

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



Análisis dinámico de columnas basculantes ante excitaciones

sinusoidales

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA LA OBTENCIÓN DEL

GRADO DE BACHILLER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN

INGENIERIA CIVIL

AUTOR

Arturo Vladimir Torres Acosta

ASESOR:

Jorge Marcial Blondet Saavedra PhD.

Lima, Enero, 2019

RESUMEN

En varios países altamente sísmicos existen columnas sueltas que no se han volcado a pesar de haber soportado fuertes terremotos. Es claro, entonces que, estas columnas han tenido un comportamiento oscilante alrededor de su base (Pitilakis & Tavouktsi, 2010). Esta resistencia ante la volcadura de las columnas ha sido un tema interesante de estudio durante décadas (Housner, 1963)(Pitilakis & Tavouktsi, 2010)(Hogan, 1989)(Makris & Zhang, 1999)(Caliò & Marletta, 2003)(Manos, Petalas, & Demosthenous, 2013). Las ecuaciones que rigen el comportamiento oscilante de la columna son difíciles de resolver. Sin embargo, hoy en día, el avance de la tecnología permite hallar soluciones numéricas precisas y estables.

Este estudio resume el análisis dinámico de estabilidad de columnas basculantes sometidas a sismos de subducción. Primero, se desarrollaron las ecuaciones del movimiento de una columna simplemente apoyada sobre un terreno rígido que oscila o no ante movimientos en su base. Luego, se resolvieron numéricamente estas ecuaciones ante excitaciones armónicas (método de aceleración angular lineal). Se variaron los parámetros más importantes como las dimensiones características de la columna, el coeficiente de restitución, las características del sismo (amplitud y frecuencia), el periodo natural de la columna, frecuencia de muestreo de fijación del movimiento del suelo y la respuesta de la columna. Finalmente, se visualizaron los movimientos de las columnas con animaciones.

Contenido

| | |
|--|----|
| Introducción | 5 |
| Objetivo general | 6 |
| Objetivos específicos | 6 |
| Justificación e hipótesis..... | 6 |
| Metodología | 7 |
| Revisión de la literatura | 8 |
| Análisis numérico de respuesta sísmica de sistema visco elástico de 1 grado de libertad..... | 11 |
| Análisis numérico de respuesta sísmica de sistema visco elástico amortiguado de 1 grado de libertad..... | 22 |
| Análisis numérico de respuesta sísmica de sistema visco elástico amortiguado forzado de 1 grado de libertad..... | 33 |
| Análisis de estabilidad de columnas en traslación ante excitaciones en su base | 45 |
| Análisis de estabilidad de columnas basculantes ante excitaciones en su base | 49 |
| Respuesta numérica de la ecuación del comportamiento dinámico de la columna basculante | 56 |

| | |
|---|-----|
| Análisis de Resultados | 83 |
| Conclusiones y Recomendaciones | 85 |
| Anexo 1: Método de Aceleración Constante | 87 |
| Anexo 2: Método de Aceleración promedio | 89 |
| Anexo 3: Método de aceleración angular lineal | 91 |
| Anexo 4: Método de aceleración constante en sistema elástico amortiguado | 93 |
| Anexo 5: Método de aceleración promedio en sistema elástico amortiguado | 95 |
| Anexo 6: Método de aceleración lineal en sistema elástico amortiguado | 96 |
| Anexo 7: Método de aceleración constante en sistema amortiguado forzado | 98 |
| Anexo 8: Método de aceleración promedio en sistema amortiguado forzado | 100 |
| Anexo 9: Método de aceleración lineal en sistema amortiguado forzado | 103 |
| Anexo 10: Respuesta mediante tres métodos de solución pasó a paso (aceleración angular constante, aceleración angular promedio y aceleración angular lineal) de la ecuación del comportamiento dinámico de la columna oscilante | 105 |
| Anexo 11: Modelo numérico utilizado para resolver la ecuación del comportamiento dinámico en el presente estudio | 118 |
| REFERENCIAS | 122 |

Introducción

De acuerdo a los estudios de CAPECO, el 70% de las viviendas en Lima son informales y vulnerables a un terremoto. Esto se debe a que la mayoría de familias construyen sin la guía de un ingeniero y mucho menos con un diseño estructural seguro. Además, el Instituto Geofísico del Perú (IGP) se ha pronunciado y pronostica un terremoto de gran magnitud en la zona central del Perú, dado que, existe un silencio sísmico en esta zona de alrededor de 270 años. Es por ello que se necesitan soluciones prácticas y económicas ante este problema latente que amenaza a nuestras estructuras que no tienen el suficiente presupuesto para contar con sistemas de aislamiento de base.

En la actualidad, el diseño de estructuras de cualquier tipo está definido por 3 parámetros. El primer parámetro consiste en que las estructuras tienen que ser estáticamente indeterminadas. El segundo concepto consiste en que las estructuras tienen que ser dúctiles. Esto se refiere a que las estructuras tienen que tener la habilidad de desarrollar grandes deformaciones ante cargas laterales excesivas sin llegar al colapso. No obstante, la estructura puede sufrir deformaciones permanentes (deformaciones inelásticas). Por lo tanto, se producen daños irreparables en terremotos de gran magnitud. Finalmente, el tercer concepto consiste en generar estructuras con rigidez positiva. Este concepto consiste en que la fuerza necesaria debe incrementarse para que una estructura deformada continúe alejándose de su estado de equilibrio. Por consiguiente, para producir grandes deformaciones se necesitaran de la misma manera grandes magnitudes de fuerzas (Makris 2015:2). En conclusión, con nuestra filosofía de diseño, nuestras estructuras sufrirán daños irreparables y esfuerzos residuales luego de terremotos de magnitudes elevadas.

Por lo tanto, los académicos han observado que, existen estructuras ubicadas en zonas altamente sísmicas como los templos griegos, que a pesar de, sufrir terremotos durante 2.5 miles de años no han colapsado. Este comportamiento incentivó a desarrollar diferentes teorías y modelos matemáticos para hallar el misterio de este comportamiento sísmico (Michaltsos 2014:2). Luego de una exhaustiva investigación se logró concluir que los templos griegos funcionan como pórticos compuestos de columnas sin cimentar. Estas columnas se encuentran simplemente apoyadas sobre una losa indeformable y conectada por una viga infinitamente rígida. Este modelo ante cargas sísmicas produce que las columnas tambaleen alrededor de una esquina de la columna. La fuerza provocada por el sismo generará un momento respecto del punto de giro que

llevara a la columna a la volcadura. No obstante, el peso de la columna generará un momento que llevará al estado de equilibrio a la columna.

Objetivo general

El objetivo general de esta investigación es estudiar la dinámica de las columnas basculantes ante registros sísmicos para posiblemente utilizarlas como un sistema de aislamiento de base de edificios.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Desarrollar las ecuaciones del comportamiento dinámico de una columna rígida basculante apoyada sobre el terreno ante cualquier movimiento de base.
- Estudiar el comportamiento de columnas basculantes ante excitaciones armónicas. Se identificarán los parámetros más importantes y se desarrollará un estudio paramétrico. Los resultados se presentarán gráficamente.

Justificación e hipótesis

Se ha observado que algunas columnas sueltas tienen gran resistencia ante el volteo. Sin embargo, su comportamiento es poco predecible y caótico (Hogan, 1989). Se espera que el estudio de la respuesta del comportamiento de una columna suelta pueda ser el inicio para utilizar el conjunto de columnas sueltas como un método de aislamiento de base en edificaciones. De esta manera se aportará una tecnología menos costosa y más accesible para utilizarlo como un método de aislamiento de base.

Hipótesis

La hipótesis del presente estudio es que la estabilidad de las columnas basculantes ante excitaciones armónicas depende de las dimensiones características de las columnas (Radio de Giro, Esbeltez, Coeficiente de Restitución (e)) y las características del sismo (amplitud y frecuencia). Además se espera que el modelo numérico elegido para integrar la ecuación del movimiento (aceleración angular lineal) prediga la respuesta de las columnas oscilantes correctamente.

Metodología

Se plantea realizar las siguientes actividades:

- Desarrollar las ecuaciones del movimiento de una columna rígida oscilante apoyada sobre el terreno sometido ante movimientos en su base.
- Desarrollar algoritmo numérico para resolver las ecuaciones del movimiento de una columna rígida basculante apoyada sobre el terreno sometida ante movimientos armónicos en su base.
- Investigar los factores que influyen en la estabilidad de la columna basculante como: la esbeltez, frecuencia natural de la columna, altura, ancho, amplitud de la aceleración, período de la aceleración, frecuencia de la aceleración y frecuencia de muestreo.

Revisión de la literatura

Los templos griegos como el templo de Atena, el templo de Zeus Olímpico, el templo de Afaya y otros, contienen columnas sueltas que perduran de pie por más de 2000 años a pesar de sufrir terremotos. Es importante tener en cuenta que Grecia se encuentra en medio de dos placas tectónicas. Por el norte con la placa de Eurasia, mientras por el sur con la placa del mar Aegean. Esta última placa tiene una falla divergente con la placa de Eurasia, mientras que la placa Africana tiene una falla de tipo subducción con la placa del mar Aegean. Dado estos movimientos entre placas, Grecia tiene una alta densidad de sismos (Figura 1) siendo el mayor en los últimos tiempos el de 6.9 Mw en Lefkada en el 2015.

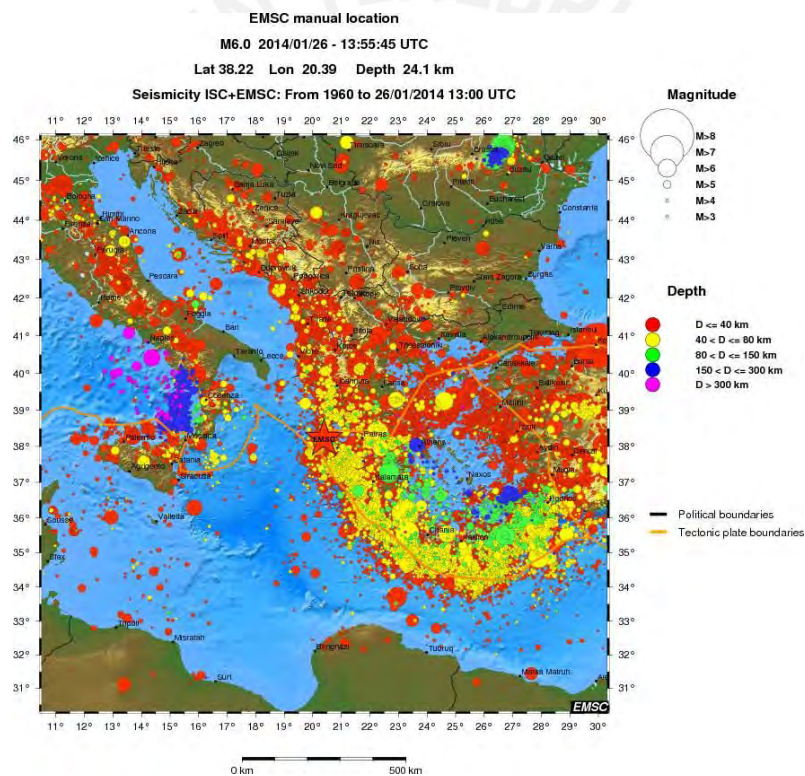


Figura 1: Densidad de sismos en Grecia y a sus alrededores

Fuente: TheWatchers. Strong and shallow M 6.1 earthquake struck island of Cephalonia, Greece.
Recuperado de <https://watchers.news/2014/01/26/strong-and-shallow-m-6-0-earthquake-struck-greece/>

A diferencia de muchas de las edificaciones que han sido construidos en la actualidad y que

colapsan ante terremotos, las columnas sueltas que se encuentran en los templos griegos no se han volcado. A pesar tener la tecnología para estudiar a mayor profundidad las características mecánicas de los materiales con los que construimos como por ejemplo el concreto, la madera y el acero. Es por ello que, los académicos investigan cual es el comportamiento dinámico de las columnas sueltas en los templos griegos para que perduren en el tiempo.

Hoy en día, la filosofía de diseño de estructuras (Figura 3) se caracteriza en crear estructuras estáticamente indeterminadas. De esta manera, cuando cierta sección falla, se logra redistribuir las fuerzas o momentos a otras secciones. Asimismo, las estructuras se caracterizan en tener rigidez lateral positiva. Esto se refiere a que cuando una estructura se deforma y trata de continuar deformándose, se necesitara una mayor fuerza. Finalmente, la filosofía actual, consiste en dotar a la estructura de ductilidad. Cuando una estructura se enfrenta a un sismo, esta no se logra mantener en el estado elástico. Esto es debido a que construir una estructura lo suficientemente rígida para mantenerse en el estado elástico sería muy costoso. Por consiguiente, la estructura incursiona en el rango inelástico. La ductilidad de la estructura tiene que ser grande, esto se logra obteniendo una amplia distancia entre la deformación de colapso y la deformación de fluencia de la estructura (Makris 2015:2). Esta filosofía de diseño estructural lleva a que cuando ocurra un sismo raro o muy raro, las estructuras incursionarán en niveles de daño de resguardo a la vida o cercano al colapso (según el SEAOC), por lo tanto, sufrirán daños irreparables.

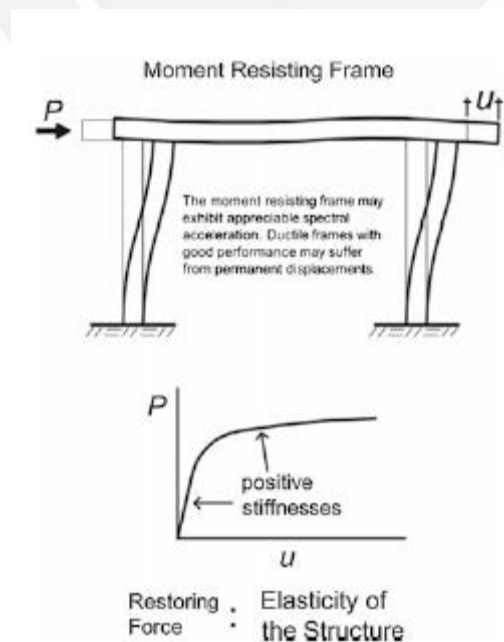


Figura2: Deformada y la curva de capacidad de una estructura hiperestática.

Fuente: Makris,N,Vassiliou, M. F., (2015) Dynamics of the rocking frame. Springer International Publishing Switzerland

Mientras que las estructuras como los templos griegos, consisten en columnas esbeltas que se pueden asumir con rigidez infinita. Estas columnas se encuentran simplemente apoyadas sobre un terreno rígido conectadas por una viga rígida también conocida como Architrave (Figura 4). Estas estructuras se comportan de manera diferente a las estructuras que se tiene hoy en día. En primer lugar, estas estructuras tienen rigidez lateral negativa. Es decir, no se necesita incrementar las fuerzas para generar mayores desplazamientos como se observa en la curva de capacidad (Figura 4). Luego, estas estructuras no tienen ductilidad. Sin embargo, es importante resaltar que, a comparación de las estructuras comunes, estas no sufren daños irreparables. Esto se debe a que, no incursionan en el rango inelástico. Si no, su comportamiento ante un sismo se basa en que las columnas oscilan respecto de uno de sus vértices generando un sistema de un grado de libertad rotulado en las conexiones entre terreno-columna y columna-viga. (Makris 2015:2)

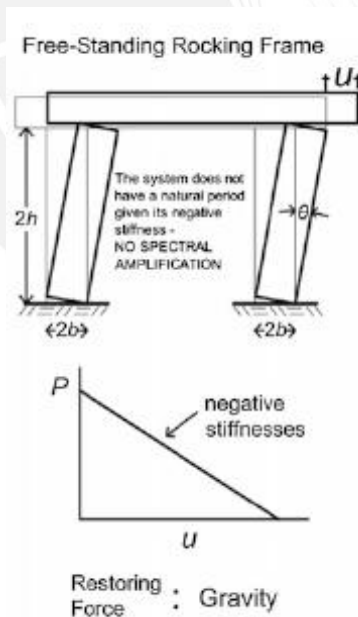


Figura 3: Muestra la deformada y la curva de capacidad de una estructura que tambalea.

Fuente: Makris,N,Vassiliou, M. F., (2015) Dynamics of the rocking frame. Springer International Publishing Switzerland

Análisis numérico de respuesta sísmica de sistema visco elástico de 1 grado de libertad.

