para detectar todas las representaciones irreducibles de un grupo. Nos dice que, si encontramos una familia de representaciones irreducibles distintas cuya suma de cuadrados de sus correspondientes dimensiones es igual al orden del grupo, entonces esas han de ser todas.

Ejemplo. Al sumar las dimensiones de las tres representaciones irreducibles

conocidas del grupo simétrico \mathbf{S}_3 se tiene $\sum_{i=1}^3 m_i^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6 = o(\mathbf{S}_3)$,

con lo cual queda confirmado que la representación identidad, signo y estándar son las tres únicas representaciones irreducibles de \mathbf{S}_3 .

Como última tarea de este capítulo probaremos que el número de representaciones irreducibles de un grupo finito G es idéntico al número de clases de conjugación de G .

Dado un grupo G , decimos que una función $f: G \rightarrow \mathbf{C}$ es una función de clase si para todo $g, h \in G$ se cumple $f(ghg^{-1}) = f(h)$. Es decir, las

funciones de clase son invariantes por clases de conjugación. En ese sentido, los caracteres son ejemplos de funciones de clase. El hecho de que las funciones de clase sean invariantes por clases de conjugación de G nos permite afirmar que si $\{C_i\}_{i=1}^l$ es la familia de clases de conjugación de G , entonces una función de clase queda determinada por los valores $f(C_i)$ para $i = 1, \dots, l$.

Denotamos por $Class_{\mathbb{C}}(G)$ el conjunto de las funciones de clase $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Es claro que este conjunto es un subespacio del espacio vectorial de funciones de G en \mathbb{C} y su dimensión es igual a l . Es más, este conjunto está provisto del producto interno hermitiano dado por $(m, n) = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} m(g)\overline{n(g)}$, para $m, n \in Class_{\mathbb{C}}(G)$.

Las pruebas de ambas afirmaciones son triviales y están detalladas en [7].

Sea s el número de representaciones irreducibles del grupo G . La familia $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ formada por los caracteres de estas representaciones irreducibles está contenida en $Class_{\mathbb{C}}(G)$. Como consecuencia de las relaciones de ortogonalidad, los χ_i son ortonormales y, en particular, son linealmente independientes. Esto conduce a $s \leq l$. Iremos más lejos al probar que se cumple $s = l$; es decir, la familia $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ forma en realidad una base de $Class_{\mathbb{C}}(G)$.

Lema 2.20 Sea $\phi: G \rightarrow GL(V)$ una representación irreducible de carácter χ y sea $f \in Class_{\mathbb{C}}(G)$. Si definimos la transformación lineal $\phi_f: V \rightarrow V$ via $\phi_f(v) = \sum_{g \in G} f(g)\phi_g(v)$, para todo $v \in V$, entonces se tiene $\phi_f = \frac{o(G)}{\dim(V)} (f, \chi) Id_V$.

Prueba. Demostremos en primer término que ϕ_f respeta la acción de G . Para ello, con $h \in G, v \in V$ se cumple

$$\begin{aligned} \phi_f(\phi_h(v)) &= \sum_{g \in G} f(g)(\phi_g(\phi_h(v))) = \sum_{g \in G} f(g)\phi_{gh}(v) \\ &= \sum_{g \in G} f(hgh^{-1})\phi_{hgh^{-1}h}(v) = \sum_{g \in G} f(g)\phi_{hg}(v) \\ &= \sum_{g \in G} f(g)(\phi_h(\phi_g(v))) = \phi_h \sum_{g \in G} f(g)\phi_g(v) \\ &= \phi_h(\phi_f(v)). \end{aligned}$$

En la tercera igualdad hemos cambiado el índice g por hgh^{-1} en la sumatoria. Las demás igualdades ocurren por ser f función de clase y ϕ_g, ϕ_h transformaciones lineales. Ahora, como V es irreducible, del lema de Schür se infiere $\phi_f = \lambda Id_V$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculamos la traza de ϕ_f y concluimos

$$\begin{aligned} \lambda \dim(V) &= Tr(\lambda Id_V) = Tr(\phi_f) = Tr \sum_{g \in G} f(g)\phi_g \\ &= \sum_{g \in G} f(g)Tr(\phi_g) = \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) = o(G) (f, \chi). \end{aligned}$$

Se sigue de inmediato la igualdad $\lambda = \frac{o(G)}{\dim(V)} (\bar{f}, \chi)$. ■

Proposición 2.21 Sean V_1, V_2, \dots, V_s representantes de las clases de equivalencia de representaciones irreducibles isomorfas de un grupo G y sea χ_i el carácter de V_i . Los caracteres $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ forman una base de $\text{Class}_\mathbb{C}(G)$.

Prueba. La independencia lineal de los χ_i está asegurada por la ortogonalidad de los caracteres. La proposición 2.13 garantiza que los caracteres $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ forman un sistema ortonormal de $\text{Class}_\mathbb{C}(G)$. Para demostrar que los $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ generan $\text{Class}_\mathbb{C}(G)$ bastará verificar que todo elemento de $\text{Class}_\mathbb{C}(G)$ ortogonal a todos los $\{\chi_i\}_{i=1}^s$ es nulo. En efecto, sea $f \in \text{Class}_\mathbb{C}(G)$ tal que $(f, \chi_{V_i}) = 0$, para todo $i = 1, \dots, s$. Por el lema 2.20, la transformación lineal ϕ_f es igual a la función cero para cualquier representación irreducible V . Pero, como toda representación puede expresarse como suma directa de irreducibles, en verdad se cumple $\phi_f = 0$ para cualquier representación V . En particular, si $V = \mathbf{C}G$ es la representación regular de G , se tiene

$$0 = \phi_f(e_1) = \sum_{g \in G} f(g) R_u(g)(e_1) = \sum_{g \in G} f(g) e_g.$$

Pero debido a que $\{e_g\}_{g \in G}$ constituye una base, se sigue $f(g) = 0$, para todo $g \in G$; es decir, se cumple $f = 0$. ■

En el capítulo 1 detallamos las clases de conjugación en los grupos S_4 y A_4 . Es oportuno ahora aplicar los resultados fundamentales acerca de representaciones irreducibles a este caso, a modo de ejemplo.

El número de representaciones irreducibles de S_4 es cinco (pues dicho grupo posee cinco clases de conjugación). Dos de ellas son la representación identidad y la representación signo. Falta determinar cuáles son las otras tres, a las cuales llamaremos por el momento R_3, R_4 y R_5 . En virtud de que los caracteres de las representaciones son constantes por clase de conjugación, basta evaluar dichos caracteres en un representante de cada clase. La tabla de caracteres tendrá la siguiente presentación preliminar

	(1)	(6)	(8)	(3)	(6)
	<i>Id</i>	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4)
Identidad	1	1	1	1	1
Signo	1	-1	1	1	-1
R_3	n_1				
R_4	n_2				
R_5	n_3				

Si nos fijamos en la primera columna, debe cumplirse la igualdad

$$1^2 + 1^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 24.$$

Esta igualdad equivale a $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 22$, que posibilita por ejemplo $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 2$ (dejamos al lector verificar que en verdad ésta es la única

opción). Una representación conocida (que podría ser irreducible o no, eso lo determinaremos en su momento) es la representación permutación (descrita en las páginas 32 y 33), a la cual denotamos por ϕ . Las matrices que se obtienen a partir de dicha representación son:

$$\begin{aligned}
 Id &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \phi_{(1\ 2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \phi_{(1\ 2\ 3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \phi_{(1\ 2)(3\ 4)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y} \\
 \phi_{(1\ 2\ 3\ 4)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Las trazas de dichas matrices nos brindan los caracteres $\chi = (4, 2, 1, 0, 0)$ y verificamos que se cumple $\bar{\chi}\chi = 4^2 + 2^2(6) + 1^2(8) > 24 = o(\mathcal{S}_4)$. Ello nos indica que la representación ϕ no es irreducible. Pero ϕ es suma directa de las representaciones identidad y estándar (descrita en la página 34). La igualdad $\chi_{\text{Permutación}} = \chi_{\text{Identidad}} + \chi_{\text{Estándar}}$ se expresa por

$$(4, 2, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1, 1) + \chi_{\text{Estándar}}.$$

De ello se deduce $\chi_{\text{Estándar}} = (3, 1, 0, -1, 1)$, la cual verifica la relación $3^2 + 1^2(6) + 1^2(3) + 1^2(6) = 24$. Es decir, la representación estándar de \mathcal{S}_4 sí es irreducible.

Si U^j y V denotan las representaciones signo y estándar, respectivamente, la igualdad $\chi_{U^j \otimes V} = \chi_{U^j} \chi_V$ nos permite obtener $\chi_{U^j \otimes V} = (3, -1, 0, -1, 1)$. Al cumplirse $3^2 + 1^2(6) + 1^2(3) + 1^2(6) = 24$, queda demostrado que $U^j \otimes V$ es también una representación irreducible de \mathcal{S}_4 . La siguiente tabla

	(1)	(6)	(8)	(3)	(6)
	<i>Id</i>	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4)
Identidad (<i>U</i>)	1	1	1	1	1
Signo (<i>U^j</i>)	1	-1	1	1	-1
Estándar (<i>V</i>)	3	1	0	-1	-1
<i>V^j</i> = <i>U^j</i> ⊗ <i>V</i>	3	-1	0	-1	1
<i>R₅</i>	<i>n₃</i>				

ofrece ahora mayor información.

La última representación debe ser de dimensión 2 para que la suma de los cuadrados de las dimensiones arroje 24. La descomposición de la representación regular cuyo carácter es $\chi_R = (24, 0, 0, 0, 0)$ se traduce en la igualdad

$R = U \oplus U^j \oplus V^3 \oplus (V^j)^3 \oplus R_5^2$. En términos de caracteres se tiene

$$\chi_{R_5} = \frac{1}{2} (\chi_R - \chi_U - \chi_{U^j} - 3\chi_V - 3\chi_{V^j}).$$

De este modo, obtenemos $\chi_{R_5} = (2, 0, -1, 2, 0)$, que completa la tabla.

Para describir las representaciones del grupo alternate A_4 , subgrupo de S_4 tengamos en cuenta que un homomorfismo de grupos F y H lleva subgrupos de F en subgrupos de H . Por lo tanto, si restringimos las representaciones de S_4 a A_4 , seguirán siendo representaciones de grupos. En tal sentido, suprimimos las clases de conjugación con signo -1 y tenemos

	(1)	(8)	(3)
	<i>Id</i>	(1 2 3)	(1 2)(3 4)
Identidad (U)	1	1	1
Signo (U^j)	1	1	1
Estándar (V)	3	0	-1
$V^j = U^j \otimes V$	3	0	-1
R_5	2	-1	2

como tabla preliminar. Podemos conservar los nombres de las representaciones teniendo en cuenta que están restringidas a A_4 . Se observa en dicha tabla las igualdades $U = U^j$ y $V = V^j$. El criterio de la suma de cuadrados asegura que estas dos representaciones son irreducibles en A_4 , mas R_5 no lo es, pues la suma $2^2 + 1^2(8) + 2^2(3)$ no coincide con 12, el orden del grupo A_4 . Nótese además que según el lema 1.25 y la proposición 1.26, la clase de conjugación $[(1 2 3)]_{S_4}$, por ser de tipo $[1 0 1 0]$, se escinde en dos clases de equivalencia, con cuatro elementos cada una en A_4 . El cálculo de los productos internos $(\chi_{R_5}, U) = (\chi_{R_5}, V) = 0$ indica que la representación R_5 no está contenida en las representaciones irreducibles de A_4 con las que contamos por ahora. Al haber cuatro clases de conjugación, la representación R_5 debe expresarse como la suma directa de dos representaciones irreducibles (llamémoslas X e Y) en el grupo A_4 . Si n_1 y n_2 son las dimensiones respectivas, entonces la igualdad $1^2 + 3^2 + n_1^2 + n_2^2 = 12$ implica $n_1 = n_2 = 1$. La siguiente tabla

	(1)	(3)	(4)	(4)
	<i>Id</i>	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 3 2)
Identidad (U)	1	1	1	1
Estándar (V)	3	-1	0	0

expresa estos hechos de manera más precisa. La relación $(\chi_X, \chi_V) = 0$ se traduce en $\frac{1}{12} (3 - 3\alpha) = 0$, de lo cual se deduce $\alpha = 1$. Por lo explicado en el primer ejemplo de la página 28, las imágenes de X e Y deben ser raíces de la unidad. Podemos comprobar que se cumple $(1 2 3)^2 = (1 3 2)$ y $(1 2 3)^3 = Id$, también se cumple $(1 3 2)^2 = (1 2 3)$ y $(1 3 2)^3 = Id$. Ello descarta $\beta = 1$,

pues de ser así tendríamos $\gamma = 1$ y de ello X sería la identidad. Por lo tanto, β es una raíz cúbica no trivial de 1 y γ es la otra (es cuestión de nombres a cuál llamamos X e Y). Además ello posibilita que la representación adjunta de X sea distinta de X y por ser irreducible, sea precisamente Y . La tabla

	(1) <i>Id</i>	(3) (1 2)(3 4)	(4) (1 2 3)	(4) (1 3 2)
Identidad (U)	1	1	1	1
Estándar (V)	3	-1	0	0
X	1	1	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
Y	1	1	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

completa la información del grupo A_4 .

Resumimos –a modo de conclusión de este capítulo y como entrada al siguiente– los resultados más saltantes en lo que atañe a la representación de un grupo G y, en particular, de los grupos simétricos S_n .

- Toda representación puede expresarse como suma directa de representaciones irreducibles, donde cada una de ellas ocurre en la suma con cierta multiplicidad.
- El número de representaciones irreducibles no isomorfas de S_n coincide con el número de clases de conjugación en S_n .
- Las representaciones quedan determinadas por sus caracteres.
- El orden de un grupo finito coincide con la suma de los cuadrados de las dimensiones de sus representaciones irreducibles.

En el caso de los grupos simétricos, hay una manera de hacer corresponder una representación irreducible a cada clase de conjugación. Los pormenores constituyen el tema del siguiente **capítulo**.

Capítulo 3

Tablas y diagramas de Young

Este capítulo está dedicado a los diagramas de Young. Estos fueron introducidos cerca de 1900 por el inglés Alfred Young en el marco de la combinatoria. En esa misma época Georg Frobenius los utilizó para estudiar los grupos simétricos. Luego de haber reseñado en el capítulo anterior los aspectos fundamentales de la representación de grupos, mostraremos en este capítulo el uso de las tablas y diagramas de Young como una forma de caracterizar las representaciones de los grupos simétricos.

3.1. Particiones y diagramas de Young

En el capítulo 1 introdujimos el concepto de partición y en el capítulo 2 se puso de manifiesto la relación entre las particiones de un número entero positivo n y las representaciones irreducibles del grupo simétrico S_n . Dado un número entero positivo n , en términos intuitivos una partición de n es una manera de descomponer n como suma de enteros positivos. Para ser más precisos, una partición de n es una secuencia de enteros positivos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ que cumple dos condiciones:

- es no creciente, es decir, cumple $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ y
- verifica $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = n$.

Dicha partición se puede denotar por ejemplo por λ .

Ejemplo. La igualdad $24 = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 5 + 5 + 1$ da origen a la partición $\lambda = (5, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$.

Otra manera de denotar una partición es vía $\lambda = (d_1^{a_1}, d_2^{a_2}, \dots, d_s^{a_s})$ donde el entero d_i aparece a_i veces, para $1 \leq i \leq s$. La notación $\lambda \in n$ significa para nosotros que λ es una partición de n .

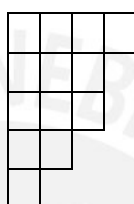
Ejemplo. La partición $\lambda = (5, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$ queda mejor resumida como $\lambda = (5^2, 3^3, 2^2, 1)$.

Para definir las tablas de Young es necesario introducir previamente los diagramas de Young (llamados también diagramas de Ferrers).

Un diagrama de Young o de Ferrers es un arreglo de casillas dispuestas en filas y en columnas de modo que cada fila (a partir de la segunda) tiene una cantidad de casillas menor o igual que la fila anterior.

Sea n el número total de casillas a distribuirse en un diagrama de Young D . Cuando listamos el número de casillas en cada fila de D obtenemos una sucesión finita y no creciente de números cuya suma es n ; es decir, obtenemos una partición de n . Esta partición se conoce como la forma del diagrama de Young D . Recíprocamente, dada una partición λ siempre es posible construir un diagrama de Young con forma λ .

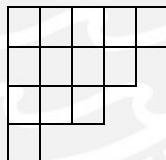
Ejemplo. A la partición $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1)$ del número 13 le corresponde



como diagrama de Young.

Para cada partición λ existe una partición a la que denotamos por λ' , llamada la partición conjugada de λ . El diagrama de forma λ' se obtiene al cambiar las filas por las columnas en el diagrama de Young correspondiente a λ .

Ejemplo. A la partición $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1)$ mostrada antes le corresponde



como diagrama de forma para λ' . La partición conjugada λ' queda descrita por el número de casillas en cada columna del diagrama de Young de λ . En este caso se tiene $\lambda' = (5, 4, 3, 1)$.

3.2. Tablas de Young

Un llenado del diagrama de Young D consiste en asignar un número entero positivo a cada casilla (los números no necesariamente serán distintos). Cuando los números asignados a cada casilla son distintos, se emplea usualmente el término enumeración (o tablero). Una tabla de Young (llamada también tabla de Young semiestándar) es un llenado de un diagrama de Young en el cual los números colocados en cada fila individual forman una sucesión no decreciente; y los números colocados en cada columna forman una sucesión estrictamente creciente.

Una tabla de Young estándar asociada a una partición de n es una tabla de Young donde cada número desde 1 hasta n aparece una única vez. En general, llamaremos entradas a los números con los cuales rellenamos las casillas de un diagrama de Young.

Ejemplo. Para la partición $(7, 4, 4, 1)$ de 16 exhibimos a

1	2	3	3	4	5	5
2	3	4	4			
3	4	5	6			
5						

como tabla de Young y a

1	3	7	10	13	15	16
2	5	8	12			
4	6	11	14			
9						

como tabla de Young estándar.

