PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Moduli Analítico de Curvas Analíticas Irreducibles Planas

Tesis
para optar el grado de
Magister en Matemática
Presentado por:

Edison Marcavillaca Niño de Guzmán

Asesor

Dr. Percy Fernández Sánchez

Jurado
Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes
Dr. Rudy Rosas Bazán

Lima – Perú
2011

En memoria a mi primer profesor de matemáticas,
mi hermano Walter, por su infinito amor,
cariño, comprensión y apoyo.

A mi madre María del Carmen.
Por su amor incondicional,
sus muchos sacrificios
para verme alcanzar mis metas.

A mis sobrinos-hijos
Jose Vicente y Luis Enrique,
por ser mi mayor tesoro
A mi hermana Mariluz,
por su cariño y apoyo.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por iluminar y protegerme en cada paso de mi existencia.

Al Dr. Percy Fernández Sánchez, mi orientador no solo por su paciencia y cuidado durante la elaboración de este trabajo si no también por su amistad e incentivo en las horas mas adversas.

Al Dr. Marcelo E. Hernandes, por su disposición para absolver las dudas a lo largo del trabajo y por sus observaciones, para esta versión final de la tesis, como miembro del jurado.

A mi mamá Caro, mi tíos Roger y Dante, mis tías Carito y Gaby, mi familia en Lima, por acogerme y acompañarme en esta aventura.

A mi tío Maurice, por su apoyo y cariño de siempre, y ser un ejemplo a seguir.

Quiero también agradecer a la Dirección de Gestión de la Investigación de la Pontificia Universidad Católica del Perú (DGI) por el apoyo brindado en el marco del Programa de Apoyo a la Investigación para Estudiantes de Posgrado (PAIP) en el año 2011 y también dentro del Proyecto DGI-2011.0129

A mis compañeros de la maestría, que me acompañaron y apoyaron en este camino, en especial a Lisbeth, Carlos Iman, Mike y Garry con quienes compartí muchos momentos gratos.

Introducción

En la matemática es muy común tratar de clasificar objetos respecto a alguna relación de equivalencia, para realizar dicha clasificación podemos proceder de maneras diferentes, por ejemplo, podemos buscar elementos de una clase de equivalencia que se mantengan inalterados, estos elementos se llamaran invariantes. Sin embargo estos podrían no ser invariantes con otra relación de equivalencia, y por ende no tendríamos ninguna información sobre la equivalencia de dos objetos, entonces podemos abordar el problema de clasificar, obteniendo un método que nos permita encontrar un representante para cada clase de equivalencia, de manera que verificar si dos elementos son equivalentes se resume a encontrar y comparar tales representantes, que son llamados formas normales o formas canónicas. O. Zariski, en un curso dictado en la École Polytechnique [10], en 1973, inspirado por el trabajo de S. Ebey [3], expuso su investigación sobre el problema de la clasificación analítica de curvas planas pertenecientes a una clase de equisingularidad dada. Dedicando gran parte de este trabajo al análisis de ejemplos particulares, a este respecto, en la introducción de [10], Zariski escribió:

The problem of the complete description of the moduli space M of a given equisingularity class is entirely open, and the few examples of chapter V show that M has a structure that is too complex to hope for complete solution to the problem.

The somewhat more restrictive question of the determination of the dimension of the "generic component" of M is not solved.

Abramo Hefez y Marcelo E. Hernandes [6], en el 2007 dan fin al problema dado por O. Zariski, ellos mostraron como quebrar la complejidad del espacio Moduli estratificando la clase de equisingularidad dada por medio de un buen invariante numérico que separe las curvas en muchos tipos, tal que la equivalencia analítica en cada estrato sea manejable. Esto se logra considerando el conjunto de valores de los diferenciales de Kähler sobre curvas como un invariante numérico más fino que el semigrupo de valores que caracteriza la clase de equisingularidad. Si estratificamos un abierto del espacio afín que representa el espacio de una clase de equisingularidad, correspondiente a la parametrización de Puiseux con pares de Puiseux fijos, y escogemos un conjunto de representantes especiales en una forma normal específica para cada estrato, entonces la acción del grupo que representa la equivalencia analítica se torna algo trivial, dando una solución general al problema planteado por Zariski. Para este efecto Hefez y Hernandes en [6] fusionan dos técnicas. El primero es el uso del algoritmo SAGBI, dado por L. Robbiano y M. Sweedler [8], el cual es adaptado en [5] y [6], para describir bases privilegiadas de los anillos locales de curvas planas también del modulo de diferenciales de Kähler de estos anillos locales. Permitiendo calcular el conjunto de invariantes de los diferenciales de Kähler. La segunda técnica es el algoritmo de la Transversal Completa dado por J.W. Bruce, N.P. Kirk y A.A du Plessis [2], esto permite determinar todas las formas normales de los gérmenes bajo una acción del grupo de Mather, Pero no permite pronosticar a priori cual será el resultado saliente, el poder del método dado por Hefez y Hernandes está en conjugar estas dos técnicas, vía la existencia de algunos diferenciales, para controlar cada paso de la transversal completa, dando explícitamente todas las posibles formas normales y condiciones para la equivalencia analítica de gérmenes en formas normales.

En el primer capítulo de esta tesis, se dan las nociones básicas a ser utilizadas a lo largo del texto. Introducimos el concepto de curva algebraica irreducible plana o rama plana y se estudia su parametrización dada por el Teorema de Newton-Puiseux. Luego estudiamos el anillo local de una rama plana, el semigrupo de valores asociado a una curva algebraica plana, y Finalizamos el capítulo con una sección dedicada específicamente a las curva analíticas.

El segundo capítulo contiene los resultados de la teoría de singularidades que utilizaremos. Introduciremos el concepto de germen de aplicaciones, así como las relaciones de equivalencia entre gérmenes, que son $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$ y la $\mathcal{K}$-equivalencia. También presentaremos la relación entre la equivalencia analítica de curvas analíticas planas irreducibles y la $\mathcal{K}$-equivalencia de sus ecuaciones y la $\mathcal{A}$-equivalencia de sus parametrizaciones. La parte central de este capitulo esta dedicada al teorema de la transversal completa, cerrando este capitulo aplicando el teorema de la transversal completa presentando las formas normales para las curvas planas analíticas irreducibles con semigrupo $\langle 3, v_1 \rangle$ y $\langle 4, 7 \rangle$.

En el ultimo capítulo introducimos el concepto de diferenciales de Kähler, el conjunto de valores de las diferenciales de Kähler que es un invariante bajo la equivalencia analítica de curvas. Dedicando el resto del capítulo a la demostración de la existencia y unicidad de las $\mathcal{A}$-formas normales, comenzando con las formas normales bajo la $\mathcal{A}_1$-acción, para luego pasar de la $\mathcal{A}_1$-equivalencia a la $\widetilde{\mathcal{A}}$-equivalencia y finalmente aplicar la $\mathcal{H}$-acción, para obtener las $\mathcal{A}$-formas normales.

Índice general

Capítulo 1

Curvas Algebraicas Planas

Para este primer capítulo tomaremos de referencia [4], en este capítulo presentaremos resultados que serán la base para desarrollar el trabajo. Entre estos podemos citar, definiciones y propiedades básicas sobre curvas algebraicas planas, el teorema de preparación de Weierstrass, parametrización de Newton-Puiseux y los exponentes característicos.

1.1. Definiciones y Primeras Propiedades de Curvas Algebraicas Planas

Sea $\mathbb{C}[[X,Y]]$ el anillo de series de potencias formales, con coeficientes en $\mathbb{C}$. El conjunto $\mathcal{M} = \{f \in \mathbb{C}[[X,Y]]/f(0) = 0\}$, es su único ideal maximal, generado por X e Y. Si $f \in \mathbb{C}[[X,Y]] \setminus \{0\}$, entonces

$$f = \sum_{i=n}^{\infty} F_i = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots$$

donde cada F_i es un polinomio homogéneo de grado i, consideraremos el polinomio cero como un polinomio homogéneo de cualquier grado. Si $F_n \neq 0$ diremos que este es la *forma inicial* de f y llamaremos al entero n la multiplicidad de f, denotado por $mult(f) = n$. Por convención, si $f = 0$. decimos que $mult(f) = \infty$.

Fácilmente podemos verificar los siguientes resultados.

Proposición 1.1. *Un elemento $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ es inversible si, y sólo si, $F_o \neq 0$.*

Proposición 1.2. *Sean $f, g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$. Entonces,*

1. $mult(f \cdot g) = mult(f) + mult(g)$
2. $mult(f \pm g) \geq min\{mult(f), mult(g)\}$, *con la igualdad cuando* $mult(f) \neq mult(g)$.

Si $u \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que $u(0) \neq 0$ diremos que este es una unidad de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Así tenemos que dos elementos $f, g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ son llamados *asociados* si existe una unidad u tal que $f = ug$, esta relación de asociados es una relación de equivalencia; esto es

$$f \sim g \Leftrightarrow f = u \cdot g.$$

Ahora introduciremos uno de los objetos centrales de este trabajo, curva algebraica plana.

Definición 1.3. *Sea f un elemento no nulo de $\mathcal{M}$, una* curva algebraica plana $\mathcal{C}_f$ *es una clase de equivalencia de f, módulo la relación de asociados. Esto significa*

$$\mathcal{C}_f = \{u \cdot f / u \text{ es una unidad en } \mathbb{C}[[X,Y]]\}.$$

Por tanto, de la definición tenemos que; $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g$ si, y solamente si, existe una unidad $u \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que $f = ug$.

Observemos que la multiplicidad de una serie de potencias formal, es invariante bajo la multiplicación por una unidad. Así, podemos definir *multiplicidad de una curva algebraica plana $\mathcal{C}_f$*, como la multiplicidad de la serie de potencias f. Cuando una curva algebraica plana posee multiplicidad igual a uno, es llamada *regular*. En caso esta multiplicidad sea mayor que uno, decimos que la curva algebraica plana es *singular*.

Decimos que una curva algebraica plana $\mathcal{C}_f$ es *irreducible*, si la serie de potencias formal f es irreducible en $\mathbb{C}[[X,Y]]$.

Muchas de las propiedades de una curva algebraica plana son preservadas por un cambio de coordenadas en $\mathbb{C}[[X,Y]]$, esto es, a través de un $\mathbb{C}$-automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.4. *Dadas las curvas algebraicas planas $\mathcal{C}_f$ y $\mathcal{C}_g$, con $f, g \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[X,Y]]$, diremos que ellas son* equivalentes*, denotado por $\mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$, si existe un $\mathbb{C}$-automorfismo Φ de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que*

$$\Phi(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_g.$$

En otras palabras $\mathcal{C}_f$ y $\mathcal{C}_g$ son equivalentes, si existen un $\mathbb{C}$-automorfismo Φ y una unidad u de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que

$$\Phi(\mathcal{C}_f) = u \cdot g.$$

Observación 1.5. *Un problema central en la teoría de curvas algebraicas planas, es realizar la clasificación de las curvas algebraicas planas módulo la relación de* *equivalencia $\sim$, definida arriba. Este problema permaneció abierto por mucho tiempo, siendo los matemáticos A. HEFEZ y M. HERNANDES que ponen fin a este problema en [7].*

Para poder ver la dificultad de este problema, consideremos las curvas algebraicas planas dadas por:

$$f = Y^3 - X^5$$

y

$g = (-2 - X)Y^6 + (-2 - X)Y^5 + (-24X - 12X^2)Y^4 + (-108X^2 - 90X^3)Y^3 + (-6X^2 - 543X^3 - 270X^4)Y^2 + (-810X^4 - 405X^5)Y - 243X^6 - 486X^5 + X^4 + 2X^3$. Apropósito de estas curvas. ¿Son estas equivalentes?.

Lo primero que podemos decir es que ambas tienen la misma multiplicidad, mas esto no implica que estas sean equivalentes. Sin embargo g esta dada, de modo que

$$\Phi(f) = u \cdot g.$$

donde

$$u(X, Y) = (2 + X)^{-1}$$

y

$$\Phi(X, Y) = (3X + Y, X - Y^2)$$

lo que implica que, $\mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$. Esto muestra cuan difícil puede ser responder si dos curvas algebraicas planas son equivalentes.

Como dijimos muchas propiedades de una curva algebraica son preservadas a través de un $\mathbb{C}$-automorfismo, así como la irreducibilidad y su multiplicidad, como vimos, decir que dos curvas son equivalentes se resumía a encontrar un $\mathbb{C}$-automorfismo, tal que $\Phi(f) = u \cdot g$, entonces estas también se preservan por equivalencia de curvas.

En efecto, tenemos que f es reducible si, y solamente si, $g = u^{-1}\Phi(f)$ es reducible, donde Φ es un automorfismo y u es una unidad de $\mathbb{C}[[X, Y]]$, en efecto supongamos que f es reducible, esto es $f = \prod_{i=1}^{r} f_i$ con f_i irreducible, entonces tenemos que

$$g = u^{-1}\Phi(f) = u^{-1}\Phi(\prod_{i=1}^{r} f_i) = u^{-1}\prod_{i=1}^{r}\Phi(f_i).$$

Por tanto g es reducible. Tomando $r = 1$ tenemos que f es irreducible, por tanto g también es irreducible.

Ahora veamos que la equivalencia de curvas preserva la multiplicidad. En efecto, consideremos $f = \sum_{i=m}^{\infty} F_i$, donde la $mult(f) = m$. Debemos mostrar que la $mult(g) = m$, donde $g = U^{-1}\Phi(f)$.

Observemos que

$$g = u^{-1}\Phi(f) = u^{-1}\Phi(\sum_{i=1}^{r} F_i) = u^{-1}\sum_{i=1}^{r}\Phi(F_i).$$

Analicemos $\Phi(F_i)$, como F_i es homogéneo de grado i, o sea,

$$F_i = \sum_{j+k=i} a_{jk}X^jY^k.$$

Como Φ es automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X,Y]] \\ X & \longmapsto & aX + bY + \text{términos de orden superior} \\ Y & \longmapsto & cX + dY + \text{términos de orden superior} \end{array}$$

satisfaciendo $ad - bc \neq 0$. Así,

$$\Phi(F_i) = \sum_{j+k=i} a_{jk}\Phi(X)^j\Phi(Y)^k.$$

Vemos que $mult(\Phi(X)) = 1$ y $mult(\Phi(Y)) = 1$. Luego

$$mult(\Phi(X)^j\Phi(Y)^k) = j + k = i.$$

Por lo tanto,

$$mult(\Phi(F_i)) = i \text{ y } mult(g) = m.$$

1.2. Teorema de Preparación de Weierstrass

En esta sección estudiaremos algunas propiedades algebraicas del anillo de series de potencias formales. El objetivo central es presentar el teorema de preparación de Weierstrass.

Definición 1.6. *Diremos que $f \in \mathbb{C}[[X,Y]] \setminus \{0\}$ es regular de orden n con respecto a la variable Y (resp. X) si $f(0,Y)$(resp. $f(X,0)$) es divisible por Y^n (resp. X^n).*

Decimos también, que f es **regular** en Y (resp. X), cuando f es regular con respecto a Y (resp. X) de orden $n = mult(f)$.

Ejemplo 1.7. *Consideremos $f(X,Y) = Y^4 - 2X^5Y^2 - 4X^7Y + X^{10} \in \mathbb{C}[[X,Y]]$. Notemos que $f(X,0) = X^{10}$, esto es, f es regular de orden 10 con respecto a la variable X, además de esto, tenemos que $f(0,Y) = Y^4$, ósea f es regular en Y, pues $mult(f) = 4$.*

Proposición 1.8. *Sea* $f \in \mathbb{C}[[X,Y]] \setminus \{0\}$ *con* $mult(f) = n$*. Entonces existe un* $\mathbb{C}$*-automorfismo lineal* ψ *de* $\mathbb{C}[[X,Y]]$ *tal que* $\psi(f)$ *es regular en* Y *(o en* X*).*

Demostración. Sea $f(X,Y) = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots$, donde cada F_i es un polinomio homogéneo de grado i. Escribiendo F_n en la forma $F_n(X,Y) = a_{n,0}Y^n + a_{n-1,1}Y^{n-1}X + \cdots + a_{1,n-1}YX^{n-1} + a_{0,n}X^n$, así tenemos que,

$$F_n(X,1) = a_{n,0} + a_{n-1,1}X + \cdots + a_{1,n-1}X^{n-1} + a_{0,n}X^n \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$$

que admite raíces en $\mathbb{C}$, digamos $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. De esta forma si tomamos $\alpha \in \mathbb{C} \setminus R$, tenemos que $F_n(\alpha, 1) \neq 0$.

Ahora, consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X,Y]] \\ X & \longmapsto & X - \alpha Y \\ Y & \longmapsto & Y. \end{array}$$

Notemos que ψ es un $\mathbb{C}$-automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. En efecto, observemos que las formas iniciales de $\psi(X)$ y $\psi(Y)$ son, respectivamente, $L_1 = X + \alpha Y$ y $L_2 = Y$, esto es, L_1 y L_2 son linealmente independientes, entonces tenemos que ψ es un $\mathbb{C}$-automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$.

Denotando $g(X,Y) = \psi(f(X,Y)) = f(X + \alpha Y, Y)$ tenemos que g es regular en Y.En efecto, como

$$\psi(f(X,Y)) = f(X + \alpha Y, Y) = F_n(X + \alpha Y, Y) + F_{n+1}(X + \alpha Y, Y) + \cdots ,$$

tenemos que

$$g(0,Y) = f(0 + \alpha Y, Y) = F_n(\alpha Y, Y) + F_{n+1}(\alpha Y, Y) + \cdots .$$

Observemos que basta mostrar que $F_n(\alpha Y, Y)$ es regular en Y, pues ningún término de $F_n(\alpha Y, Y)$ se cancela con térnimos de $F_{n+1}(\alpha Y, Y) + \cdots$. pero

$$F_n(\alpha Y, Y) = a_{n,0}Y^n + a_{n-1,1}\alpha Y^n + \cdots + a_{1,n-1}\alpha^{n-1}Y^n + a_{0,n}\alpha^n Y^n,$$

o sea,

$$F_n(\alpha Y, Y) = Y^n(a_{n,0} + a_{n-1,1}\alpha + \cdots + a_{1,n-1}\alpha^{n-1} + a_{0,n}\alpha^n) = Y^n \cdot F_n(\alpha, 1),$$

donde, como vimos anteriormente, $F_n(\alpha, 1) \neq 0$. Luego, $F_n(\alpha Y, Y)$ es regular en Y y por lo tanto $\psi(f(X,Y))$ también lo es. $\square$

Veamos un ejemplo que nos permita visualizar mejor este resultado.

Ejemplo 1.9. *Consideremos la serie de potencias* $f(X,Y) = X^3Y + XY^3 + X^4Y^2$. *Podemos escribir* f *en polinomios homogéneos de la siguiente manera,*

$$f(X,Y) = F_4(X,Y) + F_6(X,Y),$$

donde $F_4(X,Y) = X^3Y + XY^3$. *Notemos que* $F_3(X,1) = X^3 + X$, *entonces las raíces de este polinomio en* $\mathbb{C}$, *son* $\{0, i, -i\}$, *tomando* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$, *tenemos que* $F_3(\alpha, 1) \neq 0$. *En particular, tomemos* $\alpha = 1$.

De esta manera, considerando el $\mathbb{C} - automorfismo$ *de* $\mathbb{C}[[X,Y]]$

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X,Y]] \\ X & \longmapsto & X+Y \\ Y & \longmapsto & Y, \end{array}$$

tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \psi(f(X,Y)) & = & f(X+Y,Y) = F_4(X+Y,Y) + F_6(X+Y,Y) \\ & = & (X+Y)^3Y + (X+Y)Y^3 + (X+Y)^4Y^2 \\ & = & X^3Y + 3X^2Y^2 + 4XY^3 + 2Y^4 + X^4Y^2 + 4X^3Y^3 + \\ & & 6X^2Y^4 + 4XY^5 + Y^6 \\ & = & 2Y^4 + X^3Y + 3X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^6 + X^4Y^2 + \\ & & 4X^3Y^3 + 6X^2Y^4 + 4XY^5, \end{array}$$

poniendo $g(X,Y) = \psi(f(X,Y))$, *tenemos que* $g(0,Y) = 2Y^4 + Y^6 = Y^4(2+Y^2)$, *esto es,* $\psi(f(X,Y))$ *es regular en* Y

El teorema que sigue, desempeña un papel importante en la teoría de singularidades. Pues como un corolario de este se tiene el teorema de preparación Weierstrass.

Teorema 1.10 (Teorema de División de Weierstrass)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[X,Y]]$ *regular en* Y *de orden* $n \geq 1$. *Dado* $g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ *existen* $q \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ *y* $r \in \mathbb{C}[[X]][Y]$, *con* $r = 0$ *ó* $grad_Y(r) < n$, *únicamente determinados tales que* $g = qf + r$.

Demostración. Escribamos

$$f(X,Y) = f_0(Y) + f_1(Y)X + \cdots + f_m(Y)X^m + \cdots,$$

$$g(X,Y) = g_0(Y) + g_1(Y)X + \cdots + g_m(Y)X^m + \cdots,$$

$$q(X,Y) = q_0(Y) + q_1(Y)X + \cdots + q_m(Y)X^m + \cdots,$$

$$r(X,Y) = r_0(Y) + r_1(Y)X + \cdots + r_m(Y)X^m + \cdots.$$

Con $grado_Y r_j(Y) < n$ para $j > 0$, la ecuación requerida $g = qf + r$ ó

$$g_m(Y) = \sum_{i+j=m} q_i(Y)f_j(Y) + r_m(Y) \text{ para cada } m \geq 0 \tag{1.1}$$

es equivalente a las siguientes:

$$\begin{array}{rcl} g_0 & = & q_0 f_0 + r_0, \\ g_1 & = & q_0 f_1 + q_1 f_0 + r_1, \\ & \vdots & \\ g_i & = & q_i f_0 + \cdots + q_{i-1} f_1 + q_i f_0 + r_i \\ & \vdots & \end{array}$$

Desde que f es regular en Y de orden n tenemos que $f(0,Y) \neq 0$. también

$$grad_Y(f(0,Y)) = n$$

esto implica que $grad_Y(f_0(0,Y)) = n$.

$$g(0,Y) = q(0,Y)f(0,Y) + r(0,Y)$$

$$g_0(Y) = q_0(Y)f_0(Y) + r_0(Y)$$

observemos que

$$\begin{array}{rcl} g_0(Y) & = & a_0 + a_1 Y + \cdots + a_{n-1}Y^{n-1} + \cdots \\ f_0(Y) & = & b_n Y^n + a_{n+1}Y^{n+1} + \cdots \\ r_0(Y) & = & c_0 + c_1 Y + \cdots + c_{n-1}Y^{n-1} \end{array}$$

para que se cumpla (1.1) el caso en que $m = 0$, debemos tener $r_0(Y) = g_0(Y) - a_n Y^n + \cdots$, entonces tendríamos

$$a_n Y^n + \cdots = q_0(Y)(b_n Y^n + a_{n+1}Y^{n+1} + \cdots)$$

además

$$q_0(Y)(b_n Y^n + a_{n+1}Y^{n+1} + \cdots) = b_n q_0(Y) Y^n u(Y)$$

donde $u(Y)$ es una unidad en $\mathbb{C}[[Y]]$ y esto implica que

$$q_0(Y) = \frac{(a_n Y^n + a_{n+1}Y^{n+1} + \cdots)u^{-1}(Y)}{b_n} Y^n.$$

Así el caso $m = 0$ que establecido.

Sea $m > 0$, y supongamos que existen $q_i(Y)$ para $1 \leq i < m$ y $r_i(Y)$ con $grad_Y r_i(Y) < n$ para $1 \leq i < m$ que satisfacen (1.1).

Ahora tenemos que hallar $q_m(Y)$ y $r_m(Y)$ con $grad_Y r_m(Y) < n$ tal que satisfagan la ecuación

$$g_m(Y) = \sum_{i+j=m} q_i(Y) f_j(Y) + r_m(Y).$$

Es decir,

$$g_m = q_0 f_m + \cdots + q_{m-1} f_1 + q_m f_0 + r_m,$$

para que se cumpla (1.1) para el caso m, definamos $r_m(Y)$ como la suma de los términos de grado menor que n en $g_m - q_0 f_m - \cdots - q_{m-1}f_1$ y así obtenemos q_m como para el primer caso, esto es

$$q_m(Y) = \frac{(\alpha_n Y^n + \alpha_{n+1}Y^{n+1} + \cdots)u^{-1}(Y)}{b_n} Y^n,$$

donde $\alpha_n Y^n + \alpha_{n+1}Y^{n+1} + \cdots$ son los términos de grado mayor o igual a n en $g_m - q_0 f_m - \cdots - q_{m-1}f_1$.

Así, $q_i(Y)$ para $i > 0$ y $r_j(Y)$, con $grad_Y r_j(Y) < n$, satisfacen (1.1) para el caso m.

Para La unicidad, nuevamente procedamos por inducción. Desde que $q_0(Y)$ es único, supongamos que $q_j(Y)$ y r_j son únicos para $i < m$ y $j < m$. Entonces, por la construcción de $q_m(Y)$ y $r_m(Y)$, se sigue su unicidad.

□

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.11 (Teorema de Preparación de Weierstrass). *Sea $f \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[X,Y]]$ regular en Y y $mult(f) = n \geq 1$, entonces existe una unidad $u \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que*

$$u(X,Y)f(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n+1} + \cdots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X),$$

con $a_i(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ y $mult(a_i(X)) \geq i$.

Demostración. La prueba de la existencia se sigue del teorema de División tomando $g = Y^n$, pues de este modo existe una unidad $q \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ y $r \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ con $grad_Y r < n$ tales que

$$g = qf + r.$$

Escribiendo $r = b_1(X)Y^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(X)Y + b_n(X)$ y $q = u$ se tiene que

$$Y^n = uf + b_1(X)Y^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(X)Y + b_n(X),$$

o sea

$$uf = Y^n - (b_1(X)Y^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(X)Y + b_n(X)).$$

Denotando $a_i(X) = -b_i(X)$, obtenemos

$$uf = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X).$$

Calculando la multiplicidad de ambos lados, se tiene que $mult(a_i(X)) \geq i$ □

Observación 1.12. *Un Polinomio de Weierstrass en Y es una serie de potencias en $\mathbb{C}[[X,Y]]$ de la forma*

$$P(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n+1} + \cdots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X), \tag{1.2}$$

tal que $n \geq 1$ y $mult(a_i) \geq i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 1.13. *Vamos a preparar a la Weierstrass la serie $f = XY - Y^3 + Y^4$. escribiendo $f = \overline{f} + f_4$ donde $\overline{f} = XY - Y^3$ y $f_4 = Y^4$, y usando el teorema de preparación Weierstrass tenemos*
$Y^3 = -1\overline{f} + XY = -f + Y^4 + XY$.
Pero,

$$Y^4 = -Y\overline{f} + XY^2.$$

Así,

$$Y^3 = (-1 - Y)f + Y^5 + XY + XY^2.$$

Como,

$$Y^5 = (-Y^2 - X)\overline{f} + X^2Y,$$

obtenemos,

$$Y^3 = (-1 - X - Y - Y^2)f + Y^6 + XY^4 + XY + XY^2 + X^2Y.$$

Pero,

$$Y^6 + XY^4 = (-Y^3 - 2XY)\overline{f} + 2X^2Y^2.$$

Luego,

$$Y^3 = (-1 - X - Y - Y^2)f + (Y^3 + 2XY)Y^4 + XY + XY^2 + X^2Y + 2X^2Y^2.$$

Continuando con el proceso, tenemos

$$(-1 - X - Y - Y^2 + \cdots)f = Y^3 - (X + 2X^2 + \cdots)Y^2 - (X + X^2 + \cdots)Y.$$

Observación 1.14. *Usando la proposición 1.8 y el teorema anterior podemos asumir que una curva algebraica plana, es dada, a menos de un cambio de coordenadas, por un polinomio de Weierstrass, i.e.,*

$$Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X),$$

con $mult(a_i(X)) \geq i$, para $i = 1, ..., n$.

1.3. Teorema de Newton Puiseux

Desde que toda curva es equivalente a una curva definida por un Polinomio de Weierstrass en $\mathbb{C}[[X]][Y]$, es de gran utilidad determinar las raíces de este polinomio en la clausura algebraica de $\mathbb{C}((X))$. Ésta es la estrategia que usaremos para el estudio de curvas algebraicas planas irreducibles.

Donde $\mathbb{C}((X))$ denota el cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[[X]]$ y $\overline{\mathbb{C}((X))}$ su clausura algebraica, siendo todo elemento $h \in \mathbb{C}((X))$ de la forma

$$a_{-m}X^{-m} + a_{-m+1}X^{-m+1} + \cdots + a_{-1}X^{-1} + a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots ,$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y los $a_i \in \mathbb{C}$.
El teorema de Newton-Puiseux desempeña un papel fundamental en la teoría de curvas algebraicas planas definidas sobre $\mathbb{C}$, pues este nos da un medio como expresar las raíces del polinomio de la forma (1.2) como una parametrización llamada mas adelante parametrización de Puiseux.

Claramente $\overline{\mathbb{C}((X))}$ debe contener las raíces de las ecuaciones $Y^n - X = 0$, para todo entero positivo n. Luego debe de contener los elementos de la forma $X^{\frac{1}{n}}$, sujetas a las relaciones del tipo:

1. $X^{\frac{1}{1}} = X$,
2. $(X^{\frac{m}{rn}})^r = X^{m/n}, \forall n, m, r \in \mathbb{Z}\ y\ n, r > 0.$

De este modo, obtenemos extensiones $\mathbb{C}((X^{1/n}))$ de $\mathbb{C}((X))$, las cuales son finitas y galosianas, como mostraremos después. Recordemos la siguiente definición de teoría de campos.

