PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CARACTERIZACIÓN DEL MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE DE LA PROPORCIONALIDAD EN LOS TEXTOS DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

LUIGI NAJARRO ALCÓCER

Dirigido por

CINTYA SHERLEY GONZALES HERNÁNDEZ

San Miguel, 2018

DEDICATORIA

A mi compañera de vida por su apoyo constante.

A mis trillizos Valentina, Micaela y Luigi Alejandro por saber esperar.

AGRADECIMIENTOS

A la profesora Cintya Gonzales Hernández por su exigencia y comprensión.

A los profesores Cecilia Gaita y Francisco Ugarte por sus sugerencias y orientaciones.

RESUMEN

Nuestra investigación tiene por objetivo describir las características del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad presente en los textos oficiales de Matemática de Educación Secundaria. Así esta investigación responde a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad presente en los textos de Matemática de Educación Secundaria?

Para responder a nuestra pregunta, desarrollamos una investigación cualitativa con enfoque bibliográfico utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), por ello tomamos en cuenta modelos epistemológicos construidos en torno a la proporcionalidad para poder describir la organización matemática (OM) a enseñar.

Iniciamos revisando cómo se presenta la proporcionalidad en los documentos curriculares, identificando que nuestro objeto de estudio es considerado en Rutas de Aprendizaje (2015) los cinco grados de secundaria en la competencia referida a cantidad y adicionalmente en primero y segundo de secundaria en la competencia de regularidad, equivalencia y cambio donde se pretende articular con el objeto función. Luego identificamos y describimos la OM tanto en los textos oficiales otorgados a los estudiantes y manuales para docentes de educaión secundaria en la educación básica regular de nuestro país. Esta descripción la hacemos a través de los componentes de una organización matemática. El análisis de los textos escolares muestra 6 tipos de tareas, 11 tareas, 17 técnicas y 8 discursos tecnológicos, por otro lado en los manuales para docentes identificamos los mismos discursos tecnológicos y la misma cantidad de tipos de tareas compuestas por 15 tareas y 23 técnicas. Aunque se identifican técnicas y tareas de las modelizaciones ecuacionales y funcionales, sobre todo en los grados de primero y segundo, las modelizaciones dominantes en el nivel secundaria son la modelización discursiva y la proporcional, que en su conjunto es denominada como organización clásica de la proporcionalidad. Asimismo en cuanto a los objetos ostensivos se evidencia una presencia notable de las tablas de proporcionalidad.

PALABRAS CLAVE: Organización matemática, proporcionalidad, función, modelización.

ABSTRACT

Our research aims to describe the characteristics of the dominant epistemological model of proportionality present in the texts of Mathematics of Secondary Education. Thus this research responds to the following question: What is the dominant epistemological model of proportionality present in the texts of Mathematics of Secondary Education?

To answer our question, we developed a qualitative research with bibliographical approach using the Didactic Anthropological Theory (TAD) and aspects of epistemological models built around the proportionality to be able to describe the mathematical organization (OM) to teach.

We begin by reviewing how proportionality is presented in the curricular documents, identifying that our object of study is considered in Learning Paths (2015) the five grades of secondary in the competence referred to quantity and additionally in first and second of secondary in the competition of regularity, equivalence and change where it is intended to articulate with the function object. We then identify and describe OM both in the official texts given to students and manuals for teachers of the secondary in the regular basic education of our country. This description is made through the components of a mathematical organization. The analysis of the textbooks shows 6 types of tasks, 11 tasks, 17 techniques and 8 technological discourses, on the other hand in the manuals for teachers we identify the same technological speeches and the same number of types of tasks composed by 15 tasks and 23 techniques. Although techniques and tasks of equational and functional modeling are identified, especially in the first and second grades, the dominant modeling at the secondary level is discursive and proportional modeling, which in its entirety is called the classical proportionality organization. Likewise, with regard to ostensive objects, a remarkable presence of proportionality tables is evident.

KEY WORDS: Mathematical organization, proportionality, function, modeling.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El trabajo que presentamos a continuación describe las características del modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad presente en los textos escolares de Matemática y Manuales para los docentes, que fueron distribuidos respectivamente a estudiantes y docentes de instituciones públicas del Perú por el Ministerio de Educación en el año 2016. Estos materiales fueron diseñados teniendo en cuenta los indicadores de desempeño descritos en las Rutas de Aprendizaje (2015). Este análisis nos permitirá identificar las características del modelo epistemológico dominante presente.

Utilizaremos las herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico para llevar a cabo nuestro análisis de la organización matemática a enseñar. Según la transposición didáctica, esta organización tiene influencia en la organización matemática enseñada y en la organización matemática aprendida.

El objetivo de esta investigación es describir el modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad presente en los textos de Matemática de Educación Secundaria.

En el capítulo I se presenta la problemática de investigación; en la que abordamos los antecedentes, la justificación, la pregunta de investigación y los objetivos planteados para nuestro trabajo.

En el capítulo II realizamos el desarrollo del marco teórico y la metodología a utilizar en nuestra investigación. En este capítulo, describimos algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999) como la noción de praxeología y los objetos ostensivos. También consideramos la definición de un Modelo Epistemológico de Referencia, pues utilizaremos uno como instrumento de análisis del modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad. Asimismo, indicamos que la metodología que adoptaremos para nuestro trabajo corresponde a un enfoque cualitativo de tipo bibliográfico.

En el capítulo III realizamos un estudio de la proporcionalidad considerando lo siguiente: la proporcionalida desde la perspectiva matemática y como modelo funcional, los objetos ostensivos en la proporcionalidad y la proporcionalidad en los documentos curriculares.

En el capítulo IV se presenta el análisis de los materiales. Se inicia con una descripción de los textos escolares y los Manuales para los docentes. Luego se realiza la identificación y descripción de Tipos de tareas, tareas, técnicas y discursos tecnológicos presentes en los textos escolares y en los Manuales para los docentes, documento en el que podemos encontrar los problemas desarrollados del cuaderno de trabajo.

Concluimos nuestro trabajo presentando los resultados encontrados así como las consideraciones finales referentes al estudio realizado.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentamos los antecedentes, la justificación, el problema abordado y los objetivos trazados para nuestra investigación.

1.1. Antecedentes y justificación de investigación

Los principales antecedentes considerados para esta investigación están referidos a estudios sobre el proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares, la modelización como herramienta de articulación de contenidos y la proporcionalidad bajo el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Iniciamos mencionando la investigación de Bolea (2002) quien aborda el problema didáctico del álgebra escolar y su evolución. Asimismo, pone de manifiesto la necesidad de explicitar, desde la didáctica, un modelo epistemológico específico del álgebra escolar.

La autora analiza determinados procesos de algebrización de algunas organizaciones matemáticas escolares presentes en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de España, tales como programas de cálculo, divisibilidad en N y la proporcionalidad (objeto de nuestra investigación). El marco teórico que orienta su investigación es la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Una conclusión importante es que existe un modelo epistemológico dominante en la institución escolar que identifica el álgebra escolar con una prolongación y generalización de la aritmética escolar que Bolea ha denominado "aritmética generalizada", indica que dicho patrón constituye la base sobre el trabajo de los docentes.

El trabajo de Bolea aportará a nuestra investigación los fundamentos teóricos respecto a modelización algebraica y a los tres niveles de algebrización que propone, es decir, en donde se evidencia el desarrollo de las técnicas y la emergencia de nuevas tecnologías que las fundamente.

El trabajo de investigación realizado por García (2005) se centra en el estudio de la proporcionalidad como una relación más dentro del conjunto de posibles relaciones de magnitudes. El autor elabora un Modelo Epistemológico de Referencia (MER). Este modelo permite, según su investigación, poner en evidencia la desarticulación de las prácticas matemáticas que en la educación secundaria se realizan en torno a las relaciones de proporcionalidad y al resto de relaciones funcionales. Asimismo, la investigación presenta un Recorrido de Estudio de Investigación (REI) con el objetivo de articular el estudio de diferentes tipos de relaciones funcionales. Este MER se desarrolla como un proceso de modelización en el que la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas provoca la necesidad de cuestionar las técnicas iniciales, esencialmente aritméticas, y de hacerlas evolucionar.

García indica que para estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad entre magnitudes, es necesario ampliar el campo de estudio a un conjunto de relaciones entre magnitudes. La articulación de las diferentes organizaciones matemáticas en torno a la proporcionalidad y a las relaciones entre magnitudes debe partir del cuestionamiento de sus razones de ser y de la posibilidad de plantearlas más allá del nivel temático.

El trabajo de García nos orientará en el análisis de cómo se enfoca la proporcionalidad en los textos escolares de Matemática, pues nuestra investigación estará centrada en el análisis de la organización matemática a enseñar, es decir la noosfera, cuyos elementos pueden ser identificados a partir de los documentos curriculares oficiales y los libros de texto que son difundidos a nivel nacional. Es importante señalar lo fundamental de trabajar en torno a la organización matemática a enseñar, pues tiene influencia directa en las organizaciones enseñadas y aprendidas. Utilizaremos el MER elaborado por García como organización matemática de referencia.

Asimismo, presentamos como antecedente la investigación realizada por Quentasi (2015) cuyo objetivo fue analizar la organización matemática de la unidad de un libro de matemática de primer grado de secundaria, que contiene los temas de la función lineal y proporcionalidad directa, y a partir de ello, establecer si existe articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa. La investigación considera como marco referencial la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard, asimismo, emplea indicadores de completitud de Fonseca (2004) de una organización matemática local y los niveles de algebrización de la proporcionalidad propuestos por Bolea (2002). Una de las conclusiones a la que llega la investigación es que no se verifica los indicadores de completitud de la organización matemática. Asimismo, sugiere que, con referencia a los niveles de algebrización, correspondería trabajar en el segundo nivel, es decir, en la reducción a la función lineal de todas las tareas de proporcionalidad directa.

El trabajo de Quentasi aportará información y elementos necesarios para poder explorar el documento oficial en torno a la proporcionalidad y cómo se presenta la organización matemática en los textos escolares de matemática de secundaria que se han elaborado para ser usados por alumnos y profesores de colegios estatales del Perú.

La importancia del objeto matemático proporcionalidad se evidencia en que desde la antigüedad es considerada en diferentes ámbitos de la vida. Asimismo, es tomado en cuenta en diferentes currículos a nivel mundial, como por ejemplo en la ESO de España. Por otro lado, es común encontrarla en los sílabos de los diferentes programas de Educación Superior, como en Facultades de Arquitectura o Ciencias. Por ello, consideramos relevante y necesario realizar un estudio exploratorio del modelo epistemológico dominante teniendo en cuenta el MER de García (2005), las organizaciones matemáticas presentes en los textos escolares de Secundaria y la normativa curricular. Es importante considerar que en el proceso de transposición didáctica, la OM a enseñar es fundamental sobre el resto de las organizaciones matemáticas (enseñadas y aprendidas).

Utilizaremos las disposiciones del MINEDU y analizaremos en qué grados se sugiere la enseñanza de la proporcionalidad.

La proporcionalidad, según el Ministerio de Educación, es considerada dentro de las dos siguientes competencias referidas a: cantidad, y regularidad, equivalencia y cambio. Analizaremos las páginas de los textos escolares y Manuales para los docentes referidos a la proporcionalidad, estos materiales, actualmente, son difundidos por el Ministerio de Educación.

Pretendemos en principio identificar la estructura de la organización matemática proporcionalidad en los textos escolares de Matemática de Secundaria y en los Manuales para los docentes considerando los componentes de toda praxeología. En segundo lugar, intentar realizar un análisis del modelo epistemológico dominante presente.

En cuanto a los Manuales pata los docentes, tenemos en cuenta que cada autor propone su propia solución a las situaciones contextualizadas planteadas, solución que será considerada después por el profesor para desarrollar en su clase una estrategia efectiva.

Según Bosch (1994), es importante tener en cuenta que los Manuales son herramientas de creación de un universo institucional, no podrían por sí solos poder describir toda la actividad matemática. Aunque se constituyen en aspectos importantes para el docente pues presentan por ejemplo, de manera explícita definiciones, representaciones, etc., la práctica del profesor no se debería limitar a la descripción que los materiales presentan.

Finalmente, es importante señalar que en nuestra experiencia en la Educación Básica Regular, y de manera específica en el nivel Secundario, hemos sido testigos de la relevancia de este objeto en las Evaluaciones Censales de Estudiantes, como por ejemplo en la ECE 2015 y ECE 2016 para alumnos de II de secundaria. Asimismo, es común encontrar tareas vinculadas a la proporcionalidad en los diferentes exámenes de admisión de casas de estudio de nivel superior.

1.2. Pregunta y objetivos de la investigación

El problema de investigación se resume en la siguiente pregunta:

¿Cuál es el modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad presente en los textos de Matemática de Educación Secundaria?

Objetivo general

Describir las características del modelo epistemológico dominante presente en los textos de Matemática de Educación Secundaria

Objetivos específicos

Esta investigación tiene como objetivos específicos:

1. Identificar y describir el objeto matemático proporcionalidad en las Rutas de Aprendizaje y en el Currículo Nacional.
2. Identificar y describir los elementos de las organizaciones matemáticas en torno a la proporcionalidad presente en los textos escolares y Manuales para el docente de Matemática difundidos a nivel nacional por el Ministerio de Educación.
3. Identificar las características del modelo epistemológico dominante presente en los textos escolares de Matemática difundidos a nivel nacional por el Ministerio de

Educación, utilizando como organización de referencia el MER elaborado por García (2005)

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

En este capítulo, presentamos elementos de la teoría que sustenta nuestro trabajo de investigación, la Teoría Antropológica de lo Didáctico, la noción de praxeología, los objetos ostensivos y la definición de Modelo Epistemológico de Referencia.

Así también en este apartado se especificará la metodología y la secuencia de pasos a utilizar.

2.1. Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard (1999) sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Significa oponerse a la visión particular del mundo en que se excluyen los objetos, conceptos, temas, que se establecen como no pertinentes a la matemática porque aparecen culturalmente alejados de los temas considerados como emblemáticos de las cuestiones de didáctica de las matemáticas. La TAD considera a la didáctica de la matemática como una actividad humana y admite que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único."

La TAD evidenciará un modelo general de las matemáticas institucionales que incluya la matemática escolar como un caso particular y un modelo de las actividades matemáticas institucionales que incluya la enseñanza y aprendizaje escolar de las matemáticas como una actividad matemática institucional particular.

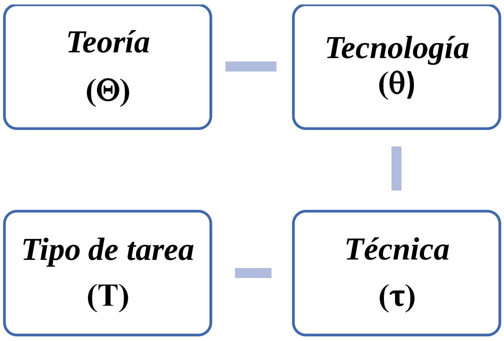
En los últimos desarrollos de la teoría antropológica se modeliza la matemática institucional mediante la noción de organización o praxeología matemática y las actividades matemáticas institucionales se modelizan mediante la noción de proceso de estudio de una organización matemática en el seno de una institución, proceso de estudio que abarca y generaliza las clásicas nociones de proceso de enseñanza y aprendizaje, y que, a su vez, se puede describir en términos de organización o praxeología didáctica.

2.2. Praxeologías

La noción de praxeología no tiene una definición explícita pero se describe mediante tareas, actividades, problemas, ejercicios, que son construcciones institucionales.

Actividades propias de una institución, es decir, estas tareas se construyen en una institución o en una clase, y este proceso de construcción y/o re-construcción de una tarea es un problema complejo, por todo lo que esa actividad implica. La TAD presenta la siguiente estructura que permite el análisis de las tareas: [T/τ/θ/Θ], donde: T es el tipo de tareas, τ es la técnica, la manera de resolver las tareas del tipo T, θ es la tecnología, la justificación de τ y Θ es la teoría, es decir, la justificación de θ.

Figura 1: Elementos de una organización matemática



Autoría propia

Así, la expresión [T/ τ /θ/Θ] constituye una praxeología puntual, una praxeología relativa a un tipo de tareas T. Esta organización praxeológica está constituida por dos bloques: uno tecnológico – teórico y otro práctico – técnico.

Figura 2: Bloques de una praxeología

[θ/Θ] Bloque tecnológico – teórico	**[T/ τ]: Bloque práctico – técnico**
Este bloque se identifica con el saber	*Este bloque se identifica con el saber – hacer*

Autoría propia

Además del concepto de tipos de tareas T, que es conjunto de ejercicios, problemas, o actividades propuestas, otro elemento que propone la TAD es el de técnica τ, un saber - hacer una determinada tarea. Una técnica τ es una manera de dar solución efectiva a una tarea. Esta técnica τ solo tiene éxito sobre una parte de las tareas, y a esta parte se le denomina “alcance de la técnica”. Cuando la técnica fracasa sobre la otra parte de las tareas, entonces se puede decir que “no se sabe, en general, realizar las tareas de cierto tipo”. Puede existir otra técnica ô que sí resuelva la tarea en mayor medida que la anterior, diremos en este caso que una técnica puede ser superior a otra. En nuestra investigación, consideraremos la reducción a la unidad y la regla de tres simple como técnicas que permiten resolver tareas específicas.

El tercer elemento planteado por Chevallard (1999) es el de la tecnología θ. Entiende por tecnología θ a un discurso sobre la técnica τ, cuyo primer objetivo es justificar racionalmente la técnica τ para asegurarse de que pueda realizar las tareas. El tipo de racionalidad respecto de la tecnología θ que se utiliza, varía según la institución. Se debe admitir que siempre existirá una tecnología θ, es decir, algún discurso racional que justifique la técnica τ. De hecho podría suceder que la tecnología θ se integre a la técnica τ; es decir la justificación es parte de la técnica τ para resolver una tarea. En segundo lugar, podría ocurrir que existiese una única técnica τ, reconocida y empleada, por lo que confiere a esta técnica v una característica de "autotecnológica", es decir, actuar de esta manera no exige justificación.

La definición de razones y proporciones es la tecnología que justifica, por ejemplo, la técnica "regla de tres" para nuestra investigación.

Otro elemento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico es la teoría Θ. La teoría cumple la misma función frente a la tecnología, que la tecnología frente a la técnica. La teoría se ubica en un nivel superior de justificación. Por ejemplo, la teoría de las magnitudes variables podría justificar la tecnología que respalde la técnica de "regla de tres".

Chevallard señala que la justificación podría perseguirse hasta el infinito. Se debe considerar que en muchas instituciones la justificación de una tecnología, es decir la teoría, proviene por simple reenvío de una tradición histórica y de ninguna manera a través de una forma reflexiva, por ejemplo, una teoría implícita y cultural.

Adicionalmente a los cuatro componentes descritos, está la institución I. Generalmente, en una institución I, una teoría responde a varias tecnologías, cada una de las cuales a su vez justifican varias técnicas correspondientes a otros tantos tipos de tareas.

En lo que respecta a las praxeologías, Chevallard (1999) señala:

> "Se puede imaginar un mundo institucional en el que las actividades humanas estuviesen regidas por praxeologías bien adaptadas que permitiesen realizar todas las tareas deseadas de una manera a la vez eficaz, segura e inteligible. Pero tal mundo no existe: como se ha sugerido, las instituciones son recorridas por toda una dinámica praxeológica" (p. 7)

Un ejemplo de que esta adaptación no existe es que las praxeologías envejecen; sus componentes teóricos, tecnológicos, técnicos pierden valor cuando emergen nuevas técnicas y tecnologías.

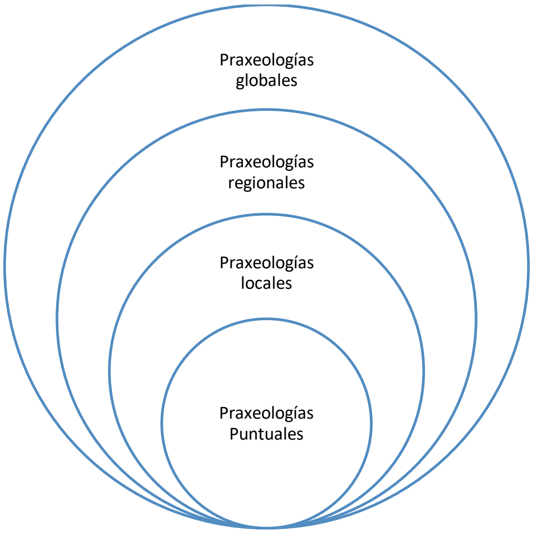
> Hasta mediados del siglo XIX, la aritmética escolar contenía, bajo el nombre de Teoría de razones y proporciones, una praxeología matemática local que permitía tratar eficazmente los problemas de proporcionalidad directa o inversa: si 8 caramelos cuestan 10 francos, y si se quiere conocer el precio, x francos, de 3 caramelos, se dirá que “x es a 3 como 10 es a 8", lo que se traduce por la proporción indicada clásicamente por x:3::10:8, en la que se sabe que el producto de los extremos, $8 \times x$ es igual al producto de los medios, 10×3, igualdad que nos da asimismo $x = 10 \times 3/8$. La reforma de “las matemáticas modernas” alrededor de 1970, expulsó, por obsoletos, numerosos elementos teóricos y tecnológicos de las matemáticas “clásicas”, como la teoría de las razones y proporciones, pero sin eliminar al mismo tiempo las técnicas elementales que, de hecho, no fueron inmediatamente reemplazadas, o no lo fueron más que por unas praxeologías más complejas, poco viables en los primeros cursos de la enseñanza secundaria. Desde que se dispone de la noción de función, y más particularmente de la noción de función lineal, así como de las notaciones funcionales usuales, se puede retomar el problema de los 3 caramelos en estos términos: siendo f lineal, si $f(8)= 10$, entonces, $f(3)= f(3/8 \times 8)= 3/8 \times f(8)= 3/8 \times 10 =...$ (Chevallard, 1999, p.7)

Tipos de praxeologías

Un conjunto de técnicas, tecnologías, y teorías organizadas alrededor de un tipo de tareas forman una organización praxeológica o praxeología puntual. La agrupación de diversas praxeologías puntuales creará una praxeología local.

Según Chevallard (1999), en una institución, una teoría responde de varias tecnologías, cada una de las cuales a su vez justifica varias técnicas, correspondientes a tipos de tareas. En principio, las organizaciones puntuales van a combinarse y formarán una organización local, centradas sobre una tecnología, y después estas se agruparán y formarán organizaciones regionales, formadas en torno a una teoría. La organización global estará conformada por la agrupación de organizaciones regionales y la conformará diversas teorías.

Figura 3: Tipos de praxeologías



Autoría propia

2.3. Ostensivos en la TAD

Según Bosh (1994) se denomina ostensivo a todo objeto dotado de una naturaleza sensible, de cierta materialidad, y que, por ello, puede presentarse al sujeto como una realidad perceptible y manipulable. Podemos considerar como ostensivos a los sonidos (morfemas lingüísticos), los grafismos (grafemas que componen la escritura de las lenguas naturales y formales), los gestos, entre otros.

Los objetos ostensivos permiten evocar objetos no ostensivos, es decir, nociones matemáticas que no se pueden manipular (conceptos, definiciones, ideas, etc.). Teniendo en cuenta esta afirmación, por ejemplo la notación $f(x)=kx$ evoca a la proporcionalidad directa. Asimismo, las tablas, fórmulas, representaciones de la recta que pasa por el origen en el plano cartesiano, entre otras, son consideradas también como ostensivos de la proporcionalidad.

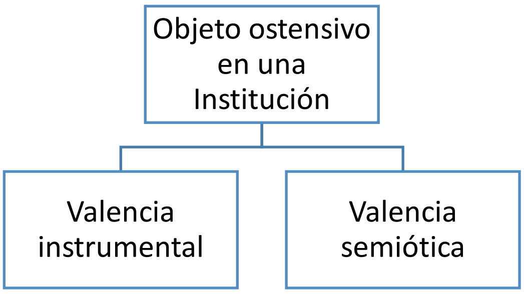
Tanto los objetos no ostensivos como los ostensivos viven en toda actividad humana y no se puede dar prioridad a uno de ellos, por ejemplo hacer prevalecer a la comprensión dejando de lado a la técnica o dar prioridad a los gráficos descuidando los conceptos. Asimismo, existe cierta relación entre ostensivos que evocan a un mismo objeto no ostensivo. Por ejemplo en la proporcionalidad, según Comin (2005), la tablas numéricas y las fórmulas privilegian lo cuantitativo y las representaciones gráficas lo cualitativo. Si separamos lo cuantitativo de lo cualitativo se perdería la dependencia.

Es importante señalar también que la relación entre los objetos ostensivos y los no ostensivos es arbitraria, pues no existe ninguna relación natural determinada. Un ejemplo claro de esta característica son las diferentes formas de representar, la proporcionalidad directa.

Según Bosch (1994) los objetos ostensivos tienen una valencia instrumental y una valencia semiótica dentro de una institución, un periodo de tiempo y con ciertos objetos matemáticos, tal como podemos apreciar en la figura 4. La instrumentalidad está referida a la utilización en técnicas para realizar tareas determinadas. Por ejemplo la notación $\sqrt{}$ y la notación ½ como exponente fraccionario tienen la misma instrumentalidad si se quire calcular $\sqrt{25}$ o $25^{1/2}$, sin embargo, si se desea calcular la derivada de $\sqrt{x}$ la notación ½ como exponente fraccionario tiene una valencia instrumental superior pues sí permite resolver la tarea.

La valencia semiótica está referido a que los objetos ostensivos funcionan como signos de otros objetos, de acuerdo a la institución en la que nos situemos y de acuerdo a la actividad matemática realizada. Teniendo en cuenta lo descrito, no será posible sustituir por ejemplo la notación $log\, x$ por $\sqrt{x}$.

Figura 4: Valencias de un objeto ostensivo



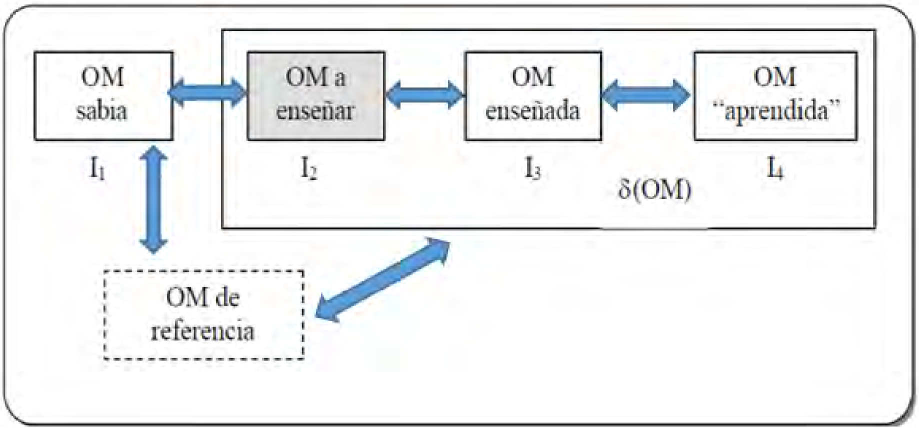
Autoría propia

2.4.Modelo Epistemológico de Referencia

Un modelo epistemológico de referencia, en adelante MER, es un modelo teórico básico construido para analizar la transición y evolución de los saberes entre diferentes instituciones. Según Gascón (2014) desempeña una función fenomenotécnica, pues permite fijar la amplitud del problema de investigación, identificar fenómenos didácticos y elaborar explicaciones tentativas y tipos de soluciones.

Un MER tiene carácter relativo y surge como una propuesta a los modelos epistemológicos dominantes, asimismo, ayuda a construir modelos alternativos didácticos en una institución dada. Un MER servirá como organización matemática de referencia en el análisis de la transposición didáctica tal como podemos apreciar en la figura 5.

Figura 5: El MER como OM de referencia



Fuente: Adaptado de Bosch y Gascón (2004, p.15)

Para nuestra investigación utilizaremos un MER como instrumento de análisis del modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad.

2.5. Metodología

Adoptaremos para nuestra investigación un enfoque cualitativo según Hernández (2010) puesto que observa, describe e intenta comprender los fenómenos tal como se presentan en su medio natural.

Asimismo, consideramos que es una investigación de tipo bibliográfica, porque, analizaremos los documentos nacionales como las Rutas de Aprendizaje y el Currículo Nacional, y también los textos escolares y los Manuales para los docentes en donde se encuentran las técnicas para resolver las tareas presentes en los cuadernos de trabajo.

A continuación, presentaremos la secuencia de pasos que realizamos para la realización de nuestros objetivos.

1. Identificar en las Rutas de Aprendizaje y en el Currículo Nacional el objeto matemático proporcionalidad.

Identificar en qué competencias se considera el objeto matemático proporcionalidad y qué aprendizajes se quieren lograr con los estudiantes. A partir de este análisis, se podría intuir una organización matemática clásica o una organización con características de una organización algebrizada.

Si el objeto se ubica solo en la competencia: Resuelve problemas de cantidad, podríamos predecir que la OM en torno a la proporcionalidad propuesta por el Ministerio de Educación está basada en una organización clásica.

2. Identificar y describir los elementos de la organización matemática proporcionalidad.
   Para poder identificar los elementos de la OM estudiada, es importante tener en cuenta los siguientes criterios:
   - Se identificarán los tipos de tareas presentes en los textos escolares y en los cuadernos de trabajo de Matemática de I a V de secundaria.
   - Se identificarán las técnicas presentes en los textos escolares y en el caso de los cuadernos de trabajo, se analizará las técnicas presentes en los Manuales para el docente, pues es en este material que se encuentran los procedimientos de solución de las tareas propuestas.
   - Se identificará, los discursos tecnológicos que justifiquen cada una de las técnicas.
   - Se identificará la teoría o teorías que justifiquen las tecnologías.
3. Identificar las características del modelo epistemológico dominante presente en la organización matemática descrita teniendo en cuenta el Modelo Epistemológico de Referencia de García (2005) y los niveles de algebrización descritos por Bolea (2002).

CAPÍTULO III: ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD

En el presente capítulo presentaremos a la proporcionalidad desde una perspectiva matemática y didáctica. En cuanto a lo didáctico tomaremos en cuenta los modelos propuestos por Bolea y García, los objetos ostensivos de la proporcionalidad y la descripción en los documentos curriculares.

3.1 La proporcionalidad desde la perspectiva matemática

Desde la antigüedad el concepto de proporcionalidad, en especial la proporcionalidad directa, se hace presente en lo cotidiano y se encuentra en muchas ramas del arte como en la arquitectura, la escultura, la música, entre otras.

Lages *et al.* (2000) manifiestan que "la proporcionalidad es, probablemente, la noción matemática más difundida en la cultura de todos los pueblos y su uso universal data de milenios". (p. 86)

Asimismo, Comin (2000, citada en Gonzales, 2014) considera que "dos magnitudes son proporcionales, si la relación multiplicativa (la misma en ambas magnitudes) entre pares de elementos de la misma magnitud (cantidades) es igual a la relación multiplicativa entre los dos elementos correspondientes de la otra magnitud" (p. 47)

Teniendo en cuenta esta definición, podemos distinguir en la tabla 1 algunos términos importantes a usar en nuestra investigación.

Tabla 1: Diferencias entre magnitud, cantidad, medida y unidad

Término	Concepto	Ejemplo
magnitud	Toda propiedad susceptible de ser cuantificada	Tiempo
cantidad	Resultado de la medida, es decir, el par: medida, unidad. - Cantidades homogéneas: Si pertenecen a la misma magnitud. - Cantidades heterogéneas: Si pertenecen a diferentes magnitudes	7 segundos
Medida	Número real positivo (escalar)	7
Unidad	Es una cantidad estandarizada de una determinada magnitud, viene dada por el sistema de unidades elegido	segundo

Adaptado de Gonzales (2014)

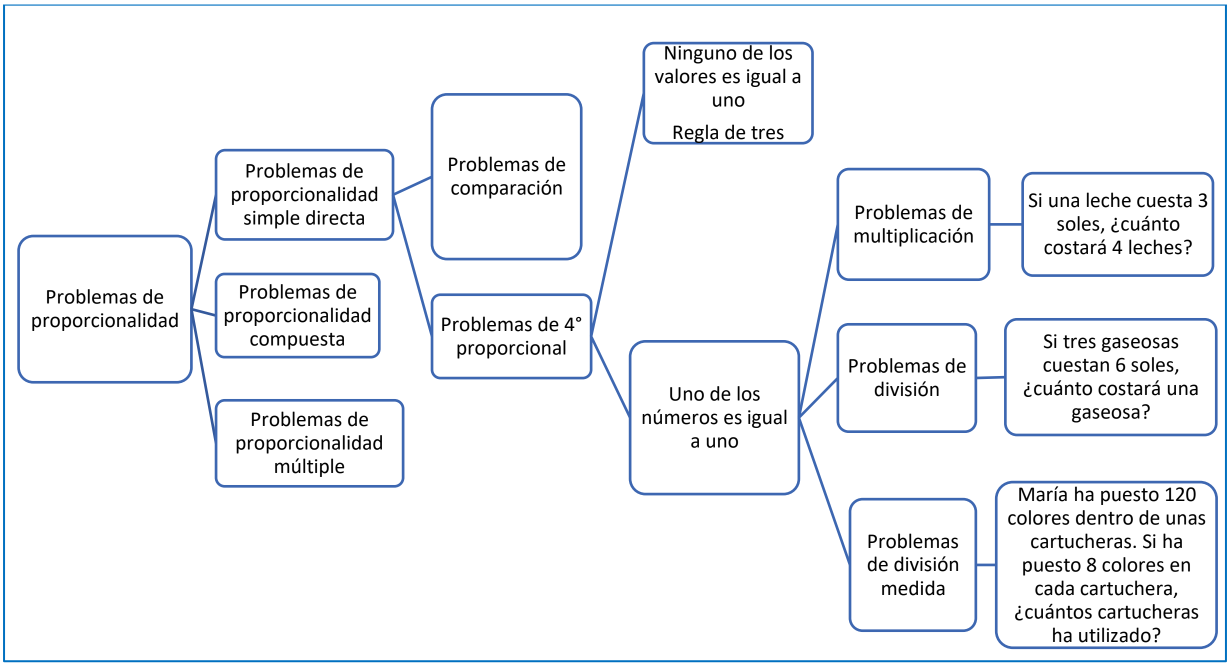
Lages *et al.* (2000) indican que: “Una proporcionalidad es una función f: R → R tal que, para cualesquiera números reales c, x se tiene $f(cx) = c.f(x)$ (proporcionalidad directa) o $f(cx) = f(x)/c$, si $c \neq 0$ (proporcionalidad inversa). (p. 86)

Esta definición considera a nuestro objeto de estudio como un tipo de función. Considera además de la proporcionalidad directa también la inversa. Tomaremos en cuenta también el modelo matemático presentado por Comin (2000, citada en Gonzales, 2014) para una situación de proporcionalidad pues restringe los valores de x e y a IR^+.

> Dadas dos magnitudes G y G´, una correspondencia C entre los elementos de G y G´, escogemos una unidad de magnitud *u*, elemento de G y una unidad de magnitud *u'* elemento de G' y dos variables algebraicas (numéricas) aditivas *x* e *y* definidas respectivamente sobre G y G' con valores en IR^+ tales que $x(u) = 1$ e $y(u') = 1$. Se tiene que para cada *g, g'* en G y G', respectivamente, con C(g) = g´, x(g) = *x* e y(g)´= *y*, existe un número *k* tal que para cualquier par (x;y) se cumple que $y = kx$. (p. 48)

Por otro lado, es importante tener en cuenta los diferentes problemas sobre proporcionalidad, por ello, se muestra en la figura 6 una clasificación basada en los campos conceptuales de Vergnaud (1990) donde se aprecian tres tipos de problemas: problemas de proporcionalidad simple directa (en donde las tareas están basadas en determinar la cuarta proporcional y en comparar dos razones), problemas de proporcionalidad simple compuesta y problemas de proporcionalidad múltiple. Es frecuente encontrar problemas de cuarta proporcional en los diferentes textos matemáticos.

Figura 6: Una clasificación de problemas de proporcionalidad adaptado de Vergnaud



Fuente: Adaptado de Vergnaud

Uno de los objetivos de nuestra investigación es identificar los tipos de tareas presentes en los diferentes textos de Matemática de Secundaria. Es muy posible encontrarnos con varios de estos tipos de problemas, en especial con lo de 4° proporcional, que pervive a pesar de los años en el sistema educativo escolar.

Con respecto a la proporcionalidad directa, para Hersant (2005) los saberes relativos al cálculo de la cuarta proporcional, corresponden a dos teorías que permiten modelizar la noción de proporcionalidad: la teoría de razones y proporciones (teniendo como elementos: la razón, la proporción, extremos, medios, etc.) y, la aplicación lineal (teniendo como elementos la función, la imagen, antecedente, etc.). El punto de vista de la proporcionalidad, es diferente en los dos modelos tal como podemos apreciar en la tabla 2. En la teoría de razones y proporciones se pone énfasis en las razones escalares de la relación de las cantidades de la misma naturaleza (cantidades homogéneas), tal como lo concebía Euclides. Sin embargo, el coeficiente de proporcionalidad que es una relación de medida de cantidades de magnitudes de naturalezas diferentes (cantidades heterogéneas), ya no está asociada a esa teoría, sino a la aplicación lineal. Ambas teorías permiten justificar el cálculo de la cuarta proporcional.

Según Lamon (1994, citado en Reyes, 2011) el operar en un mismo espacio de medida, es decir con cantidades homogéneas, correspondería a un pensamiento intra, mientras que el operar con cantidades heterogéneas correspondería a un pensamiento inter.

Tabla 2: Teoría de las razones y proporciones y teoría de la aplicación lineal

Teoría de las razones y proporciones (relaciones, proporciones, extremos, medios)	**Teoría de la aplicación lineal (aplicación, función, imagen, antecedentes)**
Sea I un subconjunto finito de N, las secuencias numéricas $(u_i)_{i \in N}$ y $(v_i)_{i \in N}$ de términos distintos de cero son proporcionales, si se verifica una de las siguientes propiedades	*Sea I un subconjunto finito de N, las secuencias numéricas $(u_i)_{i \in N}$ y $(v_i)_{i \in N}$ de términos distintos de cero son proporcionales, si se verifica una de las siguientes condiciones*
1. Para todo i y j de I, $\frac{u_i}{u_j} = \frac{v_i}{v_j}$, (la secuencia de variación se mantiene)	

2. *a) Para todo u de I, si* u_i *es multiplicado por 2, 3, 4 …λ (λ real)* v_i *es multiplicado por 2, 3, 4 …λ* *b) Para todo i, j, k de I, si* $u_{i=} u_j + u_k$ *entonces* $v_{i=} v_j + v_k$	8. *a) Para todo entero i y j de I si el real λ es tal que* $u_{i=}\lambda u_j$ *entonces,* $v_{i=}f(u_i) = \lambda f(u_j) = \lambda v_j$ 8. *b) Para todo entero i, j, k de I si* $u_{i=} u_j + u_k$ *entonces,* $v_{i=} f(u_i) + f(u_k) = v_j + v_k$
3. *Para todo i y j de I,* $u_i v_j = v_i u_j$ *(el producto de los extremos es igual al producto de los medios)*	
4. *Para todo i y j de I ,* $\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_j}{u_j}$*,*	
5. *Para todo i, j, k de I, si λ y μ son números reales no nulos tales que* $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$*, entonces* $\frac{u_i}{v_i} = \frac{\lambda u_j + \mu u_k}{\lambda v_j + \mu v_k}$	8. *(a y b) Para cada entero i, j, k de I, si los reales λ y μ son tales que* $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$*, entonces:* $v_i = f(u_i) = \lambda f(u_j) + \mu f(u_k) = \lambda v_j + \mu v_k$
6. $\frac{u_i}{v_i}$ *es el coeficiente de proporcionalidad, es el número por el cual hay que multiplicar* v_j *para obtener* u_j	7. *Para todo i de I,* v_i *es la imagen de* u_i *por una aplicación de lineal f, es decir, existe un real α no nulo, tal que para todo entero i∊N,* $v_i = \alpha u_i$
	9. *En un sistema de referencia el conjunto de puntos* $(u_i, v_i)_{i \in I}$ *está en una línea que pasa por el origen de coordenadas.*

Tomado de Hersant (2001, p. 29)

Las dos teorías "teoría de las razones y proporciones" y "linealidad" modelan las mismas situaciones, la única diferencia reside en el campo de acción de estas teorías. La teoría de las proporciones se adapta a al campo discreto mientras que la linealidad extiende la teoría de las proporciones al marco continuo (función de la variable real).

3.2 La proporcionalidad como modelo funcional

A continuación presentamos los trabajos presentados por Bolea (2001, 2002) y García (2005) quienes proponen dos caminos para el desarrollo de los componentes de la OM clásica de la proporcionalidad. Bolea a través de los tres niveles de algebrización y García a través de cuatro modelizaciones.

3.2.1 Algebrización hipotética de la organización clásica en torno a la proporcionalidad

Bolea, Bosch y Gascón (2001) la denominan algebrización hipotética, porque no existe ni ha existido como organización matemática escolar.

Antes de describir los tres niveles de algebrización es importante entender qué entiende la autora por organización clásica en torno a la proporcionalidad. En esta organización se considera las tareas resueltas con la expresión coloquial: "a más, más" y "a menos, menos" la ecuación proporcional, el producto de extremos y medios, la técnica de la regla de tres simple y la compuesta. Esta organización será el sistema inicial en el que progresivamente se irá algebrizando mientras más alto el nivel.

Primer nivel de algebrización: la modernización del lenguaje técnico: El primer nivel de algebrización se conoce como la modernización del lenguaje técnico, y según Bolea (2002), "consistirá en modelizar mediante ecuaciones los diferentes tipos de proporcionalidad, así, se dirá que dos magnitudes X e Y son directamente proporcionales cuando se puede establecer una correspondencia entre ellas de tal forma que, entre una cantidad cualquiera x de X y su correspondiente y de Y se cumple la relación y = kx" (p. 206).

En ese sentido, las tareas de proporcionalidad se resuelven utilizando la relación $y = kx$. Además, aquí surge la constante de proporcionalidad o factor de proporcionalidad que usualmente se representa con la letra k.

De otro lado, Bolea (2002) señala que:

> En este primer nivel de algebrización, los tipos de problemas y las técnicas se mantienen muy próximos a los de la organización clásica. La resolución de un problema de proporcionalidad sigue consistiendo en la distinción de las dos magnitudes relacionadas, en la determinación del "sentido" de la relación de proporcionalidad, en la escritura de la relación que cumplen los datos y la incógnita del problema, y en el cálculo final del valor de la incógnita. Aparece sin embargo una diferencia importante en el nivel tecnológico-teórico: la relación de proporcionalidad entre magnitudes se convierte ahora en una relación de proporcionalidad entre variables numéricas que representan medidas de cantidades de magnitud. Análogamente, la proporcionalidad inversa se expresa mediante una relación del tipo $xy = k$ o bien $y = k/x$ ($y= kx^{-1}$).
>
> En el caso de la proporcionalidad compuesta, se dirá que Y es directamente proporcional a $X_1, X_2, \ldots, X_i$ e inversamente proporcional a $X_{i+1}, \ldots, X_n$ cuando se tenga una relación del tipo: $y = k\frac{x_1 x_2 \ldots x_i}{x_{i+1} \ldots x_n}$ (p. 207)

En este nivel de algebrización ya existe un progreso, pues las relaciones de proporcionalidad de magnitudes ahora se conciben como relaciones entre variables numéricas, que representan medidas de cantidades de magnitud.