Notemos que para esta misma partición $(7, 4, 4, 1)$, la partición conjugada correspondiente es $(4, 3, 3, 3, 1, 1, 1)$. En general cualquier llenado T de un diagrama de Young determina el llenado correspondiente a la partición conjugada. Este llenado se llama transpuesto de T y se denota por T^* . Es importante notar que el transpuesto de una tabla de Young no necesariamente es una tabla de Young, pero el transpuesto de una tabla de Young estándar sí resulta una tabla de Young estándar.

Vamos a definir varias relaciones de comparación entre dos particiones. Dada una partición, digamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, se sabe por definición que los λ_i son enteros positivos. Para que las cosas funcionen bien cuando comparemos dos particiones será necesario que haya la misma cantidad de números en las secuencias que las representan. Esto se logra agregando artificialmente uno o más ceros a continuación del último entero positivo en la partición que tenga menos términos. Por ejemplo, dadas las particiones $\lambda = (6, 5, 3, 3)$ y $\mu = (4, 4, 3, 2, 1, 1)$, escribiremos $\lambda = (6, 5, 3, 3, 0, 0)$ con la finalidad de que λ y μ tengan la misma cantidad de entradas. Sin ánimo de inventar cosas nuevas y simplemente por claridad, llamaremos a esta acción la **convención de los ceros**.

Se define una relación de inclusión entre particiones (y por tanto, entre diagramas de Young) del siguiente modo: si dos diagramas de Young representan a las particiones $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h)$, decimos que μ está contenida en λ y lo denotamos por $\mu \subset \lambda$, si $\mu_i \leq \lambda_i$ para todo i . En tal caso, diremos que el diagrama de Young de μ está contenido en el diagrama de Young de λ .

Ejemplo. Dadas $\lambda = (7, 7, 6, 5, 3)$ y $\mu = (5, 5, 2)$, se cumple $\mu \subset \lambda$.

Ejemplo. Dadas $\lambda = (6, 5, 3)$ y $\mu = (5, 4, 4, 3, 2)$, no se cumple $\mu \subset \lambda$, pues escribimos $\lambda = (6, 5, 3, 0, 0)$ y observamos que no se cumple $\mu_3 \leq \lambda_3$. Por cierto, tampoco se cumple $\lambda \subset \mu$, pues no se verifica $\lambda_1 \leq \mu_1$.

3.3. Orden en las particiones

Además de la inclusión ya expuesta, existen otras relaciones de comparación entre las particiones que pueden también extenderse a los diagramas y tablas de Young. Ellas permitirán más adelante establecer resultados útiles en la construcción de las representaciones irreducibles de los grupos simétricos. Consideremos dos particiones $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$, donde podemos asumir $p = q$ luego de aplicar la convención de los ceros (de ser ello necesario).

Decimos que μ es lexicográficamente menor o igual que λ , lo cual denotamos por $\mu \leq \lambda$, cuando $\mu = \lambda$ o cuando $\mu_i < \lambda_i$ para el primer valor de i tal que $\mu_i \neq \lambda_i$.

Ejemplo. Dadas $\lambda = (7, 7, 6, 5, 3)$ y $\mu = (7, 7, 6, 4, 4)$, se cumple $\mu \leq \lambda$, pues λ y μ difieren recién en la cuarta componente y para ella se tiene $4 < 5$.

Ejemplo. Dadas $\lambda = (7, 5, 3)$ y $\mu = (6, 6, 5, 4, 2)$, se cumple que $\mu \leq \lambda$, pues estas particiones difieren en la primera componente y ahí se tiene $6 < 7$.

Decimos que λ domina a μ (o que μ es dominada por λ), lo cual denotamos por $\mu \preceq \lambda$, cuando se verifica $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i$, para todo i . Si $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i < \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i$, para todo i , diremos que λ domina estrictamente a μ y lo denotamos por $\mu \prec \lambda$.

Ejemplo. Dadas $\lambda = (6, 6, 5)$ y $\mu = (6, 6, 3)$, se cumple $\mu \preceq \lambda$, pues se tiene $6 \leq 6$, $6 + 6 \leq 6 + 6$ y $6 + 6 + 3 \leq 6 + 6 + 5$. No se cumple en cambio la relación $\mu \prec \lambda$.

Ejemplo. Dadas $\lambda = (4, 3, 1)$ y $\mu = (4, 3, 2)$, se verifica $\mu \preceq \lambda$, pues se tiene $4 \leq 4$ y $4 + 3 \leq 4 + 3$, pero no se cumple $4 + 3 + 2 \leq 4 + 3 + 1$.

Cabe hacer las siguientes observaciones con respecto a estas relaciones.

- El orden lexicográfico es un orden total; es decir dadas dos particiones, siempre una de ellas es menor o igual lexicográficamente que la otra.
- La inclusión no es un orden total. Por ejemplo, dadas $\lambda = (7, 5)$ y $\mu = (8, 4)$, no se cumple $\mu \subset \lambda$ ni $\lambda \subset \mu$.
- La dominancia no es un orden total, pues por ejemplo las particiones $\lambda = (5, 3, 1)$ y $\mu = (6, 1, 1)$ no son comparables en el sentido de que una domine a la otra. Sin embargo, la dominancia sí es claramente transitiva.

- Es obvio que $\mu \subset \lambda$ implica $\mu \leq \lambda$. El recíproco no es cierto, pues por ejemplo se cumple $(5, 3, 2) \leq (6, 4, 1)$, pero en cambio no se verifica $(5, 3, 2) \subset (6, 4, 1)$.

- Si $\mu \subset \lambda$, entonces se tiene $\mu \not\leq \lambda$. Esto se verifica a partir de la propiedad

$$(a \leq b \wedge c \leq d) \text{ implica } a + c \leq b + d$$

de los números reales (en verdad basta que se cumpla en los números enteros positivos). El recíproco no es cierto: por ejemplo se tiene $(5, 3) \not\leq (6, 2)$, mas no se cumple $(5, 3) \subset (6, 2)$.

- Si $\mu \not\leq \lambda$, entonces se satisface $\mu \leq \lambda$. El recíproco no es cierto, pues por ejemplo se tiene $(4, 5) \leq (6, 1)$, pero no se verifica $(4, 5) \not\subset (6, 1)$.

En lo que sigue detallaremos una correspondencia entre representaciones irreducibles y clases de conjugación para los grupos simétricos S_n a través de los diagramas de Young.

3.4. La acción de S_n en diagramas y tablas de Young

Sea n un número entero positivo. Recordemos que S_n es el grupo de las funciones biyectivas (permutaciones) de $[n]$ en sí mismo, donde $[n]$ denota al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. La operación en el grupo es la composición de funciones, de manera que S_n actúa sobre $[n]$ mediante la igualdad

$$(\sigma \cdot \tau)(i) = (\tau \circ \sigma)(i) = \tau(\sigma(i)) .$$

Ésta es la convención que venimos manejando desde el principio.

Una enumeración de un diagrama de Young T con n casillas es un llenado de dichas casillas con números enteros de 1 a n sin repetir ninguno. Si no hay lugar a confusión, denotamos por T a un diagrama de Young enumerado. Para resaltar la partición λ representada por dicho diagrama de Young, se puede denotar por T_λ al diagrama enumerado, al cual también se le llama tablero. La acción de S_n que consideraremos sobre el conjunto de estas enumeraciones es la siguiente. Dada una permutación σ y una enumeración T , denotamos como $\sigma \cdot T$ a la tabla que tiene la misma forma de T y cuya enumeración coloca $\sigma^{-1}(i)$ en la misma casilla donde aparece i en T .

Ejemplo. Para $\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{matrix} \Sigma$ en S_6 y $T = \begin{matrix} \boxed{3} & \boxed{6} \\ \boxed{4} & \boxed{2} \\ \boxed{1} \\ \boxed{5} \end{matrix}$, se tiene

$$\sigma \cdot T = \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{5} & \boxed{2} \\ \boxed{4} \\ \boxed{6} \end{matrix} .$$

3.5. Subgrupos de Young

Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de n , donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$, y T una enumeración de forma λ , el subgrupo estabilizador de filas, denotado por $R(T)$, es el conjunto de todas las permutaciones de S_n que asignan a los elementos de cada fila elementos de esa misma fila. Análogamente, el subgrupo estabilizador de columnas, denotado por $C(T)$, es el conjunto de todas las permutaciones de S_n que asignan a los elementos de cada columna elementos de esa misma columna. Los conjuntos $R(T)$ y $C(T)$ son subgrupos de S_n y se denominan subgrupos de Young para T .

Ejemplo. Dada $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 7 & 1 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$, hallamos el subgrupo $R(T)$ en S_8 como sigue.

- Los elementos de S_8 que preservan la primera fila son los elementos que permutan el conjunto $\{4, 5, 8\}$ y dejan fijos los demás. Éstos pueden identificarse con el grupo simétrico $S_{\{4,5,8\}}$, es decir, dichos elementos son

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 8 \end{array} \begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 4 \end{array} \begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 8 \\ 8 & 4 & 5 \end{array}$$

- De igual modo, los elementos de S_8 que preservan la segunda fila pueden identificarse con $S_{\{2,3\}}$ y son

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & \\ 2 & 3 & \end{array} \begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & \\ 3 & 2 & \end{array}$$

- Análogamente, los elementos de S_8 que preservan la tercera fila son

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 7 & 1 & \\ 7 & 1 & \end{array} \begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 7 & 1 & \\ 1 & 7 & \end{array}$$

- Finalmente, el elemento que preserva la cuarta fila es $\begin{array}{c} \Sigma \\ 6 \\ 6 \end{array}$.

Un elemento de $R(T)$ se constituye escogiendo un miembro de cada colección. De esta manera, si por ejemplo escogemos

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 4 \end{array} \begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & \\ 2 & 3 & \end{array} \begin{array}{ccc} \cdot & \Sigma & \cdot \\ \cdot & \Sigma & \cdot \end{array} \begin{array}{ccc} 7 & 1 & \\ 1 & 7 & \end{array} \begin{array}{c} \Sigma \\ 6 \end{array}$$

y acoplamos estos elementos como $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{array}$ en S_8 ,

tenemos un elemento de $R(T)$. Esto nos lleva a concluir que $R(T)$ es idéntico al producto cartesiano $S_{\{4,5,8\}} \times S_{\{2,3\}} \times S_{\{1,7\}} \times S_{\{6\}}$.

Ejemplo. Para T considerada en el ejemplo anterior, mediante un proceso análogo con las columnas, concluimos que el subgrupo $C(T)$ es igual al producto cartesiano $S_{\{2,6,7,8\}} \times S_{\{1,3,4\}} \times S_{\{5\}}$.

Es oportuno mencionar (lo demostraremos más adelante) que los subgrupos de Young son compatibles con la acción de S_n sobre las enumeraciones, en el sentido que para todo σ en S_n se cumple

$$R(\sigma \cdot T) = \sigma^{-1} \cdot R(T) \cdot \sigma \text{ y } C(\sigma \cdot T) = \sigma^{-1} \cdot C(T) \cdot \sigma.$$

La siguiente proposición es fundamental para la posterior construcción de las representaciones irreducibles de S_n a través de diagramas de Young. Se explica la prueba presentada en [2] y se ilustra el teorema con ejemplos.

Proposición 3.1 *Dadas T_λ y T_μ dos enumeraciones con formas*

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \text{ y } \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k),$$

respectivamente, tales que λ no domina estrictamente a μ . Entonces una y sólo una de las siguientes propiedades es cierta:

1. *existen dos números enteros positivos distintos (digamos i y j) que aparecen en alguna columna de T_λ y se repiten en una fila de T_μ , o bien*
2. *se cumple $\lambda = \mu$ y existe algún σ en $R(T_\mu)$ y algún τ en $C(T_\lambda)$ con los cuales se tiene $\sigma \cdot T_\mu = \tau \cdot T_\lambda$.*

Prueba. Supongamos que la propiedad 1 no se satisfaga. En tal caso las entradas de la primera fila de T_μ deben aparecer en columnas diferentes en T_λ , por lo que se tiene $\lambda_1 \geq \mu_1$ y existe un τ_1 en $C(T_\lambda)$ tal que las entradas de la primera fila de T_μ ocurren en la primera fila de $\tau_1 \cdot T_\lambda$. Asimismo, las entradas de la segunda fila de T_μ deben aparecer en diferentes columnas de T_λ y también en diferentes columnas de $\tau_1 \cdot T_\lambda$ (dado que se cumple $C(\tau_1 \cdot T_\lambda) = C(T_\lambda)$). De ello se tiene $\lambda_2 \geq \mu_2$ y existe un τ_2 en $C(T_\lambda)$ tal que las entradas que aparecen en la segunda fila de T_μ aparecen en la segunda fila de $\tau_2 \cdot \tau_1 \cdot T_\lambda$. Continuando de esta manera, existirán elementos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ en $C(T)$ tales que las entradas de las primeras k filas de T_μ ocurren en las primeras k filas de $\tau_k \cdot \tau_{k-1} \cdot \dots \cdot \tau_1 \cdot T_\lambda$. Además como T_λ y $\tau_k \cdot \tau_{k-1} \cdot \dots \cdot \tau_1 \cdot T_\lambda$ tienen la misma estructura, obligatoriamente se tiene

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k,$$

para todo k , es decir, se tiene $\mu \triangleright \lambda$. Como hemos asumido que λ no domina estrictamente a μ , se concluye que las particiones son iguales.

Si k es el número de filas de λ y consideramos $\tau = \tau_k \cdot \tau_{k-1} \cdot \dots \cdot \tau_1$, vemos que $\tau \cdot T_\lambda$ y T_μ tienen las mismas entradas en cada fila. Esto significa que barajando las columnas mediante un σ en $R(T_\mu)$ se logra $\sigma \cdot T_\mu = \tau \cdot T_\lambda$. ■

Ejemplo. Para $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline \end{array}$ y $T_\mu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$, dos números i y j que verifican la conclusión de la proposición 3.1 son por ejemplo $i = 1$ y $j = 5$.

Ejemplo. Dadas $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$ y $T_\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}$, no se cumple la afirmación 1 de la proposición 3.1. Pero se observa $\lambda = \mu = (2, 2)$. Además si consideramos $\sigma = (1\ 4) \in R(T_\mu)$ y $\tau = (4\ 3) \in C(T_\lambda)$ se cumple

$$\sigma \cdot T_\mu = (1\ 4) \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \text{ y}$$

$$\tau \cdot T_\lambda = (4\ 3) \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Vamos a complementar las relaciones de orden entre diagramas y tablas de Young expuestas con una relación de orden estricto entre enumeraciones. Dadas dos enumeraciones T_λ y T_μ , con forma λ y μ , respectivamente, y con n casillas cada una, decimos que T_μ es mayor que T_λ , lo cual denotamos por $T_\mu > T_\lambda$, si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. la forma μ es lexicográficamente mayor que la forma λ , o bien
2. se da $\mu = \lambda$ y la entrada de mayor valor que se ubica en casillas diferentes ocurre en T_μ en un número de columna menor al correspondiente en T_λ , o bien
3. se tiene $\mu = \lambda$ y la entrada de mayor valor que se ubica en casillas diferentes ocurre en T_μ y en T_λ en el mismo número de columna, pero dicho valor ocurre en T_μ en un número de fila mayor al correspondiente en T_λ .

Es útil ilustrar esta relación con algunos ejemplos.

Ejemplo Dadas $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 6 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}$ y $T_\mu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 6 & 3 & \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array}$, se cumple $T_\mu > T_\lambda$,

pues las formas correspondientes a dichas enumeraciones son $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ y $\mu = (3, 2, 2)$, y se observa que μ es lexicográficamente mayor que λ .

Ejemplo Dadas $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 8 & \\ \hline 1 & 9 & 10 & \\ \hline 12 & 11 & & \\ \hline \end{array}$ y $T_\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & 8 & \\ \hline 11 & 10 & 9 & \\ \hline 12 & 1 & & \\ \hline \end{array}$, se cumple

$T_\mu > T_\lambda$ porque se tiene $\lambda = \mu = (4, 3, 3, 2)$ y la entrada de mayor valor ubicada en casillas diferentes (en este caso, el número 11) ocurre en la primera columna de T_μ , mientras ocurre recién en la segunda columna de T_λ .

Ejemplo Las $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ y $T_\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$ tienen forma $\lambda = \mu = (2, 1)$. La mayor entrada que aparece en casillas distintas es 2, y ésta ocurre en la primera columna para ambas enumeraciones. Puesto que dicha entrada ocurre en la segunda fila de T_λ y en la primera fila de T_μ , se concluye $T_\lambda > T_\mu$.

Ejemplo Consideremos todas las tablas de Young estándares de forma $(3, 2)$:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad U = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad V = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array},$$

$$W = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad X = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

Puesto que son tablas que tienen la misma forma, nos centramos en la entrada de mayor valor que aparece en casillas distintas para comparar dos de ellas. Son correctas las siguientes relaciones: $T > W$, $W > V$, $V > U$, $U > X$. La relación “**mayor que**” por cierto no es reflexiva, pero sí es transitiva.

Los siguientes corolarios a la proposición 3.1 muestran dos propiedades importantes al comparar tablas de Young estándares.

Corolario 3.2 *Si T es una tabla de Young estándar, entonces para $\sigma \in R(T)$, $\tau \in C(T)$, se tiene $\sigma \cdot T \geq T$ y $T \geq \tau \cdot T$.*

Prueba. Por definición, si T es una tabla de Young estándar, entonces los llenados T , σT y τT tienen la misma forma, y tanto σT como τT siguen siendo enumeraciones (aunque no necesariamente tablas de Young estándares). La mayor entrada movida por σ es también el mayor número que no está en la misma casilla en T y σT . Como T es tabla de Young estándar, la permutación σ mueve dicha entrada a la izquierda, de modo que se cumple $\sigma \not\leq T$. El otro resultado se demuestra de manera similar, pues la mayor entrada de T movida por τ es movida hacia arriba por τ . Es decir, se cumple $\not\leq \tau \cdot T$, y con ello quedan demostradas las dos relaciones. ■

Corolario 3.3 *Si T_λ y T_μ son tablas de Young estándares que cumplen $T_\mu > T_\lambda$, entonces existen dos números enteros positivos distintos (digamos i y j) que aparecen en alguna columna de T_λ y se repiten en una fila de T_μ .*

Prueba. Como $T_\mu > T_\lambda$, entonces λ no domina estrictamente a μ . Si no existe el par de números enteros sugeridos por el enunciado, caemos en el caso 2 de la proposición 3.1. En virtud de ello se tiene $\sigma \cdot T_\mu = \tau \cdot T_\lambda$ para algún σ en $R(T_\mu)$ y τ en $C(T_\lambda)$; pero como T_μ y T_λ son tablas de Young estándares, por el corolario 3.2 se cumple $\tau \cdot T_\lambda \leq T_\lambda$ y $\sigma \cdot T_\mu \geq T_\mu$. Es decir, se obtiene $T_\mu \sigma \not\leq \tau \cdot T_\lambda \leq T_\lambda$, lo cual contradice la hipótesis $T_\mu > T_\lambda$. Queda así corroborada la afirmación. ■

3.6. Tabloides y simetrizadores de Young

Consideremos enumeraciones T y T^j con n casillas. Decimos que T y T^j son equivalentes si las correspondientes filas tienen las mismas entradas (aunque no necesariamente en el mismo orden).