Definición 1.15. *Sea F/k una extensión de cuerpo. Si el grupo*

$$G(F/k) = \{\sigma : F \longrightarrow F/\sigma\ es\ un\ k - automorfismo\},$$

es finito y su cuerpo fijo es k, esto es,

$$\{a \in F/\sigma(a) = a, para\ todo\ \sigma \in G(F/k)\} = k,$$

entonces la extensión es llamada galosiana y $G(F/k)$ es su grupo de Galois.

Denotemos por U_n el grupo multiplicativo de las raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$.

Lema 1.16. *La extensión de cuerpos $G(\mathbb{C}((X^{1/n}))/\mathbb{C}((X)))$ es finito y galosiano con grupo de Galois isomorfo al grupo U_n.*

Demostración. Pongamos $G = G(\mathbb{C}((X^{1/n}))/\mathbb{C}((X)))$, y sea $\sigma \in G$. desde que σ es un $\mathbb{C}((X))$-automorfismo de $\mathbb{C}((X^{1/n}))$, para alguna unidad $b_\sigma \in \mathbb{C}((X^{\frac{1}{n}}))$, tenemos

$$\sigma(X^{1/n}) = b_\sigma X^{1/n},$$

y

$$b_\sigma^n X = (\sigma(X^{1/n}))^n = \sigma((X^{1/n})^n) = \sigma(X) = X.$$

Por lo tanto $b_\sigma^n = 1$ y $b_\sigma \in U_n$.
La aplicación $h : G \longrightarrow U_n$ definida por $h(\sigma) = b_\sigma$ es un isomorfismo de grupos.
En efecto; si $\sigma \in G$, entonces

$$b_{\rho\circ\sigma} X^{1/n} = \rho \circ \sigma(X^{1/n} = \rho(b_\sigma X^{1/n} = b_\sigma \rho(X^{1/n}) = b_\sigma b_\rho X^{1/n},$$

entonces $b_{\rho\circ\sigma} = b_\sigma b_\rho$ y por lo tanto h es un homomorfismo de grupos.
Supongamos ahora que $b_\sigma = b_\rho$. Desde que

$$\sigma(\sum b_i X^{1/n}) = \sum b_i b_\sigma^i X^{1/n} = \sum b_i b_\rho^i X^{1/n} = \rho(\sum b_i X^{1/n}),$$

se sigue que $\sigma = \rho$ y por lo tanto h es inyectiva. La sobreyectividad de h se obtiene de la definición de σ. Por lo tanto G es isomorfo a U_n.
Ahora probaremos que el cuerpo fijo de G es precisamente $\mathbb{C}((X))$. Supongamos que $\sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}$ es invariante por la acción de elementos de G, i.e.,

$$\sigma(\sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}) = \sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}, \forall \sigma \in G$$

Pero, para todo $\xi \in U_n$ tenemos;

$$\sigma(\sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}) = \sum_{i\geq i_0} b_i \xi^i X^{\frac{i}{n}} = \sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}.$$

Por lo tanto $b_i = b_i \xi^i$. Como ξ es una raíz de la unidad, entonces $b_i = 0$ para todo i que no sea divisible por n, esto implica que $\sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}} \in \mathbb{C}((X))$, esto concluye la prueba. □

Este lema también prueba que todas las extensiones $\mathbb{C}((X^{1/n}))$ están todos contenidos en $\overline{\mathbb{C}((X))}$. Por lo tanto podemos definir

$$\mathbb{C}((X))^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}((X^{1/n})) \subset \overline{\mathbb{C}((X))}.$$

Los elementos de $\mathbb{C}((X))^*$ son escritos de la forma

$$\alpha = b_1 X^{p_1/q_1} + b_2 X^{p_2/q_2} + \cdots, \tag{1.3}$$

con $b_1, b_2, ... \in \mathbb{C}, p_i, q_i \in \mathbb{Z}, q_i > 0$ para todo i, y

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots ,$$

donde el conjunto $\{\frac{p_i}{q_i}; i \in \mathbb{N}\backslash 0\}$ admite un denominador común. Si $b_1 \neq 0, \frac{p_1}{q_1}$ es llamada la multiplicidad de α.
También definimos

$$\mathbb{C}[[X]]^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}[[X^{1/n}]].$$

Por lo tanto, cualquier elemento α de $\mathbb{C}[[X]]^*$ es de la forma (1.3) con $mult(\alpha) \geq 0$. Ahora veamos un teorema fundamental para hallar las parametrizaciones de una curva.

Teorema 1.17. *Tenemos que* $\overline{\mathbb{C}((X))} = \mathbb{C}((X))^*$.

Demostración. Como todo elemento de $\mathbb{C}((X))^*$ es algebraico sobre $\mathbb{C}((X))$, basta probar que $\mathbb{C}((X))^*$ es algebraicamente cerrado. Para esto, basta mostrar que todo polinomio en $\mathbb{C}((X))^*[Y]$ de la siguiente forma

$$p(X,Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in \mathbb{C}((X))^*[Y],$$

posee una raíz $\varphi \in \mathbb{C}((X))^*$.

Para $n = 1$ y $a_0(X) \neq 0$ basta tomar $\varphi = \frac{a_1(X)}{a_0(X)}$, si $a_0(X) = 0$ φ será trivial. Sea $n \geq 2$, para nuestro propósito es suficiente probar que $p(X,Y)$ sea reducible en $\mathbb{C}((X))^*[Y]$.Sin perdida de generalidad, supongamos que $a_0(X) = 1$.

Usemos un cambio de variables que nos permita eliminar en $p(X,Y)$ el término de grado $n-1$. En efecto, consideremos el $\mathbb{C}((X))^*$-isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C}((X))^*[Y] & \longrightarrow & \mathbb{C}((X))^*[Z] \\ Y & \longmapsto & Z - n^{-1}a_1(X) \end{array}$$

Y tomando

$$q(X;Z) = \Phi(p(X,Y)) = p(X, Z - n^{-1}a_1(X)) = Z^n + b_2(X)Z^{n-2} + \cdots + b_n(X),$$

donde $b_i(X) \in \mathbb{C}((X))^*$, para $i = 2, ..., n$.

Si $b_i(X) = 0$,para todo $i = 2, ..., n$, se tendría que q es reducible en $\mathbb{C}((X))^*[Z]$, y como Φ es un $\mathbb{C}((X))^*$-isomorfismo se sigue que $p(X,Y)$ es reducible en $\mathbb{C}((X))^*[Y]$. Y terminaría la prueba Supongamos que existe un índice i tal que $b_i(X) \neq 0$. Ahora transformemos el polinomio $q(X;Z)$ de manera que obtengamos un elemento de $\mathbb{C}[[W]]^*[Z]$ para algún W.

Denotemos por m_i la multiplicidad de $b_i(X)$ y pongamos

$$m = min\{\frac{m_i}{i}/2 \leq i \leq n\}.$$

Sea r, tal que $m = \frac{m_r}{r}$ y consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{C}((X))^*[Z] & \longrightarrow & \mathbb{C}((W))^*[Z] \\ f(X,Y) & \longmapsto & f(W^r, ZW^{m_r}). \end{array}$$

Ψ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras y por lo tanto preserva los grados de los polinomios en Z.

Sea

$$\begin{array}{rcl} h(W,Z) & = & W^{-nm_r}\Psi(q(X,Z)) = W^{nm_r}q(W^r, ZW^{m_r}) \\ & = & W^{nm_r}((ZW^{m_r})^n + b_2(W^r)(ZW^{m_r})^{n-2} + \cdots + b_n(W^r)) \\ & = & Z^n + b_2(W^r)W^{-2m-r}Z^{n-1} + \cdots + b_n(W^r)W^{-nm_r}. \end{array}$$

Así

$$h(W,Z) = Z^n + c_2(W)Z^{n-2} + \cdots + c_n(W) \tag{1.4}$$

con $c_i(W) = b_i(W^r)W^{-im_r}, (i = 2, ..., n)$. Tenemos entonces que

$$mult(c_i) = rm_i - im_r \geq 0,$$

con la igualdad para $i = r$. Asimismo, $c_r(0) \neq 0$ y $c_i(W) \in \mathbb{C}[[W]]^*, 2 \leq i \leq n$. Entonces existe un entero positivo k tal que

$$h(W^k, Z) = Z^n + \sum_{i=2}^{n} c_i(W^k)Z^{n-i} \in \mathbb{C}[[W]][Z].$$

Desde que $c_r(0) \neq 0$ y la característica de $\mathbb{C}$ es cero, entonces $h(0,Z)$ que es un elemento de $\mathbb{C}[Z]$,tiene al menos dos raíces distintas, Así que por el lema de Hensel (ver [4, teorema 1.16]) existen $h_1(W,Z), h_2(W,Z) \in \mathbb{C}[[W]][Z]$ con grado mayor o igual dos, tal que

$$h(W^k, Z) = h_1(W,Z)h_2(W,Z).$$

De esto y de (1.4) se sigue que

$$\Psi(q(X,Z)) = W^{nm_r}h(W,Z) = W^{nm_r}h_1(W^{1/k}, Z)h_2(W^{1/k}, Z),$$

y por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} q(X,Z) & = & \Psi^{-1}(W^{nm_r}h_1(W^{1/k}, Z)h_2(W^{1/k}, Z)) \\ & = & X^{\frac{nm_r}{r}}\Psi^{-1}(W^{nm_r}h_1(W^{1/k}, Z))\Psi^{-1}(h_2(W^{1/k}, Z)). \end{array}$$

Y con esto vemos que $q(X,Z)$ es reducible en $\mathbb{C}((X))^*[Z]$ y por lo tanto $p(X,Y)$ es reducible en $\mathbb{C}((X))^*[Y]$ $\square$

Desde que el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{C}((X^{1/n}))/\mathbb{C}((X))$ es isomorfo a U_n, tenemos que un elemento ρ de U_n actúa sobre un elemento

$$\alpha = \sum_{i\geq i_0} b_i(X^{1/n})^i = \sum_{i\geq i_0} b_i(X^{\frac{i}{n}})$$

en $\mathbb{C}((X^{1/n}))$ de la siguiente manera:

$$\rho * \alpha = \sum_{i\geq i_0} b_i(\rho X^{\frac{i}{n}}) \sum_{i\geq i_0} b_i\rho^i X^{\frac{i}{n}}.$$

El siguiente resultado describe las principales extensiones algebraicas de $\mathbb{C}((X))$, esto es, los cuerpos $\mathbb{C}((X))(\alpha)$, obtenidos por la adjunción a $\mathbb{C}((X))$ de un elemento algebraico α, de la teoría general de extensión de cuerpos, se sabe

$$\mathbb{C}((X))(\alpha) = \mathbb{C}((X))[\alpha] = \{P(\alpha); P \in \mathbb{C}((X))[Y]\}.$$

Teorema 1.18. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}((X))^* \setminus \mathbb{C}((X))$ y escribamos $\alpha = \varphi(X^{1/n})$, donde $n = min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathbb{C}((X^{1/q}))\}$. Entonces*

1. $\mathbb{C}((X))[\alpha] = \mathbb{C}((X^{1/n}))$.

2. *El polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{C}((X))$ es dado por*

$$g(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i),$$

donde $\alpha_i = \varphi(\xi^i X^{1/n})$, para algún generador fijo de U_n.

3. *Tenemos $g(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in \mathbb{C}((X))[Y]$, donde*

$$mult(a_i(X)) \geq imult(\alpha) = i\frac{mult(a_n(X))}{n},$$

con la igualdad cuando $i = n$. En particular, si $mult(\alpha) \geq 1$, entonces $g(X,Y) \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ y es un polinomio de Weierstrass.

Demostración. Solamente daremos la prueba de la parte 1, para las partes 2 y 3 ver ([4, teorema 3.10]).

Sea $G = G(\mathbb{C}((X^{1/n}))/\mathbb{C}((X)))$ y $G' = G(\mathbb{C}((X^{1/n}))/\mathbb{C}((X))[\alpha])$. Si $\rho \in G'$, entonces para todo $P(\alpha) = a_n\alpha^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}((X))[\alpha]$ con $a_i \in \mathbb{C}((X))$ se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(P(\alpha)) &= \rho(a_n\alpha^n + \cdots + a_0) \\ &= \rho(a_n)\rho(\alpha^n) + \cdots + \rho(a_0) \\ &= a_n\alpha^n + \cdots + a_0 = P(\alpha). \end{aligned}$$

Para esto debemos tener que $\rho(\alpha) = \alpha$. Entonces $G' = \{\rho \in G/\rho(\alpha) = \alpha\}$, esto implica que $G' = Id$, pues se tiene que $\xi * \beta \neq \sigma * \beta$, para todo $\xi, \sigma \in U_n$, con $\xi \neq \sigma$ y $\beta \in \mathbb{C}((X))^*$. Ya que el cuerpo fijo de G' es

$$\mathbb{C}((X))[\alpha] = \{\alpha_i \in \mathbb{C}((X^{1/n}))/\rho(\alpha_i)\} = \alpha_i, \forall \rho \in G',$$

por lo tanto $\mathbb{C}((X))[\alpha] = \mathbb{C}((X^{1/n}))$. □

Corolario 1.19. *Sea $f \in \mathbb{C}((X))[Y]$ un polinomio mónico irreducible de grado $n \geq 1$, y sea $\alpha \in \mathbb{C}((X))^*$ una raíz de f. Entonces*

1. *$min\{q \in \mathbb{N}/\alpha \in \mathbb{C}((X^{\frac{1}{q}}))\} = n$*
2. *Tenemos*
$$f(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i),$$
donde α_i son como en el teorema anterior.
3. *Si $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ es un polinomio de Weierstrass (resp. un pseudo polinomio), entonces $mult(\alpha) \geq 1$ (resp. $mult(\alpha) > 0$). En particular, $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]^*$*

El siguiente lema es una importante condición necesaria para la irreducibilidad de una seria de potencias. Cuya importancia geométrica es importante.

Lema 1.20 (Lema Unitangente). *Sea $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ irreducible con multiplicidad n y $f(0,0) = 0$. Entonces la forma inicial de f es del tipo*

$$F_n = (aX + bY)^n,$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ y al menos uno diferente de cero.

Demostración. La prueba de este lema puede verse en detalle en [4, Lema 3.15]. □

Sea $f = F_n + F_{n+1} + \cdots \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ una serie de potencias irreducible de multiplicidad n. Por el lema Unitangente tenemos que $F_n = (aX + bY)^n$, para $a, b \in \mathbb{C}$. Así que, f es regular en Y (cuando $b \neq 0$) o f es regular en X (cuando $a \neq 0$).

1.4. Parametrización de Puiseux

Ahora introduciremos la noción de parametrización de una curvas planas. Ésta será una herramienta poderosa para el estudio de las propiedades de curvas.

Teorema 1.21 (Teorema de Puiseux)**.** *Sea* $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ *regular en* Y *de orden* $n \geq 1$*, entonces existe* $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ *tal que*

$$f(X, \varphi(X^{\frac{1}{n}})) = 0$$

Demostración. Si f es regular en Y, entonces se puede escribir de la forma:

$$f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) + Y^{n+1}h(X,Y),$$

con $a_i(X) \in \mathbb{C}[[X]]$, $mult(a_i(X)) \geq i$ para $i = 1, ..., n$, $a_0(0) \neq 0$ y $h(X,Y) \in \mathbb{C}[[X,Y]]$.

Supongamos que f es irreducible y $mult(f) = n$ regular en Y. Del teorema de preparación de Weierstrass sabemos que existe un elemento inversible $u \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ y un polinomio de Weierstrass $P(X,Y) \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ de grado n tal que

$$uf = P(X,Y) = Y^n + A_1(X)Y^{n-1} + \cdots + A_n(X)$$

con $A_i \in \mathbb{C}[[X]]$ y $A_i(0) = 0$. Sea $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ una raíz de P, donde $\alpha = \varphi(X^{1/n})$ y

$$n = min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathbb{C}((X^{1/q}))\},$$

tal que $P(X,\alpha) = P(X, \varphi(X^{1/n})) = 0$. Consideremos $t = X^{\frac{1}{n}}$, se tiene que $\varphi(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ y

$$f(t^n, \varphi(t)) = 0.$$

□

En esta situación decimos que

$$\begin{cases} X = t^n \\ Y = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i, b_m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \end{cases} \tag{1.5}$$

es una parametrización de Puiseux de la curva definida por f $(\mathcal{C}_f)$.

Cualquier otra raíz de P da otra Parametrización de Puiseux $(t^n, \psi(t))$ de $(\mathcal{C}_f)$, donde $\psi(t) = \varphi(\xi t)$, y ξ es una n-ésima raíz de la unidad.

Note que la condición

$$n = min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathbb{C}((X^{1/q}))\ y\ f(X,\alpha) = 0\},$$

implica que en cualquier parametrización de Puiseux es como (1.5), n y los índices i para los cuales $b_i \neq 0$, son relativamente primos. Además del teorema 1.18(3) se tiene que:

$$mult_t(\varphi(t)) = nmult_X(\alpha) = mult_X(A_n(X)) = mult_X(a_n(X)) \geq n.$$

Existen otras posibles parametrizaciones de $\mathcal{C}_f$ por medio de otras series de $\mathbb{C}[[t]]$. Sea $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ un par de elementos diferentes de cero y elementos no unitarios en $\mathbb{C}[[t]]$. Decimos que $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ es una parametrización de $\mathcal{C}_f$ si

$$f((\psi_1(t), \psi_2(t)) = 0,$$

como un elemento de $\mathbb{C}[[t]]$. Una parametrización $(\psi_1(t), \psi_2(T))$ de $\mathcal{C}_f$ es llamada primitiva si existe un automorfismo ρ de $\mathbb{C}[[t]]$ tal que

$$(\rho(\psi_1(t)), \rho(\psi_2(t))) = (t^n, \varphi(t)),$$

donde $(t^n, \varphi(t))$ es una parametrización de Puiseux de $\mathcal{C}_f$.

1.4.1. Exponentes Característicos y pares de Puiseux

Sea $\mathcal{C}_f$ una rama plana definida por una serie de potencia irreducible f, con $mult(f) = n$ y regular en Y con una Parametrización de Puiseux

$$\begin{cases} X = t^n \\ Y = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i, b_m \in \mathbb{C} \backslash \{0\}, m \geq n \end{cases}$$

Definimos dos sucesiones (e_i) y (β_i) de números naturales asociados a f como sigue:

$$\begin{array}{rcl} e_0 & = & \beta_0 \\ \beta_j & = & min\{i/i \not\equiv 0 \text{ mod } e_{j-1} \ y \ b_i \neq 0\}, \ si \ e_{j-1} \neq 1, \\ e_j & = & mcd(e_{j-1}, \beta_j) = mcd(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_j). \end{array}$$

Observe que si $e_{j-1} \neq 1$, entonces el conjunto $\{i/i \not\equiv 0 \text{ mod } e_{j-1} \ y \ b_i \neq 0\}$ es no vació pues la parametrización es primitiva. Por lo tanto los β_j están bien definidos, con β_1 igual al primer exponente de t en $\varphi(t)$ que no es divisible por n, y con coeficiente no nulo. También tenemos que e_j divide a e_{j-1} para todo $j \geq 1$ y

$$n = e_0 > e_1 > e_2 > \cdots$$

Consecuentemente para algún $g \in \mathbb{N}$, se tiene que $e_g = 1$, y por lo tanto la secuencia de los β_j, $j \geq 1$ es creciente y termina en β_g.

Definición 1.22. *Los* exponentes característicos *de $\mathcal{C}_f$ son los $g+1$ números naturales $(\beta_0, ..., \beta_g)$.*
La secuencia de números naturales $(e_0, ..., e_{g-1})$ es llamada la secuencia de los divisores *de $\mathcal{C}$.*

Ejemplo 1.23. *Para*

$$\begin{cases} X = t^8 \\ Y = t^{12} + 3t^{16} - t^{20} + 2t^{22} + 8t^{23} + \cdots \end{cases}$$

$\beta_0 = 8 = e_0$ *y* $\beta_1 = 12$

$$\begin{aligned} e_1 &= mcd(8,12) = 4 \;\; luego\ \beta_2 = 22 \\ e_2 &= mcd(4,22) = 2 \;\; luego\ \beta_3 = 23 \\ e_3 &= mcd(2,23) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto los exponentes característicos son $(8, 1, 22, 23)$.

Notemos que los exponentes característicos de una curva algebraica plana $\mathcal{C}$ determinan la secuencia de los divisores e_j pues se tiene que

$$e_j = mcd(n, \beta_1, ..., \beta_j).$$

A través de un cambio de coordenadas, si es necesario, podemos considerar una parametrización de Puiseux de la curva $\mathcal{C}$ como

$$\begin{cases} X = t^{\beta_0} \\ Y = t_1^{\beta} + \sum_{i>\beta_1} b_i t^i \end{cases}$$

donde $\beta_0 < \beta_1$ y β_1 no es divisible por β_0.

De la definición de los β_j, se deduce que los coeficientes de la parametrización anterior tiene la siguiente propiedad: si i y j son enteros tales que $\beta_{j-1} \leq i \leq \beta_j$ y si $e_{j-1} \nmid i$ entonces $b_i = 0$.

Definamos también los Pares de Puiseux (η_j, μ_j), $j = 1, ..., g$ de $\mathcal{C}_f$ como sigue:

$$\eta_j = \frac{e_{j-1}}{e_j},\ y\ \mu_j = \frac{\beta_j}{e_j}.$$

Ahora, como $e_j = mcd(e_{j-1}, \beta_j)$, tenemos que $mcd(\eta_j, \mu_j) = 1$.

Ejemplo 1.24. *Del ejemplo anterior obtenemos los siguientes pares de Puiseux.*
$\eta_1 = \dfrac{e_0}{e_1} = 2\ y\ \mu_1 = \dfrac{\beta 1}{e_1} = 3 \Rightarrow (\eta_1, \mu_1) = (2, 3)$,
$\eta_2 = \dfrac{e_1}{e_2} = 2\ y\ \mu_2 = \dfrac{\beta 2}{e_2} = 11 \Rightarrow (\eta_2, \mu_2) = (2, 11)$,
$\eta_3 = \dfrac{e_2}{e_3} = 2\ y\ \mu_3 = \dfrac{\beta 3}{e_3} = 1 \Rightarrow (\eta_3, \mu_3) = (2, 1)$.

1.5. El Anillo Local de una Curva Plana

En esta sección, caracterizaremos la equivalencia de curvas algebraicas planas en términos del isomorfismo de sus anillos locales, que es un objeto algebraico asociado a tales curvas.

Sea f un elemento del ideal maximal $\mathcal{M} = \langle X, Y\rangle$ de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Denotaremos por $\langle f\rangle$ el ideal generado por f en $\mathbb{C}[[X,Y]]$.

Definimos el *anillo local* de la curva $\mathcal{C}_f$ como un $\mathbb{C}$-álgebra

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f\rangle}.$$

Si $h \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ y $B \subset \mathbb{C}[[X,Y]]$, denotaremos por $\overline{h}$ la clase residual de h en $\mathcal{O}_f$, y por $\overline{B}$ el conjunto de las clases residuales de los elementos de B. Denotaremos la clase residual $\overline{Y}$ por y y $\overline{X}$ por x, respectivamente.

El anillo $\mathcal{O}_f$ es un anillo local con ideal maximal

$$\mathcal{M}_f = \overline{\mathcal{M}}.$$

Cuando f es irreducible, $\mathcal{O}_f$ es un dominio integral y en este caso, el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_f$ suele ser denotado por $\mathcal{K}_f$.

El siguiente resultado muestra que el anillo $\mathcal{O}_f$ es un importante invariante de las clases de equivalencia de curvas algebraicas planas.

Teorema 1.25. *Sean $\mathcal{C}_f$ y $\mathcal{C}_g$ dos ramas planas. Tenemos que $\mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$ si, y solamente si, $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos inicialmente que $\mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$. Entonces existe Φ y una unidad u de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que $\Phi(f) = u.g$, además tenemos los homomorfismos de anillos

$$\mathbb{C}[[X,Y]] \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}[[X,Y]] \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{O}_g = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle g\rangle}$$

$$\mathbb{C}[[X,Y]] \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathbb{C}[[X,Y]] \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f\rangle}$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones naturales.

Notemos que $\pi_2 \circ \Phi$ y $\pi_1 \circ \Phi^{-1}$ son suprayectivas. Así

$$\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{ker(\pi_2 \circ \Phi)} = \mathcal{O}_g \ y \ \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{ker(\pi_1 \circ \Phi^{-1})} = \mathcal{O}_f$$

Sea, $h \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \pi_2 \circ \Phi(h.f) & = & \pi_2(\Phi(h).\Phi(f)) \\ & = & \pi_2(\Phi(h).u.g) \\ & = & \pi_2(\Phi(h)).\pi_2(u.g) \\ & = & 0 \end{array}$$

Esto es, $\langle f \rangle \subset ker(\pi_2 \circ \Phi)$. Así

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f \rangle} \supset \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{ker(\pi_2 \circ \Phi)} \simeq \mathcal{O}_g.$$

Similarmente tenemos

$$\mathcal{O}_g = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle g \rangle} \supset \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{ker(\pi_1 \circ \Phi^{-1})} \simeq \mathcal{O}_f.$$

Luego

$$\mathcal{O}_f \supset \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{ker(\pi_2 \circ \Phi)} \simeq \mathcal{O}_g \supset \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{ker(\pi_1 \circ \Phi^{-1})} \simeq \mathcal{O}_f.$$

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$. Consideremos inicialmente que $mult(g) \geq 2$. Pues si $mult(f) = mult(g) = 1$ se tiene que $\mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$. Consideremos ψ el isomorfismo entre $\mathcal{O}_f$ y $\mathcal{O}_g$. se tiene

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{O}_f & \longrightarrow & \mathcal{O}_g \\ x & \longmapsto & h_1 \\ y & \longmapsto & h_2. \end{array}$$

Como $h_1, h_2 \in \mathcal{M} \subset \mathcal{O}_g$, donde $x = X + \langle f \rangle$, $y = Y + \langle g \rangle$ y $h_i = H_i + \langle g \rangle$ con $H_i \in \mathbb{C}[[X,Y]]$(notemos que si $h_i(0,0) \neq 0$, entonces ψ no seria inservible).

Consideremos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X,Y]] \\ X & \longmapsto & H_1 \\ Y & \longmapsto & H_2. \end{array}$$

Como ψ es un isomorfismo, existen $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que

$$x' = \psi(G_1(x,y)) = G_1(\psi(x), \psi(y)) = G_1(h_1, h_2)$$

$$y' = \psi(G_2(x,y)) = G_2(\psi(x), \psi(y)) = G_2(h_1, h_2)$$

donde $x' = X + \langle g \rangle$ y $y' = Y + \langle g \rangle$.

Así tenemos; $X = G_1(H_1, H_2) + \langle g \rangle$ y $Y = G_2(H_1, H_2) + \langle g \rangle$, esto es;

$$X - G_1(H_1, H_2) \in \langle g \rangle \subset \mathcal{M}^2$$

$$Y - G_2(H_1, H_2) \in \langle g \rangle \subset \mathcal{M}^2,$$

pues $mult(g) \geq 2$.

Denotando

$$G_1(X,Y) = mX + nY + \cdots$$
$$G_2(X,Y) = pX + qY + \cdots$$

y

$$H_1(X,Y) = aX + bY + \cdots$$
$$H_2(X,Y) = cX + dY + \cdots$$

debemos tener

$$X - G_1(H_1, H_2) = X - m(aX + bY) - n(cX + dY) - \cdots$$
$$Y - G_2(H_1, H_2) = Y - p(aX + bY) - q(cX + dY) - \cdots$$

así

$$\begin{array}{cc} a.m + c.n = 1 & a.p + c.q = 0 \\ b.m + d.n = 1 & b.p + d.q = 0 \end{array}$$

esto es, $a.d - c.b \neq 0$.

De esta forma, Ψ es un automorfismo, ya que su matriz jacobiana

$$J_{\mathbf{0}}(\mathbf{\Psi}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es inversible.

Además de esto, como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[X,Y]] & \stackrel{\Psi}{\longrightarrow} & \mathbb{C}[[X,Y]] \\ \pi_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{O}_f & \underset{\psi}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_g \end{array}$$

tenemos

$$\pi_2 \circ \Psi(f) = \psi \circ \pi_1(f) = \psi(0) = 0,$$

o sea, $\Psi(f) \in \langle g \rangle$, esto es, $\Psi(f) = h.g$ con $h \in \mathbb{C}[[X,Y]]$.

Además tenemos que, $mult(f) = mult(\Psi(f)) = mult(h.g) = mult(h) + mult(g)$ y por lo tanto, $mult(f) \geq 2$.

Repitiendo el argumento Ψ^{-1}, obtenemos que $\Psi^{-1}(g) = h'.f$. De este modo

$$g = \Psi(\Psi^{-1}(g)) = \Psi(h'.f) = \Psi(h'.\Psi(f) = \Psi(h').h.g,$$

o sea, $\Psi(h').h = 1$. Por lo tanto $h(0,0) \neq 0$, o sea h es una unidad y $\mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$. Queda analizar el caso en que $mult(g) = 1$, pero notemos que si $mult(f) \geq 2$ debemos tener $mult(f) \geq 2$. Por lo tanto si $mult(g) = 1$ debemos tener $mult(f) = 1$.