Se procederá a desarrollar la respuesta sísmica de un sistema visco elástico de 1 grado de libertad. Se resolverá el siguiente problema utilizando diferentes métodos numéricos:

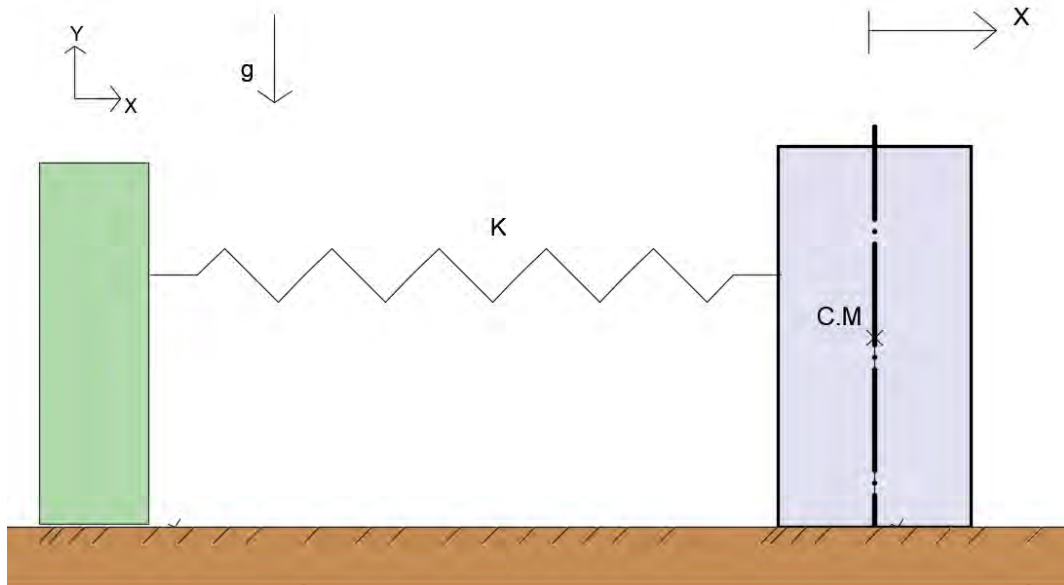


Figura 4: Problema propuesto a resolver

Se desplazará un metro el bloque del punto de equilibrio y se tendrá el siguiente caso inicial:

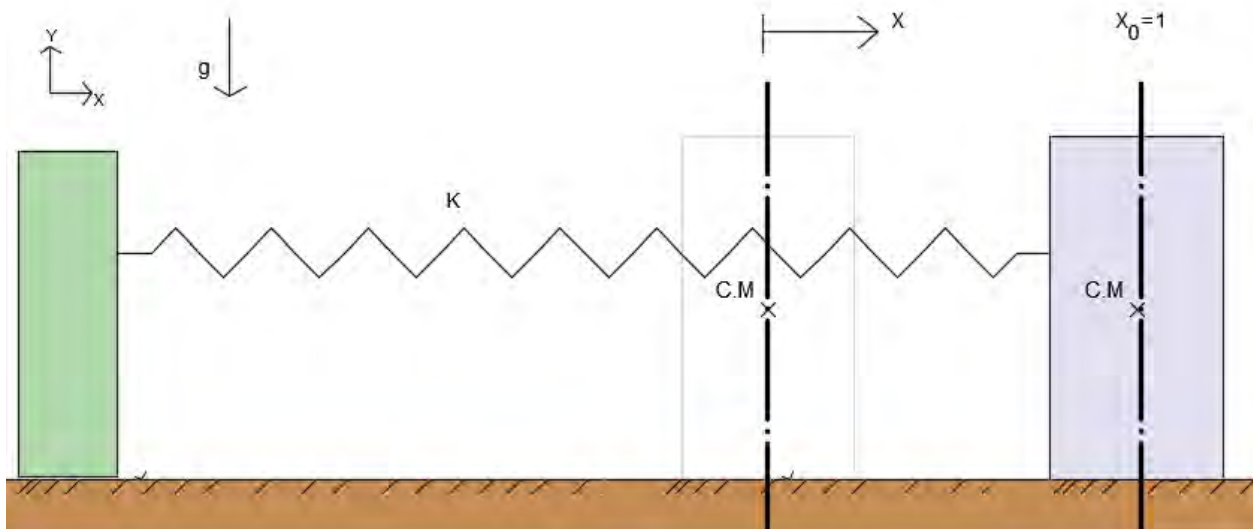


Figura 5: Bloque desplazado a posición inicial

En las Figuras 6 y 7 se observa el Diagrama de cuerpo libre (DCL) y el Diagrama Cinético del bloque en un tiempo “t” segundos. Se despreciará la fuerza de fricción producida por el terreno sobre el bloque.

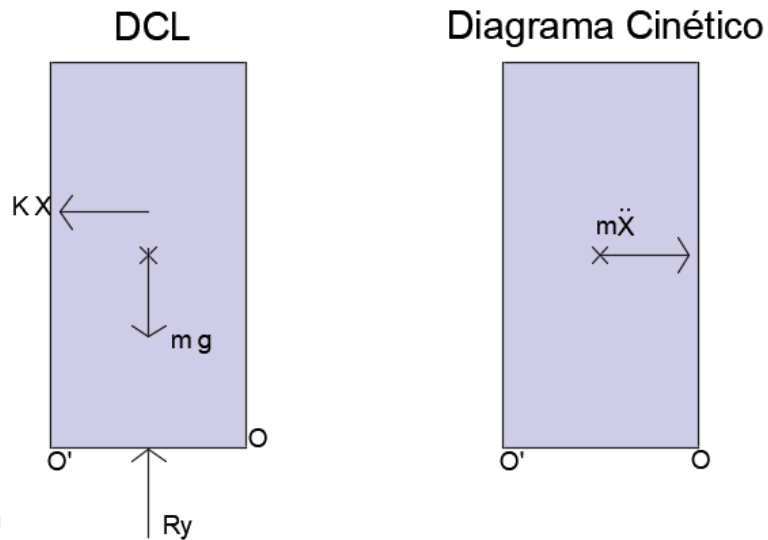


Figura 6 y 7: DCL y DC del bloque en movimiento

Se aplicará la segunda ley de Newton en el eje X con ayuda de las figuras 6 y 7. Se obtiene la siguiente ecuación dinámica:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$m\ddot{X} + KX = 0 \quad [1]$$

La solución conocida de la ecuación diferencial [1] es la siguiente:

$$X = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad [2]$$

Método de la aceleración angular constante

Se resolverá la ecuación [1] numéricamente asumiendo que la aceleración del bloque es **constante** durante un diferencial de tiempo a libre elección como se observa en la figura 8.

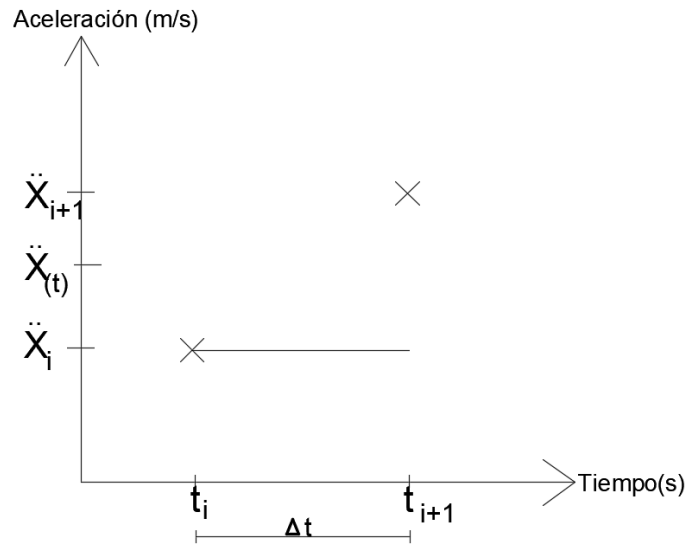


Figura 8: Aceleración versus Tiempo del bloque.

A pesar de que la aceleración en el tiempo t_i es diferente a la aceleración en el tiempo t_{i+1} , se asumirá que en ese intervalo de tiempo:

$$\ddot{X}_{i+1} = \ddot{X}_i \quad [3]$$

Integrando la ecuación [3] y resolviendo para un $t = \Delta t$ se obtiene lo siguiente:

$$\dot{X}_{i+1} = \ddot{X}_i \Delta t + \dot{X}_i \quad [4]$$

Integrando la ecuación [4], se obtiene lo siguiente:

$$X_{i+1} = X_i + \dot{X}_i \Delta t + \frac{\ddot{X}_i \Delta t^2}{2} \quad [5]$$

Cuando $i=0$ y $t_i = 0$ se conoce los siguientes parámetros:

$$X_0 = 1 \quad [6]$$

$$\dot{X}_0 = 0 \quad [7]$$

Para hallar la aceleración se reemplazará [6] y [7] en la ecuación [1] y se obtiene que:

$$\ddot{X}_0 = -\frac{KX_0}{m} = -\frac{K}{m} \quad [8]$$

Para hallar los parámetros en $i+1$ cuando $t_{i+1} = \Delta t$ se reemplazará los parámetros [6], [7] y [8] en las ecuaciones [4] y [5] para hallar la velocidad y posición respectivamente. Además para hallar la aceleración en $i+1$, se reemplazará la posición $i+1$ [5] en la ecuación [1].

$$X_{i+1} = X_1 = 1 + \frac{-\frac{K}{m} \Delta t^2}{2} \quad [9]$$

$$\dot{X}_{i+1} = \dot{X}_1 = \ddot{X}_i \Delta t + 0 = -\frac{K}{m} \Delta t \quad [10]$$

$$m\ddot{X}_{i+1} + KX_{i+1} = 0 \quad [11]$$

$$\ddot{X}_{i+1} = \frac{-KX_{i+1}}{m} \quad [12]$$

La precisión de este procedimiento para hallar los parámetros de la aceleración, velocidad y el tiempo dependerán del tamaño del salto en el tiempo (Δt). Mientras menor es el salto, mayor es la precisión.

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- Salto en el tiempo (Δt) = 0.1 *segundos*.

La duración del movimiento será de 50 segundos. De esta manera se obtiene 500 puntos y se observa la estabilidad del método en largas duraciones.

A continuación, la figura 9, muestra un gráfico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 50 segundos. La línea roja representa la ecuación [2], la cual es la respuesta analítica conocida de la ecuación diferencial. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración constante.

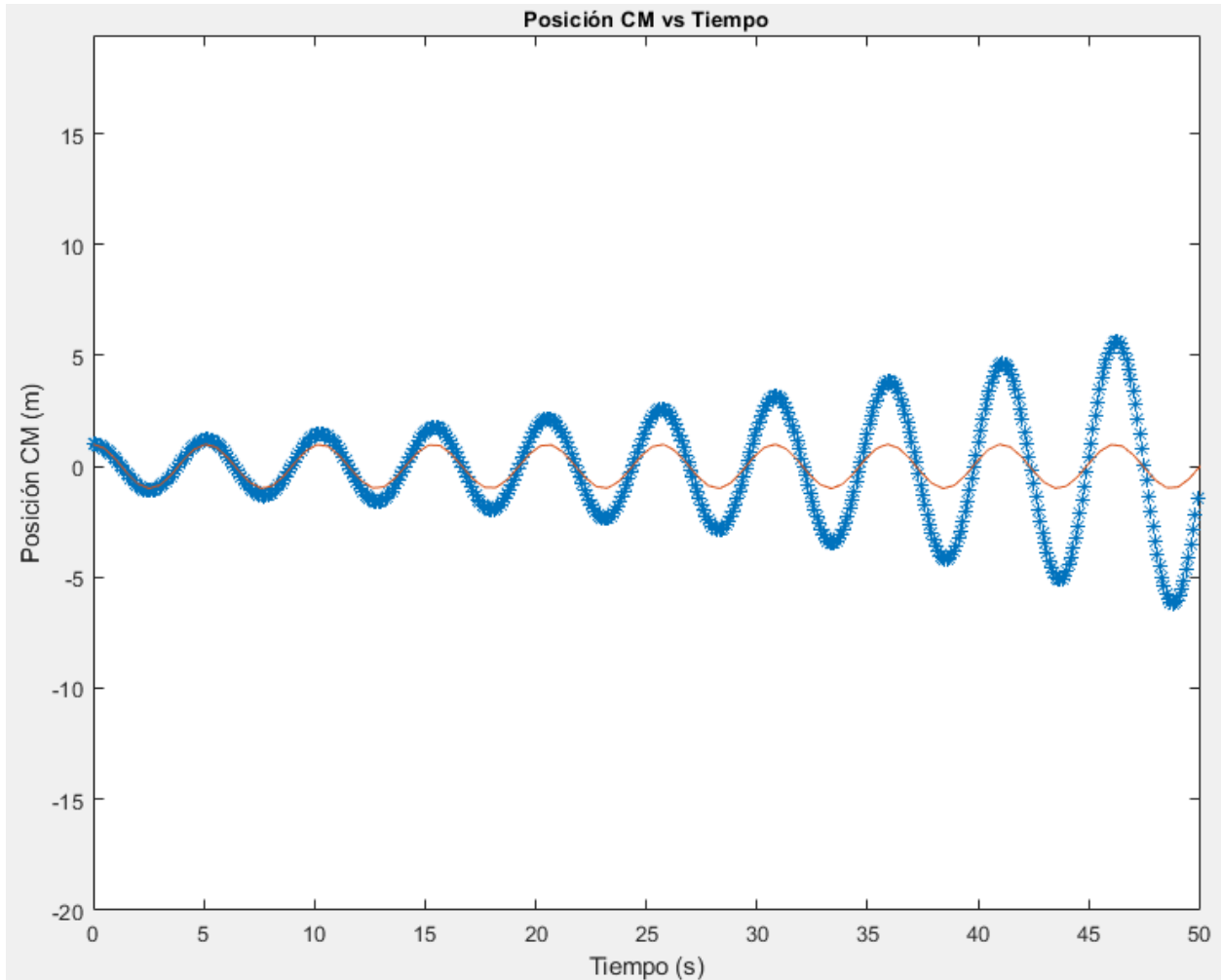


Figura 9: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

Como se observa, la aproximación es muy buena durante los primeros 10 segundos. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo, el método se torna inestable. Por lo tanto, las respuestas se alejan de las respuestas teóricas.

Más aun, se realizó una animación en MATLAB de la trayectoria del bloque calculada mediante el método numérico a través del tiempo.

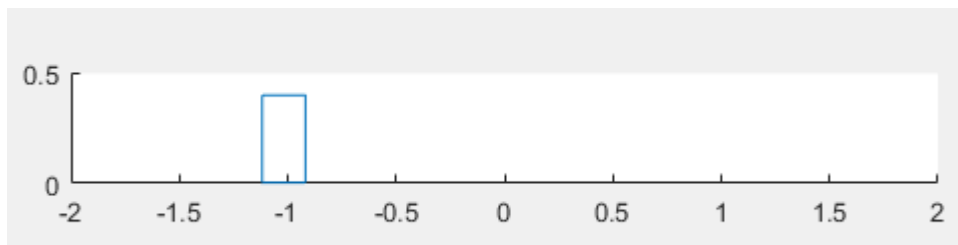


Figura 10: Animación del bloque a través del tiempo en movimiento armónico simple

El código en MATLAB de este método numérico esta adjuntado en el **ANEXO 1**.

Método de la aceleración promedio

Se resolverá la ecuación 1 teniendo como asunción principal que la aceleración del bloque es el promedio de la aceleración en el tiempo “i” y en el tiempo “i+1”.

La figura 11 muestra el grafico de aceleración versus tiempo que se toma como asunción.