Segundo nivel de algebrización: la reducción a la función lineal: Bolea (2002) indica que el segundo nivel de algebrización:

> Surge de la necesidad de describir mediante un único modelo las tres relaciones de proporcionalidad establecida en el primer nivel: directa, inversa y compuesta…. La realización de este segundo nivel parte de la consideración de todas las relaciones de proporcionalidad como casos particulares de una función *f* de varias variables reales, homogénea de grado ±1 con respecto a cada una de ellas. (p. 207)

Asimismo, propone la siguiente relación:

$$R \times R \times R \times \ldots \times R \quad \rightarrow \quad R$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \rightarrow \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$donde \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k.x_1^{e1}.\, x_2^{e2} \ldots .\, x_n^{en} \qquad con\ e_i = \pm 1$$

La autora indica que la unificación que resulta del segundo nivel de algebrización no es posible en la organización escolar actual, como tampoco era posible en la organización escolar clásica, fundada en una teoría cultural de las magnitudes que no podía incluir productos ni cocientes de magnitudes.

Tercer nivel de algebrización: la modelización funcional general: En este tercer nivel se considera a la proporcionalidad como una relación más de varias posibles y se pretende modelizar sistemas cada vez más complejos. Por ejemplo, en la expresión: $T = k \cdot \sqrt{l}$ se pretende establecer la relación entre T y *l.*

Asimismo, en este tercer nivel,

> "… se puede prescindir de la teoría de las magnitudes como componente tecnológico-teórico siempre y cuando se disponga de una teoría matemática rigurosa de los números reales como medidas de las magnitudes continuas que intervienen en las situaciones estudiadas. La nueva organización así construida puede entonces adoptar, como marco teórico principal, la teoría de funciones reales de variable real. (Bolea, 2002, p. 210)

En nuestra investigación intentaremos determinar si alguno de estos niveles propuestos por Bolea están presentes en las organizaciones matemáticas identificadas en los textos escolares y en los manuales para docentes.

3.2.2 Modelización de sistemas de variación entre magnitudes

García (2005) reformula y completa los niveles de algebrización propuestos por Bolea, Bosch y Gascón (2001), y elabora un MER. El autor describe una hipotética actividad matemática que dé lugar a la construcción de técnicas que caractericen este modelo, que permitan determinar nuevos estados, formular propiedades, entre otros, en un marco tecnológico - teórico que posibilite el cuestionamiento y la emergencia de nuevas técnicas, y que permita calcular nuevos estados.

En el MER presentado, García considera progresivamente las siguientes organizaciones matemáticas: discursiva –M_d(SL-SLI), proporcional - M_{prop}(SL-SLI), ecuacional - M_{ec}(SL-SLI) y funcional – M_f(SL-SLI). Es importante indicar que se entiende por sistema lineal a la proporcionalidad directa y al sistema lineal inverso a la proporcionalidad inversa.

Modelización discursiva: La describe como una OM puntual, generada en torno a la técnica de “reducción a la unidad”, que permite la realización de una actividad matemática bastante limitada para sistemas lineales e lineales inversos (proporcionalidad directa e inversa). Su marco tecnológico - teórico explícito es casi inexistente, limitándose a la descripción oral de las propiedades.

Modelización proporcional: Esta modelización es conocida también como “clásica” y estará formulada en términos de razones y proporciones. Se evidencia la ausencia de una teoría del álgebra de magnitudes que justifique la realización de operaciones entre cantidades de magnitudes de diferente naturaleza (razones heterogéneas), por lo que solo se considera proporciones con razones homogéneas en la técnica de la regla de tres.

Modelización ecuacional: Esta modelización puede considerarse como una organización matemática local, porque contiene cierta variedad de técnicas y de tipos de cuestiones problemáticas, más allá de la mera determinación de nuevos estados, y porque lleva a cabo ciertos cuestionamientos en el nivel tecnológico. La ampliación del marco teórico justifica las operaciones entre magnitudes y permite establecer razones heterogéneas. Asimismo, correspondería al primer nivel de algebrización descrito por Bolea (2002)

Modelización funcional: En esta modelización la teoría evoluciona hasta la teoría de las funciones reales de variable real, esta da lugar a una variación ostensiva en las tecnologías, que considera la correspondencia entre M y M’ como una correspondencia unívoca entre conjuntos numéricos.

En la tabla 3 presentamos los problemas, técnicas y teorías para cada una de las modelizaciones.

Tabla 3: Modelizaciones en torno a los sistemas de variación entre magnitudes

<table>
<tr><th colspan="4">Modelización discursiva –M_d(SL-SLI)</th></tr>
<tr><th>Problemas</th><th>Técnicas (τ)</th><th>Tecnologías (θ)</th><th>Teorías (Θ)</th></tr>
<tr><td>Consideramos un SL y un estado (a,a´) de éste.
✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´?
✓ Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella?</td><td>τ_{ru}^{SL}: Reducción a la unidad
Partimos del estado (a,a´)
✓ Se calcula el estado correspondiente a la unidad $\left(1,\frac{a'}{a}\right)$
✓ Se calcula b´mediante el discurso “si a 1 le corresponde $\frac{a'}{a}$ a b le corresponde b-veces $\frac{a'}{a}$ es decir, $b' = b.\frac{a'}{a}$”</td><td>$\theta_d(SL)$: Dos magnitudes M y M´relacionadas en un sistema lineal verifican que si (a,a´) es un estado del sistema, entonces:
✓ Cuando la cantidad a aumenta al doble, al triple, …, la cantidad correspondiente a´ aumenta al doble, al triple, …
✓ Cuando la cantidad a disminuye a la mitad, a la tercera parte, …, la cantidad correspondiente a´ disminuye a la mitad, a la tercera parte, ……</td><td rowspan="2">Implícita y cultural</td></tr>
<tr><td>Consideramos un SLI y un estado (a,a´) de éste.
✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´?
✓ Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella?</td><td>τ_{ru}^{SLI} Reducción a la unidad
Partimos del estado (a,a´)
✓ Se calcula el estado correspondiente a la unidad $(1, a.a')$
Se calcula b´mediante el discurso “si a 1 le corresponde $a.a'$ a b le corresponde b-veces menos $a.a'$ es decir, $b' = \frac{a.a'}{b}$ ”</td><td>$\theta_d(SLI)$ Dos magnitudes M y M´relacionadas en un sistema lineal inverso verifican que si (a,a´) es un estado del sistema, entonces:
✓ Cuando la cantidad a aumenta al doble, al triple, …, la cantidad correspondiente a´ disminuye a la mitad, a la tercera parte, …
✓ Cuando la cantidad a disminuye a la mitad, a la tercera parte, … la cantidad correspondiente a´ aumenta al doble, al triple, …</td></tr>
<tr><th colspan="4">Modelización proporcional –M_{prop}(SL-SLI)</th></tr>
<tr><td>Consideramos un SL y un estado (a,a´) de éste.
✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´?
✓ Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella?</td><td>τ_{rd3}^{SL}: Regla de tres directa
✓ Construir una tabla con las medidas de las cantidades conocidas
✓ Formar la proporción (homogénea): $\frac{a}{b} = \frac{a'}{x}$
✓ Escribir la ecuación $a.x = a'.b$
✓ Resolver la ecuación</td><td>$\theta_{prop}(SL)$: Dado un sistema lineal, consideramos dos cantidades cualesquiera a, b de una magnitud M, y las correspondientes cantidades a´, b´ de la magnitud M´. Estas cuatro cantidades verifican la relación:
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$</td><td>Teoría de las magnitudes variables (en términos de</td></tr>
</table>

Consideramos un SLI y un estado (a,a´) de éste. ✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´? ✓ Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella?	τ_{rd3}^{SLI}: Regla de tres inversa ✓ Construir una tabla con las medidas de las cantidades conocidas. ✓ Formar la proporción (homogénea) invirtiendo el orden de las cantidades correspondientes a la magnitud M´: $\frac{a}{b}=\frac{x}{a´}$ ✓ Escribir la ecuación $a.a´=b.x$ ✓ Resolver la ecuación	$\theta_{prop}(SLI)$: Dado un sistema lineal inverso, consideramos dos cantidades cualesquiera a, b de una magnitud M, y las correspondientes cantidades a´, b´ de la magnitud M´. Estas cuatro cantidades verifican la relación: $$\frac{a}{b}=\frac{b´}{a´}$$	razones y proporciones)
Modelización ecuacional –M_{ec}(SL-SLI)			
Consideramos un SL y un estado (a,a´) de éste. ✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´? ✓ Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella? Consideramos un SLI y un estado (a,a´) de éste. ✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´? ✓ Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella?	τ_{ma0}^{SL}: Según $\theta_{ec}^{1}(SL)$, los estados del sistema están relacionados por una proporción heterogénea. Luego $$\frac{a´}{a}=\frac{b´}{b}\rightarrow a´.b=a.b´ \rightarrow b´=\frac{a´.b}{a}$$ τ_{ma0}^{SLI}: Según $\theta_{ec}^{1}(SLI)$, los estados del sistema están relacionados por un producto heterogéneo. Luego $$a.a´=b.b´\rightarrow b´=\frac{a.a´}{b}$$ τ_{ma1}^{SL}: Según $\theta_{ec}^{2}(SL)$, los estados del sistema están relacionados por la ecuación $y=k.x$. A partir del estado (a,a´) determinamos la constante k: $$a´=k.a\rightarrow k=\frac{a´}{a}$$ Conocida k podemos calcular b´: $$b´=k.b=\frac{a´}{a}.b$$ τ_{ma1}^{SLI}: Según $\theta_{ec}^{1}(SLI)$, los estados del sistema están relacionados por la ecuación $x.y=k$. A partir del estado (a,a´) determinamos la constante k: $$k=a.a´$$ Conocida k y según $\theta_{ec}^{2}(SLI)$ podemos calcular b´: $$b´=\frac{k}{b}=\frac{a.a´}{b}$$	$\theta_{ec}^{1}(SL)$: Dado un sistema lineal, un conjunto de cantidades a, b, c, d, … de la magnitud M, y las correspondientes cantidades a´, b´, c´, d´, … de la magnitud M´, se verifica que: $$\frac{a´}{a}=\frac{b´}{b}=\frac{c´}{c}=\frac{d´}{d}=\cdots$$ $\theta_{ec}^{2}(SL)$: Dado un sistema lineal, se verifica que $a´=k.a$ para toda cantidad a de la magnitud M, siendo a´la cantidad correspondiente en M´ $\theta_{ec}^{1}(SLI)$: Dado un sistema lineal inverso, un conjunto de cantidades a, b, c, d, … de la magnitud M, y las correspondientes cantidades a´, b´, c´, d´, … de la magnitud M´, se verifica que: $a.a´=b.b´=c.c´=d.d´=\cdots$ $\theta_{ec}^{2}(SLI)$: Dado un sistema lineal inverso, se verifica que $a´=\frac{k}{a}$ para toda cantidad a de la magnitud M, siendo a´la cantidad correspondiente en M´	Teoría de las magnitudes variables (razones no homogéneas) Álgebra (ecuaciones)

	τ^{SL}_{ma1}: Según $\theta^2_{ec}(SL)$, los estados del sistema están relacionados por la ecuación $y = k.x$. Entonces: $a' = k.a$ $b' = k.b$ $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \rightarrow b' = \frac{a'.b}{a}$ τ^{SLI}_{ma1}: Según $\theta^2_{ec}(SLI)$, los estados del sistema están relacionados por la ecuación $x, y = k$. Entonces: $b' = \frac{a.a'}{b}$		
Consideremos dos magnitudes M y M´ relacionadas en un sistema lineal o lineal inverso. Calcular la constante de proporcionalidad k	τ^{SL-SLI}_2: la relación entre M y M´, queda modelizada por la ecuación $y = k.x^{\varepsilon}$. En particular: $a' = k.a^{\varepsilon} \rightarrow k = a^{-\varepsilon}.a'$		
Modelización funcional –M_f(SL-SLI)			
Consideramos un SL y un estado (a,a´) de éste. ✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´? ✓ Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella? Consideramos un SLI y un estado (a,a´) de éste. ✓ Para una cantidad b de M, ¿cuál será la cantidad correspondiente de M´? Para una cantidad b´ de M´, ¿cuál será la cantidad de M asociada a ella?	τ^{SL}_{mfa1}: Puesto que la relación es de proporcionalidad directa, queda modelizada por una función lineal, que será de la forma $f(x) = k.x$. A partir del estado (a,a´), determinamos la constante k: $a' = f(a) = k.a \rightarrow k = \frac{a'}{a}$ Conocida k podemos calcular b´: $b' = f(b) = k.b = \frac{a'}{a}.b$ τ^{SL}_{mfs} Puesto que la relación es de proporcionalidad directa, queda modelizada por una función lineal. Entonces: $b' = f(b) = f\left(\frac{b}{a}.a\right) = \frac{b}{a}.f(a) = \frac{b}{a}.a'$ τ^{SL}_{mfa2} Puesto que la relación es de proporcionalidad directa, queda modelizada por una función lineal, que será de la forma $f(x) = k.x$.	$\theta_F(SL)$: Dado un sistema lineal, la relación entre las magnitudes puede ser considerada como una función, es decir, como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos numéricos, modelizada mediante la expresión. $f(x) = k.x$ $\theta_F(SLI)$: Dado un sistema lineal inverso, la relación entre las magnitudes puede ser considerada como una función, es decir, como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos numéricos, modelizada mediante la expresión. $f(x) = \frac{k}{x}$	Teoría de las funciones reales de variable real

	Entonces: $a' = f(a) = k.a$ $b' = f(b) = k.b$ $\rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \rightarrow f(b) = b' = \frac{a'.b}{a}$ De manera análoga, se describe para el caso de proporcionalidad inversa		
Consideremos dos magnitudes M y M´ relacionadas en un sistema lineal o lineal inverso. Calcular la constante de proporcionalidad k	τ_2^{SL-SLI}: la relación entre M y M´, queda modelizada por la ecuación $y = k.x^{\varepsilon}$. En particular: $a' = k.a^{\varepsilon} \rightarrow k = a^{-\varepsilon}.a'$		

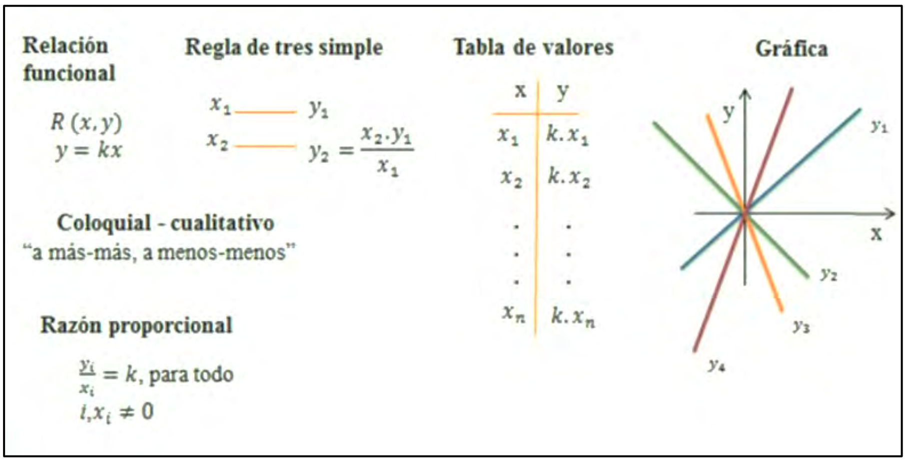
Fuente: García (2005)

Para nuestra investigación, será importante tener claro los elementos que plantea García para cada una de las organizaciones matemáticas, pues ello nos ayudará a realizar un análisis más completo de los materiales tomándolo como OM de referencia, así podremos describir las características del modelo epistemológico dominante.

3.3 Los objetos ostensivos en la proporcionalidad

Respecto a la proporcionalidad directa, puede ser representada como relación funcional, razón proporcional, gráfica que pasa por el origen de coordenadas en el plano cartesiano, tabla de valores, como aquella que responde al método de la regla de tres simple o como la que responde al cotidiano “a más, más; a menos, menos”. El conocer estos ostensivos, entre otros, nos ayudará en nuestra investigación a identificar las tecnologías que sustentarán las técnicas descritas en la OM de los textos escolares y manuales para el docente.

Figura 7: Ostensivos de la proporcionalidad directa



Fuente: Reyes (2011, p 76)

En cuanto a la proporcionalidad inversa puede ser evocada a través de ostensivos como el oral y coloquial "a más, menos" o "a menos, más", el funcional $y = k/x$ o la representación cartesiana que tiene como gráfica un hipérbola.

Según Hersant (2001) Los ostensivos utilizados para resolver problemas de proporcionalidad tienen diferentes valencias semióticas e instrumentales. La elección de uno u otro determina la actividad matemática a realizar. Además, la valencia instrumental de un ostensivo depende de la tarea.

Por ejemplo, uno de los ostensivos utilizados son los del lenguaje coloquial con expresiones del tipo "a más, menos" y "a menos, más". Estos ostensivos tienen un valor instrumental porque pueden servir para el tratamiento oral de un problema de proporcionalidad inversa, aunque también pueden llevar al error de tipo conceptual si es que no se acompaña del concepto de constante de proporcionalidad.

La tabla de proporcionalidad es a la vez un registro de representación de datos y un ostensificador. Cuando los datos se representan en una tabla, las cantidades proporcionales son materialmente distinguidas; hay una mejor organización del trabajo matemático, en particular al determinar si el valor a calcular es una imagen o un antecedente. Además, permite la materialización de la constante de proporcionalidad y de los operadores internos (adición y multiplicación) que intervienen en la situación. Asimismo, la tabla de proporcionalidad tiene una valencia instrumental ya que la técnica del producto cruzado o del producto lineal se puede utilizar para el cálculo de la cuarta proporcional si estamos trabajando problemas de proporcionalidad directa o inversa respectivamente.

La representación cartesiana tiene una valencia semiótica e instrumental importante para el reconocimiento de la proporcionalidad. Efectivamente, observar que la línea pasa por el origen tiene un fuerte poder evocador de la proporcionalidad directa porque puede identificarse de inmediato. Además, esta representación hace posible identificar una multitud de pares de puntos sin tener que calcular por lo que también tiene un fuerte potencial de valencia instrumental. Sin embargo, este la valencia instrumental está limitada por la exactitud de la representación.

En cuanto la regla de tres compuesta, el ostesnivo tabla de proporcionalidad permite organizar las medidas de cantidades de las diferentes magnitudes relacionadas.

3.4 La proporcionalidad en los documentos curriculares

En la presente sección analizaremos los documentos curriculares pues nos permitirán identificar elementos de la OM a enseñar en el proceso de transposición didáctica.

Para nuestra investigación tendremos en cuenta la noosfera, analizaremos cómo vive la proporcionalidad en las Rutas de Aprendizaje y en el Currículo Nacional, además de cómo se propone el objeto en los textos escolares y Manuales para los docentes. De acuerdo con Chevallard (1999, citado en Baquero, Bosch y Gascón, 2013)

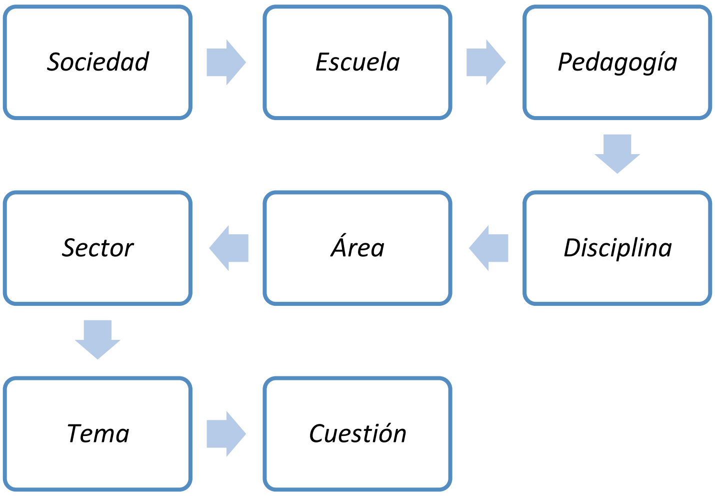
> El saber que se enseña en la escuela proviene de distintas transformaciones de un "saber sabio" que es el que legitima y justifica su difusión (o "transposición") a otras instituciones. Dichas transformaciones se operan en instituciones intermedias y, en particular, en la "noosfera". Esta actúa como membrana del sistema de enseñanza, haciéndola permeable a ciertos objetos y protegiéndola de otros. Es en esta institución intermedia donde se decide, determina y describe el "saber a enseñar", es decir aquellos objetos matemáticos que se propone transponer en la escuela y que se acaban oficializando en los programas oficiales, libros de texto, recomendaciones a profesores, materiales didácticos, etc. (p. 20)

Es importante recordar que la influencia de la OM a enseñar sobre el resto de organizaciones matemáticas es fundamental.

Asimismo, consideraremos como OM de referencia a la la modelización de sistemas de variación entre magnitudes, propuesto por García (2005).

En cuanto a la jerarquía de niveles de codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas que observamos en la figura 8, nuestra investigación estará centrada en analizar los niveles que corresponden al Área y Sector.

Figura 8: Niveles de codeterminación



Fuente: Adaptado de García (2005, p.269)

Es importante señalar que la proporcionalidad y la función han sido consideradas en los diferentes documentos curriculares de los últimos años.

La tabla 4 resume cómo ha sido considerada la proporcionalidad y las funciones en cada componente en los últimos diseños curriculares de nuestro país.

Tabla 4: La proporcionalidad y la función en los diseños 1998, 2004, 2005 y 2008

<table>
<tr><td>Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria (1998)</td><td>La proporcionalidad y la función son consideradas en el componente sistemas numéricos y funciones lineales en primero y segundo de secundaria.
El estudio de las funciones se prolonga hasta cuarto de secundaria.</td></tr>
<tr><td>Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria (2004)</td><td rowspan="2">La proporcionalidad y la función son consideradas en el componente conjuntos, sistemas numéricos, nociones de lógica y funciones y trigonometría.
Razones y proporciones, regla de tres, porcentaje, interés y mezcla se abordan en segundo de secundaria. Solo en cuarto de secundaria se trabaja funciones.

En estos diseños, se evidencia los objetos totalmente desarticulados.</td></tr>
<tr><td>Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (2005)</td></tr>
<tr><td>Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (2008)</td><td>Las funciones se estudian desde primero de secundaria hasta quinto. La proporcionalidad en primero y segundo. Ambos objetos se encuentran en el componente número, relaciones y funciones.</td></tr>
</table>

Fuente: Adaptado de Quentasi (2015)

Asimismo, hacemos una revisión de los documentos curriculares actuales.

3.4.1 La proporcionalidad en Rutas de Aprendizaje

Las Rutas de Aprendizaje fueron publicadas por el Ministerio de Educación (MINEDU) en el año 2012 y se fueron reestructurando hasta su última versión en el año 2015. Las Rutas de Aprendizaje consideran orientaciones para el área e indicadores de desempeño para cada grado y/o ciclo y sirvieron de insumos para la elaboración de los textos escolares de Secundaria y para la elaboración de los Manuales para los docentes que vamos a analizar en el presente trabajo de investigación.

La proporcionalidad y la función son consideradas en el MINEDU en las Rutas de Aprendizaje en las siguientes competencias:

- Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad
- Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio

En la tabla 5, se describen los indicadores de desempeño para los estudiantes en cada uno de los grados. Se observa cierta tendencia a encontrarnos con elementos de la modelización discursiva M_d(SL-SLI) y la modelización proporcional M_{prop}(SL-SLI).

Tabla 5: Indicadores de desempeño de la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad – Rutas de Aprendizaje 2015

I SECUNDARIA	II SECUNDARIA	III SECUNDARIA	IV SECUNDARIA	V SECUNDARIA
- Reconoce relaciones entre magnitudes en problemas multiplicativos de proporcionalidad y lo expresa en un modelo de solución. - Usa modelos referidos a la proporcionalidad directa al resolver problemas. - Comprueba si el modelo usado o desarrollado permitió resolver el problema.	- Reconoce relaciones no explicitas en problemas multiplicativos de proporcionalidad y lo expresa en un modelo basado en proporcionalidad directa e indirecta. - Diferencia y usa modelos basados en la proporcionalidad directa e indirecta al plantear y resolver problemas.	- Identifica dos o más relaciones entre magnitudes, en fuentes de información, y plantea un modelo de proporcionalidad compuesta. - Diferencia y usa modelos basados en la proporcionalidad compuesta al resolver y plantear problemas.	- Interpola y extrapola datos haciendo uso de un modelo relacionado a la proporcionalidad al plantear y resolver problemas.	- Extrapola datos, para hacer predicciones, haciendo uso de un modelo xrelacionado a la proporcionalidad al plantear y resolver problemas.
-Organiza datos en tablas para expresar relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.	- Describe que una cantidad es directamente proporcional a la otra. - Organiza datos en tablas para expresar relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes.	- Expresa relaciones entre magnitudes proporcionales compuestas empleando ejemplos. - Emplea esquemas tabulares para organizar y reconocer dos o más relaciones directa e inversamente proporcionales entre magnitudes.	- Expresa en qué situaciones se emplea la proporcionalidad. - Emplea esquemas para organizar y reconocer relaciones directa o inversamente proporcionales entre magnitudes.	- Emplea esquemas para organizar datos relacionados a la proporcionalidad.

- Emplea el factor de conversión, el método de reducción a la unidad y la regla de tres simple en problemas relacionados con proporcionalidad directa. - Halla el término desconocido de una proporción apoyado en recursos gráficos y otros al resolver problemas	- Emplea convenientemente el método de reducción a la unidad y la regla de tres simple, en problemas de proporcionalidad. - Emplea estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros, al resolver problemas relacionados a la proporcionalidad.	- Emplea convenientemente el método de reducción a la unidad y la regla de tres simple, en problemas relacionados con proporcionalidad compuesta	- Emplea convenientemente el método de reducción a la unidad y la regla de tres simple en problemas relacionados a mezclas, aleación, reparto proporcional y magnitudes derivadas del S.I. - Adapta y combina estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros, al resolver problemas de proporcionalidad.	- Adapta y combina estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros, al resolver problemas relacionados a la proporcionalidad reconociendo cuando son valores exactos y aproximados.
- Plantea conjeturas respecto a la propiedad fundamental de las proporciones a partir de ejemplos. - Justifica la diferencia entre el concepto de razón y proporcionalidad a partir de ejemplos.	- Justifica cuando una relación es directa o inversamente proporcional. - Diferencia la proporcionalidad directa de la inversa.	- Justifica cuando una relación es directa o inversamente proporcional.	- Justifica la diferencia entre las relaciones de proporcionalidad directa, inversa y compuesta.	- Plantea conjeturas respecto a la propiedad fundamental de las proporciones a partir de ejemplos. - Justifica las propiedades de las proporciones.

Fuente. MINEDU (2015)

En la tabla 6, se describen los indicadores de desempeño para los estudiantes en cada uno de los grados. Es en esta competencia que debería estar articulada la proporcionalidad y la función a través de la modelización ecuacional M_{ec} (SL-SLI) y la modelización funcional M_f (SL-SLI).

Tabla 6: Indicadores de desempeño de la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio – Rutas de Aprendizaje 2015

I SECUNDARIA	II SECUNDARIA	III, IV y V SECUNDARIA
- Reconoce relaciones no explícitas en situaciones de variación al expresar modelos relacionados a proporcionalidad y funciones lineales. - Asocia modelos referidos a la proporcionalidad directa y las funciones lineales con situaciones afines.	- Reconoce relaciones no explícitas entre datos de dos magnitudes en situaciones de variación, y expresa modelos referidos a proporcionalidad inversa, funciones lineales y lineales afines. - Usa modelos de variación referidos a la función lineal al plantear y resolver problemas.	No se presenta de manera explícita un indicador de desempeño referido a proporcionalidad o magnitudes
Describe el comportamiento de la gráfica de función lineal, examinando su intercepto con los ejes, su pendiente, dominio y rango. - Establece conexiones entre las representaciones gráficas, tabulares y simbólicas de una función lineal.	- Emplea representaciones tabulares, gráficas, y algebraicas de la proporcionalidad inversa, función lineal y lineal afín.	

- Emplea estrategias para resolver problemas de proporcionalidad, y función lineal con coeficientes enteros. - Emplea métodos gráficos para resolver problemas de funciones lineales.	- Emplea estrategias heurísticas y procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad inversa, función lineal y lineal afín considerando ciertos valores, su regla de la función, o a partir de su representación. - Determina el conjunto de valores que puede tomar una variable en una proporcionalidad inversa, función lineal y lineal afín.	
- Prueba si una función es lineal por los valores de su dominio. - Justifica el dominio apropiado de una función lineal (si pertenece al campo natural, entero racional) de acuerdo a una situación de dependencia.	- Prueba que las funciones lineales, afines y la proporcionalidad inversa crecen o decrecen por igualdad de diferencias en intervalos iguales.	

Fuente. MINEDU (2015)

Los indicadores de desempeño de ambas competencias han sido considerados para la elaboración de los problemas resueltos de los textos escolares y para las situaciones de los Manuales para los docentes.

3.4.2 La proporcionalidad en el Currículo Nacional

Es el documento marco de la política curricular que contiene los aprendizajes que se espera que logren los estudiantes durante su etapa escolar. Establece también el enfoque del área.

La Matemática es considerada como:

> …una actividad humana y ocupa un lugar relevante en el desarrollo del conocimiento y de la cultura de nuestras sociedades. Se encuentra en constante desarrollo y reajuste, y por ello sustenta una creciente variedad de investigaciones en las ciencias, las tecnologías modernas y otras, las cuales son fundamentales para el desarrollo integral del país. … el marco teórico y metodológico que orienta la enseñanza – aprendizaje corresponde al enfoque centrado en la Resolución de Problemas. Dicho enfoque se nutre de tres fuentes: La Teoría de Situaciones didácticas, la Educación matemática realista, y el enfoque de Resolución de Problemas. En ese sentido, es fundamental entender las situaciones como acontecimientos significativos, dentro de los cuales se plantean problemas cuya resolución permite la emergencia de ideas matemáticas. Estas situaciones se dan en contextos, los cuales se definen como espacios de la vida y prácticas sociales culturales, pudiendo ser matemáticos y no matemáticos. (MINEDU, 2017)

Es importante señalar que el Currículo Nacional fue modificado en marzo de 2017 y mantiene las cuatro competencias en Matemática, pero los nombres han sufrido una modificación con respecto a los utilizados en Rutas de Aprendizaje publicados en 2015. En la tabla 7, se pueden comparar los nombres utilizados en ambos documentos.

Tabla 7: Nombres de las competencias de Matemática

Rutas de aprendizaje (2015)	**Currículo Nacional (2017)**

Actúa y piensa en situaciones de cantidad	Resuelve problemas de cantidad
Actúa y piensa en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio	Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Actúa y piensa en situaciones de forma, movimiento y localización	Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
Actúa y piensa en situaciones de gestión de datos e incertidumbre	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Fuente: MINEDU (2015-2017)

Un aspecto importante a indicar es que en el Currículo Nacional y más específicamente en el Programa Curricular de Educación Básica de Secundaria actualizado, la proporcionalidad se encontraría considerada de manera explícita, básicamente en la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, tal como mostramos en la tabla 8 y de manera muy específica en solo un desempeño en la competencia Resuelve problemas de cantidad en los dos primeros grados de secundaria.

Tabla 8 : Desempeños por grado – Currículo Nacional 2017

COMPETENCIA	I SEC	II SEC	III SEC	IV SEC	V SEC
RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD	- Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión de **la fracción como razón** y operador, y del significado del signo positivo y negativo de enteros y racionales, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.	- Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión de **la fracción como razón** y operador, y del significado del signo positivo y negativo de enteros y racionales, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.	*No se presenta de manera explícita un desempeño referido a proporcionalidad o magnitudes*		
RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO	- Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, o relaciones de equivalencia o **variación entre dos magnitudes.** - Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas (modelo) que incluyen la regla	- Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, o relaciones de equivalencia o **variación entre dos magnitudes.** - Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la	- Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o **variación entre magnitudes.** - Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la regla de formación	- Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, y condiciones de equivalencia o **variación entre magnitudes.** - Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la regla	- Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, y condiciones de equivalencia o de **variación entre magnitudes.** - Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen

	de formación de progresiones aritméticas con números enteros, a ecuaciones lineales, a desigualdades, a funciones lineales, a **proporcionalidad directa** o a gráficos cartesianos. - Comprueba si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó le permitió solucionar el problema, y reconoce qué elementos de la expresión representan las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o **variación entre dos magnitudes.** **- Establece la relación de correspondencia entre la razón de cambio de una función lineal y la constante de proporcionalidad para resolver un problema según su contexto.** - Selecciona y emplea recursos, estrategias heurísticas y procedimientos pertinentes a las condiciones del problema, como determinar valores que cumplen una **relación de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes**.	regla de formación de progresiones aritméticas con números enteros, a ecuaciones lineales, a inecuaciones de la forma, a funciones lineales y afines, **a proporcionalidad directa e inversa** con expresiones fraccionarias o decimales, o a gráficos cartesianos. - Comprueba si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó le permitió solucionar el problema, y reconoce qué elementos de la expresión representan las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o **variación entre dos magnitudes**. - Expresa, usando lenguaje matemático y representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, su comprensión de las diferencias entre **una proporcionalidad directa e inversa,** para interpretarlas y explicarlas en el contexto de la situación. - Plantea afirmaciones sobre las diferencias entre la función lineal y una función lineal afín, y sobre la diferencia entre una **proporcionalidad directa y una proporcionalidad inversa,** u otras relaciones que descubre.	de una progresión geométrica, a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, a inecuaciones ($ax \pm b < c$, $ax \pm b > c$, $ax \pm b \leq c$ y $ax + b \geq c$, $\forall$ a ϵ Q y $a \neq 0$), a ecuaciones cuadráticas (ax2 = c) y a funciones cuadráticas (f(x) = x2, f(x) = ax2 + c, $\forall$ $a \neq 0$) con coeficientes enteros y **proporcionalidad compuesta.** - Evalúa si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó, representó todas las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o **variación entre dos magnitudes.**	de formación de una progresión geométrica, a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, a inecuaciones ($ax + b < cx + d$, $ax + b > cx + d$, $ax + b \leq cx + d$ y $ax + b \geq cx + d$, $\forall$ a y $c \neq 0$), a ecuaciones cuadráticas ($ax2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ y a, b y c Є Q) y a funciones cuadráticas (f(x)= ax2+ bx +c, $\forall$ a $\neq 0$ y a Є Q). También las transforma a **repartos proporcionales**	sucesiones crecientes o decrecientes, a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, a inecuaciones, a funciones cuadráticas con coeficientes racionales y a funciones exponenciales.

Fuente: Currículo Nacional modificado según DM 159-2017

A diferencia de la gran cantidad de indicadores de desempeño que encontramos en la competencia de cantidad en Rutas de Aprendizaje 2015, en el Currículo Nacional 2017 la presencia explícita de la proporcionalidad es casi nula en esta competencia. Sin embargo, observamos la presencia notable de nuestro objeto de estudio en la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Es importante tener en cuenta que el Currículo Nacional 2017 aún no está vigente para la Educación Secundaria, sin embargo, lo hemos revisado para tener conocimiento.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LOS MATERIALES

En este capítulo, presentamos el análisis de la organización matemática en torno a la proporcionalidad de los textos escolares de Matemática que el Ministerio de Educación del Perú distribuyó a los estudiantes de educación secundaria en el año escolar 2016 y que actualmente se usa como material didáctico referente en las instituciones educativas estatales a nivel nacional. Asimismo, analizaremos los Manuales para los docentes, pues en estos materiales identificaremos las técnicas utilizadas para resolver las diferentes tareas de los cuadernos de trabajo que utilizan los estudiantes.

4.1. Descripción de los textos escolares

Los textos escolares Matemática 1 y Matemática 2 han sido elaborados por el Grupo Editorial Norma, mientras que Matemática 3, Matemática 4 y Matemática 5 fueron elaborados por la editorial Santillana S.A. Para su elaboración se tomó en cuenta los indicadores de desempeño plasmados en Rutas de Aprendizaje (2015)

A continuación describiremos cada uno de los textos escolares.

4.1.1 Matemática 1

El texto escolar Matemática 1 Secundaria está organizado en doce capítulos y en dos de ellos (3 y 9) se considera el objeto matemático de nuestra investigación.

En la tabla 9 se describe los contenidos y aprendizajes esperados de los capítulos tres y nueve. En el capítulo tres, observamos que los contenidos considerados corresponderían a una modelización discursiva y proporcional de sistemas lineales.

En el capítulo nueve se retoma el sistema lineal y se suma a él el sistema lineal inverso.

Tabla 9: Contenidos y aprendizajes esperados para primero de secundaria

CANTIDAD **Capítulo 3** **Proporcionalidad** • Razones y proporciones • Proporcionalidad directa • Método de reducción a la unidad • Regla de tres simple directa	• Reconoce relaciones entre magnitudes en problemas multiplicativos de proporcionalidad y los expresa en un modelo de solución • Usa modelos referidos a la proporcionalidad directa al resolver problemas. • Organiza datos en tablas para expresar relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes. • Emplea el factor de conversión, el método de reducción a la unidad y la regla de tres simple en problemas relacionados con proporcionalidad directa. • Halla el término desconocido de una proporción con base en recursos gráficos y otros al resolver problemas. • Plantea conjeturas con respecto a la propiedad fundamental de las proporciones a partir de ejemplos. • Justifica la diferencia entre el concepto de razón y

	proporcionalidad a partir de ejemplos.
REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO **Capítulo 9** **Proporcionalidad y función lineal** • Proporcionalidad directa • Proporcionalidad inversa • Función lineal y su regla de formación	• Reconoce relaciones no explícitas en situaciones de variación al expresar modelos relacionados con proporcionalidad y funciones lineales. • Asocia modelos referidos con la proporcionalidad directa y las funciones lineales con situaciones afines. • Describe el comportamiento de la gráfica de la función lineal. • Establece conexiones entre las representaciones gráficas, tabulares y simbólicas de una función lineal. • Emplea estrategias para resolver problemas de proporcionalidad y función lineal con coeficientes enteros. • Emplea métodos gráficos para resolver problemas de funciones. • Justifica el dominio apropiado de una función lineal (si pertenece al campo natural, entero o racional) de acuerdo con una situación de dependencia.

Fuente: Adaptado de Texto escolar Matemática 1. Norma (2016)

En el texto de primero de secundaria, encontramos los siguientes discursos tecnológicos sobre razón y proporción en la competencia de cantidad.

> **Razón y proporción**
>
> El cociente que se utiliza para comparar dos magnitudes o cantidades se denomina razón. Se puede escribir como a:b, a/b, o a÷b; b≠0. La razón a:b se lee a es a b. El primer término de una razón (a) recibe el nombre de antecedente; y el segundo (b) el de consecuente.
>
> Cuando relacionamos dos razones estamos reconociendo una proporción. En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. (p. 48)

La comparación que se da en el texto tiene una relación de carácter cuantitativo, las variables representan números, o cantidades. En cuanto a la propiedad fundamental de las proporciones, podemos decir que corresponde a una tecnología de una modelización discursiva.

En cuanto a los niveles de algebrización, correspondería a una etapa previa al primer nivel.

Asimismo, identificamos:

> **Magnitudes directamente proporcionales**
>
> Dos magnitudes son directamente proporcionales si, al multiplicar el valor de una de ellas por un número dado, el correspondiente valor de la otra queda también multiplicado por el mismo número. Por tanto, el cociente entre cualquier par de valores correspondientes diferentes de cero, siempre será el mismo.
>
> $$\frac{A}{B} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} \ldots = k \qquad \text{(p. 49)}$$

Es claro que nos encontramos con tecnologías de la modelización proporcional$\theta_{prop}(SL)$ y de la modelización ecuacional $\theta_{ec}(SL)$ indicadas en la sección 3.2. Por otro lado, es importante señalar que en el margen del texto escolar se presenta como ostensivo la representación en el plano cartesiano de las magnitudes directamente proporcionales como una línea recta en donde k es la constante de proporcionalidad. Sería importante que se mencione que de acuerdo a que si se tiene cantidades discretas o continuas, se podrán unir los puntos y formar la recta, de lo contario se debería representar como puntos colineales. Por ejemplo, si se hace referencia al número de hombres que se necesitan para tallar piedras.

En el capítulo 9, se plantea los conceptos de magnitudes inversamente proporcionales y de función en la competencia de regularidad, equivalencia y cambio.

> **Magnitudes inversamente proporcionales**
>
> Dos magnitudes son inversamente proporcionales (I.P.) si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número. (p.135)

Consideramos importante que el discurso tecnológico presentado en el texto escolar esté relacionado con la información del margen sobre la constante de proporcionalidad inversa y la representación en el plano cartesiano (hipérbola), por lo que podemos intuir que la proporcionalidad inversa puede ser expresada como una función.

> **Función**
>
> Una función es una relación establecida entre los elementos de dos conjuntos. Dados los conjuntos A y B se define la función *f* de A en B como un subconjunto de AxB donde a cada elemento de A (conjunto de partida) le corresponde un único elemento de B (conjunto de llegada). (p.137)
>
> **Función lineal**
>
> Se llama función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x;y). Su ecuación tiene la forma y=mx o *f*(x) = mx (p.137)

La definición de función correspondería a la tecnología θ_f^{SL} de la modelización funcional propuesta por García que indica que dado un sistema lineal, la relación entre las magnitudes puede ser considerada como una función, es decir, como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos numéricos (conteniendo las medidas de las cantidades en ambas magnitudes) mediante la expresión *f*(x) = k.x. Aunque solo se presentan pocas situaciones de la relación de la proporcionalidad directa y la función lineal, es importante resaltar que los autores pretenden una articulación de estos dos objetos matemáticos en el texto de primero de secundaria.

Asimismo, en el organizador del final de la unidad, indican que la función lineal relaciona magnitudes directamente proporcionales mediante una regla de correspondencia que genera parejas ordenadas de la forma (x;y).

4.1.2 Matemática 2

El texto escolar Matemática 2 está organizado en doce capítulos y en dos de ellos se considera el objeto matemático de nuestra investigación.

En la tabla 10 se describen los contenidos y aprendizajes esperados de los capítulos tres y nueve. Al igual que en el texto anterior, se identifica la proporcionalidad en la competencia de cantidad y en el de regularidad, equivalencia y cambio.

Tabla 10: Contenidos y aprendizajes esperados para segundo de secundaria

CANTIDAD **Capítulo 3** • Razones y proporciones • Magnitudes directamente proporcionales • Magnitudes inversamente proporcionales • Reducción a la unidad • Regla de tres simple • Regla de tres compuesta	• Reconoce relaciones no explícitas en problemas multiplicativos de proporcionalidad, y lo expresa en un modelo basado en proporcionalidad directa e indirecta. • Diferencia y usa modelos basados en la proporcionalidad directa e indirecta al plantear y resolver problemas. • Describe que una cantidad es directamente proporcional a la otra. • Organiza datos en tablas para expresar relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes. • Emplea convenientemente el método de reducción a la unidad y la regla de tres simple en problemas de proporcionalidad. • Realiza estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros al resolver problemas relacionados con la proporcionalidad. • Justifica cuándo una relación es directa o inversamente proporcional.
REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO **Capítulo 9** • Función • Representación de una función • Función lineal • Función proporcionalidad inversa	• Reconoce relaciones no explícitas entre datos de dos magnitudes en situaciones de variación, y expresa modelos referidos a proporcionalidad inversa, funciones lineales. • Usa modelos de variación referidos a la función lineal al plantear y resolver problemas. • Describe gráficos y tablas que expresan funciones. • Emplea representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de la función lineal. • Emplea representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de la proporcionalidad inversa. • Emplea estrategias heurísticas y procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad inversa, función lineal considerando ciertos valores, regla de la función, o a partir de su representación. • Determina el conjunto de valores que puede tomar una variable en una proporcionalidad inversa y función lineal. • Evalúa ventajas y desventajas de las estrategias, procedimientos matemáticos y recursos usados al resolver el problema. • Prueba que las funciones lineales y proporcionalidad inversa crecen o decrecen por igualdad de diferencia en intervalos iguales.