Sea $g(X,Y) = aX + bY + \cdots$, como $mult(g) = 1$ debemos tener que $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $a \neq 0$. Entonces

$$\begin{array}{lcl} \Psi : \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X,Y]] \\ \quad X & \longmapsto & g(X,Y) \\ \quad Y & \longmapsto & Y \end{array}$$

es un automorfismo, pues su matriz jacobiana

$$J_0\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

es inversible. Así $\mathcal{C}_g \sim X$. Claramente si $b \neq 0$, podemos definir un automorfismo similar y garantizar que $\mathcal{C}_g \sim Y$, como $mult(f) = 1$, tenemos también que $\mathcal{C}_f \sim X$ o $\mathcal{C}_f \sim Y$. En ambos casos concluimos que $\mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$, una vez que $X \sim Y$ vía el automorfismo

$$\begin{array}{lcl} \Phi : \mathbb{C}[[X,Y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[X,Y]] \\ \quad X & \longmapsto & Y \\ \quad Y & \longmapsto & X. \end{array}$$

$\square$

Proposición 1.26. *Sea $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ regular en Y de orden n. Entonces $\mathcal{O}_f$ es un $\mathbb{C}[[X]]$-módulo de rango n generado por la clase residual y^i de Y^i, $i = 0, ..., n-1$, en $\mathcal{O}_f$. En otras palabras,*

$$\mathcal{O}_f = \mathbb{C}[[X]] \oplus \mathbb{C}[[X]]y \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[[X]]y^{n-1}.$$

Demostración. Por el teorema de la división de Weierstrass se tiene que cualquier elemento de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ puede ser escrito como

$$g = qf + a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_{n-1}(X)Y^{n-1},$$

con $q \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ y $a_i(X) \in \mathbb{C}[[X]]$, $i = 0, ..., n-1$. Luego

$$\overline{g} = a_0(X) + a_1(X)y + \cdots + a_{n-1}(X)y^{n-1},$$

y por tanto $\mathcal{O}_f$ es un $\mathbb{C}[[X]]$-módulo generado por $1, y, ..., y^{n-1}$. Ahora probaremos que estos elementos son libres sobre $\mathbb{C}[[X]]$.

Supongamos que se tiene una relación no trivial en $\mathcal{O}_f$, sobre $\mathbb{C}[[X]]$,

$$b_0(X) + b_1(X)y + \cdots + b_{n-1}(X)y^{n-1} = 0 \simeq \overline{f}.$$

Luego existe $q \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ tal que

$$b_0(X) + b_1(X)Y + \cdots + b_{n-1}Y^{n-1} = qf.$$

Como X no divide a f, q, ni a todos los $b_i(X)$, podemos suponer que $b_j(0) \neq 0$, para algún j. Evaluando la expresión en $X = 0$, se tiene que

$$b_0(0) + b_1(0)Y + \cdots + b_{n-1}(0)Y^{n-1} = q(0, Y)f(0, Y).$$

Como Y^n divide a $f(0, Y) \neq 0$, se sigue que

$$b_0(0) = b_1(0) = \cdots = b_{n-1}(0) = q(0, Y) = 0,$$

que a su vez contradice el hecho de que $b_j(0) \neq 0$. $\square$

De la proposición anterior, deducimos la siguiente propiedad fundamental de curvas, representado por una serie de potencias irreducible regular en Y de orden n, con una parametrización de Puiseux $(T^n, \varphi(T))$. Concretamente;

$$\begin{array}{rcl} H_\varphi : \mathcal{O}_f & \longrightarrow & \mathbb{C}[[T]] \\ g & \longmapsto & g(T^n, \varphi(T)), \end{array}$$

que induce un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras, el cual nos permite identificar $\mathcal{O}_f$ como un subálgebra de $\mathbb{C}[[T]]$.

Definimos la *valoración asociada* a f como la función

$$\begin{array}{rcl} v_f : \mathcal{O}_f \backslash \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \overline{g} & \longmapsto & mult(H_\varphi(\overline{g})) \end{array}$$

Por definición $v_f(0) = \infty$.

Es claro que v_f puede ser calculado por medio de una parametrización primitiva $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ de $\mathcal{C}_f$, ya que

$$v_f(g) = mult(g(T^n, \varphi(T)) = mult(\rho(g(T^n, \varphi(T)))) = mult(g((\psi_1(T), \psi_2(T)))),$$

donde ρ es el automorfismo de $\mathbb{C}[[T]]$ tal que

$$(\rho(\psi_1(T)), \rho(\psi_2(T)) = (T^n, \varphi(T)).$$

Además v_f, verifica las siguientes propiedades. Para todo $\overline{g}, \overline{h} \in \mathcal{O}_f$, tenemos

1. $v_f(\overline{g}\overline{h}) = v_f(\overline{g}) + v_f(\overline{h})$,

2. $v_f(\overline{1}) = 0$,

3. $v_f(\overline{g} + \overline{h}) \geq min\{v_f(g), v_f(h)\}$, con la igualdad si $v_f(g) \neq v_f(g)$.

1.6. Semigrupo de una Rama Plana

En esta sección presentaremos el semigrupo de valores de una curva algebraica plana irreducible. Este es un invariante bajo la equivalencia de curvas, clásicamente conocido como un invariante de la clasificación topológica, en el caso de gérmenes de curvas analíticas planas irreducibles. Relacionaremos este semigrupo a los enteros característicos y los pares de Puiseux.

Definición 1.27. *Un semigrupo es una estructura algebraica de la forma* $(G,+)$ *donde* G *es un conjunto y* $+$ *es una operación binaria, cerrada y asociativa. Si además* $+$ *es una operación conmutativa, se dice que es un semigrupo conmutativo.*

Sea $G \neq \{0\}$ subconjunto de $\mathbb{N}$ contenido el cero. Decimos que G es un *semigrupo* en $\mathbb{N}$ cerrado bajo la adición. El elemento $mult(G \backslash \{0\})$ es llamada la multiplicidad de G y es denotada por $mult(G)$

Si $x_0, x_1, ..., x_r \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto

$$\langle x_0, x_1, ..., x_r \rangle = \{\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_r x_r; \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{N}\}$$

es un semigrupo en $\mathbb{N}$, llamado el semigrupo generado por $x_0, x_1, ..., x_r$. Los elementos $x_0, x_1, ..., x_r$ son llamados generadores para G. Por ejemplo, tenemos

$$\langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...\}$$

El siguiente resultado muestra que el semigrupo G es finitamente generado.

Proposición 1.28. *Dado cualquier semigrupo* G *en* $\mathbb{N}$*, existe un único conjunto finito de elementos* $v_0, ..., v_g$ *en* G *tal que*

1. $v_0 < \cdots < v_g$*, y* $v_i \not\equiv v_j$ *mod* v_0 *para* $i \neq j$*,*
2. $G = \langle v_0, ..., v_g \rangle$*,*
3. $\{v_0, ..., v_g\}$ *esta contenida en algún subconjunto de generadores de* G*.*

Demostración. definamos $\{v_0, ..., v_g\}$ por inducción como sigue. Ponemos $v_0 = mult(G)$ y definimos

$$v_1 = min(G \backslash \langle v_0 \rangle).$$

Es claro que $v_0 \not\equiv v_1 \mod v_0$, pues de otro modo $v_1 \in \langle v_0 \rangle$, que sería una contradicción. Para $i \geq 2$,

$$v_i = min(G \backslash \langle v_0, ..., v_{i-1} \rangle).$$

Se tiene que $v_i \not\equiv v_j \mod v_0$, para $j < i$, de otro modo, $v_i \in \langle v_0, ..., v_{i-1}\rangle$, lo cual es una contradicción. Ya que $v_i \not\equiv v_j \mod v_0$, para $j \neq i$, entonces para algún $g < v_0$, se tiene que

$$G = \langle v_0, ..., v_g\rangle.$$

Por definición de los v_i tenemos que; $v_0 < v_1 < \cdots < v_g$, además veamos que $\{v_0, ..., v_g\}$ está contenida en cualquier conjunto de generadores de G.

Por definición de los v_i, $\{v_0, ..., v_g\}$ es el conjunto mínimo dentro de G tal que verifique 1.) y 2.), esto implica que cualquier otro generador de G deberá contener a los todos v_i, $i = 0, ..., g$ y algunos otros elementos de G que son combinación de los v_i. □

El conjunto $\{v_0, ..., v_g\}$ es llamado el *sistema mínimo de generadores* de G, y el entero g es llamado el *genero* del semigrupo G.

Dado un semigrupo G en $\mathbb{N}$, los elementos de $\mathbb{N}\backslash G$ son llamados *lagunas* de G. Un semigrupo puede tener un número finito o infinito de lagunas.

Ejemplo 1.29. *El semigrupo* $H = \langle 4\rangle = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...\}$, *tiene infinitas lagunas pues; el conjunto*

$$\mathbb{N}\backslash H = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, ...\} \textit{es infinito.}$$

El semigrupo $G = \langle 3, 5\rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$, *tiene un número finito de lagunas pues; el conjunto* $\mathbb{N}\backslash G = \{1, 2, 4, 7\}$ *es finito.*

Cuando el número de lagunas G es finito, existe un único elemento $c \in G$ llamado *conductor* de G, tal que

1. $c - 1 \notin G$
2. Si $z \in \mathbb{N}$ y $z \geq c$, entonces $z \in G$.

Ejemplo 1.30. *El semigrupo*

$$G = \langle 4, 7\rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, ...\},$$

tiene un número finito de lagunas, cuyo conductor es 18, *pues* $18-1 \notin G$ *y cualquier* $z \in \mathbb{N}$, $z \geq 18$, *esta en el semigrupo.*

A continuación definiremos uno de los objetos mas importantes para el estudio de la clasificación de curvas analíticas irreducibles planas. El semigrupo de de valores asociado a una curva algebraica plana, que es un invariante topológico.

Definición 1.31. *El semigrupo de valores asociado a la curva $\mathcal{C}_f$ es el conjunto*

$$S(f) = \{v_f(\overline{g}); \overline{g} \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}\} = \{mult_t(H_\varphi(\overline{g})); \overline{g} \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}\}$$

Ejemplo 1.32. *Sea la curva $f = Y^3 - X^5$ con parametrización de Puiseux*

$$\begin{cases} X = t^3 \\ Y = t^5, \end{cases}$$

entonces dado $g = \sum a_{ij} X^i Y^j \in \mathbb{C}[[X,Y]] \backslash \langle f \rangle$, tenemos que

$$v_f(\overline{g}) = mult(\overline{g}(t^3, t^5)) = mult(\sum a_{ij} t^{3i+5j}) = 3r + 5s,$$

para algún número natural r y s. Esto implica que $S(f) = \langle 3, 5 \rangle$, con conductor $c = 8$

El semigrupo de valores de una curva algebraica irreducible también se define como

$$S(f) = \{I(f,g); g \in \mathbb{C}[[X,Y]] \backslash \langle f \rangle\} \subset \mathbb{N}.$$

Donde $I(f,g)$ es el índice de intersección de f y g, que se define como

$$I(f,g) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f, g \rangle}.$$

El índice de intersección tiene las siguientes propiedades:

1. $I(f,g) < \infty$ si, y solo si, f y g son relativamente primos en $\mathbb{C}[[X,Y]]$

2. $I(f,g) = I(g,f)$

3. $I(\Phi(f), \Phi(g)) = I(uf, vg)$, donde Φ es un automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ y u y v son unidades en $\mathbb{C}[[X,Y]]$.

4. $I(f, gh) = I(f,g) + I(f,h)$

5. $I(f, g - hf) = I(f,g)$

6. $I(f,g) = 1$ si y solamente si $\mathcal{C}_f$ y $\mathcal{C}_g$ son transversales

El próximo resultado nos da una manera interesante de calcular el índice de intersección mediante la valoración.

Teorema 1.33. *Sea $f, g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ y $f = f_1 \cdots f_r$ una descomposición de f en factores irreducibles, con $f_i \neq f_j$ para todo $i \neq j$. Entonces,*

$$I(f,g) = \sum_{i=1}^{r} v_{f_i}(g).$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [4, teorema 4.17]. □

Dado que estamos trabajando con curvas algebraicas planas irreducibles, observemos por el teorema anterior que;

$$I(f,g) = v_f(\overline{g}),$$

para todo $g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$.

Observación 1.34. *El semigrupo de valores asociado a una curva es un invariante analítico.*

En efecto; sean f y f_1 curvas algebraicas irreducibles planas tal que $f \sim f_1$, esto es existe una unidad y un automorfismo Φ de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que

$$\Phi(f) = uf_1.$$

sea $v_f(\overline{g}) \in S(f)$ con $\overline{g} \in \mathcal{O}_f$, entonces

$$v_f(\overline{g}) = dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle} = dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle u^{-1}\Phi(f), u^{-1}\Phi(g)\rangle} = dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f_1, g_1\rangle} = v_{f_1}(\overline{g_1}),$$

donde $\overline{g}_1 \in \mathcal{O}_{f_1}$ y $v_1(\overline{g}_1) \in S(f_1)$. Así tenemos que $S(f) = S(f_1)$.

Por lo tanto el semigrupo de valores es un invariante respecto a la equivalencia analítica de curvas.

Ejemplo 1.35. *Sea la curva $f = Y^4 - X^7$, tenemos que $v_f(x) = I(f,X) = 4$ y $v_f(y) = I(f,Y) = 7$. Desde que todo número natural $h \geq 18$ puede ser escrito como $h = 4a + 7b$, con $a, b \in \mathbb{N}$, por lo tanto $h = v_f(x^a y^b) \in S(f)$. Con conductor $c = 18$.*

Zariski mostró como obtener el sistema mínimo de generadores del semigrupo de valores asociado a una curva algebraica plana irreducible a partir de los exponentes característicos a saber, tenemos las relaciones

$$v_0 = \beta_0$$

$$v_{i+1} = \eta_i v_i + \beta_{i+1} - \beta_i$$

donde $\eta = 1$ y $\eta_i = \dfrac{e_{i-1}}{e_i} = \dfrac{mcd(\beta_0, ..., \beta_{i-1})}{mcd(\beta_0, ..., \beta_i)}$.

Y por la observación anterior, se sigue que los exponentes característicos y los pares de Puiseux también son invariantes bajo la equivalencia analítica de curvas.

Observación 1.36. *A través del sistema mínimo de generadores del semigrupo $\Gamma_{\mathcal{C}}$ de una curva $\mathcal{C}$ podemos obtener el conductor de $\Gamma_{\mathcal{C}}$ por la formula*

$$c = \sum_{i=1}^{g}(\eta_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

De este modo, podemos calcular el semigrupo de valores de una curva plana irreducible y su conductor, usando los exponentes característicos y los pares de Puiseux.

Ejemplo 1.37. *Consideremos la curva con parametrización Puiseux*

$$\mathcal{C}: \begin{cases} X = t^8 \\ Y = t^{12} + 3t^{16} - t^{20} + 2t^{22} + 8t^{23} + \cdots \end{cases}$$

Vimos del ejemplo (1.21.) que $\beta_0 = 8$*,* $\beta_1 = 12$*,* $\beta_2 = 22$ *y* $\beta_3 = 23$*. Así*

$$\begin{array}{lcll} v_0 & = & 8 & \eta_0 = 1 \\ v_1 & = & \eta_0 v_0 + \beta_1 - \beta_0 = \beta_1 = 12 & \eta_1 = 2 \\ v_2 & = & \eta_1 v_1 + \beta_2 - \beta_1 = 34 & \eta_1 = 2 \\ v_3 & = & \eta_2 v_2 + \beta_3 - \beta_2 = 69 & \eta_2 = 2. \end{array}$$

Luego, $\Gamma_{\mathcal{C}} = \langle 8, 12, 34, 69\rangle$ *y en este caso, tenemos que*

$$c = \sum_{i=1}^{3} (\eta_i - 1)v_i - v_0 + 1 = 108.$$

1.7. Curvas Analíticas Planas

En las secciones anteriores estábamos trabajando sobre el anillo de serie de potencias formales $\mathbb{C}[[X,Y]]$. En adelante en lugar de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ consideraremos el anillo de series de potencias convergentes $\mathbb{C}\{X,Y\}$.

Los resultados vistos para $\mathbb{C}[[X,Y]]$, pueden obtenerse de forma similar para $\mathbb{C}\{X,Y\}$.

La convergencia permite una interpretación geométrica del conjunto de ceros de un elemento $f \in \mathcal{M} = \langle X, Y\rangle$ ($\mathcal{M}$ es el único ideal maximal de $\mathbb{C}\{X,Y\}$).

Definición 1.38. *Sea* $f \in \mathbb{C}\{X,Y\}$*. Definimos una curva analítica plana determinada por* f*, como*

$$\mathcal{C}_f = \{(x,y) \in U; f(x,y) = 0\},$$

donde $U \subset \mathbb{C}^2$ *es una vecindad del origen.*

Observación 1.39. *dado un isomorfismo analítico* $\widetilde{\Phi} : V \longrightarrow U$*, donde* U *y* V *son vecindades del origen de* $\mathbb{C}^2$*, tenemos un* $\mathbb{C}$*-automorfismo* Φ *de* $\mathbb{C}\{X,Y\}$ *tal que*

$$\Phi(f) = f \circ (\widetilde{\Phi})^{-1},$$

para todo $f \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ *definido en* $V \subset \mathbb{C}^2$*. Es mas, si* f *es convergente en* V*, entonces* $\widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_{\Phi(f)}$*.*

En efecto,

$$\mathcal{C}_{\Phi(f)} = \{(x,y) \in V; \Phi(f)(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in V; f \circ (\widetilde{\Phi})^{-1}(x,y) = 0\} = \widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_f),$$

con la ultima igualdad valida, pues $(\widetilde{\Phi})^{-1}(x,y) \in \mathcal{C}_f$*, si, y solamente si,* $(x,y) \in \widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_f)$.

Tenemos así el siguiente resultado.

Proposición 1.40. *Dados* $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ *y* $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ *elementos irreducibles de* $\mathbb{C}\{X,Y\}$*, tenemos que existe un automorfismo* Φ *de* $\mathbb{C}\{X,Y\}$ *tal que* $\Phi(f)$ *y* g *son asociados si, y solamente si,* $\widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_g$.

Demostración. Supongamos inicialmente que existan un automorfismo Φ y una unidad $u \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ tal que

$$\Phi(f) = ug.$$

Consideremos $\widetilde{\Phi} : V \longrightarrow U$ isomorfismo analítico inducido por Φ, esto es,

$$\Phi(f) = f \circ (\widetilde{\Phi})^{-1}.$$

Así,

$$\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_u g = \mathcal{C}_f \circ \widetilde{\Phi}^{-1}.$$

Ahora veamos que $\mathcal{C}_f \circ \widetilde{\Phi}^{-1} = \Phi(\mathcal{C}_f)$. En efecto,

$$(x,y) \in \mathcal{C}_f \circ \widetilde{\Phi}^{-1} \Leftrightarrow f \circ \widetilde{\Phi}^{-1}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}^{-1}(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow (x,y) \in \widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_f).$$

Por lo tanto, $\widetilde{\Phi}(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_g$. □

Capítulo 2

Transversal Completa

En este capítulo presentaremos algunos resultados referentes a gérmenes de aplicaciones diferenciables, además de realcionarlos con la teoría de curvas analíticas. Presentado el teorema de la transversal completa como el resultado central de este capitulo, utilizado en la parte central de este trabajo.

2.1. Gérmenes de Aplicaciones Diferenciables

Sean dos aplicaciones analíticas $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ y $g : V \longrightarrow \mathbb{C}^p$ definidas en vecindades U y V de un punto $q \in \mathbb{C}^n$. Definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$f \approx g \Leftrightarrow \exists \text{ vecindad } W \text{ de } q, W \subset U \cap V \text{ tal que } f(p) = g(p), \forall p \in W.$$

La clase de equivalencia de una aplicación $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ será llamada *germen* de f en el punto q. Sin perdida de generalidad podemos tomar $q = 0 \in \mathbb{C}^n$. el germen de f en 0 es denotado por

$$\overline{f} : \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p.$$

El conjunto de todos los gérmenes

$$\overline{g} : \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

será denotado por $\mathcal{O}(n, p)$. Cuando $p = 1$, esto es, cuando consideramos gérmenes de funciones, el conjunto anterior será denotado simplemente por $\mathcal{O}_n$.

Las operaciones $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f + g}$ y $\overline{f}.\overline{g} = \overline{f.g}$, están bien definidas y hacen de $\mathcal{O}_n$. un anillo conmutativo con unidad $\overline{1}$.

Sea $\mathcal{M}_n = \{\overline{f} \in \mathcal{O}_n; f(0) = 0\}$, o sea, $\mathcal{M}_n$ es el conjunto de los gérmenes de funciones cuyos representantes se anulan en 0. Tenemos que $\mathcal{M}_n$ es un ideal de $\mathcal{O}_n$, aun más $\mathcal{M}_n$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$ y por tanto $\mathcal{O}_n$ es un anillo local.

En efecto, sea $\mathcal{M}$ otro ideal de $\mathcal{O}_n$ y suponga que $\overline{f} \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_n$. Entonces $f(0) \neq 0$, por tanto $1/f$ esta bien definida en una vecindad de 0, así tenemos que $\overline{1/f}.\overline{f} = \overline{1} \in \mathcal{M}$, por tanto $\mathcal{M} = \mathcal{O}_n$. Esto muestra que $\mathcal{M}_n$ es único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$.

Además notemos que $\mathcal{O}_n$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-álgebra dada por el homomorfismo inyectivo de anillos

$$\begin{array}{rcl}\Phi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{O}_n \\ c & \longmapsto & c_0\end{array}$$

donde c_0 denota la clase de la función constante $f = c$ en alguna vecindad de $0 \in \mathbb{C}_n$.

A continuación damos dos propiedades importantes de $\mathcal{O}_n$

Proposición 2.1. *$\mathcal{O}_n$ es un dominio de integridad.*

Demostración. Supongamos que los gérmenes $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{O}_n$ son tales que $\overline{f}.\overline{g} = 0$. Sean f y g representantes de $\overline{f}$ y $\overline{g}$, respectivamente. Entonces existe un abierto conexo $W \subset V \cap U$, con $0 \in W$ tal que $f|_W.g|_W = 0|_W$

Supongamos ahora que $f|_W \neq 0$ y tomemos $q \in W$ tal que $f|_W(q) \neq 0$.Por continuidad, $f|_W$ nunca se anula en toda una vecindad de q.

Luego, $g|_W = 0$ en esta vecindad. Por el principio de identidad, tenemos que $g|_W = 0$, de la misma manera si suponemos ahora que $g|_W \neq 0$, tendremos que $f|_W = 0$. Por lo tanto, o bien $f|_W = 0$ o bien $g|_W = 0$. □

Proposición 2.2. *$\mathcal{O}_n$ es isomorfo al anillo de las series de potencias convergentes con centro en $0 \in \mathbb{C}^n$.*

Demostración. Consideremos la siguiente asociación

$$\begin{array}{rcl}\phi : \mathcal{O}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}_0\{x_1, ..., x_n\} \\ \overline{f} & \longmapsto & f(X) = \sum_{I \geq 0} c_I X^I,\end{array}$$

donde

$$c_I = \frac{1}{i_1! \cdots i_n!}.\frac{\partial^{i_1 + \cdots i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \cdots x_n^{1_n}}(0) \text{ y } X^I = x_1^{i_1} \cdots x_n^{1_n}.$$

Debemos ver si este es un isomorfismo:

1. Veamos si ϕ esta bien definido.

   Sea f y f' dos representantes de $\overline{f}$, entonces $f(X) = \phi(\overline{f})$ y $\phi(\overline{f}) = f'(X)$.

   f y f' funciones holomorfas con centro en $0 \in \mathbb{C}^n$ que tienen un mismo desarrollo en serie de potencias, en toda una vecindad W de $0 \in \mathbb{C}^n$, entonces $f(X) = f'(X)$ en esta vecindad.

2. Veamos si ϕ preserva las operaciones suma y multiplicación.

   En efecto:

$$\begin{aligned}\phi(\overline{f}+\overline{g}) &= \phi(\overline{f+g})\\ &= (f+g)(X) = \textstyle\sum_{I\geq 0}(c_I + c'_I)X^I\\ &= \phi(\overline{f})+\phi(\overline{g})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(\overline{f}.\overline{g}) &= \phi(\overline{f.g})\\ &= (f.g)(X) = \textstyle\sum_{I\geq 0}\sum_{n=o}^{I}(c_n.c'_{I-n})X^k\\ &= f(X).g(X) = \phi(\overline{f}).\phi(\overline{g})\end{aligned}$$

3. Veamos si ϕ es biyectivo.

   En efecto, tenemos primero que ϕ es inyectivo

$$\begin{aligned}\phi(\overline{f}) &= \phi(\overline{f_1})\\ \textstyle\sum_{I\geq 0} c_I X^I &= \textstyle\sum_{I\geq 0} c_I^1 X^I\end{aligned}$$

   Vemos que f y f_1 funciones holomorfas con centro en $0 \in \mathbb{C}^n$ que tienen un mismo desarrollo en serie de potencias, además estas coinciden en toda una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^n$ y por lo tanto, ambos pertenecen a un mismo germen en $\mathcal{O}_n$. Así tenemos que $\overline{f} = \overline{f_1}$.

   Ahora ϕ es sobreyectiva. En efecto; ya que toda serie de potencias convergente centrada en $0 \in \mathbb{C}^n$ define una función holomorfa en alguna vecindad del origen. Esta función por su parte, define un germen en $\mathcal{O}_n$. Y se sigue la sobreyectividad.

Por lo tanto hemos visto que ϕ es un isomorfismo. □

Además de las propiedades algebraicas de $\mathcal{O}_n$, tenemos que $\mathcal{O}(n,p)$ es un $\mathcal{O}_n$-módulo.

En efecto, $(\mathcal{O}(n,p),+)$ es un grupo abeliano, $\mathcal{O}_n$ es un anillo, y la operación

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_n \times \mathcal{O}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{O}(n,p)\\ (f,F) & \longmapsto & (f.f_1,...,f.f_n),\end{array}$$

donde $F = (f_1,...,f_n)$ con $f_i \in \mathcal{O}_n$, satisface

$$\begin{aligned}f.(g.F) &= (f.g).F\\ f.(F+G) &= f.F+f.G\\ (f+g).F &= f.F+g.F\\ 1.F &= F.\end{aligned}$$

Observación 2.3. *Dada $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ un elemento de $\mathbb{C}\{X, Y\}$, donde $U \subset \mathbb{C}^2$ es una vecindad del origen, una curva analítica plana determinada por cualquier representante del germen de f es la misma, en este caso, lo denominamos germen de la curva analítica dada por f.*

Además de $\mathcal{O}_n$ y $\mathcal{O}(n, p)$, otro conjunto desempeñara un papel importante en los resultados que presentaremos en este capitulo, así tenemos la siguiente definición.

Definición 2.4. *Los espacios de jet $J^k(n, p)$ es un espacio vectorial de todas las aplicaciones $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ cuyas componentes son polinomios de grado menor o igual a k con término constante nulo.*

2.2. Acción de un Grupo sobre un Conjunto

Antes de relacionar la teoría de curvas con la de aplicaciones diferenciables, veamos algunos conceptos necesarios.

Definición 2.5. *Sean G un grupo y M un conjunto. Una acción de G sobre M es una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \circledast : G \times M & \longrightarrow & M \\ (g, m) & \longmapsto & g \centerdot m, \end{array}$$

tal que para todo $m \in M$ y $g, h \in G$ se tiene:

- $\circledast(e, m) = e \centerdot m = m$
- $\circledast(gh, m) = (gh) \centerdot m = g \centerdot (h \centerdot m) = \circledast(g, \circledast(h, m))$

donde e es la identidad de G.

Dada una acción de G sobre M, podemos definir una relación de equivalencia $\sim_G$ en M por:

$$m_1 \sim_G m_2 \Leftrightarrow \exists\, g \in G \text{ tal que } m_2 = g \centerdot m_1.$$

Definición 2.6. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto M y $m \in M$. La clase de equivalencia de m por la relación definida arriba es llamada la órbita de m y será denotado por*

$$G \centerdot m = \{g \centerdot m;\ g \in G\} \subset M.$$

Dada la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi^m : G & \longrightarrow & M \\ g & \longmapsto & g \centerdot m, \end{array}$$

con $m \in M$, tenemos que la órbita del elemento $m \in M$ es la imagen de ϕ^m.

De la definición tenemos que las órbitas son clases de equivalencia, además dos órbitas o bien son disjuntos o son iguales.

2.3. Los Grupos de Mather $\mathcal{R}$,$\mathcal{L}$,$\mathcal{A}$,$\mathcal{C}$,$\mathcal{K}$ y sus Acciones

En esta sección introduciremos los denominados grupos de Mather y sus acciones sobre los conjuntos de gérmenes de aplicaciones. Estos grupos son cruciales para el resto del trabajo.