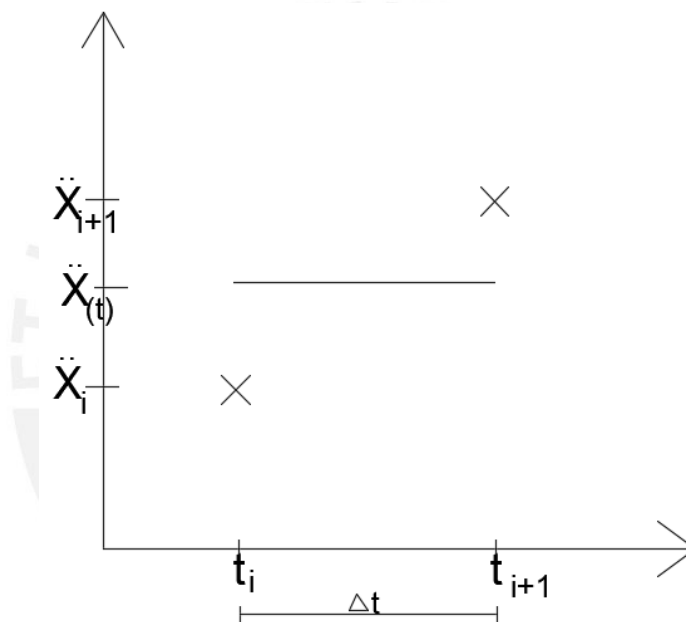


Figura 11: Aceleración versus Tiempo del bloque

De la figura 11 se puede conocer las siguientes relaciones:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad [13]$$

$$\ddot{X} = \frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{2} \quad [14]$$

Integramos la ecuación [14] para hallar la velocidad y la posición del centro de masa del bloque

$$\dot{X} = \left(\frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{2} \right) t + \dot{X}_i \quad [15]$$

$$X = \left(\frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{4} \right) t^2 + \dot{X}_i t + X_i \quad [16]$$

Las condiciones iniciales del problema son las siguientes

$$X_0 = 1 \quad [17]$$

$$\dot{X}_0 = 0 \quad [18]$$

Reemplazo [17] y [18] en la ecuación [1] para hallar la aceleración inicial en $i=0$

$$\ddot{X}_0 = -\frac{kX_0}{m} = -\frac{K}{m} \quad [19]$$

En un tiempo $t = \Delta t$ y cuando $i=0$ e $i+1=1$, se reemplaza [17], [18] y [19] en las ecuaciones [15] y [16]

$$X_{(\Delta t)} = X_{i+1} = X_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + \ddot{X}_0}{4} \right) t^2 + \dot{X}_0 t + X_0$$

$$X_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{4} \right) \Delta t^2 + 1 \quad [20]$$

$$\dot{X}_{(\Delta t)} = \dot{X}_{i+1} = \dot{X}_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{k}{m}}{2} \right) \Delta t \quad [21]$$

Para el tiempo $t = \Delta t$, la ecuación [1] se modifica a la siguiente

$$m\ddot{X}_1 + KX_1 = 0 \quad [22]$$

Reemplazo [20] en [21] y se despeja la ecuación para \ddot{X}_1

$$m\ddot{X}_1 + K \left(\left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{4} \right) \Delta t^2 + 1 \right) = 0$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{K^2 \Delta t^2 - 4m}{m(K \Delta t^2 + 4m)} \quad [23]$$

Reemplazo [23] en la ecuación [21] y se obtiene lo siguiente

$$\dot{X}_1 = \left(\frac{\frac{K^2 \Delta t^2 - 4m}{m(K \Delta t^2 + 4m)} + -\frac{K}{m}}{2} \right) \Delta t \quad [24]$$

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- Salto en el tiempo $(\Delta t) = 0.1 \text{ segundos}$.

La duración del movimiento será de 50 segundos. De esta manera se obtendrá 500 puntos y se observara la estabilidad del método en largas duraciones.

A continuación, la figura 12, muestra un grafico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 50 segundos. La línea roja representa la ecuación [2], la cual es la respuesta analítica conocida. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración promedio.

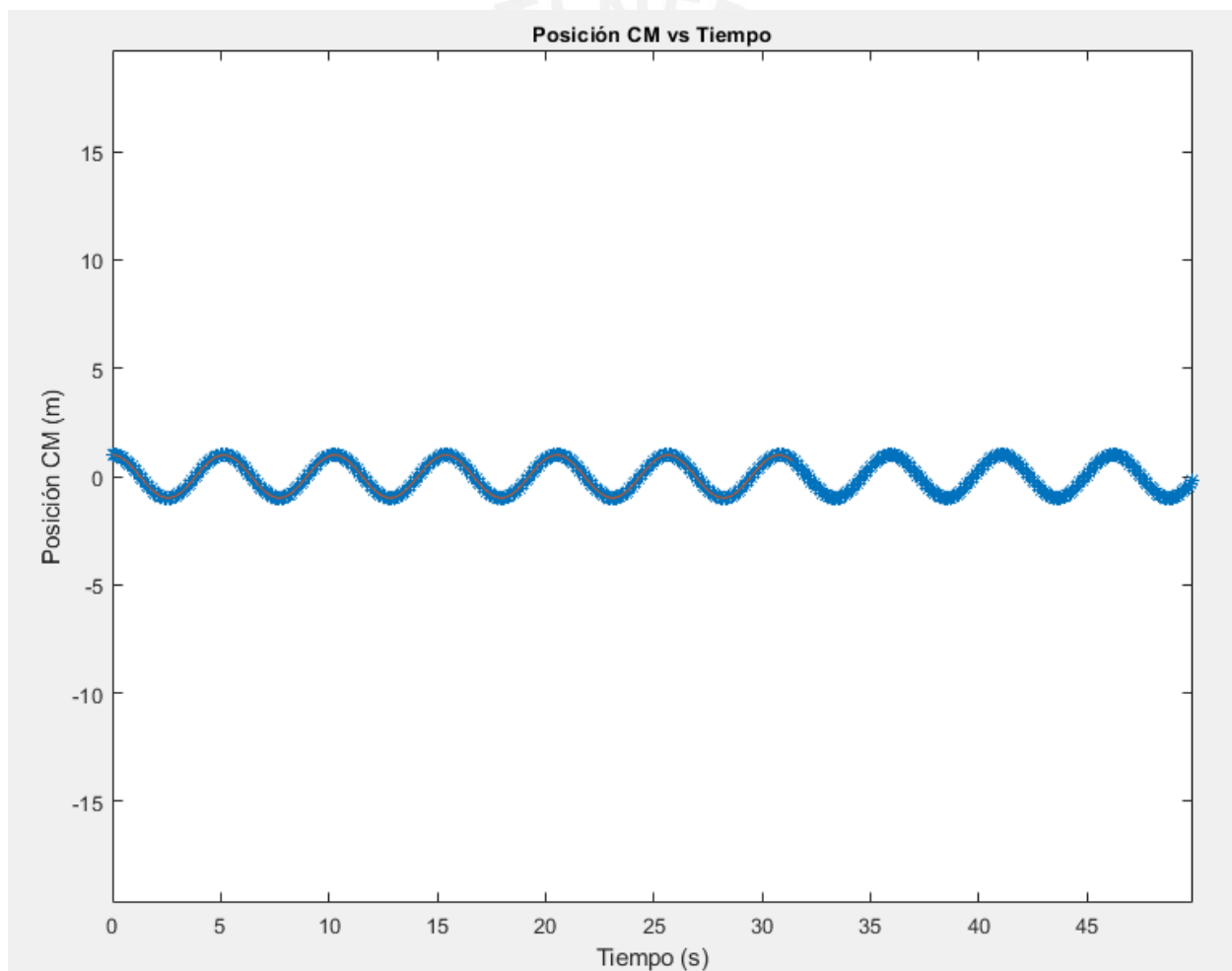


Figura 12: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

El código en MATLAB de este método numérico esta adjuntado en el **ANEXO 2**.

Método de la aceleración lineal

Se resolverá la ecuación 1 teniendo como asunción principal que la aceleración del bloque es el

promedio de la aceleración en el tiempo “i” y en el tiempo “i+1”.

La figura 13 muestra el gráfico de aceleración versus tiempo que se toma como asunción.

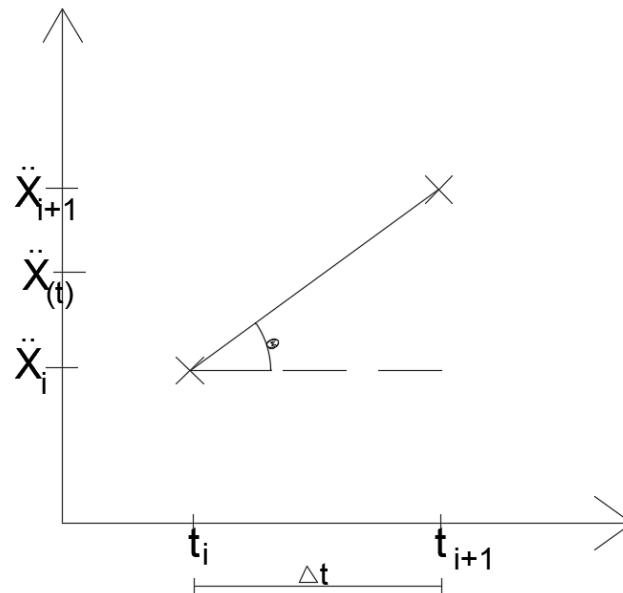


Figura 13: Aceleración versus Tiempo del bloque

De la figura 11 se puede conocer las siguientes relaciones:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad [25]$$

$$\ddot{X} = \ddot{X}_i + \frac{t}{\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) \quad [26]$$

Integramos la ecuación [26] para hallar la velocidad y posición

$$\dot{X} = \ddot{X}_i t + \frac{t^2}{2\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) + \dot{X}_i \quad [27]$$

$$X = \frac{\ddot{X}_i t^2}{2} + \frac{t^3}{6\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) + \dot{X}_i t + X_i \quad [28]$$

Las condiciones iniciales del problema son las siguientes

$$X_o = 1 \quad [29]$$

$$\dot{X}_o = 0 \quad [30]$$

Reemplazo [29] y [30] en la ecuación [1] para hallar la aceleración inicial en $i=0$

$$\ddot{X}_o = -\frac{kX_o}{m} = -\frac{K}{m} \quad [31]$$

En un tiempo $t = \Delta t$ y cuando $i=0$ e $i+1=1$, se reemplaza [29], [30] y [31] en las ecuaciones [27] y [28]

$$\begin{aligned}\dot{X}_{\Delta t} &= \dot{X}_1 = \ddot{X}_0 \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t} (\ddot{X}_1 - \ddot{X}_0) + \dot{X}_0 \\ \dot{X}_{\Delta t} &= \dot{X}_1 = -\frac{K}{m} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t} \left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m} \right)\end{aligned}\quad [27]$$

$$\begin{aligned}X_{\Delta t} &= X_1 = \frac{\ddot{X}_0 \Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t} (\ddot{X}_1 - \ddot{X}_0) + \dot{X}_0 \Delta t + X_0 \\ X_{\Delta t} &= X_1 = \frac{-\frac{K}{m} \Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t} \left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m} \right) + 1\end{aligned}\quad [28]$$

Para el tiempo $t = \Delta t$, la ecuación [1] se modifica a la siguiente

$$m\ddot{X}_1 + KX_1 = 0 \quad [29]$$

Reemplazo [28] en [29] y se despeja la ecuación para \ddot{X}_1

$$\begin{aligned}m\ddot{X}_1 + K \left(\frac{-\frac{K}{m} \Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t} \left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m} \right) + 1 \right) &= 0 \\ \ddot{X}_1 &= \frac{2K(K\Delta t^2 - 3m)}{m(K\Delta t^2 + 6m)}\end{aligned}\quad [30]$$

Reemplazo [30] en la ecuación [27] y se obtiene lo siguiente

$$\dot{X}_{\Delta t} = \dot{X}_1 = -\frac{K}{m} \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{2K(K\Delta t^2 - 3m)}{m(K\Delta t^2 + 6m)} + \frac{K}{m} \right)\quad [31]$$

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- Salto en el tiempo $(\Delta t) = 0.1 \text{ segundos}$.

La duración del movimiento será de 50 segundos. De esta manera se obtendrá 500 puntos y se observara la estabilidad del método en largas duraciones.

A continuación, la figura 14, muestra un grafico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 50 segundos. La línea roja representa la ecuación [2], la cual es la respuesta analítica conocida. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración lineal.

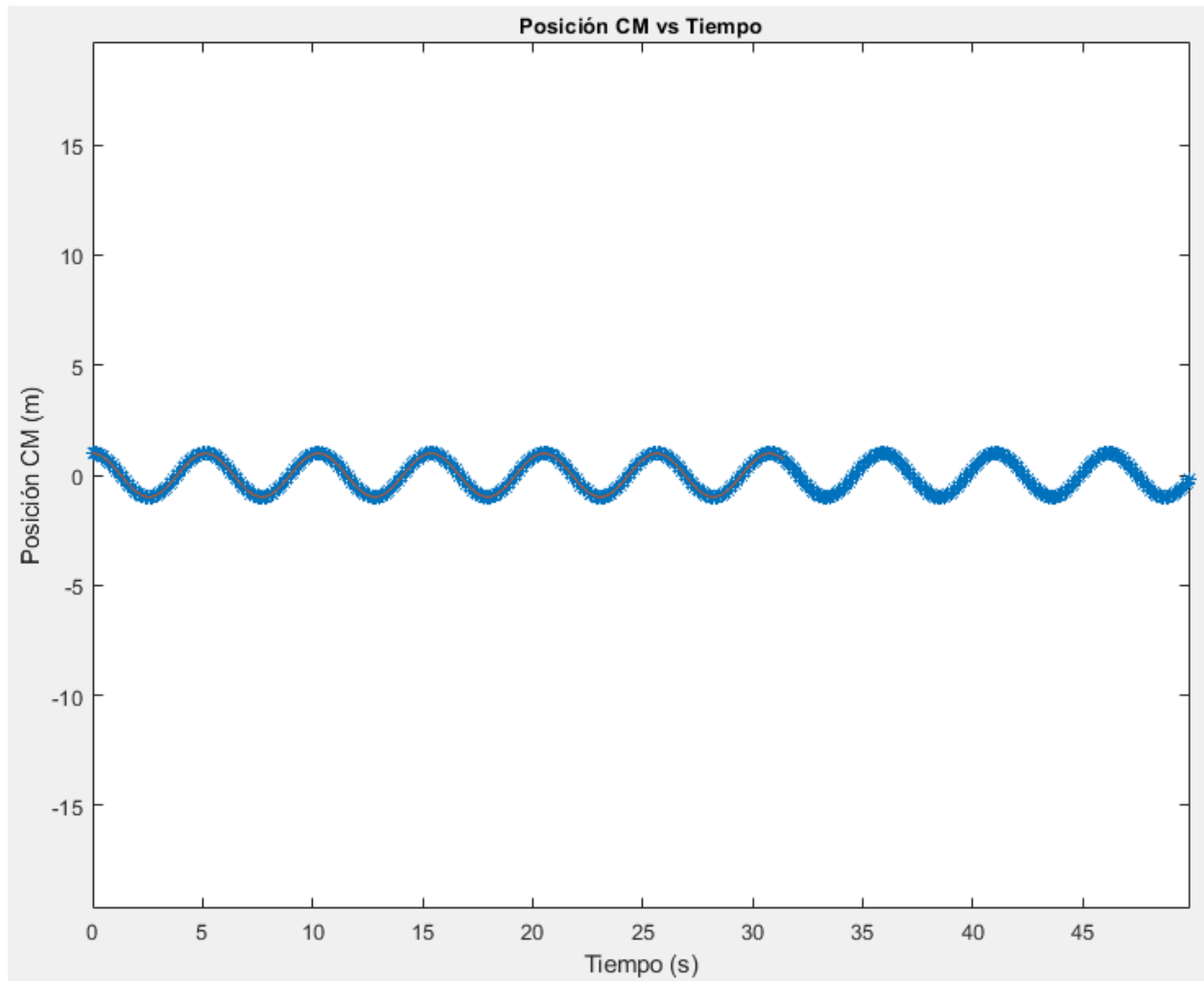


Figura 14: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica
Movimiento armónico simple

El código en MATLAB de este método numérico se adjunta en el **ANEXO 3**.

Análisis numérico de respuesta sísmica de sistema visco elástico amortiguado de 1 grado de libertad.