Fuente: Adaptado de Texto escolar Matemática 2. Norma (2016)

Se evidencia que la estructura del texto de segundo mantiene el mismo esquema que el de primero de secundaria, es decir, identificamos discursos tecnológicos de las modelización proporcional y de la modelización ecuacional en la competencia de cantidad. Por otro lado, podemos identificar que en el capítulo 9 se intenta articular la proporcionalidad y con el objeto de función por lo que podríamos intuir que se podría dar una modelización funcional, tanto de sistemas lineales como lineales inversos.

A continuación, presentamos algunos discursos tecnológicos que podrían justificar inicialmente algunas técnicas en este grado.

Razón

Al cociente que utilizamos para comparar dos magnitudes o cantidades la llamamos razón. La igualdad de dos expresiones que representan la misma razón se denomina una proporción. (p. 38)

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una de las magnitudes, también la otra aumenta en la misma proporción; o al disminuir una de las magnitudes también disminuye la otra en la misma proporción. El cociente de las dos magnitudes es siempre constante. (p. 39)

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una de las magnitudes, la otra disminuye en la misma proporción. El producto de las dos magnitudes es siempre una misma constante. (p. 40)

El discurso “a más, más” y “a menos, menos” aún pervive en el lenguaje coloquial y en los textos escolares de Matemática y podría provocar confusión en el docente. Esta concepción corresponde a una organización clásica en torno a la proporcionalidad según Bolea (2002). La incursión de la constante de proporcionalidad da sentido matemático a las definiciones.

En cuanto al capítulo de regularidad, equivalencia y cambio se tiene:

Función lineal

Una función lineal tienen la forma $f(x)=ax$ (a es constante). La gráfica que representa esta función es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano. (p. 137)

Gráfica de la función proporcional inversa

Si en un plano cartesiano se representan los valores que corresponden a dos magnitudes inversamente proporcionales, entonces su gráfica será el conjunto de puntos que pertenecen a una curva llamada hipérbola. (p.142)

Estas afirmaciones permiten interpretar las magnitudes directamente e inversamente proporcionales, como función lineal y función proporcional inversa respectivamente, articulando así estos dos objetos.

4.1.3 Matemática 3

El texto escolar Matemática 3 está organizado en doce capítulos y en el capítulo dos se considera el objeto matemático considerado en nuestra investigación. Se identifica la proporcionalidad en la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad.

Los contenidos a trabajar en el capítulo dos son los siguientes:

- Proporcionalidad directa. Magnitudes directamente proporcionales
- Regla de tres directa. Reducción a la unidad
- Proporcionalidad inversa. Magnitudes inversamente proporcionales
- Regla de tres inversa. Reducción a la unidad. Regla de tres compuesta

A continuación, presentamos discursos tecnológicos que podrían justificar inicialmente algunas técnicas en este grado.

> **Magnitudes directamente proporcionales**
>
> Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda multiplicado por el mismo número real. Al ser divididos los valores correspondientes a dichas magnitudes, se obtiene el mismo cociente llamado constante de proporcionalidad.
>
> Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente de las cantidades correspondientes a dichas magnitudes es constante:
>
> $$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = k \rightarrow Constante\ de\ proporcionalidad \qquad (\text{p.}32)$$
>
> **Magnitudes inversamente proporcionales**
>
> Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda dividido por el mismo número real. Al ser multiplicados los valores correspondientes a dichas magnitudes, se obtiene el mismo producto llamado constante de proporcionalidad.
> Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de las cantidades correspondientes a dichas magnitudes es constante:
>
> $$a_1.b_1 = a_2.b_2 = a_3.b_3 = k \rightarrow Constante\ de\ proporcionalidad \qquad (\text{p. }34)$$

El texto escolar sugiere tener en cuenta:

- Dada la proporción geométrica: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a y d son extremos, y b y c son medios, se cumple la propiedad fundamental de la proporcionalidad: El producto de los extremos es igual al producto de los medios. Por lo tanto: $a.d = b.c$
- La proporcionalidad se aplica cuando existen por lo menos dos magnitudes que se comparan

– En una proporcionalidad directa, cuando una magnitud aumenta, la otra también aumenta; y cuando una disminuye, la otra también disminuye. (p. 33)

Tal como indicamos anteriormente, el discurso “a más, más” y “a menos, menos” aún pervive en el lenguaje coloquial y en los materiales de Matemática. En la última afirmación se puede entender erróneamente como una correspondencia biunívoca, es decir, que si “una aumenta y la otra también aumenta o cuando una disminuye la otra también disminuye” se considera una proporcionalidad directa

4.1.4 Matemática 4

El texto escolar Matemática 4 está organizado en doce capítulos y en el capítulo dos se considera el objeto matemático considerado en nuestra investigación. Se identifica la proporcionalidad de manera explícita solo en la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad. Los contenidos a trabajar son los siguientes:

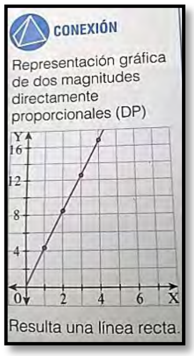
- Magnitudes directamente proporcionales. Reducción a la unidad
- Regla de tres directa. Reparto directamente proporcional
- Magnitudes inversamente proporcionales.
- Reducción a la unidad. Regla de tres inversa.
- Reparto inversamente proporcional. Regla compuesta

A continuación presentamos algunos conceptos que podrían justificar inicialmente las técnicas en este grado.

Magnitudes directamente proporcionales (DP)
Magnitud es una propiedad física de los cuerpos que nos permite medirlos.
Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda multiplicado por el mismo número real. Al ser divididos los valores correspondientes a dichas magnitudes, se obtiene el mismo cociente llamado constante de proporcionalidad.
Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente de las cantidades correspondientes a dichas magnitudes es constante.

A	a_1	a_2	a_3
B	b_1	b_2	b_3

$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = k \rightarrow Constante\ de\ proporcionalidad$ (p. 30)



Magnitudes inversamente proporcionales
Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda dividido por el mismo número real. Al ser multiplicadas las cantidades de dichas magnitudes, se obtiene el mismo producto, llamado constante de proporcionalidad.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de las cantidades correspondientes a dichas magnitudes es constante.

A	a_1	a_2	a_3
B	b_1	b_2	b_3

$$a_1.b_1 = a_2.b_2 = a_3.b_3 = k \rightarrow Constante\ de\ proporcionalidad$$ (p. 34)

El texto escolar indica como ostensivos que la representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales (DP) es una línea recta. Asimismo, indica que la representación gráfica de dos magnitudes inversamente proporcionales (IP) es una curva llamada hipérbola.

Este tipo de conexiones es importante, pues se concibe que la proporcionalidad se puede representar como una función lineal o función de proporcionalidad inversa como sucedía en los textos de primero y segundo de secundaria. Sin embargo, en el texto no se identifican problemas donde se articule la proporcionalidad con la función.

4.1.5 Matemática 5

El texto escolar Matemática 5 está organizado en doce capítulos y en el capítulo tres se considera el objeto matemático de nuestra investigación. Se identifica la proporcionalidad de manera explícita solo en la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad, al igual que en los textos de tercero y cuarto. Los contenidos a trabajar son:

- Razones y proporciones
- Propiedades de las proporciones

El texto también considera los contenidos de porcentajes, mezclas, aleaciones y escalas. Sin embargo, estas aplicaciones de la proporcionalidad no son consideradas para nuestra investigación.

A continuación, presentamos algunos conceptos que podrían justificar inicialmente las técnicas utilizadas en este grado.

Razones y proporciones

Comparación de magnitudes

Dos cantidades, a y b pueden compararse de dos manera:

1. Hallando cuánto excede una a la otra, es decir, restándolas
2. Hallando cuántas veces contiene una a la otra, es decir, dividiéndolas.

El primer caso se trata de una razón aritmética, y el segundo caso, de una razón geométrica.

Razón aritmética (r)	Razón geométrica
a-b = r	$\frac{a}{b} = R$

Cuando dos razones aritméticas o geométricas se igualan, recibe el nombre de proporción. Una proporción (aritmética o geométrica) puede ser discreta o continua.

	Proporción aritmética	Proporción geométrica
Discreta: Los cuatro términos de la proporción son diferentes	a - b = c – d Donde a $\neq b \neq c \neq d$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Donde a $\neq b \neq c \neq d$
Continua: Los términos medios son iguales	a - b = b – c Al término b se le denomina media aritmética o media diferencial	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ A b se le denomina media geométrica o media proporcional de a y c

El texto escolar es coherente con lo indicado en Rutas de Aprendizaje, pues es en el único grado en el que se considera las propiedades de las proporciones en los indicadores de desempeño.

En el texto, se indican propiedades de las razones y proporciones geométricas

Propiedad	**Representación**
La suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente como la suma o diferencia entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su antecedente.	$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$
La suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma o diferencia entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente.	$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$
La suma entre el antecedente y el consecuente de la primera razón es a la diferencia de estos como la suma entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a la diferencia de estos.	$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$
La razón entre la diferencia de dos antecedentes y la diferencia de sus consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad.	$\frac{a - c}{b - d} = k$
La razón entre la suma de antecedentes y la suma de consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad.	$\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = k$
La razón entre el producto de n antecedentes y el producto de sus n consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad elevada a la n.	$\frac{\overbrace{a.c.e.g.\ldots}^{n}}{\underbrace{b.d.f.h.\ldots}_{n}} = k^n$

Se recuerda que una serie de razones geométricas es una igualdad entre dos o más razones geométricas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad (p. 46)

4.2. Descripción de los Manuales para los docentes

Los Manuales para los docentes han sido elaborados por las mismas editoriales que diseñaron los textos escolares, es decir, los de I y II de secundaria los elaboró el Grupo Editorial Norma y los de III, IV y V de secundaria la Editorial Santillana. Fueron difundidos por el Ministerio de Educación en el año 2016 para los docentes de matemática de instituciones estatales a nivel nacional.

Cada Manual para el docente contiene el desarrollo de las actividades del cuaderno de trabajo de los alumnos. Estas actividades han sido organizadas con el propósito de contribuir al desarrollo de las competencias y capacidades establecidas para el área y a partir de la concepción de una matemática para la vida y el trabajo, relacionándose con el desarrollo de aprendizajes organizados en las cuatro competencias. Tienen en cuenta las orientaciones didácticas planteadas en las Rutas de Aprendizaje (2015) por lo que cada actividad se desarrolla teniendo en cuenta una estructura particular, pudiendo ser por ejemplo:

- Prácticas de laboratorio de Matemática: Identificamos en los manuales 1, 2, 4, y 5 actividades donde los estudiantes utilizan material manipulable, físico o virtual. Por ejemplo en primero se propone trabajar con desglosables para identificar relación entre el número de muros y el área de este. Asimismo, en el manual de cuarto se propone el trabajo con el Excel para realizar un gráfico de burbujas para representar magnitudes directamente proporcionales.
- El juego como fuente de aprendizaje de la Matemática: Esta actividad solo la identificamos en el manual de primero. A través de cartas que se encuentran en la sección desglosables, se busca que el estudiante determine la cuarta proporcional.
- Aprendizaje basado en problemas de modelación matemática: Este tipo de actividades la identificamos en todos los manuales de secundaria. Se busca que el estudiante identifique la proporcionalidad en un contexto real y a partir de ello desarrollar un modelo matemático. En los manuales de primero y segundo se pretende que los estudiantes modelen situaciones de proporcionalidad a través de la función.
- Uve de Gowin: Esta estrategia de organizar la información sobre proporcionalidad la identificamos en los manuales de tercero y quinto.
- Planteamiento de talleres matemáticos: Los identificamos en los manuales de primero y segundo de secundaria. Permite consolidar técnicas ya desarrolladas por

los estudiantes, tales como regla de tres, reducción a la unidad, factor de conversión, etc.

- Estrategia heurística: La identificamos en los manuales de tercero y cuarto. Se pretende que los docentes a través de interrogantes permitan a sus estudiantes comprender, planificar, resolver, comprobar, concluir y aplicar en situaciones de proporcionalidad.

Asimismo, en cada Manual para los docentes encontramos sugerencias y estrategias metodológicas acompañadas de ciertos conceptos y/o definiciones que pretenden justificar los procedimientos utilizados y guiar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

En el caso del **Manual para los docentes de primero de secundaria**, encontramos lo siguiente:

> Tenga en presente que cuando dos magnitudes se relacionan de forma tal que al aumentar o disminuir una de las magnitudes, la otra tiene el mismo comportamiento, se dice que las dos magnitudes están directamente relacionadas.
>
> Analice que cuando dos magnitudes se relacionan de forma tal que al aumentar una, disminuye la otra, se dice que las dos magnitudes están inversamente relacionadas. (p. 54)

Se pretende que los estudiantes identifiquen la diferencia entre magnitudes relacionadas y magnitudes proporcionales. El concepto de "magnitudes relacionadas" no la encontramos en el texto escolar, podría causar incertidumbre en el docente. Sin embargo, es alentador que se encuentre una actividad que permita que el estudiante reconozca relaciones entre magnitudes, pues se puede considerar la proporcionalidad entre magnitudes como una relación más.

Asimismo, se establece la constante de proporcionalidad, elemento importante en la modelización ecuacional propuesto por García (2005) y en el primer nivel de algebrización propuesto por Bolea (2002).

En cuanto a los ostensivos para representar las relaciones de magnitudes directamente proporcionales también se presenta el plano cartesiano.

> Dos magnitudes "x" e "y" son directamente proporcionales si están en relación directa y, además, existe una constante k, diferente de cero, tal que satisface la relación y=xk. La constante k se denomina constante de proporcionalidad. Afirme que los puntos que representan en el plano cartesiano los valores correspondientes de magnitudes directamente proporcionales se ubican sobre una línea recta que pasa por el origen de los ejes coordenados. (p.61)

En referencia a la técnica de la regla de tres simple directa identificamos que las orientaciones para el docente considera el plantear razones heterogéneas al establecer la proporción. En cambio para la regla de tres simple inversa propone establecer razones homogéneas, El MER que estamos utilizando considera establecer razones homogéneas para ambos casos.

> Los pasos que se pueden seguir para resolver un problema de regla de tres simple directa son los siguientes:
>
> - Plantear una proporción usando las razones entre los valores correspondientes.
>
> - Hallar el término desconocido aplicando la propiedad fundamental de las proporciones. (p. 69)
>
> Para resolver un problema de regla de tres simple inversa, se realiza lo siguiente:
>
> -Plantear una proporción que iguale la razón entre los valores de una magnitud y la razón formada con los valores correspondientes, colocados en forma inversa.
>
> -Hallar el término desconocido aplicando procedimientos relacionados con la proporcionalidad inversa. (p. 72)

Como orientación didáctica encontramos el siguiente concepto que permite identificar articulación entre la proporcionalidad y el objeto función.

> Enfatice en que la proporcionalidad directa es una relación directa de dos variables que se expresa por un cociente (constante de proporcionalidad). Además, dicha constante de proporcionalidad determina una expresión algebraica (función lineal y su gráfica en el plan cartesiano) (p. 91)

En el **Manual para docentes de segundo de secundaria** no se identifica variedad de conceptos como ocurría con el de primero de secundaria. Sin embargo, es encontramos la siguiente información en la sección ten en cuenta:

> "Si una magnitud aumenta y la otra magnitud también aumenta, se dice que es directamente proporcional; si una magnitud aumenta y la otra disminuye, se dice que es inversamente proporcional". (p. 280)

Este tipo de afirmaciones en un Manual para docentes que se difunde a nivel nacional podría provocar confusión en los docentes al momento de realizar sus sesiones de aprendizaje y afianzar el discurso coloquial "a más, más" y "a menos, menos"

En cuanto a la regla de tres se identificó:

> "Se conoce como regla de tres al procedimiento que se aplica en la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que forman una proporción y se quiere hallar el cuarto. Cuando se comparan solo dos magnitudes, se dice que la regla de tres es simple. Si las dos magnitudes son directas, se denomina regla de tres directa" (p. 297)

Estos tipos de problemas son considerados como problemas de cuarta proporcional por Vergnaud (1990)

En la sección ten en cuenta encontramos:

> "Al componer dos o más razones se forma una proporción de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o de la forma $a: b :: c: d$. La proporcionalidad de magnitudes puede ser directa o inversa" (p. 296)

Se identificó también los siguientes conceptos:

> "Si el producto de valores correspondientes a dos magnitudes correlacionadas inversamente, es igual a una constante k≠ 0, las dos magnitudes son inversamente proporcionales. La constante k se denomina constante de proporcionalidad inversa." (p. 287)

> "La constante de proporcionalidad es la razón o relación entre las variables, para tener mayor facilidad en determinar esta constante es muy útil representar los datos en tablas." (p. 288)

La primera afirmación considera la diferencia entre magnitudes relacionadas y magnitudes proporcionales, tal como se consideró en primero de secundaria. La segunda utiliza el término de variable para referirse a las medidas de las cantidades por lo que se podría estar tratándose de una relación entre números reales, característica de una modelización funcional.

> "Dos variables (una independiente x y la otra dependiente y) son directamente proporcionales si el cociente (división) entre los valores respectivos de cada una de las variables es constante" (p. 320)

> "La gráfica entre dos magnitudes inversamente proporcionales nunca corresponde a una línea recta ni tampoco a una curva que corte alguno de los ejes" (p. 320)

> "Una función lineal de la forma f(x) =ax, con a≠0, es una función de variación directa. Se dice que f(x) varía directamente con x, que f(x) es directamente proporcional a x o que x y f(x) son directamente proporcionales. La constante a, que es la pendiente de la recta que representa la función, también recibe el nombre de constante de proporcionalidad directa o constante de variación" (p. 331)

Finalmente, identificamos el siguiente error en dos páginas diferentes, pudiendo causar confusión en los docentes y posteriormente en los estudiantes.

> "La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es creciente si x es mayor que cero" (p. 332 y p. 336)

En el **Manual para los docentes de tercero** identificamos:

Varias de las orientaciones didácticas hacen referencia a las definiciones y conceptos trabajados en el texto escolar de tercero. Sin embargo identificamos lo siguiente:

> "Magnitudes directamente proporcionales porque al aumentar una magnitud, la otra magnitud también aumenta; e inversamente proporcionales, porque al disminuir una magnitud, la otra magnitud, la otra magnitud aumenta". (p. 80)

Este tipo de afirmaciones, permiten que perviva el discurso coloquial "a más, más" y a "menos, menos". Teniendo en cuenta las investigaciones, conceptos y definiciones consideramos que este tipo de afirmaciones está incompleta.

En el **Manual para los docentes de cuarto** identificamos:

En la sección previsión de dificultades encontramos:

> "Si al variar el valor de una de las magnitudes el valor de la otra varía en la misma proporción, hablamos de magnitudes directamente proporcionales" (p.58)

Consideramos que es importante que se haya considerado que la variación debe ser en la misma proporción para poder hablar de magnitudes directamente proporcionales.

En la sección información complementaria identificamos:

> "Las magnitudes directamente proporcionales pueden representarse con la gráfica de la función de proporcionalidad directa, a la que le corresponde una recta o un gráfico de burbujas" (p. 60)
>
> "La razón de dos números a y b puede ser: Aritmética: a-b   Geométrica: $\frac{a}{b}$" (p.68)

La recta o el gráfico de burbujas (generado por excel) los considerados como ostensivos. La elección de uno u otro dependerá de las características de las medidas de las cantidades a trabajar. Si las medidas son cantidades enteras, por ejemplo, número de personas, el gráfico de burbujas sería el adecuado.

En la sección previsión de dificultades identificamos:

> "Dos magnitudes presentan proporcionalidad inversa si al variar una de ellas, la otra también varía pero en sentido contrario". (p. 72)

Consideramos que esta afirmación se podría complementar teniendo en cuenta que la variación debe ser inversamente proporcional.

En el **Manual para los docentes de quinto** identificamos en la sección previsión de dificultades:

> "Constante de proporcionalidad: $r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ " (p. 84)
>
> "Recuerde que si ambas aumentan o disminuyen, son directamente proporcionales y, si una aumenta y la otra disminuye o viceversa, son inversamente proporcionales". (p. 94)

Tal como indicamos anteriormente en la segunda cita se podría complementar teniendo en cuenta que la variación debe ser proporcional, de lo contrario el discurso coloquial "a más, más" y a "menos, menos" podría ser parte del modelo docente dominante en torno a la proporcionalidad.

Los indicadores que se desarrollarán en los Manuales para los docentes son los considerados en las Rutas de Aprendizaje (2015). Estos indicadores nos ayudarán a identificar las técnicas y discursos tecnológicos para los tipos de tareas. Asimismo, nos darán algunos indicios de problemas relacionados con la organización clásica de la proporcionalidad o con una organización en vías de ser algebrizada.

Al igual que en la estructura de los textos, en los Manuales para los docentes, la proporcionalidad entendida como función va perdiendo presencia en la actividad matemática que se propone.

4.3 Elementos de las organizaciones matemáticas presentes en los textos escolares

Con el propósito de describir los tipos de tareas, tareas y técnicas presentes en los textos escolares haremos revisión de los problemas iniciales y los ejemplos resueltos en cada uno de los grados.

Asimismo, para la constitución de cada técnica utilizaremos algunos de los pasos descritos a continuación:

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 2: Multiplicar o dividir por un número la medida de una cantidad "a" para determinar "b". Utilizar este valor para calcular los otros estados.

Paso 3: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a/a´)

Paso 4: Calcular el estado correspondiente a "b" teniendo en cuenta que b´= b(a/a´)

Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como "x" a la medida de la cantidad desconocida

Paso 6: Establecer una proporción de razones heterogéneas con las medidas de las cantidades y la incógnita

Paso 6´: Establecer una proporción de razones homogéneas con las medidas de las cantidades y la incógnita

Paso 7: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y formar la ecuación lineal

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

Paso 9: Establecer una proporción de razones homogéneas con las medidas de las cantidades y la incógnita

Paso 10: Comprobar que las magnitudes sean inversamente proporcionales

Paso 11: Calcular la constante de proporcionalidad inversa determinando los productos heterogéneos a.a′ = b.b′= k

Paso 12: Utilizar el valor de la constante de proporcionalidad para calcular el valor desconocido

Paso 13: Formar una ecuación considerando la constante de proporcionalidad y el producto de medidas correspondientes

Paso 14: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a.a′)

Paso 15: Calcular el estado correspondiente a "b" teniendo en cuenta que b′= (a.a′)

Paso 16: Igualar la razón que contiene la incógnita con el producto de las razones de las otras magnitudes de forma que si son directamente proporcionales no se invierte y si son inversamente proporcionales se invierte la razón

Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a′; b/b′, etc. y determinar la constante de proporcionalidad

Paso 18: Multiplicar a cada una de las inversas de los números dados una constante, puede ser "k"

Paso 19: Sumar las expresiones obtenidas y formar una ecuación igualando al total

Paso 20: Reemplazar el valor de la constante y determinar cada una de las partes del total

Paso 21: Multiplicar a cada uno de los números dados una constante, puede ser "k"

Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente

Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia

Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario

Paso 25: Formar productos con parejas de valores correspondientes: a.a′; b.b′, etc. y determinar la constante de proporcionalidad inversa

Paso 26: Identificar las dos medidas de cantidades a utilizar

Paso 27: Calcular el cociente de las medidas

Paso 28: Identificar la razón dada

Paso 29: Expresar la razón como el cociente entre las medidas de las cantidades

Paso 30: Formar una razón con las sumas de los antecedentes y consecuentes de la serie de razones dadas. Esta será la constante de proporcionalidad

Paso 31: Igualar la constante de proporcionalidad con la razón del dato desconocido

4.3.1 Texto escolar de primero de secundaria

En primero de secundaria establecemos cuatro tipos de tareas que a continuación se irán indicando.

> Problema inicial:
> En las construcciones de las ruinas de Machu Picchu, encontramos que por cada 2 piedras de forma pentagonal hay 5 piedras de forma cuadrangular. ¿Cuántas piedras de forma cuadrangular habrá por cada 4 y 6 piedras de forma pentagonal? (Matemática 1, p.48)

La solución que se presenta en el texto corresponde a la modelización discursiva según García (2005). Asimismo, es importante señalar que según Lamon (1994, citado en Reyes, 2011) correspondería a un modelo de pensamiento proporcional inter, en donde se trabajan con magnitudes homogéneas o dentro de un mismo espacio de medida.

Asimismo, se considera como ostensivo la tabla de proporcionalidad que tiene una valencia instrumental importante pues permite verificar lo descrito de manera oral e identificar las operaciones utilizadas.

Por lo tanto, establecemos T_1.

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de dos magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales

$\tau_{(1,1,1)}$: Ampliar y simplificar en el mismo espacio de medida

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 2: Multiplicar o dividir por un número la medida de una cantidad "a" para determinar "b". Utilizar este valor para calcular los otros estados.

Problema inicial:

La arquitectura inca se caracteriza por su sencillez y por buscar que sus construcciones armonicen con el paisaje. El principal material utilizado es la piedra. Los constructores incas desarrollaron técnicas para levantar muros enormes: verdaderos mosaicos formados por bloques de piedra tallada que encajan perfectamente, sin que entre ellos pudiera pasar un alfiler. Si el número de hombres que se necesitaban para tallar una piedra de un metro cuadrado y colocarla en los muros era 20, ¿cuántos hombres se necesitaban para hacer el trabajo en las mismas condiciones si el número de piedras aumentaba? (Matemática 1, p. 49)

La situación también se resuelve en el texto con la técnica $\tau_{(1,1,1)}$ ya descrita anteriormente. Como ostensivo se utiliza la tabla de proporcionalidad de manera horizontal en donde se identifica cómo la operación de multiplicación en las medidas de una misma magnitud permite ampliar hasta obtener lo solicitado. También identificamos que acompaña a la solución, la representación cartesiana como ostensivo, en donde se traza una línea recta (que parte del origen de coordenadas) para representar la relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de piedras talladas y el número de hombres. Al ser el número de hombres una cantidad discreta, consideramos que no es necesario unir los puntos y formar una línea recta, es suficiente con dejar indicados los puntos colineales, de esta manera tendría mayor valencia semiótica el ostensivo.

Ejemplo 1:

La tabla muestra la relación entre gramos de harina y gramos de levadura para preparar la masa de una torta. Determina si estas dos magnitudes son directamente proporcionales. (Matemática 1, p. 49)

Harina y levadura para la masa de la torta	
Harina (g)	Levadura (g)
1000	50
2000	100
3000	150
500	25
250	12,5

En la solución se evidencia la relación de medidas de cantidades y la identificación de la constante de proporcionalidad. Es importante señalar que según Lamon (1994, citado en Reyes, 2011) correspondería a un modelo de pensamiento proporcional intra, en donde se trabaja en dos espacios de medida. Asimismo, según García (2005) correspondería a una modelización ecuacional de un sistema lineal que se caracteriza por considerar a la constante de proporcionalidad como parte importante de su discurso tecnológico. Entendemos por sistema lineal a las situaciones de proporcionalidad directa.

Finalmente, identificamos en esta situación una medida de cantidad no entera (12,5), lo que favorece a no confundir el concepto de proporciones con el de fracciones, pues en la solución encontramos por ejemplo la siguiente proporción: $\frac{1000}{50} = \frac{250}{12,5}$.

Indicamos entonces T_2.

Tipo de tarea (T_2): Identificar magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla

$\tau_{(2,1)}$: Constante de proporcionalidad directa en tabla

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.
Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad

> Ejemplo 2:
>
> Unos turistas visitan Chachapoyas (Amazonas) y deciden ir a la imponente fortaleza Kuélap (Luya). El precio de la entrada a este lugar es S/. 11,50 por persona. Ellos pagan S/. 115 por el ingreso de 10 personas. Al poco tiempo llega otro grupo de 30 personas para visitar dicho lugar. ¿Cuánto paga en total este último grupo por ingresar a la fortaleza? (Matemática 1, p.50)

La solución que se presenta en el texto corresponde según García (2005) a la modelización discursiva M_d (SL) la cual se caracteriza por multiplicar por un número la medida de una cantidad "a" para determinar "b". Para la situación si se triplica el número de personas se triplica el precio a pagar. Asimismo, se acompaña la solución con una tabla de proporcionalidad.

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de dos magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales

$\tau_{(1,1,1)}$: Ampliar y simplificar en el mismo espacio de medida

> Problema inicial:
>
> Un grupo de estudiantes de un colegio desean hacer un regalo a sus maestros y forman una comisión. Deciden regalar a cada uno lapiceros grabados con sus nombres. Para ello, la comisión averigua que 3 lapiceros, incluida la grabación, cuestan S/. 18,60. Si en total son 32 maestros, ¿cuánto se paga por los lapiceros grabados? (Matemática 1, p.51)

El texto es explícito en la técnica a usar para resolver la situación de los lapiceros. "El método de la reducción a la unidad consiste en calcular el número asociado a la unidad. Una vez que se conoce este valor, se puede resolver el problema planteado" (p.51).

A continuación indicamos la tarea y los pasos de la técnica reducción a la unidad, que también está considerada como técnica en el modelo discursivo de sistemas lineales propuesto en el MER de García (2005).

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de dos magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales

$\boldsymbol{\tau}_{(1,1,2)}$***Reducción a la unidad***

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 3: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a/a´)

Paso 4: Calcular el estado correspondiente a "b" teniendo en cuenta que b´= b(a/a´)

Problema inicial:

Demos un paseo por el Tahuantinsuyo. ¿Cuál era el medio de comunicación que utilizaban los incas en tiempos de batalla? El Chasqui era el mensajero personal del inca, y recorría el territorio a través de un sistema de postas, con el fin de entregar mensajes. El lugar de relevo de los chasquis eran los tambos. Si a 3 chasquis les pagaban con 5 kilos de papa en su parada por un tambo, ¿cuántos kilos de papa recibían 12 chasquis? (Matemática 1, p.52)

Ejemplo 1:

La semana pasada Adriana compró 4 pasajes para salir de la ciudad y pagó S/. 14 000. Si esta semana necesita comprar 7 pasajes para el mismo destino, ¿cuánto tendrá que pagar? (Matemática 1, p52)

Ejemplo 2:

Un obrero ganó S/. 150 por trabajar 6 días, ¿cuántos días debe trabajar para ganar S/. 325? (Matemática 1, p.53)

El texto plantea las tres situaciones para ser resueltas con la técnica conocida como regla de tres simple directa.

Para la descripción de la organización matemática de nuestra investigación correspondería:

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de dos magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales

$\boldsymbol{\tau}_{(1,1,3)}$***: Regla de tres simple directa***

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como "x" a la medida de la cantidad desconocida.

Paso 6: Establecer una proporción de razones heterogéneas con las medidas de las cantidades y la incógnita

Paso 7: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y formar la ecuación lineal

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

Es importante señalar que el texto escolar considera como segundo paso, establecer la proporción heterogénea. En la definición de la técnica τ_{rd3}^{SL} de la modelización proporcional del MER de García (2005) se considera el establecer una proporción con razones homogéneas.

Estos problemas resueltos con la regla de tres simple directa son considerados como problemas de cuarta proporcional (ver figura 6), donde las tres cantidades conocidas son diferentes a la unidad. Asimismo, utiliza una tabla de proporcionalidad de 2 x 2 para organizar los datos y la incógnita. El ostensivo gráfico que acompaña una de las soluciones (la primera) es la representación cartesiana en donde se consideran puntos colineales para los pares ordenados que representan el número de chasquis (medidas discretas) y los kilogramos de papa.

Problema inicial:

Unos cocineros de un reconocido restaurante tardan 10 horas en preparar comida para 500 invitados. ¿Cuántas horas tardarán tres cocineros en preparar comida para 1000 comensales, trabajando en las mismas condiciones? (Matemática 1, p.134)

Ejemplo 1:

Para conocer el pasado prehispánico de Lima, Mark y Kimberly visitan la Huaca Pucllana. Mark invita a Kimberly y paga por las entradas generales S/.24. Para hacer el recorrido el guía debe esperar a que se complete un grupo de 10 personas. ¿Cuánto debe pagar el resto del grupo por sus boletos si todos cancelan la tarifa de entrada general? (Matemática 1, p.134)

Se propone resolver las dos situaciones estableciendo proporciones homogéneas y utilizando la propiedad fundamental de las proporciones. Según García (2005), correspondería a una modelización proporcional en donde la tecnología que justifica la técnica $\tau_{(1,1,4)}$ indica que dado un sistema lineal (proporcionalidad directa) se verifica la relación $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ donde a y b son cantidades de una magnitud M y a´ y b´ son las correspondientes de la magnitud M´.

Indicamos también que para estas dos situaciones no se utiliza las tablas de proporcionalidad. Los datos y la incógnita de la primera situación se organizan usando flechas horizontales (→) que relacionan las cantidades mientras que para la segunda situación se plantea directamente la proporción entre los cuatro elementos.

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de dos magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales

$\tau_{(1,1,4)}$: Multiplicación en aspa de los elementos de razones homogéneas

Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como "x" a la medida de la cantidad desconocida

Paso 9: Establecer una proporción de razones homogéneas con las medidas de las cantidades y la incógnita

Paso 7: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y formar la ecuación lineal

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

Ejemplo 1: Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo? (Matemática 1, p. 135)

Hombres	3	6	9	…..	18
Días	24	12	8	….	x

Ejemplo 4:

Cinco obreros levantan una pared en 6 días. ¿En cuántos días lo harán 10 obreros? (Matemática 1, p.136)

Para estas dos situaciones el texto plantea como técnica de solución determinar la constante de proporcionalidad inversa y con este valor determinar el valor desconocido. Asimismo, el ostensivo gráfico (tabla de proporcionalidad) se transforma de tener magnitudes en columnas a ubicarlas ahora en filas. Asimismo, según García correspondería a una modelización ecuacional de un sistema lineal inverso (proporcionalidad inversa) en donde los estados del sistema están relacionados por un producto heterogéneo en donde a.a´= b.b´

Establecemos entonces la Tarea ($t_{1,2}$) y la técnica $\tau_{(1,2,1)}$

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de dos magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales

$\tau_{(1,2,1)}$: Constante de proporcionalidad inversa

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 10: Comprobar que las magnitudes sean inversamente proporcionales

Paso 11: Calcular la constante de proporcionalidad inversa determinando los productos heterogéneos a.a´ = b.b´= k

Paso 12: Utilizar el valor de la constante de proporcionalidad para calcular el valor desconocido

> Ejemplo 2:
>
> Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar a 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar a 450 vacas con la misma cantidad de forraje? (Matemática 1, p. 135)

> Ejemplo 3:
>
> Para envasar cierta cantidad de vino, se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Para envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles, ¿cuál deberá ser la capacidad de esos toneles? (Matemática 1, p.136)

Para las dos situaciones el texto plantea (aunque no de manera explícita) la regla de tres simple inversa. Asimismo, en ambos casos se utiliza la tabla de proporcionalidad para organizar los datos y la incógnita. La valencia instrumental de este ostensivo permite identificar la constante de proporcionalidad inversa multiplicando las medidas de manera vertical.

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de dos magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales

$\tau_{(1,2,2)}$: Regla de tres simple inversa

Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como "x" a la medida de la cantidad desconocida

Paso 13: Formar una ecuación considerando la constante de proporcionalidad y el producto de medidas correspondientes

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

Ejemplo 5:

Dos números suman 300. Si estos números son inversamente proporcionales a 2 y 3, ¿cuáles son los números? (Matemática 1, p.136)

Se plantea en el texto escolar una situación de reparto inversamente proporcional, la cual consideramos dentro de la tarea de distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales. Es importante notar que no se plantea antes una situación de reparto directamente proporcional en el texto escolar ni en los desempeños descritos en Rutas de Aprendizaje (2015)

Establecemos así T_3

Tipo de tarea (T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados

Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados

$\tau_{(3,1)}$: Reparto inverso

Paso 18: Multiplicar a cada una de las inversas de los números dados una constante, puede ser "k"

Paso 19: Sumar las expresiones obtenidas y formar una ecuación igualando al total

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

Paso 20: Reemplazar el valor de la constante y determinar cada una de las partes del total

Problema inicial:

Luisa paseando por la ciudad de Iquitos, ingresa a un restaurante y pregunta por el precio de la porción de tacacho con cecina. Uno de los mozos le responde que cuesta 12 soles. ¿Cuánto tendrá que pagar Luisa si pide 3 porciones y cuánto, si pide 5? (Matemática 1, p.137)

Ejemplo 4:

Determina si el perímetro de un cuadrado depende de la medida de su lado. (Matemática 1, p.139)

Problema inicial:

El cobre (Cu) que se extrae en las canteras del Perú aporta al mundo gran cantidad de materia prima para la elaboración de utensilios y objetos usados en la vida diaria. El cobre permite la conducción de la energía y es usado en las tomas de corriente de casas, empresas y todo tipo de construcción. Si por cada toma de corriente de una casa se requieren 6 Kg de cable de cobre, ¿cuál sería la expresión del peso de cable de cobre a usar por el número de tomas? (Matemática 1, p.140)

El texto plantea como solución a la primera situación, establecer que el monto que se pagará será el resultado de multiplicar la cantidad de porciones por el costo de la unidad. Asimismo, como el costo depende de la cantidad de porciones, si Luisa pide x porciones tendrá que pagar 12x nuevos soles. Luego, se tiene la siguiente función: y=12x. En esta situación no se aprecia la emergencia y necesidad de utilizar una técnica más eficaz que la de reducción a la unidad para determinar lo solicitado. Sin embargo, la consideraremos como una tarea de interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función. En las otras dos situaciones, sí es necesario determinar la regla de correspondencia de la función.

El establecer la proporcionalidad de magnitudes como una función lineal corresponde, según García (2005), a la tecnología de modelización funcional de sistemas lineales $\mathrm{M}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SL}}$. Asimismo, el expresar una relación de proporcionalidad con y=kx corresponde al primer nivel de algebrización propuesto por Bolea (2002) denominado la modernización del lenguaje técnico.

Establecemos así T_4.

Tipo de tarea (T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función

Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal.

$\tau_{(4,1)}$: Expresar como función lineal

Paso 1: Verificar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad

Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente

Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia

Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario

En la sección anterior indicamos los conceptos y/o definiciones presentadas en el texto escolar, por lo que los discursos tecnológicos encontrados en el texto que justificarían las técnicas en primero de secundaria serían:

(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar el valor de una de ellas por un número dado, el correspondiente valor de la otra queda también multiplicado por el mismo número. Por tanto, el cociente entre cualquier par de valores correspondientes diferentes de cero, siempre será el mismo.

$$\frac{A}{B}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}\ldots=k=\text{constante de proporcionalidad}$$

(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales (I.P.) si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número.

(θ_4) Constante de proporcionalidad inversa

Si A y B son magnitudes inversamente proporcionales

Magnitud A	a	b	c	…
Magnitud B	a´	b´	c´	…

Entonces:

$$a.a' = b.b' = c.c' = \ k = constante\ de\ proporcionalidad$$

(θ_5) Definición de función lineal

Una función es una relación establecida entre los elementos de dos conjuntos. Dados los conjuntos A y B se define la función f de A en B como un subconjunto de AxB donde a cada elemento de A (conjunto de partida) le corresponde un único elemento de B (conjunto de llegada). Se llama función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x;y). Su ecuación tiene la forma y=mx o f(x) = mx

Teniendo en cuenta el discurso tecnológic que justifican las técnicas identificadas en el texto escolar, consolidamos en la tabla 11 los elementos praxeológicos identificados en el texto de primero de secundaria.

Tabla 11: Praxeología presente en el texto escolar de primero de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	TÉCNICA	DISCURSO TECNOLÓGICO	TEORÍA
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales	$\tau_{(1,1,1)}$ Ampliar o simplificar en el mismo espacio de medida	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
		$\tau_{(1,1,2)}$Reducción a la unidad		
		$\tau_{(1,1,3)}$: Regla de tres simple directa	(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)
		$\tau_{(1,1,4)}$: Multiplicación de los elementos de razones homogéneas		
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	$\tau_{(1,2,1)}$: Constante de proporcionalidad inversa	(θ_4) Constante de proporcionalidad inversa	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
		$\tau_{(1,2,2)}$: Regla de tres simple inversa	(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales (θ_4) Constante de proporcionalidad inversa	(Θ_1) Teoría des magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,1)}$ Constante de proporcionalidad en tabla	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales

(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	$\tau_{(3,1)}$ Reparto inverso	(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	$\tau_{(4,1)}$ Expresar como función lineal	(θ_5) Definición de función lineal	(Θ_3) Teoría de funciones de variable real

Autoría propia

A continuación resumimos en la tabla 12 la cantidad y variedad de tareas identificadas en el texto escolar. Observamos que la mayor parte de los problemas resueltos corresponden a la Tarea ($t_{1,1}$) la cual exige calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales, estos tipos de problemas también son conocidos como los de cuarta proporcional. Asimismo, podemos identificar que para las tareas ($t_{2,1}$) y ($t_{3,1}$) solo se presentan un problema para cada una, por lo que intuimos que estas tareas no son potenciadas en el texto del grado.

Tabla 12: Variedad de tareas identificadas en el texto escolar de primero de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREAS	PROBLEMAS RESUELTOS	CANTIDAD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales	Problema inicial (p. 48) Problema inicial (p. 49) Ejemplo 1 (p. 49) Ejemplo 2 (p. 50) Problema inicial (p. 51) Problema inicial (p. 52) Ejemplo 1 (p. 52) Ejemplo 2 (p. 53) Problema inicial (p.134) Ejemplo 1 (p. 134)	10
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	Ejemplo 1 (p. 135) Ejemplo 2 (p. 135) Ejemplo 3 (p. 136) Ejemplo 4 (p. 136)	4
(T_2): Identificar	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar	Ejemplo 1 (p. 49)	1

magnitudes proporcionales	magnitudes directamente proporcionales en una tabla		
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	Ejemplo 5 (p.136)	1
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	Problema inicial (p.137) Ejemplo 4 (p. 139) Problema inicial (p.140)	3

Autoría propia

Asimismo en la tabla 13 podemos observar que los ostensivos con mayor presencia en el texto de primero de secundaria son el oral, las tabla de proporcionalidad y las proporciones expresadas con la línea horizontal se utiliza en las fracciones ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$). Es importante también notar el uso de la representación cartesiana de la proporcionalidad directa como ostensivo, su valencia semiótica pues permite concebir a la proporcionalidad como una función.

Tabla 13: Ostensivos identificados en el texto escolar de primero de secundaria

PROBLEMAS RESUELTOS	Ostensivos										
	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	a:b :: c:d	y = kx y=k/x	f(x) =mx f(x)=m/x	Oper mat.	→ →	Repres Sagital	Oral
Problema inicial (p. 48)	✓	✓			✓						✓
Problema inicial (p. 49)	✓	✓	✓	✓							✓
Ejemplo 1 (p. 49)	✓	✓									✓
Ejemplo 2 (p. 50)	✓	✓									✓
Problema inicial (p. 51)								✓			✓
Problema inicial (p. 52)	✓	✓		✓							✓
Ejemplo 1 (p. 52)	✓	✓									
Ejemplo 2 (p. 53)	✓	✓									
Problema inicial (p.134)			✓	✓					✓		✓

Ejemplo 1 (p. 134)	✓										✓
Ejemplo 1 (p. 135)		✓	✓	✓							✓
Ejemplo 2 (p. 135)		✓									✓
Ejemplo 3 (p. 136)		✓									
Ejemplo 4 (p. 136)			✓								✓
Ejemplo 1 (p. 49)	✓	✓	✓	✓							
Ejemplo 5 (p.136)			✓								
Problema inicial (p.137)		✓					✓				
Ejemplo 4 (p. 139)		✓		✓			✓			✓	
Problema inicial (p.140)						✓					

Autoría propia

4.3.2 Texto escolar de segundo de secundaria

A continuación presentamos los elementos de la organización matemática en el texto de segundo de secundaria. A diferencia de las situaciones identificadas en el texto de primero, podemos encontrar cantidades que no se limitan al conjunto de los números naturales, en este texto encontramos algunas fracciones y decimales, es decir, se utilizan cantidades no solo discretas.