El grupo de difeomorfismos $\mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n, 0$ es denotado por $\mathcal{D}(n) = \mathcal{R}$. Este es un subconjunto de $\mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,n)$, que consiste de gérmenes cuya parte lineal en 0 es inversible. Claramente $\mathcal{R}$ es un grupo bajo la composición. El grupo $\mathcal{R}$ actúa sobre $\mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$ de la siguiente manera. Dado $h \in \mathcal{R}$ y $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{O}(n,p)$ definimos $h \centerdot f = f \circ h^{-1}$. Se verifica fácilmente que esta es una acción de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$. En efecto:

- $I_{(n)} \centerdot f = f \circ I_{(n)}^{-1} = f$, donde $I_{(n)}$ es el elemento identidad de $\mathcal{R}$ y $f \in \mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$
- Sean $\ell, h \in \mathcal{R}$ y $f \in \mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$, entonces

$$\begin{aligned}(\ell \circ h) \centerdot f &= f \circ (\ell \circ h)^{-1} \\ &= f \circ (h^{-1} \circ \ell^{-1}) \\ &= (f \circ h^{-1}) \circ \ell^{-1} \\ &= (h \centerdot f) \circ \ell^{-1} \\ &= \ell \centerdot (h \centerdot f).\end{aligned}$$

Decimos que dos gérmenes $f, g \in \mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$ son $\mathcal{R}$-equivalentes si existe un germen $h \in \mathcal{R}$ tal que $g = f \circ h^{-1}$, esto es:

$$f \sim_{\mathcal{R}} g \Longleftrightarrow \exists\ h \in \mathcal{R} \text{ tal que } g = f \circ h^{-1}$$

esta equivalencia es llamada $\mathcal{R}$-equivalencia, desde que h aparece a la derecha de f.

Similarmente el grupo $\mathcal{D}(p) = \mathcal{L}$ actúa sobre $\mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$ de la siguiente manera. Dado $k \in \mathcal{L}$ y $f \in \mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$ definimos $k \centerdot f = k \circ f$. La correspondiente equivalencia es denotada por $\mathcal{L}$-equivalencia, desde que k aparece a la izquierda de f. Esto es,

$$f \sim_{\mathcal{L}} g \Longleftrightarrow \exists\ k \in \mathcal{L} \text{ tal que } g = k \circ f$$

Además el producto de grupos $\mathcal{D}(n) \times \mathcal{D}(p) = \mathcal{A}$ actúa sobre $\mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n,p)$; dado $(h,k) \in \mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{O}(n,p)$ definimos $(h,k) \centerdot f = k \circ f \circ h^{-1}$. La correspondiente equivalencia es denotada por $\mathcal{A}$-equivalencia.

$$f \sim_{\mathcal{A}} g \Longleftrightarrow \exists\ (h,k) \in \mathcal{A} \text{ tal que } g = k \circ f \circ h^{-1}.$$

El Grupo $\mathcal{K}$ es el grupo de los gérmenes de difeomorfismos $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0 \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0$, que son escritos en la forma

$$H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$$

donde $h \in \mathcal{R}$ y $\theta(x, y) = \theta_x(y)$ con $\theta_x : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^P$, además $\theta_x(0) = 0$ con x en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^n$. La acción de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n, p)$ es definida como

$$H \centerdot f(x) = \theta(h^{-1}(x), f \circ h^{-1}(x)).$$

El grupo $\mathcal{K}$ es llamado *grupo de contacto*. Así definimos la $\mathcal{K}$-equivalencia (o *equivalencia de contacto*) cuando existe el par (h, H) de gérmenes inversibles, esto es, dos gérmenes $f, g \in \mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n, p)$ son $\mathcal{K}$-equivalentes si existe (h, H) tal que

$$H \circ (Id, f) = (Id, g) \circ h = (h, g \circ h)$$

donde Id es la identidad de $\mathbb{C}^n$.

Finalmente el grupo $\mathcal{C}$ es el grupo de gérmenes de difeomorfismos $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0 \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0$, que son escritos en la forma

$$H(x, y) = (x, \theta(x, y))$$

con $\theta(x, y) = \theta_x(y)$, $\theta_x : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^P$, además $\theta_x(0) = 0$ con x en una vecindad del origen de $\mathbb{C}^n$. La acción de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n, p)$ es definida por

$$H \centerdot f(x) = \theta(x, f(x)).$$

Así definimos la $\mathcal{C}$-equivalencia, cuando existe el par (Id, H) de gérmenes inversibles, esto es, dos gérmenes $f, g \in \mathcal{M}_n.\mathcal{O}(n, p)$ son $\mathcal{C}$-equivalentes si existe (Id, H) tal que

$$H \circ (Id, f) = (Id, g) \circ Id = (Id, g).$$

Ahora vamos a ver que la equivalencia de curvas analíticas irreducibles corresponde a la $\mathcal{K}$-equivalencia de las ecuaciones cartesianas de las curvas y a la $\mathcal{A}$-equivalencia de sus parametrizaciones.

Dados $f, g : \mathbb{C}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{C}, 0$, decimos que $f \sim_{\mathcal{K}} g$ si, y solamente si, existe un difeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \\ ((x, y), z) & \longmapsto & (h_1(x, y), h_2((x, y), z)), \end{array}$$

con $h_1 : \mathbb{C}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^2, 0$ difeomorfismo y $h_2((x, y), 0) = 0$ tal que

$$H((x, y), g(x, y)) = (h_1(x, y), f \circ h_1(x, y))$$

o sea,

$$(h_1(x,y), h_2((x,y), g(x,y))) = H((x,y), g(x,y)) = (h_1(x,y), f \circ h_1(x,y)),$$

esto es,

$$f \circ h_1(x,y) = h_2((x,y), g(x,y)) \Longleftrightarrow f \sim_{\mathcal{K}} g.$$

Además de esto, tenemos que $f \sim_{\mathcal{C}} g$ si f es $\mathcal{K}$-equivalente a g con $h_1(x,y) = (x,y)$, o sea,

$$f(x,y) = h_2((x,y), g(x,y)).$$

Observación 2.7. *Por lo visto arriba, tenemos que $f \sim_{\mathcal{K}} g$ si, y solamente si, existe $h_1 : \mathbb{C}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^2, 0$ difeomorfismo tal que $f \circ h_1$ es $\mathcal{C}$-equivalente a g.*

La próxima proposición nos da una caracterización de la $\mathcal{C}$-equivalencia en término de ideales.

Proposición 2.8. *Dados dos gérmenes $f, g : \mathbb{C}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{C}, 0$ tenemos que $f \sim_{\mathcal{C}} g$ si, y solamente si, $\langle f \rangle = \langle g \rangle$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $f \sim_{\mathcal{C}} g$ entonces existe

$$\begin{array}{rcl} H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \\ ((x,y), z) & \longmapsto & ((x,y), h_2((x,y), z)) \end{array}$$

inversible y $h_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $h_2((x,y), 0) = 0$.

Usando el lema de Hadamard podemos escribir

$$h_2((x,y), z) = z.h_3((x,y), z)$$

con $h_3 \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

De este modo, tenemos que

$$f(x,y) = h_2((x,y), g(x,y)) = h_3((x,y), g(x,y)).g(x,y)$$

y así tenemos,

$$\langle f \rangle \subset \langle g \rangle.$$

Del mismo modo mostramos que $\langle g \rangle \subset \langle f \rangle$. Y por tanto,

$$\langle f \rangle = \langle g \rangle.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, esto es,

$$g = g_1.f \text{ y } f = f_1.g$$

con $f_1, g_1 \in \mathcal{O}_2$. Notemos que

$$g = g_1.f_1.g$$

o sea, $g_1(0,0).f_1(0,0) \neq 0$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} h_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((x,y),z) & \longmapsto & z.f_1(x,y). \end{array}$$

Notemos que $h_2((x,y),0) = 0$.

Así $H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ definida por $H((x,y),z) = ((x,y), h_2((x,y),z))$ es inversible pues la matriz Jacobiana de H

$$J_{\mathbf{0}}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_1(0,0) \end{pmatrix}$$

es inversible. Como

$$h_2((x,y), g(x,y)) = f_1(x,y).g(x,y) = f(x,y)$$

tenemos que

$$f \sim_C g.$$

□

Dado un germen $h : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$, definimos el homomorfismo de álgebras $h^* : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_2$ por $h^*(f) = f \circ h$ inducido por h.

Corolario 2.9. *Sean $f, g : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$. $f \sim_{\mathcal{K}} g$ si, y solamente si, existe $h : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ difeomorfismo tal que $h^*(\langle f \rangle) = \langle g \rangle$, o sea, $\langle f \circ h \rangle = \langle g \rangle$.*

Demostración. Tenemos que $f \sim_{\mathcal{K}} g$ si, y solamente si, existe

$$\begin{array}{rcl} H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0 \\ ((x,y),z) & \longmapsto & (h(x,y), h_1((x,y),z)), \end{array}$$

tal que

$$f \circ h(x,y) = h_1((x,y), g(x,y)),$$

con $h : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ difeomorfismo, además tenemos que $f \sim_{\mathcal{K}} g \Leftrightarrow f \circ h \sim_{\mathcal{C}} g$. Por la proposición 2.8 tenemos que

$$f \sim_{\mathcal{K}} g \Leftrightarrow f \circ h \sim_{\mathcal{C}} g \Leftrightarrow \langle f \circ h \rangle = \langle g \rangle.$$

□

El próximo resultado relaciona la equivalencia de curvas planas analíticas irreducibles con la $\mathcal{K}$-equivalencia.

Proposición 2.10. *Sean f y g gérmenes de curvas planas analíticas irreducibles. Se tiene que $f \sim_{\mathcal{K}} g$ si, y solamente si, existe un difeomorfismo $h : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ tal que $h(g^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \sim_{\mathcal{K}} g$. Por el corolario anterior existe un difeomorfismo $h : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ tal que $\langle f \circ h \rangle = \langle g \rangle$. Así,

$$f \circ h = f_1.g \text{ y } g = g_1.(f \circ h)$$

con $f_1, g_1 \in \mathcal{O}_2$.

Si $(x_0, y_0) \in g^{-1}(0)$, entonces

$$f \circ h(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0).g(x_0, y_0) = 0.$$

Así $h(x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$ y por tanto

$$h(g^{-1}(0)) \subset f^{-1}(0).$$

Si $h(x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$, entonces como $g = g_1.(f \circ h)$, tenemos

$$g(x_0, y_0) = g_1(x_0, y_0).(f \circ h(x_0, y_0)) = 0.$$

Así $(x_0, y_0) \in g^{-1}(0)$, y

$$f^{-1}(0) \subset h(g^{-1}(0)).$$

Luego, tenemos

$$f^{-1}(0) = h(g^{-1}(0)).$$

($\Leftarrow$) Sea $h : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ un difeomorfismo tal que $h(g^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$. Tenemos que $\langle g \rangle = \langle f \circ h \rangle$.

En efecto, como $h(g^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$ tenemos que

$$f^{-1}(0) = (g \circ h)^{-1}(0),$$

por tanto f y $g \circ h$ poseen los mismos ceros. Como h es un difeomorfismo, tenemos que existe una unidad u de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ tal que $f = u.(g \circ h)$ esto garantiza que $\langle f \rangle = \langle g \circ h \rangle$. □

Observemos que la hipótesis de la irreducibilidad sobre f y g, son cruciales, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. *sean* $f(X,Y) = Y - X^2$ *y* $g(X,Y) = (Y - X^2)^2$. *Obviamente* $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$, *sin embargo,* $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$.

El siguiente teorema muestra que la clasificación de curvas analíticas planas irreducibles corresponde a la clasificación de sus parametrizaciones con respecto a la $\mathcal{A}$-equivalencia.

Teorema 2.12. *Si* $\varphi_i : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ *son parametrizaciones primitivas de gérmenes de curvas planas analíticas irreducibles definidas por* $f_i : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0,$ *con* $i = 0, 1,$ *entonces* φ_0 *y* φ_1 *son* $\mathcal{A}$*-equivalentes si, y solamente si,* f_0 *y* f_1 *son* $\mathcal{K}$*-equivalentes.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi_0 \sim_{\mathcal{A}} \varphi_1$, esto es, existen $\sigma : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ y $\rho : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}, 0$ difeomorfismo tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}, 0 & \overset{\varphi_0}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^2, 0 \\ \rho \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \sigma \\ \mathbb{C}, 0 & \underset{\psi}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^2, 0 \end{array}$$

Denotando $\varphi_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$, tenemos que $f_i(x_i(t), y_i(t)) = 0$. Notemos que σ preserva las imágenes de φ_0 y φ_1 y por lo tanto el conjunto que anula f_0 y f_1, o sea $\sigma(f_0^{-1}(0)) = f_1^{-1}(0)$. Como f_0 y f_1 son irreducibles, por la proposición anterior tenemos que $f_0 \sim_{\mathcal{K}} f_1$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f_0 \sim_{\mathcal{K}} f_1$. Entonces existe un difeomorfismo $\sigma : \mathbb{C}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^2, 0$ tal que $\sigma(f_0^{-1}(0)) = f_1^{-1}(0)$. Así tenemos que $\sigma(\varphi_0(t))$ nos da una parametrización de f_1. Como las parametrizaciones son únicas a menos de un cambio de parámetro, o sea, de un difeomorfismo $\rho : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}, 0$, tenemos que φ_0 y φ_1 son $\mathcal{A}$-equivalentes. □

Por los resultados presentados anteriormente la clasificación de curvas analíticas irreducibles puede ser realizada por medio de la clasificación de sus parametrizaciones con respecto a la $\mathcal{A}$-equivalencia.

2.4. Grupos de Lie

Definición 2.13. *Un grupo de Lie G es un grupo satisfaciendo:*

i) *G es una variedad diferencial (de dimensión finita);*

ii) *Las aplicaciones*

$$a)\quad \begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & g.h \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

son analíticas.

Observemos que los grupos de Mather no son grupos de Lie, pues no tienen dimensión finita, para salvar esta dificultad, podemos definir variantes de estos grupos que satisfacen las propiedades mencionadas.

Definición 2.14. *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Mather, esto es, $\mathcal{G}$ es, $\mathcal{R}$,$\mathcal{L}$,$\mathcal{A}$,$\mathcal{C}$ o $\mathcal{K}$. Entonces $\mathcal{G}^k = \{j^k(g);\ g \in \mathcal{G}\}$ es un grupo con la siguiente operación*

$$j^k(g) \circledast j^k(h) = j^k(g\circ h) \text{ donde } j^k(g), j^k(h) \in \mathcal{G}^k.$$

Notemos que los $\mathcal{G}^k$, son grupos de Lie, donde el elemento neutro será la identidad(difeomorfismo) y el elemento inverso será el correspondiente difeomorfismo inverso.

Además de $\mathcal{G}^k$, otros grupos de Lie serán importantes, en particular el subgrupo $\mathcal{G}^k_l$ de $\mathcal{G}^k$ constituido por todos los elementos de $\mathcal{G}^k$ cuyo l-jet sea igual a la identidad e de $\mathcal{G}$, o sea,

$$\mathcal{G}^k_l = \{j^k(g); g\in\mathcal{G} \text{ y } j^l(g) = e\}.$$

Dada la aplicación $\phi^m : G \longrightarrow M$ definida por $\phi^m(g) = g\centerdot m$, podemos introducir la definición de *espacio tangente a una órbita.*

Definición 2.15. *Sea G un grupo de Lie actuando en un conjunto M. El espacio tangente a la órbita $G\centerdot m$ en el punto n es la imagen de la aplicación $d\phi^n_e : T_eG \longrightarrow T_nM$ y será denotado por $T_nG\centerdot m$.*

El siguiente lema que presentamos, juega un papel importante para la prueba del teorema de la transversal completa.

Lema 2.16 (lema de Mather). *Sea G un grupo de Lie, M una variedad diferencial, $\phi : G\times M \to M$ una acción y N una subvariedad conexa de M. Suponiendo que las órbitas son subvariedades, entonces N esta contenida en una única órbita si, y solamente si,*

i) $T_nN \subset T_nG\centerdot n$;

ii) $dimT_nG\centerdot n$ *es constante,* *para todo $n \in N$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que $N \subset G \centerdot n_0 \subset M$. Tomando cualquier $n \in N$, tenemos que $n = g \centerdot n_0$ para algún $g \in G$. Así $G \centerdot n = G \centerdot n_0$ y por lo tanto $T_nN \subset T_nG \centerdot n_0 = T_nG \centerdot n$.

Ahora sean $n_1, n_2 \in N$. Vamos a demostrar que, $dimT_{n_1}G \centerdot n_1 = dimT_{n_2}G \centerdot n_2$.

En efecto, como $n_1, n_2 \in N \subset G \centerdot n_0$, tenemos $G \centerdot n_0 = G \centerdot n_1 = G \centerdot n_2$. Luego $n_1 = g \centerdot n_2$ para algún $g \in G$. Así tenemos

$$dimT_{n_1}G \centerdot n_1 = dimT_{n_1}G \centerdot n_2 = dimT_{g.n_2}G \centerdot n_2 = dimT_{n_2}G \centerdot n_2.$$

Por tanto $dimT_nG \centerdot n$ es constante, para todo $n \in N$.

($\Leftarrow$) Supongamos que

i) $T_nN \subset T_nG \centerdot n$;

ii) $dimT_nG \centerdot n$ es constante,

para todo $n \in N$.

Afirmación 1: Para todo $n \in N$ tenemos que $G \centerdot n \cap N$ es un abierto de N.

El lema se sigue de esta afirmación, pues

$$N = \bigcup_{n \in N} G \centerdot n \cap N,$$

y como N es conexo tenemos que $N = G \centerdot n_0 \cap N$ y así $N \subset G \centerdot n_0$ para algún $n_0 \in N$. Para mostrar la afirmación 1, usaremos el siguiente hecho:

Afirmación 2: La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi : G \times N & \longrightarrow & M \\ (g, n) & \longmapsto & g \centerdot n \end{array}$$

tiene rango constante.

Para demostrar la afirmación 2, debemos mostrar que

$$dim\ d\phi_{(g,n)}(T_{(g,n)}(G \times N))$$

es constante.

Considerando inicialmente $g = e$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} d\phi_{(e,n)}(T_{(e,n)}(G \times N)) & = & d\phi_{(e,n)}(T_eG \times T_nN) \\ & = & d\phi_{(e,n)}(T_eG \times \{0\}) + d\phi_{(e,n)}(\{0\} \times T_nN) \\ & \overset{(1)}{=} & T_nG \centerdot n + d\phi_{(e,n)}(\{0\} \times T_nN) \\ & \overset{(2)}{=} & T_nG \centerdot n + T_nN \\ & \overset{(i)}{=} & T_nG \centerdot n \end{array}$$

por tanto de $dim\ d\phi_{(e,n)}(T_{(e,n)}(G \times N)) = dim\ T_n G \centerdot n = k$.

Probemos (1), o sea, $d\phi_{(e,n)}(T_{(e,n)}(G \times \{0\})) = T_n G \centerdot n$.

Sean $(u, 0) \in T_{(e,n)}(G \times \{0\})$ y $\lambda(t) \subset G$ una curva, con $\lambda(0) = e$ y $\lambda'(0) = u$. Definamos $\Omega(t) = (\lambda(t), n)$ una curva en $G \times N$. Y notemos que

$$\Omega(0) = (\lambda(0), n) = (e, n)$$

$$\Omega'(0) = (\lambda'(0), n) = (u, 0)$$

$$\phi(\Omega(t)) = \phi(\lambda(t), n) = \lambda(t) \centerdot n$$

$$\phi(\Omega(t)) = \theta(\lambda(t))$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \theta : G & \longrightarrow & G \centerdot n \\ g & \longmapsto & g \centerdot n. \end{array}$$

Así

$$d\phi_{(e,n)}(u, 0) = (\phi \circ \Omega)' = (\theta \circ \lambda)'(0) = d\theta_e(u).$$

Por lo tanto

$$d\phi_{(e,n)}(T_e G \times \{0\}) = d\theta_e(T_e G) = T_n G \centerdot n.$$

Ahora probemos (2), esto es, $d\phi_{(e,n)}(\{0\} \times T_n N) = T_n N$.

Sea $(0, v) \in \{0\} \times T_n N$ y $\lambda(t) \subset N$ una curva, con $\lambda(0) = n$ y $\lambda'(0) = v$. Definamos $\Omega(t) = (e, \lambda(t))$ una curva en $G \times N$.

Notemos que $\phi(\Omega(t)) = \phi(e, \lambda(t)) = e \centerdot \lambda(t) = \lambda(t)$. Además de esto, $\phi(\Omega(t)) = i(\lambda(t))$ donde $i : N \to N$ es la identidad. Así tenemos

$$d\phi_{(e,n)}(0, v) = (\phi \circ \Omega)'(0) = (i \circ \lambda)'(0) = di_n(v).$$

Por tanto,

$$d\phi_{(e,n)}(\{0\} \times T_n N) = di_n(T_n N) = T_n N.$$

Ahora consideremos el diagrama (fijemos $g \in G$):

$$\begin{array}{ccc} G \times N & \overset{\phi}{\longrightarrow} & M \\ \psi \downarrow & & \downarrow \theta \\ G \times N & \underset{\phi}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

donde,

$$\begin{array}{rcl} \psi : G \times N & \longrightarrow & G \times N \\ (h, n) & \longmapsto & (gh, n) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \theta : N & \longrightarrow & M \\ m & \longmapsto & g \centerdot m. \end{array}$$

Derivando, obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{(e,n)}(G \times N) & \overset{d\phi_{(e,n)}}{\longrightarrow} & T_n M \\ & & \\ d\psi_{(e,n)} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow d\theta_n \\ & & \\ T_{(g,n)}(G \times N) & \underset{d\phi_{(g,n)}}{\longrightarrow} & T_{g\centerdot n} M. \end{array}$$

Así, como ψ y θ son difeomorfismos tenemos que

$$dim\ d\phi_{(g,n)}(T_{(g,n)}(G \times N)) = dim\ d\phi_{(e,n)}(T_{(e,n)}(G \times N)) = k.$$

Por lo tanto, $\psi : G \times N \to M$ tiene rango constante.

Ahora probaremos la afirmación 1.

Consideremos la variedad $G \times N$. Sea $z \in G \centerdot n \cap N$, $z = g \centerdot n$ y $\alpha : U \to G \times N$ una carta de una vecindad de (g, n) en $G \times N$ con $\alpha(0) = (g, n)$ y $0 \in U$.

Sea $\beta : V \to M$ una carta de una vecindad de z en M con $\beta(0) = z$ y $0 \in V$. Como el rango de ϕ es constante y α y β son difeomorfismo, tenemos que el rango de $H = \beta^{-1} \circ \phi \circ \alpha$ es constante e igual a k. Por el teorema del rango, existen $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ difeomorfismos tales que

$$\begin{array}{ccc} G \times N & \overset{\phi}{\longrightarrow} & M \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ U \subset \mathbb{R}^l & \overset{H}{\longrightarrow} & V \subset \mathbb{R}^m \\ \overline{\alpha} \uparrow & & \uparrow \overline{\beta} \\ \overline{U} \subset \mathbb{R}^l & \overset{\overline{\beta}^{-1} \circ H \circ \overline{\alpha}}{\longrightarrow} & \overline{V} \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

donde $dim_{\mathbb{R}}\ G \times N = l$, $dim_{\mathbb{R}}\ M = m$ y

$$\overline{\beta}^{-1} \circ H \circ \overline{\alpha}(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_l) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Así

$$\overline{\beta}^{-1} \circ \beta^{-1} \circ \phi \circ \alpha \circ \overline{\alpha}(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_l) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$$

y

$$\phi \circ \alpha \circ \overline{\alpha}(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_l) = \beta \circ \overline{\beta}(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0).$$

De este modo, $\beta \circ \overline{\beta}$ es una parametrización de $\phi(\alpha \circ \overline{\alpha}(\overline{U}))$ y por tanto $\phi(\alpha \circ \overline{\alpha}(\overline{U}))$ es una subvariedad de M de dimensión k con $z \in \phi(\alpha \circ \overline{\alpha}(\overline{U}))$.

Pero de esta forma existe un abierto W de M que contiene a z tal que su intersección con $\phi(\alpha \circ \overline{\alpha}(\overline{U}))$ es difeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^k$ y coincide con $G \centerdot n$ localmente. Como $z \in W \cap G \centerdot n \cap N \subset N$, tenemos que $G \centerdot n \cap N$ es un abierto de N. $\square$

2.5. Transversal Completa

En esta sección, presentaremos un corolario del lema de Mather, llamado teorema de la transversal completa. Este resultado nos permitirá clasificar curvas analíticas planas irreducibles con determinados semigrupos fijos. Antes veamos un concepto útil.

Un espacio afín A es un conjunto invariante por transformaciones afines. Para ser mas precisos tenemos la siguiente definición.

Definición 2.17. *Un conjunto A es un espacio afín si existen un espacio vectorial V_A y una aplicación*

$$\begin{array}{ccc} A \times V_A & \longrightarrow & A \\ (a,v) & \longmapsto & a+v \end{array}$$

tal que

(i) $a+0=a$

$a+(u+v)=(a+u)+v$; $\forall a \in A$ *y* $\forall u, v \in V_A$

(ii) *Para cualquier $a, b \in A$ existe un único $v \in V_A$ tal que $b = a + v$.*

Teorema 2.18 (Teorema de la Transversal Completa)**.** *Sea G un grupo de Lie actuando suavemente en un espacio afín A asociado a un espacio vectorial V_A y $W \subset V_A$ un subespacio vectorial tal que*

$$T_{a+w}G\,.\,(a+w) = T_aG\,.\,a \tag{2.1}$$

para cualquier $a \in A$ y cualquier $w \in W$. Entonces

1. $a + (T_aG\,.\,a \cup W) \subset G\,.\,a \cap (a+W)$, *para cualquier $a \in A$;*
2. *Si $a \in A$ y T es un subespacio vectorial de W tales que*

$$W \cap T + T_aG\,.\,a$$

entonces para cualquier $w \in W$, existen $g \in G$ y $t \in T$ tales que

$$g(a+w) = a+t.$$

Demostración. **1.)**Notemos que $a + (T_aG\,.\,a \cap W)$ es un subespacio afín de A, cuyo espacio tangente en $u = a + w \in a + (T_aG\,.\,a \cap W)$ es

$$T_u\{a + (T_aG\,.\,a \cap W)\} = T_u(T_aG\,.\,a \cap W) = T_aG\,.\,a \cap W.$$

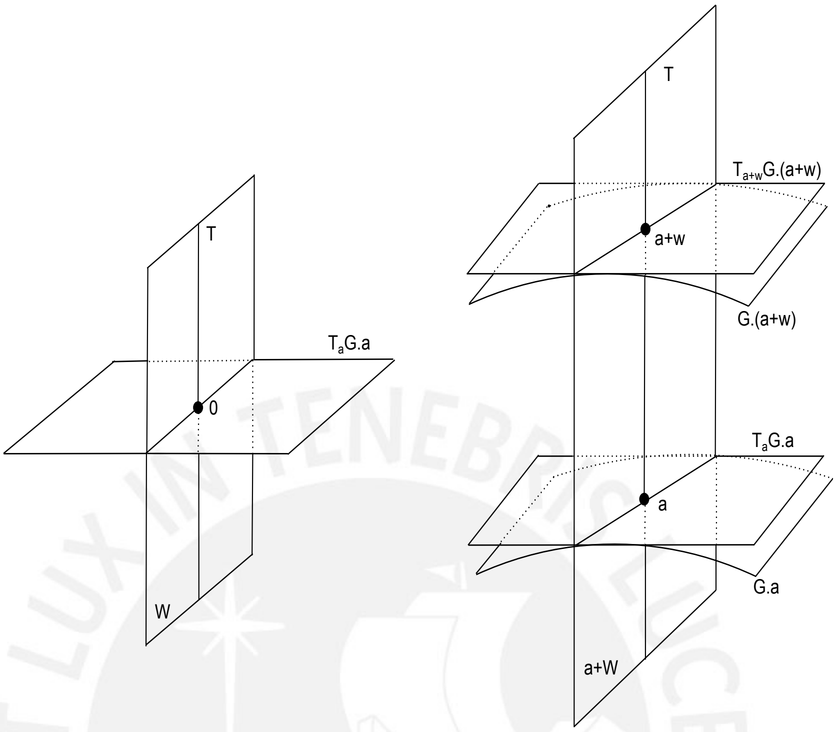

Figura 2.1: Transversal Completa

Dado $a+w \in a+(T_aG \centerdot a \cap W)$, tenemos por hipótesis que $T_{a+w}G \centerdot (a+w) = T_aG \centerdot a$, lo que implica que los espacios tangentes a las órbitas de puntos $a+(T_aG \centerdot a \cap W)$ tiene dimensión constante.

Además de esto, como $T_aG \centerdot a \cap W \subset T_aG \centerdot a$, se sigue del lema del Mather que,

$$a + (T_aG \centerdot a \cap W) \subset G \centerdot a.$$

Observemos que, como $T_aG \centerdot a \cap W \subset W$, tenemos $a + (T_aG \centerdot a \cap W) \subset a + W$. Luego, $a + (T_aG \centerdot a \cap W) \subset G \centerdot \cap (a + W)$.

2.) Notemos que,

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{t\in T} G \centerdot (a+t) & \overset{(1)}{\supset} & \bigcup_{t\in T} a+t+T_{a+t}G \centerdot (a+t) \cap W \\ & \overset{(2,1)}{=} & \bigcup_{t\in T} a+t+T_aG \centerdot a \cap W \\ & = & a+T+T_aG \centerdot a \cap W \\ & \overset{T\subseteq W}{=} & a+(T+T_aG \centerdot a) \cap W \\ & = & a+W. \end{array}$$

Por tanto, para todo $w \in W$, existen $g \in G$ y $t \in T$ tales que, $a + w = g \centerdot (a + t)$, o sea, $a + t = g^{-1} \centerdot (a + w)$. $\square$

Ahora vamos a aplicar el teorema de la transversal completa, para clasificar analíticamente, curvas planas irreducibles con determinados semigrupos fijos. La idea es aplicar el método de la transversal completa a una parte fija de la parametrización de Puiseux y avanzar jet a jet hasta un k-jet con k igual al conductor del semigrupo, pues como veremos más adelante toda curva plana irreducible es equivalente a si mismo cortado en el conductor.