Ejemplo. Las enumeraciones

6	2	7	12
1	8	3	
5	11	9	
10	4		

y

2	12	7	6
3	1	8	
9	5	11	
10	4		

son equivalentes.

Es evidente que esta relación es de equivalencia, y por lo tanto determina clases de equivalencia en el conjunto de los diagramas de Young enumerados. La clase de equivalencia de T se denomina tabloide determinado por T y se denota por $\{T\}$. Es claro también que el grupo simétrico S_n preserva dicha relación de equivalencia, es decir, dadas dos enumeraciones T y T^j equivalentes y $\sigma \in S_n$, las enumeraciones $\sigma \cdot T$ y $\sigma \cdot T^j$ son también equivalentes.

Esta relación se expresa simbólicamente mediante los subgrupos de Young estabilizadores de filas $R(T)$. En otras palabras, podemos afirmar que T y T^j son equivalentes (es decir, se cumple $\{T\} = \{T^j\}$) cuando existe un $\sigma \in R(T)$ tal que se tiene $T^j = \sigma \cdot T$. Queda implícito en la definición que dos tablas equivalentes deben representar una misma partición de n , es decir, deben tener la misma forma. En tal sentido, dada una partición λ , podemos denotar por $\{T\}_\lambda$ al conjunto de todos los tabloides de tipo λ . Para enfatizar la relación de equivalencia, los tabloides se suelen escribir como tablas en las que borramos las barras verticales.

Por ejemplo, para $T =$

3	5	8
6	1	
2	7	
4		

, se tiene $\{T\} =$

3	5	8
6	1	
2	7	
4		

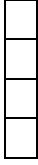
. El tabloide $\{T\}$ podría haberse escrito también cual

8	3	5
7	2	
4		

Por consiguiente, un tabloide de tipo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ puede identificarse con una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en r partes tal que la i -ésima parte tiene λ_i elementos. El grupo simétrico S_n actúa también en el conjunto de tabloides según la fórmula $\sigma \cdot \{T\} = \{\sigma \cdot T\}$. Con esta acción (bien definida por cierto) la órbita de $\{T\}$ es isomorfa al conjunto de clases laterales a izquierda $S_n/R(T)$. Asimismo el número de tabloides de tipo λ es $\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!}$.


Los siguientes ejemplos ilustran estas ideas.

Ejemplo. En el caso de la partición $\lambda = (n) = [n^1]$, el conjunto $\{T\}_{[n^1]}$ está formado por el tabloide $\overline{1 \ 2 \ \dots \ n}$. La igualdad $\frac{n!}{n!} = 1$ confirma que existe un único tabloide de tipo λ .

Ejemplo. La partición $\lambda = (1, 1, \dots, 1) = [1^n]$ se representa mediante un diagrama de Young similar a . En este caso, cada enumeración de forma λ

es equivalente solo consigo misma, es decir, cada tabloide consta de una única tabla vertical. El número de tabloides de esta forma es

$$\frac{n!}{1!1! \dots 1!} = n!.$$

Ejemplo. El diagrama de Young  es un ejemplo representativo de la

partición $\lambda = (n-1, 1)$. El número de tabloides de tipo λ es $\frac{n!}{(n-1)!1!} = n$. En este caso, cada tabloide diferente queda determinado por el número colocado en la única casilla de la segunda fila.

Ejemplo. Consideremos la partición $\lambda = (2, 2) = [2^2]$ de $n = 4$. El número de tabloides de tipo λ en este caso es $\frac{4!}{2!2!} = 6$. Dichos tabloides son

$$\overline{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array}}, \overline{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}}.$$

Es también conveniente establecer relaciones de orden entre los tabloides. Para ello contamos las filas de arriba a abajo. En tal sentido, escribimos $\{T_1\} < \{T_2\}$ si para algún i se cumple lo siguiente:

- el número de la fila que contiene a i en $\{T_1\}$ es menor que el número de la fila que contiene a i en $\{T_2\}$, y
- para todo $j > i$, j está en la misma fila en $\{T_1\}$ y $\{T_2\}$.

Ejemplo. Se verifica $\overline{\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{array}} < \overline{\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}}$, pues el elemento $i = 2$ está en la primera fila del primer tabloide y, en la segunda fila del segundo tabloide; y cada uno de los elementos mayores que 2, es decir, $j = 3$ y $j = 4$ está en la misma fila en ambos tabloides.

No es difícil convencerse de que la relación $<$ entre tabloides es un orden total. Dicho orden también puede definirse de manera análoga en referencia a las columnas.

Definiremos a continuación un orden parcial entre tabloides. Para tal efecto, dada una enumeración T asociada a una partición de n , para cada i desde 1 hasta n , denotamos por $m_{i,r}(T)$ a la cantidad de elementos menores o iguales a i en las primeras r filas de T . Dadas dos enumeraciones T_1 y T_2 , escribimos $\{T_1\} \leq \{T_2\}$ si se cumple $m_{i,r}(T_1) \leq m_{i,r}(T_2)$, para todo i, r .

Ejemplo. Consideremos para $n = 7$ la partición $\lambda = (3, 2, 2)$ y los diagramas de Young enumerados

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 7 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array}.$$

Los números $m_{i,r}$ correspondientes a cada enumeración pueden disponerse en matrices de orden 7×3 . Al efectuar los cálculos obtenemos

$$r(T_1)_{7 \times 3} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 2 & 4 \\ \hline 6 & 3 & 5 \\ \hline 7 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad [m_{i,r}(T_2)]_{7 \times 3} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 3 & 5 \\ \hline 6 & 3 & 5 \\ \hline 7 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

Según lo convenido, se tiene $\{T_1\} \leq \{T_2\}$.

Ejemplo. Sea la partición $\lambda = (3, 2)$ de $n = 5$ y los diagramas de Young enumerados

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

Las matrices de orden 5×2 correspondientes a cada enumeración resultan

$$[m_{i,r}(T_1)]_{5 \times 2} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad [m_{i,r}(T_2)]_{5 \times 2} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

Estas matrices muestran que no se cumple $\{T_1\} \leq \{T_2\}$ ni $\{T_2\} \leq \{T_1\}$, lo cual deja en claro que el orden \leq es parcial.

Ejemplo. Para complementar el ejemplo anterior procederemos a mostrar cómo se ordenan los tabloides que tienen forma $\lambda = (3, 2)$. El número de estos

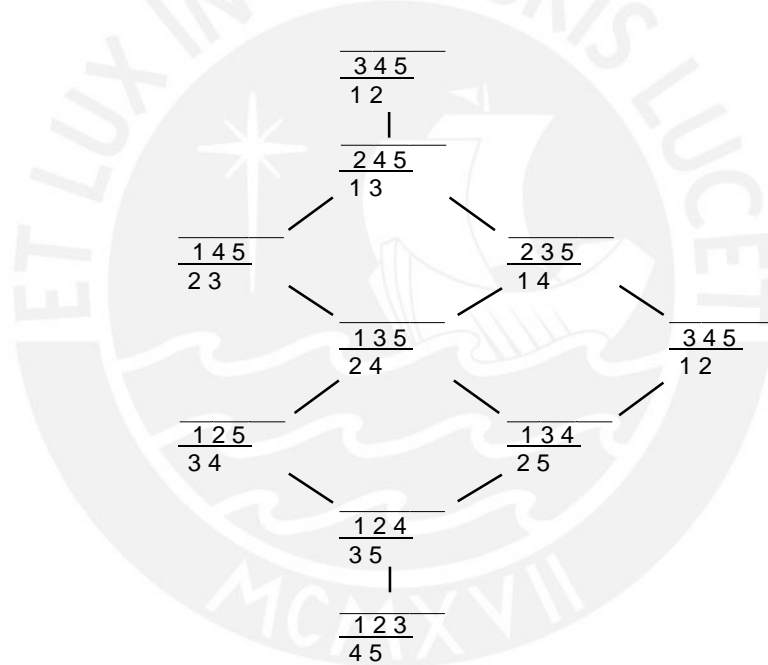
es $\frac{5!}{3!2!} = 10$. Tales tabloides son

$$\frac{3\ 4\ 5}{1\ 2}, \frac{2\ 4\ 5}{1\ 3}, \frac{2\ 3\ 5}{1\ 4}, \frac{2\ 3\ 4}{1\ 5},$$

$$\frac{1\ 4\ 5}{2\ 3}, \frac{1\ 3\ 5}{2\ 4}, \frac{1\ 3\ 4}{2\ 5}, \frac{1\ 2\ 5}{3\ 4},$$

$$\frac{1\ 2\ 4}{3\ 5} \text{ y } \frac{1\ 2\ 3}{4\ 5}.$$

Luego de efectuar los cálculos de las matrices correspondientes, el diagrama (consultado en [6])



muestra cómo se ordenan dichos tabloides.

Ejemplo. Consideremos la partición $\lambda = (3\ 2\ 1)$, el diagrama de Young

enumerado $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 3 \\ \hline 4 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$ y la transposición $(1\ 3)$.

De este modo, se tiene $(1\ 3) \cdot T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 1 \\ \hline 4 & 3 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$. Al calcular las matrices $m_{i,r}(T_\lambda)$

y $m_{i,r}((1\ 3) \cdot T_\lambda)$, resultan las igualdades

$$[m_{i,r}(T_\lambda)]_{6 \times 3} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad [m_{i,r}((1\ 3) \cdot T_\lambda)]_{6 \times 3} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} .$$

De ello, los tabloides respectivos cumplen la relación $\{T_\lambda\} \leq \{(1\ 3) \cdot T_\lambda\}$

Ejemplo. Sea T una enumeración asociada a una partición n . Consideremos $w < x$ para w y x en $\{1, \dots, n\}$, con w en la a -ésima fila de T y x en la b -ésima fila de T . Recordemos que la transposición $(w\ x)$ intercambia las posiciones de w y x . Al comparar las enumeraciones T y $(w\ x) \cdot T$ deducimos que se cumple

$$m_{i,r}((w\ x) \cdot T) - m_{i,r}(T) = \begin{array}{l} 1 \quad \text{si } b \leq r < a \text{ y } w \leq i < x, \\ -1 \quad \text{si } a \leq r < b \text{ y } w \leq i < x, \\ 0 \quad \text{en otro caso.} \end{array}$$

Si nos fijamos en el primer caso, podemos concluir en particular que, si $w < x$ y w está en alguna fila por debajo de la fila donde está x , (w en la fila a y x en la fila b , con $b < a$, entonces se da $\{T\} \leq \{(w\ x) \cdot T\}$. En particular, si $x - 1$ se ubica en alguna fila por debajo de la fila que contiene a x en una enumeración T de forma λ , se cumple $\{T\} \leq \{(x - 1\ x) \cdot T\}$. La siguiente proposición establece además que $\{T\}$ y $\{(x - 1\ x) \cdot T\}$ son inmediatamente adyacentes bajo el orden \leq , resultado que será de utilidad más adelante.

Proposición 3.4 *Dada una enumeración T de forma λ y x un número entero mayor que 1, con $x - 1$ ubicado en alguna fila por debajo de la fila que contiene a x en T , entonces no existe una enumeración T^j de forma λ con $\{T^j\}$ distinto de $\{T\}$ y $\{(x - 1\ x) \cdot T\}$ que cumpla $\{T\} \leq \{T^j\} \leq \{(x - 1\ x) \cdot T\}$.*

Prueba. Sea T cualquier tabla, con \bar{i} situado en la \bar{r} -ésima fila de T . Notemos primero que la diferencia $m_{i,r}(T) - m_{i-1,r}(T)$ cuenta el número de entradas iguales a \bar{i} en las primeras r filas de T , y este número es 0 para todo $r < \bar{r}$ y 1 para todo $r \geq \bar{r}$.

Supongamos ahora que $x - 1$ se ubica en alguna fila por debajo de la fila donde se ubica x en una enumeración T^j y $\{T\} \leq \{T^j\} \leq \{(x - 1\ x) \cdot T\}$. Por lo observado en el ejemplo anterior tenemos $m_{i,r}(T) = m_{i,r}((x - 1\ x) \cdot T)$, para $i \neq x - 1$. De ello se deduce $m_{i,r}(T^j) = m_{i,r}(T)$, para $i \neq x - 1$ y también se cumple

$$m_{i,r}(T) - m_{i-1,r}(T) = m_{i,r}(T^j) - m_{i-1,r}(T^j),$$

si i es distinto de x o de $x - 1$. Por lo expresado al inicio de la demostración, todas las entradas, excepto x y $x - 1$ aparecen en el mismo lugar en T y T^j , pero al tener ambas la forma λ , ello significa $\{T^j\} = \{T\}$ o $\{T^j\} = \{(x - 1\ x) \cdot T\}$, lo que culmina la prueba. ■

Para avanzar, es el momento de retomar las representaciones de los grupos, estudiadas en el capítulo 2. Allí presentamos la noción de álgebra de grupo, la cual será ampliada con el concepto de módulo sobre un álgebra de grupo. Existen dos maneras de concebir una representación de un grupo G . En la primera pensamos la representación como una acción de G en un espacio vectorial V . La segunda forma de definir una representación de G en un espacio vectorial V es vía un homomorfismo de grupos G y $GL(V)$, donde éste último denota al grupo de transformaciones lineales invertibles de V en sí mismo. La primera forma conduce al concepto de módulo sobre G , y la segunda se relaciona con el concepto de representación. A través de las proposiciones 2.1 y 2.2 se demostró que ambos procedimientos son equivalentes. En esta ocasión, y con la finalidad de arribar al concepto fundamental de esta parte, usaremos más la primera forma y ampliaremos las ideas presentadas en las páginas 25 y 26.

En tal sentido, si consideramos un cuerpo K , un álgebra A sobre K y un espacio vectorial V sobre K , una representación de A en V es un morfismo de álgebras A en $GL(V)$. Una representación de A en V origina una acción de A en V . En efecto, si $\phi : A \rightarrow GL(V)$ es una representación de A en V , ésta induce una función de $A \times V$ en V que a cada par $(a, v) \in A \times V$ le asigna un elemento denotado por av y definido por $av = \phi(a)(v)$. Dicha función es una acción. Algunos ejemplos importantes de álgebras son presentados a continuación.

Ejemplo. Dado un cuerpo K , sea $A = K$. Como A tiene la estructura de anillo con unidad y es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre K , se concluye que A es un álgebra sobre K , a la cual se suele llamar álgebra regular.

Ejemplo. Sea K un cuerpo y n un entero positivo, y consideremos A el conjunto de matrices de orden $n \times n$ con entradas en K . El álgebra lineal elemental establece que A provisto de las operaciones usuales de adición y multiplicación de matrices y multiplicación de escalares por matrices es un álgebra sobre K .

Ejemplo. Dado un grupo G , consideremos el espacio vectorial V denotado por $K[G]$ que tiene como base la familia $\{e_g\}_{g \in G}$ de vectores indexados por los elementos de G . Definimos el producto en los elementos de la base vía $e_g e_h = e_{gh}$, para g y h en G . Por linealidad, cada elemento u de $K[G]$ se escribe como una combinación lineal formal finita de elementos de G y coeficientes en K ; es decir, se tiene $u = \sum_g \lambda_g e_g$, con $\lambda_g \in K$, $g \in G$. Con este

producto el espacio vectorial $K[G]$ se convierte en un álgebra sobre K , llamada el álgebra de grupo de G . El elemento unidad del álgebra se denota por e_1 .

Ejemplo. Como caso particular del ejemplo anterior se tiene el álgebra de grupo de S_n sobre el cuerpo complejo \mathbb{C} , que se denota por $\mathbb{C}[S_n]$ y está formada por las combinaciones lineales $\sum_{\sigma} x_{\sigma} e_{\sigma}$ con $\sigma \in S_n$ y $x_{\sigma} \in \mathbb{C}$, donde la multiplicación en el álgebra es la composición de permutaciones en S_n . En

tal sentido, y de acuerdo con la convención establecida en la página 2, para σ y τ en S_n definimos la multiplicación en $\mathbf{C}[S_n]$ vía $e_\sigma \cdot e_\tau = e_{\sigma\tau} = e_{\tau \circ \sigma}$.

Dada A un álgebra de grupo G sobre un cuerpo \mathbf{K} y $f: G \rightarrow U(A)$ un homomorfismo del grupo G al grupo $U(A)$ formado por los elementos invertibles de A , una importante propiedad universal del álgebra de grupo asegura la existencia de un único homomorfismo $\bar{f}: \mathbf{K}[G] \rightarrow A$ que extiende a f .

Estamos ya en condiciones de definir otro concepto clave en la exposición. Dada una enumeración T de un diagrama de Young con n casillas, con enteros de 1 a n sin repetir ningún número, el simetrizador de Young, denotado por b_T , es el elemento de $\mathbf{C}[S_n]$ que se define mediante la igualdad

$$b_T = \sum_{\tau \in C(T)} \text{sgn}(\tau) \tau.$$

De la definición anterior se concluye una propiedad elemental del simetrizador de Young. Para $\sigma \in C(T)$, se cumple $\sigma b_T = \text{sgn}(\sigma) b_T$. En efecto, basta considerar

$$\begin{aligned} \sigma \cdot b_T &= \sigma \cdot \sum_{\tau \in C(T)} \text{sgn}(\tau) \tau \\ &= \text{sgn}(\sigma) \sigma \cdot \sum_{\tau \in C(T)} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \tau \\ &= \text{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in C(T)} \text{sgn}(\sigma\tau) \sigma\tau \\ &= \text{sgn}(\sigma) b_T. \end{aligned}$$

Ejemplo. Para $n = 3$ consideremos la partición $\lambda = (3)$ y la enumeración $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. En este caso, el subgrupo estabilizador de columnas $C(T)$ consta únicamente de la identidad, por lo cual se cumple $b_T = (1)$ en $\mathbf{C}[S_3]$. En general, para cualquier entero positivo n y cualquier enumeración T de forma $\lambda = (n)$ se cumple $b_T = (1)$ en $\mathbf{C}[S_n]$.