> Ejemplo 1:
>
> Una caja de caramelos grande pesa 4,5 Kg y la pequeña 1,5Kg. Hallamos la razón entre el peso de la caja grande y el peso de la caja pequeña. ¿Cómo interpretamos el valor de la razón obtenida? (Matemática 2, p.38)

Para esta situación se exige determinar la razón teniendo en cuenta que aparecen dos cantidades de única magnitud. Estos problemas son denominados por Vergnaud (1997) como de único espacio de medidas.

Indicamos así T_5

Tipo de tarea (T_5): Analizar la razón entre dos cantidades

Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas

$\boldsymbol{\tau_{(5,1)}}$ ***Razón***

Paso 26: Identificar las dos medidas de cantidades a utilizar

Paso 27: Calcular el cociente de las medidas

Problema inicial:

Con el objetivo de hacer polos con un logotipo especial, un grupo ecológico solicita la cotización a la empresa Estampados. Dicha información la escribieron en la siguiente tabla.

Nº de polos	Precio
1	S/ 20
2	S/ 40
3	S/ 60
4	S/ 80

Si desean comprar 40, ¿cuánto tendrán que pagar? (Matemática 2, p.39)

La técnica que se utiliza para esta situación es $\tau_{(1,1,1)}$: Amplificar o simplificar en el mismo espacio de medidas, definida ya en el texto escolar de primero de secundaria. Los ostensivos gráficos utilizados son la representación cartesiana (con puntos colineales, pues la cantidad de polos es discreta) y la tabla de proporcionalidad que permite identificar la multiplicación como operación interna.

Ejemplo 1:

Si sabemos que un cuaderno cuesta S/ 10, dos cuadernos valen S/ 20 y diez cuadernos valen S/ 100, ¿es posible afirmar que el costo de los cuadernos es directamente proporcional con la cantidad de estos? (Matemática 2, p.39)

La situación corresponde a la tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en un tabla y la técnica a emplear es $\tau_{(2,1)}$: Constante de proporcionalidad en tabla, descrita en el análisis del texto de primero de secundaria.

Problema inicial:

Julia tiene como meta ahorrar semanalmente hasta reunir S/ 1000 para hacer un viaje a Lima. Elabora una tabla para saber en cuántas semanas logrará su meta dependiendo de la cantidad de dinero que ahorre semanalmente

(Dinero ahorrado semanalmente)	Tiempo (semanas)
50	20
40	25
20	50

Si semanalmente ahorra S/ 10, ¿en cuánto tiempo llegará a su meta? (Matemática 2, p.40)

Ejemplo 1:

Julián y sus amigos planean un viaje de 20 km en bicicleta por toda la carretera. ¿A qué velocidad constante deben ir si quieren completar el viaje en 4 horas? ¿En dos horas? ¿En 1,5 horas? ¿En 1 hora? (Matemática 2, p.40)

Las dos situaciones corresponden a:

Tipo de tarea (T_5): Analizar la razón entre dos cantidades

Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales

La constante de proporcionalidad, elemento importante en la modelización ecuacional propuesta en el MER de García (2005) y del primer nivel de algebrización de Bolea (2002), se identifica con facilidad en la tabla de proporcionalidad, ostensivo de valencia instrumental.

La relación de proporcionalidad inversa se representa en la primera situación a través del diagrama cartesiano en donde los puntos que representan cada cantidad con su correspondiente forman una hipérbola, que por su valor instrumental permite identificar que a medida que mayor sea la cantidad ahorrada semanalmente menor cantidad de semanas se necesitará para llegar a reunir S/ 1000 (valor de la constante de proporcionalidad para esta situación)

La técnica $\tau_{(1,2,1)}$ utilizada para las dos situaciones está descrita en el análisis del texto escolar de primero de secundaria.

> Problema inicial:
>
> Si 4 caramandungas valen 1 sol, ¿cuánto costarán 7 de estos? (Matemática 2, p.41)

> Ejemplo 1:
>
> Si 5 lápices cuestan S/ 2,50, ¿cuánto costarán 8 lápices? ¿Una decena de lápices? ¿Y dos decenas? (Matemática 2, p. 41)

Las dos situaciones son resueltas en el texto utilizando la técnica de la reducción a la unidad $\tau_{(1,1,2)}$, ya desrita en el análisis del texto escolar de primero de secundaria. Como se mencionó anteriormente se evidencia el uso de medidas de cantidades no naturales. Asimismo, se utiliza como ostensivo gráfico la tabla de proporcionalidad para organizar los datos y la incógnita.

> Problema inicial:
>
> La abuela Rosa tiene en su cocina una balanza para pesar con exactitud los ingredientes que usa en sus recetas. Para preparar un queque de chocolate ella mezcla, inicialmente 225 g de mantequilla con 360 g de azúcar. Su nieta quiere preparar el queque en su casa, pero solo encuentra un bloque de mantequilla de 125 g. ¿Cuánta azúcar debe utilizar? (Matemática 2, p.42)

> Ejemplo 1:
>
> Si 6 cuadernos iguales tienen un precio de S/108 soles, ¿cuánto cuestan 15 cuadernos de este mismo tipo? (Matemática 2, p.42)

Para ambas situaciones el texto escolar plantea como estrategia de solución la regla de tres simple directa, para nuestro análisis representada como $\tau_{(1,1,3)}$ y descrita ya anteriormente. Sin embargo, es importante notar que en el texto de primero de secundaria se establecía una proporción de razones heterogéneas (paso 6), en cambio en la solución propuesta en ambas situaciones de segundo de secundaria se establecen proporciones con razones homogéneas, por lo que definimos $\tau_{(1,1,3')}$

$\tau_{(1,1,3')}$: Regla de tres simple directa

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como "x" a la medida de la cantidad desconocida.

Paso 6´: Establecer una proporción de razones homogéneas con las medidas de las cantidades y la incógnita

Paso 7: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y formar la ecuación lineal

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

> Ejemplo 2:
>
> Un obrero puede construir un muro en 12 días. ¿Cuántos días tardarán 3 obreros igualmente hábiles en construir un muro de las mismas características, trabajando sin distracciones y en condiciones similares? (Matemática 2, p.43)

> Ejemplo 3:
>
> Una familia de 3 miembros realiza periódicamente compras de alimentos que duran 15 días. Durante las vacaciones una pareja de amigos se hospeda con ellos. Si compran la misma cantidad de alimentos y se mantiene el mismo número de comidas y el tamaño de la ración, ¿para cuántos días alcanzará lo comprado? (Matemática 2, p.43)

Las dos situaciones presentadas son solucionadas con la técnica de la regla de tres inversa, $\tau_{(1,2,2)}$, ya descrita en el texto anterior y que corresponde a la modelización proporcional propuesta en el MER de García. En cuanto a los niveles de algebrización planteados por Bolea (2002) este tipos de tareas se ubica en la organización clásica de la proporcionalidad.

> Problema inicial:
>
> Un colegio organizó una salida durante la semana cultural. Para la salida se contrataron 5 buses, que en cuatro viajes trasladarán a sus 800 estudiantes a un teatro. Para una nueva salida de solo 400 estudiantes se cuenta con dos buses de igual capacidad. Si queremos determinar cuántos viajes se van a realizar, debemos tener en cuenta que en este caso intervienen 3 magnitudes. (Matemática 2, p. 48)

El texto presenta para la resolución de este problema la técnica de la regla de tres compuesta. El procedimiento utilizado es el clásico, es decir, comparar las magnitudes de dos en dos, relacionando la magnitud que tiene el dato desconocido con cada una de las otras. Como ostensivo se utiliza la tabla de proporcionalidad teniendo en cuenta que el número de columnas dependerá de las magnitudes presentes en el problema. El texto escolar considera que la regla de tres compuesta se compone de varias reglas de tres simples aplicadas sucesivamente. El MER propuesto por García (2005) no considera de manera explícita esta técnica. Para nuestra investigación corresponde al tipo de tarea (T_1) y a la tarea ($_{1,3}$):

Tipo de tarea (T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales

Tarea ($_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales

$\tau_{(1,3)}$: Regla de tres compuesta

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla y considerar como "x" a la medida de la cantidad desconocida

Paso 16: Igualar la razón que contiene la incógnita con el producto de las razones de las otras magnitudes de forma que si son directamente proporcionales no se invierte y si son inversamente proporcionales se invierte la razón.

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

Ejemplo 1:

El costo en que incurre una compañía al fabricar diariamente determinada cantidad de sacos es proporcional al número de sacos producidos. Si el costo para producir 10 unidades diariamente es S/ 750, y si el producir 25 sacos diarios cuesta S/ 187 500, entonces la fórmula que determina el costo diario en que incurre la compañía al fabricar x sacos diariamente es c(x) = 75x
¿Cuál es el costo de producir 20 sacos al día?
Si el costo fue S/ 1350, ¿cuántos sacos se produjeron diariamente? (Matemática 2, p.134)

Problema inicial:

Luis en su viaje a Iquitos quiso conocer el mariposario con sus 6 amigos. Si la entrada cuesta S/ 5, ¿cuánto tendrán que pagar en total? (Matemática 2, p.135)

Problema inicial:

María trabaja en un acuario en donde todas las peceras tienen el mismo largo pero su ancho varía. Ella tiene que vaciar el agua hasta 45 cm de alto.
¿Cuál sería la expresión que represente el volumen de la pecera?
Si x toma los valores 15; 25; 30 y 40, ¿cuál sería el valor del volumen para cada caso? (Matemática 2, p.137)

Ejemplo 2:

Carmen decidió comprar al por mayor carcasas para celulares. El precio de cada una es S/ 10
Completamos los datos de la tabla
Escribimos la función y relacionamos el número de carcasas y el dinero.
Hallamos C(10) y C (20)

Sabiendo que C(x) = 240, ¿cuántas carcasas podrá comprar con esa cantidad? (Matemática 2, p.138)

Ejemplo 3:

Si por 5 Kg de tunas pagué S/12,50, ¿cuánto pagaré por 1;2 o 3 Kg de dicha fruta?
Organicemos la información en una tabla
Representamos la función mediante una expresión matemática que relacione las dos variables.
(Matemática 2, p.138)

Consideramos que en las soluciones presentadas en el texto de segundo de secundaria de las cinco situaciones descritas se pretende establecer la proporcionalidad de magnitudes como una función lineal; corresponde según García (2005) a la tecnología de modelización funcional de sistemas lineales $\mathrm{M}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SL}}$. Es importante señalar que el ostensivo gráfico que se usó para representar la función lineal sí tomó en cuenta los datos discretos y naturales por ejemplo en la segunda situación, es decir, la representación que se usó fueron puntos colineales, no una recta o segmento.

Establecemos entonces:

Tipo de tarea (T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función

Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal

$\tau_{(4,1)}$: Expresar como función lineal

Paso 1: Verificar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad

Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente

Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia

Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario

Ejemplo 1:

A una fábrica llegó un pedido que debe entregarse en 5 días, pero el gerente sabe que poniendo a trabajar las 10 máquinas que tiene, se demorará 8 días en terminar la producción. Por eso decidió alquilar más máquinas, que trabajan todas al mismo ritmo de las que tiene, para lograr terminar a tiempo.
¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?
Escribimos la función que represente la situación y la graficamos. (Matemática 2, p.142)

La situación corresponde a una función de proporcionalidad inversa. Según García (2005) correspondería a la modelización funcional de un sistema “lineal inverso”. La tecnología θ_f(SLI) indica que la relación entre las magnitudes puede ser considerada como una función, es decir, como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos numéricos (conteniendo las medidas de las cantidades de ambas magnitudes), modelizada mediante la expresión $f(x) = \frac{k}{x}$

Indicamos entonces la Tarea ($t_{4,2}$)

Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa

$\tau_{(4,2)}$: Expresar como función de proporcionalidad inversa

Paso 10: Verificar que las magnitudes sean inversamente proporcionales

Paso 25: Formar productos con parejas de valores correspondientes: a.a´; b.b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad inversa

Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente

Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia
Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario

A continuación presentamos conceptos y definiciones encontradas en el texto escolar de segundo de secundaria que nos servirán como discursos tecnológicos para justificar las técnicas utilizadas.

(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una de las magnitudes, también la otra aumenta en la misma proporción; o al disminuir una de las magnitudes, también disminuye la otra en la misma proporción. El cociente de las dos magnitudes es siempre constante.

Si A y B son magnitudes directamente proporcionales

A	**B**
a	c
b	x

La constante de proporcionalidad es:

$$k = \frac{c}{x} = \frac{a}{b} \rightarrow x = \frac{cxb}{a}$$

(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones

Propiedad fundamental de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; b, d \neq 0$$

$$axd = bxc$$

$$ad = bc$$

(En el texto hay error, se consideró $ad = bd$)

(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al amentar una de las magnitudes, la otra disminuye en la misma proporción. El producto de las dos magnitudes es siempre una misma constante.

(θ_4) Constante de proporcionalidad inversa

Si A y B son magnitudes inversamente proporcionales

A	**B**
a	c
b	x

La constante de proporcionalidad es:

$$k = bx = ac \rightarrow x = \frac{axc}{b}$$

(θ_5) Definición de función lineal

Una función lineal tiene la forma *f*(x)=ax (a es constante). La gráfica que representa esta función es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

En cuanto a la función de proporcionalidad inversa (θ_6), el texto no presenta una definición formal aunque podemos de manera intuitiva esbozar un concepto con los siguientes elementos presentados:

Un par de magnitudes son inversamente proporcionales (IP) si al crecer los valores de una de ellas, los valores de la otra también van decreciendo en la misma magnitud. El producto de dos magnitudes inversas es constante y se le llama constante de proporcionalidad inversa.

Asimismo, se tiene en cuenta la característica de la gráfica de la función proporcional inversa: Si en un plano cartesiano se representan los valores que corresponden a dos magnitudes inversamente proporcionales, entonces su gráfica será el conjunto de puntos que pertenecen a una curva llamada hipérbola.

(θ_6) Función de proporcionalidad inversa

Es la función que relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales. $f(x) = \frac{k}{x}$; donde k es la constante de proporcionalidad inversa. Su gráfica es una curva llamada hipérbola.

Asimismo, estableceremos el concepto de razón como una tecnología pues nos permitirá justificar la técnica ($t_{5,1}$)

(θ7) Concepto de Razón

Al cociente que utilizamos para comparar dos magnitudes o cantidades lo llamamos razón.

A continuación, consolidamos en la tabla 14 los elementos praxeológicos identificados en el texto escolar de segundo de secundaria.

Tabla 14: Praxeología presente en el texto escolar de segundo de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	TÉCNICA	DISCURSO TECNOLÓGICO	TEORÍA
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes proporcionales	$\tau_{(1,1,1)}$ Operar en el mismo espacio de medida	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
		$\tau_{(1,1,2)}$Reducción a la unidad		
		$\tau_{(1,1,3)}$: Regla de tres simple directa	(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)

	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	$\tau_{(1,2,1)}$: Constante de proporcionalidad inversa	(θ_4) Constante de proporcionalidad inversa	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
		$\tau_{(1,2,2)}$: Regla de tres simple inversa	(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales (θ_4) Constante de proporcionalidad inversa	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	$\tau_{(1,3)}$: Regla de tres compuesta	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales (θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,1)}$: Constante de proporcionalidad en tabla	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	$\tau_{(4,1)}$: Expresar como función lineal	(θ_5) Definición de función lineal	(Θ_3) Teoría de funciones de variable real
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad	$\tau_{(4,2)}$: Expresar como función de proporcionalidad inversa	(θ_6) Función de proporcionalidad inversa	(Θ_3) Teoría de funciones de variable real

	inversa			
(T5): Analizar la razón entre dos cantidades	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas	$\tau_{(5,1)}$: Calcular cociente	(θ_7) Concepto de razón	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales

Autoría propia

A continuación, resumimos en la tabla 15 la cantidad y variedad de tareas identificadas en el texto escolar de segundo de secundaria. Observamos que la mayor parte de los problemas resueltos corresponden a la Tarea ($t_{1,2}$). Asimismo, podemos identificar que para las tareas ($t_{1,3}$), ($t_{2,1}$) ($t_{4,2}$) ($t_{5,1}$) solo se presenta un problema para cada una, por lo que intuimos que estas tareas no serán potenciadas en el grado.

Tabla 15: Variedad de tareas identificadas en el texto escolar de segundo de secundaria

TIPO DE TAREA	**TAREA**	**PROBLEMAS RESUELTOS**	**CANTIDAD**
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes proporcionales	Problema inicial (p. 39) Problema inicial (p.41) Ejemplo 1 (p. 41) Problema inicial (p. 42) Ejemplo 1 (p. 42)	5
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	Problema inicial (p. 40) Ejemplo 1 (p. 40) Ejemplo 2 (p. 43) Ejemplo 3 (p. 43)	4
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	Problema inicial (p. 48)	1
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	Ejemplo 1 (p. 39)	1

(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	Ejemplo 1 (p. 134) Problema inicial (p. 135) Problema inicial (p. 137) Ejemplo 2 (p. 138) Ejemplo 3 (p. 138)	5
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa	Ejemplo (p.142)	1
(T5): Analizar la razón entre dos cantidades	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas	Ejemplo 1 (p. 38)	1

Autoría propia

En cuanto a los ostensivos, al igual que en el texto de primero de secundaria se observa en la tabla 16 una fuerte presencia de uso de tablas, la expresión oral y las proporciones. Destacamos en este grado el uso de la notación *f(x)* para representar a la proporcionalidad.

Tabla 16: Ostensivos identificados en el texto escolar de segundo de secundaria

PROBLEMAS RESUELTOS	Ostensivos					
	a/b = c/d	Tabla	Repres. Cartes.	y = kx y=k/x	f(x) =mx f(x) =m/x	→ →	Oral
Problema inicial (p. 39)	✓	✓	✓				✓
Problema inicial (p. 42)	✓					✓	✓
Ejemplo 1 (p. 42)	✓						
Problema inicial (p. 40)		✓	✓				✓
Ejemplo 1 (p. 40)		✓	✓				✓
Problema inicial (p.41)		✓					
Ejemplo 1 (p. 41)	✓	✓					✓
Ejemplo 2 (p. 43)						✓	
Ejemplo 3 (p. 43)	✓	✓					
Problema inicial (p. 48)	✓	✓					✓
Ejemplo 1 (p. 39)	✓	✓					
Ejemplo 1 (p. 134)			✓		✓		
Problema inicial (p. 135)		✓	✓		✓		
Problema inicial (p. 137)		✓			✓		
Ejemplo 2 (p. 138)		✓			✓		
Ejemplo 3 (p. 138)		✓			✓		
Ejemplo (p.142)		✓	✓	✓			
Ejemplo 1 (p. 38)	✓						✓

Autoría propia

4.3.3 Texto escolar de tercero de secundaria

A continuación, identificamos las técnicas, tareas y tipos de tareas en el texto de tercero de secundaria. A diferencia de primero y segundo de secundaria, no hay indicios de articulación de la proporcionalidad con el objeto función.

Los problemas referidos a proporcionalidad de la unidad dos corresponden esencialmente a una organización clásica donde la reducción a la unidad, la regla de tres y la regla de tres compuesta son las técnicas a utilizar.

> CÓMO HACER
>
> Un grupo de operarios levanta 96 metros de una pared en una semana. Se sabe que si tuvieran que levantar 128 metros de pared, se necesitaría contratar a 4 operarios más. ¿Cuántos operarios hay en el grupo? ¿Cuántos metros de pared levanta un operario en una semana? (Matemática 3, p.32)

> CÓMO HACER 1
>
> Bruno cría pollos para venderlos en un mercado. Si por una docena de pollos le pagan S/ 102, ¿cuánto le pagarán por 40 pollos? (Matemática 3, p. 33)

> CÓMO HACER 2
>
> Para elaborar la receta de un plato típico para 32 invitados, se necesita 4 kg de papa. Si la mitad de los invitados avisan que no van a asistir acompañados de sus parejas, ¿cuántos kilos de papa se necesitará? (Matemática 3, p. 33)

En estas tres primeras situaciones, el texto propone las técnicas $\tau_{(1,1,2)}$: *Reducción a la unidad* o $\tau_{(1,1,3)}$: *Regla de tres simple directa* como técnicas de solución, estas ya fueron descritas en el análisis de los textos de grados inferiores.

> CÓMO HACER
>
> La superficie de un rectángulo es 24 cm^2. ¿Cómo varía la altura del rectángulo a medida que la base aumenta? ¿Cuánto medirá la base si su altura es 1,6 cm? (Matemática 3, p. 34)

> CÓMO HACER 1
>
> Si 6 carpinteros pueden hacer un ropero en 20 horas, ¿cuánto tardarán 8 carpinteros igual de eficientes en hacer el mismo trabajo? (Matemática 3, p. 35)

> CÓMO HACER 2
>
> Andrés tarda 2 horas en su entrenamiento de carrera entre poblados a una velocidad de 9 km/h. Si para regresar decide disminuir su velocidad en un 50%, ¿cuánto tiempo le tomará realizar el retorno? (Matemática 3, p. 35)

De la misma forma se propone la aplicación de la técnica $\tau_{(1,2,2)}$*: Regla de tres simple inversa* y la técnica de la reducción a la unidad para magnitudes inversamente proporcionales. Es importante notar que en los grados anteriores se planteó esta última técnica solo para magnitudes directamente proporcionales, por lo que definimos:

$\tau_{(1,2,3)}$Reducción a la unidad para magnitudes inversamente proporcionales

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 14: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a.a´)

Paso 15: Calcular el estado correspondiente a "b" teniendo en cuenta que b´= (a.a´)

CÓMO HACER En 4 días, 5 operarios cavan 40 metros lineales de zanja. ¿En cuántos días 4 operarios podrán cavar 80 metros lineales de zanja? (Matemática 3, p. 36)

CÓMO HACER 1 Veinticuatro obreros realizan ¾ de una obra en 16 días. Si se retiran 8 de ellos, ¿en cuántos días los obreros restantes terminarán la obra? (Matemática 3, p. 37)

CÓMO HACER 2 Trabajando 12 horas diarias durante 20 días, 10 máquinas con un rendimiento del 25% realizan un pedido para exportación. Si se aumenta a 15 el número de máquinas y ahora el rendimiento es del 40%, ¿cuántos días tardarán en hacer 3/5 de la misma obra trabajando 6 horas diarias? (Matemática 3, p. 37)

Los últimos tres problemas identificados son resueltos en el texto con la técnica $\tau_{(1,3)}$: *Regla de tres* compuesta, descrita en el análisis del texto escolar de segundo de secundaria.

A continuación, presentamos conceptos y definiciones encontrados en el texto escolar de tercero de secundaria que nos servirán como discursos tecnológicos para justificar las cinco técnicas identificadas.

(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda multiplicado por el mismo número real. Al ser divididos los valores correspondientes a dichas magnitudes, se obtiene el mismo cociente llamado constante de proporcionalidad.
Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente de las cantidades correspondientes a dichas magnitudes es constante.

(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones

Dada la proporción geométrica: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a y d son extremos, y b y c son medios, se cumple la propiedad fundamental de la proporcionalidad: El producto de los extremos es igual al producto de los medios. Por lo tanto: $a.d = b.c$

(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda dividido por el mismo número real. Al ser multiplicados los valores correspondientes a dichas magnitudes, se obtiene el mismo producto llamado constante de proporcionalidad.

(θ_4) Constante de proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el producto de las cantidades correspondientes a dichas magnitudes es constante:

$$a_1.b_1 = a_2.b_1 = a_3.b_1 = k \ \rightarrow Constante\ de\ proporcionalidad$$

En la tabla 17 podemos identificar los elementos de la praxeología presente en el texto escolar. Es importante señalar que a diferencia de los textos de primero y segundo de secundaria no se identifica ninguna articulación entre la proporcionalidad y el objeto función.

Tabla 17: Praxeología presente en el texto escolar de tercero de secundaria

TIPO DE TAREA	**TAREA**	**TÉCNICA**	**DISCURSO TECNOLÓGICO**	**TEORÍA**
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	$\tau_{(1,1,2)}$Reducción a la unidad	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
		$\tau_{(1,1,3)}$: Regla de tres simple directa	(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes inversamente proporcionales	$\tau_{(1,2,2)}$: Regla de tres simple inversa	(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
		$\tau_{(1,2,3)}$Reducción a la unidad para magnitudes inversamente proporcionales	(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales

	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	$\tau_{(1,3,1)}$: Regla de tres compuesta	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales (θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales

Autoría propia

El texto escolar presenta un solo tipo de tareas: Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales. En la tabla 18, podemos apreciar que los nueve problemas resueltos del texto escolar de tercero de secundaria corresponden a las tareas ($t_{1,1}$), ($t_{1,2}$) y ($t_{1,3}$).

Tabla 18: Variedad de tareas identificadas en el texto escolar de tercero de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	PROBLEMAS RESUELTOS	CANTIDAD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	Cómo hacer (p. 32) Cómo hacer 1 (p. 33) Cómo hacer 2 (p. 33)	3
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes inversamente proporcionales	Cómo hacer (p. 34) Cómo hacer 1 (p. 35) Cómo hacer 2 (p. 35)	3
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	Cómo hacer (p. 36) Cómo hacer 1 (p. 37) Cómo hacer 2 (p. 37)	3

Autoría propia

Los problemas resueltos del texto escolar de tercero de secundaria utilizan como ostensivos básicamente la expresión oral, las tablas y la representación clásica de las proporciones. No se aprecia ostensivos como *f(x)* o representaciones cartesianas que articulen la proporcionalidad con la función.

Tabla 19: Ostensivos identificados en el texto escolar de tercero de secundaria

PROBLEMAS RESUELTOS	Ostensivos						
	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	a:b :: c:d	y = kx y=k/x	Operaciones matemáticas	Oral
Cómo hacer (p. 32)	✓	✓					✓
Cómo hacer 1 (p. 33)	✓	✓					✓
Cómo hacer 2 (p. 33)	✓	✓					✓
Cómo hacer (p. 34)		✓	✓		✓		✓
Cómo hacer 1 (p. 35)		✓					✓
Cómo hacer 2 (p. 35)						✓	
Cómo hacer (p. 36)	✓	✓					✓
Cómo hacer 1 (p. 37)	✓	✓					✓
Cómo hacer 2 (p. 37)	✓	✓					✓

Autoría propia

4.3.4 Texto escolar de cuarto de secundaria

Al igual que en el texto de tercero de secundaria, identificamos problemas solo en la competencia de cantidad y no en la de regularidad, equivalencia y cambio; lo que indica que en los grados superiores no es evidente la articulación entre la proporcionalidad y el objeto función.

> CÓMO HACER
>
> En una feria, tres kilos de manzana cuestan S/ 12,60. ¿Cuántos costarán 7 kilos? (Matemática 4, p.30)

> CÓMO HACER 1
>
> En una agencia de viajes, Álvaro compró 4 pasajes Lima-Iquitos-Lima a S/ 960. Si un delegado de una feria gastronómica decide comprar 22 pasajes iguales a los de Álvaro, ¿cuánto pagará? (Matemática 4, p.31)

> CÓMO HACER 2
>
> Saúl, cuya estatura es de 1,60 m, proyecta una sombra de 3,84 m. Si a la misma hora y en el mismo lugar un árbol proyecta una sombra de 13,20 m, ¿cuál es la altura del árbol? (Matemática 4, p.31)

En estas primeras situaciones, el texto propone las técnicas $\tau_{(1,1,2)}$: *Reducción a la unidad* o $\tau_{(1,1,3)}$: *Regla de tres directa* como técnicas de solución, similar tratamiento al texto del año anterior, aunque las medidas de varias cantidades son números decimales.

> CÓMO HACER
>
> Rosa vende pollos a la brasa en la Feria Mistura. El fin de semana repartió S/ 1008 entre sus ayudantes Abel, Beatriz, Carlos y Diana, según las horas extras que laboraron: 10; 16; 18 y 19 horas, respectivamente. ¿Cuánto recibió cada ayudante? ¿Quién recibió más? Justifica tu respuesta. (Matemática 4, p. 32)

CÓMO HACER 1

Vicente, Martín y Tomás tienen que pagar S/ 114,40 por consumo de postres para sus familias en una feria gastronómica. Ellos deciden aportar de manera directamente proporcional al número de integrantes de sus familias que son 3; 4 y 6 personas, respectivamente. ¿Cuánto pagará cada uno? (Matemática 4, p.33)

CÓMO HACER 2

Andrés, Bruno, César y Darío abren cuentas de ahorros en un banco con 1300; 1450; 1170 y 1320 soles, respectivamente. Al cabo de un año todos retiran su dinero recaudando un total de S/ 5575,36. ¿Cuánto le corresponde a cada uno si se reparte de acuerdo con lo aportado? (Matemática 4, p. 33)

CÓMO HACER 3

Vanesa y Jorge se inician en la venta de ropa haciendo una inversión de 3500 y 5300 soles, respectivamente. Si luego de tres años obtienen una ganancia de 374 000 soles y deciden repartirla en proporción a su inversión, ¿cuánto recibirá cada uno? (Matemática 4, p. 33)

En este grado se pretende realizar tareas vinculadas al reparto proporcional. Cabe indicar que en el texto de primero de secundaria se identificó un problema aislado de reparto proporcional inverso, pero no se identificó tareas de distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales.

Indicamos entonces:

Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados

***$\tau_{(3,2)}$* Reparto directo**

Paso 21: Multiplicar a cada uno de los números dados una constante, puede ser "k"

Paso 19: Sumar las expresiones obtenidas y formar una ecuación igualando al total

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

Paso 20: Reemplazar el valor de la constante y determinar cada una de las partes del total

CÓMO HACER

Juan vive en la selva. Para llegar a su colegio, tarda 30 minutos, pues lo hace caminando a una velocidad de 50 m/min. Si un día fue en bicicleta y tardó 10 minutos, ¿a qué velocidad se trasladó? (Matemática 4, p. 35)

CÓMO HACER 1

Si 4 pintores terminan un trabajo en 15 horas, ¿cuánto tardarán 6 pintores igual de eficientes en realizar el mismo trabajo? (Matemática 4, p. 35)

CÓMO HACER 2

Un depósito se llena haciendo 20 viajes con un balde de 10 litros. Si Juan riega su biohuerto con dos baldes de 4 litros cada uno, ¿cuántos viajes deberá hacer para usar toda la capacidad del depósito? (Matemática 4, p. 35)

Al igual que en el texto del grado anterior se proponen las técnicas $\tau_{(1,2,2)}$: *Regla de tres simple inversa* y $\tau_{(1,2,3)}$: *Reducción a la unidad para magnitudes inversamente* *proporcionales*. Según García (2005), correspondería a una modelización de sistemas lineales inversos, para el primer caso una modelización discursiva y para el segundo caso una modelización proporcional.

CÓMO HACER 1

Luis reparte un bono de S/ 1250 a sus cuatro empleados, de manera inversa a los minutos que llegaron tarde. Si Julio llegó 15 minutos tarde; Patricia, 10 minutos; Martín, 20 minutos; e Iván, 5 minutos, ¿cuál es la mayor diferencia entre los bonos recibidos? ¿Quiénes recibe más? ¿Y menos? (Matemática 4, p.36)

CÓMO HACER 2

Silvia y Julia tuvieron que digitar en total 60 páginas entre las dos. Silvia digitó 30 páginas en 5 horas, mientras que Julia digitó 30 páginas en 6 horas. Al terminar el trabajo, se les entregó un incentivo de S/ 220 para que se lo repartan según sus rendimientos. ¿A quién le corresponde el mayor incentivo? ¿Por qué? (Matemática 4, p. 36)

CÓMO HACER 1

Dina, Doris e Inés compiten en una carrera para obtener fondos de ayuda social para sus respectivos pueblos. Los auspiciadores han ofrecido S/ 74 000 que serán repartidos de manera inversamente proporcional al tiempo que tarde cada corredora. Si Dina tardó 20 minutos; Doris, 25 minutos, e Inés, 30 minutos, ¿cuánto dinero le corresponde a cada corredora? (Matemática 4, p. 37)

CÓMO HACER 2

Manuel, Raúl y Carlos se ausentaron de la empresa en la que trabajan 3; 6 y 9 días, respectivamente. Si la empresa decide repartir entre los tres empleados un bono de S/ 1232 en forma inversamente proporcional a los días que faltaron, ¿cuál es la diferencia entre la mayor y la menor cantidad repartida? (Matemática 4, p. 37)

Los cuatro problemas presentados corresponden a la tarea de distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales. Aquí es necesario indicar que la técnica $\tau_{(3,1)}$: *Reparto inverso* la establecimos en el análisis del texto de primero de secundaria, pues se planteó para una tarea aislada de reparto, que no se trabajó nuevamente en segundo ni en tercero de secundaria.

CÓMO HACER

Se sabe que 20 obreros trabajan uniformemente en levantar una pared de 60 metros lineales en 4 días. ¿En cuántos días la mitad de obreros levantará una pared de 90 metros lineales? (Matemática 4, p. 40)

CÓMO HACER 1

En 20 días, 12 obreros trabajando uniformemente han hecho 4/5 de una obra. Si se retiran 2 obreros, ¿cuántos días demorarán los obreros restantes en terminar la obra? (Matemática 4, p. 41)

CÓMO HACER 2

Trabajando 9 horas diarias durante 30 días, 8 máquinas con un rendimiento del 30% realizan un pedido para exportación con una dificultad de 3. Si se dispone de 4 máquinas más, y esta vez todas con un rendimiento del 45%, ¿cuántos días tardarán en realizar ¾ del mismo pedido con una dificultad de 4 a razón de 6 horas diarias? (Matemática 4, p. 41)

La técnica $\tau_{(1,3)}$: *Regla de tres compuesta* descrita en el análisis del texto escolar de segundo e identificada también en el texto de tercero de secundaria es la técnica utilizada para dar solución a los problemas presentados.

A continuación, presentamos conceptos y definiciones encontradas en el texto escolar de cuarto de secundaria que nos servirán como tecnologías para justificar las siete técnicas identificadas.

(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda multiplicado por el mismo número real.
Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente de las cantidades correspondientes a dichas magnitudes es constante.

(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones

Dada la proporción geométrica: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a y d son extremos, y b y c son medios, se cumple la propiedad fundamental de la proporcionalidad: El producto de los extremos es igual al producto de los medios. Por lo tanto: $a.d = b.c$

(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una de ellas por un número real no nulo, el valor correspondiente a la otra magnitud queda dividido por el mismo número real. Al ser multiplicadas las cantidades de dichas magnitudes, se obtiene el mismo producto, llamado constante de proporcionalidad.
La tabla 20 consolida los elementos de la praxeología identificada en el texto escolar de cuarto de secundaria. Notamos que al igual que en el texto de tercero de secundaria no se evidencia tareas que articulen proporcionalidad con función, por lo que no podríamos estar frente a una modelización funcional o un segundo nivel algebrización.

Tabla 20: Praxeología presente en el texto escolar de cuarto de secundaria

TIPO DE TAREA	**TAREA**	**TÉCNICA**	**DISCURSO TECNOLÓGICO**	**TEORÍA**
(T_1): Determinar el término desconocido	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes	$\tau_{(1,1,2)}$Reducción a la unidad	(θ_1) Definición de magnitudes directamente	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales

en una relación de magnitudes proporcionales	directamente proporcionales		proporcionales	
		$\tau_{(1,1,3)}$: Regla de tres simple directa	(θ_2) Propiedad fundamental de las proporciones	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes inversamente proporcionales	$\tau_{(1,2,2)}$: Regla de tres simple inversa	(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
		$\tau_{(1,2,3)}$Reducción a la unidad para magnitudes inversamente proporcionales		
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	$\tau_{(1,3)}$: Regla de tres compuesta	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales (θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	$\tau_{(3,1)}$ Reparto proporcional inverso	(θ_3) Definición de magnitudes inversamente proporcionales	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales (Θ_2) Algebra (ecuaciones)
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados	$\tau_{(3,2)}$ Reparto proporcional directo	(θ_1) Definición de magnitudes directamente proporcionales	

Autoría propia

La tabla 21, muestra las tareas identificadas en el texto escolar de cuarto de secundaria. Los clásicos problemas de proporcionalidad directa, inversa y compuesta, además de los de reparto proporcional son los que caracterizan esta praxeología.

Tabla 21: Variedad de tareas identificadas en el texto escolar de cuarto de secundaria

TIPO DE TAREA	**TAREA**	**PROBLEMAS RESUELTOS**	**CANTIDAD**

(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	Cómo hacer (p. 30) Cómo hacer 1 (p. 31) Cómo hacer 2 (p. 31)	3
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes inversamente proporcionales	Cómo hacer (p. 34) Cómo hacer 1 (p. 35) Cómo hacer 2 (p. 35)	3
	Tarea ($_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	Cómo hacer (p. 40) Cómo hacer 1 (p. 41) Cómo hacer 2 (p. 41)	3
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	Cómo hacer 1 (p. 36) Cómo hacer 2 (p. 36) Cómo hacer 1 (p. 37) Cómo hacer 2 (p. 37)	4
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados	Cómo hacer (p. 32) Cómo hacer 1 (p. 33) Cómo hacer 2 (p. 33) Cómo hacer 3 (p. 33)	4

Autoría propia

En la tabla 22 observamos que los ostensivos con mayor presencia en el texto de cuarto de secundaria son similares a los del grado anterior, es decir, oral, tablas y la representación clásica de las proporciones. Asimismo, observamos que en los denominados problemas de reparto proporcional, se utiliza la constante k.

Tabla 22: Ostensivos identificados en el texto escolar de cuarto de secundaria

PROBLEMAS RESUELTOS	**Ostensivos**				
	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	Representación cartesiana	Oral
Cómo hacer (p. 30)		✓		✓	✓
Cómo hacer 1 (p. 31)	✓	✓			
Cómo hacer 2 (p. 31)	✓	✓			
Cómo hacer (p. 34)		✓		✓	✓
Cómo hacer 1 (p. 35)		✓			✓
Cómo hacer 2 (p. 35)		✓			✓
Cómo hacer (p. 40)	✓	✓			✓
Cómo hacer 1 (p. 41)	✓	✓			✓
Cómo hacer 2 (p. 41)	✓	✓			✓
Cómo hacer 1 (p. 36)	✓		✓		
Cómo hacer 2 (p. 36)	✓		✓		✓
Cómo hacer 1 (p. 37)	✓		✓		
Cómo hacer 2 (p. 37)	✓		✓		
Cómo hacer (p. 32)			✓		

Cómo hacer 1 (p. 33)			✓		
Cómo hacer 2 (p. 33)			✓		

Autoría propia

4.3.5 Texto escolar de quinto de secundaria

El texto de este grado es el que menos situaciones de proporcionalidad de manera explícita presenta.

> CÓMO HACER
>
> El área de marketing de una compañía de artículos de limpieza concluyó que el tamaño más comercial de una esponja es aquel que tiene 1,9 como razón entre las medidas de su largo y ancho. Si el nuevo producto que se lanzará tendrá 6,6 cm de ancho, ¿cuántos cm tendrá el largo? (Matemática 5, p. 44)

> CÓMO HACER 1
>
> Una frutera lleva en su triciclo 90 frutas entre naranjas y manzanas. Si lleva 4 naranjas por cada 6 manzanas, ¿cuántas frutas de cada tipo lleva? (Matemática 5, p. 45)

En los problemas denominados de un único espacio de medias aparecen dos cantidades de una única magnitud. La comparación entre ambas se realiza mediante un escalar denominado razón.

Indicamos la tarea:

Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón

$\boldsymbol{\tau}_{(5,2)}$

Paso 28: Identificar la razón dada

Paso 29: Expresar la razón como el cociente entre las medidas de las cantidades

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita.

> CÓMO HACER 2
>
> Determina la razón entre la cuarta proporcional de 4; 8 y 6, y la media proporcional de 12 y 3. (Matemática 5, p. 45)

Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas

$\boldsymbol{\tau}_{(5,1)}$ ***Razón***

Paso 26: Identificar las dos medidas de cantidades a utilizar

Paso 27: Calcular el cociente de las medidas

> CÓMO HACER 1

Al finalizar la tercera fecha de un campeonato de balonmano, la comisión notó un curioso detalle: en cada fecha, la razón entre los goles que anotó y recibió el equipo Las Águilas fue la misma. Así, en la primera fecha anotó 3 goles; en la segunda, 6 goles, y en la tercera, 9 goles. Si en total el equipo Las Águilas recibió 12 goles, ¿cuántos recibió en la segunda fecha? (Matemática 5, p. 47)

Tipo de tarea (T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones

Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones

$\tau_{(6,1)}$ Serie de razones

Paso 30: Formar una razón con las sumas de los antecedentes y consecuentes de la serie de razones dadas. Esta será la constante de proporcionalidad

Paso 31: Igualar la constante de proporcionalidad con la razón del dato desconocido

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita

En el texto escolar de quinto de secundaria se presentan dos tecnologías que justifican las tres técnicas identificadas.

(θ7) Concepto de Razón

Al cociente que utilizamos para comparar dos magnitudes o cantidades la llamamos razón geométrica.

Razón geométrica
$\frac{a}{b} = R$

(θ_8) Propiedad de las proporciones en una serie de razones

La razón entre la suma de antecedentes y la suma de consecuentes es igual a la constante de proporcionalidad $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = k$

Recuerda:

Una serie de razones geométricas es una igualdad entre dos o más razones geométricas

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad

A continuación, presentamos en la tabla 23 los elementos praxeológicos identificados en el texto de quinto de secundaria.

Tabla 23: Praxeología presente en el texto escolar de quinto de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	TÉCNICA	DISCURSO TECNOLÓGICO	TEORÍA

(T5): Analizar la razón entre dos cantidades	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas	$\tau_{(5,1,1)}$	(θ_7) Concepto de Razón	(Θ_1) Teoría de magnitudes proporcionales
	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón	$\tau_{(5,2)}$		
(T6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones	$\tau_{(6,1)}$	(θ_8) Propiedad de las proporciones en una serie de razones	

Autoría propia

Asimismo, en la tabla 24, indicamos la cantidad de problemas resueltos en función a las tres tareas identificadas. Es importante recordar que estamos considerando los problemas donde de manera explícita se desarrolle la proporcionalidad, no considerando, por ejemplo, problemas de escalas, mezclas, aleaciones, entre otras.

Tabla 24: Variedad de tareas identificadas en el texto escolar de quinto de secundaria

TIPO DE TAREA	**TAREA**	**PROPLEMAS RESULETOS**	**CANTIDAD**
(T5): Analizar la razón entre dos cantidades	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas	Cómo hacer 2 (p. 45)	1
	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón	Cómo hacer (p. 44) Cómo hacer 1 (p. 45)	2
(T6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones	Cómo hacer 1 (p. 47)	1

Autoría propia

En la tabla 25 observamos que la proporcionalidad tradicional se hace evidente con el uso de ostensivos de una modelización proporcional y discursiva. La ausencia de ostensivos de articulación como la constante de proporcionalidad o la representación cartesiana hacen que perviva la OM clásica.

Tabla 25: Ostensivos identificados en el texto escolar de quinto de secundaria

PROBLEMAS RESUELTOS	**Ostensivos**	
	a/b = c/d	K: constante de proporc.
Cómo hacer 2 (p. 45)	✓	
Cómo hacer (p. 44)	✓	
Cómo hacer 1 (p. 45)	✓	
Cómo hacer 1 (p. 47)	✓	✓

Autoría propia

En la tabla 26, identificamos las tareas presentes en cada uno de los textos de Matemática de Secundaria. Podemos observar que el tipo de tareas que más situaciones presenta en los textos es el de determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales.

Tabla 26: Distribución general de los problemas presentes en los textos de secundaria de acuerdo a tareas

TIPO DE TAREA	**TAREA**	**CANTIDAD DE PROBLEMAS RESUELTOS**				
		I SEC	**II SEC**	**III SEC**	**IV SEC**	**V SEC**
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	10	5	3	3	
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	4	4	3	3	
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales		1	3	3	
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	1	1			
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	1			3	
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados				3	

(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	3	5			
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa		1			
(T_5): Analizar la razón entre dos magnitudes	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas		1			1
	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón					2
(T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones					1

Autoría propia

4.4 Elementos de las organizaciones matemáticas presentes en los manuales para los docentes

Con el propósito de identificar los discursos tecnológicos, tareas y técnicas que el docente enseñará cuando los estudiantes desarrollen sus cuadernos de trabajo, describimos y analizamos los Manuales para los docentes de I a V de secundaria.