A continuación, se procederá a desarrollar la respuesta sísmica de un sistema visco elástico amortiguado de 1 grado de libertad. En la figura 15 se observa el problema a resolver utilizando diferentes métodos numéricos:

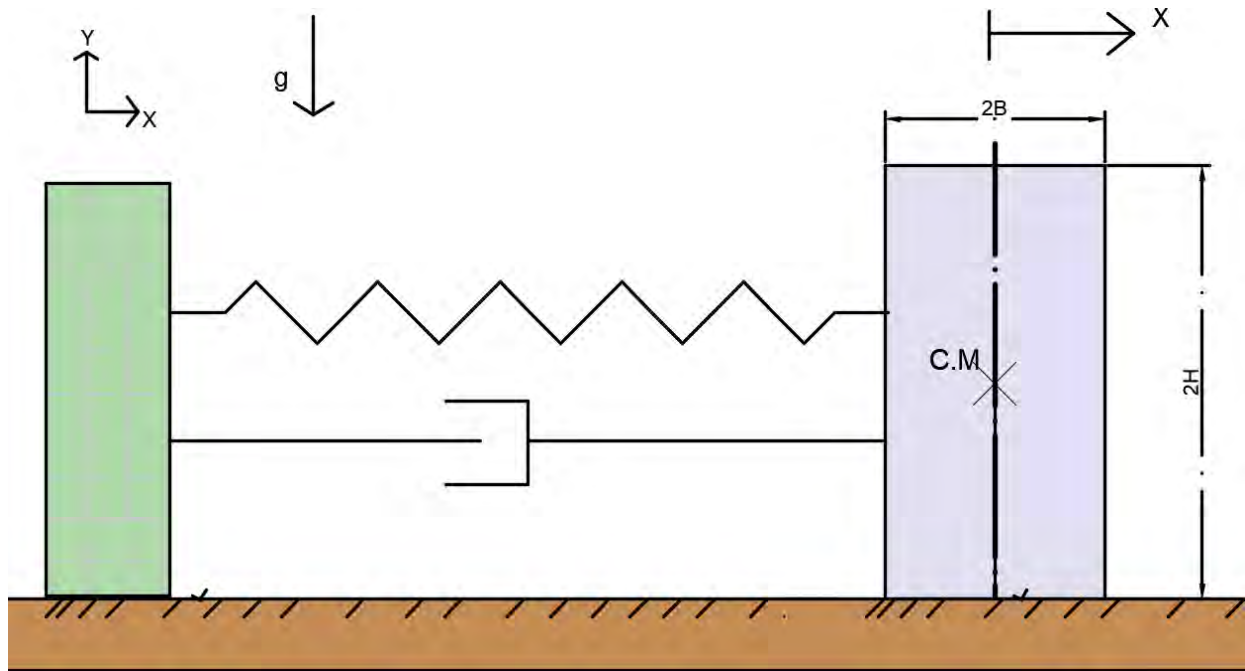


Figura 15: Problema a resolver

Se desplazará un metro el bloque del punto de equilibrio y se tendrá el siguiente caso inicial:

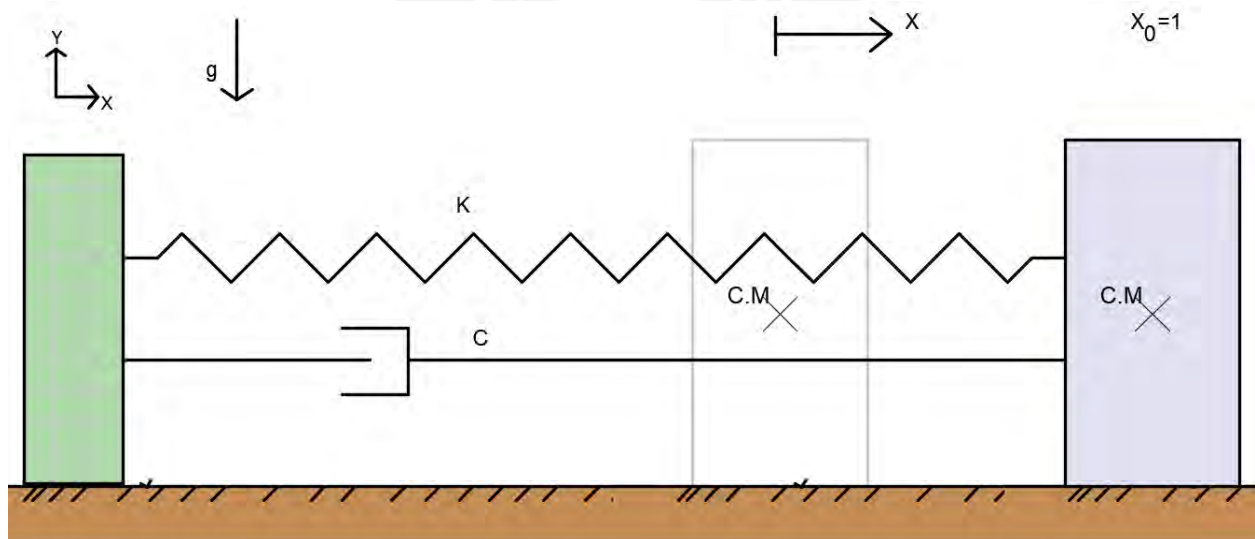


Figura 16: Muestra el bloque desplazado

Se analizará el equilibrio dinámico del bloque en un tiempo = t segundos y se obtendrá el DCL y DC del bloque que se observa en figura 17.

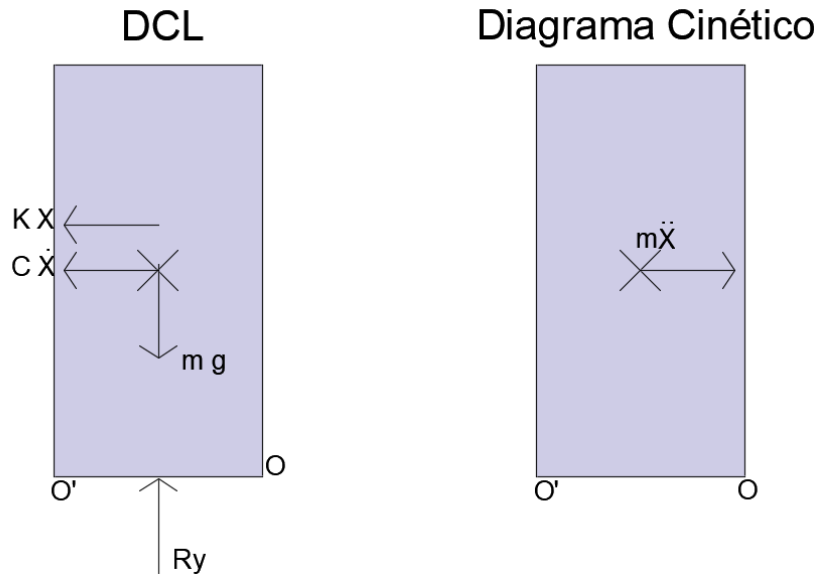


Figura 17: DCL y DC del bloque en movimiento

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje X, se obtiene la siguiente ecuación dinámica:

$$\sum F_X = ma_x$$

$$m\ddot{X} + KX + C\dot{X} = 0 \quad [32]$$

Las soluciones conocidas de la ecuación diferencial [32] son las siguientes:

Cuando $\omega_o^2 > \beta^2$

$$X = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta) \quad [33]$$

Cuando $\omega_o^2 = \beta^2$

$$X = (B + Ct)e^{-\beta t} \quad [34]$$

Y cuando $\omega_o^2 < \beta^2$

$$X = e^{-\beta t}(Be^{\omega_1 t} + Ce^{-\omega_1 t}) \quad [35]$$

Método de la aceleración angular constante

Se resolverá la ecuación [32] utilizando métodos numéricos asumiendo que la aceleración del bloque es constante durante un diferencial de tiempo.

La aceleración del bloque durante un intervalo de tiempo de acuerdo a la asunción realizada para resolver la ecuación [32] se muestra en la Figura 8.

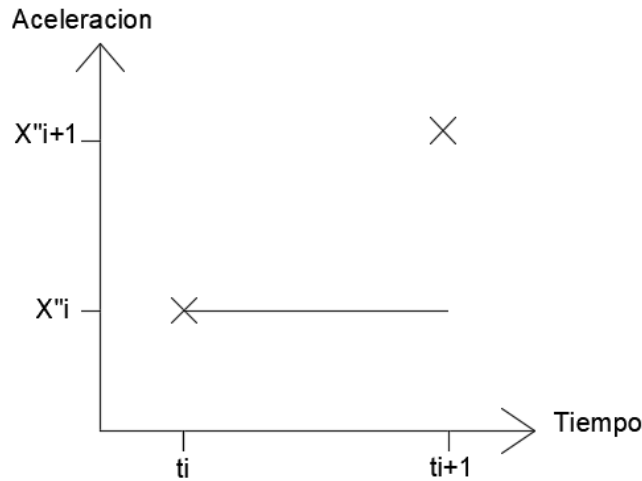


Figura 18: Aceleración versus Tiempo del bloque.

A pesar de que la aceleración en el tiempo t_i es diferente a la aceleración en el tiempo t_{i+1} , se asumirá que en ese intervalo de tiempo:

$$\ddot{X}_{i+1} = \ddot{X}_i \quad [36]$$

Integrando la ecuación [36] y resolviendo para un $t = \Delta t$ se obtiene lo siguiente:

$$\dot{X}_{i+1} = \ddot{X}_i \Delta t + \dot{X}_i \quad [37]$$

Integrando la ecuación [37], se obtiene lo siguiente:

$$X_{i+1} = X_i + \dot{X}_i \Delta t + \frac{\ddot{X}_i \Delta t^2}{2} \quad [38]$$

Cuando $i=0$ se conoce los siguientes parámetros:

$$X_0 = 1 \quad [39]$$

$$\dot{X}_0 = 0 \quad [40]$$

Para hallar la aceleración se reemplazará [39] y [40] en la ecuación [32] y se obtiene que:

$$\ddot{X}_0 = \frac{-KX_0 - C\dot{X}_0}{m} = -\frac{K}{m} \quad [41]$$

Asimismo, para un $t = \Delta t$ entonces $i=1$.

Para hallar los parámetros en $i+1$ como la velocidad y posición se reemplazara los parámetros [39], [40] y [41] en las ecuaciones [37] y [38].

$$X_{i+1} = X_1 = 1 + \frac{-\frac{K}{m}\Delta t^2}{2} \quad [42]$$

$$\dot{X}_{i+1} = \dot{X}_1 = \ddot{X}_i\Delta t + 0 = -\frac{K}{m}\Delta t \quad [43]$$

Además para hallar la aceleración en $i+1$, se reemplazará la posición $i+1$ y la velocidad $i+1$ en la ecuación [32].

$$m\ddot{X}_{i+1} + C\dot{X}_{i+1} + KX_{i+1} = 0$$

$$\ddot{X}_{i+1} = \frac{-KX_{i+1} - C\dot{X}_{i+1}}{m} \quad [44]$$

Cuando $i+1=1$, entonces la aceleración del centro de masa es la siguiente

$$\ddot{X}_1 = \frac{-KX_1 - C\dot{X}_1}{m}$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{-K\left(1 + \frac{-\frac{K}{m}\Delta t^2}{2}\right) - C\left(-\frac{K}{m}\Delta t\right)}{m} \quad [45]$$

La precisión de este procedimiento para hallar los parámetros de la aceleración, velocidad y el tiempo dependerán del tamaño del salto en el tiempo (Δt). Mientras menor es el salto, mayor es la precisión.

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- $c = 1 \frac{Ns}{m}$
- Salto en el tiempo (Δt) = 0.1 segundos.

La duración del movimiento será de 15 segundos. De esta manera se obtendrá 150 puntos y se observará la estabilidad del método ante largas duraciones.

A continuación, la figura 19, muestra un grafico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 15 segundos. La línea roja muestra la solución de la ecuación diferencial [32], las cuales podrían ser cualquiera de las ecuaciones [33], [34] o [35]. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración constante.

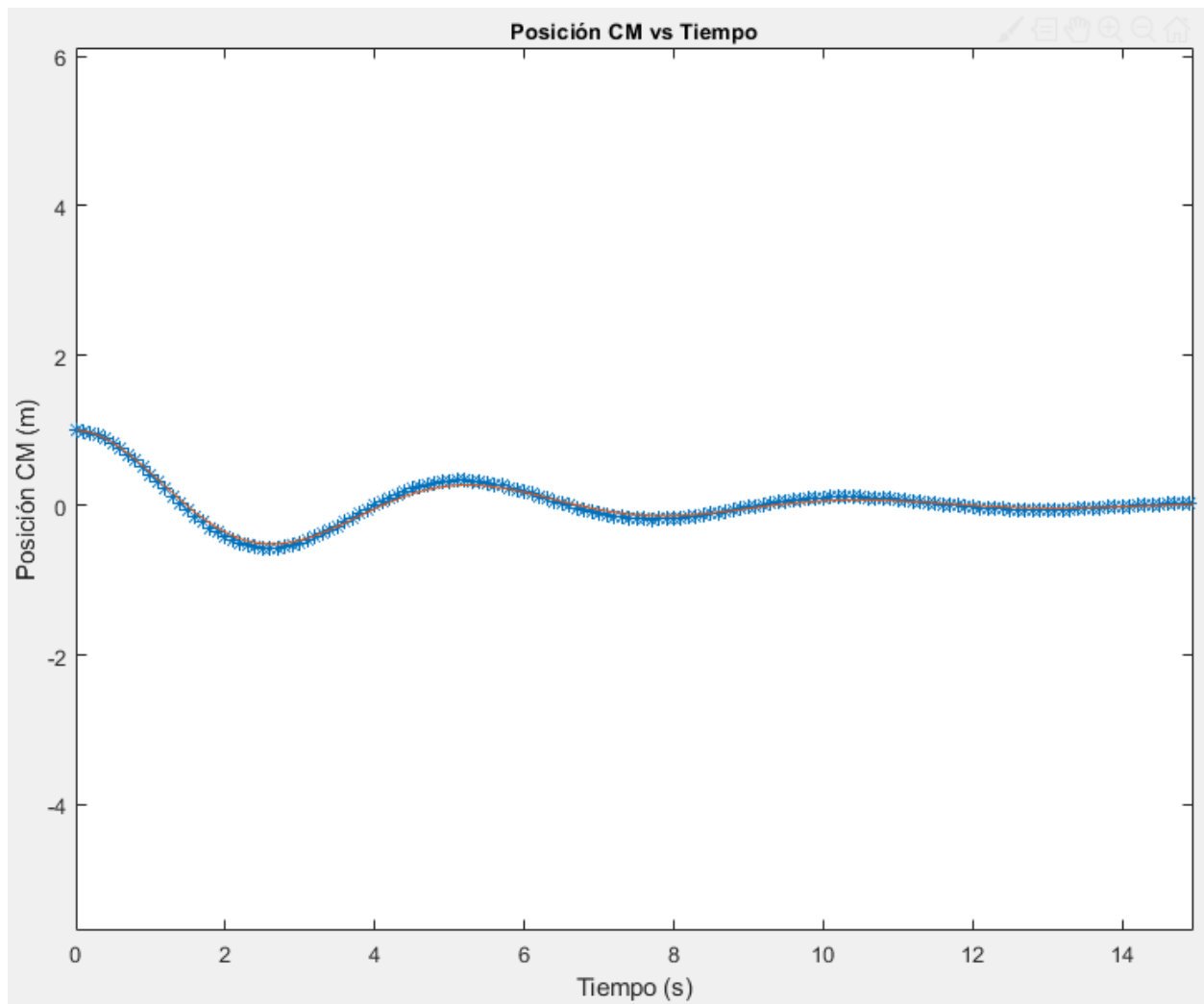


Figura 19: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

El código en MATLAB de este método numérico esta adjuntado en el **ANEXO 4**.

Método de la aceleración promedio

Se resolverá la ecuación [32] teniendo como asunción principal que la aceleración del bloque es

el promedio de la aceleración en el tiempo “i” y en el tiempo “i+1”.

La figura 20 muestra el gráfico de aceleración versus tiempo que se toma como asunción.