Ejemplo. Para $n = 3$ consideremos la partición $\lambda = (1^3)$ y la enumeración $T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. En este caso, el subgrupo estabilizador de columnas $C(T)$ es todo el grupo S_3 , por lo cual se cumple

$$b_T = (1) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2) - (1\ 2) - (1\ 3) - (2\ 3).$$

en $\mathbf{C}[S_3]$.

Ejemplo. Sea $\lambda = (2, 1)$ y consideremos $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. En este caso se cumple $C(T) = \{(2), (1\ 3)\}$, o equivalentemente $\{(1), (1\ 3)\}$, pues $(2) = (1)$. Por lo tanto se tiene $b_T = (1) - (1\ 3)$ en $\mathbf{C}[S_3]$.

Ejemplo. Para $n = 6$, dada $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$, el subgrupo de Young estabilizador de columnas es $C(T) = S_{\{1,3,4\}} \times S_{\{5,6\}} \times S_{\{2\}}$, subgrupo de S_6 . Al calcular el simetrizador de Young b_T tenemos

$$b_T = (1) - (1\ 3) - (1\ 4) - (3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3) - (5\ 6) + (1\ 3)(5\ 6) + (1\ 4)(5\ 6) + (3\ 4)(5\ 6) - (1\ 3\ 4)(5\ 6) - (1\ 4\ 3)(5\ 6).$$

3.7. Politableoides y módulos de Specht

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbf{K} y \mathcal{A} un álgebra sobre \mathbf{K} . Decimos que V tiene la estructura de módulo sobre el álgebra \mathcal{A} (o que V es un \mathcal{A} -módulo) si existe una función de $\mathcal{A} \times V$ en V , cuyo valor en (a, v) denotamos por av , que cumple las siguientes propiedades:

- $(a + b)v = av + bv$, para $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}, v \in V$,
- $a(v + w) = av + aw$, para $a \in \mathcal{A}, v \in V, w \in V$,
- $a(bv) = (ab)v$, para $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}, v \in V$,
- $1_A v = v$, para $v \in V$, y
- $a(\lambda v) = \lambda(av) = (\lambda a)v$, para $a \in \mathcal{A}, v \in V, \lambda \in \mathbf{K}$.

Esto nos hace recordar los conceptos de acción de grupo y representación expuestos en el capítulo 2, páginas 24 a 26. El hecho de que \mathcal{A} sea un álgebra (anillo y espacio vectorial a la vez, dicho sea de paso) exige las condiciones adicionales inherentes a dichas estructuras. A continuación presentamos algunos ejemplos de módulos sobre las álgebras presentadas previamente.

Ejemplo. Sea $\mathcal{A} = \mathbf{K}$ visto como álgebra sobre \mathbf{K} . Cualquier espacio vectorial sobre \mathbf{K} es un módulo sobre \mathcal{A} .

Ejemplo. Dada \mathcal{A} un álgebra sobre un cuerpo \mathbf{K} , como espacio vectorial \mathcal{A} tiene una estructura de módulo sobre el álgebra \mathcal{A} . Dicho módulo se denomina \mathcal{A} -módulo regular.

Ejemplo. Sea \mathcal{A} el álgebra de matrices de orden $n \times n$ con entradas en \mathbf{K} y $V = \mathbf{K}^n$ el espacio vectorial de vectores columna, sobre \mathbf{K} . Dados $a \in \mathcal{A}$, $v \in V$ y av la multiplicación de matrices usual, se tiene que V es un módulo sobre \mathcal{A} .

Antes de emprender el estudio de un módulo muy especial relacionado con el tema de nuestro trabajo, debemos presentar algunos conceptos adicionales. Sea V un módulo sobre una álgebra \mathcal{A} . Dados $B \subset \mathcal{A}$ y $W \subset V$ denotamos por

BW al conjunto $\{bw, \text{ con } b \in B \text{ y } w \in W\}$. Nótese que se cumple $BW \subset V$. Si $B = \{b\}$, escribimos por economía de notación bW en lugar de $\{b\}W$; de modo análogo si W es un conjunto unitario. Decimos que B anula a W si se cumple $BW = \{0\}$. Un módulo V sobre una álgebra A es **cíclico** si existe $v \in V$ tal que $V = Av$. En tal situación diremos que v genera el A -módulo V . Es importante notar que todo el estudio de las representaciones efectuado en el capítulo 2 puede realizarse con módulos sobre álgebras. Así por ejemplo la noción de **módulo simple**, es decir aquel que no acepta submódulos más allá de los triviales, es equivalente a la noción de **representación irreducible**.

Dada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ una partición de n , sea M^λ el espacio vectorial complejo que tiene como base formal los tabloides correspondientes a las enumeraciones de forma λ . La dimensión del espacio M^λ es el número de clases de equivalencia (tabloides) de tipo λ , es decir (ver página 64), está dada por $\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!}$. Definimos en este espacio una forma bilineal $(\cdot, \cdot) : M^\lambda \times M^\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ vía $(\{T_1\}, \{T_2\}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \{T_1\} = \{T_2\} \\ 0, & \text{si } \{T_1\} \neq \{T_2\} \end{cases}$. En

[6] y en [7] se demuestra que dicha forma bilineal es simétrica y no singular, y define un \mathbb{Q} -producto interno. Asimismo, el conjunto de tabloides es una base ortonormal para M^λ , provisto de dicho producto interno.

El grupo simétrico S_n actúa sobre los tabloides en el sentido de que dicho producto interno es S_n -invariante, es decir, para cualquier $\sigma \in S_n$ se cumple $(\sigma\{T_1\}, \sigma\{T_2\}) = (\{T_1\}, \{T_2\})$. También actúa (extendido por linealidad) sobre M^λ ; de esta manera es **lícito** pensar en M^λ como un módulo de permutaciones asociado al S_n -conjunto de tabloides de forma λ . El siguiente lema establece una propiedad importante acerca del producto interno y el simetrizador de Young.

Lema 3.5 *Dada T_λ , una tabla de Young de forma λ , y dados u, v en M^λ , se cumple $(b_{T_\lambda}u, v) = (u, b_{T_\lambda}v)$.*

Prueba. Por definición, propiedades de producto interno y por ser este producto interno S_n -invariante tenemos

$$\begin{aligned} (b_{T_\lambda}u, v) &= \sum_{\tau \in C(T_\lambda)} \text{sgn}(\tau) \tau u, v \\ &= \sum_{\tau \in C(T_\lambda)} u, \text{sgn}(\tau) \tau^{-1} v \\ &= u, \sum_{\tau \in C(T_\lambda)} \text{sgn}(\tau^{-1}) \tau^{-1} v \\ &= (u, b_{T_\lambda}v), \end{aligned}$$

lo que culmina la prueba. ■

Los siguientes ejemplos complementan la información desarrollada en la página 65.

Ejemplo. En el caso de la partición $\lambda = (n) = [n^1]$, ya se sabe que existe un único tabloide de tipo λ . El módulo M^λ en ese caso es la representación trivial de S_n .

Ejemplo. Dada la partición $\lambda = (1, 1, \dots, 1) = [1^n]$, ya se explicó cómo cada tabloide consta de una única tabla vertical. Los tabloides están en correspondencia biunívoca con los elementos de S_n del siguiente modo: dado un tabloide, la correspondencia le asigna la permutación que envía i al elemento ubicado en la i ésima fila del tabloide. Esta biyección preserva la acción regular de S_n en sí mismo, por lo cual el módulo M^λ en cuestión es el módulo de permutaciones correspondiente a la representación regular de S_n .

Ejemplo. Para la partición $\lambda = (n-1, 1)$ establecimos una biyección entre los tabloides de forma λ y los elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Como dicha biyección preserva la acción de S_n , el módulo M^λ en ese caso se identifica con la representación estándar de S_n .

Es natural preguntarse si M^λ contiene subespacios invariantes y la respuesta más probable es que contenga muchos de ellos. Uno de ellos es el subespacio generado por los politabloides, que a continuación describimos.

Para cada enumeración T_λ de forma λ definimos el politabloide asociado a T_λ en M^λ , y lo denotamos por v_{T_λ} , mediante la fórmula

$$v_{T_\lambda} = b_{T_\lambda} \cdot \{T_\lambda\} = \sum_{\sigma \in C(T_\lambda)} \text{sgn}(\sigma) \{\sigma \cdot T_\lambda\}.$$

Decimos asimismo que cada tabloide $\{\sigma \cdot T_\lambda\}$ que aparece como sumando está implicado en el politabloide v_{T_λ} . A través del siguiente lema demostraremos lo afirmado después del ejemplo en la página 61 acerca de los subgrupos estabilizadores de filas, para luego exponer algunas características saltantes de los politabloides.

Lema 3.6 *Sea T_λ una enumeración de forma λ . Para todo σ en S_n se cumple*

$$R(\sigma \cdot T_\lambda) = \sigma^{-1} \cdot R(T_\lambda) \cdot \sigma \text{ y } C(\sigma \cdot T_\lambda) = \sigma^{-1} \cdot C(T_\lambda) \cdot \sigma.$$

Prueba. Para probar la primera afirmación procedemos a verificar una igualdad de conjuntos. Para tal efecto, consideremos $\tau \in R(\sigma \cdot T_\lambda)$. Ello equivale a $\tau \cdot \{\sigma \cdot T_\lambda\} = \{\sigma \cdot T_\lambda\}$, lo cual a su vez significa tener

$$\sigma^{-1} \tau \sigma \cdot \{T_\lambda\} = \sigma^{-1} \tau \cdot \{\sigma \cdot T_\lambda\} = \sigma^{-1} \cdot \{\sigma \cdot T_\lambda\} = \{\sigma^{-1} \sigma \cdot T_\lambda\} = \{T_\lambda\},$$

es decir se tiene $\sigma^{-1} \tau \sigma \in R(T_\lambda)$; y así se cumple $\tau \in \sigma^{-1} R(T_\lambda) \sigma$. La demostración de la segunda afirmación es similar. ■

La siguiente proposición explica cómo actúa el grupo simétrico S_n sobre los politabloides y será útil más adelante.

Proposición 3.7 *Dada T_λ una enumeración de forma λ , entonces para cualquier σ en S_n se cumple $b_{\sigma \cdot T_\lambda} = \sigma b_{T_\lambda} \sigma^{-1}$ y $v_{\sigma \cdot T_\lambda} = \sigma \cdot v_{T_\lambda}$.*

Prueba. Para demostrar la primera afirmación usamos el lema anterior. Así se tiene

$$\begin{aligned}
 b_{\sigma \cdot T_\lambda} &= \sum_{\tau \in C(\sigma \cdot T_\lambda)} \text{sgn}(\tau) \tau \\
 &= \sum_{\tau \in C(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}} \text{sgn}(\tau) \tau \\
 &= \sum_{\tau^j \in C(T_\lambda)} \text{sgn}(\sigma \tau^j \sigma^{-1}) \sigma \tau^j \sigma^{-1} \\
 &= \sigma \square \sum_{\tau^j \in C(T_\lambda)} (\text{sgn } \tau^j) \tau^j \square \sigma^{-1} \\
 &= \sigma b_{T_\lambda} \sigma^{-1}.
 \end{aligned}$$

Para la segunda afirmación, por definición y como consecuencia de la demostración anterior tenemos

$$v_{\sigma \cdot T_\lambda} = b_{\sigma \cdot T_\lambda} \{\sigma \cdot T_\lambda\} = \sigma b_{T_\lambda} \sigma^{-1} \{\sigma \cdot T_\lambda\} = \sigma b_{T_\lambda} \{T_\lambda\} = \sigma \cdot v_{T_\lambda},$$

lo que culmina la prueba. ■

Ejemplo. Dada $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}$, el subgrupo de Young estabilizador de columnas es $C(T) = S_{\{1,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{2\}}$. El simetrizador de Young b_T está dado por

$$b_T = (1) - (1\ 3) - (4\ 5) + (1\ 3)(4\ 5).$$

Al calcular el politabloide asociado v_T se obtiene

$$\begin{aligned}
 v_T &= \frac{\overline{3\ 4\ 2}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 4\ 2}}{\overline{3\ 5}} - \frac{\overline{3\ 5\ 2}}{\overline{1\ 4}} + \frac{\overline{1\ 5\ 2}}{\overline{3\ 4}} \\
 &= \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 2\ 4}}{\overline{3\ 5}} - \frac{\overline{2\ 3\ 5}}{\overline{1\ 4}} + \frac{\overline{1\ 2\ 5}}{\overline{3\ 4}}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos $T^j = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}$, equivalente por filas a la enumeración T presentada en el ejemplo anterior. El subgrupo de Young estabilizador de columnas es $C(T^j) = S_{\{1,4\}} \times S_{\{3,5\}} \times S_{\{2\}}$. El simetrizador de Young b_{T^j} está dado por

$$b_{T^j} = (1) - (1\ 4) - (3\ 5) + (1\ 4)(3\ 5).$$

Y el politabloide asociado a T^j es

$$v_{T^j} = \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{\overline{4\ 5}} - \frac{\overline{2\ 4\ 5}}{\overline{1\ 3}} + \frac{\overline{1\ 2\ 5}}{\overline{3\ 4}}.$$

Nótese que se tiene $v_{T^j} \mathbf{f} = v_T$, hecho que pone de manifiesto que el politabloide asociado a T depende de la tabla T y no solamente del tabloide $\{T\}$.

Proposición 3.8 Sean T y T^j dos enumeraciones con formas

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \text{ y } \lambda^j = (\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_k^j),$$

respectivamente, tales que λ no domina estrictamente a λ^j . Si existen dos números enteros positivos distintos que ocurren en una misma fila de T^j y en una misma columna de T , entonces se tiene $b_T \cdot \{T^j\} = 0$. Si no existe tal par, entonces se cumple $b_T \cdot \{T^j\} = \pm v_T$.

Prueba. Supongamos que existe un par de enteros como los mencionados. Sea τ la transposición que permuta este par. Como se tiene $\tau \in C(T)$, entonces se cumple $b_T \tau = \tau b_T$. Por las propiedades de los simetrizadores de Young se cumple luego

$$b_T \cdot \tau = \tau \cdot b_T = \text{sgn}(\tau) \cdot b_T = -b_T.$$

Pero también se satisface $\tau \in R(T^j)$, de donde se obtiene $\tau \cdot \{T^j\} = \{T^j\}$, y así

$$b_T \cdot \{T^j\} = b_T \cdot \{\tau \cdot \{T^j\}\} = (b_T \cdot \tau) \cdot \{T^j\} = -b_T \cdot \{T^j\}.$$

De ello conseguimos $b_T \cdot \{T^j\} = 0$.

De no haber tal par, por la parte 2 de la proposición 3.1, existe σ^j en $R(T^j)$ y τ^j en $C(T)$ sujetos a $\sigma^j \cdot T^j = \tau^j \cdot T$. Con ellos se cumple

$$\begin{aligned} b_T \cdot \{T^j\} &= b_T \cdot \{\sigma^j \cdot T^j\} = b_T \cdot \{\tau^j \cdot T\} = (b_T \cdot \tau^j) \cdot \{T\} \\ &= (\text{sgn}(\tau^j) b_T) \cdot \{T\} = \text{sgn}(\tau^j) \cdot v_T = \pm v_T, \end{aligned}$$

lo cual culmina la prueba. ■

Corolario 3.9 Si T y T^j son tablas de Young estándares sujetas a $T^j > T$, entonces se tiene $b_T \cdot \{T^j\} = 0$.

Prueba. Esto es consecuencia inmediata del corolario 3.3 y de la proposición anterior. ■

Corolario 3.10 Si $u \in M^\lambda$ y T es una enumeración de forma λ , entonces $b_T u$ es un múltiplo de v_T .

Prueba. Si se tiene $u \in M^\lambda$, entonces u es combinación lineal de tabloides $\{T^j\}$ de forma λ . De la proposición 3.8 se sigue que $b_T \cdot \{T^j\}$ es un múltiplo de v_T , de donde resulta que $b_T u$ es un múltiplo de v_T . ■

Antes de continuar, ilustraremos el resultado establecido en la proposición 3.8 con algunos ejemplos.

Ejemplo. Consideremos $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 5 & 1 & \\ \hline \end{array}$ y $T^j = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 5 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$.

Dichas enumeraciones representan las particiones $\lambda = (3, 2)$ y $\lambda^j = (4, 1, 1)$, respectivamente, donde notamos que λ no domina estrictamente a λ^j . El subgrupo

de Young estabilizador de columnas para T es $C(T) = \mathcal{S}_{\{2,5\}} \times \mathcal{S}_{\{1,4\}} \times \mathcal{S}_{\{3\}}$
 El respectivo simetrizador de Young b_T es

$$b_T = (1) - (1\ 4) - (2\ 5) + (1\ 4)(2\ 5).$$

Al efectuar el cálculo de $b_T \cdot \{T^j\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 b_T \cdot \{T^j\} &= \frac{\overline{6\ 4\ 3\ 1}}{2} - \frac{\overline{6\ 1\ 3\ 4}}{2} - \frac{\overline{6\ 4\ 3\ 1}}{5} + \frac{\overline{6\ 1\ 3\ 4}}{5} \\
 &= \frac{\overline{1\ 3\ 4\ 6}}{2} - \frac{\overline{1\ 3\ 4\ 6}}{2} - \frac{\overline{1\ 3\ 4\ 6}}{5} + \frac{\overline{1\ 3\ 4\ 6}}{5} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

el resultado esperado en base a la proposición 3.8, al haber dos números en la primera fila de T^j que se repiten en una misma columna (es este caso la segunda) de T .