2.6. Espacio Tangente a la Órbita

Sea G un grupo de Lie que actúa en una variedad M y $\phi^m : G \longrightarrow M$ la aplicación definida por $\phi^m(g) = g\,.\,m$. Como vimos en la definición (2.15) que el espacio tangente a la órbita $G\,.\,m$ en el punto $n \in M$ es dado por la imagen de la aplicación

$$d\phi_e^m : T_eG \longrightarrow T_nM.$$

Para aplicar el método de la transversal completa para curvas planas irreducibles necesitamos caracterizar el espacio tangente a la órbita en el caso en que $G = \mathcal{A}^k$ o $G = \mathcal{A}_1^k$ y $M = J^k(n,p)$. Con la siguiente proposición nos ayuda a ver como es un vector tangente a la órbita.

Proposición 2.19. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ variedades diferenciables y $f : A \to B$ una aplicación diferenciable. Dado $v \in T_aA$, existe una curva $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}^n$, con $\alpha(0) = a$ y $\alpha'(0) = d\alpha_0(1) = v$. Además de esto, $df_a(v) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\alpha(t)) - f(\alpha(0))}{t}$.*

Ahora veamos el caso que nos interesa, esto es, cuando $G = \mathcal{A}^k$ o $G = \mathcal{A}_1^k$. Para esto recordemos que $\mathcal{A}^k = \mathcal{R}^k \times \mathcal{L}^k$, entonces estudiemos en espacio tangente a la órbita para $\mathcal{R}^k$ y $\mathcal{L}^k$ por separado.

Dados un entero k y un germen de k-jet $f \in J^k(n,n)$ fijados definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \psi_f : \mathcal{R}^k & \longrightarrow & J^k(n,n) \\ h & \longmapsto & j^k(f \circ h^{-1}) = j^kf \circ j^kh^{-1}. \end{array}$$

Como $\mathcal{R}^k$ es un abierto de $J^k(n,n)$ entonces $T_1\mathcal{R}^k = J^k(n,n)$. Sea $g \in T_1\mathcal{R}^k$ y consideremos la curva $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathcal{R}^k$, con $\alpha(0) = 1$ y $\alpha'(0) = g$,

$$\alpha(t)(x) = x + tg(x),$$

por la proposición anterior, un vector tangente a la orbita de f es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\psi_f \circ \alpha(t)]|_{t=0} &= \frac{d}{dt}[j^k(f\circ\alpha(t))]|_{t=0} \\
&= j^k \frac{d}{dt}(f\circ\alpha(t))|_{t=0} \\
&= j^k \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha(t))\alpha'_j(t)|_{t=0} \\
&= j^k \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j \in T_f\mathcal{R}^k \centerdot f
\end{aligned}$$

con $g_i \in \mathcal{M}_n$ pues $\alpha(t) \in \mathcal{R}^k$, para cualquier t.

De esta forma tenemos

$$T_f\mathcal{R}^k \centerdot f = j^k \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j ; g_i \in \mathcal{M}_n \right\}.$$

Si $G = \mathcal{A}_1^k$, entonces en el análisis hecho debemos considerar $\mathcal{R}_1^k$, ósea $j^1(\alpha(t)(x)) = e$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Como $\alpha(t)(x) \in \mathcal{R}_1^k$ y

$$J_0\alpha(t)(x) = \begin{pmatrix}
1+t\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(0) & t\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(0) & \cdots & t\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(0) & \cdots & t\frac{\partial g_n}{\partial x_1}(0) \\
t\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(0) & 1+t\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(0) & \cdots & t\frac{\partial g_i}{\partial x_2}(0) & \cdots & t\frac{\partial g_n}{\partial x_2}(0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
t\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(0) & t\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(0) & \cdots & 1+t\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(0) & \cdots & t\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
t\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(0) & t\frac{\partial g_2}{\partial x_n}(0) & \cdots & t\frac{\partial g_i}{\partial x_n}(0) & \cdots & 1+t\frac{\partial g_n}{\partial x_n}(0)
\end{pmatrix}$$

debemos tener $J_0\alpha(t)(x) = Id$, ósea, $\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(0) = 0$ para $i = 1, ..., n$. Como $g(0) = 0$ se sigue que $g \in \mathcal{M}_n^2$, así tenemos que

$$T_f\mathcal{R}_1^k \centerdot f = j^k \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j ; g_j \in \mathcal{M}_n^2 \right\}.$$

Ahora veamos la caracterización de $T_f\mathcal{L}^k \centerdot f$.

Sean $\phi^f : \mathcal{L}^k \to J^k(n,p)$, definida por $\phi^f(h) = j^k(h \circ f)$ para k y $f \in J^k(n,p)$ fijos, y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{L}^k$, dada por $\gamma(t)(X) = X + tg(X)$, con $\alpha(0)(X) = X = e$ y $g \in T_e\mathcal{L}^k$, así un vector tangente a la orbita de f es

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\phi^f \circ \gamma(t) - \phi^f \circ \gamma(0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)\circ f - f}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f + g(f) - f}{t} \\
&= g \circ f \\
&= (g_1 \circ f, g_2 \circ f, ..., g_p \circ f)
\end{aligned}$$

donde $g_i \in \mathcal{L}^k$, pues $\gamma(t) \in \mathcal{L}^k$, para cualquier t. De esta forma tenemos

$$T_f\mathcal{L}^k \centerdot f = j^k\{(g_1 \circ f, g_2 \circ f, ..., g_p \circ f); g_i \in \mathcal{M}_p\}$$

y

$$T_f\mathcal{L}_1^k \centerdot f = j^k\{(g_1 \circ f, g_2 \circ f, ..., g_p \circ f); g_i \in \mathcal{M}_p^2\}.$$

Así tenemos el espacio tangente a la orbita del grupo $\mathcal{A}^k$ o $\mathcal{A}_1^k$, definido por

$$T_f\mathcal{A}^k \centerdot f = j^k\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}h_j + (g_1 \circ f, g_2 \circ f, ..., g_p \circ f); h_j \in \mathcal{M}_n \ y \ g_i \in \mathcal{M}_p\right\}$$

$$T_f\mathcal{A}_1^k \centerdot f = j^k\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}h_j + (g_1 \circ f, g_2 \circ f, ..., g_p \circ f); h_j \in \mathcal{M}_n^2 \ y \ g_i \in \mathcal{M}_p^2\right\}.$$

En el caso particular de curvas irreducibles planas dadas por parametrizaciones de la forma $\phi : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ con $\phi(t) = (x(t), y(t))$ tenemos

$$T_\phi\mathcal{A}^k \centerdot \phi = j^k\left\{(x'(t), y'(t))h(t) + (g_1 \circ \phi(t), g_2 \circ \phi(t)); h \in \mathcal{M}_1 \ y \ g_1, g_2 \in \mathcal{M}_2\right\}.$$

$$T_\phi\mathcal{A}_1^k \centerdot \phi = j^k\left\{(x'(t), y'(t))h(t) + (g_1 \circ \phi(t), g_2 \circ \phi(t)); h \in \mathcal{M}_1^2 \ y \ g_1, g_2 \in \mathcal{M}_2^2\right\}.$$

Para aplicar el teorema de la transversal completa además de considerar un grupo de Lie G actuando en un espacio vectorial V y de la descripción del espacio tangente a la orbita de un elemento, debemos encontrar un subespacio vectorial W de V tal que $l \centerdot (\alpha + \beta) = l \centerdot \alpha$ para todo $l \in T_eG$, $\alpha \in V$ y $\beta \in W$. En el caso en que $G = \mathcal{A}_1^k$ y $V = J^k(n, p)$, consideremos el subespacio W como $H^k(n, p)$, que satisfacen las condiciones del teorema de la transversal completa.

2.7. Formas Normales

En esta sección clasificaremos algunas curvas de multiplicidad baja con semigrupos específicos aplicando el método de la transversal completa, primeramente, presentaremos algunos resultados que facilitaran el análisis posterior.

La siguiente resultado nos dice que toda parametrización de Puiseux es analíticamente equivalente a si misma cortada en su conductor c y además los términos que quedan en la parametrización con orden en el intervalo $(v_1, c-1)$ y pertenezcan al semigrupo de valores también se pueden eliminar.

Proposición 2.20. *Sea $\mathcal{C}$ una curva dada por la parametrización*

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t^{v_0} \\ y(t) = t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t^i \end{cases}$$

con $\Gamma = \langle v_0, ..., v_g\rangle$ *su semigrupo de valores y conductor* c*. Entonces existe una curva* $\mathcal{C}'$*, tal que* $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}'$*, con parametrización*

$$\mathcal{C}' : \begin{cases} x'(t) = t^{v_0} \\ y'(t) = t^{v_1} + \sum_{i=1}^{q} a'_{\nu_i} t^{\nu_i}. \end{cases}$$

con $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_q \notin \Gamma$

Demostración. $\mathcal{C}$ esta definido por la parametrización

$$\begin{cases} x(t) = t^{v_0} \\ y(t) = t^{v_1} + \cdots + a_\alpha t^\alpha + \cdots \end{cases}$$

donde α es el menor exponente en el intervalo (v_1, c) que pertenece a Γ y $a_\alpha \neq 0$. Existe por lo tanto un elemento $h \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ tal que $v(h) = \alpha$. Definamos el siguiente cambio de coordenadas analítico:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y - bh, \quad b = \text{cte conveniente} \end{cases}$$

Este cambio de coordenadas define una curva $\mathcal{C}_1$ analíticamente equivalente a $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x_1(t) = t^{v_0} \\ y_1(t) = t^{v_1} + \cdots + \widehat{a_\alpha t^\alpha} + a'_\beta t^\beta \cdots, \quad \alpha < \beta \end{cases}$$

donde el término $a_\alpha t^\alpha$ es eliminado de la parametrización original. Observemos que por definición del cambio de coordenadas analítico, $y_1(t)$ tiene los mismos términos que $y(t)$ hasta el orden $\alpha - 1$, en el intervalo (v_1, c) existe solo un número finito de elementos de Γ, nuevamente en la parametrización de la curva $\mathcal{C}_1$ observamos el menor exponente de $y_1(t)$ que este en el intervalo (v_1, c) y pertenezca a Γ, luego definimos un cambio de coordenadas analítico que nos permita eliminar el término cuyo exponente identificamos.

Después de un número finito de operaciones, obtenemos una curva $\mathcal{C}_s \sim \mathcal{C}$ con una parametrización

$$\mathcal{C}_s \begin{cases} x_s(t) = t^{v_0} \\ y_s(t) = t^{v_1} + \sum_{i=1}^{q} a'_{\nu_i} t^{\nu_i} + \eta_1(t), \end{cases}$$

donde $\nu_1, ...\nu_q$ son enteros en (v_1, c) que no están en Γ, y $\eta_1(t) = b_1 t^{\beta_1} + b_2 t^{\beta_2} + \cdots \in \mathbb{C}\{t\}$ es un serie de potencias en t de orden mayor igual a c. Ahora nuestro objetivo es eliminar el término $\eta_1(t)$. Consideremos el siguiente cambio analítico

$$\begin{cases} x_{s+1} = x_s \\ y_{s+1} = y_s - N_1(x_s, y_s), \end{cases}$$

tal que $ord_t(N_1(x_s(t), y_s(t))) = ord_t(\eta_1(t))$, así obtenemos la curva $\mathcal{C}_{s+1} \sim \mathcal{C}$, con parametrización

$$\mathcal{C}_{s+1} \begin{cases} x_{s+1}(t) = t^{v_0} \\ y_{s+1}(t) = t^{v_1} + \sum_{i=1}^{q} a'_{\nu_i} t^{\nu_i} + \underbrace{\eta_1(t) - N_(x_s(t), y_s(t))}_{\eta_2(t)}, \end{cases}$$

ahora eliminemos el siguiente término, con el siguiente cambio analítico

$$\begin{cases} x_{s+2} = x_{s+1} \\ y_{s+1} = y_{s+1} - N_2(x_{s+1}, y_{s+1}), \end{cases}$$

que es igual a

$$\begin{cases} x_{s+2} = x_s \\ y_{s+2} = y_s - N_1(x_s, y_s) - N_2(x_s, y_s - N_1(x_s, y_s)), \end{cases}$$

donde $ord_t(N_2(x_s(t), y_s(t))) = ord_t(\eta_2(t)) > \beta_1$, y así obtenemos una curva $\mathcal{C}_{s+2} \sim \mathcal{C}$, con parametrización

$$\mathcal{C}_{s+2} \begin{cases} x_{s+2}(t) = t^{v_0} \\ y_{s+2}(t) = t^{v_1} + \sum_{i=1}^{q} a'_{\nu_i} t^{\nu_i} + \underbrace{\eta_1(t) - N_1(x_s(t), y_s(t)) - N_2(x_s(t), y_s(t))}_{\eta_3(t)}, \end{cases}$$

y podemos seguir haciendo esto hasta eliminar por completo $\eta_1(t)$, con el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x_{s+2} = x_s \\ y_{s+2} = y_s - (N_1(x_s, y_s) + N_2(x_s, y_s) + \cdots + N_n(x_s, y_s) + \cdots), \end{cases}$$

que apriori no tendría que ser analítico. Para que este cambio de coordenadas sea analítico la serie

$$\sum_{j\geq 1} N_j(x_s, y_s) = N_1(x_s, y_s) + N_2(x_s, y_s) + \cdots + N_n(x_s, y_s) + \cdots$$

tiene que converger.

En efecto, consideremos

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{C}\{X, Y\} \times \mathbb{C}\{X, Y\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & d(f, g) = \rho^{-mult(f-g)} \end{array}$$

con $\rho > 1$, una métrica que hace de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ un espacio métrico completo.

Consideremos las sumas parciales

$$P_s = \sum_{j\geq 1}^{s} N_j(x_s, y_s)$$

así tenemos que la succión de sumas parciales $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$, observemos que esta sucesión es de Cauchy pues, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un entero n_0 tal que

$$d(P_l, P_m) < \rho^{-n}, \ \forall\, l, m \geq n_0.$$

Así tenemos que la serie $\sum_{j\geq 1} N_j(x_s, y_s)$ converge.

Por lo tanto la curva $\mathcal{C}$ es analíticamente equivalente a la curva $\mathcal{C}'$ con parametrización

$$\mathcal{C}' : \begin{cases} x'(t) = t^{v_0} \\ y'(t) = t^{v_1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a'_{\nu_i} t^{\nu_i}. \end{cases}$$

$\square$

Ejemplo 2.21. *Consideremos las curvas con semigrupo $\Gamma = \langle 2, v_1\rangle$, donde v_1 tiene que ser impar, pues de lo contrario Γ no seria un semigrupo con conductor. Una parametrización para una curva analítica irreducible plana con semigrupo $\Gamma = \langle 2, v_1\rangle$ puede ser dada por*

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^{v_1} + \displaystyle\sum_{i>v_1} a_i t^i. \end{cases}$$

con conductor

$$\begin{aligned} c &= (n_1 - 1)v_1 - v_0 + 1 \\ &= (v_0 - 1)v_1 - v_0 + 1 \\ &= (v_0 - 1)(v_1 - 1) \end{aligned}$$

pero, $n_1 = \dfrac{e_0}{e_1} = \dfrac{v_0}{1}$. Así, como $v_0 = 2$ tenemos

$$c = (2-1)(v_1 - 1) = v_1 - 1.$$

Por la proposición anterior tenemos que toda curva analítica irreducible plana con semigrupo $\Gamma = \langle 2, v_1\rangle$ será equivalente a

$$\phi(t) : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^{v_1}. \end{cases}$$

Proposición 2.22. *consideremos una curva plana irreducible dada por la parametrización de Puiseux de la forma*

$$\psi(t) : \begin{cases} x(t) = t^{v_0} \\ y(t) = t^{v_1} + at^{\lambda}, \end{cases}$$

ósea, $\psi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + at^{\lambda})$ con $\lambda > v_1$ y $a \neq 0$. Entonces ψ es $\mathcal{A}$-equivalente a

$$\phi(t) : \begin{cases} x(t) = t^{v_0} \\ y(t) = t^{v_1} + t^{\lambda}. \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que dos parametrizaciones de Puiseux son $\mathcal{A}$-equivalentes, si y solo si, existen difeomorfismos analíticos $\rho : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}, 0$ y $\sigma : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ tal que

$$\sigma \circ \psi \circ \rho^{-1} = \phi.$$

Así, basta considerar los difeomorfismos analíticos

$$\rho^{-1}(t) = a^{\frac{1}{v_1 - \lambda}} t$$

y

$$\sigma(X, Y) = (a^{\frac{-v_0}{v_1-\lambda}} X, a^{\frac{-v_1}{v_1-\lambda}} Y).$$

□

Proposición 2.23. *Consideremos una curva plana irreducible con semigrupo* $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$ *que admite una parametrización* $\varphi_a(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + at^l)$, *donde* $(0, t^l) \notin T_{\varphi_0}\mathcal{A}_1^k \centerdot \varphi_0$, $l \neq 2v_1 - v_0$ *y* $k \geq l$.

Entonces φ_a *es* $\mathcal{A}^k$*-equivalente a*

$$\varphi_0 : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^{v_0} \\ y(t) = t^{v_1} \end{array} \right. \quad \acute{o} \quad \varphi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^{v_0} \\ y(t) = t^{v_1} + t^l. \end{array} \right.$$

Pero, las parametrizaciones φ_0 *y* φ_1 *no son* $\mathcal{A}^k$*-equivalentes.*

Demostración. Primero mostraremos que las parametrizaciones φ_a no pueden ser todas $\mathcal{A}^k$-equivalentes.

Consideremos el conjunto

$$N = \{\varphi_a(t), a \in \mathbb{C}\}$$

que es una subvariedad conexa de $J^k(1,2)$. Vamos mostrar que N no satisface las condiciones del lema de Mather cuando $G = \mathcal{A}^k$ y por tanto N no puede estar contenida en una única orbita.

Sea la curva $\gamma(z) = (t^{v_0}, t^{v_1} + zt^l) \subset N$. Notemos que $\gamma(0) = \varphi_0$ y $\gamma'(0) = (0, t^l) \in T_{\varphi_0}N$.

Sin embargo, $(0, t^l) \notin T_{\varphi_0}\mathcal{A}^k \centerdot \varphi_0$. Caso contrario existirán $h \in \mathcal{M}_{(1)}$ y $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_{(2)}$ tales que

$$(0, t^l) = j^k((x'(t), y'(t)).h(t) + (g_1(\varphi_0(t)), g_2(\varphi_0(t))))$$

o sea

$$0 = x'(t)h(t) + g_1(\varphi_0(t)) \ mod \ t^{k+1}$$

$$t^l = y'(t).h(t) + g_2(\varphi_0(t)) \ mod \ t^{k+1}$$

de este modo

$$h(t) = -\frac{g_1(\varphi_0(t))}{x'(t)} \ mod \ t^{k+1}$$

así tenemos

$$t^l = g_2(t^{v_0}, t^{v_1}) - \frac{g_1(t^{v_0}, t^{v_1})v_1 t^{v_1-1}}{v_0 t^{v_0-1}} \ mod \ t^{k+1}.$$

Escribiendo $g_i(x,y) = \alpha_i x + \beta_i y + h_i(x,y)$ con $h_i \in \mathcal{M}^2_{(2)}$ y $i = 1,2$ tenemos

$$t^l = j^k \left\{ \left(\alpha_2 t^{v_0} + \beta_2 t^{v_1} - \frac{(\alpha_1 t^{v_0} + \beta_1 t^{v_1})v_1 t^{v_1-1}}{v_0 t^{v_0-1}} \right) + \left(h_2(t^{v_0}, t^{v_1}) - \frac{h_1(t^{v_0}, t^{v_1})v_1 t^{v_1-1}}{v_0 t^{v_0-1}} \right) \right\}$$

$$t^l = j^k \left\{ \left(\alpha_2 t^{v_0} + (\beta_2 t^{v_1} - \frac{\alpha_1 v_1}{v_0}) t^{v_1} - \frac{\beta_1 v_1}{v_0} t^{2v_1 - v_0} \right) + \left(h_2(t^{v_0}, t^{v_1}) - \frac{h_1(t^{v_0}, t^{v_1})v_1 t^{v_1-1}}{v_0 t^{v_0-1}} \right) \right\}$$

Observemos que t^l no aparece en la primera expresión, pues $l > v_1$ y $l \neq 2v_1 - v_0$, si t^l estaría en la segunda expresión, tendríamos que $(0, t^l) \in T_{\varphi_0}\mathcal{A}^k_1 \centerdot \varphi_0$, esto no puede ser por hipótesis de la proposición.

Así, la primera condición del lema de Mather no es satisfecha, por lo tanto N no está contenida en una única órbita con respecto a los grupos $\mathcal{A}^k$, además por la proposición(2.22), sabemos que si $a \neq 0$ entonces φ_a es equivalente a φ_1. Esto garantiza que toda curva φ_a es $\mathcal{A}^k$-equivalente a φ_0 o φ_1, donde φ_0 y φ_1 no son $\mathcal{A}^k$-equivalentes, pues si lo fueran N estaría contenida en única órbita. □

Proposición 2.24. *Sean*

$$\phi : \begin{cases} x(t) = t^{v_0} \\ y(t) = t^{v_1} + \sum_{i>v_1}^{l} a_i t^i \end{cases}$$

el $(k-1)$-jet de una parametrización de una curva analítica irreducible y Γ su semigrupo de valores. Si $k \in \Gamma$ y $k > l$, entonces la Transversal Completa con respecto a la $\mathcal{A}^k_1$-equivalencia es nula.

Demostración. Bastará verificar que $H^k(1,2) \subset T_\phi \mathcal{A}^k_1 \centerdot \phi$, ósea, debemos mostrar que $(0, t^k)$ y $(t^k, 0)$ estén en $T_\phi \mathcal{A}^k_1 \centerdot \phi$.

1. Veamos que $(t^k, 0) \in T_\phi \mathcal{A}^k_1 \centerdot \phi$:
   En efecto, debemos encontrar $g_1, g_2 \in \mathcal{M}^2_{(2)}$ y $h \in \mathcal{M}^2_{(1)}$ tal que $(0, t^l) = j^k\{(x'(t), y'(t)).h(t) + (g_1(\phi(t)), g_2(\phi(t)))\}$, basta tomar $g_1(X,Y) = g_2(X,Y) = 0$ y $h(t) = \frac{1}{v_0} t^{k-v_0+1}$, notemos que $k + v_0 + 1 \geq 2$ y $h(t) \in \mathcal{M}^2_{(1)}$. Así tenemos

$$\begin{aligned} w &= j^k \left\{ \left(v_0 t^{v_0-1}, v_1 t^{v_1-1} + \sum_{i>v_1}^{l} i a_i t^{i-1} \right) . \left(\frac{1}{v_0} t^{k-v_0+1} \right) + (0,0) \right\} \\ &= j^k \left\{ \left(t^k, \frac{v_1}{v_0} t^{v_1+k-v_0} + \frac{1}{v_0} \sum_{i>v_1}^{l} i a_i t^{i+k-v_0} \right) + (0,0) \right\} \\ &= (t^k, 0) \in T_\phi \mathcal{A}^k_1 \centerdot \phi. \end{aligned}$$

2. Veamos que $(0,t^k)\in T_\phi\mathcal{A}_1^k\centerdot\phi$:
   Como $k\in\Gamma$ existe $g_2(X,Y)\in\mathbb{C}\{X,Y\}$ tal que $v(g_2(x(t),y(t)))=k$, de este modo tomando $h(t)=0\in\mathcal{M}^2_{(1)}$ y $g_1(X,Y)=0\in\mathcal{M}^2_{(2)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} u &= j^k\left\{\left(v_0t^{v_0-1}, v_1t^{v_1-1}+\sum_{i>v_1}^{l} ia_it^{i-1}\right)\cdot 0+(0,g_2(x(t),y(t))\right\} \\ &= j^k\left\{(0,a_kt^k+a_{k+1}t^{k+1}+\cdots\right\} \\ &= (0,a_kt^k)\in T_\phi\mathcal{A}_1^k\centerdot\phi. \end{aligned}$$

   Luego, $(0,t^k)\in T_\phi\mathcal{A}_1^k\centerdot\phi$

□

Observación 2.25. *Notemos que en la primera parte de la demostración de la proposición anterior, no utilizamos el hecho que $k\in\Gamma$, así tenemos que $(t^k,0)\in T_\phi\mathcal{A}_1^k\centerdot\phi$ para todo $k>v_1$. De esta forma, en lo que sigue, en la aplicación del teorema de la transversal completa, basta verificar que $(0,t^k)\in T_\phi\mathcal{A}_1^k\centerdot\phi$.*

Proposición 2.26. *Sea*

$$\phi(t)=\begin{cases} x(t)=t^{v_0} \\ y(t)=t^{v_1}+\displaystyle\sum_{i>v_1}^{2v_1-v_0-1} a_it^i+at^{2v_1-v_0}. \end{cases}$$

Entonces $\phi(t)$ es $\mathcal{A}^{2v_1-v_0}$-equivalente a

$$\psi(t)=\begin{cases} x(t)=t^{v_0} \\ y(t)=t^{v_1}+\displaystyle\sum_{i>v_1}^{2v_1-v_0-1} a_it^i. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos los difeomorfismos analíticos

$$\sigma(x,y)=(x+\frac{v_0}{v_1}ay,y)$$

y

$$\rho^{-1}(t)=t-\frac{a}{v_1}t^{v_1-v_0+1}+f(t)$$

con $f(t)=-\dfrac{a}{v_1}\displaystyle\sum_{i>v_1}^{2v_1-v_0-1} a_it^{i-v_0+1}-\dfrac{(v_0-1)a^2}{2v_1^2}t^{2v_1-2v_0+1}$.

De este modo, tenemos que

$$j^{2v_1-v_0}(\sigma\circ\phi\circ\rho^{-1}(t))=\psi(t)$$

□

Aplicando el método de la transversal completa, clasificaremos los gérmenes de curvas irreducibles planas, con semigrupos de valores fijos, específicamente, curvas con semigrupos $\langle 3,v_1\rangle$, $\langle 4,7\rangle$ que Zariski clasifico en [10].

2.7.1. Curvas con semigrupo $\Gamma = \langle 3, v_1 \rangle$

Ahora consideramos curvas que admiten semigrupo de valores de la forma $\Gamma = \langle 3, v_1 \rangle$. Cuyo conductor es $c = 2v_1 - 2$, de esta forma toda curva con semigrupo Γ puede ser truncada en el término cuya potencia sea $2v_1 - 2$ (por la proposición(2.20)), además por la proposición(2.26) el término $2v_1 - v_0 = 2v_1 - 3$ también puede ser eliminado, así basta aplicar el método de la transversal completa para los grupos $\mathcal{A}_1^k$ con $v_1 < k < 2v_1 - 3$.

Observemos que v_1 es de la forma $3p+1$ o $3p+2$. Analizaremos el caso $v_1 = 3p+2$, esto es, curvas con parte fija $\phi(t) = (t^3, t^{3p+2})$.

Así tenemos los grupos $\mathcal{A}_1^k$, donde

$$\begin{aligned} k &\equiv 0 \; mod \; 3 \Longrightarrow k = 3m \in \Gamma \\ k &\equiv 1 \; mod \; 3 \Longrightarrow k = 3m+1 \notin \Gamma \\ k &\equiv 2 \; mod \; 3 \Longrightarrow k = 3m+2 \end{aligned}$$

como $k > v_1 = 3p+2$ tenemos que $m > p$, escribiendo $m = p + q$, tenemos que $k = 3p + 2 + 3q = v_1 + 3q$, así para este caso tenemos que $k \in \Gamma$, así tenemos que para el primer y tercer caso la transversal completa será nula, quedando analizar el caso en que $k = 3m + 1$.

Para calcular la transversal completa como vimos en la Observación(2.25) es suficiente analizar si $(0, t^k) \in T_\phi \mathcal{A}_1^k \centerdot \phi$, o sea,

$$0 = h(t)dx(t) + g_1(x(t), y(t)) \; mod \; t^{k+1};$$

$$t^k = h(t)dy(t) + g_2(x(t), y(t)) \; mod \; t^{k+1}$$

donde $k = 3m+1$, $h(t) \in \mathcal{M}_1^2$ y $g_1(X,Y), g_2(X,Y) \in \mathcal{M}_2^2$. O equivalentemente,

$$t^k = g_2(x(t), y(t)) - g_1(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dx(t)} \; mod \; t^{k+1}.$$

Para que esto ocurra debemos tener términos t^k en $g_2(x(t), y(t))$ y/o $g_1(x(t), y(t)) \dfrac{dy(t)}{dx(t)}$ que no se cancelen.

En efecto, como $g_1(x(t), y(t)), g_2(x(t), y(t)) \in \mathcal{M}_2^2$, $x(t) = t^3$ y $y(t) = t^{v_1}$ en $g_2(x(t), y(t))$ hay apenas términos con potencias de la forma 3α,βv_1 o $3\lambda + \delta v_1$ con $\alpha, \beta > 1$ $\lambda + \delta > 1$ que pertenecen a Γ, por lo tanto no hay términos t^k en $g_2(x(t), y(t))$. Del mismo modo en $g_1(x(t), y(t)) \dfrac{dy(t)}{dx(t)}$ hay términos con exponentes de la forma $3(\alpha+1) + v_1$, $3(\lambda - 1) + (\delta + 1)v_1$ o $(\beta + 1)v_1 - 3$, los dos primeros pertenecen a Γ y $(\beta + 1)v_1 - 3 > 2v_1 - 3 > k$.