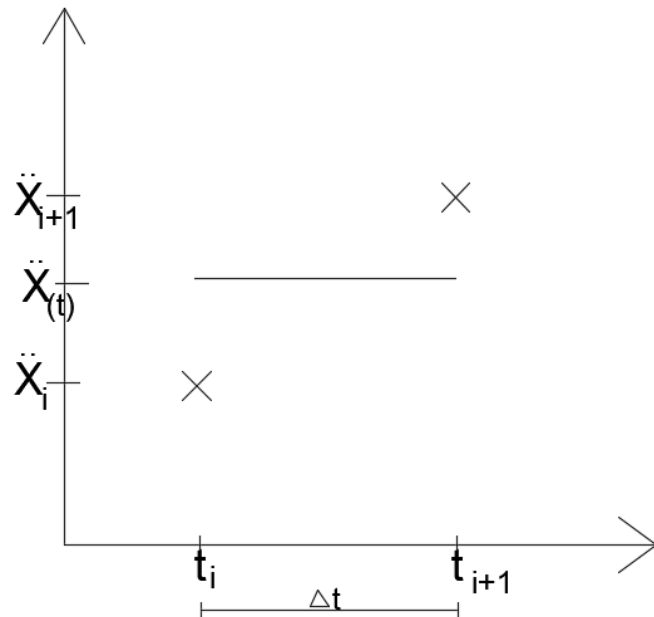


Figura 20: Aceleración versus Tiempo del bloque

De la figura 20 se puede conocer las siguientes relaciones:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad [46]$$

$$\ddot{X} = \frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{2} \quad [47]$$

Integramos la ecuación [14] para hallar la velocidad y la posición del centro de masa del bloque

$$\dot{X} = \left(\frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{2} \right) t + \dot{X}_i \quad [48]$$

$$X = \left(\frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{4} \right) t^2 + \dot{X}_i t + X_i \quad [49]$$

Las condiciones iniciales del problema son las siguientes

$$X_o = 1 \quad [50]$$

$$\dot{X}_o = 0 \quad [51]$$

Reemplazo [50] y [51] en la ecuación [32] para hallar la aceleración inicial en $i=0$

$$\ddot{X}_0 = \frac{-KX_0 - C\dot{X}_0}{m} = -\frac{K}{m} \quad [52]$$

En un tiempo $t = \Delta t$ y cuando $i=0$ e $i+1=1$, se reemplaza [50], [51] y [52] en las ecuaciones [48] y [49]

$$X_{(\Delta t)} = X_{i+1} = X_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + \ddot{X}_0}{4} \right) t^2 + \dot{X}_0 t + X_0$$

$$X_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{4} \right) \Delta t^2 + 1 \quad [53]$$

$$\dot{X}_{(\Delta t)} = \dot{X}_{i+1} = \dot{X}_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{2} \right) \Delta t \quad [54]$$

Para el tiempo $t = \Delta t$, la ecuación [32] se modifica a la siguiente

$$m\ddot{X}_1 + KX_1 + C\dot{X}_1 = 0 \quad [55]$$

Reemplazo [53] Y [54] en [55] y se despeja la ecuación para \ddot{X}_1

$$m\ddot{X}_1 + K \left(\left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{4} \right) \Delta t^2 + 1 \right) + C \left(\left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{2} \right) \Delta t \right) = 0$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{K(K\Delta t^2 + 2C\Delta t - 4m)}{m(K\Delta t^2 + 2C\Delta t + 4m)} \quad [56]$$

Reemplazo [56] en la ecuación [54] y se obtiene lo siguiente

$$\dot{X}_1 = \left(\frac{K(K\Delta t^2 + 2C\Delta t - 4m)}{2m(K\Delta t^2 + 2C\Delta t + 4m)} - \frac{K}{2m} \right) \Delta t \quad [57]$$

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- Salto en el tiempo $(\Delta t) = 0.1 \text{ segundos}$.

La duración del movimiento será de 15 segundos. De esta manera se obtendrá 150 puntos y se observará la estabilidad del método en largas duraciones.

A continuación, la figura 22, muestra un grafico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 50 segundos. La línea roja representa la

ecuación [32], las cuales podrían ser cualquiera de las ecuaciones [33], [34] o [35]. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración promedio.

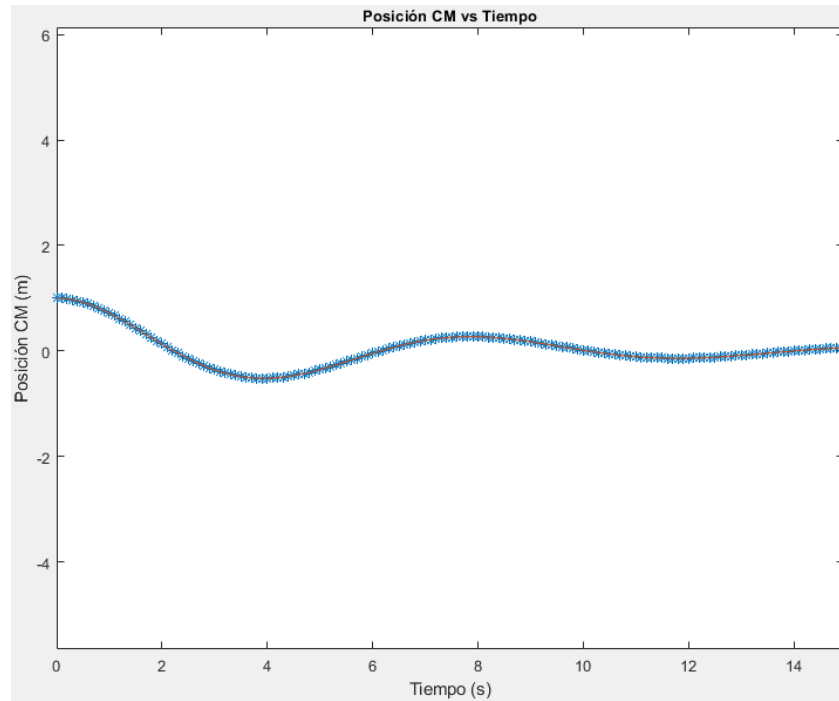


Figura 21: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

El código en MATLAB de este método numérico se adjunta en el **ANEXO 5**.

Método de la aceleración lineal

Se resolverá la ecuación [32] teniendo como asunción principal que la aceleración del bloque es el promedio de la aceleración en el tiempo “i” y en el tiempo “i+1”.

La figura 22 muestra el grafico de aceleración versus tiempo que se toma como asunción.

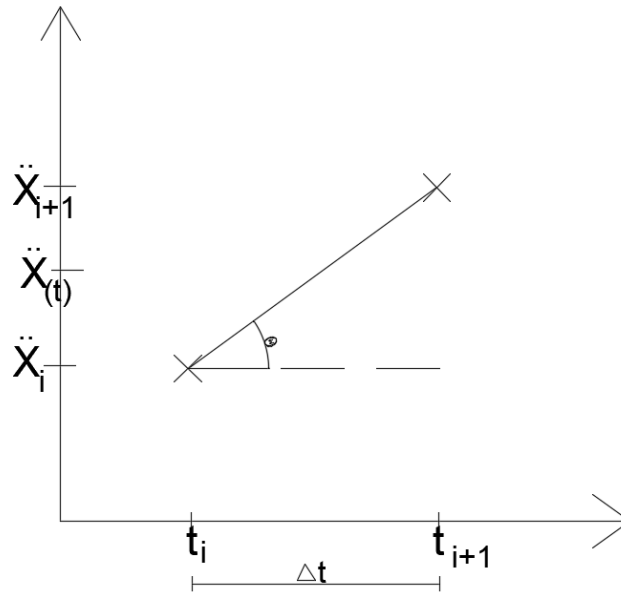


Figura 22: Aceleración versus Tiempo del bloque

De la figura 22 se puede conocer las siguientes relaciones:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad [58]$$

$$\ddot{X} = \ddot{X}_i + \frac{t}{\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) \quad [59]$$

Integramos la ecuación [59] para hallar la velocidad y posición

$$\dot{X} = \ddot{X}_i t + \frac{t^2}{2\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) + \dot{X}_i \quad [60]$$

$$X = \frac{\ddot{X}_i t^2}{2} + \frac{t^3}{6\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) + \dot{X}_i t + X_i \quad [61]$$

Las condiciones iniciales del problema son las siguientes

$$X_o = 1 \quad [62]$$

$$\dot{X}_o = 0 \quad [63]$$

Reemplazo [62] y [63] en la ecuación [32] para hallar la aceleración inicial en $i=0$

$$\ddot{X}_o = \frac{-KX_o - C\dot{X}_o}{m} = -\frac{K}{m} \quad [64]$$

En un tiempo $t = \Delta t$ y cuando $i=0$ e $i+1=1$, se reemplaza [29], [30] y [31] en las ecuaciones [27] y [28]

$$\dot{X}_{\Delta t} = \dot{X}_1 = \ddot{X}_o \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t} (\ddot{X}_1 - \ddot{X}_o) + \dot{X}_o$$

$$\dot{X}_{\Delta t} = \dot{X}_1 = -\frac{K}{m}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right) \quad [65]$$

$$X_{\Delta t} = X_1 = \frac{\dot{X}_0\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t}(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_0) + \dot{X}_0\Delta t + X_0$$

$$X_{\Delta t} = X_1 = \frac{-\frac{K}{m}\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right) + 1 \quad [66]$$

Para el tiempo $t = \Delta t$, la ecuación [32] se modifica a la siguiente

$$m\ddot{X}_1 + C\dot{X}_1 + KX_1 = 0 \quad [67]$$

Reemplazo [65] y [66] en [67] y se despeja la ecuación para \ddot{X}_1

$$m\ddot{X}_1 + C\left(-\frac{K}{m}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right)\right) + K\left(\frac{-\frac{K}{m}\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right) + 1\right) = 0$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{K(2K\Delta t^2 + 3C\Delta t - 6m)}{m(K\Delta t^2 + 3C\Delta t + 6m)} \quad [68]$$

Reemplazo [68] en la ecuación [65] y se obtiene lo siguiente

$$\dot{X}_{\Delta t} = \dot{X}_1 = \frac{K\Delta t(K\Delta t^2 - 12m)}{2m(K\Delta t^2 + 3C\Delta t + 6m)} \quad [69]$$

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- Salto en el tiempo $(\Delta t) = 0.1 \text{ segundos}$.

La duración del movimiento será de 50 segundos. De esta manera se obtendrá 500 puntos y se observará la estabilidad del método ante largas duraciones.

A continuación, la figura 14, muestra un grafico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 50 segundos. La línea roja representa la ecuación [2], la cual es la respuesta analítica conocida. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración lineal.

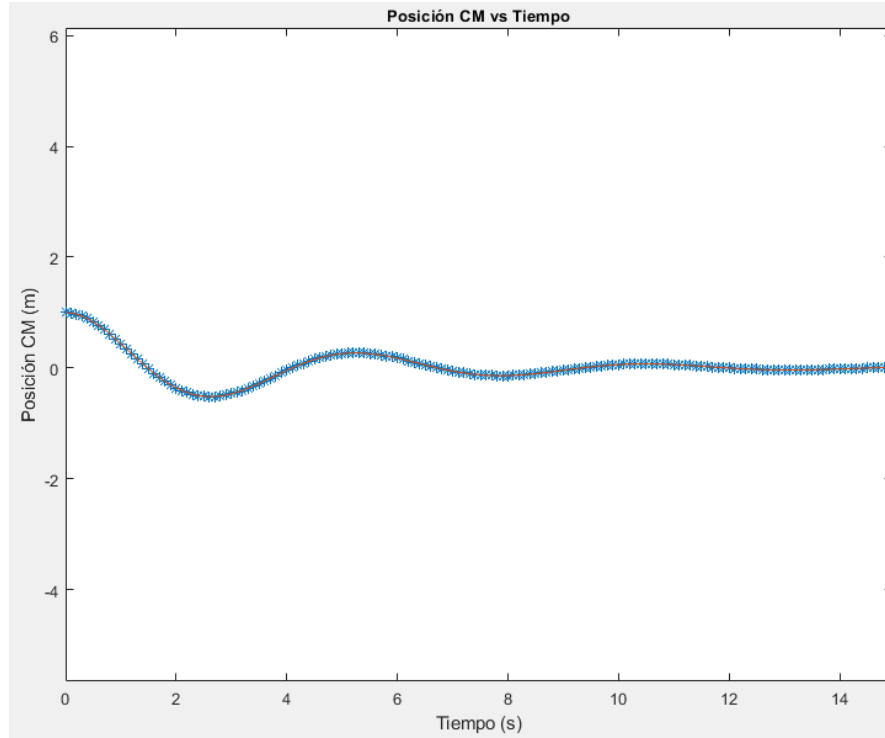


Figura 23: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

El código en MATLAB de este método numérico está adjuntado en el **ANEXO 6**.

Análisis numérico de respuesta sísmica de sistema visco elástico amortiguado forzado de 1 grado de libertad.

A continuación, se procederá a desarrollar la respuesta sísmica de un sistema visco elástico amortiguado forzado de 1 grado de libertad. En la figura 24 se observa el problema a resolver utilizando diferentes métodos numéricos:

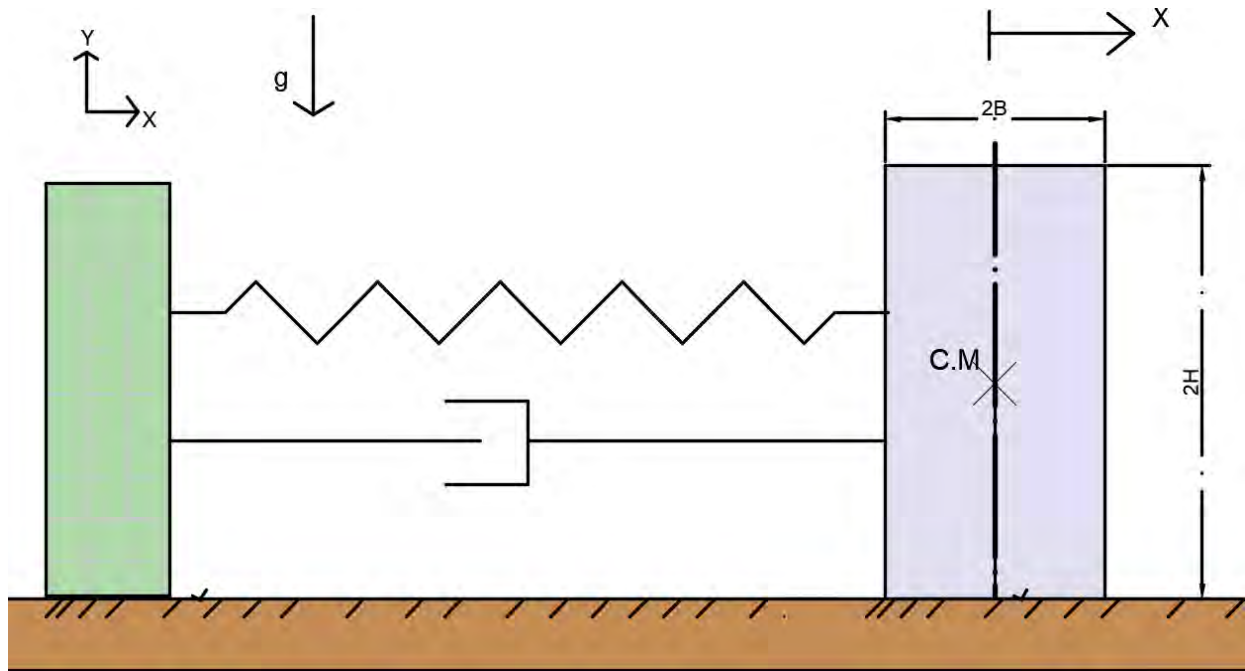


Figura 24: Problema a resolver

Se desplazará un metro el bloque del punto de equilibrio y se tendrá el siguiente caso inicial:

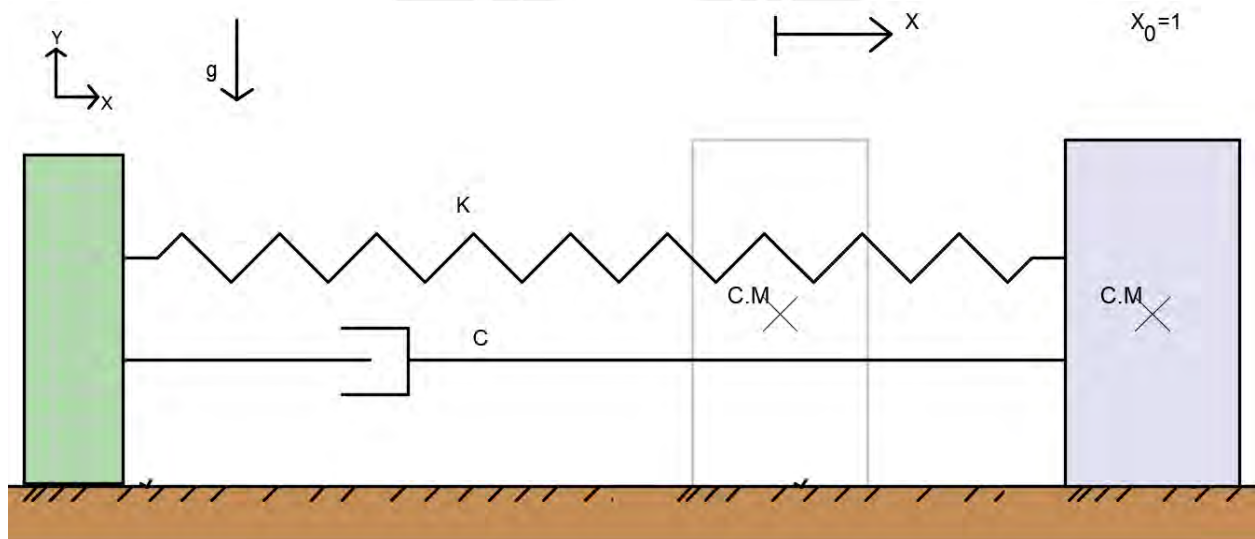


Figura 25: Muestra el bloque desplazado

Se analizará el equilibrio dinámico del bloque en un *tiempo = t segundos* y se obtendrá el DCL y DC del bloque que se observa en figura 26.