Ejemplo. Para ilustrar la segunda parte de la proposición 3.8 necesitamos enumeraciones que correspondan a una misma partición. Sean $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$

y $T^j = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array}$, donde no existen dos números en una fila de T^j que se repitan en una misma columna de T . El subgrupo de Young estabilizador de columnas para T es $C(T) = \mathcal{S}_{\{2,4\}} \times \mathcal{S}_{\{1,5\}} \times \mathcal{S}_{\{3\}}$ El respectivo simetrizador de Young b_T es

$$b_T = (1) - (2\ 4) - (1\ 5) + (1\ 5)(2\ 4).$$

Al efectuar el cálculo de $b_T \cdot \{T^j\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 b_T \cdot \{T^j\} &= \frac{\overline{2\ 1\ 3}}{5\ 4} - \frac{\overline{4\ 1\ 3}}{5\ 2} - \frac{\overline{2\ 5\ 3}}{1\ 4} + \frac{\overline{4\ 5\ 3}}{1\ 2} \\
 &= \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{4\ 5} - \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{2\ 5} - \frac{\overline{2\ 3\ 5}}{1\ 4} + \frac{\overline{3\ 4\ 5}}{1\ 2}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el politabloide asociado a T es

$$\begin{aligned}
 v_T &= \frac{\overline{2\ 1\ 3}}{4\ 5} - \frac{\overline{4\ 1\ 3}}{2\ 5} - \frac{\overline{2\ 5\ 3}}{4\ 1} + \frac{\overline{4\ 5\ 3}}{2\ 1} \\
 &= \frac{\overline{1\ 2\ 3}}{4\ 5} - \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{2\ 5} - \frac{\overline{2\ 3\ 5}}{4\ 1} + \frac{\overline{3\ 4\ 5}}{2\ 1},
 \end{aligned}$$

lo cual muestra la igualdad $b_T \cdot \{T^j\} = v_T$, anunciada en la proposición.

Es el momento de presentar el concepto más importante de este capítulo. Dada una partición λ , el módulo de Specht correspondiente a λ , denotado por \mathcal{S}^λ , es el subespacio de M^λ generado por los politabloides v_T cuando T recorre todas las enumeraciones de forma λ .

De la igualdad $\sigma \cdot v_T = v_{\sigma \cdot T}$, para toda enumeración T y σ en S_n , establecida en la proposición 3.7, se sigue que S_n preserva S^λ (es decir, es un submódulo de M^λ). De ello concluimos que debería cumplirse $S^\lambda = \mathbf{C}[S_n] \cdot v_T$ para algunas de tales enumeraciones T , lo cual nos motiva a averiguar y precisar cuáles son.

Ejemplo. Para la partición $\lambda = (n) = [n^1]$, el espacio M^λ es la representación trivial. El módulo de Specht S^λ es la representación trivial 1_n de S_n . Para la partición $\lambda = (1, 1, \dots, 1) = [1^n]$, el espacio M^λ es la representación regular de S_n . El módulo de Specht S^λ es la representación alternante U_n de S_n .

En lo que sigue, estableceremos nexos entre los módulos de Specht y las representaciones irreducibles de S_n (o S_n -módulos simples). En general, dado un subespacio V de M^λ y el subespacio ortogonal de V denotado por V^\perp con respecto al producto interno indicado antes para M^λ , es importante recordar que se cumple $V \cap V^\perp = \{0\}$ y $V \oplus V^\perp = M^\lambda$ si el cuerpo sobre el que está definido el espacio vectorial M^λ es de **característica** cero.

El siguiente resultado se conoce como *teorema del submódulo de James*.

Proposición 3.11 *Sea λ una partición de n y W un submódulo de M^λ . Entonces, o bien se cumple $S^\lambda \subset W$, o en su defecto $W \subset (S^\lambda)^\perp$. De ello, concluimos que cada S^λ es un S_n -módulo simple.*

Prueba. Sea $w \in W$. Para toda enumeración T_λ de forma λ , el corolario 3.10 asegura que existe un escalar c que cumple $b_{T_\lambda} w = c v_{T_\lambda}$. Si podemos elegir w y T_λ de manera que se cumpla $c \neq 0$, se tendrá $v_{T_\lambda} \in W$. La proposición 3.7 afirma entre otras cosas que S^λ es un módulo **cíclico** generado por cualquier politabloide. De ello se cumplirá $S^\lambda \subset W$.

Supongamos entonces que se tenga $b_{T_\lambda} w = 0$ para toda elección de w en W y T_λ enumeración. Por el lema 3.5 tenemos así

$$\begin{aligned} 0 &= (b_{T_\lambda} w, \{T_\lambda\}) = \sum_{\sigma \in C(T_\lambda)} \text{sgn}(\sigma) \sigma w, \{T_\lambda\} \\ &= \sum_{\sigma \in C(T_\lambda)} (\text{sgn}(\sigma) \sigma w, \{T_\lambda\}) = \sum_{\sigma \in C(T_\lambda)} (w, \text{sgn}(\sigma) \sigma^{-1} \{T_\lambda\}) \\ &= (w, \sum_{\sigma \in C(T_\lambda)} \text{sgn}(\sigma) \sigma^{-1} \{T_\lambda\}) = (w, b_{T_\lambda} \{T_\lambda\}) \\ &= (w, v_{T_\lambda}) \end{aligned}$$

Puesto que S^λ está generado por los politabloides, la igualdad anterior implica $w \in (S^\lambda)^\perp$, es decir, $W \subset (S^\lambda)^\perp$. Por ello, si W es un submódulo propio de S^λ (es decir, $W \subset S^\lambda$ y $W \neq S^\lambda$), entonces no se cumple $S^\lambda \subset W$. Por lo tanto ha de darse $W \subset (S^\lambda)^\perp$. Tendremos entonces $W \subset S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$, lo cual significa $W = \{0\}$, y con lo cual queda así establecido que los módulos de Specht son S_n -módulos simples. ■

Otra **característica** importante reside en el hecho de que dos particiones distintas están asociadas a módulos de Specht no isomorfos.

Proposición 3.12 *Sea $\Phi : M^\lambda \rightarrow M^\mu$ un homomorfismo de representaciones de S_n . Si S^λ no está contenida en el núcleo de Φ , entonces se cumple $\mu \triangleright \lambda$. Y si $\lambda = \mu$, entonces se satisface $\Phi(S^\lambda) = S^\lambda$.*

Prueba. Sea T una enumeración de forma λ . Si S^λ no está contenida en el núcleo de Φ , entonces v_T no está en el núcleo de Φ , pues cualquier v_T genera S^λ . Se tiene así

$$\Phi(v_T) = \Phi(b_T \cdot \{T\}) = b_T \cdot \Phi(\{T\}) \neq 0.$$

De ello logramos $b_T \cdot \{T\} = 0$ para alguna enumeración T^j de forma μ .

Por reducción al absurdo, supongamos que se tenga $\mu > \lambda$. Entonces λ no domina a μ . Por la primera parte de la proposición 3.1 existen dos números enteros positivos distintos en una misma fila de T^j y en una misma columna de T . A su vez, de la proposición 3.8 se deduce la igualdad $b_T \cdot \{T^j\} = 0$. Esta contradicción nos permite concluir que se cumple $\mu \triangleright \lambda$.

Por otra parte, si $\lambda = \mu$, **entonces por el corolario 3.10 se tiene que $\Phi(v_T)$ es múltiplo de v_T** . Como S^λ es un S_n -módulo cíclico generado por cualquier politabloide, se cumple $\Phi(S^\lambda) = S^\lambda$, lo que culmina la prueba. ■

De estos hechos y de lo expuesto en los **capítulos 1 y 2** se desprende el nexo fundamental entre los módulos de Specht y las representaciones irreducibles del grupo simétrico, sin duda, el resultado más importante de nuestro trabajo.

Teorema 3.13 *Para cada partición λ de n , el módulo de Specht correspondiente S^λ es una representación irreducible del grupo simétrico S_n . Recíprocamente, cada representación irreducible de S_n es isomorfa a exactamente un módulo de Specht S^λ .*

Prueba. Ya hemos establecido que en un cuerpo de **característica** cero el módulo de Specht S^λ correspondiente a la partición λ de n es un S_n -módulo simple (o equivalentemente, una representación irreducible de S_n). Ahora, si se tuviera S^λ isomorfo a S^μ vía un isomorfismo Φ no nulo, la proposición 3.12 asegura $\mu \triangleright \lambda$. Dado que $\Phi^{-1} : S^\mu \rightarrow S^\lambda$ es también un isomorfismo, se tiene también $\lambda \triangleright \mu$. Luego, se concluye la igualdad $\lambda = \mu$. Con lo expuesto hasta aquí concluimos que cada partición λ de un número natural n aparece asociada al módulo de Specht S^λ de una representación irreducible de S_n . Para resaltar la importancia de este resultado en cuanto a los objetivos de este trabajo, recordemos que en los **capítulos 1 y 2** se demostró que el número de particiones de n coincide con el número de clases de conjugación en S_n . Queda probado así que las representaciones producidas por cada módulo de Specht son precisamente todas las representaciones irreducibles de S_n , pues no hay lugar para más. ■

La importancia de este resultado nos motiva a ahondar acerca de los nexos entre los módulos de Specht y las representaciones irreducibles de los grupos simétricos.

3.8. Módulos de Specht y representaciones.

Corresponde ahora conocer más de cerca los módulos de Specht y a partir de ello, para cumplir con uno de los objetivos del presente trabajo, ilustrar la construcción de representaciones de grupos simétricos. Nuestra primera tarea consiste en exhibir una base para cada módulo de Specht y de paso conocer su dimensión. Ello será de mucha utilidad para la formulación de ejemplos que ilustren la teoría y faciliten la lectura.

Recordemos que dada una partición λ de un número entero positivo n , una tabla de Young estándar o tablero estándar es una tabla de Young donde cada número desde 1 hasta n aparece una única vez. Según las definiciones presentadas en las páginas 56 y 57, en un tablero estándar los números colocados en cada fila individual y en cada columna individual forman sucesiones crecientes. Un tabloide $\{T\}_\lambda$ es tabloide estándar si existe una tabla de Young estándar en el conjunto $\{T\}_\lambda$. Un politaloide νT_λ es politaloide estándar si T_λ es tablero estándar.

Los siguientes ejemplos tienen la intención de asentar estas ideas.

Ejemplo. Dada la partición $\lambda = (3, 2)$ del número 5, las tablas de Young estándares de forma λ son

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array},$$

$$T_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

Notemos que en cualquier tabloide estándar de forma λ no puede aparecer más de una de las tablas de Young estándares escritas anteriormente. En general, como los coeficientes deben aumentar a lo largo de las filas de una tabla de Young estándar, un tabloide estándar contiene apenas una de tales tablas.

Ejemplo. Consideremos a modo de ilustración la enumeración $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}$.

La clase de equivalencia (tabloide) respectiva consta de 12 elementos y está dada por

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 5 & 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 5 & 3 & \\ \hline \end{array}, \right\}$$

y la única tabla de Young estándar que contiene es T_4 .

Ejemplo. En relación con lo anterior, un politabloide sí puede contener más de un tabloide estándar. A modo de ilustración, para

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array},$$

tenemos el simetrizador de Young $b_T = (1) - (1\ 2) - (4\ 5) + (1\ 2)(4\ 5)$, y el politabloide

$$\begin{aligned} v^T &= \frac{\overline{2\ 4\ 3}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 4\ 3}}{\overline{2\ 5}} - \frac{\overline{2\ 5\ 3}}{\overline{1\ 4}} + \frac{\overline{1\ 5\ 3}}{\overline{2\ 4}} \\ &= \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}} - \frac{\overline{2\ 3\ 5}}{\overline{1\ 4}} + \frac{\overline{1\ 3\ 5}}{\overline{2\ 4}}, \end{aligned}$$

que contiene a los tabloides estándares $\{T_3\}$ y $\{T_5\}$.

Corresponde ahora retomar las relaciones de orden total y parcial entre tabloides, presentadas en las páginas 65 y 66. El siguiente resultado relaciona la independencia lineal de elementos del espacio M^μ con el orden total.

Lema 3.14 *Dada una partición μ , sean v_1, v_2, \dots, v_m elementos de M^μ tales que $\{T_i\}$ es el mayor tabloide implicado en v_i para i desde 1 hasta m , respecto al orden total $<$. Si los tabloides $\{T_i\}$ son todos diferentes, entonces los elementos v_1, v_2, \dots, v_m son linealmente independientes.*

Prueba. Podemos suponer que se cumple $\{T_1\} < \{T_2\} < \dots < \{T_m\}$. Supongamos que se tiene $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$, para escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Para cualquier j , si suponemos $\alpha_{j+1} = \alpha_{j+2} = \dots = \alpha_m = 0$, entonces debe cumplirse $\alpha_j = 0$, pues $\{T_j\}$ está implicado en v_j y no lo está en v_k cuando $k < j$. De ello concluimos $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, con lo cual queda probado el resultado. ■

En cuanto a v_T , es claro que $\{T\}$ es el mayor tabloide implicado en v_T cuando T es tabla de Young estándar. Y como los tabloides estándares implicados en cada politabloide son distintos, se deduce a partir de la proposición anterior que los politabloides estándares son linealmente independientes.

Ejemplo. Dada la tabla de Young estándar $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}$, el simetrizador de Young es $b_T = (1) - (1\ 2) - (3\ 5) + (1\ 2)(3\ 5)$, y el politabloide resulta

$$\begin{aligned} v^T &= \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}} - \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 5\ 4}}{\overline{2\ 3}} + \frac{\overline{2\ 5\ 4}}{\overline{1\ 3}} \\ &= \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}} - \frac{\overline{2\ 3\ 5}}{\overline{1\ 4}} + \frac{\overline{1\ 3\ 5}}{\overline{2\ 4}} \end{aligned}$$

En él están implicados los tabloides estándares $\frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}}$ y $\frac{\overline{1\ 4\ 5}}{\overline{2\ 3}}$, los cuales verifican la relación

$$\frac{\overline{1\ 4\ 5}}{\overline{2\ 3}} < \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}}.$$

El mayor tabloide implicado es $\{T\}$, por ser T tabla de Young estándar, tal como lo establece la observación dada a continuación del lema 3.14.

Ejemplo. En cambio, para $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}$, el politabloide asociado a T es

$$vT = \frac{\overline{2\ 3\ 4}}{\overline{1\ 5}} - \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}} - \frac{\overline{2\ 3\ 5}}{\overline{1\ 4}} + \frac{\overline{1\ 3\ 5}}{\overline{2\ 4}}$$

que tiene los tabloides estándares $\frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}}$ y $\frac{\overline{1\ 3\ 5}}{\overline{2\ 4}}$ implicados.

El orden total indica en este caso que se cumple

$$\frac{\overline{1\ 3\ 5}}{\overline{2\ 4}} < \frac{\overline{1\ 3\ 4}}{\overline{2\ 5}}$$

Ninguno de ellos coincide con $\{T\}$, hecho que puede deberse a que T no es tabla de Young estándar.

Con respecto ahora al orden parcial definido entre tabloides, es posible también formular una condición suficiente para ordenarlos.

Lema 3.15 *Si T es una enumeración donde los elementos de cada columna forman una sucesión creciente y $\{T^j\}$ está implicado en el politabloide vT , entonces $\{T^j\} < \{T\}$.*

Prueba. Sea $\sigma \in C(T)$ distinta de la identidad que cumple $T^j = \sigma \cdot T$. En alguna columna de T^j existen elementos w y x con $w < x$, tales que w está en alguna fila abajo de x . Por la proposición 3.4, se tiene $\{T^j\} < \{(w\ x) \cdot T^j\}$. Como $(w\ x)$ está implicada en el politabloide vT , al aplicar un argumento inductivo, se obtiene $\{(w\ x) \cdot T^j\} < \{T\}$; y por transitividad tenemos $\{T^j\} < \{T\}$. ■

Ejemplo. Dada la tabla $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$ en donde los números dispuestos en cada columna forman una sucesión creciente, el simetrizador de Young es $b_T = (1) (3\ 4) (2\ 5) + (3\ 4)(2\ 5)$. Al calcular el politabloide asociado se obtiene

$$vT = \frac{\overline{3\ 2\ 1}}{\overline{4\ 5}} - \frac{\overline{4\ 2\ 1}}{\overline{3\ 5}} - \frac{\overline{3\ 5\ 1}}{\overline{4\ 2}} + \frac{\overline{4\ 5\ 1}}{\overline{3\ 2}}$$

El cálculo de los números m_{ij} necesarios para comparar los tabloides implicados mediante el orden parcial nos brinda las respectivas matrices

$$\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \square \\ 1\ 1 & 1\ 1 & 1\ 1 & 1\ 1 \\ \square 2\ 2 & \square 2\ 2 & \square 1\ 2 & \square 1\ 2 \square \\ \square 3\ 3 \square, \square 2\ 3 \square, \square 2\ 3 & & & \square 1\ 3 \\ \square 3\ 4 & \square 3\ 4 & \square 2\ 4 & \square 2\ 4 \\ 3\ 5 & 3\ 5 & 3\ 5 & 3\ 5 \end{array} \text{ y } \begin{array}{cc} \square & \square \\ 1\ 3 & \\ \square 2\ 4 & \\ 3\ 5 & \end{array}$$

En ellas notamos que la primera es mayor que las demás respecto al orden parcial. Esta matriz corresponde al tabloide $\{T\}$, como lo afirma el lema 3.15.

Ejemplo. Consideremos la tabla $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 6 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$, donde podemos notar que los números dispuestos en la primera columna no forman una sucesión creciente. El subgrupo estabilizador de columnas en esta ocasión es

$$C(T) = \{(1), (1\ 2\ 5), (1\ 5\ 2), (1\ 2), (1\ 5), (2\ 5), (4\ 6), (1\ 2\ 5)(4\ 6), (1\ 5\ 2)(4\ 6), (1\ 2)(4\ 6), (1\ 5)(4\ 6), (2\ 5)(4\ 6)\}.$$

Al calcular el politabloide se obtiene

$$\begin{aligned} \nu_T = & \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 6 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}}{2} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}}{5} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}}{1} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}}{1} \\ & - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}}{2} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}}{5} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}}{2} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}}{5} \\ & - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 6 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}}{1} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}}{1} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}}{2} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}}{5}. \end{aligned}$$

La matriz m_{ir} correspondiente a $\{T\}$ es $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$. Notemos por ejemplo

que la matriz m_{ir} correspondiente al tabloide $\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}}$ es $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$. El

lema 3.15 no es aplicable en este caso (pues no es cierto que las entradas en cada columna de T formen sucesiones crecientes), pero notemos que ya no se cumple la conclusión de dicho lema, pues la matriz m_{ir} correspondiente a

$\{T\}$ por ejemplo, no es mayor que la matriz asociada al tabloide $\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}}$

involucrado en el politabloide ν_T .