Así tenemos que para los grupos de Lie $\mathcal{A}_1^k$ con $k = 3m+1$ la transversal completa es $T = [(0, t^{3m+1})]$ y toda curva con semigrupo Γ es $\mathcal{A}_1^k$-equivalente a

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+2} + at^{3m+1}. \end{cases}$$

y esta a su vez por la proposición(2.23) se reduce a analizar los casos en que $a = 0$ o $a = 1$.

Si $a = 0$, la curva será equivalente a

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+2}. \end{cases}$$

El análisis de la transversal completa para los casos siguientes será similar al caso anterior, considerando $\mathcal{A}_1^k$ con $k \equiv 1 \ mod\ 3$.

Si $a = 1$, las curvas serán equivalentes a

$$\overline{\phi} : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+2} + t^{3m+1}, \end{cases}$$

En este caso, para el análisis de la transversal completa consideraremos nuevamente $\mathcal{A}_1^k$ con $k > 3m + 1$, como en el caso anterior tenemos

$$\begin{aligned} k &\equiv 0 \ mod\ 3 \Longrightarrow k = 3n \in \Gamma \\ k &\equiv 2 \ mod\ 3 \Longrightarrow k = 3n + 2 \in \Gamma \\ k &\equiv 1 \ mod\ 3 \Longrightarrow k = 3n + 1 \notin \Gamma \end{aligned}$$

Tenemos que para los dos primeros casos la transversal completa será nula, quedando analizar $k = 3n + 1$, con $n > m$, lo que equivale a ver si $(0, t^k) \in T_{\overline{\phi}}\mathcal{A}_1^k \centerdot \overline{\phi}$, o sea

$$t^{3n+1} = \frac{g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))dy(t)}{dx(t)} \ mod\ t^{3n+2}.$$

con $g_1(X, Y), g_2(X, Y) \in \mathcal{M}_2^2$, tenga solución.

En efecto, $g_1(X, Y) = 3\alpha v_1 X^{n-m+1}$ y $g_2(X, Y) = \alpha v_1 X^{n-m} Y$ es solución, donde $\alpha = \dfrac{1}{v_1 - (3m + 1)}$.

De esta forma tenemos que $(0, t^k) \in T_{\overline{\phi}}\mathcal{A}_1^k \centerdot \overline{\phi}$, por lo tanto la transversal completa es nula, y toda curva es equivalente a

$$\overline{\phi} : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+2} + t^{3m+1}. \end{cases}$$

En conclusión, tenemos que toda curva con semigrupo $\Gamma = \langle 3, v_1 \rangle$ con $v_1 = 3p+2$ es equivalente a

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+2} \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+2} + t^{3m+1}. \end{cases}$$

El análisis para el caso en que $v_1 = 3p+1$ es idéntico a lo realizado en el caso anterior, obteniendo que toda curva con semigrupo $\Gamma = \langle 3, v_1\rangle$ con $v_1 = 3p+1$ es equivalente a

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+1} \end{cases} \text{ó} \quad \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{3p+1} + t^{3m+2}. \end{cases}$$

2.7.2. Curvas con semigrupo $\Gamma = \langle 4, 7\rangle$

Ahora consideramos curvas con semigrupos $\Gamma = \langle 4, 7\rangle$, además toda curva con semigrupo Γ posee parte inicial

$$\phi : \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7. \end{cases}$$

Como el conductor de Γ es $c = 18$, podemos cortar toda curva que posee semigrupo Γ en el término de orden 18. ahora tenemos que calcular la transversal completa usando el grupo $\mathcal{A}_1^k$, para $k \notin \Gamma$ y $7 < k < 18$.

Consideremos $k = 9$, calculemos la transversal completa, para esto debemos verificar que $(0, t^9) \in T_\phi \mathcal{A}_1^9 \centerdot \phi$ o equivalentemente

$$t^9 = g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} \ mod \ t^{10}.$$

con $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_2^2$, además estos elementos se expresan como

$$g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = \sum_{i+j>1} a_{ij}\frac{5}{4}t^{4i+7j+3}$$

$$g_2(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = \sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i+7j}$$

Haciendo un análisis como antes, tenemos que t^9 no aparece en la expresión

$$g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} \ mod \ t^{10},$$

pues $9 = 4i + 7j + 3 \Longrightarrow 6 = 4i + 7j \notin \Gamma$ y $9 = 4i + 7j \notin \Gamma$.Así tenemos que no existen $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_2^2$, de esta forma la transversal completa es $T = (0, t^9)$, por lo tanto toda curva con parte inicial ϕ es $\mathcal{A}_1^9$-equivalente a

$$\begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 + at^9. \end{cases}$$

Como vimos tenemos dos casos para analizar $a = 0$ o $a = 1$

Veamos el caso $a = 0$, continuemos con $k = 10$, consideremos el grupo $\mathcal{A}_1^{10}$, observemos que $10 = 2v_1 - v_0$ y por la proposición(2.26), el término de orden 10 puede ser eliminado sin importar si la transversal completa sea o no nula.

Si $k = 11$, observemos que este pertenece al semigrupo al igual que para el caso cuando $k = 12$, así tenemos por la proposición(2.24) que las transversal completa es nula cuando consideramos los grupos $\mathcal{A}_1^{11}$ y $\mathcal{A}_1^{12}$, pasemos a ver el caso cuando $k = 13$ y consideramos el grupo $\mathcal{A}_1^{13}$. Para calcular la transversal completa, debemos verificar si $(0, t^{13}) \in T_\phi \mathcal{A}_1^{13} \centerdot \phi$, ósea si

$$t^{13} = g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} \ mod\ t^{14}.$$

utilizando nuevamente el hecho que

$$g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{7}{4}\sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i+7j+3}$$

$$g_2(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = \sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i+7j}$$

tenemos que

$$g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = \sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i+7j} - \frac{7}{4}\sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i+7j+3}$$

vemos que t^{13} no aparece en la expresión anterior, pues

$13 = 4i + 7j + 3 \Longrightarrow 10 = 4i + 7j \notin \Gamma$

$13 = 4i + 7j \notin \Gamma$. Así tenemos que no existen $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_2^2$, de esta forma la transversal completa es $T = (0, t^{13})$, por lo tanto toda curva con parte inicial ϕ es $\mathcal{A}_1^{13}$-equivalente a

$$\phi : \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 + bt^{13}. \end{cases}$$

Nuevamente tenemos dos posibilidades $b = 0$ y $b = 1$.

Veamos el caso $b = 0$. Notemos que para los grupos $\mathcal{A}_{14}$,$\mathcal{A}_{15}$ y $\mathcal{A}_{16}$ la transversal completa es nula, pues $14, 15, 16 \in \Gamma$, pasemos al grupo $\mathcal{A}_{17}$, nuevamente basta verificar si

$$t^{17} = g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} \ mod\ t^{18}.$$

por el análisis anterior tenemos que

$$g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{7}{4}\sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i+7j+3}$$

$$g_2(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} = \sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i+7j}$$

y

$17 = 4i + 7j + 3 \Longrightarrow 14 = 4i + 7j \in \Gamma$, para $j = 2$

$17 = 4i + 7j \notin \Gamma$.

Así basta considerar $g_2(X, Y) = 0$ y $g_1(X, Y) = -Y^2$, de esta forma la transversal completa es nula, por lo tanto toda curva será equivalente a

$$\phi : \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7. \end{cases}$$

Terminado el análisis para caso en que $a = 0$ y $b = 0$, regresamos al caso en que $a = 0$ y $b = 1$, ósea,

$$\phi_1 : \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 + t^{13}. \end{cases}$$

Como para el caso anterior tenemos que para los grupos $\mathcal{A}_{14}$,$\mathcal{A}_{15}$ y $\mathcal{A}_{16}$ la transversal completa es nula, quedando analizar $\mathcal{A}_{17}$. Para calcular la transversal completa, basta verificar que existan $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_2^2$ tal que

$$t^{17} = g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} \ mod\ t^{18}.$$

Como en caso anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} &= \sum_{i+j>1} a_{ij}(\frac{7}{4}t^{4i+3} + \frac{13}{4}t^{4i+9})(t^7 + t^{13})^j \\
g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} &= \sum_{i+j>1} a_{ij}(\frac{7}{4}t^{4i+3} + \frac{13}{4}t^{4i+9})\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}(t^{7(j-s)}t^{13s}) \\
g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} &= \sum_{i+j>1} a_{ij}(\frac{7}{4}t^{4i+3} + \frac{13}{4}t^{4i+9})\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}(t^{7j-6s}) \\
g_2(x(t), y(t)) &= \sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i}\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}(t^{7j-6s}).
\end{aligned}$$

Haciendo el mismo análisis como en el caso anterior, tendremos que $g_2(X, Y) = 0$ y $g_1(X, Y) = -Y^2$, así tenemos que la transversal completa es nula. Por lo tanto todas las curvas con semigrupo Γ, $a = 0$ y $b = 1$ son equivalentes a ϕ_1.

Ahora toca el caso en que $a = 1$, esto es, la parte fija de las curvas serán

$$\phi_2 : \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 + t^9. \end{cases}$$

Para este caso retomamos el análisis en $k = 10$, pero vimos que $10 = 2v_1 - v_0$ y el término t^{10} puede ser eliminado, los casos en que $k = 11$ y 12 ósea para los grupos $\mathcal{A}_1^{11}$ y $\mathcal{A}_1^{12}$ tenemos que la transversal completa es nula pues, $11, 12 \in \Gamma$.

Veamos el caso $k = 13$, para calcular la transversal completa para $\mathcal{A}_1^{13}$, basta verificar que existan $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_2^2$ tal que

$$t^{13} = g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} \ mod\ t^{14}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} &= \sum_{i+j>1} a_{ij}(\frac{7}{4}t^{4i+3} + \frac{9}{4}t^{4i+5})(t^7 + t^9)^j \\
g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} &= \sum_{i+j>1} a_{ij}(\frac{7}{4}t^{4i+3} + \frac{9}{4}t^{4i+5})\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}(t^{7(j-s)}t^{9s}) \\
g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} &= \sum_{i+j>1} a_{ij}(\frac{7}{4}t^{4i+3} + \frac{9}{4}t^{4i+5})\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}(t^{7j+2s}) \\
g_2(x(t), y(t)) &= \sum_{i+j>1} a_{ij}t^{4i}\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}(t^{7j+2s}).
\end{aligned}$$

De esto tenemos, que puede ser $g_1 = -2X^2$ y $g_2 = -\frac{7}{2}XY$, así tenemos que $(0, t^{13}) \in T_{\phi_2}\mathcal{A}_1^{13} \centerdot \phi_2$, por lo tanto la transversal completa será nula y toda curva con parte inicial ϕ_2 será $\mathcal{A}_1^{13}$-equivalente a

$$\begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 + t^9. \end{cases}$$

seguimos con $k = 14, 15, 16$ pero estos pertenecen a Γ así que la transversal completa es nula. Queda solamente analizar el caso para $k = 17$ considerando el grupo $\mathcal{A}_1^{17}$, y realizando el análisis hecho para los casos anteriores tenemos que la transversal completa será nula pues basta tomar $g_1 = Y^2$ y $g_2 = 0$, para tener

$$t^{17} = g_2(x(t), y(t))dx(t) - g_1(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dx(t)} \ mod\ t^{18}.$$

En conclusión tenemos que cualquier curva con semigrupo $\Gamma = \langle 4, 7\rangle$ es equivalente a una de las siguientes curvas

$$\begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 + t^9 \end{cases} \ \text{ó} \ \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^7 + t^{13}. \end{cases}$$

Observemos que el método de la transversal completa podría ser utilizado para clasificar curvas analíticas planas irreducibles con otros semigrupos, sin embargo, como vimos en los ejemplos presentados el análisis se podría hacer más trabajoso.

Capítulo 3

Clasificación Analítica

En este capítulo introduciremos un nuevo invariante, el conjunto de valores de Kähler, veremos que este invariante es más fino que el semigrupo de valores, justamente este invariante conjuntamente con el método de la transversal completa, nos permitirán hallar todas las formas normales de una determinada curva plana analítica irreducible(rama plana).

En adelante denotaremos por $\mathcal{O}_2 = \mathbb{C}\{X, Y\}$ el anillo de las series de potencia convergente con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{M}_2$ su ideal maximal. Sea $f \in \mathcal{M}_2$ irreducible. La clase de f en $\mathcal{O}_2$, modulo la relación de asociados, es llamada una rama plana denotado por (f), nosotros identificaremos (f) con el germen de una rama plana analítica en el origen $\{(x, y) \in (\mathbb{C}, 0); f(x, y) = 0\}$.

Decimos que dos ramas planas (f_1) y (f_2) son *equisingulares*, denotado $(f_1) \equiv (f_2)$ si, y solamente si (f_1) y (f_2) son topológicamente equivalentes como gérmenes de curvas en $(\mathbb{C}^2, 0)$; esto es, cuando existe un homeomorfismo $H : U \longrightarrow U'$, donde U y U' son vecindades del origen de $\mathbb{C}^2$ tal que f_1(resp. f_2) es convergente en U(resp. U') y $H((f_1) \cap U) = (f_2) \cap U'$. El conjunto de todas las ramas planas que son equisingulares a otra es llamada *clase de equisingularidad*.

Cuando la transformación H es un isomorfismo analítico, decimos que (f_1) y (f_2) son *analíticamente equivalentes* o simplemente *equivalentes*, denotado por $(f_1) \sim (f_2)$. Denotaremos por $\mathcal{O}_f$ (o $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$), el anillo de coordenadas de una rama plana f (o $\mathcal{C}$), entonces tenemos que $(f_1) \sim (f_2)$ si, y solo si, $\mathcal{O}_{f_1} \backsimeq \mathcal{O}_{f_2}$, como $\mathbb{C}$-álgebras (ver teorema(1.23)).

Toda rama plana admite una parametrización $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ con $x(t)$ y $y(t)$ en el ideal maximal $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{O}_1 = \mathbb{C}\{t\}$, al menos uno de ellos distinto de cero, tal que $f(x(t), y(t)) = 0$, las parametrizaciones que consideremos son las parametrizaciones de Puiseux, que serán de la forma $\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (t^{\beta_0}, t^{\beta_1} + \sum_{i>\beta_1} a_i t^i)$, con $a_i \in \mathbb{C}$, $\beta_0 < \beta_1$ y $\beta_0 \nmid \beta_1$, Tal que $f \circ \varphi(t) = 0$. Recordemos que $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_g$ son los exponentes característicos de φ, donde el entero g es llamado el genero de φ con $n_0 = 1$, $e_0 = \beta_0$ y para $i = 1, 2, ..., g$, $n_i = \dfrac{e_{i-1}}{e_i}$, donde $e_i = mcd(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_i)$.

Denotemos por v_φ la valoración sobre $\mathcal{O}_2$ definida por $v_\varphi = ord_t(\varphi^*(h))$, donde $\varphi^* : \mathcal{O}_2 \longrightarrow \mathcal{O}_1$ es el homomorfismo natural definido por $\varphi^*(h) = h \circ \varphi(t)$. El semigrupo de valores de φ es el semigrupo $\Gamma_\varphi = v_\varphi(\mathcal{O}_2)$ de los naturales, como sabemos este tiene un sistema mínimo de generadores tal que $\Gamma_\varphi = \langle v_0, v_1, ..., v_g\rangle$, donde $v_0 = \beta_0$ y $v_1 = \beta_1$. Como vimos los exponentes característicos de φ y Γ_φ pueden determinarse unos a los otros.

Para preservar la forma de la parametrización de Puiseux, bajo la $\mathcal{A}$-acción, los isomorfismos analíticos σ y ρ, serán como se describe a continuación.

Proposición 3.1. *Si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ y $\varphi_1(t_1) = (x_1(t_1), y_1(t_1))$ parametrizaciones de Puiseux, entonces para tener $\varphi_1(t) = \sigma \circ \varphi \circ \rho^{-1}(t_1)$, es necesario y suficiente que*

$$\sigma(X, Y) = (r^{v_0}X + p, r^{v_1}Y + q), \quad y \quad t_1 = \rho(t) = rt\sqrt[v_0]{1 + \frac{\varphi^*(p)}{r^{v_0}t^{v_0}}}. \tag{3.1}$$

donde $r \in \mathbb{C}^*$ y $p, q \in \mathcal{O}_2$, con $v_\varphi(p) > v_0$ y $v_\varphi(q) > v_1$.

Demostración. Sean $\varphi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t^i)$ y $\varphi_1(t_1) = (t_1^{v_0}, t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i t_1^i)$ parametrizaciones de Puiseux.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^2, 0) \\ \rho\downarrow & & \downarrow\sigma \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow[\varphi_1]{} & (\mathbb{C}^2, 0) \end{array}$$

Sabemos que ρ es un difeomorfismo de $\mathbb{C}$ y σ es un difeomorfismo de $\mathbb{C}^2$, así σ será de la forma $\sigma(X, Y) = (aX+bY+p', cX+dY+q')$, con $ad-bc \neq 0$ y $p', q' \in \mathcal{M}_2^2$.

Veamos las condiciones sobre ρ y σ para tener $\varphi_1(t_1) = \sigma\circ\varphi\circ\rho^{-1}(t_1)$, observemos que

$$\sigma\varphi(t) = (at^{v_0} + b(t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t^i) + \varphi^*(p'), ct^{v_1} + d(t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i t_1^i) + \varphi^*(q'))$$

como $v_1 > v_0$ y $p' \in \mathcal{M}_2^2$, tenemos que $ord_t(b(t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t^i)) > v_0$, tomando $p = bY + p'$ tenemos que $v_\varphi(p) > v_0$.

Si $c \neq 0$ ó el $ord_t(\varphi(q')) < v_1$, la segunda componente no tendría orden v_1, por lo tanto $c = 0$ y $ord_t(\varphi(q')) \geq v_1$, pero $q' \in \mathcal{M}_2^2$ entonces tenemos que $ord_t(\varphi(q')) > v_1$, tomando $q = q'$, tenemos $v_\varphi(q) > v_1$.

Así tenemos

$$\sigma(X, Y) = (aX + p, dY + q)$$

de este modo

$$\sigma\varphi(t) = (at^{v_0} + \varphi^*(p), dt_1^{v_1} + d\sum_{i>v_1} b_i t_1^i + \varphi^*(q))$$

Notemos que

$$at^{v_0} + \varphi^*(p) = \left(a^{\frac{1}{v_0}} t \sqrt[v_0]{1 + \frac{\varphi^*(p)}{at^{v_0}}}\right)^{v_0}.$$

Así para que la primera componente de $\varphi_1(t_1) = \sigma\varphi\rho^{-1}(t)$ sea $t_1^{v_0}$ debemos tener que $\rho(t) = a^{\frac{1}{v_0}} t \sqrt[v_0]{1 + \frac{\varphi^*(p)}{at^{v_0}}}$.

observemos que $\rho(t) = a^{\frac{1}{v_0}} t \sqrt[v_0]{1 + \frac{\varphi^*(p)}{at^{v_0}}} = a^{\frac{1}{v_0}} t(1 + h(t)) = a^{\frac{1}{v_0}} t(1 + h(t))$, donde $h \in \mathcal{M}_1$ y $u(t) = 1 + h(t)$ es una unidad en $\mathcal{O}_1$, así tenemos que $\rho^{-1}(t_1) = a^{\frac{-1}{v_0}} t_1 + g(t_1)$, donde $g \in \mathcal{M}_1^2$.

Tenemos de esta forma que

$$\varphi_1(t_1) = \sigma\varphi\rho^{-1}(t_1) = (t_1^{v_0}, da^{\frac{-v_1}{v_0}} t_1^{v_1} + s(t))$$

donde $s(t) \in \mathcal{M}_1^{v_1+1}$ y para que $\varphi_1(t_1)$ sea una parametrización de Puiseux debemos tener que $da^{\frac{-v_1}{v_0}} = 1$, ósea $d = a^{\frac{v_1}{v_0}}$. Denotando $r = a^{\frac{1}{v_0}}$, entonces tenemos que $a = r^{v_0}$ y $d = r^{v_1}$.

Resumiendo las informaciones que obtenemos, concluimos que si $\varphi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t^i)$ y $\varphi_1(t_1) = (t_1^{v_0}, t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i t_1^i)$ entonces las condiciones sobre σ y ρ para que tengamos $\varphi_1(t) = \sigma \circ \varphi \circ \rho^{-1}(t_1)$ son

$$\sigma(X, Y) = (r^{v_0}X + p, r^{v_1}Y + q)$$

$$\rho(t) = rt \sqrt[v_0]{1 + \frac{\varphi^*(p)}{r^{v_0}t^{v_0}}}$$

con $r \in \mathbb{C}^*$, $v_\varphi(p) > v_0$ y $v_\varphi(q) > v_1$.

Recíprocamente si tenemos

$$\sigma(X, Y) = (r^{v_0}X + p, r^{v_1}Y + q)$$

$$\rho(t) = rt \sqrt[v_0]{1 + \frac{\varphi^*(p)}{r^{v_0}t^{v_0}}}$$

con $r \in \mathbb{C}^*$, $v_\varphi(p) > v_0$ y $v_\varphi(q) > v_1$, entonces es fácil probar que tenemos $\varphi_1(t) = \sigma \circ \varphi \circ \rho^{-1}(t_1)$. □

De lo anterior, tenemos que $(t^{v_0}, y(t)) \sim_{\mathcal{A}} (t_1^{v_0}, y_1(t_1))$ si, y solo si

$$y_1(t_1) = r^{v_1}y(\rho^{-1}(t_1)) + q(\rho^{-1}(t_1)^{v_0}, y(\rho^{-1}(t_1))). \tag{3.2}$$

Como dijimos nuestro objetivo es obtener las formas normales de una rama plana, para esto lo que hacemos es ir eliminando términos de la parametrización de la curva, Zariski y Ebey dan algunos criterios de eliminación de términos de $y(t)$ de una parametrización $(t^{v_0}, y(t))$ por medio de $\mathcal{A}$-equivalencias.

Sea $\varphi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t^i)$ una parametrización de Puiseux, y sea $j > i$ entero.

Criterio de Eliminación 1(**CE1**)) *Si* $j \in \Gamma_\varphi$, *entonces* φ *es* $\mathcal{A}$-*equivalente a la parametrización* $(t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a'_i t^i)$, *con* $a'_i = a_i$, *cuando* $i < j$ *y* $a'_j = 0$.

Criterio de Eliminación 2(**CE2**)) *Si* $j + v_0 - v_1 \in \Gamma_\varphi$, *entonces* φ *es* $\mathcal{A}$-*equivalente a la parametrización* $(t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a'_i t^i)$, *con* $a'_i = a_i$, *cuando* $i < j$ *y* $a'_j = 0$.

Prueba CE1) En efecto, como $j \in \Gamma_\varphi$ entonces existe $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_g \in \mathbb{N}$ tal que $j = \alpha_0 v_0 + \cdots + \alpha_g v_g$. Consideremos $h = \prod_{i=0} h_i^{\alpha_i}$ donde $h_i \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$ tal que $v_\varphi(h_i) = v_i$, se tiene que $v_\varphi(h) = j$. Luego bastará considerar el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - \tfrac{a_j}{b} \textstyle\prod_{i=0} h_i^{\alpha_i} \end{aligned}$$

Prueba CE2) En efecto. Supongamos que $j + v_0 - v_1 \in v_0\mathbb{Z}_+ + v_1\mathbb{Z}_+$, donde $m, n \in \mathbb{Z}_+$, entonces $j + v_0 \in v_0\mathbb{Z}_+ + v_1\mathbb{Z}_+$, puesto que $j \notin \Gamma_\varphi$ se tendría que $j + v_0 \in v_1\mathbb{Z}_+$. Sea $b \in \mathbb{Z}_+$ tal que $j + v_0 = (b+1)v_1$; $b \geq 1$ puesto que $(j > v_1)$. Consideremos $a = \frac{bn}{m}$, siendo b el coeficiente de t^j, y el siguiente cambio de coordenadas

$$(x', y') = (x(t) + ay(t)^b, y(\rho^{-1}(t))) = (\rho(t)^{v_0}, y(\rho^{-1}(t)))$$

si $\rho(t)^{v_0} = x(t) + ay(t)^{b-1}$ entonces

$$\rho^{-1}(t) = t - \frac{a}{v_0} t^{j-v_1+1} + \cdots$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} y' &= y(\rho^{-1}(t)) \\ &= [(\rho^{-1}(t))]^{v_1} + \textstyle\sum_{i>v_1} a_i [(\rho^{-1}(t))]^i \\ &= t^{v_1} + \textstyle\sum_{v_1<i<j} a_1 t^i + (a_j - v_1 \frac{a}{v_0}) t^j + \cdots, \end{aligned}$$

haciendo $a = \frac{v_0 a_j}{v_1}$ se obtiene lo deseado.

Así teniendo en cuenta los **CE** tenemos que toda parametrización $\varphi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_1 t^i)$ es $\mathcal{A}$-equivalente a la parametrización

$$(t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{v_i<i<c} a_i t^i), \tag{3.3}$$

donde c es el conductor de Γ_φ.

Sea Σ_Γ que denota el conjunto de todas las parametrizaciones φ, tal que $\Gamma_\varphi = \Gamma$, la clasificación analítica de ramas planas se reduce a la clasificación de sus parametrizaciones, modulo la $\mathcal{A}$-equivalencia, del conjunto Σ_Γ.

Zariski en [10], considera el módulo de las diferenciales de Kähler sobre el anillo local de la curva, esto para dar un criterio mas de eliminación, introduciendo así un nuevo invariante analítico numérico.

En lo que sigue $\mathcal{C} = \langle f \rangle$ donde f es una rama, denotaremos el anillo local como $\mathcal{O} = \dfrac{\mathbb{C}\{X,Y\}}{\mathcal{C}}$ (a menos que se indique lo contrario).

Definición 3.2. *Sea $\mathcal{O}$ un $\mathbb{C}\{X,Y\}$-álgebra. El* módulo de la diferencial de Kähler *sobre $\mathcal{O}$ es el $\mathcal{O}$-módulo*

$$\mathcal{O}d\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}^2}{\langle e_1 g_X + e_2 g_Y ; g \in \mathcal{C}\rangle} = \mathcal{O}dx + \mathcal{O}dy,$$

siendo $\mathcal{O}^2 = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2$ el $\mathcal{O}$-módulo libre y $\{e_1, e_2\}$ su base canónica. Si $(A_1, A_2) \in \mathcal{O}^2$ con $A_1, A_1 \in \mathcal{O}$, se tiene que un elemento de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ es de la forma $A_1 dx_1 + A_2 dy$.

Denotamos por dx la imagen de e_1 y dy la imagen de e_2 en $\mathcal{O}d\mathcal{O}$. Observemos que los elementos dx, dy, no son generadores libres de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ como $\mathcal{O}$-módulo. Pues, se tiene la siguiente relación

$$g_X dx + g_Y dy = 0, \quad \forall g \in \mathcal{C}.$$

Definición 3.3. *El submódulo Torsión $\mathcal{T}$ del $\mathcal{O}$-módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ se define como*

$$\mathcal{T} = \{\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O} \backslash \ \exists \text{ un elemento } g \in \mathcal{O}\backslash\{0\} \text{ tal que } g\omega = 0\}.$$

Sea $\mathcal{C} = \langle f \rangle$ una rama plana en $\mathbb{C}\{X,Y\}$ con anillo local $\mathcal{O}$. Recordemos el monomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\} \\ & & x & \longmapsto & x(t) \\ & & y & \longmapsto & y(t), \end{array} \tag{3.4}$$

siendo $(x(t), y(t))$ la parametrización de $\mathcal{C}$, de esta manera se tiene que $\mathcal{O} \simeq \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. Consideremos el homomorfismo de $\mathcal{O}$-módulos

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \mathcal{O}d\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\} \\ & g_1 dx + g_2 dx & \longmapsto & \varphi(g_1)x'(t) + \varphi(g_2)y'(t) \end{array} \tag{3.5}$$

Definición 3.4. *Si $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$, definimos la* valoración *de ω como*

$$v(\omega) = \overline{v}(\psi(\omega)) + 1,$$

donde la $\overline{v}$ es la valoración discreta de $\mathbb{C}\{t\}$

Si $gdX + hdY \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$, entonces la valoración

$$v_\varphi(gdX + hdY) = ord_t(\varphi^*(g)x'(t) + \varphi^*(h)y'(t)) + 1.$$

Definición 3.5. *Vamos a decir que un diferencial $w \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ es una* diferencial exacta *si existe $g \in \mathcal{O}_2$ tal que $w = dg$. Si este no es el caso, diremos que w es una* diferencial no exacta.

Observación 3.6. *Sea Γ el semigrupo de valores de una curva $\mathcal{C}$ y c su conductor. Si $w \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ es un diferencial exacta, entonces $v(w) \in \Gamma$. Equivalentemente si $v(w) \notin \Gamma$, entonces w es una diferencial no exacta.*

Definición 3.7. *El conjunto de valores del módulo de las diferenciales de Kähler se define como*

$$\Lambda_\varphi = v_\varphi(\mathcal{O}d\mathcal{O} \setminus \mathcal{T}) = v_\varphi(\Omega)$$

Observemos que para todo $h \in \mathcal{M}_2$, tenemos que $v_\varphi(dh) = v_\varphi(h)$. Esto en particular implica que $\Gamma \setminus \{0\} \subset \Lambda$.