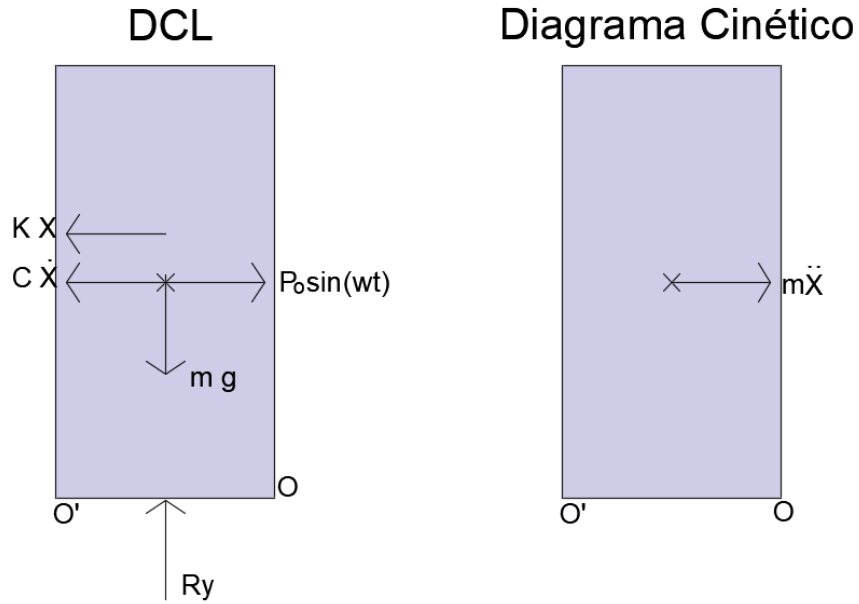


Figura 26: DCL y DC del bloque en movimiento

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje X, se obtiene la siguiente ecuación dinámica:

$$\sum F_X = ma_x$$

$$m\ddot{X} + KX + C\dot{X} = P_0 \sin(\omega't) \quad [70]$$

La solución conocida de la ecuación diferencial [70] es la siguiente:

$$X = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) + D \sin(\omega't + \delta') \quad [71]$$

Donde

$$\omega_o^2 = \frac{K}{m} \quad [72]$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad [73]$$

$$D = \frac{\frac{P_o}{m}}{\sqrt{(\omega^2_o - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}} \quad [74]$$

$$\delta' = \tan^{-1} \frac{2\beta\omega'}{\omega^2_o - \omega'^2} \quad [75]$$

Método de la aceleración angular constante

Se resolverá la ecuación [70] utilizando métodos numéricos asumiendo que la aceleración del bloque es constante durante un diferencial de tiempo.

La aceleración del bloque durante un intervalo de tiempo de acuerdo a la asunción realizada para resolver la ecuación [70] se muestra en la Figura 27.

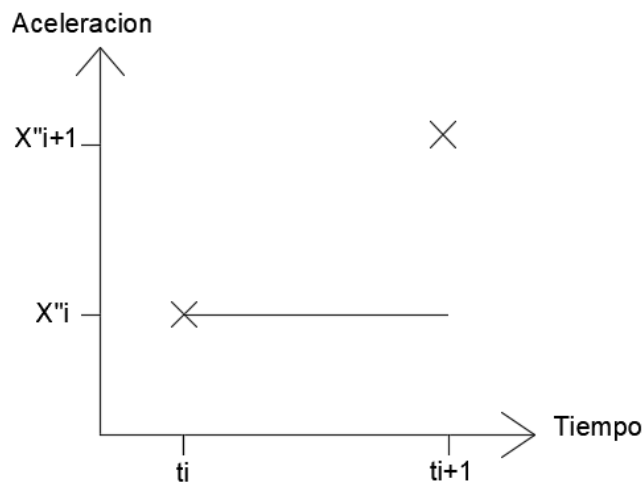


Figura 27: Aceleración versus Tiempo del bloque.

A pesar de que la aceleración en el tiempo t_i es diferente a la aceleración en el tiempo t_{i+1} , se asumirá que en ese intervalo de tiempo:

$$\ddot{X}_{i+1} = \ddot{X}_i \quad [71]$$

Integrando la ecuación [71] y resolviendo para un $t = \Delta t$ se obtiene lo siguiente:

$$\dot{X}_{i+1} = \ddot{X}_i \Delta t + \dot{X}_i \quad [72]$$

Integrando la ecuación [71], se obtiene lo siguiente:

$$X_{i+1} = X_i + \dot{X}_i \Delta t + \frac{\ddot{X}_i \Delta t^2}{2} \quad [73]$$

Cuando $i=0$ se conoce los siguientes parámetros:

$$X_0 = 1 \quad [74]$$

$$\dot{X}_0 = 0 \quad [75]$$

Para hallar la aceleración se reemplazará [74] y [75] en la ecuación [70] y se obtiene que:

$$\ddot{X}_0 = \frac{P_o \sin(\omega' t) - KX_0 - C\dot{X}_0}{m} = -\frac{K}{m} \quad [76]$$

Asimismo, para un $t = \Delta t$ entonces $i=1$.

Para hallar los parámetros en $i+1$ como la velocidad y posición se reemplazará los parámetros [74], [75] y [76] en las ecuaciones [72] y [73].

$$X_{i+1} = X_1 = 1 + \frac{-\frac{K}{m} \Delta t^2}{2} \quad [77]$$

$$\dot{X}_{i+1} = \dot{X}_1 = \dot{X}_0 \Delta t + 0 = -\frac{K}{m} \Delta t \quad [78]$$

Además para hallar la aceleración en $i+1$, se reemplazará la posición $i+1$ [77] y la velocidad $i+1$ [78] en la ecuación [70].

$$m\ddot{X}_{i+1} + C\dot{X}_{i+1} + KX_{i+1} = P_o \sin(\omega' t_{i+1})$$

$$\ddot{X}_{i+1} = \frac{P_o \sin(\omega' t_{i+1}) - KX_{i+1} - C\dot{X}_{i+1}}{m} \quad [79]$$

Cuando $i+1=1$, entonces la aceleración del centro de masa es la siguiente

$$\ddot{X}_1 = \frac{P_o \sin(\omega' t) - KX_1 - C\dot{X}_1}{m}$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{P_o \sin(\omega' t_{i+1}) - K \left(1 + \frac{-\frac{K}{m} \Delta t^2}{2} \right) - C \left(-\frac{K}{m} \Delta t \right)}{m} \quad [80]$$

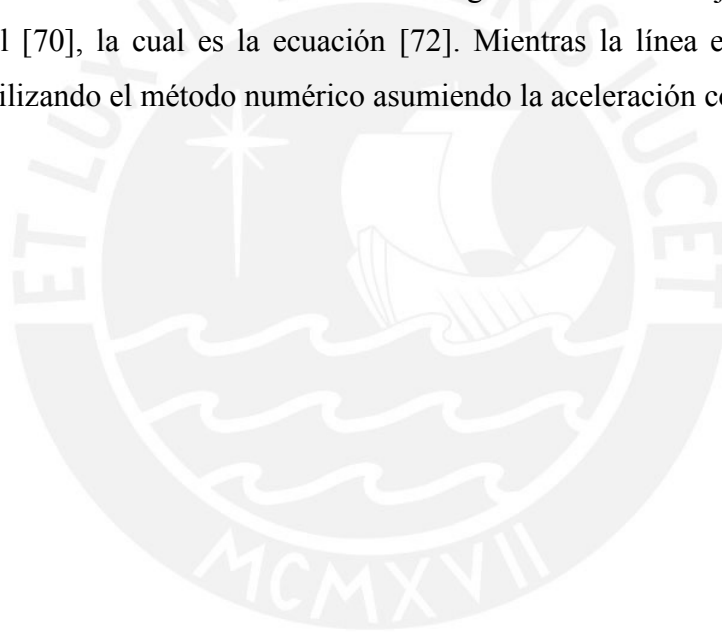
La precisión de este procedimiento para hallar los parámetros de la aceleración, velocidad y el tiempo dependerán del tamaño del salto en el tiempo (Δt). Mientras menor es el salto, mayor es la precisión.

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- $c = 1 \frac{Ns}{m}$
- Salto en el tiempo $(\Delta t) = 0.2 \text{ segundos}$.
- Coeficiente de Fuerza $(P_0) = 5 \text{ N}$
- Frecuencia de la fuerza $(\omega') = 3 \text{ Hz}$

La duración del movimiento será de 15 segundos. De esta manera se obtendrá 100 puntos y se observara la estabilidad del método en largas duraciones.

A continuación, la figura 28, muestra un grafico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 20 segundos. La línea roja es la solución de la ecuación diferencial [70], la cual es la ecuación [72]. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración constante.



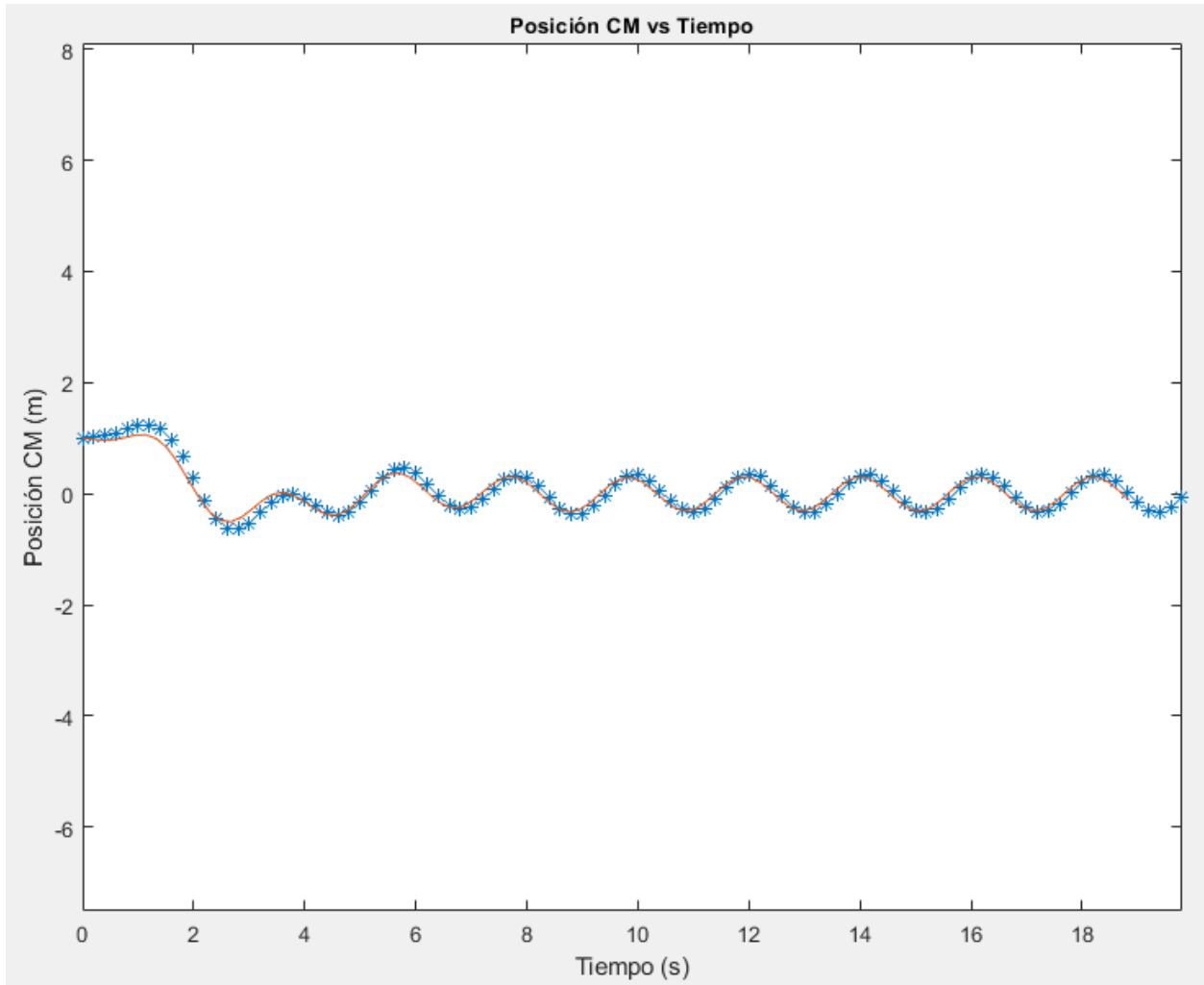


Figura 28: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

El código en MATLAB de este método numérico está adjuntado en el **ANEXO 7**.

Método de la aceleración promedio

Se resolverá la ecuación [70] teniendo como asunción principal que la aceleración del bloque es el promedio de la aceleración en el tiempo “ i ” y en el tiempo “ $i+1$ ”.

La figura 29 muestra el gráfico de aceleración versus tiempo que se toma como asunción.

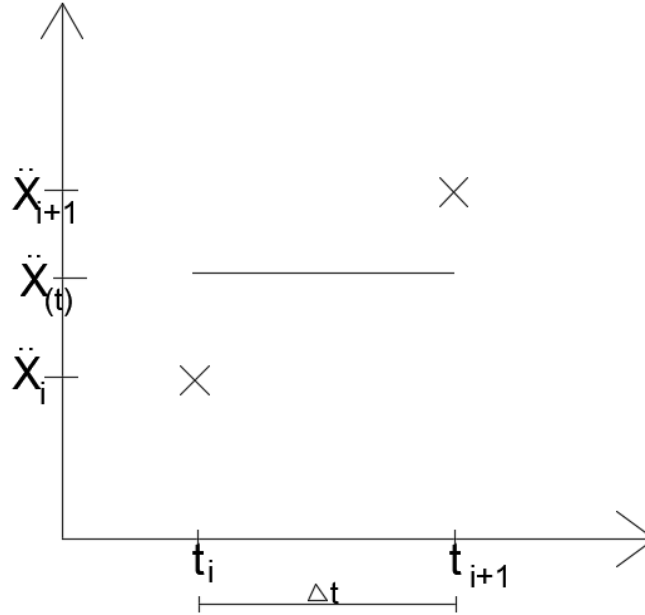


Figura 29: Aceleración versus Tiempo del bloque

De la figura 29 se puede conocer las siguientes relaciones:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad [81]$$

$$\ddot{X} = \frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{2} \quad [82]$$

Integramos la ecuación [82] para hallar la velocidad y la posición del centro de masa del bloque

$$\dot{X} = \left(\frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{2} \right) t + \dot{X}_i \quad [83]$$

$$X = \left(\frac{\ddot{X}_{i+1} + \ddot{X}_i}{4} \right) t^2 + \dot{X}_i t + X_i \quad [84]$$

Las condiciones iniciales del problema son las siguientes

$$X_o = 1 \quad [85]$$

$$\dot{X}_o = 0 \quad [86]$$

Reemplazo [85] y [86] en la ecuación [70] para hallar la aceleración inicial en $i=0$

$$\ddot{X}_o = \frac{P_o \sin(\omega' t_o) - K X_o - C \dot{X}_o}{m} = -\frac{K}{m} \quad [87]$$

En un tiempo $t = \Delta t$ y cuando $i=0$ e $i+1=1$, se reemplaza [85], [86] y [87] en las ecuaciones [83] y [84]

$$X_{(\Delta t)} = X_{i+1} = X_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + \ddot{X}_0}{4} \right) t^2 + \dot{X}_0 t + X_0$$

$$X_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{4} \right) \Delta t^2 + 1 \quad [88]$$

$$\dot{X}_{(\Delta t)} = \dot{X}_{i+1} = \dot{X}_1 = \left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{2} \right) \Delta t \quad [89]$$

Para el tiempo $t = \Delta t$, la ecuación [70] se modifica a la siguiente

$$m\ddot{X}_1 + KX_1 + C\dot{X}_1 = P_1 \sin(\omega' t_{\Delta t}) \quad [90]$$

Reemplazo [88] y [89] en [70] y se despeja la ecuación para \ddot{X}_1

$$m\ddot{X}_1 + K \left(\left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{4} \right) \Delta t^2 + 1 \right) + C \left(\left(\frac{\ddot{X}_1 + -\frac{K}{m}}{2} \right) \Delta t \right) = P_1 \sin(\omega' t_{\Delta t})$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{K(K\Delta t^2 + 2C\Delta t - 4m) + 4mP_1 \sin(\omega' t_{\Delta t})}{m(K\Delta t^2 + 2C\Delta t + 4m)} \quad [91]$$

Reemplazo [91] en las ecuaciones [89] y [88] y se obtiene lo siguiente

$$\dot{X}_1 = \left(\frac{K(K\Delta t^2 + 2C\Delta t - 4m) + 4mP_1 \sin(\omega' t_{\Delta t})}{2m(K\Delta t^2 + 2C\Delta t + 4m)} - \frac{K}{2m} \right) \Delta t \quad [92]$$

$$X_1 = \left(\frac{K(K\Delta t^2 + 2C\Delta t - 4m) + 4mP_1 \sin(\omega' t_{\Delta t})}{4m(K\Delta t^2 + 2C\Delta t + 4m)} - \frac{K}{4m} \right) \Delta t^2 + 1 \quad [93]$$

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- Salto en el tiempo $(\Delta t) = 0.2 \text{ segundos}$.
- Coeficiente de Fuerza $(P_0) = 5 \text{ N}$
- Frecuencia de la fuerza $(\omega') = 3 \text{ Hz}$

La duración del movimiento será de 15 segundos. De esta manera se obtendrá 150 puntos y se observará la estabilidad del método en largas duraciones.