El siguiente paso consiste en mostrar que los politabloides estándares generan el módulo de Specht. Para tal efecto presentaremos un elemento del álgebra de grupo $\mathbf{C}[S_n]$ que anule a un politabloide ν_T dado y de ello, permita reconstruir una relación de combinación lineal.

Dada una partición λ de un número entero positivo n y una enumeración T_λ de forma λ , sea X un subconjunto de la i -ésima columna, e Y un subconjunto de la $(i + 1)$ -ésima columna, ambas de T_λ . Consideremos permutaciones $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ representativas de las clases laterales para el grupo cociente $\mathcal{S}_{X \cup Y} / (\mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y)$. Definimos el elemento de Garnir, denotado por $G_{X,Y}$, mediante la igualdad $G_{X,Y} = \sum_{j=1}^k \text{sgn}(\sigma_j) \sigma_j$.

Siguiendo un criterio de elección expuesto en [6], dada una enumeración T_λ con λ partición de n , podemos considerar los elementos de X ubicados al final de la i -ésima columna de T_λ y los elementos de Y al principio de la $(i + 1)$ -ésima columna de T_λ . Un modo práctico consiste en elegir todas las permutaciones $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ en \mathcal{S}_n que verifiquen las siguientes condiciones:

- Se cumple $\sigma_1 \cdot T_\lambda = T_\lambda$, donde σ_1 es la identidad,
- para cada j desde 2 hasta k se cumple que $\sigma_j \cdot T_\lambda$ coincide con T_λ excepto en alguna de las posiciones que ocupan los elementos de $X \cup Y$, y
- las entradas correspondientes a las posiciones ocupadas por $X \cup Y$ aumentan verticalmente hacia abajo.

Es oportuno ilustrar mediante ejemplos la construcción de elementos de Garnir.

Ejemplo. Consideremos para $\lambda = (2, 2, 1)$ la enumeración $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$ y los conjuntos $X = \{2, 4\}$ e $Y = \{1, 5\}$. Las posibles tablas de la forma $\sigma_i T_\lambda$ que cumplen con las condiciones dadas son

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot T_\lambda = T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma_2 \cdot T_\lambda = T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma_3 \cdot T_\lambda = T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \\ \sigma_4 \cdot T_\lambda = T_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma_5 \cdot T_\lambda = T_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \sigma_6 \cdot T_\lambda = T_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

Las permutaciones σ_i consideradas acá son $\sigma_1 = Id$, $\sigma_2 = (1\ 2)$, $\sigma_3 = (4\ 5)$, $\sigma_4 = (2\ 4\ 5)$, $\sigma_5 = (1\ 4\ 2)$ y $\sigma_6 = (1\ 2)(4\ 5)$. Al calcular el signo tenemos

$$\text{sgn}(\sigma_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, 4, 5, 6. \\ -1 & \text{si } i = 2, 3. \end{cases}$$

De este modo, el elemento de Garnir para estos conjuntos X e Y es

$$G_{X,Y} = (1) - (1\ 2) - (4\ 5) + (2\ 4\ 5) + (1\ 4\ 2) + (1\ 2)(4\ 5).$$

Ejemplo. Para la enumeración $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$ y los conjuntos $X = \{3, 5\}$ e $Y = \{2, 4\}$, las permutaciones $\sigma_1 = Id$, $\sigma_2 = (2\ 4\ 5\ 3)$, $\sigma_3 = (2\ 3)(4\ 5)$,

$\sigma_4 = (2\ 3)$, $\sigma_5 = (4\ 5)$ y $\sigma_6 = (3\ 4)$ nos brindan las enumeraciones

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot T_\lambda = T_1 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \sigma_2 \cdot T_\lambda = T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \sigma_3 \cdot T_\lambda = T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \\ \sigma_4 \cdot T_\lambda = T_4 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \sigma_5 \cdot T_\lambda = T_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \text{ y } \sigma_6 \cdot T_\lambda = T_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

respectivamente. Dichas tablas son todas las que cumplen con las condiciones dadas para definir el elemento de Garnir. Dicho elemento es en este caso

$$G_{X,Y} = (1) - (2\ 4\ 5\ 3) + (2\ 3)(4\ 5) - (2\ 3) - (4\ 5) - (3\ 4).$$

Ambos ejemplos corresponden a la partición $\lambda = (2, 2, 1)$. Notemos que en ambos casos, el número de elementos de $X \cup Y$ es mayor que el número de elementos en cada columna T_λ . Dicho de modo más formal, la partición conjugada de $\lambda = (2, 2, 1)$ es $\lambda' = (3, 2)$ y el cardinal de $X \cup Y$, denotado por $|X \cup Y|$ es mayor que 3 y también mayor que 2.

No es difícil (solo algo engorroso) comprobar la igualdad $G_{X,Y} v_{T_\lambda} = 0$. De ser así, y por propiedades de los politabloides tendremos a partir del último ejemplo

$$\begin{aligned} 0 &= G_{X,Y} v_{T_\lambda} = \sum_{j=1}^6 \text{sgn}(\sigma_j) \sigma_j \cdot v_{T_1} \\ &= \sum_{j=1}^6 \text{sgn}(\sigma_j) v_{\sigma_j \cdot T_1} \\ &= v_{T_1} - v_{T_2} + v_{T_3} - v_{T_4} - v_{T_5} - v_{T_6} \\ &= v_{T_\lambda} - v_{T_2} + v_{T_3} - v_{T_4} - v_{T_5} - v_{T_6}. \end{aligned}$$

Ello se reescribe $v_{T_\lambda} = v_{T_2} - v_{T_3} + v_{T_4} + v_{T_5} + v_{T_6}$, es decir, conseguimos expresar el politabloide v_{T_λ} como combinación lineal de politabloides estándares. Este resultado es un ejemplo de la siguiente proposición, cuya prueba se inspira en [6], [11] y [10].

Proposición 3.16 *Sea T_λ una enumeración de forma λ , y sean X e Y conjuntos que cumplen las condiciones que definen un elemento de Garnir $G_{X,Y}$. Si $|X \cup Y|$ es mayor que el número de elementos de cualquier columna de T_λ , entonces se cumple $G_{X,Y} v_{T_\lambda} = 0$.*

Prueba. Denotemos por $S_X^- S_Y^-$ a la suma $\sum_{\sigma \in S_X \times S_Y} \text{sgn}(\sigma) \sigma$, y por $S_{X \cup Y}^-$ a la suma $\sum_{\sigma \in S_{X \cup Y}} \text{sgn}(\sigma) \sigma$. Como $|X \cup Y|$ es mayor que el número de elementos en

cualquier columna de T_λ , entonces para cualquier elemento $\beta \in C(T_\lambda)$, existe algún par de números en $X \cup Y$ que están en una misma fila de $\beta \cdot T_\lambda$. Por lo tanto se tiene $S_{X \cup Y}^- \{\beta \cdot T_\lambda\} = S_{X \cup Y}^- \beta \{T_\lambda\} = 0$. De ello se sigue

$$S_{X \cup Y}^- b_{T_\lambda} \{T_\lambda\} = 0.$$

Notemos que $S_X^- S_Y^-$ es un factor de b_{T_λ} y se cumple $S_{X \cup Y}^- = S_X^- S_Y^- G_{X,Y}$. Por lo tanto, tenemos $0 = S_{X \cup Y}^- b_{T_\lambda} \{T_\lambda\} = |X|! |Y|! b_{T_\lambda} \{T_\lambda\} G_{X,Y}$. Como $|X|! |Y|!$ es no nulo, la igualdad anterior exige $b_{T_\lambda} \{T_\lambda\} G_{X,Y} = 0$, lo cual por definición de politabloide significa $G_{X,Y} v_{T_\lambda} = 0$. Esto se cumple en el cuerpo de los números racionales \mathbf{Q} , pero como los coeficientes de los tabloides aquí son enteros, la igualdad subsiste en cualquier cuerpo. ■

Se ha demostrado ya la independencia lineal de los politabloides estándares. Los elementos de Garnir nos ayudarán a probar que dichos politabloides generan los módulos de Specht. Previamente definiremos una relación de equivalencia por columnas, análoga a la equivalencia por filas que hasta ahora hemos utilizado. En tal sentido, decimos que T y T^j son equivalentes por columnas si las correspondientes columnas tienen las mismas entradas (aunque no necesariamente en el mismo orden). De modo similar a lo expuesto con respecto a filas, la clase de equivalencia de una enumeración T se define como $[T] = \{T^j \text{ tal que } T^j = \sigma \cdot T, \text{ para algún } \sigma \in C(T)\}$. Estas clases de equivalencia pueden ordenarse de un modo similar al que se definió para los tabloides.

Proposición 3.17 *Dada una partición λ , el conjunto de los politabloides v_{T_λ} , con T_λ tabla de Young estándar, es una base del módulo de Specht S^λ .*

Prueba. Queda por demostrar que cualquier politabloide se puede expresar como combinación lineal de politabloides estándares. Si T es una tabla de Young estándar, entonces el politabloide v_T es trivialmente generado por politabloides estándares.

Supongamos entonces que T no es estándar. La prueba se efectuará mediante un proceso de inducción respecto al orden anteriormente descrito para clases de equivalencia por columnas. El elemento minimal de este orden está contenido en un politabloide estándar, de modo que se cumple la propiedad para v_T . Supongamos entonces como hipótesis inductiva que v_{T^j} es combinación lineal de politabloides estándares cuando $\{T^j\} < \{T\}$. Dado que para $\pi \in C(T)$ se cumple $\pi v_T = \text{sgn}(\pi) v_T$ podemos suponer que las entradas de cada columna en T (leídas hacia abajo) forman sucesiones crecientes. Si T no es estándar, entonces existen dos columnas (digamos, la columna j ésima y $(j+1)$ ésima), con coeficientes a_1, a_2, \dots, a_r y b_1, b_2, \dots, b_s , respectivamente, que cumplen $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ y $b_1 < b_2 < \dots < b_s$, y además se tiene $a_q > b_q$ para algún q .

Consideremos los conjuntos $X = \{a_q, \dots, a_r\}$ e $Y = \{b_1, \dots, b_q\}$, y el elemento de Garnir respectivo $G_{X,Y} = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \sigma$. Por lo observado anteriormente y por propiedades de los politabloides mencionadas arriba (proposición 3.7) se

tiene $0 = G_{X,Y} v_T = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \sigma v_T = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma \cdot T}$. Los elementos de $X \cup Y$ cumplen $b_1 < \dots < b_q < a_q < \dots < a_r$, de lo cual, para cualquier σ presente en la suma que define el elemento de Garnir se da $\{\sigma \cdot T\} < \{T\}$. De la hipótesis inductiva se deduce entonces que para dichos σ , el politabloide $v_{\sigma \cdot T}$ es combinación lineal de politabloides estándares. De la igualdad anterior, al tenerse $v_{T_1} = v_T$, deducimos que v_T es combinación lineal de politabloides estándares, lo que culmina la prueba. ■

Ya contamos con las herramientas necesarias para ampliar y complementar las técnicas para el cálculo de caracteres de las representaciones de \mathcal{S}_n , desarrolladas en el capítulo 2. Según lo expuesto, hay una representación irreducible de \mathcal{S}_n por cada clase de conjugación de \mathcal{S}_n , y a su vez, cada clase de conjugación se relaciona de manera biunívoca con una partición de n . Recordemos que dichos cálculos se sustentan en las relaciones de ortogonalidad y son prácticos cuando n no es muy grande.

Por ejemplo, conviene recordar (capítulos 1 y 2) que para \mathcal{S}_4 tenemos las clases de conjugación $[(1\ 2\ 3\ 4)]$, $[(1, 2, 3)]$, $[(1\ 2)(3\ 4)]$, $[(1\ 2)]$ y $[(1)]$; con cardinales 6, 8, 3, 6 y 1, respectivamente. Las particiones de $n = 4$ asociadas a cada una de ellas son, respectivamente, (4) , $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 1)$. La tabla de caracteres construida en las páginas 52 y 53 puede reescribirse con las particiones dadas en orden decreciente y en términos de módulos de Specht cual

	(6) [(1 2 3 4)]	(8) [(1 2 3)]	(3) [(1 2)(3 4)]	(6) [(1 2)]	(1) [(1)]
$\mathcal{S}^{(4)}$	1	1	1	1	1
$\mathcal{S}^{(3,1)}$	-1	0	-1	1	3
$\mathcal{S}^{(2,2)}$	0	-1	2	0	2
$\mathcal{S}^{(2,1,1)}$	1	0	-1	-1	3
$\mathcal{S}^{(1,1,1,1)}$	-1	1	1	-1	1

con la misma información expuesta antes acerca del grupo \mathcal{S}_4 . Notemos que $\mathcal{S}^{(4)}$ es la representación trivial, $\mathcal{S}^{(1,1,1,1)}$ es la representación signo y $\mathcal{S}^{(3,1)}$ corresponde a la representación estándar. Por así decirlo, son las representaciones más conocidas de este grupo relativamente pequeño. Debido a que las particiones $(3, 1)$ y $(2, 1, 1)$ son conjugadas entre sí se tiene la relación $\mathcal{S}^{(2,1,1)} \div \mathcal{S}^{(1,1,1,1)} \otimes \mathcal{S}^{(3,1)}$, la cual traducida a caracteres se expresa cual

$$\chi^{\mathcal{S}^{(2,1,1)}} = \chi^{\mathcal{S}^{(1,1,1,1)}} \cdot \chi^{\mathcal{S}^{(3,1)}};$$

igualdad que permite deducir el carácter del módulo de Specht $\mathcal{S}^{(2,1,1)}$. El carácter de $\mathcal{S}^{(2,2)}$ se obtuvo a partir de las relaciones de ortogonalidad.

Para calcular el carácter del módulo de Specht \mathcal{S}^λ asociado a una partición λ del número entero n en general expondremos a continuación dos técnicas. La fórmula de Frobenius, relacionada con las clases de conjugación, y la fórmula del gancho, que está directamente ligada a la forma que adopta el diagrama

de Young. Nos concentraremos en explicar de un modo simple las ideas subyacentes. Los detalles técnicos de algunas demostraciones se pueden consultar en [2] y [3].

Tal como se expuso en el capítulo 1, dados números enteros z_i , con $1 \leq i \leq k \leq n$, decimos que una permutación σ en S_n es del tipo $[z_1 z_2 \dots z_k]$ si en la descomposición de σ en producto de ciclos disjuntos se tienen z_1 ciclos de longitud 1, z_2 ciclos de longitud 2, y así sucesivamente. Por convención podemos escribir los ciclos de σ ordenados de menor a mayor tamaño y también poner $z_j = 0$ si no hay j -ciclos. Dada una partición λ de n , se trata ahora de evaluar el caracter del módulo de Specht S^λ en los elementos de la clase de conjugación C de σ .

Para ello, consideremos variables independientes x_1, x_2, \dots, x_k donde k es igual que el número de filas en el diagrama de Young de la partición λ . Para cada j desde 1 hasta n , definimos la suma de potencias $P_j(x)$ y el discriminante $\Delta(x)$ las igualdades

$$P_j(x) = x_1^j + x_2^j + \dots + x_k^j, \text{ y}$$

$$\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

En general, dada una serie formal de potencias $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ y una k -upla de números enteros no negativos (q_1, q_2, \dots, q_k) , denotaremos por $[f(x)]_{(q_1, q_2, \dots, q_k)}$ al coeficiente de $x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \dots \cdot x_k^{q_k}$ en la serie de potencias f .

Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$, $\lambda_1 > 0$. Definimos los q_1, q_2, \dots, q_k vía $q_1 = \lambda_1 + k - 1$, $q_2 = \lambda_2 + k - 2$, $q_i = \lambda_i + k - i$, ..., $q_k = \lambda_k$. Es claro que (q_1, q_2, \dots, q_k) es una sucesión finita, estrictamente decreciente de números enteros no negativos. La siguiente fórmula, debida a Frobenius,

$$\chi^{S^\lambda}(C) = \sum_{(q_1, q_2, \dots, q_k)} \prod_j P_j(x)^{z_j} \Delta(x)^{\sum_j z_j},$$

y demostrada con detalle en [2], nos permite calcular el caracter del módulo de Specht S^λ en cualquier representante de la clase de conjugación C de σ , cuando esta es de tipo $[z_1 z_2 \dots z_k]$.

Ejemplo. En la tabla de caracteres de S_4 el caracter del módulo de Specht $S^{(2,1,1)}$ evaluado en los elementos de la clase de conjugación $[(1\ 2)(3\ 4)]$ es -1 . Para verificar el cumplimiento de la fórmula de Frobenius en este caso, notemos que $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ es de tipo $[0\ 2\ 0\ 0]$, con lo cual $z_1 = 0$, $z_2 = 2$. Recordemos $z_j = 0$ indica ausencia de ciclos de longitud j en la descomposición de σ en producto de ciclos disjuntos, y notemos que $z_j = 0$ no afecta el valor de la expresión multiplicativa en la fórmula. Debemos usar tres variables x_1, x_2 y x_3 , pues el diagrama de Young de $\lambda = (2, 1, 1)$ exhibe tres filas. Los términos q_j son $q_1 = 2 + 3 - 1 = 4$, $q_2 = 1 + 3 - 2 = 2$ y $q_3 = 1 + 3 - 3 = 1$. Los cálculos

muestran

$$\begin{aligned} \chi^{S^{(2,1,1)}}([[(1\ 2)(3\ 4)]) &= \sum_j \sum_{(q_1, q_2, q_3)} \chi^j \\ &= \sum_{(4,2,1)} (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \end{aligned}$$

cuyo resultado es un polinomio simétrico, en tres variables, donde uno de sus veinticuatro términos es $-x_1^4 x_2^2 x_3$; argumento suficiente para asegurar

$$\chi^{S^{(2,1,1)}}([[(1\ 2)(3\ 4)]) = -1.$$

La fórmula de Frobenius parece producir cálculos engorrosos y es de esperarse que la magnitud de ellos aumente con n . Para mostrar que podríamos estar errados al pensar así, veamos otro ejemplo.