El conjunto Λ es llamado un Γ-monomódulo, ya que tiene las siguiente propiedad: $\gamma + \lambda \in \Lambda, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \lambda \in \Lambda$

El siguiente lema muestra que el conjunto de valores es finitamente generado sobre Γ

Lema 3.8. *Existen $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \Lambda$ con la siguiente propiedad: para cada elemento $\lambda \in \Lambda$ existen $i = 1, ..., r$ y $\gamma \in \Gamma$ tal que $\lambda = \gamma + \lambda_i$.*

Demostración. Consideremos la siguiente secuencia de enteros:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & min\Lambda \\ \lambda_1 & = & min\Lambda \setminus (\lambda_1 + \Gamma) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_i & = & min\Lambda \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (\lambda_j + \Gamma) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

la prueba se completará si se demuestra que el número de los λ_i sea finito. En efecto, Si fueran infinitos existiría algún $i > 1$ tal que $\lambda_i - \lambda_1 > c$, pues los λ_i forman una secuencia creciente, así tendríamos que $\lambda_i \in \lambda_1 + \Gamma$, esto no puede ser por la definición de los λ_i. $\square$

Observación 3.9. *Sea* $\mathcal{O} = \dfrac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f\rangle} = \mathbb{C}[[x,y]]$. *Consideremos el cuerpo de fracciones de* $\mathcal{O}$,

$$F = \{\frac{g}{h}; g, h \in \mathcal{O}, h \neq 0\}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{C}[[x,y]] = \mathbb{C}[[X]][y]$, *esto se cumple por la proposición(1.24).*

2. $F = \mathbb{C}((X))[y]$, *en efecto;*

   Sea $p(x,y) \in \mathcal{O}_f$ *y* $q(x,y) \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ *y* $\dfrac{p(x,y)}{q(x,y)} \in F$, *entonces* $\dfrac{p(x,y)}{q(x,y)} = \dfrac{\overline{p(X,Y)}}{\overline{q(X,Y)}}$, *por el teorema de división de Weierstrass se tiene que existen* $q_1, q_2 \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ *y* $r_1, r_2 \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ *tal que* $p = q_1 f + r_1$ *y* $q = q_2 f + r_2$, *entonces* $\overline{p(X,Y)} = \overline{r_1(X,Y)} = r_1(X,y)$ *y* $\overline{q(X,Y)} = \overline{r_2(X,Y)} = r_2(X,y)$. *Por lo tanto* $\dfrac{p(x,y)}{q(x,y)} = \dfrac{r_1(X,y)}{r_2(X,y)} \in \mathbb{C}((X))[y]$ *y así tenemos que* $F \subset \mathbb{C}((X))[y]$.

   Si $\dfrac{r(X,y)}{s(X,y)} \in \mathbb{C}((X))[y]$, *tenemos que* $r(X,y) = \overline{r(X,Y)}$ *y* $s(X,y) = \overline{s(X,Y)}$, *donde* $r(X,Y), s(X,Y) \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ *por el teorema de la división de Weierstrass tenemos que* $\overline{p(X,Y)} = \overline{r(X,Y)}$ *y* $\overline{q(X,Y)} = \overline{s(X,Y)}$, *donde* $p(X,Y)$, $q(X,Y)$ *están en* $\mathbb{C}[[X,Y]]$ *y* $\overline{p(X,Y)}, \overline{q(X,Y)} \in \mathbb{C}[[x,y]]$, *así tenemos que* $\dfrac{r(X,y)}{s(X,y)} \in F$ *y por lo tanto* $\mathbb{C}((X))[y] \subset F$

3. *Ya que* $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x,y]] = \mathbb{C}[[X]][y]$. *Tenemos que* $\mathcal{O}$ *es una extensión integral de* $\mathbb{C}[[X]]$, *pues como* f *puede ser dado por un polinomio de Weierstrass*

   $$f = Y^n + Y^{n-1}a_1(X) + \cdots + a_n(X) \in \mathbb{C}[[X]][Y],$$

   y $\overline{f(Y)} = f(y) = 0$, *así tenemos que* $y \in \mathcal{O}$ *es integral sobre* $\mathbb{C}[[X]]$, *(pues es una raíz de* f*). Por lo tanto* $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[X]][y]$ *es una extensión integral de* $\mathbb{C}[[X]]$, *además* $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[X]][y]$ y $\mathbb{C}[[X]]$ *tienen la misma clausura integral en* $F = \mathbb{C}((X))[y]$, *pues;*

   $$\mathbb{C}[[X]] \subset \mathcal{O} \Longrightarrow \overline{\mathbb{C}[[X]]} \subset \overline{\mathcal{O}},$$

   además $\mathcal{O} \subset \overline{\mathbb{C}[[X]]}$, *pues* $\mathcal{O}$ *es integral sobre* $\mathbb{C}[[X]]$, *por teoría de anillos (dominios) tenemos que*

   $$\overline{\mathcal{O}} \subset \overline{\overline{\mathbb{C}[[X]]}} = \overline{\mathbb{C}[[X]]}.$$

Por lo tanto

$$\overline{\mathbb{C}[[X]]} = \overline{\mathcal{O}}.$$

Por el teorema de Puiseux, existe $t \in F$ tal que $t^n = X$ y $F = \mathbb{C}((X))[t]$, de modo que y y t son elementos primitivos para la extensión $F/\mathbb{C}((X))$, desde que t es integral sobre $\mathbb{C}[[X]]$, pues anula al polinomio $X - t^n \in \mathbb{C}[[X]][t]$, y $\mathbb{C}[[t]]$ es íntegramente cerrado en $F = \mathbb{C}((X))[t] = \mathbb{C}((t))$, resulta que $\overline{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[t]]$.

En efecto,

$$\begin{aligned} X = t^n &\Rightarrow X \in \mathbb{C}[[t]] \\ &\Rightarrow \mathbb{C}[[X]] \subset \mathbb{C}[[t]] \end{aligned}$$

como t es integral sobre $\mathbb{C}[[X]]$, entonces $t \in \overline{\mathbb{C}[[X]]}$ y $\mathbb{C}[[t]] \subset \overline{\mathbb{C}[[X]]}$

$$\mathbb{C}[[X]] \subset \mathbb{C}[[t]] \subset \overline{\mathbb{C}[[X]]} \subset \overline{\mathbb{C}[[t]]} = \mathbb{C}[[t]].$$

Así tenemos

$$\overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathbb{C}[[X]]} = \mathbb{C}[[t]]$$

En resumen, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}[[X]] & \hookrightarrow & \mathcal{O} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{O}} & \hookrightarrow & F \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \mathbb{C}[[t^n]] & \hookrightarrow & \mathcal{O} & \hookrightarrow & \mathbb{C}[[t]] & \hookrightarrow & \mathbb{C}((t)). \end{array}$$

La siguiente proposición muestra que el conjunto Λ es invariante bajo la equivalencia de ramas planas, en particular Λ en un conjunto $\mathcal{A}$-invariante

Proposición 3.10. *El conjunto Λ es invariante por equivalencia de ramas planas.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ramas planas con conjuntos de valores de las diferenciales de Kähler Λ_1 y Λ_2 y anillos de coordenadas $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1}$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2}$ respectivamente. Supongamos que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son ramas planas. Por el teorema(1.25) tenemos que $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1}$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2}$ son isomorfos como $\mathbb{C}$-álgebras. El isomorfismo entre los anillos coordenados se extiende a un isomorfismo entre sus campos de fracciones el cual induce un isomorfismo $\widetilde{\Phi}$ entre la clausura integral $\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}_1} = \mathbb{C}\{t_1\}$ y $\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}_2} = \mathbb{C}\{t_2\}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{C}_2} & \overset{\Phi}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1} \\ \varphi_2 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_1 \\ \overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}_2} & \underset{\widetilde{\Phi}}{\longrightarrow} & \overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}_1} \end{array}$$

Como los isomorfismos preservan valores, se tiene que $\widetilde{\Phi}(t_2) = ut_1$, donde u es una unidad de $\mathbb{C}\{t_1\}$.

Consideremos los homomorfismos definidos en (3.4) y (3.5)

$$\varphi_j : \mathcal{O}_{\mathcal{C}_j} \longrightarrow \mathbb{C}\{t_j\},$$
$$\psi_j : \mathcal{O}_{\mathcal{C}_j} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_j} \longrightarrow \mathbb{C}\{t_j\},$$

donde $j = 1, 2$.

Si $\omega_2 = g_2 dx_2 + h_2 dy_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_2} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2}$, con $g_2, h_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_2}$, entonces

$$\psi_2(\omega_2) = \varphi_2(g_2)\frac{d\varphi_2(x_2)}{dt_2} + \varphi_2(h_2)\frac{d\varphi_2(y_2)}{dt_2} \in \mathbb{C}\{t_2\}.$$

Aplicando $\widetilde{\Phi}$

$$\widetilde{\Phi}(\psi_2(\omega_2)) = \widetilde{\Phi}(\varphi_2(g_2))\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(x_2)}{dt_2}) + \widetilde{\Phi}(\varphi_2(h_2))\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(y_2)}{dt_2}),$$

donde

$$\widetilde{\Phi}(\varphi_2(g_2)) = \varphi_1(g_1) \text{ y } \widetilde{\Phi}(\varphi_2(h_2)) = \varphi_1(h_1),$$

donde $g_1, h_1 \in \mathcal{O}_1$, así tenemos

$$\widetilde{\Phi}(\psi_2(w_2)) = \varphi_1(g_1)\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(x_2)}{dt_2}) + \varphi_1(h_1)\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(y_2)}{dt_2}).$$

Observemos ahora que,

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{\Phi}(\varphi_2(x_2))}{dt_1} &= \frac{d\widetilde{\Phi}(t_2)}{dt_1}\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(x_2)}{dt_2}) \\ &= (u + \frac{du}{dt_1}t_1)\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(x_2)}{dt_2})\end{aligned}$$

y

$$\frac{d\widetilde{\Phi}(\varphi_2(y_2))}{dt_1} = (u + \frac{du}{dt_1}t_1)\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(y_2)}{dt_2}).$$

Esto es,

$$\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(x_2)}{dt_2}) = w\frac{d\varphi_1(s_1)}{dt_1},$$

y

$$\widetilde{\Phi}(\frac{d\varphi_2(y_2)}{dt_2}) = w\frac{d\varphi_1(r_1)}{dt_1},$$

donde ω es una unidad en $\mathbb{C}\{t_1\}$, $r_1, s_1 \in \mathcal{O}_1$, con $v(s_1) = v(x_1)$ y $v(r_1) = v(y_1)$.

Así, tenemos

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\Phi}(\psi_2(\omega_2)) & = & \left(\varphi_1(g_1)\dfrac{d\varphi_1(s_1)}{dt_1} + \varphi_1(h_1)\dfrac{d\varphi_1(r_1)}{dt_2}\right) w \\ & = & \psi_1(g_1 ds_1 + h_1 dr_1)w \\ & = & \psi_1(\omega_1)w,\end{array}$$

con $w_1 \in \Omega_2$.

Por lo tanto tenemos,

$$v(\omega_2) = v(\psi_2(\omega_2)) = v(\widetilde{\Phi}(\psi_2(\omega_2))) = v(\psi_1(\omega_1)w) = v(\psi_1(\omega_1)) = v(\omega_1),$$

ósea $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$.

De modo análogo tenemos que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ y por lo tanto $\Lambda_2 = \Lambda_1$. □

Observación 3.11. *Notemos que por la proposición anterior tenemos que* $\Phi(\varphi_2(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2})) = \varphi_1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1})$*, sin embargo* $\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2})) \neq \psi_1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1})$*. En verdad, tenemos*

$$\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2})) = \psi_1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1})w_1,$$

con w_1 *como en el descrito en la demostración de la proposición anterior.*

En efecto, tenemos que

$$\Phi(\psi_2(w_2)) = \psi_1(\omega_1)w_1 \text{ y } \Phi^{-1}(\psi_1(\omega_1)) = \psi_2(\omega_2)w_2,$$

con $w_1 \in \mathbb{C}\{t_1\}$ *y* $w_2 \in \mathbb{C}\{t_2\}$ *unidades que no dependen de las diferenciales* ω_1 *y* ω_2*, pero si del* $\mathbb{C}$*-isomorfismo* Φ*. Así tenemos que* $\Phi(w_2)w_1 = 1$*.*

Como

$$\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2})) \subset \psi_1(\mathcal{O}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1}} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1})w_1 \subset \Phi(\psi_2(\mathcal{O}_2 d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2}))\Phi(w_2)w_1,$$

así tenemos $\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2})) = \psi_1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1} d\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1})w_1$*.*

Definición 3.12. *El invariante* λ *de Zariski (si existe) es el menor exponente presente en la parametrización tal que* $\lambda + v_0 \notin \Gamma$

Otra forma de definir este invariante es, si $\Lambda \backslash \Gamma \neq 0$, entonces

$$\lambda = min(\Lambda \backslash \Gamma) - v_0$$

desde que Γ y Λ son $\mathcal{A}$-invariantes, λ también es un $\mathcal{A}$-invariante

Observación 3.13. *Sabemos que podemos considerar una parametrización de una curva plana de la siguiente forma* $\varphi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + \cdots)$*, dado un exponente* r *presente* *en la parametrización tal que $r+v_0 \in \langle v_0, v_1\rangle$, podemos por un cambio de coordenadas analítico eliminar tal exponente(ver [10]). De esta forma, la curva original es equivalente a otra curva que admite una parametrización de la forma $\varphi(t)=(t^{v_0}, t^{v_1})$ o $\varphi(t)=(t^{v_0}, t^{v_1}+t^{\lambda}+\cdots)$, con $\lambda+v_0 \notin \langle v_0, v_1\rangle$.*

Si el semigrupo asociado a la curva es $\Gamma=\langle v_0, v_1\rangle$, entonces tenemos que $\lambda+v_0 \notin \Gamma$ y λ es el invariante de Zariski. Si el semigrupo asociado a la curva es de la forma $\Gamma=\langle v_0, ..., v_g\rangle$, y como $\lambda \leq \beta_2 = v_2-(n_1-1)v_1 < v_2$ con $n_1=\frac{v_0}{e_1}$ tenemos que $\lambda+v_0<v_2$, si $\lambda+v_0\in\Gamma$, debería escribirse de la forma $\lambda+v_0=av_0+bv_1$, esto es, $\lambda+v_0=\langle v_0, v_1\rangle$ y esto no puede ser, ósea, tenemos que $\lambda+v_0\notin\Gamma$ y por tanto λ es el invariante de Zariski.

Resumiendo, toda rama plana admite una parametrización de la forma $\varphi(t)=(t^{v_0}, t^{v_1})$ o $\varphi(t)=(t^{v_0}, t^{v_1}+t^{\lambda}+\cdots)$, con $\lambda+v_0\notin\Gamma$, en el caso que exista el invariante de Zariski tenemos,

$$\lambda = v_{\varphi}(v_0XdY - v_1YdX) - v_0$$

Relacionando el invariante λ, Zariski en [10] demostró el siguiente criterio de eliminación.

Criterio de Eliminación 3(CE3)) *Si $\varphi(t)=(t^{v_0}, t^{v_1}+t^{\lambda}+\cdots)$ y $j-\lambda\in\langle v_0, v_1\rangle$, entonces φ es $\mathcal{A}$-equivalente a la parametrización $(t^{v_0}, t^{v_1}+t^{\lambda}+\sum_{\lambda<i<c} a_i' t^i)$, con $a_i'=a_i$, cuando $i<j$ y $a_j'=0$.*

El criterio anterior no funciona para toda la clase de equisingularidad, sino que depende de la clase de la $\mathcal{A}$-equivalencia de la parametrización φ.

En el siguiente teorema, nuestro resultado central en este trabajo, vamos a determinar todos los posibles criterios de eliminación, que nos llevará a lo que llamamos las formas normales de parametrizaciones Puiseux.

Teorema 3.14. *Sea φ una parametrización de una rama plana con semigrupo de valores $\Gamma=\langle v_0, ..., v_g\rangle$. Entonces, φ es $\mathcal{A}$-equivalente a la parametrización (t^{v_0}, t^{v_1}) o es $\mathcal{A}$-equivalente a la parametrización*

$$(t^{v_0}, t^{v_1}+t^{\lambda}+\sum_{\lambda<i, i\notin\Lambda-v_0} a_i t^i), \tag{3.6}$$

donde λ es el invariante de Zariski y Λ es el conjunto de valores de las diferenciales de la curva. Adicionalmente, si φ y φ' son parametrizaciones como en (3.6), de dos ramas planas con el mismo semigrupo y el mismo conjunto de valores de las diferenciales, entonces $\varphi \sim_{\mathcal{A}} \varphi'$ si y solo si existe $r\in\mathbb{C}^*$ tal que $r^{\lambda-v_1}=1$ y $a_i = r^{i-v_1}a_i'$, para todo i.

Observemos que la $\mathcal{A}$-forma normal (3.6) esta completamente determinado por el semigrupo Γ y el conjunto Λ. Así, una vez que Γ es fijo, el número de las $\mathcal{A}$-formas normales es finito, correspondiendo a todos los posibles conjuntos Λ en la clase de equisingularidad determinada por Γ, el cual puede ser calculado por un algoritmo dado en [6].

Este teorema nos da un ultimo criterio de eliminación **(CE)** que contiene, como casos especiales, los criterios **(CE1)**,**(CE2)** y **(CE3)**.

Criterio de Eliminación(CE) Si φ es como en (3.3) y $j + v_0 \in \Lambda_\varphi$, con $j > \lambda$, entonces φ es $\mathcal{A}$-equivalente a la parametrización $(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{\lambda<i<c} a_i' t^i)$, con $a_i = a_i'$, para $i < j$, y $a_j = 0$.

3.1. Orbitas y sus Espacios Tangentes

Definición 3.15. *Denotemos por* $Aut(\mathbb{C}^n, 0)$*, a el grupo de gérmenes de automorfismo analíticos de* $(\mathbb{C}^n, 0)$*, y sea* $Aut_1(\mathbb{C}^n, 0) \subset Aut(\mathbb{C}^n, 0)$ *subgrupo tal que si* $B \in Aut_1(\mathbb{C}^n, 0)$*, se tiene que* $j^1(B) = Id$*. También denotemos por* $\widetilde{Aut}(\mathbb{C}^2, 0)$ *un subgrupo de* $Aut(\mathbb{C}^n, 0)$ *cuyos elementos tienen como* $j^1(B) = (X + \beta Y, Y)$*, con* $\beta \in \mathbb{C}$ *y* $B \in \widetilde{Aut}(\mathbb{C}^2, 0)$

Recordemos que dos parametrizaciones φ_1 y φ_2 son $\mathcal{A}$-equivalentes, si y solo si $\varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1 \circ \rho^{-1}$, con σ difeomorfismo analítico de $(\mathbb{C}^2, 0)$ y ρ difeomorfismo de $(\mathbb{C}, 0)$. Son $\mathcal{A}_1$-equivalentes o $\widetilde{\mathcal{A}}$-equivalentes, si $\varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1 \circ \rho^{-1}$ con $\sigma \in Aut_1(\mathbb{C}^2, 0)$ o $\sigma \in \widetilde{Aut}(\mathbb{C}^2, 0)$, respectivamente, y $\rho \in Aut_1(\mathbb{C}, 0)$

Diremos que φ_1 y φ_2 son *homotecias*, o $\mathcal{H}$-equivalentes si $\varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1 \circ \rho^{-1}$, con $\rho^{-1}(t) = \alpha t$ y $\sigma(X, Y) = (\alpha^{v_0} X, \alpha^{v_1} Y)$, para algún $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Proposición 3.16. *La* $\mathcal{A}$*-acción sobre el espacio de las parametrizaciones de Puiseux representa una clase de equisingularidad que puede ser obtenida por la* $\widetilde{\mathcal{A}}$*-acción seguida por la* $\mathcal{H}$*-acción.*

Demostración. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Sigma_\Gamma$, $\varphi_1 \sim_{\widetilde{\mathcal{A}}} \varphi_2$, esto es, $\varphi_2 = \sigma_1 \varphi_1 \rho_1^{-1}$ tal que $\sigma_1 \in \widetilde{Aut}(\mathbb{C}^2, 0)$ y $\rho_1 \in Aut_1(\mathbb{C}, 0)$, ósea $\sigma_1(X, Y) = (X + \beta Y + p_1, Y + q_1)$, con $p_1, q_1 \in \mathcal{M}_2^2$ y $\rho(t) = t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$, ahora sea $\varphi_2 \sim_{\mathcal{H}} \varphi_3$, ósea $\varphi_3 = \sigma_2 \varphi_2 \rho_2^{-1}$ donde $\sigma_2 = (\alpha^{v_0} X, \alpha^{v_1} Y)$ y $\rho_2(t) = \alpha t$, esto es;

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sigma_2 \varphi_1 \rho_2^{-1} \\ \varphi_2 &= \sigma_2(\sigma_1 \varphi_1 \rho_1^{-1}) \rho_2^{-1} \\ \varphi_2 &= \sigma \varphi_1 \rho^{-1} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) &= \sigma_2(\sigma_1(X,Y))\\ &= \sigma_2(X+\beta Y+p_1, Y+q_1),\ \text{con } \beta\in\mathbb{C}^*\\ &= (\alpha^{v_0}X+\alpha^{v_0}\beta Y+\alpha^{v_0}p_1, \alpha^{v_1}Y+\alpha^{v_1}q_1)\\ &= (\alpha^{v_0}X+p, \alpha^{v_1}Y+q)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_2(\rho_1(t))\\ &= \rho_2(t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots)\\ &= \alpha t+a_2\alpha t^2+a_3\alpha t^3+\cdots\\ &= \alpha t(1+a_2t^2+a_3t^3+\cdots)\\ &= \alpha t(1+h(t)),\ \text{con } h\in\mathcal{M}_1^2,\end{aligned}$$

donde σ y ρ satisfacen las condiciones de (3.1), por lo tanto, $\varphi_1 \sim_{\mathcal{A}} \varphi_3$.

Resumiendo tenemos

$$\varphi_1 \sim_{\mathcal{A}} \varphi_3 \Longleftrightarrow \varphi_1 \sim_{\widetilde{\mathcal{A}}} \varphi_2 \sim_{\mathcal{H}} \varphi_3.$$

□

Si $\mathcal{G}$ representa una de las acciones $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ o $\widetilde{\mathcal{A}}$, entonces $\mathcal{G}^k$ representa la acción del grupo de Lie correspondiente a los k-jet de automorfismos sobre Σ_Γ^k.

El siguiente teorema es un caso especial del teorema de la transversal completa.

Teorema 3.17. *Sea G un grupo de Lie actuando sobre un espacio afín A asociado a un espacio vectorial V_A, y sean U un abierto de A y W un subespacio vectorial de V_A tal que $\forall g\in G$, $\forall v\in U$ y $\forall w\in W$ con $v+w\in U$ y $g\cdot v+w\in U$ tenemos $g\cdot(v+w)=g\cdot v+w$. Si $W\subset T_v(G\cdot v)$, con $v\in U$ y $T_v(G\cdot v)$ es el espacio tangente en v a la orbita $G\cdot v$, entonces para todo $w\in W$ tal que $v+w\in U$, tenemos que $G\cdot(v+w)=G\cdot v$.*

Demostración. Primero veamos que $g\cdot(v+w)=g\cdot v+w$ implica $T_{v+w}G\cdot(v+w) = T_vG\cdot(v)$, para todo $v\in U$ y para todo $w\in W$. En efecto; consideremos

$$\begin{aligned}\alpha : (-\epsilon,\epsilon) &\longrightarrow G\\ t &\mapsto \alpha(t)\end{aligned}$$

con $\alpha(0)=e$, y

$$\begin{aligned}f : G &\longrightarrow G\cdot(v+w)\\ g &\mapsto g\cdot(v+w)\end{aligned}$$

un elemento del espacio tangente a la orbita $G\cdot(v+w)$ es

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(\alpha(t))-f(\alpha(0))}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)\cdot(v+w)-(v+w)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)\cdot v+w-v-w}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)\cdot v-v}{t}\end{aligned}$$

observemos que $\lim_{t\to 0}\dfrac{h(\alpha(t))-h(\alpha(0))}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{\alpha(t)\cdot v-v}{t}\in T_vG\cdot v$ donde

$$\begin{aligned} h:G &\longrightarrow G\cdot v\\ g &\mapsto \ g\cdot v\end{aligned}$$

Esto implica que $T_{v+w}G\cdot(v+w)=T_vG\cdot v$, $\forall v\in U$ y $\forall w\in W$, por el teorema de la transversal completa, tenemos

i $v+\{T_vG\cdot v\cap W\}\subset G\cdot v\cap\{v+w\}$

$$\Rightarrow\begin{array}{ccc} v+\{T_vG\cdot v\cap W\} & \subset & G\cdot v\\ v+W & \subset & G\cdot v\end{array}$$

esto es para algún $w\in W$, existe $g\in G$ tal que

$$v+w=g\cdot v$$

ósea

$$v+w\in G\cdot v$$

por otro lado de $G\cdot v\cap\{v+w\}\subset v+\{T_vG\cdot v\cap W\}$

$$\begin{array}{rcl}\bigcup\limits_{w\in W} G\cdot & \supset & \bigcup\limits_{w\in W}\{v+w+\{T_{v+w}G\cdot v\cap W\}\\ & = & \bigcup\limits_{w\in W}\{v+W+\{T_vG\cdot(v)\cap W\}\\ & = & v+W\end{array}$$

así para algún $w\in W$, existe $g\in G$ tal que

$$v+w=g\cdot(v+w)$$

ósea

$$v+w\in G\cdot(v+w)$$

Por lo tanto

$$G\cdot(v+w)=G\cdot v$$

$\square$

Como dijimos que la equivalencia de ramas planas se reduce a la $\mathcal{A}$-equivalencia de sus parametrizaciones, comenzaremos estudiando la $\mathcal{A}_1$-acción, luego pasamos a la $\widetilde{\mathcal{A}}$-acción y finalmente aplicamos la $\mathcal{H}$-acción para llegar a la $\mathcal{A}$-equivalencia.

Sea A el espacio afín donde el conjunto Σ_Γ^k esta, y sea $G=\mathcal{A}_1^k$, la hipótesis inicial del teorema(3.17) es satisfecha para $W=\{(0,bt^k);b\in\mathbb{C}^*\}$. Los espacios tangentes a las orbitas $\mathcal{A}_1^k\cdot\varphi$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^k\cdot\varphi$, con $\varphi(t)=(x(t),y(t))\in\Sigma_\Gamma^k$ son dados por

$$T_\varphi\mathcal{A}_1^k\centerdot\varphi=j^k\left\{(x'(t),y'(t))\epsilon(t)+(\varphi^*(g),\varphi^*(h));\epsilon\in\mathcal{M}_1^2,\ g,h\in\mathcal{M}_2^2\right\}$$

y

$$T_\varphi \widetilde{\mathcal{A}}^k \cdot \varphi = j^k \left\{ (x'(t), y'(t))\epsilon(t) + (\varphi^*(g), \varphi^*(h)); \epsilon \in \mathcal{M}_1^2,\ g \in \langle X^2, Y\rangle, h \in \mathcal{M}_2^2 \right\},$$

como vimos en el capitulo anterior.

El siguiente lema, nos ayudara a describir mas explícitamente el espacio tangente a orbitas en Σ_Γ^k.

Lema 3.18. *Sea $k > v_1$ y $\varphi \in \Sigma_\Gamma^k$. Para $b \neq 0$, tenemos que el vector $(0, bt^k)$ pertenece a $T_\varphi(\mathcal{A}_1^k \cdot \varphi)$ (respectivamente a $T_\varphi(\widetilde{\mathcal{A}}^k \cdot \varphi)$), si y solo si existen $g, h \in \mathcal{M}_2^2$ (respectivamente $g \in \langle X^2, Y\rangle$, $h \in \mathcal{M}_2^2$) tal que*

$$k + v_0 - 1 = ord_t(\varphi^*(h(t))x'(t) - \varphi^*(g(t))y'(t)).$$

Demostración. Daremos la prueba para $T_\varphi(\widetilde{\mathcal{A}}^k \cdot \varphi)$,pues la otra situación es similar.