A continuación, la figura 30, muestra un gráfico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 20 segundos. La línea roja representa la

solución de la ecuación [70], la cual es la ecuación [71]. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración promedio.

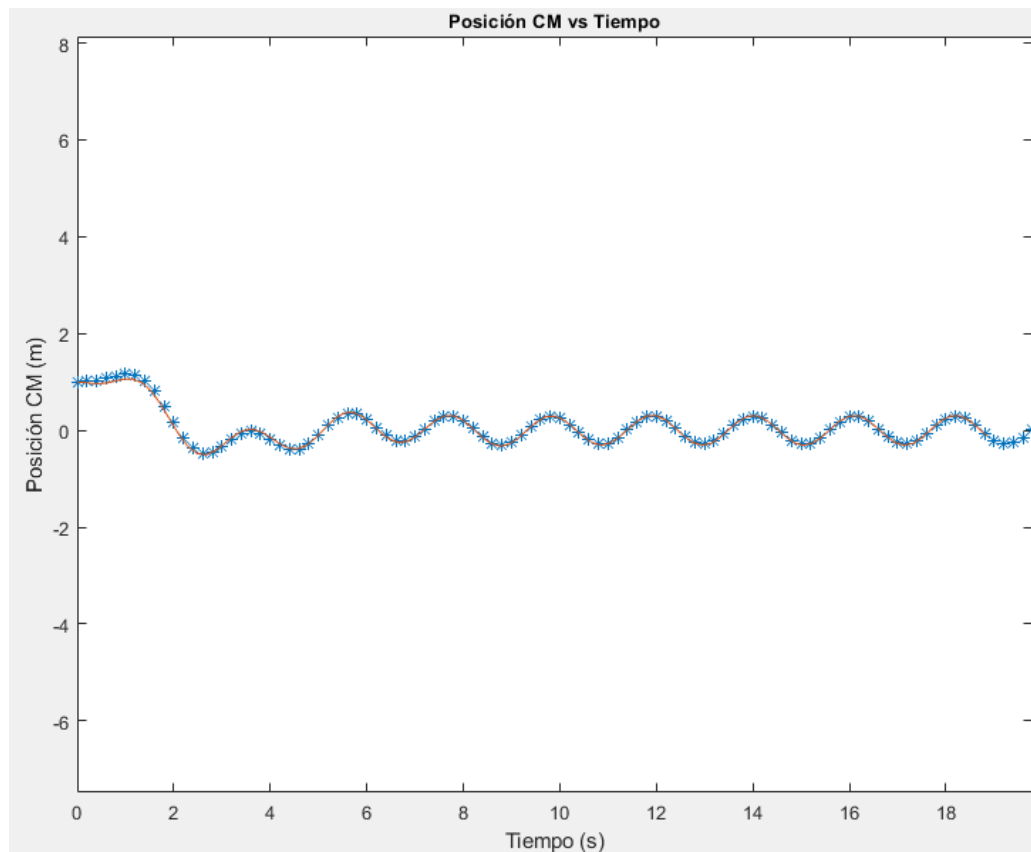


Figura 30: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

El código en MATLAB de este método numérico se adjunta en el **ANEXO 8**.

Método de la aceleración lineal

Se resolverá la ecuación [70] teniendo como asunción principal que la aceleración del bloque es el promedio de la aceleración en el tiempo “i” y en el tiempo “i+1”.

La figura 31 muestra el gráfico de aceleración versus tiempo que se toma como asunción.

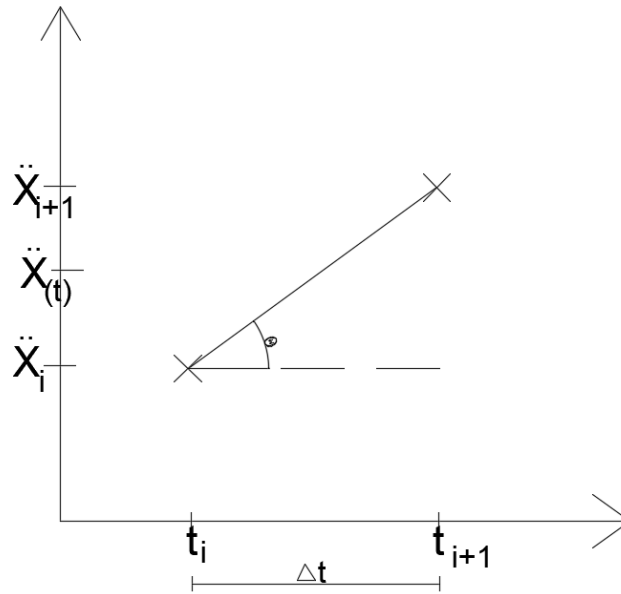


Figura 31: Aceleración versus Tiempo del bloque

De la figura 31 se puede conocer las siguientes relaciones:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad [58]$$

$$\ddot{X} = \ddot{X}_i + \frac{t}{\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) \quad [59]$$

Integramos la ecuación [59] para hallar la velocidad y posición

$$\dot{X} = \ddot{X}_i t + \frac{t^2}{2\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) + \dot{X}_i \quad [60]$$

$$X = \frac{\ddot{X}_i t^2}{2} + \frac{t^3}{6\Delta t} (\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i) + \dot{X}_i t + X_i \quad [61]$$

Las condiciones iniciales del problema son las siguientes

$$X_o = 1 \quad [62]$$

$$\dot{X}_o = 0 \quad [63]$$

Reemplazo [62] y [63] en la ecuación [32] para hallar la aceleración inicial en $i=0$

$$\ddot{X}_o = \frac{-KX_o - C\dot{X}_o}{m} = -\frac{K}{m} \quad [64]$$

En un tiempo $t = \Delta t$ y cuando $i=0$ e $i+1=1$, se reemplaza [29], [30] y [31] en las ecuaciones [27] y [28]

$$\dot{X}_{\Delta t} = \dot{X}_1 = \dot{X}_o \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t} (\ddot{X}_1 - \ddot{X}_o) + \dot{X}_o$$

$$\dot{X}_{\Delta t} = \dot{X}_1 = -\frac{K}{m}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right) \quad [65]$$

$$X_{\Delta t} = X_1 = \frac{\dot{X}_0\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t}(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_0) + \dot{X}_0\Delta t + X_0$$

$$X_{\Delta t} = X_1 = \frac{-\frac{K}{m}\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right) + 1 \quad [66]$$

Para el tiempo $t = \Delta t$, la ecuación [32] se modifica a la siguiente

$$m\ddot{X}_1 + C\dot{X}_1 + KX_1 = 0 \quad [67]$$

Reemplazo [65] y [66] en [67] y se despeja la ecuación para \ddot{X}_1

$$m\ddot{X}_1 + C\left(-\frac{K}{m}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right)\right) + K\left(\frac{-\frac{K}{m}\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6\Delta t}\left(\ddot{X}_1 + \frac{K}{m}\right) + 1\right) = 0$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{K(2K\Delta t^2 + 3C\Delta t - 6m)}{m(K\Delta t^2 + 3C\Delta t + 6m)} \quad [68]$$

Reemplazo [68] en la ecuación [65] y se obtiene lo siguiente

$$\dot{X}_{\Delta t} = \dot{X}_1 = \frac{K\Delta t(K\Delta t^2 - 12m)}{2m(K\Delta t^2 + 3C\Delta t + 6m)} \quad [69]$$

Se resuelve el ejercicio mencionado teniendo las siguientes consideraciones

- $k = 3 \frac{N}{m}$,
- $m = 2 \text{ kg}$
- Salto en el tiempo $(\Delta t) = 0.2 \text{ segundos}$.
- Coeficiente de Fuerza (Po) = 5 N
- Frecuencia de la fuerza $(\omega') = 3 \text{ Hz}$

La duración del movimiento será de 15 segundos. De esta manera se obtendrá 150 puntos y se observara la estabilidad del método en largas duraciones.

A continuación, la figura 30, muestra un grafico de la posición del centro de masa del bloque versus tiempo para la duración del movimiento de 20 segundos. La línea roja representa la solución de la ecuación [70], la cual es la ecuación [71]. Mientras la línea en azul, representa la respuesta hallada utilizando el método numérico asumiendo la aceleración promedio.

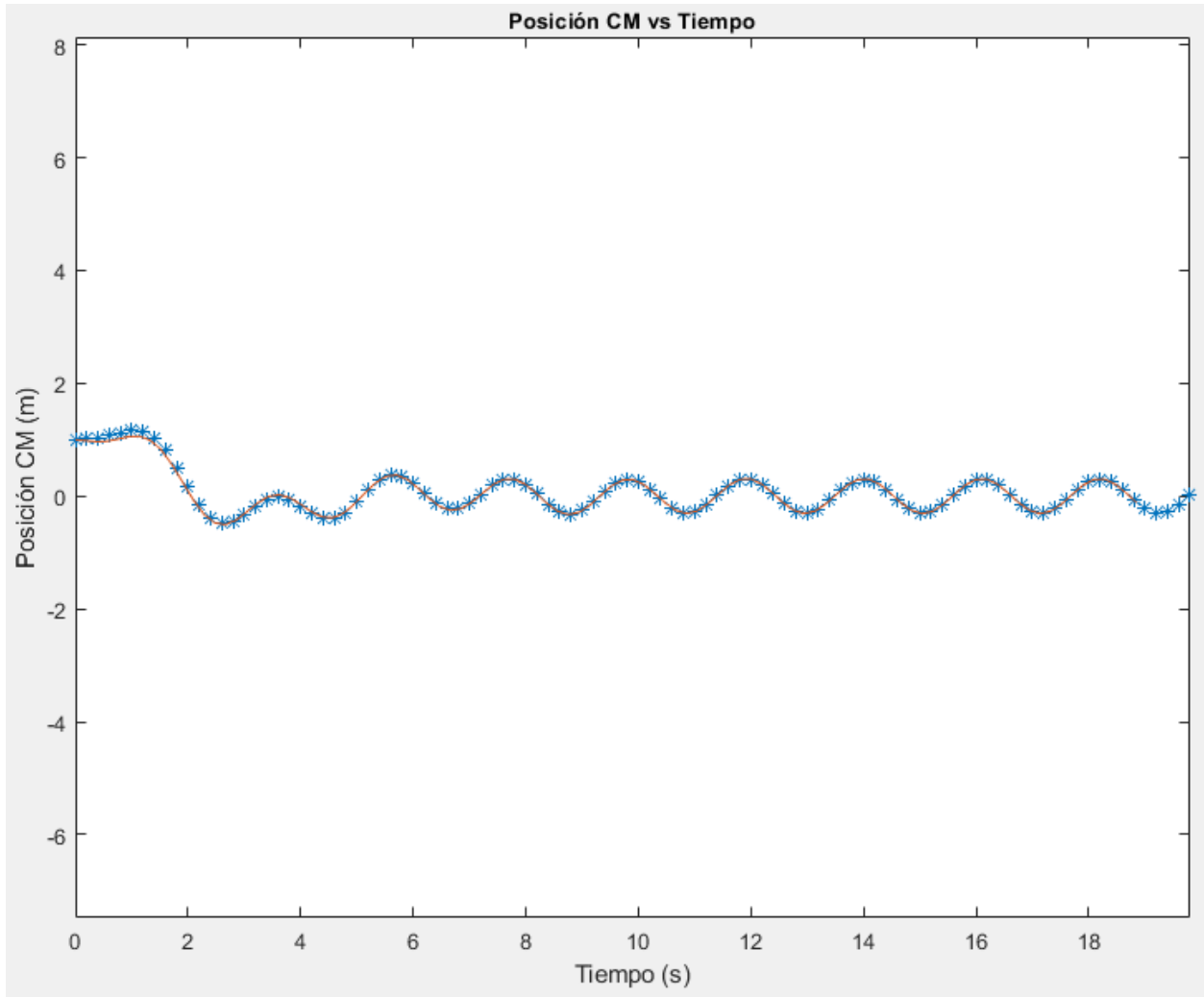


Figura 32: Posición versus Tiempo de la respuesta analítica y numérica

El código en MATLAB de este método numérico se adjunta en el **ANEXO 9**.

Análisis de estabilidad de columnas en traslación ante excitaciones en su base

Se analizará un bloque rígido que se encuentra simplemente apoyado sobre el suelo como se muestra en la 33. Las dimensiones del bloque son $2H$ (altura) y $2B$ (base), y con dimensiones características R (radio de giro) y α (ángulo de esbeltez). El suelo se caracteriza por tener un coeficiente de rozamiento estático lo suficientemente alto para prevenir el deslizamiento entre el bloque rígido y el suelo.

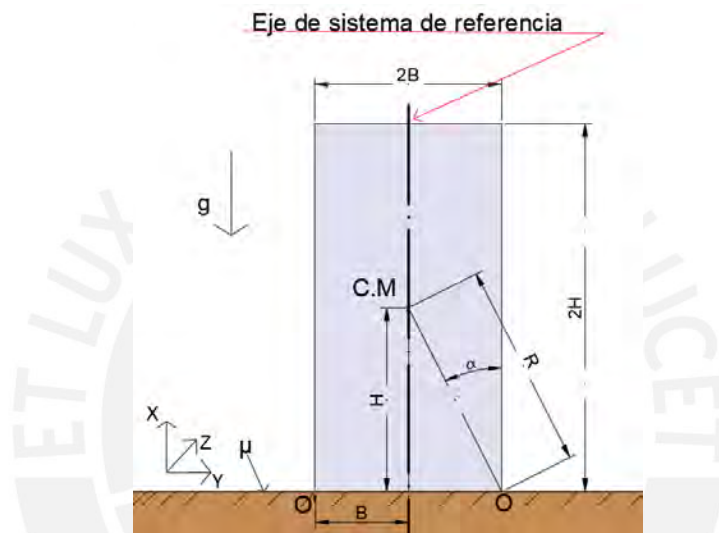


Figura 33: Bloque rígido simplemente apoyado sobre el suelo

De la Figura 33 se conoce

$$R = \sqrt{h^2 + b^2} \quad [70]$$

R = Radio de giro del bloque rígido

h = Media-altura del bloque rígido

b =Media-base del bloque rígido

Y,

$$\tan \alpha = \frac{h}{b} \quad [71]$$

α =Ángulo de esbeltez del bloque rígido

h = Media-altura del bloque rígido

b =Media-base del bloque rígido

El suelo experimentara un movimiento sinusoidal conocido respecto del sistema de referencia que se observa en la Figura 33. Antes de que ocurra el movimiento del suelo, se conoce que el bloque se encuentra en reposo. Durante el movimiento del suelo, el bloque tenderá a rotar respecto de uno de sus vértices (sea O ó sino O'), si solo si, se da el caso que se supera el estado de no rotación.

En la Figura 34 se observa el estado inicial del bloque rígido previo al movimiento del suelo y el estado intermedio en un tiempo “ t ” segundos de iniciado el movimiento del suelo con el bloque en traslación pura.