Ejemplo. En S_5 consideremos la clase de conjugación C de la permutación $\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ y la partición $\lambda = (3, 2)$. En tal caso σ es del tipo $[0\ 1\ 1\ 0\ 0]$, por lo cual se tiene $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1$. El diagrama de Young que representa a λ tiene dos filas, por lo cual usamos dos variables x_1 y x_2 . Y finalmente tenemos $q_1 = 3 + 2 - 1 = 4$ y $q_2 = 2 + 2 - 2 = 2$. Al aplicar la fórmula de Frobenius se obtiene

$$\begin{aligned} \chi^{S^{(3,2)}}(C) &= \sum (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 + x_2)^0 (x_1^2 + x_2^2)^1 (x_1^3 + x_2^3)^1 \sum_{(4,2)} \\ &= \sum_{(4,2)} (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3) \\ &= \sum_{(4,2)} x_1^6 - x_1^5 x_2 + x_1^4 x_2^2 - x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4 - x_1 x_2^5 - x_2^6 \\ &= 1. \end{aligned}$$

En el capítulo 2 (proposición 2.7) se demostró que la dimensión de una representación irreducible de S_n coincide con la evaluación de la misma en la permutación identidad $\sigma = (1)$. Ello da pie a utilizar la fórmula de Frobenius y la teoría elemental de determinantes para calcular la dimensión de un módulo de Specht S^λ asociado a una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. Como (1) es de tipo $[n, 0, \dots, 0]$, la fórmula de Frobenius permite escribir

$$\dim(S^\lambda) = \chi^{S^\lambda}([(n)]) = [\mathbf{Ox} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n]_{(q_1, q_2, \dots, q_k)}.$$

Analicemos esta igualdad. En primer lugar, $\mathbf{Ox} = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ es un determinante de Vandermonde. Debido a la definición formal de determinante mediante permutaciones tenemos

$$\mathbf{Ox} = \begin{vmatrix} 1 & x_k & \dots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \cdot x_1^{\sigma(1)-1} \cdot x_2^{\sigma(2)-1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma(k)-1}$$

Asimismo, la potencia de la suma de los k términos puede expresarse cual

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_k^{r_k},$$

donde la suma se realiza sobre todas las k -tuplas (r_1, r_2, \dots, r_k) cuyos términos suman n .

Recordemos que el caracter buscado es el coeficiente de $x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \dots \cdot x_k^{q_k}$, donde $q_i = \lambda_i + k - i$, para cada i desde 1 hasta k . Para obtener dicho coeficiente es necesario redistribuir los términos presentes en ambas sumas, luego de lo cual se obtendrá

$$\sum_{\sigma \in S_k} \frac{n!}{(q_1 - \sigma(k) + 1)! \cdot \dots \cdot (q_k - \sigma(1) + 1)!} (q_1 - \sigma(k) + 1)! \cdot (q_2 - \sigma(k - 1) + 1)! \cdot \dots \cdot (q_k - \sigma(1) + 1)!$$

donde la suma se efectúa sobre los $\sigma \in S_k$ que verifican la desigualdad $q_{k-i+1} - \sigma(i) + 1 \geq 0$, con i desde 1 hasta k .

Esta suma a su vez se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{q_1! q_2! \dots q_k!} \sum_{\sigma \in S_k} \prod_{j=1}^k \text{sgn}(\sigma) \cdot (q_j - \sigma(k - j + 1) - 2) \\ &= \frac{n!}{q_1! q_2! \dots q_k!} \begin{vmatrix} 1 & q_k & q_k(q_k - 1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & q_1 & q_1(q_1 - 1) & \dots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, este determinante equivale mediante operaciones de columnas a un determinante de Vandermonde, y la dimensión del módulo de Specht queda

$$\dim(S^\lambda) = \frac{n!}{q_1! q_2! \dots q_k!} \prod_{i < j} (q_i - q_j).$$

Ejemplo. Examinemos la dimensión del módulo de Specht correspondiente a la partición $(n - 1, 1)$. En tal caso se tiene $k = 2$. Los q_i vienen dados por $q_1 = n - 1 + 2 - 1 = n$ y $q_2 = 1 + 2 - 2 = 1$. En virtud de la fórmula anterior se

obtiene $\dim(S^{(n-1,1)}) = \frac{n!}{q_1! q_2!} \prod_{i < j} (q_i - q_j) = \frac{n!}{n! 1!} (n - 1) = n - 1$. Ello corrobora el hecho ya explicado por el cual la dimensión de la representación estándar del grupo S_n es $n - 1$.

La otra forma de calcular la dimensión del módulo de Specht S^λ inside en la forma que tiene el diagrama de Young que representa la partición λ , lo cual nos obliga a introducir algunos nuevos conceptos. Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ representada por el diagrama de Young D , decimos que el par ordenado de números enteros positivos (i, j) es un nodo de D si se cumplen las relaciones $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq \lambda_i$.

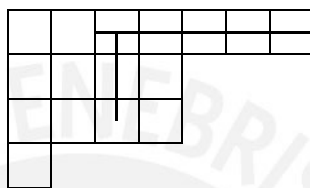
Ejemplo. Las casillas del diagrama de Young $D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$, que representa

la partición $\lambda = (3, 2, 2)$ pueden caracterizarse mediante nodos. Los correspondientes a la primera fila, de izquierda a derecha son $(1, 1)$, $(1, 2)$ y $(1, 3)$.

De modo similar, los nodos restantes son (2, 1) y (2, 2) para la segunda fila, y (3, 1) y (3, 2) para la tercera fila. En general, los nodos de la r -ésima fila de D son aquellos cuya primera componente es r , y los nodos cuya segunda componente es s corresponden a la s -ésima columna.

Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, representada por el diagrama de Young D , y su partición conjugada $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_l)$, un gancho en el nodo (i, j) sobre D es el conjunto de casillas de D correspondientes al nodo (i, j) junto con los $\lambda_i - j$ nodos a la derecha de él, y los $\lambda'_j - i$ nodos debajo.

Ejemplo. El gráfico



muestra un gancho en el nodo $(1, 3)$ sobre el diagrama de Young que representa la partición $\lambda = (7, 4, 4, 1)$ de 16. En este caso, se tiene $i = 1, j = 3$ y $\lambda_i = \lambda_1 = 7$. La partición conjugada a λ es $\lambda' = (4, 3, 3, 3, 1, 1, 1)$, con lo cual $\lambda'_j = \lambda'_3 = 3$. El gancho en cuestión consta del nodo $(1, 3)$ más los $7 - 3 = 4$ nodos a su derecha y los $3 - 1 = 2$ nodos debajo. Se marcan dichas casillas con una línea quebrada llamada gancho.

La longitud del gancho en el nodo (i, j) se denota por h_{ij} y se define como el número de nodos que integran el gancho. La igualdad

$$h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j + 1 - i - j$$

se colige inmediatamente de la definición. En el ejemplo anterior la longitud del gancho mostrado es $7 + 3 + 1 - 1 - 3 = 7$.

Ejemplo. Si colocamos cada casilla de un diagrama de Young con la longitud del gancho que determina el nodo correspondiente a dicha casilla, obtenemos un llenado, donde sí suele haber números repetidos. El gráfico

10	8	7	6	3	2	1
6	4	3	2			
5	3	2	1			
1						

muestra tal llenado en el diagrama considerado en el ejemplo anterior.

Vamos a presentar a través de una proposición otra forma de calcular la dimensión de un módulo de Specht, esta vez mediante ganchos. Demostraremos un caso particular con el fin de resaltar la relación con la fórmula de Frobenius.

Proposición 3.18 Sea λ una partición de un número entero positivo n . La dimensión del módulo de Specht S^λ puede expresarse como

$$\dim(S^\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

donde el producto se calcula sobre todos los ganchos posibles en el diagrama de Young que representa λ .

Prueba. En la fórmula de Frobenius para la dimensión de S^λ utilizamos números q_i definidos por la igualdad $q_i = \lambda_i + k - i$. La longitud de los ganchos correspondientes a los nodos de la primera columna está dada por $h_{i1} = \lambda_i + \lambda'_1 - i - 1 + 1$, pero en toda partición conjugada, λ'_1 es el número de filas del diagrama de Young que representa λ . Luego, al cumplirse $\lambda'_1 = k$, se deduce la igualdad $h_{i1} = \lambda_i + k - i = q_i$. Transponemos y reemplazamos los q_i por h_{i1} en la fórmula de Frobenius, con lo que se tendrá

$$\frac{\dim(S^\lambda)}{n!} = \frac{\prod_{i < j} (h_{i1} - h_{j1})}{h_{11}! h_{21}! \dots h_{k1}!}.$$

Mostraremos el caso particular $k = 3$ por inducción sobre el número de columnas (con el fin de que la claridad de las ideas no se pierda en la inmensidad del caso general, por cierto, confirmable). Sea por lo tanto $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ con los $\lambda_i > 0$, con diagrama de Young representativo D . Desarrollamos la fórmula, aplicamos el determinante de Vandermonde y propiedades de operaciones con filas en determinantes, para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\dim(S^\lambda)}{n!} &= \frac{1}{h_{11}! h_{21}! h_{31}!} \prod_{i < j} (h_{i1} - h_{j1}) \\ &= \frac{1}{h_{11}!} \frac{1}{h_{21}!} \frac{1}{h_{31}!} \begin{vmatrix} h_{11}(h_{11} - 1) & h_{11} & 1 \\ h_{21}(h_{21} - 1) & h_{21} & 1 \\ h_{31}(h_{31} - 1) & h_{31} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{(h_{11}-2)!} & \frac{1}{(h_{11}-1)!} & \frac{1}{h_{11}!} \\ \frac{1}{(h_{21}-2)!} & \frac{1}{(h_{21}-1)!} & \frac{1}{h_{21}!} \\ \frac{1}{(h_{31}-2)!} & \frac{1}{(h_{31}-1)!} & \frac{1}{h_{31}!} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{h_{11}! h_{21}! h_{31}!} \begin{vmatrix} (h_{11}-3)! & (h_{11}-2)! & (h_{11}-1)! \\ (h_{21}-3)! & (h_{21}-2)! & (h_{21}-1)! \\ (h_{31}-3)! & (h_{31}-2)! & (h_{31}-1)! \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Supongamos como hipótesis inductiva que la fórmula es cierta para el diagrama de Young D que se obtiene al suprimir la primera columna en D , que corresponderá a la partición $\bar{\lambda} = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1)$ de $n - 3$.

No es muy difícil comprobar que el último determinante es el recíproco del producto de las longitudes posibles de todos los ganchos sobre \bar{D} , por lo cual

obtenemos

$$\frac{\dim(S^\lambda)}{n!} = \frac{1}{h_{11}} \frac{1}{h_{21}} \frac{1}{h_{31}} \prod_{i,j} \frac{1}{\text{longitud de los ganchos en } D}$$

$$= \prod_{i,j} \frac{1}{h_{ij}}$$

Transponemos nuevamente y obtenemos $\dim(S^\lambda) = \prod_{i,j} \frac{n!}{h_{ij}}$. ■

Ejemplo. El gráfico

10	8	7	6	3	2	1
6	4	3	2			
5	3	2	1			
1						


muestra las longitudes de los ganchos en cada nodo del diagrama de Young correspondiente a la partición $\lambda = (7, 4, 4, 1)$ de 16. El producto de estas longitudes es $\prod_{i,j} h_{ij} = 87\,091\,200$. La dimensión del módulo de Specht que determina dicha partición es entonces

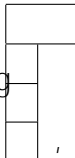
$$\dim(S^{(7,4,4,1)}) = \prod_{i,j} \frac{n!}{h_{ij}} = \frac{16!}{87\,091\,200} = 240\,240.$$

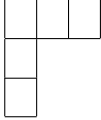
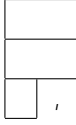
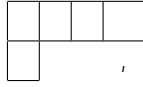
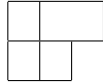

3.9. Representaciones irreducibles de S_5 .

A modo de conclusión describiremos las representaciones irreducibles del grupo simétrico S_5 , mediante los módulos de Specht, como una ocasión para mostrar cómo operan los resultados expuestos. Creemos también oportuno relacionar dichos resultados con la **teoría** de caracteres expuesta en el **capítulo** 2 y de paso, describir las representaciones del grupo alternante respectivo A_5 .

Las particiones de 5 son

- $(1, 1, 1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, que tiene a  por el diagrama de Young,

- $(2, 1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 + 2$, asociada al diagrama de Young .

- $(3, 1, 1) = 1 + 1 + 3$, que tiene la tabla  como diagrama de Young,
- $(2, 2, 1) = 1 + 2 + 2$, que se identifica con ,
- $(4, 1) = 1 + 4$, a la que le corresponde ,
- $(3, 2) = 2 + 3$, asociada al diagrama de Young , y la no menos importante,
- $(5) = 5$, a quien se identifica con  como diagrama de Young.

Al haber siete particiones, los 120 elementos de \mathcal{S}_5 se distribuyen en las siguientes siete clases de conjugación:

- la clase del elemento identidad $[(1)]_{\mathcal{S}_5}$ cuyo cardinal es $\frac{4!}{4!} = 1$.
- $[(1\ 2)]_{\mathcal{S}_5}$ cuyo número de elementos es $\frac{5!}{3!2} = 10$,
- $[(1\ 2\ 3)]_{\mathcal{S}_5}$ con $\frac{5!}{2!3} = 20$ elementos,
- $[(1\ 2)(3\ 4)]_{\mathcal{S}_5}$ que cuenta con $\frac{5!}{2!2!} = 15$ elementos,
- $[(1\ 2\ 3\ 4)]_{\mathcal{S}_5}$ que posee cardinal $\frac{5!}{1!4} = 30$,
- $[(1\ 2)(3\ 4\ 5)]_{\mathcal{S}_5}$ con $\frac{5!}{2!1!3!1!} = 20$ elementos y
- la clase de los 5-ciclos $[(1\ 2\ 3\ 4\ 5)]_{\mathcal{S}_5}$ con cardinal $\frac{5!}{5} = 24$.

Por lo tanto, el grupo \mathcal{S}_5 tiene siete representaciones irreducibles, cuyas dimensiones podemos calcular mediante la igualdad

$$\dim(\mathcal{S}^\lambda) = \frac{n!}{q_1!q_2!\dots q_k!} \prod_{i < j} (q_i - q_j),$$

obtenida a partir de la fórmula de Frobenius (página 87). No está demás recordar que \mathcal{S}^λ es el módulo de Specht asociado a una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de un número natural n , donde los λ_i están ordenados en forma no decreciente. Dicha partición se representa mediante un diagrama de Young que consta de k filas y los q_i están dados por $q_i = \lambda_i + k - i$ para i desde 1 hasta k .

Para la partición $(1, 1, 1, 1, 1)$ se tiene $k = 5$, $q_1 = 1 + 5 - 1 = 5$, $q_2 = 1 + 5 - 2 = 4$, $q_3 = 1 + 5 - 3 = 3$, $q_4 = 1 + 5 - 4 = 2$ y $q_5 = 1 + 5 - 5 = 1$. Reemplazando dichos valores tenemos

$$\dim(\mathcal{S}^{(1,1,1,1,1)}) = \frac{5!}{5!4!3!2!1!} (1)(2)(3)(4)(1)(2)(3)(1)(2)(1) = 1.$$

Para $(2, 1, 1, 1)$ tenemos $k = 4$, $q_1 = 2 + 4 - 1 = 5$, $q_2 = 1 + 4 - 2 = 3$, $q_3 = 1 + 4 - 3 = 2$ y $q_4 = 1 + 4 - 4 = 1$. El cálculo de la dimensión del módulo de Specht respectivo es

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}^{(2,1,1,1)}) &= \frac{5!}{5!3!2!1!} (5 _ 3)(5 _ 2)(5 _ 1)(3 _ 2)(3 _ 1)(2 _ 1) \\ &= \frac{5!}{(6)(2)} (2)(3)(4)(1)(2)(1) = 4. \end{aligned}$$

La partición $(3, 1, 1)$ origina los valores $k = 3$, $q_1 = 3 + 3 - 1 = 5$, $q_2 = 1 + 3 - 2 = 2$ y $q_3 = 1 + 3 - 3 = 1$. Con ellos obtenemos

$$\dim(\mathcal{S}^{(3,1,1)}) = \frac{5!}{5!2!1!} (5 _ 2)(5 _ 1)(2 _ 1) = 6.$$

De la partición $(2, 2, 1)$ obtenemos $k = 3$, $q_1 = 2 + 3 - 1 = 4$, $q_2 = 2 + 3 - 2 = 3$ y $q_3 = 1 + 3 - 3 = 1$, con lo cual la dimensión del módulo de Specht respectivo resulta

$$\dim(\mathcal{S}^{(2,2,1)}) = \frac{5!}{4!3!1!} (4 _ 3)(4 _ 1)(3 _ 1) = 5.$$

A la partición $(4, 1)$ le corresponden los valores $k = 2$, $q_1 = 4 + 2 - 1 = 5$ y $q_2 = 1 + 2 - 2 = 1$. Con ellos se tiene

$$\dim(\mathcal{S}^{(4,1)}) = \frac{5!}{5!1!} (5 _ 1) = 4.$$

Para $(3, 2)$ tenemos $k = 2$, $q_1 = 3 + 2 - 1 = 4$ y $q_2 = 2 + 2 - 2 = 2$, valores con los cuales se obtiene

$$\dim(\mathcal{S}^{(3,2)}) = \frac{5!}{4!2!} (4 _ 2) = 5.$$

Y finalmente, la partición (5) origina los valores $k = 1$ y $q_1 = 5 + 1 - 1 = 5$, de donde se obtiene

$$\dim(\mathcal{S}^{(5)}) = \frac{5!}{5!} = 1.$$

Es pertinente resaltar que con las dimensiones así calculadas se cumple la igualdad

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 5^2 + 1^2 = 120,$$

como lo establece la proposición 2.19.

Es momento de examinar más de cerca estas representaciones y ver cómo se obtienen algunas de ellas a partir de las otras, tarea que habrá sido realizada al completar la tabla

	(1)	(10)	(20)	(15)	(30)	(20)	(24)
	[(1)]	[(1 2)]	[(1 2 3)]	[(1 2)(3 4)]	[(1 2 3 4)]	[(1 2)(3 4 5)]	[(1 2 3 4 5)]
$S^{(5)}$	1						
$S^{(1,1,1,1,1)}$	1						
$S^{(4,1)}$	4						
$S^{(3,2)}$	5						
$S^{(3,1,1)}$	6						
$S^{(2,2,1)}$	5						
$S^{(2,1,1,1)}$	4						

que exhiba los caracteres de dichas representaciones.