A los pasos utilizados en los textos escolares descritos en la sección 4.3 se adicionan los siguientes que permitirán constituir nuevas técnicas.

Paso 32: Comprobar que las magnitudes estén directamente relacionadas, es decir si una aumenta la otra también aumenta.

Paso 33: Identificar si una magnitud aumenta qué sucede con la segunda magnitud (aumenta o disminuye). Si la segunda magnitud aumenta en la misma proporción en que aumenta la primera magnitud, entonces se trata de magnitudes directamente proporcionales; en cambio si la segunda disminuye, se trata de magnitudes inversamente proporcionales.

Paso 34: Representar las magnitudes en una tabla

Paso 35: Determinar la relación de dos magnitudes, manteniendo constante las otras

Paso 36: Establecer el producto de las magnitudes inversamente proporcionales

Paso 37: Establecer el cociente de las magnitudes directamente proporcionales

Paso 38: Determinar la relación entre todas las magnitudes y determinar la constante de proporcionalidad. La constante permitirá comprobar o determinar un término desconocido

Paso 39: Abrir una hoja de Excel y registrar los datos en columnas

Paso 40: Para calcular un dato de la segunda columna usar la regla de tres simple en la barra de fórmulas

Paso 41: Completar los datos de la segunda columna arrastrando la fórmula con la cruz negra de la parte inferior derecha de la celda

Paso 42: Selecciona todos los datos de las dos columnas e inserta el gráfico "burbujas". Coloca título a los ejes

Paso 43: Identifica en el gráfico el dato solicitado

Paso 44: Utilizar barras o similares para representar en cuántas porciones se dividirá el total

Paso 45: Determinar el valor de cada porción (constante de proporcionalidad) dividiendo el total entre la cantidad de porciones

Paso 46: Multiplicar la constante de proporcional por la cantidad de porciones de cada parte del total

Paso 47: Establecer la proporción entre las dos razones

Paso 48: Formar una nueva proporción teniendo en cuenta que la suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la segunda razón

Paso 49: Resolver la ecuación

4.4.1 Manual para el docente del cuaderno de trabajo de primero de secundaria

A continuación describiremos las técnicas, tareas y tipos de tareas identificadas en cada uno de los manuales para los docentes.

Construyendo un proyecto (Manual para el docente 1, p. 54)

Como proyecto de una feria de ciencias de un colegio, un grupo de estudiantes quiere exponer y nombrar las características importantes que se deben considerar para construir un muro inca. Ellos identifican la importancia de mantener para cada muro la relación directa con los materiales. Por ejemplo, las medidas de los muros están directamente relacionadas con la cantidad de piedras que posee cada uno, y se debe considerar el área de la superficie de cada muro como una relación directa a la dimensión de cada una de las piedras. Las piedras que usaban en cada base tendrían que ser de forma cúbica. Eran llamadas “piedras base” y generalmente mantenían proporción en sus medidas.

Responde a las siguientes preguntas:

a. Si en la “piedra base” se duplica la longitud de una de sus aristas, ¿se duplica también el área de una de sus caras?
b. Si en la “piedra base” se duplica la longitud de una de sus aristas, ¿se duplica también el perímetro de una de sus caras?
c. ¿Crees tú que la medida de los muros de las paredes de una casa está relacionada directamente con la cantidad de ladrillos que posee?

Resolvamos: Laboratorio de matemática

1. Trabajo con material manipulable

Conforma un equipo con cuatro compañeros.

De los desglosables “construcción inca”, midan con una regla y realicen los cálculos pertinentes para realizar las siguientes mediciones de los muros 1,2 y 3. (Las medidas son en cm).

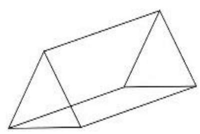
Muro	Número de bloques	Altura de la cara	Base del muro	Área del muro
1				
2				
3				

Bloque de cada muro	Altura de un bloque	Base de un bloque	Área de un bloque
Del muro 1			
Del muro 2			
Del muro 3			

2. Incorporo lenguaje matemático a mis acciones

Dos magnitudes están directamente relacionadas si al aumentar una de ellas, la otra también aumenta, o si al disminuir la medida de una de ellas, igualmente disminuye la otra.

a. Camparen las tablas y establezcan cuatro magnitudes que estén directamente relacionadas.
b. Establezcan las siguientes relaciones:
   - Entre áreas de los muros respecto del número de bloques
   - Entre áreas de los bloques respecto del área de cada bloque
   - Entre la altura de cada muro respecto de la altura del bloque correspondiente
   - Entre áreas de los bloques respecto de la medida de su base
c. Dos razones son proporcionales si existe equivalencia entre ellas; de lo contrario, solo están directamente relacionadas. ¿Cuáles de las posibilidades de las razones encontradas son proporcionales entre sí?
d. En la figura 9.1 se presenta otro tipo de construcción, al que se llamará muro 4. Dibuja la altura desde la base, es decir, el segmento perpendicular de la base al punto más alto del muro.



Ubica un punto medio de esta altura llamado P y traza ayudado con una escuadra el segmento paralelo a la base del triángulo que pasa por este punto.

Mide los siguientes segmentos:

- Base
- Segmento paralelo
- Altura
- Segmento que va desde el punto P hasta el punto final de la altura

Escribe las medidas encontradas.

A partir de los cuatro valores establece si existe una relación de proporcionalidad

3. Expreso mis ideas
   a. Expongan al resto de sus compañeros el muro que tiene características de proporcionalidad, justificando los valores necesarios.
   Utilicen una tabla para realizar la presentación

Tengan en cuenta:

- Justificar que las medidas estén directamente relacionadas
- Identificar las razones que se establecen con las nuevas medidas
- Efectuar las comparaciones con las nuevas medidas
- Verificar que estén relacionadas en proporcionalidad directa

b. Presenten una expresión que modele la solución de una magnitud a partir de tres valores dados. Considerar lo siguiente:

- Notación (incógnita y valores dados)
- Método del uso
- Reglas de proporcionalidad
- Ejemplos

4. Formulo expresiones simbólicas

Se desea analizar el corte transversal de un nuevo muro, de tal manera que este corte forme un trapezoide cortado por un segmento paralelo a la base, como se hizo en la figura 9.1. Representa gráficamente esta situación y establece la expresión que indique la proporción.

La intención de la situación presentada es que el estudiante identifique si existe relación directa entre dos magnitudes y luego si esta relación es de proporcionalidad. La situación hace uso de tablas como ostensivos para representar las magnitudes proporcionales y trata de muros incas, similar a la presentada al inicio de la unidad 3 del texto escolar.

A diferencia del texto escolar se está considerando un paso previo adicional, pues la actividad exige que primero se identifique si existe relación directa y después poder establecer si es directamente proporcional.

Definimos entonces:

(T_2): Identificar magnitudes proporcionales

Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla

$\tau_{(2,1')}$ Constante de proporcionalidad en tabla

Paso 32: Comprobar que las magnitudes estén directamente relacionadas, es decir si una aumenta la otra también aumenta.

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad.

Es importante señalar que si el docente no orienta adecuadamente el aprendizaje, la situación en particular podría convertirse en un ejemplo de restricción del álgebra como herramienta de modelización según Gascón *et al*, (2004) en los niveles Escuela - Pedagogía, pues se podría perder el sentido de la actividad matemática y, por tratar de motivar a los alumnos manipulando modelos de muros, llevarlos sin intención a un estado de desconcertación.

Por otro lado, en el Manual para docentes de primero de secundaria encontramos la siguiente tarea de finalización: *"Todo cuadrado presenta una relación entre la longitud del lado, su área y perímetro. ¿Cuáles de estas tres magnitudes son directamente proporcionales?"* (p. 57). Este tipo de actividades supone entender la proporcionalidad entre magnitudes como una relación más al lado de otras posibles relaciones. El tener un mayor número de estas tareas favorecería considerar la proporcionalidad como una modelización funcional.

Asimismo, en las actividades de finalización de la situación, se presenta ejemplos para identificar si dos magnitudes son directamente proporcionales. Entre ellas destacamos la siguiente: ¿Es correcto afirmar que la longitud de la circunferencia es directamente proporcional a la medida de su diámetro? Explica la respuesta (p.57)

Tal como indica el Manual para el docente, la constante de proporcionalidad es π. Esta situación es significativa pues casi siempre la constante es un racional.

En la sección "Posibles errores" del Manual es importante destacar lo siguiente:

> Puede darse el caso de que los estudiantes concluyan que dos magnitudes son proporcionales cuando una aumenta y la otra también. Remarque que al aumentar una magnitud, la otra lo debe hacer en la misma proporción para que estén directamente relacionadas. (p. 55)

De esta manera solo el discurso coloquial "a más, más" o "a menos, menos" no puede determinar la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes.

Problemas relacionados con construcciones (Manual para el docente 1, p. 58)

1. Estimando material (Problema de traducción simple)

Para construir cierto muro se usan bloques, tubos, alambre y cemento, y se marca en el piso de forma lineal la zona en la que se levantará el muro. La instalación eléctrica se realiza después de construir el muro.

Para construir el muro se pegó una hilera de 12 bloques y después se añadió una fila aumentando la cantidad de cemento necesario para pegarlos, tal como se muestra:

Cemento (libras)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bloques	12	24	36	48	60	72	84	96	108

a. Si un muro consta de 276 bloques, ¿cuánto cemento se utilizó?
b. Si en un muro se usaron 29 libras de cemento, ¿cuántos bloques tiene el muro?
c. Establece la expresión que determine:
   - La cantidad de cemento que se usará para determinada cantidad de bloques
   - La cantidad de bloques que se usará con determinada cantidad de cemento
d. Explica por qué es correcto afirmar que hay proporcionalidad directa entre las magnitudes.

En la situación, se pretende utilizar las tablas como ostensivos para representar y calcular cantidades desconocidas, establecer la establecer relación ecuacional y justificar la relación de proporcionalidad ente magnitudes. Asimismo, es coherente con el aprendizaje esperado: "Organiza datos en tablas para expresar relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes" propuesto para primero de secundaria en las Rutas de Aprendizaje 2015.

Teniendo en cuenta lo descrito, establecemos dos técnicas para la situación, descritas en el análisis del texto escolar de primero de secundaria: $\boldsymbol{\tau_{(1,1,1)}}$ ***Amplificar o simplificar en el mismo espacio de medida y*** $\boldsymbol{\tau_{(2,1)}}$ ***Constante de proporcionalidad en tabla***

Es importante señalar que también se pretende que el alumno identifique la relación de proporcionalidad de manera gráfica. En el texto escolar se indica que la gráfica de las magnitudes directamente proporcionales es una línea recta, en donde k es la constante de proporcionalidad.

Por otro lado, podemos decir que la situación corresponden al primer nivel de algebrización según Bolea (2002) en donde $y = kx$ para un determinado valor de la constante k.

2. Problemas de tiempo (Problema de traducción compleja) (Manual para el docente 1, p. 59)

El estuco es una combinación de yeso y agua. El tiempo que toma en secarse sobre la superficie que se aplica se estima en la tabla.

Tiempo (minutos)	1		4		6	7
Área para estucar (m^2)	4	8		20		28

Se sabe que si el área es mayor, se gastará más tiempo y que cada minuto que pase se puede colocar la misma cantidad de estuco en proporción. Se quiere estucar un muro que tienen 2 m de alto y 15 m, de largo por ambos lados. ¿Cuál es el tiempo que se dispone para hacerlo?

Comprendo el problema

a. ¿Para qué me sirven las medidas del muro? ¿Con qué magnitud o magnitudes se relacionan estas medidas?

Diseño una estrategia

b. ¿Cómo obtengo la superficie del muro que se desea estucar? Describe qué pasos te permitirán solucionar esta interrogante.

Aplico la estrategia

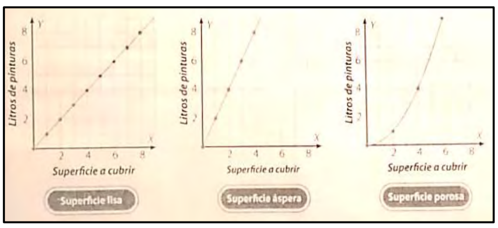
c. El tiempo necesario para estucar un muro que tiene 2 m de alto y 15 m de largo por ambos lados es:

Transfiero lo aprendido (Manual para el docente 1, p. página 59)

La viscosidad de una pintura determina el número de capas que debe aplicarse cuando se aplica. A continuación, se presenta la cantidad de pintura que se requiere de acuerdo con el tipo de superficie que se desea pintar (lisa, áspera y porosa)

a. Para cada una de las gráficas completa la tabla.

Superficie lisa	Pintura (litros)				
	Superficie (m^2)				
Superficie áspera	Pintura (litros)				
	Superficie (m^2)				
Superficie porosa	Pintura (litros)				
	Superficie (m^2)				



b. Se desea pintar una superficie de 3 m de alto por 8 m de largo por los dos lados; sin embargo, un lado es de textura lisa y el otro áspero. ¿Cuántos litros de pintura se requiere para hacerlo?

Para pintar un muro de 2 m de alto y 10 m de largo, por un solo lado, se cuenta con 12 litros de pintura, ¿alcanza esta cantidad?

Las dos situaciones pretenden que el estudiante calcule el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales, pero antes de aplicar la técnica debe calcular el área. A diferencia de los problemas del texto escolar, este tipo de situaciones demanda en el alumno la realización de operaciones adicionales, para luego calcular el valor desconocido con la siguiente técnica: $\boldsymbol{\tau_{(1,1,1)}}$ ***Amplificar o simplificar en el mismo espacio de medida,*** descrita en el texto escolar de primero de secundaria.

Pretende que el estudiante a través de la representación en el plano cartesiano complete la tabla, para luego calcular el dato desconocido.

Asimismo, indicamos que en las situaciones de finalización se consolida el trabajo de identificar magnitudes proporcionales en tablas, determinar la constante de proporcionalidad y representar la relación en el plano cartesiano.

3. El tipo de cambio (Situaciones problemáticas realistas) (Manual para el docente 1, p. 60)

Mei-Ling, ciudadana de Singapur, estaba realizando los preparativos para ir a Sudáfrica como estudiante de intercambio durante tres meses. Necesitaba cambiar algunos dólares de Singapur (SGD) en rands sudafricanos (ZAR). Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano en esa época era 1SGD = 4,2 ZAR.

a. Al realizar los cálculos referentes al pago de estadía, comida, transporte, materiales y algunos gastos extras decidió cambiar mil dólares de Singapur en rands sudafricanos con este tipo de cambio por cada mes de intercambio. ¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?
b. Al volver a Singapur tres meses después, a Mei-Ling le quedaban 3900 ZAR. Los cambió en dólares Singapur, y se dio cuenta de que el tipo de cambio había variado a 1SGD = 4,0 ZAR
¿Cuánto dinero recibió en dólares de Singapur?
c. Al cabo de estos tres meses el tipo de cambio había variado de 4,2 a 4,0 ZAR por 1 SGD. ¿Favoreció a Mei-Ling que el tipo de cambio fuese 4= ZAR en lugar de 4,2 ZAR cuando cambió los rands sudafricanos que le quedaban por dólares de Singapur? Justifica tu respuesta.

Problema liberado de Evaluación PISA 2012-109.

La técnica a utilizar para la situación es $\boldsymbol{\tau_{(1,1,2)}}$***Reducción a la unidad,*** explícita en el texto escolar y en los indicadores de desempeño de Rutas de Aprendizaje: "Emplea el factor de conversión, el método de reducción a la unidad y la regla de tres simple en problemas relacionados con proporcionalidad directa"

Según García (2005), corresponde a la modelización discursiva en donde el marco teórico es implícito y cultural.

Según Bolea (2002), esta técnica corresponde a la organización clásica de la proporcionalidad. Al tratarse la situación de tipos de cambios de moneda, no hay inconveniente con la técnica pero en otras situaciones en limitada a nivel tecnológico como por ejemplo: “Si para para pintar 42 sillas se necesitan 5 obreros, para fabricar una silla se necesitan 5/42 obreros”. (Adaptado de Bosch 1994)

Problemas de comparación de magnitudes relacionados con construcciones (Manual para el docente 1, p. 62)

Taller de matemática

1. Problema de agua (Problema de traducción simple)

Un grupo de estudiantes quiere construir con materiales actuales una fuente inspirada en la arquitectura inca. Antes de empezar localizan un punto en el que realizarán la construcción con la condición de disponer de una saliente de agua con bastante fuerza para que atraviese el conducto de rocas. Un ingeniero del grupo calculó que sale con una fuerza de 3 bidones por minuto y comparte con sus compañeros una tabla en la que expresa en bidones y en litros la cantidad de agua.

Cantidad de agua (bidones)	0,1	0,2	0,4	0,5	1
Cantidad de agua (litros)	2	4	8	10	20

a. ¿Es correcto afirmar que los datos de la tabla son directamente proporcionales? ¿Por qué?
b. Si lo son, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?
c. Completa. De acuerdo con la tabla, cada bidón contiene una determinada cantidad de agua. Dicha relación se puede expresar de la siguiente manera.

1B → Número de bidones de agua
→ Cantidad de litros de agua

Este valor se conoce como factor de conversión y también se puede expresar como:

→ Cantidad de litros de agua
1B → Número de bidones de agua

Este factor de conversión se utiliza como método para determinar valores en una relación de proporción directa, multiplicando la magnitud a convertir por este factor, según sea el caso.

- Establece las siguientes medidas usando el factor de conversión:
  - 24 litros de agua en bidones:___________
  - 2 bidones en litros de agua: ____________
  - 100 litros de agua en bidones: __________
  - 4 bidones en litros de agua: ____________
- ¿Cuántos litros de agua salen por minuto del punto que se cogió para construir la fuente?

Muestra tus cálculos.

En la situación descrita corresponde a utilizar la técnica $\tau_{(2,1)}$: ***Constante de proporcionalidad directa en tabla*** y la técnica del ***factor de conversión***. Esta última no es descrita en el texto escolar de primero de secundaria ni en los textos de los otros cuatro grados pero sí es sugerida en los indicadores de desempeño de Rutas de Aprendizaje y el Manual para el docente indica que se utiliza como método para determinar valores en una relación de proporcionalidad directa, multiplicando la magnitud a convertir por ese factor, según sea el caso. Asimismo, se indica el factor de conversión como una unidad de comparación en distintas unidades de medida.

Establecemos entonces:

Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales

$\tau_{(1,1,5)}$: ***Factor de conversión***

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 3: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a/a´)

Paso 4: Calcular el estado correspondiente a "b" teniendo en cuenta que b´= b(a/a´)

En cuanto al uso de objetos ostensivos se utiliza la tabla de proporcionalidad que por su valencia instrumental permite calcular de manera casi automática la constante de proporcionalidad.

En cuanto a la tarea de calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales, el factor de conversión se constituye en una técnica más que se suma a las cuatro descritas en el análisis de los textos escolares.

En el Manual para el docente se sugiere complementar el tema factor de conversión con reducción a la unidad. Asimismo, recordar factores de conversión de la temperatura y la longitud.

Variedad de situaciones que se resuelven con regla de tres simple

Taller de matemática

1. ¿Cuántas cañas comprar? (Problema de traducción simple) (Manual para el docente 1, p. 66)

Juan está estudiando el techo de una construcción inca y observa que los materiales usados son directamente proporcionales. Empieza a construir el techo y nota que para ubicar 3 maderos horizontalmente debió usar 15 cañas verticales.

a. Si va a usar otros 11 maderos, ¿cuántas cañas empleará?
b. Si Juan tiene 45 cañas, ¿para cuántos maderos alcanza el material?
c. En la distribuidora de madera le informan que 12 cañas cuestan S/. 360. ¿Cuánto debe pagar por 4 cañas?
d. Si Juan dispone de S/. 480 y decide usarlo todo en las cañas para reforzar lo que ya había hecho, ¿cuántas cañas puede comprar?

2. No más goteras (Problema de traducción compleja) (Manual para el docente 1, p. 66)

Miguel quiere inmunizar un techo de madera y cubrirlo con paja. Para esto, aplica a la madera líquido inmunizante; sin embargo, entre más líquido aplique, debe esperar más tiempo para que se seque. Asimismo, debe determinar el peso por metro cuadrado de la cantidad de paja que usará.

Cada envase inmunizante tiene 15 litros de líquido para 10 metros cuadrados, cuyo secado demora 18 horas. Además, para cubrir 6 metros cuadrados de techo se requiere de 21 Kg de paja, con el fin de que el grosor y la densidad minimicen el riesgo de una filtración.

Si Miguel ha previsto un techado con 70 Kg de paja, ¿cuántos litros de inmunizante empleará y cuál será el tiempo de secado?

Comprendo el problema

a. ¿Cuáles son las magnitudes que se reconocen en la situación?
b. ¿Qué relación hay entre ellas? Por ejemplo, ¿qué ocurre si uso más de 15 litros de líquido inmunizante?

Diseño una estrategia

c. Ubica los valores que se dan en las preguntas en cada una de las tablas correspondientes.

Líquido inmunizante (litros)	15						
Área en m^2	10						

Líquido inmunizante (litros)	15	30	10				
Tiempo de secado (horas)	18	36	12				

Área por cubrir (m^2)	6	8	12				
Paja (Kilogramos)	21	28	42				

Aplico la estrategia

d. Completa las tablas anteriores

Transfiero lo aprendido

e. Si Miguel usa una cantidad diferente de inmunizante y se sabe que el tiempo de secado se reduce a 6 horas, ¿cuánto demoraría en secar un material al usar 5 litros de este nuevo inmunizante?

3. Número de amarres (Situaciones problemáticas realistas) (Manual para el docente 1, p. 68)

Cada vez que se coloca paja sobre los maderos que conforman el techado, debe realizarse amarres con mimbres para que estos no se deslicen. Para ello, se toma varias tiras y se corta de acuerdo con la cantidad de maderos que se utilizan. Javier sabe que no debe sobrar tanto material en cada una de ellas, ya que requiere muchos de estos amarres, por lo que está obligado a usar justo lo necesario. Como la postura de estos amarres requiere de precisión, el tiempo necesario para cada uno de ellos es mayor que lo normal. Se determina 16 minutos para colocar 7 amarres.

La relación entre la cantidad de amarres y la cantidad de maderos es:

Maderos	4
Amarres	26

a. ¿Cuántos amarres se usa en los 14 maderos que conforman el techado?

b. Debido a los tiempos dados, se dispone tan solo de tres horas y media para realizar el trabajo. ¿Es posible ejecutarlo? Explica.

4. Salsa (Situaciones problemáticas realistas) (Manual para el docente 1, p. 68)

Estas preparando tu propio aliño para ensalada. He aquí una receta para 100 mililitros (ml) de aliño.

Aceite para ensalada	60 ml
Vinagre	30 ml
Salsa de soja	10 ml

a. ¿Cuántos mililitros (ml) de aceite para ensalada necesitas para preparar 150 ml de este aliño?

Problema liberado de Evaluación PISA 2012-PMP924Q02-019.

Las cuatro situaciones presentadas pretenden que el estudiante aplique la técnica $\boldsymbol{\tau_{(1,1,3)}}$: ***Regla de tres simple directa***. En el texto escolar y en los indicadores de desempeños de Rutas de Aprendizaje (2015) también la encontramos como método para resolver problemas de proporcionalidad directa.

Identificamos también el uso de tablas de proporcionalidad como ostensivos. Asimismo, observamos que es el segundo problema liberado de la Evaluación Pisa 2012 considerado, lo que indica la relevancia del objeto proporcionalidad en el ámbito escolar y específicamente en la etapa secundaria.

Aprovechando el tiempo libre (Manual para el docente 1, p. 70)

Como trabajo de investigación, los estudiantes de un colegio deciden realizar anotaciones y seguimiento de una construcción inca. Sin embargo, se dan cuenta de que se presentan muchos tiempos libres mientras esperan que estén listos los materiales o se realice una instalación que no requiera de mucho estudio. Por este motivo, deciden estudiar el concepto principal de su trabajo de investigación elaborando y jugando con 36 cartas numeradas del 2 al 9 (4 de cada número) y 20 cartas con diferentes razones.

Iniciemos

Responde las siguientes preguntas

a. Si van a jugar varios estudiantes, ¿será equivalente el tiempo que se demore el turno de cada uno de ellos en cada ronda realizada?
b. Si al jugar 4 estudiantes se necesitan 32 cartas, ¿cuántas cartas se necesitan para que jueguen 6 estudiantes?
c. Si con 36 cartas pueden jugar 3 estudiantes, ¿cuántos estudiantes pueden jugar con 60 cartas?

Resolvamos el juego

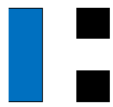
1. Exploro las reglas y condiciones

Actividad 1:

- Reunirse en parejas o equipos máximo de 4 estudiantes y mezclar 32 de las 56 cartas verdes para después dejarlas boca abajo en el centro de la mesa.
- Uno de los jugadores saca la carta de arriba y la deja boca arriba al lado del mazo
- Un jugador de la derecha saca la siguiente carta del mazo y la deja boca arriba al lado de la anterior.
- Gana las dos cartas el que diga más rápido el producto de las dos cartas.
- Si el jugador multiplica mal, ya no puede jugar hasta que se recojan las cartas.
- Si no se logra dar con la multiplicación las dos cartas se desechan.
- Gana el jugador que tenga más cartas.

2. Comprendo las características del juego

- Reunirse en parejas o equipos de máximo 4 estudiantes y mezclar las 56 cartas verdes.
- Se reparten las 56 cartas en forma equitativa entre los jugadores. Si sobran, se dejan por fuera del juego (se pueden ver las cartas).
- Se mezclan las 20 cartas azules y se dejan boca abajo en el centro de la mesa.
- Dibujar en una hoja la siguiente imagen, de modo que en el recuadro azul se pueda ubicar una de las cartas azules y en los recuadros negros las cartas verdes.



Primer movimiento

- Uno de los jugadores que se escoja aleatoriamente, toma una carta del mazo y la coloca boca arriba en el centro de la hoja. En ese momento se presenta desde la carta azul a los recuadros negros dos caminos representados por líneas rojas. El primer jugador que pueda bajar de sus manos dos cartas verdes, de forma que al ubicarlas en las casillas negras obtenga la misma multiplicación en cada camino indicados por las líneas rojas, gana la carta azul y devuelve las cartas verdes a su mano.
- Si no es posible se saca una segunda carta azul y se repite el juego; la carta azul que no se usó pasa debajo del mazo de las cartas azules.

Regla 1

- El jugador de la derecha del jugador ganador baja la siguiente carta azul, disponiendo de medio minuto para poder ubicar las dos cartas verdes. Si el jugador no puede bajar las dos cartas, debe entregar una de sus cartas verdes al jugador de la derecha.

Regla 2

- El jugador de la derecha ahora dispone de medio minuto para armar las multiplicaciones equivalentes para ganar la carta azul, usando las cartas verdes de su mano y la carta verde que se le entregó.
- Si el jugador puede armar la pareja de multiplicaciones iguales, entonces gana la carta verde del jugador anterior y además la carta azul.

Regla 3

- Si el jugador que recibió la carta verde no arma la pareja en el tiempo solicitado, el jugador anterior recupera su carta y el jugador del turno debe entregar una de sus cartas verdes al jugador de la derecha, repitiendo las dos anteriores reglas.

Reglas generales

- Después del primer movimiento se juega siempre a la derecha.
- Toda carta azul ganada se guarda aparte del mazo verde.
- Toda carta verde ganada hace parte del mazo del jugador.
- Si se da un ciclo y no se gana la carta azul, esta se coloca debajo del mazo azul y se reanuda el juego.
- Puede que un jugador quede con una carta en la mano. Si este jugador no dispone de una carta que haya bajado el de la izquierda, puede decidir a quién regalar su carta y quedar fuera del juego.
- El juego finaliza cuando se acaben las cartas azules o no se puedan bajar cartas verdes.
- Gana el juego quien tiene mayor cantidad de cartas azules.
  Importante: Escribe las jugadas en las cuales se tuvo que bajar la carta verde en una mano.

3. Reconozco relaciones matemáticas en el juego

Juega una segunda ronda que permita llenar la siguiente tabla en la que se ganaron siete cartas azules.

Carta azul	Carta verde arriba	Carta verde abajo	Multiplicación

- Analizando la tabla, ¿cuál es el concepto matemático que te permite ganar la carta azul? ¿Por qué?

4. Expreso en forma esquemática
Algunas de las jugadas no permitían obtener las multiplicaciones deseadas, por lo tanto, se debería entregar una carta verde, dándole la oportunidad al jugador de la derecha de tener una carta más para considerar. No obstante, supongamos que esta regla cambia; ahora la carta verde se debe obtener entre las dos cartas a usar para ganar la carta azul.
Completa la tabla, en las cuales se representan tres jugadas en las que el jugador tuvo que bajar una carta verde de su mano.

Carta azul		Carta verde	
Numerador			Carta que se bajó
Denominador			Carta que se necesitaba

Carta azul		Carta verde	
Numerador			Carta que se bajó
Denominador			Carta que se necesitaba

Carta azul		Carta verde	
Numerador			Carta que se bajó
Denominador			Carta que se necesitaba

5. Describo usando la matemática
   a. Presenta las multiplicaciones que se buscaban para ganar la carta azul de los tres casos.
   b. Subraya el número que se necesitaba para ganar la carta azul.
   c. Presenta la expresión que permite determinar el número que se requiere, relacionando los tres números conocidos.
6. Expongo lo encontrado
Se establece que dos razones son proporcionales si sus razones son iguales. Por tanto, debe cumplirse:
a/b = c/d si y solo si: ______ ______ = _____ ______
Además, si se cumple la proporcionalidad, entonces c = _______ o d = ______

La situación pretende, según el Manual del docente, que los estudiantes a través de un juego hallen el término desconocido en una proporción apoyados en recursos gráficos. Indicamos entonces la tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales y la técnica $\tau_{(1,1,4)}$***: Multiplicación en aspa de los elementos de razones homogéneas,*** descrita ya en el análisis del texto de primero de secundaria.

Diplomacia matemática (Manual para el docente 1, p. 90)

En la clase de Matemática se presenta un tema de discusión sobre las ventajas de la inversión extranjera en el país, pues de esto depende la tecnificación necesaria en la extracción de metales y minerales. Para ello, se coloca como ejemplo la cantidad de maquinaria que se daría por préstamo de China, que aporta cinco equipos de perforación por cada tonelada de extracción minera sin procesar, además de tres vehículos de tracción pesada también por tonelada, generando economía para la empresa peruana y asegurando exclusividad a la empresa china.
Iniciemos
Responde a las siguientes preguntas
a. Las magnitudes presentadas en el texto son directamente proporcionales. ¿Por qué?
b. ¿Cuál es la razón entre las toneladas de extracción y aporte de vehículos de tracción pesada?
c. ¿Cuántas toneladas se requieren para tener un préstamo de 24 equipos de perforación?
Resolvamos:

1. Planteo problemas de acuerdo con el contexto

Uno de los propósitos de representar modelos diplomáticos en la clase de Matemática es dar importancia a los métodos de comunicación.

Mariana debe representar al grupo inversionista chino. Sabe que debe quedar muy clara la presentación de los acuerdos de la maquinaria que se prestará a cambio de la cantidad de material minero que se va a recibir. Identifica que el número de toneladas de material debe ser una cantidad exacta, ya que es difícil determinar el préstamo de maquinaria por un peso parcial de mineral; por lo tanto, crea la siguiente tabla de préstamo de equipo de perforación de tracción pesada.

Vehículos de tracción pesada	3			12		
Mineral (toneladas)	1	2	3		5	

Mariana determina que los préstamos son los adecuados y que se comportan como magnitudes directamente proporcionales, ya que a mayor cantidad de mineral extraído, mayor cantidad de equipos de perforación. Además, existe una relación de equivalencia, pues estos valores crecen directamente con respecto a la cantidad de mineral que se adquiere.

De igual forma, presenta gráficamente la conversión de los vehículos de tracción pesada. En la gráfica se evidencia una recta que parte del origen y tiene una pendiente igual a tres, estableciendo que cada tonelada ingresada a su base de datos genera un préstamo de tres de estos vehículos. Mariana expone que el comportamiento de este préstamo corresponde a una relación directa entre los dos interesados. Cada tonelada que aporte la industria peruana genera un préstamo equitativo de los vehículos chinos.

En ambas situaciones, el no aportar toneladas de mineral implicaría el no préstamo de la maquinaria, lo cual no es lo deseado debido a las necesidades mutuas y del enfoque diplomático de la situación; sin embargo, Mariana coloca en sus tablas, gráficas y expresión algebraica esta posibilidad, que se considera como una situación que podría suceder.

a. Establece la relación de las magnitudes involucradas en la situación a partir de las características de variación de cada una de ellas.
b. Presenta dos expresiones algebraicas que modelen el comportamiento del préstamo de cada maquinaria.
c. Reescribe cada expresión algebraica como una función de préstamo a partir de una cantidad desconocida de mineral que se dará a cambio.
d. Representa en el plano cartesiano las dos situaciones.

2. Reconozco el principal problema y trazo un plan

Lista 1: ____

Reúnete con tus compañeros e identifiquen en una segunda lista la información importante para determinar cómo están relacionadas las magnitudes expuestas en el tema. Recuerden que la relación solicitada se basa en la variación que sucede cuando una de ellas aumenta o disminuye.

Lista 2: ____

Las siguientes preguntas permiten identificar aspectos relevantes para lo solicitado. Con tus compañeros establezcan un acuerdo para cada una de ellas.

a. ¿Qué operación matemática se debe usar para representar la cantidad de máquinas que se prestará a cambio del mineral solicitado?
b. ¿Ayuda en algo suponer que la variable “y” representa las máquinas que se prestará, y la variable “x” la cantidad de toneladas dadas? ¿por qué?
c. La pendiente de la recta de la ecuación, ¿qué permite identificar?
d. ¿Depende el número de máquinas del mineral que se aporta?
e. ¿Cómo se representa en el plano cartesiano el no aporte del mineral a la empresa china?

3. Experimento para resolver un problema
   a. ¿Cómo puede relacionarse la cantidad de máquinas prestadas a partir de la cantidad de mineral aportado? ¿Existe una proporción que se cumpla?
   b. Escribe una expresión algebraica que represente la cantidad de equipos de perforación prestada a partir de una cantidad desconocida de mineral.
   c. Escribe una expresión algebraica que represente la cantidad de vehículos de tracción pesada a prestar a partir de una cantidad desconocida de mineral.
   d. ¿Cómo serán las representaciones cartesianas de ambas situaciones? Presenta un bosquejo de cada en diferentes planos cartesianos.

4. Propongo una expresión matemática

Lleguen en grupos a acuerdos y planteen las siguientes conclusiones:

a. Las magnitudes involucradas son directamente _________________, ya que las razones que se presentan entre ellas son _____________
b. La expresión algebraica que determina la cantidad de equipos de perforación que se prestará a partir de una cantidad desconocida de mineral es: ________________. Esta se puede expresar como la siguiente función lineal: _______________

c. La expresión algebraica que determina la cantidad de vehículos de tracción pesada que se prestará a partir de una cantidad desconocida de mineral es: ______________________ Esta se puede expresar como la siguiente función lineal: ________________

5. Valido la solución del problema

Usando las funciones establecidas y las gráficas creadas, determina analíticamente la cantidad de maquinaria que se prestará de cada tipo por 8 toneladas de mineral.

Modelación matemática (Manual para el docente 1, p. 98)

Como proyecto para observar el comportamiento de un almacén especializado en artículos de plata se solicita a un grupo de estudiantes simular la compra de material, su manipulación y su venta, así como como revisar los costos de producción, el inventario y las ganancias que pueden lograrse bajo una buena administración del almacén. Los estudiantes disponen de representaciones gráficas, tablas, precio de compra y precios de venta. Al finalizar el análisis, deben exponer lo realizado a cada uno de sus compañeros de clase. Para empezar, uno de ellos adquiere una docena de aretes, los cuales desea vender al doble del precio de su compra, y después realizar un proceso de seguimiento matemático financiero.

Iniciemos

a. Establece el precio de compra y el precio de venta de los aretes.
b. Si se venden los aretes, ¿se puede establecer la ganancia total en nuevos soles? ¿Por qué?
c. ¿Qué sucede con las ganancias si aumenta la cantidad de aretes vendidos?
d. Para iniciar una tienda se debe aportar una cantidad de dinero ¿cómo se representa este valor, como un valor positivo o negativo? ¿Por qué?

Resolvamos: modelación matemático

1. Planteo problemas de acuerdo con el contexto

En las investigaciones previas y la preparación en la simulación de una tienda encargada de vender plata pura, determina que el precio de venta depende del peso que solicite el comprador. En esta preparación se le da al grupo S/. 96 para invertir en plata pura. Se basan en la siguiente tabla para determinar los precios de compra por gramo de plata.

Precio de la plata (gramos)	1	2	3	4
Precio de compra (S/.)	24	48	72	96

Al iniciar las ventas, el estudiante encargado del inventario de la tienda presenta una gráfica exponiendo la necesidad de una venta mínima para recuperar lo invertido. Asimismo, señala un precio sugerido de venta.

- Los integrantes del grupo al analizar la gráfica identifican que a partir de la venta del tercer gramo de plata se recupera la inversión: además establecen que vendiendo todos los gramos, dispondrán de dinero para aumentar en 2 los gramos comprados para la siguiente venta.

a. A partir de la tabla establece si se presenta una relación proporcional directa.
b. Modela una función que exprese el costo de la plata pura.
c. Modela una función que exprese el dinero que se recibe por la venta de la plata pura.
d. Establece las características del dominio y rango de ambas situaciones.

2. Reconozco el principal problema y trazo un plan

Las siguientes indicaciones permiten seleccionar la información precisa para cumplir con lo solicitado; por tanto, es importante cada aspecto que se escriba.

- Reúnete con tres de tus compañeros y realicen una lista con la información que consideren importante para identificar la expresión algebraica que modele el dinero necesario para la compra de la plata pura a partir de su peso.
- Identifiquen en una segunda lista los aspectos relevantes para modelar la expresión algebraica que represente las ganancias en la venta de los aretes.

Las siguientes preguntas permiten identificar aspectos relevantes para lo solicitado. Llega con tus compañeros a un acuerdo en cada una de ellas.

a. Para la función del costo de la plata pura:
- ¿Se presenta en la tabla una constante de proporcionalidad?
- ¿Cómo se representa el costo de compra de cada gramo de plata a S/. 24 el gramo?

b. Para la función del dinero recibido en la venta de la plata pura.
- ¿Qué información aporta la gráfica 19.1?
- Completa la siguiente tabla, la cual representa el dinero que se aporta dependiendo de los gramos de plata vendida.

3. Experimento para resolver el problema

a. Para la función de las ganancias en la venta de la plata pura.
   Sin utilizar apoyo adicional presenta la gráfica que se ajusta al precio de compra de gramos de plata pura.
b. Para la función del dinero que se recibe en la venta de la plata pura.
   Determina la función que represente el dinero que se recibe por la venta de la plata con una función que se llame g(x), donde "g" es la función del dinero recibido que depende de "x" gramos vendidos de plata pura.

4. Propongo una expresión matemática

Lleguen en equipo a acuerdos y completen las siguientes afirmaciones:

a. La primera expresión indica el costo por la compra de determinada cantidad de plata. La función que presenta dicha situación es: _________________
b. La segunda expresión indica el número recibido por la venta de determinada cantidad de gramos de plata pura. La función que representa dicha situación es: _________________
c. Las dos funciones tienen como dominio ______________________; sin embargo, el rango de la primera función es ________________, en comparación con el rango de la segunda función.
d. La afirmación: "Los integrantes del grupo al analizar la gráfica identifican que a partir de la venta del tercer gramo de plata se recupera la inversión; además establecen que, vendiendo todos los gramos, dispondrían de dinero para aumentar en 2 los gramos comprados para la siguiente venta" es verdadera, ya que: ________________

5. Valido la solución del problema

Aplicación de proporción inversa en variadas situaciones (Manual para el docente 1, p. 102)

1. Modelando medidas (Problemas de traducción simple)

Un grupo de estudiantes deciden realizar una especie de excavación en una zona que se caracteriza por tener diferentes tipos de mineral en la tierra. En ella desean encontrar greda o arcilla, la cual pueden usar en la elaboración de diferentes tipos de vasijas para su clase de arte. Juliana logra recolectar un total de 24 libras de arcilla. Ella tiene grandes habilidades y desea reproducir artículos representativos incas. En su investigación encuentra que puede crear varias vasijas del mismo tamaño o usar toda en una sola cerámica. Por este motivo, decide crear una tabla en la cual se indique la cantidad de arcilla que se usará en cada vasija y cuántas de un mismo tamaño puede obtener al repartir equitativamente el material.

Se da cuenta de que para hacer una sola vasija requiere 3 libras de arcilla; para dos vasijas, 6 libras; y para tres, 9 libras, como se muestra en la siguiente tabla:

Número de vasijas	1	2	3
Arcilla que se necesita (libras)	3	6	9

¿Cómo puede calcular Juliana la cantidad de arcilla necesaria a medida que aumenta la cantidad de vasijas?

Usa la siguiente tabla para representar los demás casos:

a. ¿Cómo es la gráfica en el plano cartesiano que dibuja Juliana?
b. ¿Cómo está relacionada la cantidad de arcilla que usará en comparación con la cantidad de vasijas que se elaborará? ¿Por qué?

2. Mejorando el tiempo

Fernanda es una profesora de arte cuya especialización está en la manufacturación de artículos incas. Este tipo de alfarería requiere de la búsqueda de la greda en una tierra en la que predomine la roca sedimentada. Para esto, enseña a los estudiantes las características de los terrenos favorables en su búsqueda. Sabe que si envía a uno de los estudiantes, traerá en promedio 1,5 libras de arcilla. Por este motivo, solicita voluntarios para aumentar la cantidad.

Al cabo de un rato se van uniendo a la búsqueda varios estudiantes, de tal forma que se puede estimar una cantidad de arcilla más favorable en sus intenciones. La gráfica 20.1 relaciona la cantidad de estudiantes con el peso de arcilla que se usará en clase.

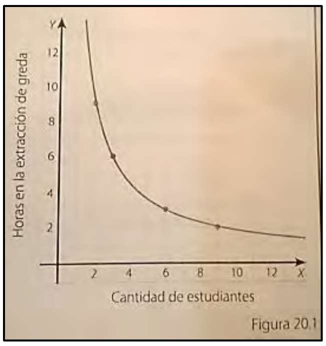


Figura 20.1

- ¿Qué cantidad de estudiantes voluntarios se necesitan para obtener las 10,5 libras de greda necesarias para la clase de arte?

Comprendo el problema

a. ¿Cómo están relacionadas las magnitudes que se proponen en la situación? ¿Por qué?
b. ¿Qué tipo de proporcionalidad se presenta al interpretar la gráfica? ¿Por qué?

c. Analiza la situación y apóyate en la gráfica para establecer dos características que te permitan entender mejor el problema

Diseño el problema

d. Nombra algunos puntos importantes de la gráfica
e. Crea una tabla que relacione las magnitudes presentadas
f. Deduce algunos valores que cumplen con la situación presentada

Aplico la estrategia

g. Completa
La cantidad de estudiantes que se necesita para obtener las 10,5 libras de arcilla necesarias para la clase de arte es: ______

Transfiero lo aprendido

h. Por solicitud del colegio y en vista de realizar una actividad cultural, se pide crear más vasijas para una exposición, lo cual hace que aumente la cantidad necesaria de greda. Juliana realiza un nuevo cálculo y establece que debe solicitar mayor cantidad de greda por estudiante, ya no 1,5 libras como antes había calculado, sino una libra más. ¿Cómo es la gráfica con esta nueva información? ¿Cuántos estudiantes se necesitan para encontrar la greda para 15 vasijas si para cada una hacen falta 2 libras de arcilla?