$\Rightarrow$) Si $(0, bt^k) \in T_\varphi(\widetilde{\mathcal{A}}^k \cdot \varphi)$, entonces existen $\epsilon \in \mathcal{M}_1^2$, $g \in \langle X^2, Y\rangle$ y $h \in \mathcal{M}_2^2$ tal que

$$\begin{cases} x'(t)\epsilon(t) + \varphi^*(g) &= 0 \ mod\ t^{k+1} \\ y'(t)\epsilon(t) + \varphi^*(h) &= bt^k\ mod\ t^{k+1}. \end{cases}$$

Esto es, $\epsilon(t) = -\dfrac{\varphi^*(g)}{x'(t)}\ mod\ t^{k+1}$ y reemplazando tenemos

$$bt^k = \frac{\varphi^*(h)x'(t) - \varphi^*(g)y'(t)}{x'(t)}\ mod\ t^{k+1}.$$

De esto ultimo tenemos $k + v_0 - 1 = ord_t(\varphi^*(h)x'(t) - \varphi^*(g)y'(t))$

$\Leftarrow$) Si existen $g \in \langle X^2, Y\rangle$ y $h \in \mathcal{M}_2^2$ tal que

$$k + v_0 - 1 = ord_t(\varphi^*(h)x'(t) - \varphi^*(g)y'(t)).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} bt^k &= \frac{\varphi^*(h)x'(t) - \varphi^*(g)y'(t)}{x'(t)}\ mod\ t^{k+1} \\ bt^k &= \varphi^*(h) - \frac{\varphi^*(g)y'(t)}{x'(t)}\ mod\ t^{k+1} \end{aligned}$$

Si $\epsilon(t) = -\dfrac{\varphi^*(g)}{x'(t)}$, notemos que $\epsilon \in \mathcal{M}_1^2$ pues $g \in \langle X^2, Y\rangle$, así

$$bt^k = \varphi^*(h) + y'(t)\epsilon(t)\ mod\ t^{k+1}$$

y por lo tanto tenemos que $(0, bt^k) \in T_\varphi(\widetilde{\mathcal{A}}^k \cdot \varphi)$

□

Consideremos los siguientes conjuntos, para $i \in \mathbb{N}$

$$\Omega^i = \{gdX + hdY \in \Omega; g, h \in \mathcal{M}_2^i\},$$

donde $\mathcal{M}_2^0 = \mathcal{O}_2$. Dado una parametrización φ, definimos $\Lambda_\varphi^i = v_\varphi(\Omega^i)$. Observemos que $\Lambda_\varphi^0 = \Lambda_\varphi$, estos conjuntos también son invariantes bajo la $\mathcal{A}$-equivalencia.

Si definimos

$$\Omega' = \{gdX + hdY \in \Omega; g \in \langle X^2, Y\rangle, h \in \mathcal{M}_2^2\},$$

y $\Lambda'_\varphi = v_\varphi(\Omega')$, el lema(3.18) es reformulado como sigue:

Proposición 3.19. *Sea $k > v_1$ y $\varphi \in \Sigma_\Gamma^k$. Para $b \neq 0$, tenemos que el vector $(0, bt^k)$ pertenece a $T_\varphi(\mathcal{A}_1^k \cdot \varphi)$ (respectivamente a $T_\varphi(\widetilde{\mathcal{A}}^k \cdot \varphi)$), si y solo si*

$$k + v_0 \in \Lambda_\varphi^2 \ (\textit{respectivamente } k + v_0 \in \Lambda'_\varphi)$$

Demostración. La prueba se sigue del lema(3.18), y notando que

$$\begin{aligned} k + v_0 - 1 &= ord_t(\varphi^*(h(t))x'(t) - \varphi^*(g(t))y'(t)) \\ k + v_0 &= ord_t(\varphi^*(h(t))x'(t) - \varphi^*(g(t))y'(t)) + 1 \end{aligned}$$

$k + v_0 \in \Lambda_\varphi^2$, siempre que $g, h \in \mathcal{M}_2^2$ (respectivamente $k + v_0 \in \Lambda'_\varphi$, siempre que $g \in \langle X^2, Y\rangle$ y $h \in \mathcal{M}_2^2$) □

3.2. $\mathcal{A}_1$-Formas Normales

En esta sección, hallaremos las formas normales de las parametrizaciones de Puiseux de una clase de equisingularidad con semigrupo de valores Γ bajo la $\mathcal{A}_1$-equivalencia.

Proposición 3.20. *Sea $\varphi = (t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{v_1 < i < c} a_i t^i) \in \Sigma_\Gamma$, y sea k un entero tal que $k + v_0 \in \Lambda_\varphi^2$. Entonces existe $\varphi_1 \in \Sigma_\Gamma$ tal que $\varphi_1 \sim_{\mathcal{A}_1} \varphi$ y*

$$j^k(\varphi_1) = j^{k-1}(\varphi_1) = j^{k-1}(\varphi).$$

Demostración. Como $k + v_0 \in \Lambda_\varphi^2$, esto implica que $(0, -a_k t^k) \in T_{j^k(\varphi)}(\mathcal{A}_1^k \cdot j^k(\varphi))$. Por otro lado tenemos que

$$\mathcal{A}_1^k \cdot (j^k(\varphi) + (0, -a_k t^k)) = \mathcal{A}_1^k \cdot (j^{k-1}(\varphi)),$$

y por el teorema(3.17), tenemos

$$\mathcal{A}_1^k \cdot (j^k(\varphi)) = \mathcal{A}_1^k \cdot (j^{k-1}(\varphi)).$$

Luego

$$j^k(\varphi) \sim_{\mathcal{A}_1^k} j^{k-1}(\varphi).$$

Esto es, existen gérmenes de isomorfismos analíticos σ y ρ tal que

$$\sigma \circ j^k(\varphi) \circ \rho^{-1} = j^{k-1}(\varphi).$$

Como,

$$\begin{array}{rcl} j^k(\sigma \circ \varphi \circ \rho^{-1}) & = & j^{k-1}(\varphi) \\ j^k(\varphi_1) & = & j^{k-1}(\varphi) \end{array}$$

donde $\sigma \circ \varphi \circ \rho^{-1} = \varphi_1$. □

Proposición 3.21. *Sea $\varphi = (t^{v_0}, t^{v_1} + t^{\lambda} + \cdots)$ una parametrización de Puiseux con semigrupo de valores $\Gamma = \langle v_0, ..., v_g \rangle$. Si $S = \{v_0, 2v_0, v_1, v_0 + v_1, 2v_1, v_0 + \lambda\}$, entonces*

$$S \subseteq \Lambda_\varphi \setminus \Lambda_\varphi^2 \subseteq S \cup \{v_1 + \lambda\}$$

con la igualdad si, y solo si, $n_1 = 2$ y $g \geq 2$.

Demostración. Observemos; si $n \in \Lambda_\varphi \setminus \Lambda_\varphi^2$ si, y solo si $n = v_\varphi(w)$, $w = gdX + gdY$ con $g \notin \mathcal{M}_2^2$ ó $h \notin \mathcal{M}_2^2$.

Desde que $v_\varphi(dX) = v_0$, $v_\varphi(dY) = v_1$, $v_\varphi(XdX) = 2v_0$, $v_\varphi(YdY) = 2v_1$, $v_\varphi(XdY) = v_0 + v_1$ y $v_\varphi(v_1 YdX - v_0 XdY = v_0 + \lambda$, tenemos que $S \subset \Lambda_\varphi \setminus \Lambda_\varphi^2$.

Ahora supongamos que $v_\varphi(gdX + hdY) \notin S$, donde $g = aX + bY + g_1(X, Y)$ y $h = \alpha X + \beta Y + h_1(X, Y)$, con $g_1, h_1 \in \mathcal{M}_2^3$ y uno de los numeros a, b, α ó β es no cero.

Así tenemos;

$$v_\varphi(gdX + hdY) > v_\varphi(gdX) = v_\varphi(hdY),$$

esto implica que

$$v_\varphi(g) + v_0 = v_\varphi(h) + v_1$$

con

$$\begin{array}{lcl} v_\varphi(g) = v_0 & \text{ó} & v_\varphi(g) = v_1 \\ v_\varphi(h) = v_0 & \text{ó} & v_\varphi(h) = v_1 \end{array}$$

- Si $v_\varphi(g) = v_0$, tenemos $v_\varphi(h) + v_1 = 2v_0$, esto implica que $v_1 < v_0$, que es una contradicción, así vemos que $a = 0$

- Si $v_\varphi(h) = v_0$, tenemos $v_\varphi(g) + v_0 = v_0 + v_1$, esto implica que $v_\varphi(g) = v_1$.

- Si $v_\varphi(g) = v_1$, tenemos $v_1 + v_0 = v_\varphi(h) + v_1$, esto implica que $v_\varphi(h) = v_0$.

  Pero,

$$\begin{array}{rcl} v_\varphi(gdX + hdY) & = & ord_t(g(\varphi(t))dX + h(\varphi(t))dY) + 1 \\ & = & ord_t((c_1 t^{v_1} + \cdots)v_0 t^{v_0 - 1} \\ & + & (d_1 t^{v_0} + \cdots)(v_1 t^{v_1 - 1} + \lambda t^{\lambda - 1} + \cdots)) + 1 \\ & = & v_1 + v_0 \in S. \end{array}$$

  Así tenemos que $\alpha = b = 0$

- Solo queda,

$$\begin{array}{rcl} v_\varphi(h) = v_1 & \longrightarrow & v_\varphi(g) + v_0 = 2v_1 \\ & \longrightarrow & v_1 < v_\varphi(g) < 2v_1 \\ & \longrightarrow & v_\varphi(g) = sv_1 + rv_0, \quad s = 0, 1 \\ \text{si } s = 1 & \longrightarrow & v_\varphi(g) = 1v_1 + rv_0 \\ & \longrightarrow & 2v_1 - v_0 = v_1 + rv_0 \\ & \longrightarrow & v_1 = (r+1)v_0 \quad (\Rightarrow\Leftarrow) \end{array}$$

  luego, $s = 0$ y $v_\varphi(g) = rv_0$, tenemos también que $\beta \neq 0$

Observemos que $v_\varphi(gdX + hdY) = v_1 + \lambda$, así tenemos que S contiene todos los elementos de $\Lambda_\varphi \setminus \Lambda_\varphi^2$, excepto a $v_1 + \lambda$. Por lo tanto

$$\Lambda_\varphi \setminus \Lambda_\varphi^2 \subset S \cup \{v_1 + \lambda\}$$

□

Proposición 3.22. *Sea $\varphi \in \Sigma_\Gamma$ y Λ. Supongamos que $\Lambda \setminus \Gamma \neq \emptyset$, y λ el invariante de Zariski de φ. Entonces φ es $\mathcal{A}_1$-equivalente a la parametrización*

$$(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{\substack{i \notin \Lambda^2 - v_0 \\ i > \lambda}} a_i t^i)$$

Demostración. Observemos que desde que $\Lambda \setminus \Gamma \neq \emptyset$, tenemos que $v_0 \geq 3$. Notemos que todo entero $l + v_0$, cuando $l \geq c$, con c conductor de Γ, pertenece a Λ, por la proposición(3.21), $l + v_0 \notin \Lambda \setminus \Lambda^2$, y esto implica que $l + v_0 \in \Lambda^2$. Esto prueba que el conjunto $\mathbb{N} \setminus (\Lambda^2 - v_0)$ es finito y esta acotado por $\max\{c - 1, v_1 + \lambda\}$.

Sea $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ elementos de $\Lambda^2 - v_0$ en el intervalo (λ, c). Por la proposición(3.20), existe una parametrización de Puiseux φ_1 con $\varphi_1 \sim_{\mathcal{A}_1} \varphi$ tal que

$$j^{\lambda_1}(\varphi_1) = j^{\lambda_1 - 1}(\varphi_1) = j^{\lambda_1 - 1}(\varphi)$$

Hacemos lo mismo con φ_1 en ves de φ y λ_2 en ves de λ_1, y así con los siguientes, hasta llegar finalmente a tener que φ es $\mathcal{A}_1$-equivalente a

$$(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{\substack{i \notin \Lambda^2 - v_0 \\ i > \lambda}} a_i t^i).$$

□

Ahora el siguiente paso es ir de la $\mathcal{A}_1$-equivalencia a la $\widetilde{\mathcal{A}}$-equivalencia.

3.3. De la $\mathcal{A}_1$-equivalencia a la $\widetilde{\mathcal{A}}$-equivalencia.

Nuestro objetivo es llegar a la forma normal del teorema(3.14), para esto necesitamos ver que los términos en $y(t)$ de la parametrización de Puiseux de orden k tal que $k \in \Lambda - v_0$ pueden eliminarse.

Por la proposición(3.22) solo quedaría probar que los términos en $y(t)$ de la parametrización de Puiseux de orden k tal que $k > \lambda$ y $k \in (\Lambda \setminus \Lambda^2) - v_0$, pueden eliminarse pues

$$k \in (\Lambda \setminus \Lambda^2) - v_0 \Longrightarrow k \in \Lambda - v_0 \text{ y } k \notin \Lambda^2 - v_0.$$

Por otro lado por la proposición(3.21) tenemos que

$$\begin{array}{lcl} (\Lambda \setminus \Lambda^2) - v_0 & \subset & (S \cup \{v_1 + \lambda\}) - v_0 \\ (\Lambda \setminus \Lambda^2) - v_0 & \subset & \{0, v_0, v_1 - v_0, v_1, 2v_1 - v_0, \lambda, v_1 + \lambda - v_0\}. \end{array}$$

Entonces si $k \in (\Lambda \setminus \Lambda^2) - v_0$ los términos de orden k en $y(t)$ de la parametrización de Puiseux, pueden eliminarse por el **CE2**, excepto obviamente $k = \lambda$, quedando solo la posibilidad en el término de orden $v_1 + \lambda - v_0$.

Ahora queda probar que el del término de orden $v_1 + \lambda - v_0$, puede ser eliminado. Para esto, necesitamos analizar la $\widetilde{\mathcal{A}}$-acción sobre las parametrizaciones de Puiseux.

Sea $\varphi(t) = (t^{v_0}, y(t))$, donde $y(t) = \sum_i a_i t^i$, y sean σ y ρ, como en (3.1), con $r = 1$, $p = \beta Y + p_1$, donde $\beta \in \mathbb{C}$ y $p_1, q \in \mathcal{M}_2^2$.

Ahora, consideremos la expresión de ρ en (3.1),

$$t_1 = \rho(t) = t \sqrt[v_0]{1 + \frac{\varphi^*(p)}{t^{v_0}}},$$

despejemos t en función de t_1

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{t_1}{t}\right)^{v_0} & = & \dfrac{t^{v_0} + \varphi^*(p)}{t^{v_0}} \\ t_1^{v_0} & = & t^{v_0} + \varphi^*(p) \\ t^{v_0} & = & t_1^{v_0} - \varphi^*(p) \\ t & = & t_1 \sqrt[v_0]{1 - \dfrac{\varphi^*(p)}{t_1^{v_0}}} \\ t & = & t_1 \sqrt[v_0]{1 - \dfrac{p(t_1)}{t_1^{v_0}}} \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi^*(p) &= p(t^{v_0}, y(t)),\\ \varphi^*(p) &= p((\rho^{-1}(t_1))^{v_0}, y(\rho^{-1}(t_1))),\\ \varphi^*(p) &= p(t_1).\end{aligned}$$

Elevando a la potencia i y aplicando la expansión binomial tenemos

$$t^i = t_1^i\left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\frac{i}{v_0}}{j}\left(-\frac{p(t_1)}{t_1^{v_0}}\right)^j\right].$$

Usando lo anterior tenemos,

$$\begin{aligned}y(t) &= \textstyle\sum_i a_i t^i\\ &= \textstyle\sum_i a_i t_1^i\left[\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\frac{i}{v_0}}{j}\left(-\frac{p(t_1)}{t_1^{v_0}}\right)^j\right]\\ &= \textstyle\sum_i a_i t_1^i - \sum_i a_i t_1^i \displaystyle\frac{i}{v_0}\frac{p(t_1)}{t_1^{v_0}} + A(t_1),\end{aligned}$$

donde $A(t_1) = \sum_i a_i t_1^i\left[\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\binom{\frac{i}{v_0}}{j}\left(-\frac{p(t_1)}{t_1^{v_0}}\right)^j\right]$.

Ahora, de la expresión de $y_1(t_1)$ en (3.2) tenemos

$$y_1(t_1) = y(\rho^{-1}(t_1)) + B(t_1), \tag{3.7}$$

donde

$$B(t_1) = \frac{q(t_1)x'(t_1) + p(t_1)y'(t_1)}{x'(t_1)} - A(t_1), \tag{3.8}$$

con $q(t_1) = q(\rho^{-1}(t_1)^{v_0}, y(\rho^{-1}(t_1)))$,

Obviamente por lo anterior tenemos que $(t^{v_0}, y(t)) \sim_{\widetilde{\mathcal{A}}} (t_1^{v_0}, y_1(t_1))$, pues $\rho \in \widetilde{Aut}(\mathbb{C}, 0)$ y $\sigma \in \widetilde{Aut}(\mathbb{C}^2, 0)$.

La siguiente proposición nos permitirá eliminar el término $v_1 + \lambda - v_0$, mediante la $\widetilde{\mathcal{A}}$-acción.

Proposición 3.23. *Sea $\varphi(t) = (t^{v_0}, y(t))$, donde $y(t) = t^v + t^\lambda + \sum_{i>\lambda} a_i t^i$, una parametrización de Puiseux, tal que el genero de φ en mayor que 1, y $n_1 = 2$. Entonces existe $y_1(t_1) = t_1^{v_1} + t_1^\lambda + \sum_{i>\lambda} a'_i t_1^i$, con $a'_i = a_i$, para $i < v_1 + \lambda - v_0$ y $a'_{v_1+\lambda-v_0} = 0$, tal que $(t_1^{v_0}, y_1(t_1)) \sim_{\widetilde{\mathcal{A}}} (t^{v_0}, y(t))$.*

Demostración. Por (3.7) es suficiente probar que $ord_{t_1}(B(t_1)) = v_1 + \lambda - v_0$.

Sea $\beta \in \mathbb{C}$ y $p_1, q \in \mathcal{M}_2^2$, como arriba. Probaremos que podemos tomar p_1 y q, de tal manera que $ord_{t_1}(B(t_1)) = v_1 + \lambda - v_0$, donde B es como en (3.8).

Desde que $\rho(t)$ es un automorfismo de $\mathcal{O}_1$, tenemos

$$ord_{t_1}(B(t_1)) = ord_t(B(t_1)),$$

así, podemos trabajar con potencias en t en la expresión $B(t_1)$.

Recordemos que $n_1 = 2$ implica que $mv_0 = 2v_1$, donde $m = \dfrac{\beta_1}{e_1} = \dfrac{v_1}{e_1}$.

Tomemos $p_1 = 0$ y $q = \frac{v_1}{v_0}\beta X^{m-1} + g$, tal que $v_\varphi(g) > (m-1)v_0$. Así tenemos

$$B(t_1) = \frac{(v_1/v_0\beta X^{m-1} + g)x'(t_1) + \beta y(t_1)y'(t_1)}{x'(t_1)} - \sum_{i\geq v_1} a_i t_1^i \left[\sum_{j=2}^{\infty} \binom{\frac{i}{v_0}}{j} \left(-\frac{\beta y(t_1)}{t_1^{v_0}}\right)^j\right]$$

$$B(t_1) = \underbrace{\beta\frac{v_1/v_0 x(t)^{m-1}x'(t_1) + y(t_1)y'(t_1)}{x'(t_1)}}_{B_0(t_1)} + \underbrace{g(t_1)}_{B_1(t_1)} - \underbrace{\sum_{i\geq v_1} a_i t_1^i \left[\sum_{j=2}^{\infty} \binom{\frac{i}{v_0}}{j} \left(-\frac{\beta y(t_1)}{t_1^{v_0}}\right)^j\right]}_{B_2(t_1)}.$$

Si, $\beta \neq 0$, tenemos que

$$v_\varphi(B_0(t_1)) = ord_{t_1}\left(\beta\frac{v_1/v_0 x(t)^{m-1}x'(t_1) + y(t_1)y'(t_1)}{x'(t_1)}\right) = v_1 + \lambda - v_0$$

Por otro lado, en la expresión de $B_2(t_1)$ el primer término tendrá grado $3v_1 - 2v_0$, si este no es mayor que $v_1 + \lambda - v_0$, observamos que $3v_1 - 2v_0 = (m-1)v_0 + v_1 + v_0 > (m-1)v_0$, entonces podemos eliminar este término tomando un $g(t_1)$ adecuado. Así en la expresión $B_2(t_1)$ quedaría el segundo término que tendría grado $2v_1 - 2v_0 + \lambda$ y este es mayor a $v_1 + \lambda - v_0$.

Por lo tanto $ord_{t_1}(B(t_1)) = v_1 + \lambda - v_0$, y así tenemos que $(t_1^{v_0}, y_1(t_1)) \sim_{\widetilde{\mathcal{A}}} (t^{v_0}, y(t))$. $\square$

Hasta aquí vimos que dada $\varphi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i>\lambda} a_i t^i)$ una parametrización de Puiseux, esta será $\widetilde{\mathcal{A}}$-equivalente a una parametrización de la forma

$$\varphi_1(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{\substack{i\notin\Lambda - v_0\\ i>\lambda}} a_i t^i).$$

Ahora apliquemos la $\mathcal{H}$-acción para obtener la $\mathcal{A}$-acción, esto es;

$$\varphi_1 \sim_{\mathcal{H}} \varphi_2 \Longrightarrow \varphi_2 = \sigma\varphi_1\rho^{-1},$$

con $\sigma(X,Y) = (\alpha_0^v X, \alpha_1^v Y)$ y $\rho(t) = \alpha t$.

Calculando tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sigma(\frac{t_1^{v_0}}{\alpha^{v_0}}, \frac{t_1^{v_1}}{\alpha^{v_1}} + \frac{t_1^\lambda}{\alpha^\lambda} + \sum_{\substack{i\notin\Lambda - v_0\\ i>\lambda}} \frac{a_i}{\alpha^i} t_1^i) \\ \varphi_2 &= (t_1^{v_0}, t_1^{v_1} + \frac{t_1^\lambda}{\alpha^{\lambda - v_1}} + \sum_{\substack{i\notin\Lambda - v_0\\ i>\lambda}} \frac{a_i}{\alpha^{i-v_1}} t_1^i). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $\varphi \sim_{\mathcal{A}} \varphi_2$, si y solo si

$$a_i' = \frac{a_i}{\alpha^{i-v_1}} \text{ y } \alpha^{\lambda - v_1} = 1$$

Así terminamos la prueba de la existencia del teorema(3.14).

Ahora probaremos la unicidad de las formas normales, para esto. Dada una clase de equisingularidad Σ_Γ, fijemos el conjunto Λ de valores de las diferenciales y consideremos el siguiente conjunto

$$N_\Lambda = \left\{ \left(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{j>\lambda} a_j t^j \right) \in \Sigma_\Gamma;\ a_j = 0,\ \text{para } j \in \Lambda - v_0 \right\}$$

que contiene el conjunto de las formas normales con respecto a la $\widetilde{\mathcal{A}}$-acción.

Notemos que N_Λ es un espacio afín, pues

$$N_\Lambda = (t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda) + (0, \sum_{j>\lambda} a_j t^j).$$

Además espacio tangente a N_Λ en un punto p es

$$T_p N_\Lambda = (0, \sum_{j>\lambda} a_j t^j).$$

Si denotamos por N_Λ^k el espacio $j^k(N_\Lambda)$, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.24. *Si $\alpha \in N_\Lambda$, entonces para cualquier $k > \lambda$, tenemos que*

$$N_\Lambda^k \cap j^k(\alpha) + T_{j^k(\alpha)}(\widetilde{\mathcal{A}}^k . j^k(\alpha)) = \{j^k(\alpha)\}.$$

Demostración. Sea que el conjunto

$$C_k = \{k / N_\Lambda^k \cap j^k(\alpha) + T_{j^k(\alpha)}(\widetilde{\mathcal{A}}^k . j^k(\alpha)) \neq \{j^k(\alpha)\}\}.$$

Supongamos que C_k sea diferente del vació, sea k el mínimo de C_k y sea $\beta \in N_\Lambda^k \cap j^k(\alpha) + T_{j^k(\alpha)}(\widetilde{\mathcal{A}}^k . j^k(\alpha))$ ósea, $\beta = j^k(\alpha) + m$ donde $m \in T_{j^k(\alpha)}(\widetilde{\mathcal{A}}^k . j^k(\alpha))$ con $\beta \neq j^k(\alpha)$. Tenemos que $j^{k-1}(\beta) = j^{k-1}(\alpha)$, si no fuera así k no seria el mínimo.

Luego,

$$j^k(\beta) - j^k(\alpha) = (0, bt^k) \in T_{j^k(\alpha)}(\widetilde{\mathcal{A}}^k . j^k(\alpha)),$$

con $b \neq 0$. De la proposición(3.19), se sigue que $k \in \Lambda - v_0$. Pero, desde que $j^k(\alpha), j^k(\beta) \in N_\Lambda^k$, por la proposición(3.20), se sigue que $j^k(\alpha) = j^{k-1}(\alpha)$ y $j^k(\beta) = j^{k-1}(\beta)$. Así tenemos que $j^k(\beta) = j^k(\alpha)$, que es una contradicción.

Por lo tanto C_k es vació y obtenemos el resultado. $\square$

Ejemplo 3.25. *Consideremos las ramas planas con semigrupo* $\Gamma = \langle 4, 7\rangle$*, los únicos conjuntos* Λ *posibles son* Γ*,* $\Gamma \cup \{13, 17\}$ *y* $\Gamma \cup \{17\}$*. Para el primer caso no tenemos invariante de Zariski* λ *y la rama plana es equivalente a la curva monomial con parametrización* (t^4, t^7)*. Para el segundo y el tercer caso el invariante de Zariski es* $\lambda = 9$ *y* $\lambda = 13$ *respectivamente.*

Para $\Gamma \cup \{13, 17\}$ *tenemos que* $N^k_\Lambda = \{t^4, t^7 + t^9\}$ *y* $j^k(\alpha) + T_{j^k(\alpha)}(\widetilde{\mathcal{A}}^k.j^k(\alpha)) = (t^4, t^7 + t^9) + \{(at^\gamma, bt^\beta); \gamma > 4, \beta > 7\}$*. Por lo tanto*

$$N^k_\Lambda \cap j^k(\alpha) + T_{j^k(\alpha)}(\widetilde{\mathcal{A}}^k.j^k(\alpha)) = \{j^k(\alpha)\}.$$

Ahora probaremos la unicidad de las $\widetilde{\mathcal{A}}$-formas normales, y con esto terminaremos con la prueba del teorema (3.14).

Sea $\varphi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \Sigma_{j>\lambda} a_j t^j) \in \Sigma^{c-1}_\Gamma$ una parametrización de Puiseux. Denotemos por $\widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi$ la orbita de φ en Σ^{c-1}_Γ con respecto a la $\widetilde{\mathcal{A}}^{c-1}$-acción. Recordemos también que $N_\Lambda = N^{c-1}_\Lambda$, donde c es el conductor del semigrupo de valores Γ. Nuestro objetivo es mostrar

$$N_\Lambda \cap \varphi + \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi = \{\varphi\}$$

ó

$$N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi = \{\varphi\}$$

Inicialmente, mostremos que $dim_{\mathbb{C}} N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi = 0$. Entonces tenemos

$$\varphi \in T_\varphi(N_\Lambda \cap \varphi + \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi) \subset T_\varphi N_\Lambda \cap T_\varphi \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi = N_\Lambda \cap \varphi + T_\varphi \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi = \{\varphi\}.$$

Y además

$$\begin{array}{rcl} dim_{\mathbb{C}} T_\varphi(N_\Lambda \cap \varphi + \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi) & = & dim_{\mathbb{C}} N_\Lambda \cap \varphi + \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi \\ dim_{\mathbb{C}}\{\varphi\} & = & dim_{\mathbb{C}} N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi \\ 0 & = & dim_{\mathbb{C}} N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi. \end{array}$$

Por lo tanto $N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi$ es un conjunto discreto.

Si $N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi \neq \{\varphi\}$, tomemos $\varphi_1 \in N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi$ con $\varphi_1 \neq \varphi$. Como $\widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi$ es conexo por caminos, existe un camino en $\widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi$ que une φ_1 a φ.

Sea $f \in \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi$ cuya forma normal es $\overline{f}$, como la reducción a la forma normal es continua, tenemos que dado un f_ϵ próximo a f (en la orbita) tendremos que su reducción $\overline{f_\epsilon}$ debe estar próxima de $\overline{f}$. Pero $N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi$ es un conjunto discreto de puntos, por lo tanto $N_\Lambda \cap \widetilde{\mathcal{A}}^{c-1} \cdot \varphi = \{\varphi\}$.

Así tenemos que la reducción de una parametrización a su $\mathcal{A}$-forma normal es única.

Bibliografía

[1] Bruce, J.W., *Classification Problems in Singularity Theory.* Notas de mini-curso en el 5° Workshop on Real and Complex singularities. ICMC-USP, São Carlos, 1998.

[2] Bruce, J. W., Kirk, N. P. and du Plessis, A. A. *Complete Transversals and the Classification of Singularities.* Nonlinearity, 10, N. 1, 253-275 (1997).

[3] Ebey, S. *The Classification of Singular Points of Algebraic Curves.* Trans. Amer. Math. Soc. 118, 454-471, (1947).

[4] Hefez,A. *Irreducible Plane Curve Singularities. Real and Complex Singularities*,1-120. Lectures Notes in Pure and Appl, Math. 232 Dekker, New York (2003).

[5] Hefez, A., Hernandes, M.E. *Computational methods in the local theory of curves.* 23 Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro (2001).

[6] Hefez, A., Hernandes, M. E., *Standard bases for local rings of branches and their modules of differentials.* J. Symb. Comput. 42,178-191, (2007).

[7] Hefez, A., Hernandes, M.E. *The Analytic Classification of Plane Branches.* Bull. London Math. Soc. 43 (2011) 289-298.

[8] Robbiano, L., Sweedler, M. *Subalgebra bases.* Proc. Commutative Algebra (1988).

[9] Soares, V. *O Método da Transversal Completa na Classificação de Curvas Planas Irredutíveis.* Tesis de Maestria UEM-PR.

[10] Zariski, O. *Le Problème des Modules pour les Branches Planes*(Hermann, Paris, 1986) (French); B. Lichtin, *The moduli problem for plane branches*, University Lecture Series 39 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2006) (English).