Las tres primeras han sido descritas en los **capítulos** 2 y 3. En efecto, el módulo de Specht $S^{(5)}$ es la representación identidad, cuyos caracteres son (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), mientras que $S^{(1,1,1,1,1)}$ es la representación signo, a quien corresponden los caracteres (1, -1, 1, 1, 1, -1, 1).

El módulo de Specht $S^{(4,1)}$ corresponde a la representación estándar. Podemos completar sus caracteres con la fórmula de Frobenius (cuyos detalles se muestran en la página 83). Para tal efecto tenemos $k = 2$, $q_1 = 4 + 2 - 1 = 5$ y $q_2 = 1 + 2 - 2 = 1$. Necesitamos además dos variables formales x_1 , x_2 y luego, fijarnos en el tipo al que corresponde la descomposición cíclica de cada representante de las clases de conjugación.

- Para (1 2) cuyo tipo es [3 1 0 0 0] se tiene entonces $z_1 = 3$ y $z_2 = 1$. El carácter de la representación estándar en la clase de conjugación [(1 2)] es

$$\begin{aligned} \chi_{S(4,1)}([(1\ 2)]) &= \sum (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)^3 (x_1^2 + x_2^2) \sum_{(5,1)} \\ &= \sum x_1^6 + 2x_1^5x_2 + x_4^2x_2^2 - x_1^2x_2^4 - 2x_1x_2^5 - x_2^6 \sum_{(5,1)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

- El representante (1 2 3) es de tipo [2 0 1 0 0], de modo que se tiene $z_1 = 2$ y $z_3 = 1$. Con dichos valores se obtendrá

$$\begin{aligned} \chi_{S(4,1)}([(1\ 2\ 3)]) &= \sum (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)^2 (x_1^3 + x_2^3) \sum_{(5,1)} \\ &= \sum x_1^6 + x_1^5x_2 - x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 - x_1x_2^5 - 2x_2^6 \sum_{(5,1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

- El producto (1 2)(3 4) es de tipo [1 2 0 0 0], por lo cual se cumple $z_1 = 1$ y $z_2 = 2$. El carácter buscado es

$$\begin{aligned} \chi_{S(4,1)}([(1\ 2)(3\ 4)]) &= \sum (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) (x_1^2 + x_2^2)^2 \sum_{(5,1)} \\ &= \sum x_1^6 + x_1^4x_2^2 - x_1^2x_2^4 - x_2^6 \sum_{(5,1)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ante la ausencia de término $x_1^5x_2^1$ en el polinomio.

- El ciclo (1 2 3 4) de tipo [1 0 0 1 0] exige usar $z_1 = 1$ y $z_4 = 1$. Al calcular el caracter en la clase de conjugación respectiva se obtiene

$$\begin{aligned}\chi_{S^{(4,1)}}([(1\ 2\ 3\ 4)]) &= \sum (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)(x_1^4 + x_2^4) \sum_{(5,1)} \\ &= \sum_{(5,1)} x_1^6 - x_1^4 x_2^2 + x_2^2 x_1^4 - x_2^6 \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Los miembros de la clase representada por (1 2)(3 4 5) son de tipo [0 1 1 0 0]. Así se tiene $z_2 = z_3 = 1$ y al reemplazar los valores en la fórmula se obtendrá

$$\begin{aligned}\chi_{S^{(4,1)}}([(1\ 2)(3\ 4\ 5)]) &= \sum (x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3) \sum_{(5,1)} \\ &= \sum_{(5,1)} x_1^6 - x_1^5 x_2 + x_1^4 x_2^2 - x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4 - x_1 x_2^5 + x_2^6 \\ &= -1.\end{aligned}$$

- El ciclo (1 2 3 4 5) es de tipo [0 0 0 0 1], por lo cual se tiene $z_5 = 1$. Al calcular el caracter se obtendrá

$$\begin{aligned}\chi_{S^{(4,1)}}([(1\ 2\ 3\ 4\ 5)]) &= \sum (x_1 - x_2) \cdot (x_1^5 + x_2^5) \sum_{(5,1)} \\ &= \sum_{(5,1)} x_1^6 - x_1^5 x_2 + x_1^4 x_2^2 - x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4 - x_1 x_2^5 + x_2^6 \\ &= -1.\end{aligned}$$

Nótese que los cálculos anteriores permiten obtener de manera inmediata los caracteres correspondientes a $S^{(3,2)}$. En tal caso se tiene $k = 2$, $q_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 4$ y $q_2 = 2 + 2 \cdot 2 = 2$, por lo cual buscaremos en los polinomios antes hallados el coeficiente que corresponde a $x_1^4 x_2^2$. Los caracteres buscados son, en consecuencia, (5, 1, -1, 1, -1, 1, 0)

Con esta información obtenemos

	(1)	(10)	(20)	(15)	(30)	(20)	(24)
	[(1)]	[(1 2)]	[(1 2 3)]	[(1 2)(3 4)]	[(1 2 3 4)]	[(1 2)(3 4 5)]	[(1 2 3 4 5)]
$S^{(5)}$	1	1	1	1	1	1	1
$S^{(1,1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1
$S^{(4,1)}$	4	2	1	0	0	-1	-1
$S^{(3,2)}$	5	1	-1	1	-1	1	0
$S^{(3,1,1)}$	6						
$S^{(2,2,1)}$	5						
$S^{(2,1,1,1)}$	4						

como resultado parcial.

Podríamos continuar por este camino para completar la tabla, aunque es de esperarse que los cálculos se compliquen cuando se trate de particiones con más de dos filas. Una vía alterna que podemos seguir hacia la misma meta es la **teoría** de caracteres expuesta en el **capítulo 2**.

Uno de los módulos de Specht que falta podría ser $\mathcal{S}^{(1,1,1,1,1)} \otimes \mathcal{S}^{(4,1)}$, cuyos caracteres son

$$(4, -2, 1, 0, 0, 1, -1).$$

Al cumplirse la igualdad $4^2 + 2^2(10) + 1^2(20) + 1^2(20) + 1^2(24) = 120$, concluimos que tal representación es irreducible, y más aún, se tiene

$$\mathcal{S}^{(2,1,1,1)} = \mathcal{S}^{(1,1,1,1,1)} \otimes \mathcal{S}^{(4,1)}.$$

De manera similar, al calcular los caracteres de $\mathcal{S}^{(1,1,1,1,1)} \otimes \mathcal{S}^{(3,2)}$ se obtiene $(5, -1, -1, 1, 1, -1, 0)$. Dichos valores cumplen la igualdad

$$5^2 + 1^2(10) + 1^2(20) + 1^2(15) + 1^2(30) + 1^2(20) = 120,$$

lo cual permite escribir $\mathcal{S}^{(2,2,1)} = \mathcal{S}^{(1,1,1,1,1)} \otimes \mathcal{S}^{(3,2)}$.

La tabla obtenida hasta el momento es

	(1) [(1)]	(10) [(1 2)]	(20) [(1 2 3)]	(15) [(1 2)(3 4)]	(30) [(1 2 3 4)]	(20) [(1 2)(3 4 5)]	(24) [(1 2 3 4 5)]
$\mathcal{S}^{(5)}$	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{S}^{(1,1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1
$\mathcal{S}^{(4,1)}$	4	2	1	0	0	-1	-1
$\mathcal{S}^{(3,2)}$	5	1	-1	1	-1	1	0
$\mathcal{S}^{(3,1,1)}$	6						
$\mathcal{S}^{(2,2,1)}$	5	-1	-1	1	1	-1	0
$\mathcal{S}^{(2,1,1,1)}$	4	-2	1	0	0	1	-1

y nos muestra una representación irreducible cuyos caracteres falta completar. Para tal efecto, la fórmula de Frobenius obliga a trabajar con polinomios simétricos de tres variables y ello resolvería el problema de manera mecánica. Por otro lado, la teoría de caracteres exige buscar nuevos espacios vectoriales de representación como por ejemplo potencias simétricas y potencias exteriores.

En tal sentido, los caracteres de la representación $\mathcal{S}^{(4,1)} \otimes \mathcal{S}^{(4,1)}$ son

$$(16, 4, 1, 0, 0, 1, 1).$$

Resulta evidente que no es la representación irreducible que estamos buscando. Sin embargo el uso del producto interno de caracteres presentado en el capítulo 2 sirve a este fin. Al calcular el producto interno de $\chi_{\mathcal{S}^{(4,1)} \otimes \mathcal{S}^{(4,1)}}$ (al cual denotaremos como χ_V) con los caracteres de cada una de las otras

representaciones irreducibles mostradas en la tabla tenemos

$$\begin{aligned}
 (\chi_V, \chi_{S^{(5)}}) &= \frac{1}{120} (16 + 40 + 20 + 20 + 24) = 1, \\
 (\chi_V, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}}) &= \frac{1}{120} (16 - 40 + 20 - 20 + 24) = 0, \\
 (\chi_V, \chi_{S^{(4,1)}}) &= \frac{1}{120} (64 + 80 + 20 - 20 - 24) = 1, \\
 (\chi_V, \chi_{S^{(3,2)}}) &= \frac{1}{120} (80 + 40 - 20 + 20) = 1, \\
 (\chi_V, \chi_{S^{(2,2,1)}}) &= \frac{1}{120} (80 - 40 - 20 - 20) = 0 \text{ y} \\
 (\chi_V, \chi_{S^{(2,1,1,1)}}) &= \frac{1}{120} (64 - 80 + 20 + 20 - 24) = 0.
 \end{aligned}$$

De ello, la representación V se expresa como suma directa de $S^{(5)}$, $S^{(4,1)}$, $S^{(3,2)}$ y otra representación (llamémosla W), a través de la igualdad $V = S^{(5)} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus W$. Traducida esta igualdad a caracteres, se tiene $\chi_V = \chi_{S^{(5)}} + \chi_{S^{(4,1)}} + \chi_{S^{(3,2)}} + \chi_W$, de donde se cumple

$$\begin{aligned}
 \chi_W &= \chi_V - (\chi_{S^{(5)}} + \chi_{S^{(4,1)}} + \chi_{S^{(3,2)}}) \\
 &= (16, 4, 1, 0, 0, 1, 1) - (10, 4, 1, 2, 0, 1, 0) \\
 &= (6, 0, 0, -2, 0, 0, 1).
 \end{aligned}$$

La igualdad $6^2(1) + 2^2(15) + 1^2(24) = 120$ indica que $W = S^{(3,1,1)}$ es la representación irreducible faltante, con lo cual, la tabla de caracteres

	(1) [(1)]	(10) [(1 2)]	(20) [(1 2 3)]	(15) [(1 2)(3 4)]	(30) [(1 2 3 4)]	(20) [(1 2)(3 4 5)]	(24) [(1 2 3 4 5)]
$S^{(5)}$	1	1	1	1	1	1	1
$S^{(1,1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1
$S^{(4,1)}$	4	2	1	0	0	-1	-1
$S^{(3,2)}$	5	1	-1	1	-1	1	0
$S^{(3,1,1)}$	6	0	0	-2	0	0	1
$S^{(2,2,1)}$	5	-1	-1	1	1	-1	0
$S^{(2,1,1,1)}$	4	-2	1	0	0	1	-1

determina todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico S_5 .

Para describir las representaciones del grupo alternante A_5 deshechamos las clases de conjugación con signo -1 y tenemos

	(1) [(1)]	(20) [(1 2 3)]	(15) [(1 2)(3 4)]	(24) [(1 2 3 4 5)]
$S^{(5)}$	1	1	1	1
$S^{(1,1,1,1,1)}$	1	1	1	1
$S^{(4,1)}$	4	1	0	-1
$S^{(2,1,1,1)}$	4	1	0	-1
$S^{(3,1,1)}$	6	0	-2	1
$S^{(3,2)}$	5	-1	1	0
$S^{(2,2,1)}$	5	-1	1	0

como tabla preliminar. Acá saltan a la vista las igualdades $S^{(5)} = S^{(1,1,1,1,1)}$, $S^{(4,1)} = S^{(2,1,1,1)}$ y $S^{(3,2)} = S^{(2,2,1)}$. En segundo lugar, si aplicamos el criterio de la suma de cuadrados comprobamos que $S^{(5)}$, $S^{(4,1)}$ y $S^{(3,2)}$ son irreducibles mientras $S^{(3,1,1)}$ no lo es, pues la suma $6^2 + 2^2(10) + 1^2(24)$ no coincide con el orden del grupo A_5 . Surge la esperanza de que $S^{(3,1,1)}$ esté contenido en las representaciones irreducibles, pero el cálculo de los productos internos nos dice $(\chi_{S^{(3,1,1)}}, \chi_{S^{(5)}}) = (\chi_{S^{(3,1,1)}}, \chi_{S^{(4,1)}}) = (\chi_{S^{(3,1,1)}}, \chi_{S^{(3,2)}}) = 0$. La tercera línea de acción atañe a las clases de conjugación en A_5 . En virtud del lema 1.25 y la proposición 1.26, la clase $[(1\ 2\ 3)]_{S_5}$ permanece idéntica en A_5 , por ser de tipo $[2\ 0\ 1\ 0\ 0]$; mientras que la clase $[(1\ 2\ 3\ 4\ 5)]_{S_5}$, por ser de tipo $[0\ 0\ 0\ 0\ 1]$, se separa en dos clases de equivalencia, con doce elementos cada una en A_5 .

Según este último resultado, la representación $S^{(3,1,1)}$ debe expresarse como la suma directa de dos representaciones irreducibles (llamémoslas X e Y) en el grupo A_5 . Si n_1 y n_2 son las dimensiones respectivas, entonces la igualdad $1^2 + 4^2 + 5^2 + n_1^2 + n_2^2 = 60$ implica $n_1 = n_2 = 3$. La siguiente tabla

	(1) [(1)]	(20) [(1 2 3)]	(15) [(1 2)(3 4)]	(12) [(1 2 3 4 5)]	(12) [(1 3 2 4 5)]
$S^{(5)}$	1	1	1	1	1
$S^{(4,1)}$	4	1	0	-1	-1
$S^{(3,2)}$	5	-1	1	0	0
X	3	α	β	γ	δ
Y	3	$-\alpha$	$-2 - \beta$	$1 - \gamma$	$1 - \delta$

nos brinda información más precisa. A partir de las relaciones de ortogonalidad se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3 + 20\alpha + 15\beta + 12\gamma + 12\delta &= 0 \\ 12 + 20\alpha - 12\gamma - 12\delta &= 0 \\ 15 - 20\alpha + 15\beta &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver dicho sistema se deduce $\alpha = 0$, $\beta = -1$ y $\gamma + \delta = 1$. Además debe cumplirse $\gamma^2 + \delta^2 = 3$ y $(1 - \gamma)^2 + (1 - \delta)^2 = 3$. De ello ha de tenerse $\delta^2 + (1 - \delta)^2 = 3$, es decir, $\delta^2 - \delta - 1 = 0$. Al resolver dicha ecuación se obtiene $\delta = 1 - \gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\gamma = 1 - \delta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. La tabla

	(1) [(1)]	(20) [(1 2 3)]	(15) [(1 2)(3 4)]	(12) [(1 2 3 4 5)]	(12) [(1 3 2 4 5)]
$S^{(5)}$	1	1	1	1	1
$S^{(4,1)}$	4	1	0	-1	-1
$S^{(3,2)}$	5	-1	1	$0\sqrt{-}$	$0\sqrt{-}$
X	3	0	-1	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
Y	3	0	-1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

muestra finalmente los caracteres de A_5 .

A modo de palabras finales, creemos haber cubierto con lo expuesto los objetivos proyectados en el plan de tesis. Conviene recordar que en este trabajo nos propusimos mediante el estudio de los diagramas de Young y módulos de Specht continuar y complementar un trabajo de tesis previo ([9]) acerca de la teoría básica de representación de los grupos simétricos. Para ello fue necesario tratar en el **capítulo 1** aspectos que hacen interesantes estos grupos como lo es el comportamiento de sus clases de conjugación. Luego no resistimos la tentación de desarrollar en el **capítulo 2**, a nuestro propio estilo, el contenido temático fundamental de la representación de estos grupos. Contando con dicha información, hemos tratado de organizar de un modo coherente los nexos entre representaciones irreducibles de grupos simétricos y temas relacionados con los diagramas de Young. Esperamos que este trabajo sirva entre otras cosas para el lector que desee seguir profundizando en la materia.



Bibliografía

- [1] FRALEIGH, JOHN. *Álgebra abstracta: primer curso*. Delaware, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [2] FULTON, WILLIAM. *Young tableaux*. Cambridge University Press, 1997.
- [3] FULTON, WILLIAM y HARRIS, JOE. *Representation theory: a first course*. New York, Springer-Verlag, 1991.
- [4] HERSTEIN, I.N. *Álgebra abstracta*. México, Grupo Editorial Iberoamericana, 1988.
- [5] HERSTEIN, I.N. *Álgebra moderna: grupos, anillos, campos, teoría de Galois*. México, Trillas, 1983.
- [6] JAMES, G. D. *The representation theory of the symmetric groups*. Berlín Heidelberg, Springer-Verlag, 1978.
- [7] KIPKIRUI, BENJAMIN. *On irreducible representations of the symmetric group*. Tesis de Magíster en Matemáticas, University of Nairobi, 2009.
- [8] KOSTRIKIN, A, I. *Introducción al álgebra*. Moscú, MIR, 1983.
- [9] PASTOR, CARLOS. *Representaciones de grupos finitos*. Tesis de Magíster en Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2012.
- [10] PEEL, M H. *Hook representations of symmetric groups*. En Glasgow Mathematical Journal Volume 12, Issue 2, 1971.
- [11] SAGAN, BRUCE. *The symmetric group*. New York, Springer-Verlag, 1991.
- [12] SERRE, JEAN PAUL. *Representaciones lineales de los grupos finitos*. Barcelona, Omega, 1970.
- [13] TOLA PASQUEL, JOSÉ. *Álgebra lineal y multilineal. Segunda parte*. Lima, PUCP Fondo Editorial, 1989.
- [14] ZALDÍVAR, FELIPE. *Introducción a la teoría de grupos*. México, Reverté, 2006.