3. Aula especial (situaciones problemáticas realistas)

Para un curso vacacional un instituto de artes habilita un aula diseñada especialmente para la enseñanza de la alfarería. En ella, se pueden encontrar hornos, espátulas, mesas de diseño y, obviamente, la arcilla que utilizarán los estudiantes. Fabián es el encargado de suministrar el material necesario para que el curso no se vea afectado por la falta de algún recurso. Sin embargo, informa que la adquisición de la arcilla es limitada para este curso; por tanto, deben tener un seguimiento en el uso de este material. El seguimiento lo hará usando tablas y gráficas.

Las personas encargadas de hacer la inscripción se dan cuenta de que el curso solo tendrá éxito si cada participante dispone de 3/2 libras de arcilla para poder manufacturar los artículos necesarios para adquirir habilidad en la técnica.

Presenta el control de arcilla en la siguiente tabla.

Cantidad de estudiantes inscritos									
Cantidad de arcilla en libras									

- Si disponen de 13 libras y media de arcilla, ¿máximo cuántos estudiantes se pueden inscribir en el curso?
- ¿Cómo es la gráfica que representa la situación planteada?
- Si x es la cantidad de estudiantes que se inscribían y la arcilla total que se usará, ¿qué expresión permite establecer la cantidad total de arcilla (k) para distribuirla? ¿Por qué?
- Al observar las predicciones, los encargados deciden cambiar la regla de entregar 1 Kg exacto a cada estudiante; ¿Cómo afecta esta decisión en las predicciones?
- Bajo la nueva condición, si x es la cantidad de estudiantes que se inscribían, y k la cantidad total de arcilla, ¿qué expresión permite establecer la cantidad y de arcilla que recibiría cada estudiante? ¿Por qué?

Las situaciones corresponden a la competencia de regularidad, equivalencia y cambio y pretenden que el estudiante asocie modelos referidos a la proporcionalidad directa a una función lineal.

Por lo tanto indicamos:

Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal

$\tau_{(4,1)}$: Expresar como función lineal

Paso 1: Verificar que las magnitudes sean directamente proporcionales

Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad

Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente

Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia

Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario

Asimismo, se presentan como problemas propuestos tres situaciones en donde el estudiante tiene que escribir la función lineal que modela cada relación de proporcionalidad directa.

Este tipo de tarea y técnica corresponde a la modelización funcional del MER de García (2005).

En cuanto a los niveles de algebrización propuestos por Bolea (2002), podríamos decir que esta tarea se estaría relacionado al segundo nivel denominado: La reducción a la función lineal.

Es importante indicar que se utiliza la representación cartesiana como ostensivo gráfico.

En las orientaciones del Manual para el docente, se solicita abordar el capítulo 9: Proporcionalidad y función lineal del texto escolar, en donde se presenta articulación entre los dos objetos matemáticos.

También se sugiere como orientación:

> Enfatice en que la proporcionalidad directa es una relación directa de dos variables que se expresa por un cociente (constante de proporcionalidad). Además, dicha constante de proporcionalidad determina una expresión algebraica (función lineal y su gráfica en el plano cartesiano) (p. 91)

Finalmente, es necesario señalar que en las página 102 y 103 presenta error en el título (Aplicación de proporción inversa en variadas situaciones) y en la figura 20.1 pues no corresponden a la situación de proporcionalidad directa.

A continuación, presentamos la tabla 27 en donde se puede identificar la presencia de tres tareas en el Manual para docentes de primero de secundaria.

Tabla 27: Tareas identificadas en el Manual para docentes del cuaderno de trabajo de primero de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	PROBLEMAS	CANTIDAD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	Problema (p. 60) Problema (p. 62) Problema 1 (p. 66) Problema 2 (p. 66) Problema 3 (p. 68) Problema 4 (p. 68) Problema (p. 70)	7
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	Problema (p. 54) Problema 1 (p. 58) Problema 2 (p. 59)	3
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	Problema (p. 90) Problema (p. 98) Problema (p. 102)	3

Autoría propia

Asimismo, presentamos en la tabla 28 los ostensivos presentes en el Manual para docentes de primero de secundaria. Las tablas y las proporciones clásicas son acompañadas de la representación cartesiana, la notación *f(x)* y la ecuacional y=mx.

Tabla 28: Ostensivos identificados en los Manuales para docentes (I Secundaria)

PROBLEMAS RESUELTOS	Ostensivos								
	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	a:b :: c:d	y = kx y=k/x	f(x) =mx f(x) =m/x	Oper. mat.	Oral
Problema (p. 60)								✓	
Problema (p. 62)		✓	✓						
Problema 1 (p. 66)	✓								
Problema 2 (p. 66)	✓	✓							
Problema 3 (p. 68)	✓	✓							
Problema 4 (p. 68)	✓	✓							
Problema (p. 70)	✓	✓							
Problema (p. 54)	✓	✓							✓
Problema 1 (p. 58)		✓				✓			✓
Problema 2 (p. 59)		✓		✓					
Problema (p. 90)	✓	✓	✓	✓		✓	✓		
Problema (p. 98)		✓		✓		✓	✓		✓
Problema (p. 102)		✓		✓		✓	✓		

Autoría propia

4.4.2 Manual para el docente del cuaderno de trabajo de segundo de secundaria

Tuna, la reina de las frutas (Manual para el docente 2, p. 278)

Producida en la región andina, la tuna es la fruta nativa del Perú; el cactus que es la planta donde crece, está constituido por 90% de agua y crece en zonas áridas y desérticas. Por cada 100 g de tuna, aproximadamente encontramos 20 mg de vitamina C, 16 mg de calcio, 26 mg de fósforo y 30 mg de potasio. Se recomienda incluir una porción de tuna en la dieta de personas con problemas gástricos y con enfermedades coronarias, ya que tiene propiedades antisépticas y astringentes. Es una de las riquezas de nuestro país y es fuente de sustento de muchas familias.

Iniciemos

Responde las siguientes preguntas

- ¿Qué porcentaje aproximado de cada sustancia encontramos en la tuna?
- ¿En qué zonas de nuestro país encuentras la tuna?
- Una mandarina de 100 g tiene 26,7 mg de vitamina C, aproximadamente. ¿Cuántas tunas proporcionan, en vitamina C, lo equivalente a una mandarina?

Resolvamos: Laboratorio matemático

1. Trabajo con material reciclable

Para una fiesta de cumpleaños se servirá jugo de tuna, por lo que se ha comprado 400 tunas; además, se han adquirido vasos de 100, 200, 400 y 800 ml. Se han necesitado 2 tunas para llenar un vaso de 100 ml.

Para conocer la cantidad de jugo que se va a obtener de 2 tunas realiza lo siguiente.

- Llena de agua un vaso (el contenido aproximado del vaso es de 250 ml)
- Marca el vaso dividiéndolo en 5 partes iguales, como se muestra en la figura
- La figura muestra que los 100 ml corresponden a las ____ partes del vaso
- En las siguientes tablas se mostrará cuántas tunas se necesitaron para llenar diferentes tipos de vasos, y cuántos vasos se necesitará para emplear las 400 tunas en los diferentes envases

Cantidad de tunas	Medida de vasos (ml)
2	100
4	
8	
	800

Medida de vasos (ml)	Cantidad de vasos necesarios para las 400 tunas
100	200
	100
	50
800	

- Observa que, mientras más es la capacidad del vaso a llenar, más tunas se necesita.
  - 2 tunas llenan un vaso de 100 ml.
  - 4 tunas llenan un vaso de ________________
  - 8 tunas llenan un vaso de ________________
  - ________________ llenan un vaso de 800 ml.

- De igual manera observa que, mientras menor es la capacidad de los vasos, mayor es la cantidad de vasos necesarios para emplear las 400 tunas
  - Se necesitan 200 vasos de 100 ml.
  - Se necesitan 100 vasos de __________
  - Se necesitan 50 vasos de ___________
  - Se necesitan _______ vasos de 800 ml.

2. Incorporo lenguaje matemático a mis acciones

- ¿Qué entiendes al decir que la cantidad de tunas es directamente proporcional a la medida de los vasos que se llenarán?
- ¿Qué entiendes al decir que la cantidad de vasos es inversamente proporcional a la medida de los vasos que se usarán?
- Entonces, cuando una magnitud aumenta y la otra también, se dice que es:
- Entonces, cuando una magnitud aumenta y la otra disminuye, se dice que es:

3. Expreso mis ideas

- Trabaja con un compañero y encuentra la solución para calcular cuántos vasos de 50 ml se llenan con el jugo de 400 tunas. Y si tengo un recipiente de 2000 ml, ¿cuántas tunas se necesita para llenarlo? Ayúdate con la tabla 1
- Escribe los pasos que siguieron para encontrar la respuesta y qué estrategias utilizaron para resolverlo.

- Expongan en el aula cómo encontraron la solución a este problema.
- Planteen y resuelvan un problema en el que se pueda presentar magnitudes inversamente proporcionales y realicen tablas para su solución.

4. Formulo expresiones simbólicas

- Completa las tablas, analiza e identifica en cuál se presenta una proporcionalidad directa y en cuál una proporcionalidad inversa.

Cantidad de tunas	Medida de vasos (ml)
	100
4	200
	400
16	800
20	
40	
80	

Medida de vasos (ml)	Cantidad de vasos necesarios para las 400 tunas
25	
50	
100	200
	100
400	50
800	

Teniendo en cuenta la información del Manual para el docente, el objetivo de esta situación es poder diferenciar modelos basados en la proporcionalidad directa e indirecta.

Las afirmaciones: "cuando una magnitud aumenta y la otra también aumenta, se dice que es directamente proporcional" o "cuando una magnitud aumenta y la otra disminuye se dice que es inversamente proporcional" corresponden a una Modelización discursiva de sistemas lineales e inversos según García (2005).

Cabe indicar que en la sección "Ten en cuenta" del Manual para el docente también se hace referencia a este discurso cultural y limitado.

> Si una magnitud aumenta y la otra magnitud también aumenta se dice que es directamente proporcional; si una magnitud aumenta y la otra magnitud disminuye, se dice que es inversamente proporcional. (p. 280)

Asimismo, plantearemos la tarea ($t_{2,3}$) Identificar magnitudes directamente e inversamente proporcionales a través de un discurso coloquial.

La técnica $\tau_{(2,3,1)}$ estaría definida de la siguiente manera

$\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{2,3})}$

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 32: Identificar si una magnitud aumenta qué sucede con la segunda magnitud (aumenta o disminuye)

Paso 33: Si la segunda magnitud aumenta en la misma proporción en que aumenta la primera magnitud, entonces se trata de magnitudes directamente proporcionales; en cambio si la segunda disminuye, se trata de magnitudes inversamente proporcionales.

Es importante señalar que la técnica que plantea el Manual para el docente se basa en la práctica cultural y por ello podríamos afirmar que no es eficiente para las diversas tareas. El discurso "a más, más" y "a menos, menos" sin considerar la constante de proporcionalidad se podría generar confusión en el docente y por lo tanto en los alumnos.

Platos típicos del Perú (Manual para el docente 2, p. 282)

Taller matemático

1. Cebiche (problema de traducción simple)

Es un plato muy típico en nuestro país, reconocido y consumido en todo el mundo, y es, sino la principal, una de las delicias más solicitadas y vendidas a turistas nacionales y extranjeros. Sus orígenes se remontan al antiguo Perú, donde se usaban ingredientes básicos y propios de la zona, como limón, culantro y varias plantas vasculares que servían como aderezo para la carne de mariscos.

Si sabemos que un plato de cebiche cuesta S/ 22, dos platos valen S/44, diez platos cuestan S/220, ¿es posible afirmar que el costo es directamente proporcional en relación a la cantidad de platos?

- Completa la tabla y encuentra la constante de proporcionalidad.

Cebiche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Costo (S/)	22	44								

- Busca la constante de proporcionalidad

En una feria de platos típicos, contrataron 2 meseros para servir a los asistentes y terminaron de repartirlos en 3 horas. Si se contrata 2; 3; 4 y 8 meseros más, ¿en qué tiempo se terminarán de repartir los platos? Completa la tabla y encuentra la constante de proporcionalidad.

Meseros	2	4	5	7	10
Tiempo					

- Busca la constante de proporcionalidad

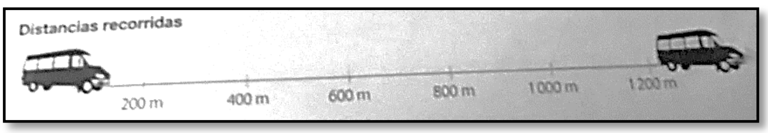
La costa de nuestro país es la región en donde se pueden conseguir los mejores ingredientes para la preparación del cebiche, ya que por la frescura de los mariscos este plato es más deseado aquí que en otras zonas del país. Sin embargo, en regiones lejanas a la costa también se consume esta delicia, por lo que es necesario que el transporte de los ingredientes a otras ciudades sea lo más pronto posible.

Analiza qué factores influyen en un viaje que realiza una compañía gastronómica para transportar un pedido de cebiches de manera óptima, y pueda cumplir con el contrato establecido a tiempo.

- Se debe enviar en un tiempo determinado los ingredientes para preparar cebiche desde una ciudad A hasta una ciudad B, cuya distancia entre ellas es de 100 km.
    - ¿Cuál es la relación que existe entre la distancia que debe recorrer en transporte y el tiempo que se demora en hacer la entrega?
    - ¿A qué velocidad debe ir el transporte para llegar en 2 horas?
    - Si el auto que traslada los ingredientes debe tener cuidado porque lleva envases delicados y viaja a 25 km/h, ¿en qué tiempo llegará a su destino?
    - ¿A qué conclusión llegaste al resolver el problema?

2. Transportando cebiches (Manual para el docente 2, p. 284)

Se quiere calcular la velocidad promedio de viaje que realiza una compañía que reparte cebiches del local de expendio al restaurante La sazón peruana, para lo cual se tomaron mediciones cada 10 segundos de la distancia recorrida.



Determina la constante de proporcionalidad.

Comprendo el problema

- ¿Cada cuántos segundos se tomaron las mediciones?
- ¿Qué se debe determinar?

Diseño una estrategia

- Observa el gráfico y completa la tabla

Velocidad	
Tiempo (seg)	Distancia (m)
10	200
20	
	600
40	
	1000
60	

Aplico la estrategia

- Calcula la razón de cada medición para determinar la velocidad a la que se traslada el camión

Transfiero lo aprendido

- ¿Cuál es la velocidad a la que va el camión?

3. Feria de comida típica (Manual para el docente 2, p. 284)

La familia Chávez quiere realizar una feria de comida típica y para eso necesita trasladar los ingredientes desde una ciudad a otra. Al salir de una ciudad los alimentos están a 3°C, y por cada 10 Km recorridos, la temperatura sube un grado.

- ¿Con qué temperatura llegarán los alimentos si el recorrido del camión es 60 Km?
- Grafica una tabla como la del ejercicio anterior y calcula la temperatura a la que llegarán los ingredientes.
- Únete con un compañero y planteen un problema de su vida cotidiana en donde tengan que aplicar la misma estrategia de solución utilizando medidas de peso.

En estas situaciones, podemos identificar la determinación de la constante de proporcionalidad directa e inversa. En la organización matemática de los textos escolares ya se había definido la tarea ($t_{2,1}$) Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla y la técnica $\tau_{(2,2)}$ en donde es necesario determinar la constante de proporcionalidad.

$\tau_{(2,1)}$ *Constante de proporcionalidad en tabla*

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad

Ahora establecemos la tarea ($t_{2,2}$) Identificar magnitudes inversamente proporcionales en una tabla y la técnica $\tau_{(2,2,1)}$ en donde es necesario determinar la constante de proporcionalidad inversa.

$\tau_{(2,2)}$ *Constante de proporcionalidad inversa en tabla*

Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc.

Paso 25: Formar productos con parejas de valores correspondientes: a.a´; b.b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad inversa

Es importante señalar el uso de las tablas como ostensivo. Asimismo, dentro de las sugerencias metodológicas para los docentes se motiva a que se proponga situaciones para que los estudiantes realicen representaciones en un plano cartesiano y determinen la razón entre los datos.

Por otro lado, estas técnicas no podrían ser justificadas dentro de una modelización proporcional pues en este marco, según García (2005), no se admite la construcción de razones heterogéneas, es decir, entre cantidades de M y M´.

La modelización ecuacional brinda la tecnología para justificar estas técnicas tanto para sistemas lineales como inversos. Las tecnologías de esta modelización descansan en el marco teórico del álgebra de magnitudes que permite la relación de magnitudes de naturaleza distinta.

Fiesta del Inti Raymi

Taller matemático

1. Asistentes a la fiesta (problema de traducción simple) (Manual para el docente 2, p. 286)

El Inti Raymi o Fiesta del Sol es una ceremonia incaica y religiosa que hoy es considerada una fiesta andina recordatoria. El 24 de junio de cada año la ciudad del Cusco se ve envuelta del misterio que encerraban las ancestrales culturas y del hermoso paraje que representan la unión de la naturaleza con la complejidad arquitectónica del lugar.

Durante las fiestas se venden comidas típicas. Si dos platos de chiri uchu se venden a S/24, ¿cuánto se pagará por la compra de ese plato para una familia de seis miembros?

- Si la familia tiene S/80, ¿les alcanza el dinero?
- ¿Las dos magnitudes son directamente proporcionales? Justifica
- Localiza los datos en la tabla
- ¿Cómo se obtiene el valor a cancelar por los 6 platos?
- ¿Cuánto se pagará por los 6 platos? ¿les alcanzó el dinero?

La fiesta del Inti Raymi es muy concurrida tanto por turistas extranjeros como locales, debido a su riqueza cultural y todo lo que ella representa. Los visitantes suelen observar las maravillas arqueológicas y culturales del Cusco.

La relación que tiene la concurrencia de turistas a la fiesta del Inti Raymi y la publicidad que se realiza sobre ella están íntimamente ligadas y se representa como una proporción.

- Si el año anterior se entregaron 500 volantes en una ciudad y asistieron 1000 turistas, ¿cuántos turistas asistieron por volante entregado?
- ¿Qué otras relaciones similares puedes evidenciar en las fiestas?

2. Publicidad de fiestas (problema de traducción compleja) (Manual para el docente 2, p. 287)

Para la publicidad del evento también se usaron afiches que se colocaron en lugares estratégicos en las ciudades, uy se vio que de los 360 afiches colocados hubo una asistencia de un total de 2520 turistas. ¿Cuántos turistas se espera que lleguen si se colocan 450 afiches?

- ¿Cuántos afiches se debería colocar si se espera la asistencia de 5600 turistas, aproximadamente?

Comprendo el problema

- ¿Qué solicita el problema?

Diseño una estrategia

- ¿Qué estrategia utilizas para resolver el problema?

Aplico la estrategia

- Calcula los turistas esperados si se colocan 450 afiches
- Calcula los afiches a colocarse si se espera la asistencia de 5600 turistas.

Transfiero lo aprendido

- Con los datos brindados anteriormente, calcula el total de asistentes al evento utilizando los datos de la siguiente tabla y la misma relación entre volantes - turistas y afiches - turistas.

Ciudades	Volantes	Afiches	Turistas (al usar volantes)	Turistas (al usar afiches)	Total de turistas por ciudad
A	500	360			
B	600	400			
C	800	500			

- ¿Qué estrategia o proceso utilizaste para resolver la situación plantada?
- ¿Qué conocimientos matemáticos utilizaste para resolverlos?
- ¿Crees que la aplicación de esta estrategia aporta en tu vida para solucionar situaciones de tu entorno?

3. Asistentes a la fiesta (problema de traducción realista) (Manual para el docente 2, p. 289)

Para la fiesta del Inti Raymi, se ha calculado que 2000 personas podrían llegar de diferentes partes del Perú y se ha destinado para vigilar la ciudad a 500 policías; pero si llegan 1500 personas más, ¿cuántos policías debería haber para resguardar de la misma manera a los visitantes a la ciudad?

El objetivo de esta situación es la aplicación de la técnica $\tau_{(1,1,2)}$: ***Reducción a la unidad*** que ya fue definida en la OM de los textos escolares.

Como ya lo habíamos manifestado, es importante señalar que esta técnica no considera el uso de razones heterogéneas, pues la expresión a/a´ se podría interpretar como tal. Aquí a´ es considerado, según García (2005), como un escalar y a/a´ es la “a´-ésima parte” de la cantidad a’, que pertenece a la magnitud M.

Asimismo, aunque no lo indique el Manual para el docente, es importante señalar que la técnica es eficiente a nivel tecnológico mientras se trabaje con múltiplos y divisores pues de lo contrario nos encontraríamos con expresiones como la siguiente: Si se entregaron 200 afiches y asistieron 654 personas, entonces por afiche asistirán 3,27 personas. (Adaptado de Bosch, 1994)

Festividades peruanas

Taller matemático

Crianza de toros (Manual para el docente 2, p. 295)

Para la crianza de un toro por un periodo de 4 años se gasta S/ 15 700. ¿Qué cantidad de dinero se utilizó para la crianza de 20 toros?

- Utiliza varias razones e identifica los medios y extremos para resolver.
- ¿Qué dato no es indispensable?
- ¿Cuál es la razón?

- Escribe la proporción para conocer el gasto de 20 toros.
- Resuelve el problema

2. Alimentación de toros (problema de traducción compleja) (Manual para el docente 2, p. 295)

En un establo, 20 toros se alimentan con 5 Kg de pasto. Si trasladan 5 toros a otro lugar, ¿cuántas porciones consumirán los que quedan?
- ¿Qué magnitudes intervienen en la solución del problema?
- ¿Qué clase de proporción existe entre las dos magnitudes?
- Resuelve el problema

Cinco camiones viajan a 40 Km/h y se demoran 4 horas para trasladar a 20 toros a otro lugar. Si se desea llegar 2 horas antes de lo previsto, ¿a qué velocidad deben ir los camiones para llegar a tiempo?
- ¿Qué datos son indispensables para la solución?
- ¿Qué magnitudes intervienen en la solución del problema?

Resuelve el problema.
- ¿Qué diferencias encuentras entre este problema y el anterior?
- ¿Qué competencia desarrollaste al resolver el problema?

3. Entrenamiento de toros (Manual para el docente 2, p. 296)

Se sabe que siete personas tardan 4 horas en alimentar 80 toros. ¿Cuántas horas tardarán 2 personas menos en alimentar a 100 toros?
- Escribe las magnitudes que existen en el problema
- Identifica las proporcionalidades correspondientes
  - A menos personas, más horas demorarán en alimentar a los toros: ____________________________
  - A más toros, más horas se necesitan para alimentarlos: _________________________________
- Resuelve
- Formen equipos de trabajo e intercambien sus problemas
- Verifiquen las respuestas y escriban en la tabla los aciertos y errores que encontraron en su solución.

Aciertos	Errores

- Plantea un problema de proporcionalidad.

En las situaciones planteadas, se utiliza las técnicas $\boldsymbol{\tau}_{(1,1,3)}$***: Regla de tres simple directa*** y $\boldsymbol{\tau}_{(1,2,2)}$***: Regla de tres simple inversa*** que ya fueron definidas en la OM del texto escolar.

En la situación de "entrenamientos de toros" se propone trabajar con más de dos magnitudes proporcionales. Sin embargo, el Manual para el docente no es explícito en la técnica a usar para resolver el problema, solo expresa la respuesta. Es posible que utilice la técnica $\boldsymbol{\tau}_{(1,3,1)}$***: Regla de tres compuesta*** que sí se trabajó y describió en el texto escolar de segundo de secundaria.

Operadores móviles (Manual para el docente 2, p. 318)
Taller matemático

Armando redes telefónicas (problema de traducción simple) (Manual para el docente 2, p. 318)

Para armar una red telefónica en Otuzco, provincia de la región La Libertad, la operadora contrató a cinco hombres, quienes tardaron 48 días en terminarla. ¿Cuántos días habrían tardado 20 hombres en armar la red telefónica?
- ¿Qué magnitudes intervienen en el problema?
- Elabora una tabla considerando que el doble de hombres tardará la mitad del tiempo; el triple, un tercio, y así sucesivamente.
- ¿Qué sucede con las cantidades de las magnitudes?
- ¿Qué relación existe entre las dos magnitudes?
- ¿Cómo obtienes la constante de proporcionalidad? ¿Cuál es?
- Realiza un gráfico

1. Usuarios telefónicos (problema de traducción compleja) (Manual para el docente 2, p. 319)
Una compañía telefónica al ser concebida proyecta tener 1 200 000 usuarios. Para dar atención a sus clientes debe crear centrales de atención. Debido a las investigaciones realizadas, se sabe que en una central podrá atender a 8000 usuarios diariamente. Por lo tanto, si pusiera una central de atención al cliente, se demoraría 150 días si tuviera que atender a todos, y 75 días si implementase 2 centrales. ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el número de días que se demora en atender a todos los clientes y el número de centrales de atención al cliente?

Comprendo el problema
- ¿Qué datos nos proporciona el problema?

Diseño la estrategia
- Reúnete con tres compañeros; discutan las posibles ideas para resolver el problema y registren en una tabla los datos referentes a la relación entre las magnitudes mencionadas.

Aplico la estrategia
- Entre dos compañeros partan de dos a más datos sencillos
- Agreguen en la tabla de la derecha, en la columna del número de días para atender a todos los clientes, los valores que faltan y deduzcan el número de días que se demorarían en atender a los usuarios proyectados.

Número de centrales de atención	Número de días para atender a todos los clientes
1	150
2	
3	
4	
5	
10	

- Escriban una expresión matemática que generalice lo que se requiere conocer.
- Escriban el tipo de relación matemática que se presenta entre las dos magnitudes involucradas en el problema.
- Con la expresión definida completa la siguiente tabla.

Número de centrales de atención	Número de días para atender a todos los clientes
6	
8	
20	
25	

- Comprueba a través de una gráfica si la relación de las magnitudes es la señalada inicialmente.

2. Atención al cliente (Situaciones problemáticas realistas) (Manual para el docente 2, p. 320)

Un móvil recorre la distancia de 36 m a velocidades diferentes, tal como lo muestra la tabla. Determina si la relación entre la velocidad y el tiempo empleado para recorrer dicha distancia es directamente proporcional: luego realiza su representación gráfica.

d/t = Velocidad (v)	Tiempo en segundos
36 m/s	1 s
18 m/s	2 s
12 m/s	3 s
9 m/s	4 s

- ¿Qué relación existe entre las dos magnitudes?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
- Grafica y comprueba si la proporcionalidad es inversa

Las situaciones presentadas corresponden a problemas sobre regularidad, equivalencia y cambio. En principio, se solicita identificar qué relación existe entre las magnitudes que intervienen a través de la constante de proporcionalidad inversa, para ello la técnica $\boldsymbol{\tau}_{(2,2)}$ es suficiente. La representación de los estados de las magnitudes en el plano cartesiano propuesta en el Manual para el docente permite reconocer la variación entre los datos de una proporcionalidad inversa.

Un aspecto importante a remarcar es que en el Manual no se hace una aclaración de la gráfica de la curva ya que no solo está señalado por puntos, sino que estos están unidos por un trazo, pudiendo dar a entender que los elementos del dominio están representados por los números reales, cuando no siempre ocurre así. Por ejemplo, en el problema "armando redes telefónicas", el dominio corresponde al número de hombres, por lo que estaría definido por los números naturales.

En las orientaciones metodológicas, se indica que se debe tener en cuenta que la gráfica entre dos magnitudes inversamente proporcionales nunca corresponde a una línea recta ni tampoco a curva que corte alguno de los ejes, es decir, ni el conjunto de partida ni el de llegada podrán considerar al cero como elemento. Este punto es importante pues permitirá al estudiante entender el significado de la expresión $f(x)= k/x$, $k \neq 0$

Cuánto más, menos

Taller matemático

1. Concentración de un fármaco (Manual para el docente 2, p. 330)
A una mujer internada en un hospital le ponen una inyección de penicilina. Su cuerpo va disolviendo gradualmente la penicilina de modo que, una hora después de la inyección, solo el 60% de la penicilina permanece activa.
Esta pauta continúa: al final de cada hora solo permanecerá el 60% de la penicilina presente al final de la hora anterior, Supón que a la mujer se le ha administrado una dosis de 300 miligramos de penicilina a las 8 de la mañana.
Pregunta 1
Completa esta tabla escribiendo la cantidad de penicilina que permanecerá activa en la sangre de la mujer a intervalos de una hora desde las 08:00 hasta las 11.00 horas.
Pregunta 2
Pedro tiene que tomar 80 mg de un fármaco para controlar su presión sanguínea. El siguiente grafico muestra la cantidad inicial del fármaco y la cantidad que permanece activa en la sangre de Pedro después de uno, dos, tres y cuatro días.

- ¿Qué cantidad de fármaco permanece activa al final del primer día?

2. Consumo telefónico en minutos (Manual para el docente 2, p. 331)
Cierta operadora peruana calcula el valor de cada minuto consumido por cada usuario, dividiendo 30 por la cantidad de minutos. Es así que se puede representar con la expresión algebraica $f(x)=30/x$. ¿Es esta una representación de proporcionalidad inversa?
¿Qué se desea demostrar?
Junto con un compañero analiza la información que proporciona la expresión $f(x) = 30/x$; compara con las características que corresponden a la proporcionalidad inversa y responde.

a. La gráfica de una función proporcionalidad inversa es decreciente si x es
b. A medida que los valores de x aumentan, los valores de y
c. A medida que los valores de y aumentan, los valores de x
d. Si elaboramos una tabla de datos, al multiplicar el valor de x con el valor de y, el resultado siempre es el

Lo que puedes demostrar es que para cualquier valor positivo que pueda tomar x, el valor de y siempre va disminuyendo. Registra estos valores en una tabla de datos; multiplica los valores de cada pareja de datos, verifica si siempre se obtiene el mismo resultado al multiplicarlos y, por último, representa esta tabla de datos en un plano cartesiano y confirma si corresponde a la gráfica de una función de proporcionalidad inversa; así:

1. Completa la siguiente tabla para la expresión $f(x) = 30/x$

x	f(x)
10	
15	
20	
25	
30	
40	
50	
60	

2. Copia la tabla anterior y multiplica cada pareja

x	f(x) = 30/x	Multiplicación
10		
15		
20		
25		
30		
40		
50		
60		

3. Observa la columna de la tabla anterior y verifica si se obtuvo siempre el mismo valor. En caso de que la respuesta sea afirmativa, escribe el resultado obtenido en la columna 3.
4. Representa en el plano cartesiano los datos de la tabla
5. ¿La gráfica obtenida en la actividad anterior corresponde a una función de proporcionalidad inversa?

3. Redes telefónicas (Manual para el docente 2, p. 333)

- En una superficie rectangular de 24 m^2 de pared se debe hacer una instalación de equipos para mejorar la calidad en la señal telefónica. Los técnicos no se ponen de acuerdo en las medidas que tendrán las dimensiones de dicha superficie. ¿Qué valores enteros podrían tener las longitudes del largo y ancho de esta superficie? Representa todos los posibles valores mediante una gráfica.

Durabilidad de las baterías en los celulares (Manual para el docente 2, p. 334)

La tecnología ha hecho del celular un dispositivo versátil, pues además de servir para comunicarse entre personas salvando distancias, en la actualidad ofrece una gama de aplicaciones. Pero si hablamos de la batería que utiliza, debemos decir que, si bien es cierto que ha evolucionado, no lo ha hecho al mismo ritmo de los teléfonos celulares, ya que el tiempo que dura su carga sigue siendo limitante.

Los avances en cuanto a batería se refiere han logrado eliminar el efecto memoria, por el cual antes, la primera vez había que cargarla por algunas horas hasta alcanzar el 100% de carga. Los fabricantes de baterías han sustituido materiales y han creado circuitos inteligentes que funcionan en el momento de la carga.

Iniciemos

Responde las siguientes preguntas

- Enumera algunas aplicaciones que en la actualidad ofrecen los teléfonos celulares.
- Un celular usado ha despreciado su valor hasta lograr venderse a la mitad de su precio. Escribe el precio actual en función del precio inicial.
- Investiga en qué consiste el efecto memoria que se producía en las baterías de celulares y compártelo en clase.

Resolvamos

Planteo problemas de acuerdo con el contexto

Una empresa productora de baterías de 3,7 voltios presenta a sus clientes la siguiente información gráfica sobre la descarga y carga de uno de sus productos. Determina el tipo de función y la expresión matemática que modela la situación.

Coloca en los gráficos los siguientes puntos con sus coordenadas.

Gráfico 1 (1;2) (2;1) (4;0,5) Gráfico 2 (2;37/30) (4;37/15)

Reconozco el principal problema y trazo un plan

- Reúnete con tres compañeros; discutan las posibles ideas para resolver y regístrenlas.

Experimento para resolver el problema

- Contesta
  a. Por la forma de los gráficos, ¿qué función representa cada situación?
  b. ¿Qué pretende explicar el productor de baterías con el segundo gráfico?
- Toma los valores de las coordenadas de los puntos de los gráficos y organízalos en las tablas.

Gráfico 1	
x	y

Gráfico 2 Primera parte	
x	y

Gráfico 2 Segunda parte	
x	y

- Contesta
  a. ¿Qué sucede cuando multiplicas los valores de x con los valores de y, respectivamente, de la primera tabla?
  b. ¿Qué sucede cuando divides los valores de x entre los valores de y, respectivamente, de la segunda tabla?
  c. ¿Qué sucede con el valor de y para cualquier valor de x en la tercera tabla?

Propongo una expresión matemática

- Únete con un(a) compañero(a); comparen sus respuestas y determinen las expresiones matemáticas para cada situación.

Gráfico 1	Gráfico 2

Valido la solución del problema

- Completa la tabla y realiza el gráfico para otros valores propuesto, según la relación f(f)= 2/x

Gráfico 3	
x	y
0,5	
8	
10	

Las situaciones presentadas corresponden a problemas sobre regularidad, equivalencia y cambio, y puntualmente a la representación en el plano cartesiano de magnitudes inversamente proporcionales expresadas como funciones de la forma *f(x)=k/x*. Según García (2005), esta interpretación correspondería a una modelización funcional de sistemas lineales inversos

La técnica $\tau_{(4,2)}$ ayuda a interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de inversa.

$\tau_{(4,2)}$ Expresar como función de proporcionalidad inversa

Paso 10: Verificar que las magnitudes sean inversamente proporcionales

Paso 25: Formar productos con parejas de valores correspondientes: a.a´; b.b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad inversa

Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente

Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario

Consideramos importante señalar un error en las orientaciones metodológicas en el Manual para el docente. Se afirma que “la gráfica de una función de proporcionalidad inversa es creciente si x es mayor que cero”. Esto podría causar confusión en los docentes y en los estudiantes, recordemos que la organización a enseñar incide de manera fundamental en la OM a enseñar y en la OM aprendida.

A continuación, presentamos la tabla 29 en donde se puede identificar la presencia de cinco tareas en el cuaderno de trabajo.

Tabla 29: Tareas identificadas en el Manual para docentes del cuaderno de trabajo de segundo de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	PROBLEMAS	CANTIDAD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	Problema (p. 286) Problema (p. 287) Problema (p. 289) Problema (p. 295)	4
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes inversamente proporcionales	Problema 2 (p. 295)	1
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido de más de dos magnitudes proporcionales	Problema 3 (p. 296)	1
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	Problema 1A (p. 282)	1
	Tarea ($t_{2,2}$): Identificar magnitudes inversamente proporcionales en una tabla	Problema 2B (p. 282) Problema 2 (p. 284) Problema 3 (p. 284) Problema (p. 318) Problema (p. 319) Problema (p. 320)	6
	Tarea ($t_{2,3}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales a través de un discurso coloquial	Problema (p. 278)	1
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa	Problema 1 (p. 330) Problema 2 (p. 331) Problema 3 (p. 333) Problema (p. 334)	4

Autoría propia

En la tabla 30 observamos una fuerte presencia de uso de tabla como ostensivo en torno a la proporcionalidad. Asimismo, la representación cartesiana de magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales se hace presente en el Manual para el docente de segundo de secundaria. Es importante notar el uso de las flechas paralelas y horizontales para indicar la relación entre medidas de cantidades de magnitudes.

Tabla 30: Ostensivos identificados en el Manual para docentes (II de Secundaria)

PROBLEMAS RESUELTOS	Ostensivos									
	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	a:b :: c:d	y = kx y=k/x	f(x) =mx	x :	→ →	Oral
Problema (p. 286)	✓	✓							✓	✓
Problema (p. 287)		✓							✓	
Problema (p. 289)	✓				✓				✓	
Problema (p. 295)	✓				✓					
Problema 2 (p. 295)	✓	✓			✓					
Problema 3 (p. 296)	✓	✓								
Problema 1A (p. 282)		✓	✓							
Problema 2B (p. 282)		✓	✓							✓
Problema 2 (p. 284)		✓	✓							
Problema 3 (p. 284)		✓	✓							
Problema (p. 318)		✓	✓	✓						
Problema (p. 319)		✓		✓						
Problema (p. 320)		✓								
Problema (p. 278)		✓								✓
Problema 1 (p. 330)		✓		✓						
Problema 2 (p. 331)		✓		✓			✓			
Problema 3 (p. 333)				✓						
Problema (p. 334)		✓		✓			✓			

Autoría propia

4.4.3 Manual para el docente del cuaderno de trabajo de tercero de secundaria

Envasadora de leche (Manual para el docente 3, p. 66)

La empresa de lácteos San Benito cuenta con cinco máquinas que envasan 1000 L de leche en 8 horas. Luego de varios días de trabajo arduo, una de las máquinas se malogró. El dueño de la empresa quiere saber cuánto tiempo tardarán en envasar los 1000 L de leche las máquinas restantes, la mitad de ellas y la cuarta parte. Además, quiere conocer el tiempo que demorarán tres máquinas en envasar 4000 L de leche.
Organizamos la información:
¿A qué se dedica una empresa de lácteos? ¿Qué sucede si se disminuye el número de máquinas para envasar la leche? ¿Qué tipo de relación se presenta entre el número de máquinas y el número de horas que estas demoran en envasar la leche?

1. ¿Cuál es el tema de estudio?

2. ¿Qué interrogantes puedes plantear a partir de la situación presentada? ¿Cuál sería la pregunta central?
3. ¿Cuáles son los conceptos que debes conocer para guiar tu razonamiento?
4. ¿Qué necesitas determinar, principalmente, para avanzar en la resolución de la situación problemática?
   Con relación a los valores de la cantidad de horas y el número de máquinas, ¿existe alguna observación importante?
5. ¿Qué definiciones o fórmulas debes considerar para resolver la situación?
6. ¿Cómo representarías los datos para facilitar la respuesta a tus interrogantes?
7. ¿Qué tipos de proporcionalidad hay?
8. ¿Qué puedes afirmar del tiempo en que se envasan 1000 litros de leche? ¿Y del tiempo en que se envasan 4000 litros? ¿Qué tipo de relación se presenta? ¿Qué tipo de relación existe entre lo siguiente?
   a) El número de litros y el tiempo de envase.
   b) El número de máquinas y el tiempo de envase.

La intención de la situación es identificar una relación de proporcionalidad inversa y determinar un término desconocido con ayuda de la *técnica* $\boldsymbol{\tau}_{(1,2,2)}$***: Regla de tres simple inversa*** que ya la definimos en la OM de los textos escolares.

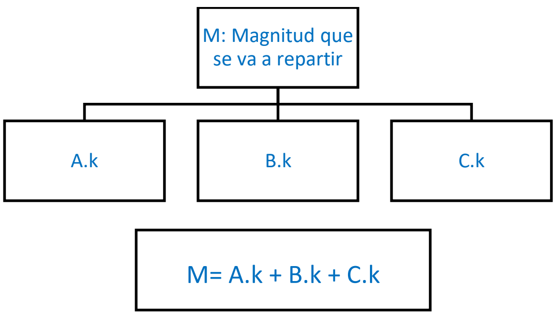
Aguas residuales (Manual para el docente 3, p. 68)

Se quiere construir una depuradora de aguas residuales que dé servicio a tres pueblos: Alameda, Buenavista y Campiña. El costo del proyecto es de S/ 250 000. El 20% del gasto lo cubrirá una subvención estatal; el 40%, una organización internacional; y el resto se distribuirá entre los tres municipios. Además, se ha decidido que el reparto se realizará de manera directamente proporcional al número de familias de cada pueblo. Se sabe que la población de cada uno de los tres lugares es de 250; 180 y 70 familias, respectivamente.
¿Cómo beneficia a la población el uso de aguas residuales? ¿Qué cantidad debe aportar cada uno de los pueblos? ¿Cuánto debe aportar cada familia?

1. ¿Cuál es el hecho o acontecimiento?
2. ¿Qué interrogantes puedes extraer del hecho dado? ¿Cuál de ellas sería la pregunta central?
3. ¿Qué conceptos debes reconocer para guiar tu razonamiento?
4. ¿Qué necesitas determinar en la situación problemática?
   ¿Cómo representa los datos para resolver el problema?
   ¿Qué datos son útiles para resolver el problema?
5. ¿Qué conocimiento aplicarías para resolver el problema?
6. Plantea la situación problemática con los datos que se tienen y da la solución.
7. Escribe en tu cuaderno un modelo de reparto a partir de las actividades.
8. ¿A qué conclusiones puedes llegar?

La situación corresponde a la tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados, para la cual se utiliza técnica: $\boldsymbol{\tau}_{(3,2)}$ ***Reparto directo.***

En las sugerencias metodológicas del Manual para el docente se considera el siguiente esquema para evitar que los estudiantes puedan presentar dificultades.



El esquema describe la $\tau_{(3,2)}$que ya habíamos definido en nuestra OM de los textos escolares.

Un aspecto importante a señalar en cuanto a articulación es que en el texto escolar de tercero de secundaria no se propone situaciones de reparto proporcional pero sí en el cuaderno de trabajo. No es común pues es esperado que lo desarrollado en el cuaderno de trabajo sea un afianzamiento de lo desarrollado en el texto.

Polos para exportación (Manual para el docente 3, p. 70)

Mariana tiene una fábrica de confección de polos para exportación. Ella tiene que atender un pedido de polos para un encuentro mundial de jóvenes. Al iniciar la jornada de trabajo, Mariana comprueba que 5 operarios de igual eficiencia remallan 3600 polos en 6 horas. Ahora, ella desea conocer cuántos polos remallarán 12 operarios de igual eficiencia que los anteriores en 8 horas.

Nos preguntamos previamente:

¿Has participado alguna vez en un encuentro de jóvenes? ¿Qué instituciones lo organizan? ¿Qué magnitudes se relacionan en la situación? ¿Son directa o inversamente proporcionales?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿Para qué sirve conocer que los operarios tienen igual eficiencia?
3. ¿Qué debes averiguar?
4. ¿Qué plan o estrategias seguirás para resolver la situación?
   a) Reducir la cantidad
   b) Realizar un gráfico
   c) Elaborar tablas de proporcionalidad
   d) Razonar lógicamente
5. Si la cantidad de operarios aumenta, ¿la cantidad de producción aumenta o disminuye?
6. Determina la cantidad de polos que se remallan. Para ello, completa la tabla mediante la reducción de la unidad.

¿Qué sabemos?	5 operarios remallan 3600 polos en 6 horas.
¿Cuántos polos remalla un operario en una hora?	
¿Cuántos polos remallarán 12 operarios en 8 horas?	

7. Usa la tabla de proporcionalidad para comprobar la situación problemática mediante la relación entre las magnitudes.
8. Aplica el proceso de resolución y comprueba si es válido el resultado.
9. Responde la pregunta de la situación.
10. Compara tus procedimientos y resultados con los de tu compañero (a). ¿Son similares? Si no lo son, ¿a qué crees que se deba? Identifica el error y corrígelo.
11. Al observar otro grupo de operarios de igual eficiencia, Mariana comprueba que 6 de ellos remallan 4000 polos en 5 horas. ¿Cuántos polos remallarán 10 operarios en 9 horas?

Legado inca (Manual para el docente 3, p. 72)

Una de las culturas más representativas del Perú es la inca, la cual nos ha dejado a través de la historia una gran variedad de costumbres y enseñanzas, como el tejido artesanal.

La señora Rosales tiene una empresa textil sonde se elaboran guantes y ponchos para exportación. Si 5 operarios de igual rendimiento tejen 3600 pares de guantes en 6 días, ¿cuántos pares de guantes tejerán 7 operarios de igual rendimiento que los anteriores en 8 días?

Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad

¿Qué otras enseñanzas nos dejó la cultura inca? ¿Qué características puedes observar en los tejidos de la foto? ¿Cuántas magnitudes se pueden distinguir en la situación propuesta? ¿Qué es una magnitud? ¿De qué trata la situación?

1. ¿Cuántas magnitudes reconoces en la situación problemática?
2. ¿Cuáles son estas magnitudes?
3. ¿Qué tienes que averiguar?
4. ¿Qué harás primero?
5. ¿Qué estrategias usarás para resolver el problema?
6. Si la cantidad de operarios aumenta, ¿la cantidad de producción de guantes aumenta o disminuye?
7. Si la cantidad de días disminuye, ¿la cantidad de producción de guantes con la misma cantidad de operarios aumenta o disminuye?
8. Cuando ambas magnitudes aumentan, ¿de qué tipo de magnitudes se trata?
9. Completa la tabla con las magnitudes y los datos numéricos de la situación problemática.
10. Plantea y resuelve la situación planteada.
11. Responde la pregunta de la situación problemática.

12. Verifica utilizando la regla práctica.

Número de operarios	Número de días	Pares de guantes
5	6	3600
7	8	x

Máquinas para conservas de pescado (Manual para el docente 3, p. 74)

El mar peruano posee una inmensa variedad de peces que convierten a nuestro país en uno de los territorios más ricos en cuanto a pesca se refiere.
En cierta fábrica, tres máquinas iguales producen 1800 latas de conserva de pescado en 6 horas. ¿Cuántas latas de conserva de pescado producirán cinco de estas máquinas si cada una trabaja 8 horas?
Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad
¿Qué especies de peces abundan más en nuestro mar peruano? ¿Cuántas magnitudes se distinguen en la situación problemática? ¿Habrá una relación entre estas magnitudes? ¿De qué trata la situación?

1. ¿Qué datos se conocen?
2. ¿Qué forma tienen las latas de conserva de pescado?
3. ¿Qué tienes que averiguar?
4. ¿Qué harás primero?
5. ¿Qué estrategias usarás para resolver la situación?
6. Si la cantidad de máquinas aumenta, ¿la cantidad de producción aumenta o disminuye?
7. Cuando ambas magnitudes aumentan o disminuyen, ¿de qué tipo son?
8. Cuando una magnitud aumenta y la otra disminuye, ¿de qué tipo son?
9. Determina la producción de conservas de pescado. Para ello, completa la tabla mediante la reducción a la unidad.

¿Qué sabemos?	
¿Cuántas latas produce una máquina en 1h?	
¿Cuántas latas producirán 5 máquinas en 8h?	

10. Completa la tabla y resuelve la situación problemática mediante la relación entre magnitudes. Escribe el proceso de resolución.

N.° de máquinas	N.° de latas	N.° de horas
↑		↑

11. ¿Qué tipo de proporcionalidad tienen el número de máquinas con el número de horas si se mantiene constante la producción de latas?
12. Comprueba si el resultado es válido mediante la regla práctica para magnitudes compuestas.

Campamento de scouts (Manual para el docente 3, p. 80)

Un grupo scout organiza un campamento al que asistirán 40 jóvenes. Ellos llevarán víveres para 18 días, lo cual significará un gasto total de S/ 600. Si a última hora el número de participantes aumenta en 14 y el gasto en víveres aumenta a S/ 720, ¿para cuántos días alcanzarán los víveres?

Resolvemos paso a paso:

¿Qué tipo de magnitudes proporcionales se mencionan en la situación? ¿Por qué? ¿Cuántos jóvenes asistirán al campamento? ¿Cómo determinarás para cuántos días alcanzarán los víveres?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿Qué magnitudes intervienen?
3. ¿Qué debemos calcular?
4. ¿Qué relación existe entre el número de jóvenes que asisten al campamento y la cantidad de soles que gastarán en víveres?
5. ¿Qué relación existe entre el número de jóvenes y el tiempo que durarán los víveres?
6. ¿Cuáles son los métodos de resolución para esta situación?
7. ¿Qué estrategia te ayudará a calcular lo que te piden?
    a) Hacer un gráfico
    b) Elaborar una tabla
    c) Razonar lógicamente
8. Completa la tabla y resuelve.

¿Qué sabemos?	40 scouts, invirtiendo S/ 600, tienen víveres para 18 días.

¿Cuántos soles gasta un scout en víveres para un día?	
¿Para cuántos días les alcanzarán los víveres	

9. Da respuesta al problema.
10. Comprueba tu respuesta con el otro método. Elabora un cuadro.

N.° de scouts	Inversión (S/)	Tiempo (días)

11. ¿A qué conclusión llegaste?
12. Supón que a partir de las primeras condiciones se hubieran retirado 4 scouts y los víveres alcanzaran para 16 días. ¿Cuál sería la inversión?

Alimento para vacas (Manual para el docente 3, p. 82)

Don Jacinto se dedica a la crianza de ganado vacuno en Oxapampa, región Pasco. Él tiene 40 vacas que consumen 4220 kg de follaje a la semana. Por motivos de viaje, les pide a sus dos hijos que se encarguen de alimentar a las vacas durante 15 días. Para ello, les indica que se repartan el ganado equitativamente. ¿Cuántos kilos de follaje utilizará cada hijo para alimentar el número de vacas que le han encargado?

Manos a la obra:

¿Cuántos kilogramos de follaje consumirá la mitad del ganado? ¿Qué conceptos matemáticos se van a trabajar? ¿Será útil representar la situación con algún recurso organizativo?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿Qué cantidad de follaje consume cada vaca a la semana? ¿Y al día?
3. ¿Cuántas vacas tendrá a su cargo cada hijo? ¿Durante cuánto tiempo?
4. ¿Qué tipo de recurso organizativo se puede utilizar en el proceso de solución?
5. ¿Qué relación hay entre el número de vacas y la cantidad de follaje? ¿Y entre la cantidad de follaje y el número de días? Explica.
6. ¿Cómo representarías la relación para calcular el consumo diario de follaje por vaca? Aproxima a valores enteros.
7. Organiza los datos y calcula la cantidad de follaje que necesita cada hijo para alimentar al número de vacas que tiene a su cargo. Aproxima a valores enteros.
8. ¿Qué concepto matemático se ha representado esquemáticamente?
9. Describe el procedimiento que seguirás para resolver la situación.
10. ¿Cuántos kilos exactos de follaje necesitará cada hijo para alimentar al ganado que tiene a su cargo? ¿Y en total?
11. Uno de los hijos consigue 600 kg de follaje para alimentar al ganado que tiene a su cargo. Según el número total de vacas y la cantidad de follaje que consumen en una semana, ¿para cuántos días le alcanzará? Aproxima a valores enteros.
12. ¿Qué porcentaje de follaje le falta conseguir al hijo que solo cuenta con 600 kg?

La pachamama (Manual para el docente 3, p. 85)

El culto a la pachamama es una costumbre de nuestros antepasados incas. De esa manera, rendían homenaje a la tierra por sus frutos luego de la cosecha. Esta tradición aún persiste en nuestra sierra central. Supón que 20 campesinos trabajando 8 horas diarias durante 9 días realizan 3/8 de la siembra de un terreno.

1. ¿Cuáles son las magnitudes proporcionales del problema?
2. ¿Cuántos campesinos más será necesario contratar para terminar la siembra en 10 días trabajando 6 horas diarias?
3. ¿De qué otra forma se puede resolver el problema? Explícale a tu compañero.

Nos familiarizamos con la situación:

¿Qué es la pachamama? ¿Qué magnitudes puedes identificar en esta costumbre?

El gran número de situaciones presentadas pretenden que los alumnos apliquen la técnica ***de la regla de tres compuesta*** pero partiendo del análisis de la reducción a la unidad. Es decir, con preguntas orientadoras se pretende que el estudiante analice la relación de las magnitudes dos a dos para luego aplicar la regla de tres compuesta. Al igual que en el análisis de los textos escolares la tabla de proporcionalidad se convierte en un recurso importante para esta técnica.

Pintado en color (Manual para el docente 3, p. 76)

El gerente de la constructora Vivienda Segura desea obtener una constante que represente la producción de un grupo de pintores igual de eficientes al pintar cierto número de metros cuadrados en una determinada cantidad de días. Él ha podido recoger los siguientes datos expresados en ternas ordenadas:

(N.° de días; área pintada en m^2; N.° de pintores):

(1; 50; 1), (2; 100; 2), (2; 200; 2), (3; 150; 1), (3; 450; 3), (2; 400; 4), (2; 300; 3), (2; 1000; 10), (2; 600; 6), (4; 800; 4), (4; 600; 3), (6; 600; 2). Calcula el valor de dicha constante.

Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad:

¿Qué clase de magnitudes se plantean en la situación? ¿Qué tipo de gráfico permitirá organizar los datos? ¿Qué conocimientos son necesarios para resolver este problema? ¿De qué trata la situación?

1. En esta situación, ¿qué significa (2; 300; 3)?
2. ¿Qué debes calcular?
3. ¿Qué debes hacer para obtener lo que te piden?
4. ¿Qué estrategia utilizarás para organizar los datos de la situación?
   a) Elaborar una tabla
   b) Razonar lógicamente.
   c) Hacer una ecuación
5. Representa en una tabla la relación existente entre las magnitudes días y m^2.
6. ¿Cómo determinas la relación entre el número de días y el área pintada?
7. De manera similar, ubica y sombrea en la tabla los datos que comparen el área pintada y el número de pintores (manteniendo constante el número de días), así como el número de días y el número de pintores (manteniendo constante el área pintada). ¿Qué nuevas relaciones encuentras?

Días												
m^2												
Pintores												

8. Determina la relación entre las tres magnitudes.
9. Comprueba que la relación hallada es cierta para cualquier terna de datos.

La situación presentada pretende establecer la constante de proporcionalidad de tres magnitudes proporcionales.

Es importante señalar que en el texto escolar de tercero de secundaria no se encuentra alguna tarea similar, es por ello que establecemos:

Tarea ($t_{2,4}$): Determinar la constante de proporcionalidad de más de dos magnitudes en una tabla

$\boldsymbol{\tau}_{(2,4)}$

Paso 34: Representar las magnitudes en una tabla

Paso 35: Determinar la relación de dos magnitudes, manteniendo constante las otras

Paso 36: Establecer el producto de las magnitudes inversamente proporcionales

Paso 37: Establecer el cociente de las magnitudes directamente proporcionales

Paso 38: Determinar la relación entre todas las magnitudes y determinar la constante de proporcionalidad. La constante permitirá comprobar o determinar un término desconocido

La receta secreta (Manual para el docente 3, p. 78)

La mamá de Luana preparará unas deliciosas galletas con esta receta secreta.

Ingredientes	Preparación
• 750 g de harina • 750 g de azúcar • 450 g de mantequilla • 5 huevos • 2 ½ cucharaditas de vainilla • 1 pizca de sal	Se baten el azúcar y la mantequilla. Luego, se añaden los huevos, la vainilla y la sal hasta conseguir una masa homogénea. Se agrega poco a poco la harina, hasta obtener una pasta consistente que se extiende con un rodillo sobre la superficie espolvoreada de harina. Se cortan las galletas con ayuda de la boca de un vaso y se meten al horno a 180 °C durante un cuarto de hora.

La mamá de Luana sabe que con esta receta puede obtener dos cajas grandes de galleta, pero como recibirá la visita de amigos, debe preparar una pequeña cantidad. Si solo utilizara dos huevos, ¿qué cantidad de cada uno de los demás ingredientes necesitará?

Resolvemos paso a paso:

¿La cantidad de cada ingrediente es importante para una buena preparación? ¿Con menos cantidad de cada ingrediente se obtendrán más o menos galletas? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

1. ¿Qué proceso se debe aplicar para determinar la cantidad necesaria de cada ingrediente para la preparación de las galletas para los amigos?
2. ¿Qué información se requiere para determinar la cantidad necesaria de cada uno de los demás ingredientes?
3. ¿Qué plan o estrategia seguirás para resolver la situación?
   a) Generalizar
   b) Razonar lógicamente
   c) Hacer un gráfico
4. Determina la razón entre la cantidad de huevos de la receta original y la nueva receta.
5. Efectúa los cálculos que te permitan conocer la cantidad necesaria de cada ingrediente.
6. Completa la tabla con las cantidades necesarias de cada ingrediente.

INGREDIENTES		Harina/ Azúcar	Mantequilla	Vainilla	Sal	Huevos
CANTIDAD	Receta actual	750 g	450 g	2,5 cucharaditas	1 pizca	5
	Receta modificada					

7. La mamá de Luana preparará galletas para la familia. Si utilizara 150 g de azúcar y 150 g de harina, ¿qué cantidad de los otros ingredientes usaría? Completa la tabla.

INGREDIENTES	Harina/azúcar	Mantequilla	Vainilla	Sal	Huevos
CANTIDAD	150 g				

8. ¿Cómo son las cantidades correspondientes a la sal?
9. Si la cantidad de cada ingrediente aumenta, ¿la cantidad de galletas también aumenta?
10. ¿Qué tipo de magnitudes son la cantidad de galletas y la cantidad de ingredientes?

La situación propuesta tiene pretende que los estudiantes calculen las medidas para la receta modificada por lo que se utilizará la técnica $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{1,1,1})}$ ***Amplificar o simplificar en el mismo espacio de medida.*** Corresponde a la modelización discursiva según García (2005) y al modelo inter o multiplicativo escalar.

Es necesario indicar que el Manual para el docente tiene por intención que el estudiante pueda trabajar con cantidades aproximadas, en algunas situaciones del contexto, por ejemplo la medida de sal.

Ruedas dentadas (Manual para el docente 3, p. 84)

Las bicicletas tienen engranajes unidos por cadenas. Al hacer girar el pedal, el plato mayor gira y, mediante la cadena, se hace girar a los otros platos más pequeños produciendo movimiento en la rueda trasera.

1. En la tabla se muestran dos pares de valores correspondientes a un engranaje formado por 2 ruedas de 12 y 24 dientes.

Cantidad de dientes	24	12
Cantidad de vueltas	1	x

2. Si en una bicicleta el plato mayor tiene 42 dientes, y el menor, 14 dientes, ¿cuántas vueltas tiene que girar el pedal para que la rueda trasera dé 6 vueltas?
3. ¿Cuál de los dos platos gira más rápido? ¿Cuántas veces más rápido? ¿Qué tipo de relación se puede observar entre las magnitudes comparadas?

Nos familiarizamos con la situación:

¿Qué sentido tendrá el giro de la rueda motora? Supón que el engranaje mayor tiene 65 dientes, y el menor, 15 dientes. ¿Cuántas vueltas dará la rueda menor si la mayor da 3 vueltas?

Para esta situación el Manual para el docente sugiere el trabajo con varias estrategias de solución.

Según las siguientes técnicas trabajadas en la OM de los textos escolares: $\boldsymbol{\tau_{(1,2,3)}}$***Reducción a la unidad para magnitudes inversamente proporcionales y*** $\boldsymbol{\tau_{(1,2,2)}}$***: Regla de tres simple inversa.***

A continuación, presentamos la tabla 31 en donde se puede identificar la presencia de cinco tareas en el cuaderno de trabajo de tercero de secundaria.

Tabla 31: Tareas identificadas en el Manual para docentes del cuaderno de trabajo de tercero de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	PROBLEMAS	CANTIDAD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	Problema (p. 78)	1
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	Problema (p. 66) Problema (p. 84)	2
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	Problema (p. 70) Problema (p. 72) Problema (p. 74) Problema (p. 80) Problema (p. 85)	5
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,4}$): Determinar la constante de proporcionalidad de más de dos magnitudes	Problema (p. 76)	1
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados	Problema (p. 68)	1

Autoría propia

Al igual que en el texto escolar de tercer grado, observamos en la tabla 32 que los ostensivos utilizados en el Manual no permitirían una representación de la proporcionalidad como función. Se identificó el uso de la notación a:b :: c:d en una situación. Leibniz fue quien propuso reemplazar los “puntitos” por el signo de igualdad, sin embargo, se mantienen en algunos textos de aritmética.

Tabla 32: Ostensivos identificados en el Manual para docentes (III de Secundaria)

PROBLEMAS RESUELTOS	Ostensivos					
	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	a:b :: c:d	Oral
Problema (p. 78)	✓	✓				✓
Problema (p. 66)		✓				✓
Problema (p. 84)		✓				
Problema (p. 70)	✓	✓				✓
Problema (p. 72)	✓	✓				
Problema (p. 74)	✓	✓				✓
Problema (p. 80)	✓	✓				✓
Problema (p. 85)	✓	✓				✓
Problema (p. 76)	✓	✓				
Problema (p. 68)	✓				✓	

Autoría propia

4.4.4 Manual para el docente del cuaderno de trabajo de cuarto de secundaria

Uso de combustible (Manual para el docente 4, p. 58)

Sergio viajó en su auto hasta Pisco para visitar a sus familiares y hacer turismo. Luego, se dirigió a Camaná (Arequipa) para encontrarse con unos amigos y de regreso se quedó unos días en Cañete para ver a sus primos. Se sabe que Sergio partió del kilómetro 10 de la carretera Panamericana Sur (Lima), y que sus destinos Cañete, Pisco y Camaná se encuentran en los kilómetros 150; 250 y 850, respectivamente. Si en el viaje a Pisco el auto consumió 4 galones de gasolina y el rendimiento de kilómetros por galón es el mismo, ¿cuántos galones consumió el auto en el segundo y tercer viaje? ¿Cuánto gastó Sergio en gasolina si el costo promedio por galón es de S/ 13,50?

Resolvemos paso a paso:

¿Cuál fue la secuencia de ciudades visitadas por Sergio? ¿Qué distancia recorrió Sergio en cada uno de los viajes? ¿Cómo calcularías el gasto en combustible de cada viaje?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿Qué datos se conocen? ¿Qué otros datos se necesita saber?
3. ¿Qué tienes que averiguar?
4. ¿Cómo puedes organizar la información?
5. ¿Qué pasos seguirás para resolver el problema?
6. ¿Qué estrategia te permitirá resolver el problema?
   a) Empezar por el final
   b) Modificar el problema
   c) Particularizar
7. Calcula la distancia recorrida en cada viaje.
8. Aplica la estrategia conveniente para calcular el rendimiento y el consumo por viaje.
9. Calcula el total de galones de combustible consumidos y el dinero que se gastó.
10. Organiza la información en una tabla y verifica tus resultados.
11. ¿Qué ventajas tiene la reducción a la unidad?
12. ¿Por qué es importante considerar el rendimiento del combustible?

Receta con solución (Manual para el docente 4, p. 62)

Sofía va a preparar arroz con pollo para 10 personas. Si cuenta con la receta que se muestra, ¿qué cantidad de cada ingrediente necesitará para la preparación?

Arroz con pollo (para 4 personas) 1 ½ taza de arroz ¼ taza de aceite 2 dientes de ajo licuado ¾ taza de culantro ½ taza de alverjitas Sal y pimienta al gusto	4 presas de pollo 1 cebolla picada en cuadraditos 1/8 kg de ají amarillo 1 pimiento ¼ taza de choclo desgranado

Resolvemos paso a paso:

¿En qué te ayuda conocer la receta para 4 personas? ¿Cómo sería la receta para 2 personas? ¿Y para 8 personas?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿Qué información necesitas para resolver el problema?
3. ¿Qué datos se tienen?
4. ¿Qué estrategia te permitirá resolver el problema?
    a) Particularizar
    b) Buscar patrones
    c) Generalizar
    d) Empezar por el final
5. Aplica la estrategia conveniente para resolver el problema. ¿Cómo puedes expresar mediante una sola operación la conversión de la cantidad de ingredientes de 4 a 10 personas?
6. Completa la tabla calculando las cantidades de ingredientes para 10 personas.

Ingredientes	Para 4 personas	Para 10 personas
Arroz (taza)	1 ½	
Pollo (presa)	4	
Aceite (taza)	¼	
Cebolla (unidad)	1	
Dientes de ajo (unidad)	2	
Ají amarillo (kg)	1/8	
Culantro (taza)	¾	
Pimiento (unidad)	1	
Alverjitas (kg)	½	
Choclo desgranado (taza)	¼	

7. ¿Cómo podrías comprobar tus resultados?
8. ¿Qué estrategia fue útil para resolver el problema?
9. ¿Por qué es importante considerar la cantidad de veces que representa una receta para 10 personas respecto a una receta para 4 personas?

Medidas y costos en la cocina (Manual para el docente 4, p. 64)

Silvana debe preparar un pedido de 15 platos de tacacho con cecina. Como no tiene la receta completa, consultó una página web de gastronomía peruana y encontró la que se muestra a la derecha de la página.

Cuando Silvana fue al mercado, encontró los siguientes precios:

Plátano verde: S/ 3,50 (la mano) Chicharrón: S/ 30 (el kilo) Cecina: S/ 18 (el kilo) Manteca: S/ 2,80 (paquete de 250 g) Aceite: S/ 5,20 (el litro) Cebolla: S/ 1,80 (el kilo / 6 unidades) Cocona: S/ 5 (el kilo / 5 unidades) Ají charapita: S/ 4 (250 g / 8 unidades)	**Tacacho con cecina** **(para 4 personas)** 4 plátanos verdes (bellacos) 1/8 de taza de manteca 250 g de chicharrón en trozos 250 g de cecina de cerdo ¼ de taza de aceite ½ cebolla 1 cocona 1 ají charapita

¿Qué cantidad de cada ingrediente necesitará Silvana? Aproximadamente, ¿cuánto gastará?

Resolvemos paso a paso:

A partir de las cantidades de la receta de la página web, ¿cómo obtendrías las cantidades de ingredientes para una persona? ¿Cuánto se gastaría en la compra de plátano para 15 personas?

1. ¿Qué tienes que averiguar?
2. ¿Qué magnitudes intervienen en la situación?
3. ¿Qué tipo de proporcionalidad guardan el precio de los ingredientes con el número de personas? Analiza la proporcionalidad de las otras magnitudes.
4. ¿Qué pasos seguirás para resolver el problema?
5. ¿Qué estrategia te permitirá resolver el problema?
   a) Particularizar
   b) Empezar por el final
   c) Buscar patrones
6. Aplica la estrategia conveniente para calcular las cantidades de los ingredientes. ¿Cómo puedes expresar mediante una sola operación la conversión de ingredientes de 4 a 15 personas?
7. Calcula la cantidad necesaria de cada ingrediente.
8. Redondea las cantidades de los ingredientes que se necesitan comprar y calcula el gasto total.
9. Calcula la cantidad aproximada de cada compra. Aplica la regla de tres simple.
10. ¿Qué estrategia fue útil para resolver el problema?
11. ¿Por qué redondeas las cantidades de los ingredientes que se tienen que comprar?

Las situaciones de contexto real presentadas tienen por intención, según el Manual para el docente, que el estudiante fije sus conocimientos sobre magnitudes directamente proporcionales. Asimismo, pretende que entienda la situación antes de utilizar una estrategia de solución.

Se propone las técnicas $\boldsymbol{\tau_{(1,1,2)}}$***Reducción a la unidad y*** $\boldsymbol{\tau_{(1,1,3)}}$***: Regla de tres simple directa*** como estrategias de solución.

Cebiche proporcionalmente nutritivo (Manual para el docente 4, p. 60)

La especialidad en el restaurante de Catalina es el cebiche, plato representativo de la gastronomía peruana. Para la preparación de una fuente de cebiche para dos personas, Catalina utiliza medio kilo de pescado y el jugo de 6 limones. ¿Qué cantidad de pescado necesitará para preparar una fuente para 7 personas? ¿Y una fuente para diez personas? Elabora una gráfica que represente la relación entre el número de personas y la cantidad de pescado que se necesita.

Manos a la obra:

Para que el cebiche alcance para más personas, ¿se necesita más o menos pescado? ¿Se podrán transferir los datos a una gráfica? ¿Habrá algún software que te permita representar gráficamente los datos y resolver la situación?

Abre una hoja de cálculo en Excel. Luego, organiza una tabla como la que se muestra para registrar la cantidad de pescado necesaria según el número de personas. Observa el número de las celdas donde se ubican el título y las columnas de la tabla.

A continuación, digita =(B5*C4)/B4 en la celda C5 y presiona “Enter”.

1. ¿Qué valor obtuviste?
   Completa las otras celdas. Para ello, selecciona la celda C5 y cuando se forme la cruz negra en la esquina inferior derecha, arrastra hasta la celda C12.
2. ¿Qué cantidad de pescado se usará para preparar una fuente para 5 personas? ¿Y para una fuente para 8 personas?
   Representa los datos en una gráfica. Para ello, sigue estos pasos:
   - Selecciona los datos de las dos columnas: desde B4 hasta C12.
   - Haz clic en “Insertar”, “Gráficos” y “Dispersión (X, Y)”. Escoge la opción “Burbujas”.
   - Haz clic derecho sobre el gráfico que obtendrás y se abrirá el menú “Elementos del gráfico”. Allí selecciona el título del gráfico y el título de los ejes.

   Compara tu gráfico con el siguiente:
3. ¿Qué características tiene la gráfica?
4. ¿Qué representa el valor obtenido en la celda C5?
5. ¿Qué estrategia de cálculo se ha aplicado para hallar la cantidad de pescado que se necesita?
6. ¿Cómo completaste la tabla?
7. ¿Cómo obtuviste la gráfica?
8. Después de realizar todas las actividades, copia la tabla en tu cuaderno. Luego, imprime la gráfica y pégala.

9. Responde las preguntas del problema.

La situación pretende presentar el uso del software como estrategia de solución de un problema de proporcionalidad directa. En el texto escolar de cuarto de secundaria no se identificó alguna técnica similar, es por ello, que establecemos la técnica:

$\tau_{(1,1,6)}$***: Uso de Excel***

Paso 39: Abrir una hoja de Excel y registrar los datos en dos columnas

Paso 40: Para calcular un dato de la segunda columna usar la regla de tres simple en la barra de fórmulas

Paso 41: Completar los datos de la segunda columna arrastrando la fórmula con la cruz negra de la parte inferior derecha de la celda

Paso 42: Selecciona todos los datos de las dos columnas e inserta el gráfico "burbujas". Coloca título a los ejes

Paso 43: Identifica en el gráfico el dato solicitado

Es importante indicar que este tipo de situaciones es pertinente para que los estudiantes puedan interpretar la proporcionalidad como una función lineal lo que correspondería a la modelización funcional propuesta por García (2005). Sin embargo, es una situación aislada en el grado.

Alimentación balanceada (Manual para el docente 4, p. 66)

Paola es deportista y se preocupa mucho por su salud. Por eso, su alimentación es balanceada. En ella incluye tres tipos de alimentos: vegetales, proteínas y carbohidratos. Cada mañana, Paola prepara la ración de almuerzo que llevará en la lonchera, para lo cual tiene en cuenta que las proporciones de vegetales (lechuga, espinaca, tomate, apio, brócoli…), proteínas (pescado, pollo, res, cerdo, cuy…) y carbohidratos (arroz, papa, trigo, yuca…) estén en proporción directa a 1; 1/3 y ½, respectivamente. Si la ración de almuerzo que prepara Paola es de, aproximadamente, 550 gramos, ¿qué cantidades en gramos corresponde a la porción de cada tipo de alimento?

Resolvemos paso a paso:

¿Se podrá resolver el problema utilizando fracciones? ¿Qué quiere decir que las porciones de cada tipo de alimento sean proporcionales a 1; ½ y 1/3, respectivamente?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿En qué proporciones deben estar los alimentos de la ración?
3. ¿Qué tienes que averiguar?
4. ¿Qué datos serán útiles para hallar las cantidades, en gramos, de cada tipo de alimento?
5. ¿Qué estrategia te permitirá resolver el problema?
    a) Diagrama de árbol
    b) Ensayo y error
    c) Hacer un gráfico
    d) Usar una tabla
6. ¿Cómo ejecutarás la estrategia elegida?
7. Representa gráficamente las porciones de vegetales, proteínas y carbohidratos del almuerzo de Paola.
8. ¿Cuántos gramos de la ración corresponden a vegetales, proteínas y carbohidratos?
9. Calcula algebraicamente la cantidad de cada tipo de alimento.
10. ¿Qué conocimientos empleaste para comprobar tus procedimientos?
11. ¿Qué estrategia fue útil para resolver el problema?

12. Si se tuviera que preparar una ración de 880 gramos, ¿cuántos gramos corresponderían a cada tipo de alimento?

Reparto de ganancias (Manual para el docente 4, p. 68)

Una empresa repartirá una ganancia de S/ 19 695 entre tres de sus empleados, de manera proporcional al número de máquinas vendidas por cada uno. Se sabe que Alberto vendió 36 máquinas y le hubiera correspondido S/ 7020, pero renunció a este dinero, de modo que el reparto solo se hizo entre Carlos y Raúl. Así, Carlos recibió S/ 2700 más que si el reparto hubiese sido entre los tres. ¿Cuántas máquinas vendió el empleado que realizó la mayor venta?

Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad:

¿Cuánto corresponde de ganancia por la venta de cuatro máquinas? ¿Qué sucederá con el dinero al que renunció Alberto? ¿Qué tipo de reparto se realiza entre los vendedores?

1. ¿Qué datos serán útiles para hallar la cantidad de máquinas vendidas por el empleado que realizó la mayor venta?
2. ¿Qué información necesitas para resolver el problema?
3. ¿Qué tienes que averiguar?
4. ¿Qué plan o estrategia seguirás para solucionar el problema?
5. Si el reparto se hubiera realizado entre los tres empleados, ¿cómo lo habrías representado algebraicamente? ¿Cuál sería la razón de proporcionalidad?
6. Calcula la razón de proporcionalidad si el reparto se hace entre dos empleados.
7. Si Carlos recibió S/ 2700 más de lo que le correspondió cuando el reparto se hizo entre tres, ¿cómo hallarías el número de máquinas que vendió?
8. ¿Cuántas máquinas vendió Raúl?
9. ¿Qué vendedor realizó la mayor venta? ¿Cuántas máquinas vendió?
10. ¿Cómo puedes verificar tu respuesta?

Pago por superficie (Manual para el docente 4, p. 70)

Los habitantes de un edificio de cinco pisos deciden comprar el edificio. Pondrán dinero entre todos de modo que cada uno pague una cantidad proporcional al tamaño de su piso. Por ejemplo, una persona que viva en un piso que ocupa la quinta parte de la superficie del conjunto de pisos, deberá pagar la quinta parte del precio total del edificio.

Nos familiarizamos con la situación:

¿Todos los habitantes del edificio deberán pagar la misma cantidad de dinero por la compra del piso que ocupan? ¿De qué depende el monto que deben pagar? ¿Qué relación hay entre la superficie de un departamento y su precio correspondiente?

1. Rodea la palabra correcto o incorrecto para cada una de las siguientes afirmaciones:

La persona que vive en el piso más grande pagará más dinero por cada metro cuadrado de su piso que la persona que vive en el piso más pequeño.	Correcto / Incorrecto
Si se conocen las superficies de dos pisos y el precio de uno de ellos, entonces se puede calcular el precio del otro.	Correcto / Incorrecto
Si se conoce el precio del edificio y cuánto pagará cada propietario, entonces se puede calcular la superficie total de todos los pisos.	Correcto / Incorrecto
Si el precio total del edificio se redujera en un 10%, cada uno de los propietarios pagaría un 10% menos.	Correcto / Incorrecto

2. Hay tres pisos en el edificio. El mayor de ellos, el piso 1, tiene una superficie total de 95 m^2. Los pisos 2 y 3 tienen superficies de 85 m^2 y 70 m^2, respectivamente. El precio de venta del edificio es de 300 000 zeds. ¿Cuánto deberá pagar el propietario del piso 2? Escribe tus cálculos.

Las situaciones presentadas corresponden a la tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados. En ellas se aplica como estrategia de solución formar ecuaciones utilizando la constante de proporcionalidad, es decir, la técnica

$\tau_{(3,2,1)}$ ***Reparto directo,*** descrita en el análisis de los textos escolares de tercero y cuarto d secundaria.

Asimismo, en una situación en el Manual para docentes se propone un método gráfico para realizar el reparto proporcional. Esta estrategia se sumará a la $\tau_{(3,2,1)}$.

Indicamos entonces:

$\tau_{(3,2,2)}$ Representación gráfica

Paso 44: Utilizar barras o similares para representar en cuántas porciones se dividirá el total

Paso 45: Determinar el valor de cada porción (constante de proporcionalidad) dividiendo el total entre la cantidad de porciones

Paso 46: Multiplicar la constante de proporcional por la cantidad de porciones de cada parte del total

Guías turísticos (Manual para el docente 4, p. 72)

Dos de los guías experimentados de una cadena de hoteles del Cusco atienden juntos a 30 turistas en una hora y cuarto.

Si dos de los guías principiantes deben realizar el mismo trabajo, pero se sabe que son el 50% de eficientes que los anteriores, ¿cuánto tiempo tardarán?

El administrador de la cadena de hoteles repartirá un bono de dinero de la siguiente forma: la mitad entre los guías experimentados, y la otra mitad, entre los principiantes. Si cada uno de los 15 guías experimentados recibirá S/ 180, ¿cuánto recibirá cada uno de los 27 guías principiantes?

Nos preguntamos previamente:

¿Un grupo menos eficiente tardará más tiempo o menos en realizar una misma tarea? ¿Cómo será la repartición de una misma cantidad entre dos grupos de diferente número de integrantes?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿Qué datos serán útiles para responder las preguntas?
3. ¿Qué información necesitas obtener?
4. ¿Qué tienes que averiguar?
5. ¿Qué plan o estrategia seguirás para responder las preguntas?
6. Ejecuta el plan que has propuesto para responder cada pregunta. Justifica tus procedimientos utilizando tus conocimientos de proporcionalidad.
7. Reúnete en equipo y compara tu respuesta con la de tus demás compañeros. ¿Son similares? Si no lo son, ¿a qué crees que se deba? Identifica el error y corrígelo.
8. Luego de realizar las actividades, comparara tus procedimientos y verificar las respuestas, ¿a qué conclusiones puedes llegar?
9. ¿Cómo puedes comprobar tu respuesta?
10. ¿Qué diferencia hay entre la proporcionalidad directa y la inversa?

Desayuno en la parroquia (Manual para el docente 4, p. 74)

Una parroquia va a ofrecer desayuno diario para 150 personas inscritas, entre niños y ancianos. Para ello, se han comprado los insumos necesarios para 40 días. Si después del cuarto día de atención, se retira el 10% de los inscritos, ¿para cuántos días en total alcanzarán los insumos comprados?

Resolvemos paso a paso:

¿Qué necesitas hallar en el problema? ¿Qué conocimientos te ayudarán a solucionarlo? ¿Qué estrategia puedes aplicar? Con respecto a los insumos comprados, ¿alcanzarán para más o menos días?

1. ¿De qué trata la situación?
2. ¿Qué porcentaje del total de las personas se retiraron? ¿A cuántas personas equivale dicho porcentaje?
3. ¿Qué tienes que averiguar? ¿Qué debes tomar en cuenta?
4. ¿Qué datos serán útiles para hallar lo que se pide?
5. ¿Qué estrategia te permitirá resolver la situación?
    a) Plantear una ecuación
    b) Razonar lógicamente
    c) Buscar patrones
6. ¿Cómo ejecutarás la estrategia elegida?
7. Responde las siguientes preguntas. Relaciona cada respuesta con la anterior a medida que vayas respondiendo.
    a) ¿Cuántos desayunos se proyectaron atender en 40 días?
    b) ¿Cuántos desayunos se atendieron en los cuatro primeros días?
    c) ¿Para cuántos desayunos alcanzan los insumos que quedan?
    d) ¿Para cuántos días alcanzarán dichos desayunos con las personas que se quedan?
    e) ¿Para cuántos días en total alcanzaron los insumos comprados?
8. Calcula numéricamente aplicando la proporcionalidad.
9. ¿Qué conocimientos empleaste para comprobar tu respuesta?
10. ¿Qué estrategia te ayudó a resolver el problema?
11. Un comedor comunal atiende a 200 personas y cuenta con insumos para 40 días. Si al quinto día se retira el 30% de las personas, ¿para cuántos días en total alcanzarán los insumos?

Las situaciones presentadas tienen por propósito la aplicación la técnica $\boldsymbol{\tau_{(1,2,2)}}$: ***Regla de tres simple inversa.***

Propina para el paseo (Manual para el docente 4, p. 76)

Sofía, Sonia y Elisa son hermanas e irán de paseo con sus compañeros de promoción. Para ello, su mamá les da en total S/ 67. Se sabe que el dinero que reciben Sofía y Sonia es inversamente proporcional a 5 y 3, respectivamente, y lo que reciben Sonia y Elisa es inversamente proporcional a 7 y 4, respectivamente. ¿Cuánto dinero recibe cada hija? ¿Cuál es el promedio de lo que reciben Sofía y Sonia?

Nos preguntamos previamente:

¿Qué relación encuentras entre los datos del problema? ¿Qué conocimientos te ayudarán a solucionar el problema? ¿Qué significa que el dinero se repartirá de manera inversamente proporcional? ¿Qué estrategia puedes aplicar?

1. Resume la situación dada.
2. ¿Qué datos serán útiles para hallar la cantidad de dinero que recibe cada hija?
3. ¿Qué información necesitas para resolver el problema?
4. ¿Qué tienes que averiguar?
5. ¿Qué pasos tendrá el plan que seguirás para solucionar el problema?
6. ¿Cómo calculas el promedio entre dos cantidades?
7. Representa con una misma variable las relaciones de proporcionalidad del reparto entre las tres hijas.
8. Calcula cuánto recibe cada hija.
9. Calcula el promedio de lo que reciben Sofía y Sonia.
10. Luego de comparar tus resultados, ¿a qué conclusiones puedes llegar?
11. ¿Cuál de los procedimientos realizados te pareció más difícil?

Incentivo al trabajo (Manual para el docente 4, p. 78)

Jorge, Arturo y Luis son sastres y acaban de ser contratados por una empresa para confeccionar 100 uniformes cada uno. Al leer el contrato, ellos han manifestado que es imposible concluir el trabajo en la fecha solicitada. Sin embargo, les han ofrecido un incentivo de S/ 5200, de manera que la demora sea la menor posible. Se sabe que dicho incentivo se repartirá entre los tres sastres de manera inversamente proporcional al número de días de retraso en la entrega de los uniformes. Si Jorge, Arturo y Luis entregaron los trabajos con 2; 3 y 4 días de retraso, respectivamente, ¿cuánto recibió cada uno de incentivo?

Resolvemos paso a paso:

¿Los tres sastres recibirán la misma cantidad de incentivo? ¿Quién recibirá un incentivo mayor? ¿Qué criterio utilizarás para determinar la cantidad que le corresponde a cada sastre?

1. ¿Qué nos dice el problema?
2. ¿Qué tienes que averiguar?
3. ¿Qué datos serán útiles para responder las preguntas?
4. ¿Qué estrategias te permitirán resolver el problema?
    a) Buscar patrones

b) Hacer una tabla
c) Plantear una ecuación
d) Utilizar ensayo y error

5. ¿Qué pasos seguirán para aplicar esta estrategia?
6. Si el reparto del incentivo es inversamente proporcional a 2; 3 y 4, ¿cómo expresas algebraicamente el dinero que le corresponde a cada sastre?
7. Calcula la cantidad de dinero que recibirá cada sastre como incentivo.
8. ¿Cómo puedes comprobar tus resultados?
9. ¿Fue efectivo el plan que seguiste para resolver el problema?
10. Luego de realizar las actividades, comparar los procedimientos y verificar las respuestas, ¿a qué conclusiones puedes llegar?

Las situaciones presentadas corresponden a la tarea de distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados. La técnica utilizada es $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{3},\mathbf{1},)}$ ***Reparto inverso.***

Todas las situaciones del cuaderno de trabajo son de contexto real y pretenden inicialmente que el estudiante entienda el problema antes de aplicar una estrategia de solución, es por ello, que se puede identificar varias preguntas de exploración.

Rendimiento en obra (página 84)

Para cavar una zanja de 200 metros de largo, 3 metros de ancho y 2 metros de profundidad, Andrés contrata a 50 operarios quienes se comprometen a trabajar 12 horas diarias a fin de concluir la obra en 15 días. Para cavar otra zanja de 400 metros de largo, 4 metros de ancho y un metro de profundidad, ¿cuántos días más necesitarán 20 operarios si trabajan 8 horas diarias?

A pintar la casa (Manual para el docente 4, p. Manual para el docente 4, p. 89)

Enrique contrata 2 pintores que tardan 5 días en pintar 500 m2 de su casa trabajando 10 horas diarias. Su hermano Hernán contrata a 5 pintores, el doble de eficientes que los de Enrique, para que pinten 1800 m^2 de su casa trabajando 6 horas diarias.

Organiza los datos en una tabla

Indica si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales.

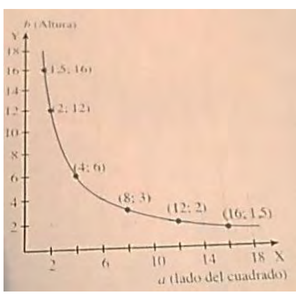
Calcula cuántos días tardarían los 5 pintores en terminar de pintar la casa de Enrique

Las situaciones presentadas corresponden a la tarea de calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales. La técnica planteada en el Manual para el docente $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{1},\mathbf{3})}$***: Regla de tres compuesta***

A medir cajas (Manual para el docente 4, p. 87)

Las tres cajas que se muestran representan paralelepípedos rectos de base cuadrada. En cada caso el área de una cara mide 24 cm^2. Además, se sabe que la magnitud que corresponde a la magnitud del lado de la base cuadrada, y la magnitud b es la altura del paralelepípedo.

- Construye una tabla
- ¿Cómo son los valores de las magnitudes a y b; directa o inversamente proporcionales?
- Completa el siguiente eje de coordenadas



- Considera en el eje x los valores de a, y en el eje y , los valores de b
- Marca los puntos que obtuviste en la tabla y traza la curva que pasa por los puntos (a;b). Calcula más puntos para poder trazar mejor la curva

La situación pretende que el estudiante identifique la relación de proporcionalidad inversa y que determine la constante de proporcionalidad. Se puede identificar pasos de la ***técnica*** $\boldsymbol{\tau_{(4,2)}}$ ***Expresar como función de proporcionalidad inversa***

A continuación, presentamos la tabla 33 en donde se puede identificar la presencia de seis tareas en el cuaderno de trabajo de cuarto de secundaria.

Tabla 33: Tareas identificadas en el Manual para docentes del cuaderno de trabajo de cuarto de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	PROBLEMAS	CANTIDAD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	Problema (p. 58) Problema (p. 60) Problema (p. 62) Problema (p. 64)	4
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	Problema (p. 72) Problema (p. 74)	2
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	Problema (p. 84) Problema (p. 89)	2
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	Problema (p. 76) Problema (p. 78)	2
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados	Problema (p. 66) Problema (p. 68) Problema (p. 70)	3
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa	Problema (p. 87)	1

Autoría propia

Observamos en la tabla 34 mayor presencia de tablas de proporcionalidad y representación clásica de la proporción como ostensivos. Se identifica también algunas representaciones cartesianas y al igual que en tercero, las dos flechas horizontales.

Tabla 34: Ostensivos identificados en el Manual para docentes (IV de Secundaria)

PROBLEMAS	Ostensivos

RESUELTOS	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	a:b :: c:d	y = kx y=k/x	f(x) =mx	Oper mat	→ →	Oral
Problema (p. 58)	✓	✓								
Problema (p. 60)		✓		✓						
Problema (p. 62)	✓	✓								
Problema (p. 64)	✓									
Problema (p. 72)									✓	✓
Problema (p. 74)									✓	
Problema (p. 84)	✓	✓								
Problema (p. 89)	✓	✓								
Problema (p. 76)	✓									
Problema (p. 78)	✓									
Problema (p. 66)								✓		
Problema (p. 68)			✓							
Problema (p. 70)		✓		✓						
Problema (p. 87)		✓		✓						

Autoría propia

4.4.5 Manual para el docente del cuaderno de trabajo de quinto de secundaria

Un plato de bandera (Manual para el docente 5, p. 84)

Rodrigo es el nuevo cocinero de la cebichería Príncipe Azul, ubicada en la playa Lobitos, al norte de Talara, en la región Piura. Además de cocinar, Rodrigo será el encargado de pedir diariamente al proveedor los productos que necesita.

Se sabe que por temporada alta, la cebichería vende, aproximadamente, 150 platos de ceviche cada día, de miércoles a viernes; 250 platos diarios, los sábados y domingos, y 80 platos los martes. Los lunes la cebichería no atiende.

El cocinero anterior le dejó a Rodrigo la receta del cebiche, que es el plato más pedido, y además, una relación de equivalencias para controlar la recepción de productos.

¿Cuántas unidades de ají limo pedirá Rodrigo para el domingo? ¿Cuántas unidades de camote pedirá para el miércoles? ¿Cuántos kilogramos de pescado pedirá para el martes? ¿Cuántos kilogramos de cebolla pedirá para el viernes?

Para que Rodrigo no tenga problemas al realizar diariamente sus pedidos al proveedor, ¿de qué manera puede organizar la información?

Resolvemos paso a paso
¿En tu localidad consumen cebiche? ¿Qué ingredientes emplean? ¿Crees que hay suficiente información para poder responder las interrogantes? ¿Qué cantidad de ingredientes se necesita para preparar un plato de cebiche?
Comprende
1. ¿De qué trata la situación problemática? ¿Qué te piden calcular?
2. ¿Qué datos te serán útiles para responder las preguntas?

Planifica
3. ¿Qué estrategia emplearás para resolver la situación?

Ejecuta
4. Organiza los datos en esta tabla. Luego, responde las dos primeras preguntas. (Verifica que se cumpla la propiedad fundamental de las proporciones).
5. Completa esta tabla con la cantidad de Kilogramos de cada ingrediente que se deben pedir según el día. Luego, responde la tercera y cuarta pregunta.

Comprueba
6. Calcula numéricamente lo que se pide en la situación planteada.

Concluye y aplica

7. Luego de realizar las actividades, comparar los procedimientos y verificar las respuestas, ¿a qué conclusión puedes llegar?

La intención de la situación presentada, según las orientaciones del Manual para el docente, es calcular datos desconocidos a través de la técnica $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{1,1,3})}$***: Regla de tres simple directa.***

Tipo de cambio (Manual para el docente 5, p. 86)

El mundo de hoy tiende a la globalización. El intercambio económico, cultural y turístico entre países es cada vez mayor; por ello, la conversión entre los valores de las diferentes monedas es un cálculo necesario para muchas situaciones de nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, los turistas americanos, cuando deben pagar el consumo de un sabroso anticucho o un delicioso cebiche, tienen que realizar cambio de dólares a soles, Igualmente, quien cobra debe saber cómo se convierte.

¿Cómo se podría elaborar una plantilla que permita obtener las equivalencias al intercambiar ambas divisas?

Manos a la obra

¿Sabes cuál es el tipo de cambio actual? ¿En qué casos conviene comprar dólares? ¿Por qué? ¿En qué casos conviene vender dólares? ¿Por qué?

Acción real

Nos ayudaremos de una hoja de cálculo para crear un programa que nos muestre las equivalencias en soles al comprar o vender dólares.

1. Identifica en algún periódico la sección donde aparece el tipo de cambio actual. Presenta recortes al respecto y anota el precio de compra (los soles que uno recibiría por la venta de sus dólares) y el precio de venta (los soles que uno entregaría por la compra de dólares).
2. Accede a una hoja de cálculo y asigna los siguientes nombres a las columnas que se indican.
3. Anota en la celda D4 el precio de compra, y en G4, precio de venta.
4. Supón que quieres cambiar USD 120. ¿Qué operación harías para saber cuántos soles vas a escribir? Experimenta esta situación ingresando la fórmula en la celda D4 y la cantidad 120 en la celda B4 ¿Cuántos soles recibes?
5. Supón que cuentas con S/270 y deseas comprar dólares. ¿Qué operación harías para saber cuántos dólares vas a recibir? Experimenta esta situación ingresando la fórmula en la celda H4 y la cantidad 270 en la celda F4. ¿Cuántos dólares recibes? (Aproxima al entero)
6. Redacta el procedimiento que sigues para comprar o vender dólares
7. ¿Por qué el precio de compra es menor que el precio de venta? ¿Qué sucede con la diferencia por cada dólar que se cambia?
8. Modifica libremente las cantidades de las celdas B4 y F4 y expresa lo que sucede en cada caso.
9. Averigua sobre la fluctuación del tipo de cambio en los últimos seis meses. Luego, completa tablas de manera que puedas analizar los soles que se ganan o que se pierdan al efectuar el cambio de una cantidad de dinero en los diferentes momentos. Finalmente, emite una conclusión relacionada con los ahorros, endeudamientos y transacciones en soles y en dólares.

La situación pretende que los estudiantes se enfrenten a tipos de cambio de moneda nacional y extranjera. La técnica a utilizar es la siguiente.

$\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{5,2})}$

Paso 28: Identificar la razón dada

Paso 29: Expresar la razón como el cociente entre las medidas de las cantidades

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita.

Tal como sucedió en el Manual para el docente de cuarto de secundaria, se busca que el estudiante use el Excel como herramienta de comprobación.

Masa corporal (Manual para el docente 5, p. 88)

Luis y Daniel están preocupados por su salud, por eso, hoy han ido a pesarse. Se sabe que la razón entre la masa corporal de Luis y la masa corporal de Daniel es 2/3. Además, la suma de ambas masas es 90 Kilogramos. ¿Cuál es la masa corporal de Daniel?

Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad

¿Qué entiendes por masa corporal? ¿Qué significa estar en razón de 2/3? ¿Cómo lo puedes representar gráficamente? ¿Qué propiedad de las proporciones tendrás que utilizar para resolver la situación?

Concretar una finalidad problemática y reconocer cómo resolverla

1. ¿Qué sucede con Luis y Daniel? ¿Qué tienes que averiguar?

Hacer suposiciones o experimentar

2. Analiza la razón 2/3 mediante dobleces, recortes y construcciones. Para ello, obtén un cuadrado de cualquier medida y recorta las piezas tal como se indica.
3. ¿Cómo son los segmentos identificados con líneas punteadas? ¿Cómo son las piezas obtenidas?
4. ¿Se puede armar 5 polígonos congruentes con las piezas obtenidas? ¿Cómo lo hiciste?
5. ¿Qué transformaciones isométricas (rotación, traslación, simetría) empleaste para armar polígonos? ¿Qué polígonos son?
6. Las cinco piezas obtenidas forman el cuadrado total. Si se presenta la superficie total por la suma de las masas totales de Luis y Daniel, ¿cuántas de las 5 piezas le corresponde a cada uno? Grafica.
7. ¿Quién tiene mayor masa?

Realizar la formulación matemática

8. Expresa mediante una proporción lo siguiente:
9. Escribe las propiedades de las proporciones que has visto en clase.
10. ¿Por qué es necesario conocer las propiedades de las proporciones?
11. De las propiedades que has mencionado ¿cuál de ellas crees que te ayudará a resolver la situación planteada? ¿Por qué?
12. Aplica la propiedad elegida y calcula la masa corporal de Luis.

Validación de la solución.

13. Tomando en cuenta que has sustentado el uso de una de las propiedades de la proporciones, dialoga con tu compañero respecto a identificar situaciones en las que puedan aplicar las demás propiedades.

La situación pretende que los estudiantes apliquen una propiedad de las proporciones.

Al no identificar la propiedad en el texto escolar la establecemos como:

($t_{6,2}$): Aplicar propiedad de suma o diferencia de antecedente y consecuente

$\tau_{(6,2)}$

Paso 47: Establecer la proporción entre las dos razones

Paso 48: Formar una nueva proporción teniendo en cuenta que la suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la segunda razón

Paso 49: Resolver la ecuación

Viajamos al interior del país (Manual para el docente 5, p. 92)

Unos amigos decidieron realizar un recorrido turístico por algunos lugares del Perú hasta llegar al Cusco. Se sabe que partieron de Ica hacia Pisco. Luego tomaron la ruta de Los Libertadores hasta llegar a Ayacucho. Desde ese lugar partieron hacia su destino final. En el recorrido se toparon con un rally automovilístico que tenía dos puntos de control ubicados a 160 Km de distancia entre sí.

Para ganar el máximo número de puntos, los pilotos deben desplazarse de un punto de control a otro en, exactamente, 2,5 horas. Si al inicio del recorrido un piloto tardó un ahora en viajar a través de un terreno de 40 Km, ¿con qué velocidad promedio (en Km/h) deberá recorrer los 120 Km que le faltan?

Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad

¿Qué entiendes por puntos de control? ¿Con qué datos se determina la velocidad de un automóvil?

Concretar una finalidad problemática y reconocer cómo resolverla

1. ¿De qué trata la situación planteada?
2. ¿Qué datos presenta la situación?
3. ¿Qué tienes que averiguar?
4. ¿Qué estrategia te ayudará a la comprensión de la situación?

Hacer suposiciones

5. ¿Qué debes realizar según el plan o estrategia elegida? ¿Serán suficientes los datos y condiciones que se establecieron para la situación planteada?
6. Supón que un automovilista, a velocidad constante, hizo el recorrido total en el tiempo proyectado. ¿A qué velocidad fue?
7. ¿Qué significa ir a 40 Kilómetros por hora?

Realizar la formulación matemática

8. Relaciona el tiempo que queda y la distancia que falta recorrer.
9. Representa gráficamente y calcula la velocidad promedio a la que debe ir el piloto.
10. Responde la pregunta del problema

Validación de la solución

11. Comprueba la respuesta con ayuda de una tabla de proporcionalidad.
12. Compara tus respuestas con otros pares de estudiantes.

Viajemos de manera segura (Manual para el docente 5, p. 94)

En la actualidad, uno de los problemas que aún no tiene solución son los accidentes de tránsito causados por no respetar los límites de velocidad y no conservar una distancia prudente entre los vehículos.

Los choques originados por las causas anteriores están estrechamente relacionados con la velocidad del vehículo, el tiempo de reaccionar al frenar y la distancia de frenado. A partir de estas variables, las autoridades de tránsito pueden determinar la culpabilidad de un choque, ya que existe una constante de proporción entera entre el cuadrado de la velocidad (Km/h) a la que iba el vehículo en muy buenas condiciones y la distancia total de frenado (medida en metros)

Dicha constante es una razón aproximada, ya que también influyen factores como la masa el automóvil, la gravedad, la fricción de los neumáticos con el terreno, el clima, etc.

Si un vehículo va por la Panamericana Sur a una velocidad de 27,78 m/s, ¿qué distancia mínima (en metros) debe mantener con respecto a otro vehículo? Si un vehículo se encuentra a 50 metros de otro, ¿Qué velocidad como máximo podrá alcanzar?

Nos preguntamos previamente

¿Por qué hay accidentes de tránsito? ¿Cómo se puede determinar la culpabilidad en un choque? ¿En cuál de las flechas del esquema debes centrar tu atención para responder las preguntas? ¿Cómo están expresadas las velocidades y las distancias?

Acción

1. ¿De qué trata la situación problemática? ¿Qué te piden calcular?
2. ¿Cuáles son las magnitudes presentes en el problema?
3. Identifica los datos que serán útiles para responder las preguntas. ¿Cómo podrías determinar la constante de proporcionalidad?

Formulación

4. Anota el plan que seguirás para responder las preguntas.

Validación

5. Completa la tabla que te permitirá calcular la constante de proporcionalidad.
6. Utiliza la constante de proporcionalidad (aproximada al entero) y responde las preguntas.

Institucionalización

7. Si una camioneta va por la carretera a 140 km/h, ¿cuál es la distancia de frenado?
8. Luego de realizar las actividades, comparar los procedimientos y verificar las repuestas, ¿a qué conclusiones pueden llegar?

Cocinas industriales (Manual para el docente 5, p. 98)

Muchas cocinas industriales utilizan sistemas de ruedas dentadas, llamados trenes de engranajes, como los usados para subir y bajar parrillas. En ellos, la rueda que produce el movimiento se llama rueda motora.

Se sabe que el engranaje de una máquina está formado por tres ruedas dentadas: la rueda A, que es la rueda motora, tiene 32 dientes; la rueda B tiene 16 dientes y la rueda C tiene 8 dientes. Si la rueda motora da 16 vueltas, ¿Cuántas vueltas darán las ruedas B y C?
Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad
¿Conoces máquinas que utilicen engranajes? ¿Cuál es la función principal de los engranajes?
Concretar una finalidad problemática y reconocer cómo resolverla
1. ¿Cuáles son los datos que identificas en la situación problemática?
2. ¿Qué tienes que averiguar?
3. ¿Qué paso realizarás primero para la compresión del problema?
4. ¿Qué plan o estrategia seguirás para resolver la situación propuesta? ¿Sera suficiente con lo que sabes o necesitar conocer algo más?

Hacer suposiciones o experimentar
5. En la rueda motora, ¿cómo se relaciona el número de dientes y el número de vueltas?
6. Experimenta con ruedas de pocos dientes, crea un tren de engranajes y anota posibles conclusiones.

Realizar la formulación matemática
7. Realiza la relación entre el número de vueltas y el número de dientes.
8. Efectúa el procedimiento de solución
9. Responde la pregunta del problema. Justifica.

Validación de la solución
10. Comprueba la respuesta completando la siguiente tabla de proporcionalidad

	A	B	C
Número de dientes			
Número de vueltas			

En estas situaciones se pretende que el estudiante aplique la técnica $\tau_{(1,2,2)}$***: Regla de tres simple inversa,*** definida en el análisis de textos escolares.

En el Manual para el docente se presenta la siguiente sugerencia como previsión de dificultades: “Los estudiantes pueden presentar dificultades para establecer la relación de entre las magnitudes. Recuerde que si ambas aumentan o disminuyen, son directamente proporcionales y, si una aumenta y la otra disminuye o viceversa, son inversamente proporcionales” (p. 94)

Tal como lo indicamos anteriormente este tipo de afirmaciones propias del lenguaje coloquial podría generar confusión en los docentes, pues si por ejemplo relacionamos el lado de un cuadrado y su área, efectivamente una aumenta y la otra también, sin embargo no se puede afirmar que son magnitudes directamente proporcionales.

Asamblea culinaria (Manual para el docente 5, p. 100)

Una empresa dedicada al rubro de la gastronomía convoca a sus chefs a una asamblea. Se desea determinar cuántos hombres había inicialmente en dicha asamblea si se sabe que en ese momento el número de hombres era al número de mujeres como 7 es a 12. Además, se conoce que pasado un tiempo se retiraron 4 hombres y 3 mujeres, por lo que la razón en ese momento fue de 4 a 1.
Organizamos la información
¿Qué es una asamblea?
¿Se sabe cuántos trabajadores asisten a la asamblea? ¿Qué se conoce inicialmente de las personas que asisten a la asamblea? ¿Qué ocurre pasado un tiempo? ¿Cómo podrás resolver la situación planteada?
Tema de estudio
1. ¿De qué trata la situación planteada?

Interrogantes de estudio
2. ¿Qué interrogantes puedes plantear a partir de la situación propuesta? ¿Cuál de ellas sería la pregunta central?

Conceptos claves
3. ¿Qué conceptos debes conocer para guiar tus razonamientos?
Registro de medidas y operaciones
4. ¿Se dan datos numéricos? ¿Qué tendrías que realizar para dar solución a la situación planteada?
Procesos básicos
5. ¿Qué definiciones, leyes o teorías debes considerar para resolver la situación?
Datos que se tienen
6. ¿Con qué datos cuentas para resolver la situación planteada?
Marco teórico
7. ¿Cómo resumes la teoría que necesitas para relacionar los datos y resolver las operaciones propuestas?
Juicio y conclusiones
8. ¿Qué proporción numérica existe entre los hombres y mujeres al inicio de la asamblea? ¿Qué nueva proporción se genera al retirarse 4 hombres y 3 mujeres? ¿Cuántos hombres había al inicio?

En la situación se pretende que el estudiante determine una cantidad teniendo en cuenta el valor de la razón.

$\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{5},\mathbf{2})}$

Paso 28: Identificar la razón dada

Paso 29: Expresar la razón como el cociente entre las medidas de las cantidades

Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita.

Como actividades adicionales el Manual para el docente propone tres problemas para cada situación que permite reforzar la técnica empleada. La estructura de estos problemas difiere a las situaciones del Manual, son más parecidos a los problemas de los textos escolares.

A continuación, presentamos la tabla 35 en donde se puede identificar la presencia de cuatro tareas en el cuaderno de trabajo.

Tabla 35: Tareas identificadas en el Manual para docentes del cuaderno de trabajo de quinto de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	PROBLEMAS	CANTIDAD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	Problema (p. 84)	1
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	Problema (p. 92) Problema (p. 94) Problema (p. 98)	3
(T_5): Analizar la razón entre dos magnitudes	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón	Problema (p. 86) Problema (p. 100)	2

(T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,2}$): Aplicar propiedad de suma o diferencia de antecedente y consecuente	Problema (p. 88)	1

Autoría propia

En la tabla 36 observamos que para los pocos problemas de proporcionalidad identificados en el Manual para docentes de V de secundaria, se consideran como objetos ostensivos las tablas y la notación clásica de razones y proporciones.

Tabla 36: Ostensivos identificados en el Manual para docentes (V de Secundaria)

PROBLEMAS RESUELTOS	Ostensivos									
	a/b = c/d	Tabla	K: constante de proporc.	Repres. Cartes.	a:b :: c:d	y = kx y=k/x	f(x) =mx	x :	→ →	Oral
Problema (p. 84)		✓								
Problema (p. 92)		✓								
Problema (p. 94)		✓	✓							✓
Problema (p. 98)	✓	✓								
Problema (p. 86)		✓								
Problema (p. 100)	✓									
Problema (p. 88)	✓									

Autoría propia

A continuación, presentamos la tabla 37 en donde se puede identificar la presencia de las diferentes tareas en los Manuales para docentes de primero a quinto de secundaria. El tipo de tarea: Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales es el que mayor cantidad de problemas presenta.

Tabla 37: Tareas presentes en los Manuales para docentes de secundaria

TIPO DE TAREA	TAREA	CANTIDAD DE PROBLEMAS				
		I SEC	II SEC	III SEC	IV SEC	V SEC
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	7	4	1	4	1
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales		1	2	2	3
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales		1	5	2	

(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	3	1			
	Tarea ($t_{2,2}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales a través de un discurso coloquial		1			
	Tarea ($t_{2,3}$): Identificar magnitudes inversamente proporcionales en una tabla		6			
	Tarea ($t_{2,4}$): Determinar la constante de proporcionalidad de más de dos magnitudes			1		
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados				2	
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados			1	3	
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	3				
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa		4		1	
(T_5): Analizar la razón entre dos magnitudes	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón					2
(T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,2}$): Aplicar propiedad de suma o diferencia de antecedente y consecuente					1

Autoría propia

En la tabla 38, podemos identificar que la mayoría de las tareas que se trabajan en el texto escolar son también trabajadas en los cuadernos de trabajo. Sin embargo, identificamos también algunas tareas que son solo trabajadas en los textos escolares o solo en los Manuales para los docentes. Por otro lado, corroboramos que al igual que en el texto escolar, el tipo de tareas con mayor número de problemas es el de determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales.

Tabla 38: Tareas presentes en los textos escolares (TE) y en los Manuales para docentes (MD)

TIPO DE TAREA	TAREAS	CANTIDAD DE PROBLEMAS RESUELTOS				
		I	II	III	IV	V

		SEC	SEC	SEC	SEC	SEC
		TE/MD	TE/MD	TE/MD	TE/MD	TE/MD
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido de dos magnitudes directamente proporcionales	10-7	5-4	3-1	3-4	0-1
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	4-0	4-1	3-2	3-2	0-3
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales		1-1	3-5	3-2	
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	1-3	1-1			
	Tarea ($t_{2,2}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales a través de un discurso coloquial		0-1			
	Tarea ($t_{2,3}$): Identificar magnitudes inversamente proporcionales en una tabla		0-6			
	Tarea ($t_{2,4}$): Determinar la constante de proporcionalidad de más de dos magnitudes			0-1		
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	1-0			3-2	
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados			0-1	3-3	
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	3-3	5-0			
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa		1-4		0-1	
(T_5): Analizar la razón entre dos magnitudes	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medida		1-0			1-0
	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón					2-2
(T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones					1-0
	Tarea ($t_{6,2}$): Aplicar propiedad de suma o diferencia de antecedente					0-1

	y consecuente					

Autoría propia

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

El análisis de los documentos curriculares, así como la identificación y descripción de los elementos de las organizaciones matemáticas en torno a la proporcionalidad en los textos escolares y Manuales para los docentes de los cinco grados de Educación Secundaria, nos permitió conocer cómo vive y/o pervive nuestro objeto de estudio en la noosfera e identificar las características del modelo epistemológico dominante.

1. Con respecto a las Rutas de Aprendizaje (2015), documento guía para la elaboración de los textos escolares y los Manuales para los docentes, la proporcionalidad de manera explícita es considerada en los cinco grados de Educación Secundaria en la competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad. Los indicadores de desempeño están referidos a que el estudiante identifique magnitudes proporcionales y resuelva problemas utilizando como técnicas la reducción a la unidad, la regla de tres simple y la regla de tres compuesta. Asimismo, en la competencia: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio, la proporcionalidad se presenta solo en los grados de primero y segundo. Algunos indicadores de desempeño en esta competencia buscan articular la proporcionalidad directa con la función lineal y la proporcionalidad inversa con la función de proporcionalidad inversa lo que correspondería, según García (2005), a la modelización funcional de sistemas lineales y lineales inversos.
2. Con respecto al análisis de materiales (textos escolares y Manuales para los docentes), haciendo uso de las herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, podemos decir que identificamos 6 tipos de tareas, 15 tareas, 23 técnicas y 8 discursos tecnológicos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, podemos decir que la organización matemática es local (formado por organizaciones puntuales) y que las modelizaciones dominantes son la discursiva y la proporcional, que corresponden a la organización clásica de la proporcionalidad. En la organización clásica, se describe la proporcionalidad como una relación de dos series de números pero los problemas y técnicas utilizadas en su mayoría siempre están relacionadas a la regla de tres, este fenómeno lo denomina la "evitación del álgebra". Comin (2000) denomina a este fenómeno como la "numeralización de la proporcionalidad", esto debe ser considerado como una

consecuencia de la algebrización desigual de los componentes de la OM. En efecto dado que la algebrización no alcanza las técnicas, los problemas de la proporcionalidad son considerados como aritméticos y la relación de proporcionalidad pasa de una relación funcional entre variables (continuas) a ser simplemente una relación aritméticas entre números

3. Es importante señalar también la presencia de los componentes de la modelización ecuacional que, según Bolea (2002), correspondería a un primer nivel de algebrización en torno a la proporcionalidad, denominado la modernización al lenguaje técnico. En este nivel surge la constante de proporcionalidad y las tareas se resuelven utilizando la relación *y=xk* para magnitudes directamente proporcionales, la relación $xy = k$ para magnitudes inversamente proporcionales y para el caso de la proporcionalidad compuesta la relación $y = k\frac{x_1 x_2 \ldots x_i}{x_{i+1} \ldots x_n}$. Asimismo, en este nivel de algebrización existe un avance tecnológico, pues las relaciones de proporcionalidad de magnitudes se admiten como relaciones entre variables numéricas, que representan medidas de cantidades de magnitud. Es decir, que al mismo tiempo que perviven elementos de la organización clásica, aparecen elementos del primer nivel de algebrización según Bosch, por ejemplo y = kx que trata la proporcionalidad como un relación de variables numéricas, eliminando completamente la relación de las magnitudes.
4. En los grados de primero y segundo de secundaria se identifica una presencia de las tareas, técnicas y discursos tecnológicos correspondientes, según García (2005), a una modelización funcional de sistemas lineales y lineales inversos, siendo la constante de proporcionalidad un elemento de articulación entre la proporcionalidad y la función. Sin embargo, la actividad matemática en torno a esta modelización no llega a cimentarse pues es diluida por las tareas clásicas en torno a las funciones, como por ejemplo, encontrar dominio y rango, crecimiento, interceptos, entre otros. En tercero, cuarto y quinto de secundaria la posibilidad de articulación de la proporcionalidad y las relaciones funcionales está descartada. Solo en el Manual del docente de cuarto de secundaria se identificó un problema aislado donde se pretende representar gráficamente la proporcionalidad como una función.
5. La gran mayoría de problemas presentes en los textos escolares ya se suponen proporcionales y se define la relación de proporcionalidad de manera implícita o

como una convención social y a partir de ello se utiliza las técnicas de la organización clásica. En cambio en el Manual para los docentes se pretende mayor reflexión en cuanto a justificar la relación de proporcionalidad entre magnitudes a través de la experimentación y de las definiciones como la constante de proporcionalidad por ejemplo, sea directa o inversa. Asimismo, podemos afirmar que varias actividades en los Manuales para los docentes están más alejadas de las tareas clásicas de proporcionalidad. Por ejemplo en el Manual para docentes de primero de secundaria encontramos la siguiente tarea de finalización: "Todo cuadrado presenta una relación entre la longitud del lado, su área y perímetro. ¿Cuáles de estas tres magnitudes son directamente proporcionales? " (p. 57). Este tipo de actividades supone entender la proporcionalidad entre magnitudes como una relación más al lado de otras posibles. El tener un mayor número de estas tareas favorecería a articular la proporcionalidad en una modelización funcional.

6. En cuanto al uso de los ostensivos podemos indicar que se identifica con mayor presencia el uso de tablas para representar relaciones de proporcionalidad directa, inversa y compuesta, tanto en los textos escolares como en los Manuales para los docentes, Asimismo, la notación clásica para representar razones y proporciones, es decir, a través de la pequeña línea horizontal que se utiliza para las fracciones, tiene también una presencia fuerte en los materiales analizados. En los textos y manuales de primero y segundo de secundaria se identifica también como ostensivos la representación cartesiana y la notación *f(x)*, que permiten articular la proporcionalidad con la función.
7. El discurso coloquial y cultural "a más, más" y "a menos, menos" aún persiste en los textos escolares y Manuales para los docentes. Aunque se trata siempre de complementar con la definición de constante de proporcionalidad, a veces no se logra. Por ejemplo, en las orientaciones del Manual para los docentes de segundo de secundaria se indica tener en cuenta que: "si una magnitud aumenta y la otra también aumenta se dice que es directamente proporcional (p.280)" Este tipo de afirmaciones podría afianzar una tecnología espontánea de los docentes en torno a la proporcionalidad y generarles confusión al momento de programar sus sesiones de aprendizaje.
8. Varias situaciones de los manuales presentan cierta desarticulación con los textos escolares que abordan tareas particulares. Se presentan técnicas que solo están

presentes en los manuales tales como: factor de conversión, uso de Excel, constante de proporcionalidad compuesta, etc.

CONSIDERACIONES FINALES

La Teoría Antropológica de lo Didáctico ha sido oportuna pues brinda las herramientas para describir y analizar cuestiones relativas al estudio del objeto matemático proporcionalidad en los documentos curriculares y materiales educativos.

En cuanto a los objetivos planteados, podemos indicar que se han cumplido por lo que señalamos que el modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad en los materiales educativos escolares difundidos a nivel nacional por el Ministerio de Educación no es el del álgebra como instrumento de modelización pues las tareas y técnicas de la modelización discursiva y de la modelización proporcional se presentan de manera dominante en todos los grados de la Educación Secundaria.

El tipo de tarea dominante en los materiales es el de determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales, en donde la reducción a la unidad, regla de tres simple y regla de tres compuesta se convierten generalmente en las técnicas empleadas en la mayoría de grados.

Las situaciones presentadas en los Manuales para los docentes pretenden una mayor reflexión por parte del estudiante, aunque es importante es importante señalar que si el docente no orienta adecuadamente el proceso de enseñanza y aprendizaje, las situaciones podrían convertirse en un ejemplo de restricción del álgebra como herramienta de modelización según Gascón *et al*, (2004) en los niveles Escuela - Pedagogía, pues se podría perder el sentido de la actividad matemática y, por tratar de despertar la motivación en los estudiantes llevarlos sin intención a un estado de desconcertación.

Aunque la presente investigación no pretende describir las características del modelo docente en torno a la proporcionalidad, es importante tener presente el modelo epistemológico dominante pues podría tener una influencia significativa.

Con nuestro estudio, dejamos la posibilidad abierta para que futuras investigaciones puedan considerar lo siguiente:

En cuanto al Modelo Epistemológico de Referencia, como propuesta alternativa al modelo epistemológico dominante, debe considerarse como relativo y temporal por lo que debe ser revisado e incluso puede ser modificado teniendo como meta la construcción de modelos didácticos cada vez más pertinentes.

Realizar estudios experimentales para analizar cómo se presenta la proporcionalidad en la organización matemática enseñada y en la organización matemática aprendida.

Realizar estudios para proponer tareas de articulación entre la proporcionalidad y la función.

Realizar estudios descriptivos en torno a la proporcionalidad analizando los textos escolares que se diseñarán con los futuros Currículos Nacionales.

REFERENCIAS

Bolea, P. (2002). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. (Tesis de doctorado en Ciencias). Universidad de Zaragoza

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001). La Transposición Didáctica de Organizaciones Matemáticas en proceso de Algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

Bosch i Casabo M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad,* (Tesis doctoral). UAB, Barcelona, España.

Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de Organizaciones Didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23 (1), 79-136.

Bosch, M.; Fonseca, C.; Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), 205-250.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74.

Chamorro, C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación. España. ISBN 84-205-3454-4.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE/Horsori, Barcelona.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique. Grupo Editor S.A., Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. Recuperado dehttp://yves.chevallard.free.f.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonctionlinéaire: caractères, cause et effets didactiques des évolutions et des réformesdans la scolarité obligatoire*. (Tesis de doctorado, Universidad de Bordeaux I, Bordeaux, Francia). Recuperado de http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905/

Fonseca Bon, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. (Tesis de doctorado en Ciencias Matemáticas). Universidad de Vigo, España.

García García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén, España.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso elemental del álgebra elemental. *In: Revista Latinoamericana de Investigación Educativa*, 14(2), 203-231.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225

Hernández, R., Fernández, C., & Batista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana. México.

Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège.* Universit de Paris. Francia.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repéres*, IREM, 59(Avril), 5-41.

Lima, E. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*: IMCA-UNI.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo, España.

Perú. Ministerio de Educación. *Currículo Nacional*. (2017). Lima.

Perú. Ministerio de Educación. *Matemática 1*. (2016). Lima. Grupo Editorial Norma.

Perú. Ministerio de Educación. *Matemática 2*. (2016). Lima. Grupo Editorial Norma.

Perú. Ministerio de Educación. *Matemática 3*. (2016). Lima. Editorial Santillana.

Perú. Ministerio de Educación. *Matemática 4*. (2016). Lima. Editorial Santillana.

Perú. Ministerio de Educación. *Matemática 5*. (2016). Lima. Editorial Santillana.

Perú. Ministerio de Educación. *Manual para el docente*. *Matemática 1*. (2016). Lima. Grupo Editorial Norma.

Perú. Ministerio de Educación. *Manual para el docente. Matemática 2*. (2016). Lima. Grupo Editorial Norma.

Perú. Ministerio de Educación. *Manual para el docente. Matemática 3*. (2016). Lima. Editorial Santillana.

Perú. Ministerio de Educación. *Manual para el docente. Matemática 4*. (2016). Lima. Editorial Santillana.

Perú. Ministerio de Educación. *Manual para el docente Matemática 5.* (2016). Lima. Editorial Santillana.

Perú. Ministerio de Educación. *Programa Curricular de Secundaria*. (2017). Lima.

Perú. Ministerio de Educación. *Rutas de aprendizaje* (2015). Lima.

Quentasi, E. (2015). *Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6747

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* (Tesis de maestría en Ciencias). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Una* alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa. (Tesis doctoral en Ciencias). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

ANEXOS

RESUMEN DE TIPOS DE TAREAS, TAREAS Y TÉCNICAS

TIPO DE TAREA	TAREA	TÉCNICA
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales	$\tau_{(1,1,1)}$ Amplificar o simplificar en el mismo espacio de medida
		$\tau_{(1,1,2)}$Reducción a la unidad
		$\tau_{(1,1,3)}$: Regla de tres simple directa $\tau_{(1,1,3')}$: Regla de tres simple directa
		$\tau_{(1,1,4)}$: Multiplicación en aspa de los elementos de razones homogéneas
		$\tau_{(1,1,5)}$: Factor de conversión
		$\tau_{(1,1,6)}$: Uso de Excel
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	$\tau_{(1,2,1)}$: Constante de proporcionalidad inversa
		$\tau_{(1,2,2)}$: Regla de tres simple inversa
		$\tau_{(1,2,3)}$Reducción a la unidad para magnitudes inversamente proporcionales
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	$\tau_{(1,3)}$: Regla de tres compuesta
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,1)}$ Constante de proporcionalidad directa en tabla
	Tarea ($t_{2,2}$): Identificar magnitudes inversamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,2)}$ Constante de proporcionalidad inversa en tabla
	Tarea ($t_{2,3}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,3)}$ Identificar magnitudes directamente e inversamente proporcionales a través de un discurso coloquial.
	Tarea ($t_{2,4}$): Determinar la constante de proporcionalidad de más de dos magnitudes en una tabla	$\tau_{(2,4)}$
(T_3): Distribuir una cantidad en partes	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	$\tau_{(3,1)}$ Reparto inverso

proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a números dados	$\tau_{(3,2,1)}$ Reparto directo
		$\tau_{(3,2,2)}$ Representación gráfica
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	$\tau_{(4,1)}$ Expresar como función lineal
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa	$\tau_{(4,2)}$: Expresar como función de proporcionalidad inversa
(T_5): Analizar la razón entre dos cantidades	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas	$\tau_{(5,1)}$ Razón
	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón	$\tau_{(5,2)}$
(T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones	$\tau_{(6,1)}$ Serie de razones
	Tarea ($t_{6,2}$): Aplicar propiedad de suma o diferencia de antecedente y consecuente	$\tau_{(6,2)}$

TIPOS DE TAREAS, TAREAS Y TÉCNICAS Y PASOS

TIPO DE TAREA	TAREA	TÉCNICA	PASOS
(T_1): Determinar el término desconocido en una relación de magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{1,1}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes directamente proporcionales	$\tau_{(1,1,1)}$ Amplificar o simplificar en el mismo espacio de medida	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 2: Multiplicar o dividir por un número la medida de una cantidad “a” para determinar “b”. Utilizar este valor para calcular los otros estados.
		$\tau_{(1,1,2)}$Reducción a la unidad	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales Paso 3: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a/a´) Paso 4: Calcular el estado correspondiente a “b” teniendo en cuenta que b´= b(a/a´)
		$\tau_{(1,1,3)}$: Regla de tres simple directa	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente

			proporcionales Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como “x” a la medida de la cantidad desconocida. Paso 6´: Establecer una proporción de razones heterogeneas con las medidas de las cantidades y la incógnita Paso 7: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y formar la ecuación lineal Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita
		$\tau_{(1,1,3')}$: Regla de tres simple directa	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como “x” a la medida de la cantidad desconocida. Paso 6´: Establecer una proporción de razones homogeneas con las medidas de las cantidades y la incógnita Paso 7: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y formar la ecuación lineal Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita
		$\tau_{(1,1,4)}$: Multiplicación en aspa de los elementos de razones homogéneas	Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como “x” a la medida de la cantidad desconocida Paso 9: Establecer una proporción de razones homogéneas con las medidas de las cantidades y la incógnita Paso 7: Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones y formar la ecuación lineal Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita
		$\tau_{(1,1,5)}$: Factor de conversión	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 1: Comprobar que las magnitudes sean directamente proporcionales Paso 3: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a/a´) Paso 4: Calcular el estado correspondiente a “b” teniendo en cuenta que b´= b(a/a´)
		$\tau_{(1,1,6)}$: Uso de Excel	Paso 39: Abrir una hoja de Excel y registrar los datos en dos columnas Paso 40: Para calcular un dato de la segunda columna usar la regla de tres simple en la barra de fórmulas

			Paso 41: Completar los datos de la segunda columna arrastrando la fórmula con la cruz negra de la parte inferior derecha de la celda Paso 42: Selecciona todos los datos de las dos columnas e inserta el gráfico “burbujas”. Coloca título a los ejes Paso 43: Identifica en el gráfico el dato solicitado
	Tarea ($t_{1,2}$): Calcular el término desconocido en una relación de dos magnitudes inversamente proporcionales	$\tau_{(1,2,1)}$: Constante de proporcionalidad inversa	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 10: Comprobar que las magnitudes sean inversamente proporcionales Paso 11: Calcular la constante de proporcionalidad inversa determinando los productos heterogéneos a.a´ = b.b´= k Paso 12: Utilizar el valor de la constante de proporcionalidad para calcular el valor desconocido
		$\tau_{(1,2,2)}$: Regla de tres simple inversa	Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla o esquema y considerar como “x” a la medida de la cantidad desconocida Paso 13: Formar una ecuación considerando la constante de proporcionalidad y el producto de medidas correspondientes Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita
		$\tau_{(1,2,3)}$Reducción a la unidad para magnitudes inversamente proporcionales	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 14: Calcular el estado correspondiente a la unidad (1,a.a´) Paso 15: Calcular el estado correspondiente a “b” teniendo en cuenta que b´= (a.a´)
	Tarea ($t_{1,3}$): Calcular el término desconocido en una relación de más de dos magnitudes proporcionales	$\tau_{(1,3)}$: Regla de tres compuesta	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 5: Organizar las medidas de las cantidades en tabla y considerar como “x” a la medida de la cantidad desconocida Paso 16: Igualar la razón que contiene la incógnita con el producto de las razones de las otras magnitudes de forma que si son directamente proporcionales no se inviertes y si son inversamente proporcionales se invierte la razón Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita
(T_2): Identificar magnitudes proporcionales	Tarea ($t_{2,1}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,1)}$ Constante de proporcionalidad directa en tabla	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad

	Tarea ($t_{2,2}$): Identificar magnitudes inversamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,2)}$ Constante de proporcionalidad inversa en tabla	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 25: Formar productos con parejas de valores correspondientes: a.a´; b.b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad inversa
	Tarea ($t_{2,3}$): Identificar magnitudes directamente proporcionales en una tabla	$\tau_{(2,3)}$ Identificar magnitudes directamente e inversamente proporcionales a través de un discurso coloquial.	Paso 0: Identificar las medidas de las cantidades a utilizar (a;a´), (b;b´), etc. Paso 32: Comprobar que las magnitudes estén directamente relacionadas, es decir si una aumenta la otra también aumenta. Paso 33: Identificar si una magnitud aumenta qué sucede con la segunda magnitud (aumenta o disminuye). Si la segunda magnitud aumenta en la misma proporción en que aumenta la primera magnitud, entonces se trata de magnitudes directamente proporcionales; en cambio si la segunda disminuye, se trata de magnitudes inversamente proporcionales.
	Tarea ($t_{2,4}$): Determinar la constante de proporcionalidad de más de dos magnitudes en una tabla	$\tau_{(2,4)}$	Paso 34: Representar las magnitudes en una tabla Paso 35: Determinar la relación de dos magnitudes, manteniendo constante las otras Paso 36: Establecer el producto de las magnitudes inversamente proporcionales Paso 37: Establecer el cociente de las magnitudes directamente proporcionales Paso 38: Determinar la relación entre todas las magnitudes y determinar la constante de proporcionalidad. La constante permitirá comprobar o determinar un término desconocido
(T_3): Distribuir una cantidad en partes proporcionales a números dados	Tarea ($t_{3,1}$): Distribuir una cantidad en partes inversamente proporcionales a números dados	$\tau_{(3,1)}$ Reparto inverso	Paso 18: Multiplicar a cada una de las inversas de los números dados una constante, puede ser “k” Paso 19: Sumar las expresiones obtenidas y formar una ecuación igualando al total Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita Paso 20: Reemplazar el valor de la constante y determinar cada una de las partes del total
	Tarea ($t_{3,2}$): Distribuir una cantidad en partes directamente	$\tau_{(3,2,1)}$ Reparto directo	Paso 21: Multiplicar a cada uno de los números dados una constante, puede ser “k” Paso 19: Sumar las expresiones obtenidas y formar una ecuación igualando al total Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita Paso 20: Reemplazar el valor de la constante y determinar cada una de las partes del total

	proporcionales a números dados	$\tau_{(3,2,2)}$ Representación gráfica	Paso 44: Utilizar barras o similares para representar en cuántas porciones se dividirá el total Paso 45: Determinar el valor de cada porción (constante de proporcionalidad) dividiendo el total entre la cantidad de porciones Paso 46: Multiplicar la constante de proporcional por la cantidad de porciones de cada parte del total
(T_4): Interpretar la relación de dos magnitudes proporcionales como una función	Tarea ($t_{4,1}$): Interpretar la relación de dos magnitudes directamente proporcionales como una función lineal	$\tau_{(4,1)}$ Expresar como función lineal	Paso 1: Verificar que las magnitudes sean directamente proporcionales Paso 17: Formar razones con parejas de valores correspondientes: a/a´; b/b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario
	Tarea ($t_{4,2}$): Interpretar la relación de dos magnitudes inversamente proporcionales como una función de proporcionalidad inversa	$\tau_{(4,2)}$: Expresar como función de proporcionalidad inversa	Paso 10: Verificar que las magnitudes sean inversamente proporcionales Paso 25: Formar productos con parejas de valores correspondientes: a.a´; b.b´, etc. y determinar la constante de proporcionalidad inversa Paso 22: Determinar la variable independiente y la dependiente Paso 23: Teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad, expresar la relación de proporcionalidad como una función a través de la regla de correspondencia Paso 24: Determinar el dato solicitado utilizando la regla de correspondencia y realizar la representación cartesiana si fuera necesario
(T_5): Analizar la razón entre dos cantidades	Tarea ($t_{5,1}$): Determinar la razón entre dos cantidades en un mismo espacio de medidas	$\tau_{(5,1)}$ Razón	Paso 26: Identificar las dos medidas de cantidades a utilizar Paso 27: Calcular el cociente de las medidas
	Tarea ($t_{5,2}$): Determinar una cantidad teniendo el valor de la razón	$\tau_{(5,2)}$	Paso 28: Identificar la razón dada Paso 29: Expresar la razón como el cociente entre las medidas de las cantidades Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita.

(T_6): Aplicar propiedades de razones y proporciones	Tarea ($t_{6,1}$): Aplicar propiedades en una serie de razones	$\tau_{(6,1)}$ Serie de razones	Paso 30: Formar una razón con las sumas de los antecedentes y consecuentes de la serie de razones dadas. Esta será la constante de proporcionalidad Paso 31: Igualar la constante de proporcionalidad con la razón del dato desconocido Paso 8: Resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita
	Tarea ($t_{6,2}$): Aplicar propiedad de suma o diferencia de antecedente y consecuente	$\tau_{(6,2)}$	Paso 47: Establecer la proporción entre las dos razones Paso 48: Formar una nueva proporción teniendo en cuenta que la suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma o diferencia entre el antecedente y consecuente de la segunda razón Paso 49: Resolver la ecuación