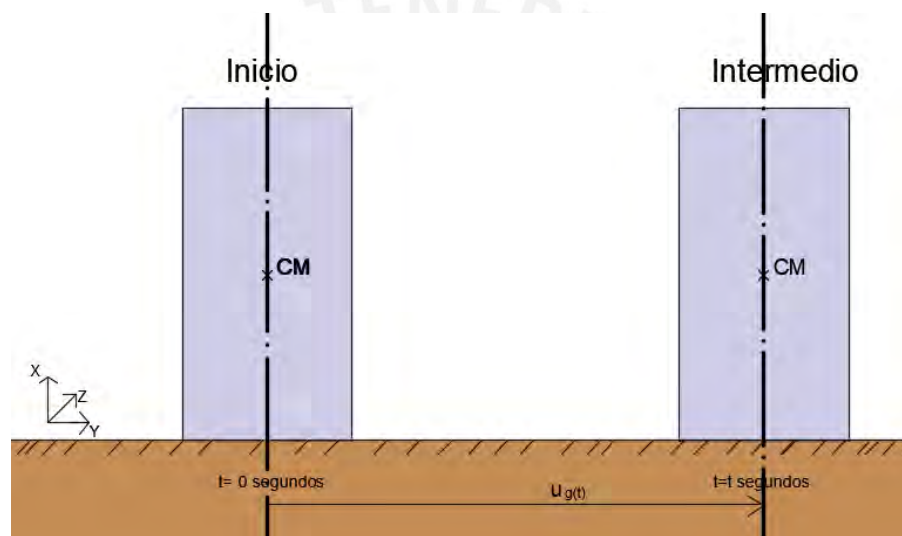


Figura 34: El bloque rígido en movimiento de traslación pura

La Figura 35 muestra el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) y el Diagrama Cinético del bloque rígido cuando se encuentra en la posición intermedia de la Figura 34.

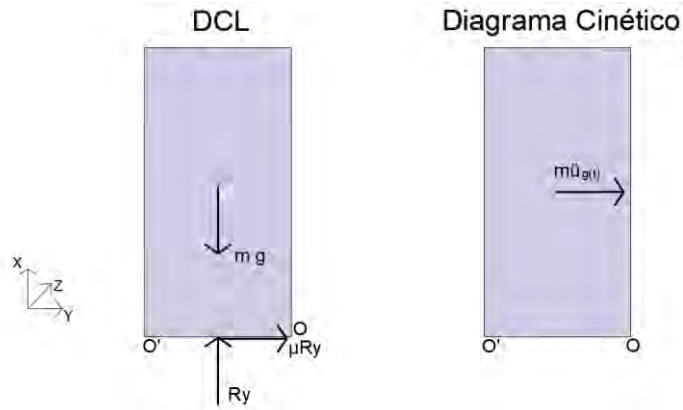


Figura 35: DCL y DC del bloque rígido en traslación pura

Se procede a realizar el equilibrio dinámico respecto del eje X-X,

$$\sum F_x = ma_x$$

$$mg - Ry = 0$$

$$mg = Ry \text{ [72]}$$

Donde,

m=Masa del bloque rígido (kg)

g= Aceleración de la gravedad (9.81 ms^{-2})

Ry=Reacción Normal del suelo sobre el bloque (N)

Y el equilibrio dinámico respecto del eje Y-Y,

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\mu R_y = m \ddot{u}_g(t) \text{ [73]}$$

Donde,

m=Masa del bloque rígido (kg)

\ddot{u}_g = Aceleración del suelo (ms^{-2})

Ry=Reacción Normal del suelo sobre el bloque (N)

μ =Coeficiente de rozamiento estático del suelo

De la ecuación [73] se puede concluir que

$$\ddot{u}_g(t) \leq \frac{\mu R_y}{m} \quad [74]$$

La aceleración del suelo tiene que ser menor que el factor de la ecuación [74] para que no se deslice.

Además, se realiza la sumatoria de torques respecto del punto O:

$$\sum T_o = I_o * \alpha \quad [75]$$

Donde,

I_o =Inercia respecto del punto O

α =Aceleración angular del bloque (rads^{-2})

Dado que el bloque se encuentra en traslación pura, no existe rotación, $\alpha=0$ por lo tanto se obtiene lo siguiente:

$$bmg = hm\ddot{u}_g \quad [76]$$

Donde,

m =Masa del bloque rígido (kg)

\ddot{u}_g = Aceleración del suelo (ms^{-2})

g = Aceleración de la gravedad (ms^{-2})

h = Media Altura del bloque rígido (m)

Existe un segundo caso, donde el bloque no se comporta en traslación pura sino que tiende a rotar respecto de uno de sus esquinas O ó O'.

De la ecuación [76], se puede inferir que se necesita una aceleración,

$$\ddot{u}_g(t) > \frac{b * g}{h} \quad [77]$$

Para que se inicie la rotación. Donde,

g = Aceleración de la gravedad (ms^{-2})

h = Media Altura del bloque rígido (m)

b = Media base del bloque rígido (m)

Cuando la aceleración del suelo supera el factor de la desigualdad en [77], el bloque tendra a rotar respecto de sus esquinas O y O'. En caso suceda la rotación, el Centro de Masa (C.M) tiene una aceleración diferente a la del suelo. Tomando las mismas asunciones realizadas, se desarrolla

la ecuación de movimiento del bloque en caso empiece a rotar de manera horaria respecto a la esquina O como se muestra en la Figura 33.

Análisis de estabilidad de columnas basculantes ante excitaciones en su base

El presente documento desarrolla las ecuaciones del comportamiento dinámico de un bloque rígido sometido a un movimiento de su base.

Se analiza un bloque rígido que se encuentra simplemente apoyado sobre el suelo como se muestra en la Figura 36. Las dimensiones del bloque son $2H$ (altura) y $2B$ (base), y con dimensiones características R (radio de giro) y α (ángulo de esbeltez). El suelo se caracteriza por ser indeformable y por tener un coeficiente de rozamiento estático alto para prevenir el deslizamiento entre el bloque rígido y el suelo.

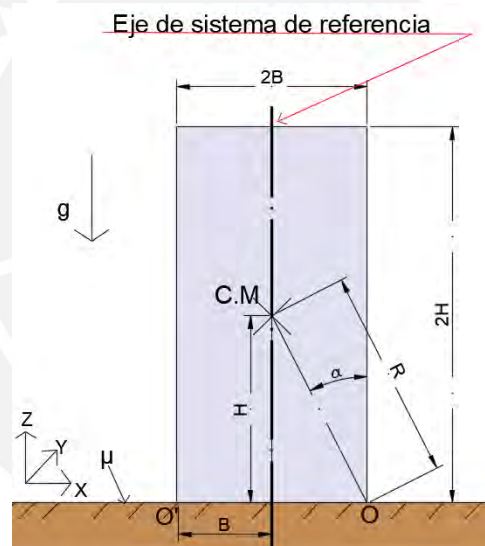


Figura 36: Bloque rígido simplemente apoyado sobre el suelo

La figura 2 muestra el sistema de referencia a utilizar durante el desarrollo de las ecuaciones del movimiento del bloque rígido. Asimismo, se muestra en la figura 37, el vector de posición \bar{r}_A junto a sus coordenadas teniendo en consideración que el giro se mide siempre desde la zona positiva del eje X.

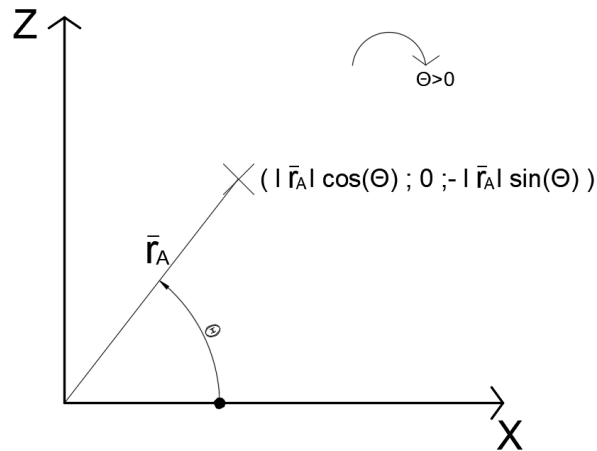


Figura 37: Sistema de referencia para desarrollar las ecuaciones

Donde

θ : Giro medido desde la zona positiva del eje X

\bar{r}_A : Vector de posición del punto A

En la Figura 38 se observa el estado inicial del bloque rígido previo al movimiento del suelo y el estado intermedio en un tiempo “t” segundos de iniciado el movimiento del suelo con el bloque en rotación.

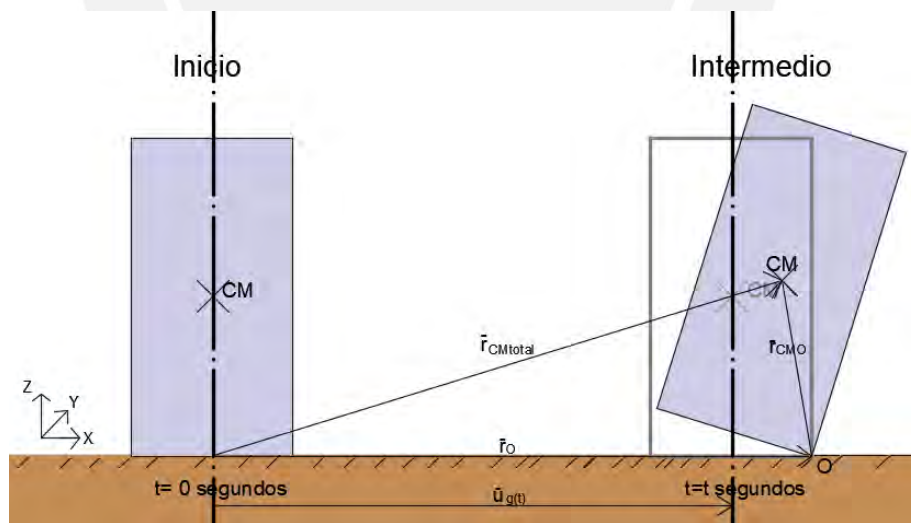


Figura 38: El bloque rígido en movimiento de rotación

La figura 39 muestra el bloque cuando gira respecto a la esquina O. Se coloca el sistema de referencia en la esquina O.

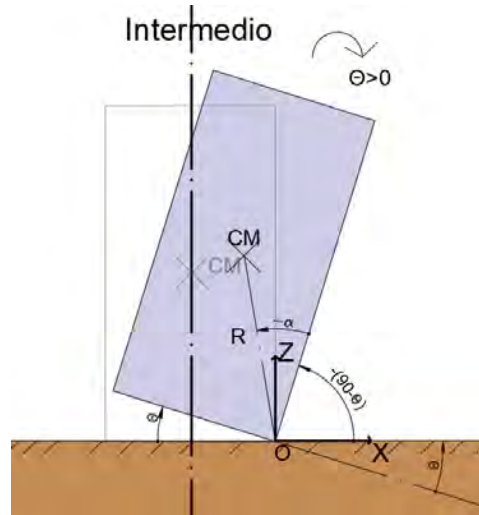


Figura 39: Giro del Bloque respecto de O

De la figura 39 se conoce el vector de posición del centro de masa:

$$\bar{r}_{CMO} = (R * \cos(-(90 - \theta + \alpha)), -R \sin(-(90 - \theta + \alpha))), \quad [78]$$

Donde

\bar{r}_{CMO} : Posición del centro de masa respecto del sistema de referencia en el punto O

Simplificamos los ángulos de la [78] y se obtiene

$$\bar{r}_{CMO} = (-R \sin(\alpha - \theta), 0, R \cos(\alpha - \theta)), \quad [79]$$

Se halla la posición del centro de masa respecto del marco de referencia inercial inicial como se observa en la figura 40

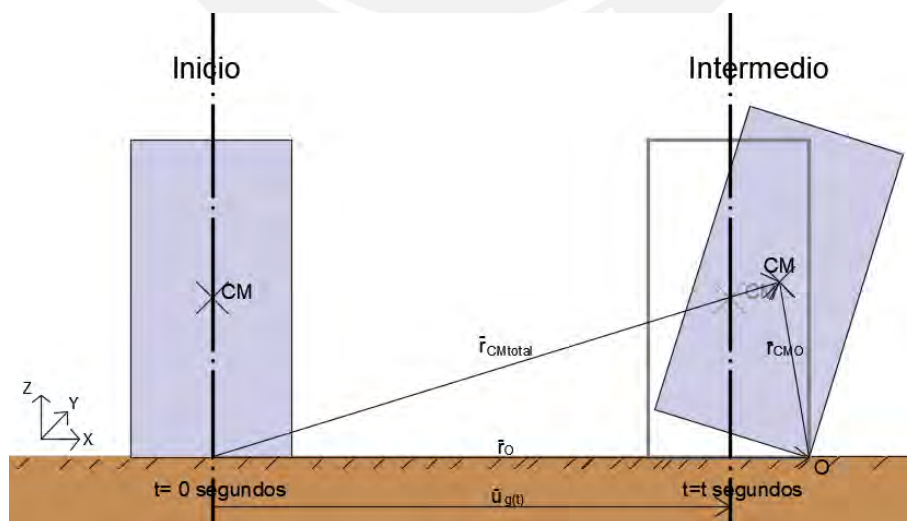


Figura 40: Posición del centro de masa del bloque rígido cuando gira respecto de O

$$\bar{r}_{CMTotal} = \bar{r}_{CMO} + \bar{r}_O \quad [80]$$

Donde

$$\bar{r}_O = (u_{g(t)} + b, 0, 0), \quad [80]$$

\bar{r}_O = Posición del punto O respecto del sistema de referencia inercial inicial

Reemplazando [78] y la [80] en [79]

$$\bar{r}_{CMTotal} = ((-R \sin(\alpha - \theta), 0, R \cos(\alpha - \theta)) + (u_{g(t)} + b), 0, 0), \quad [81]$$

Se deriva la ecuación [81] y se obtiene la velocidad y aceleración total del centro de masa

$$\bar{v}_{CMTotal} = (R \cos(\alpha - \theta) \dot{\theta} + \dot{u}_{g(t)}, 0, R \sin(\alpha - \theta) \dot{\theta}), \quad [82]$$

$$\bar{a}_{CMTotal} = (R \sin(\alpha - \theta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\alpha - \theta) \ddot{\theta} + \ddot{u}_{g(t)}, 0, -R \cos(\alpha - \theta) \dot{\theta}^2 + R \sin(\alpha - \theta) \ddot{\theta}), \quad [83]$$

En la figura 41 se muestra el Diagrama de cuerpo libre (DCL) y el Diagrama Cinético del bloque rígido cuando gira respecto de O.

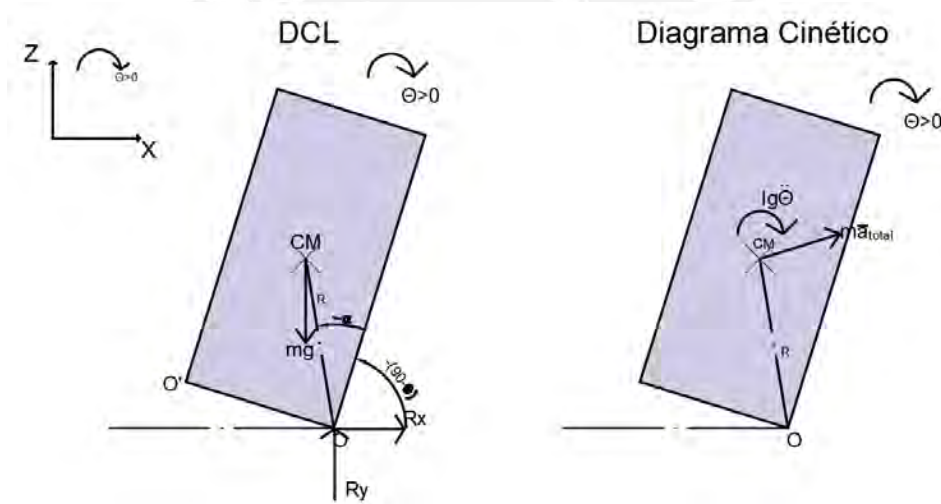


Figura 41: DCL y DC del Bloque rígido cuando gira respecto de O

Se realiza la sumatoria de torques respecto de la esquina O del bloque

$$\sum \bar{T}_O = I \ddot{\theta}$$

$$\bar{r}_{CMO} \times m \bar{g} = I_G \ddot{\theta} + \bar{r}_{CMO} \times m \bar{a}_{total}$$

$$(-R \sin(\alpha - \theta), 0, R \cos(\alpha - \theta)) \times (0, 0, -mg)$$

$$= I_G \ddot{\theta} (0, 1, 0) + (-R \sin(\alpha - \theta), 0, R \cos(\alpha - \theta)) \times m (R \sin(\alpha - \theta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\alpha - \theta) \ddot{\theta} + \ddot{u}_g, 0, -R \cos(\alpha - \theta) \dot{\theta}^2 + R \sin(\alpha - \theta) \ddot{\theta})$$

$$-mgR \sin(\alpha - \theta_{(t)}) = I_O \ddot{\theta}_{(t)} + m \ddot{u}_g(t) R \cos(\alpha - \theta_{(t)}), \quad [84]$$

La figura 42 muestra el bloque cuando gira respecto a la esquina O' . De la misma manera, se colocó el sistema de referencia en el punto O' .

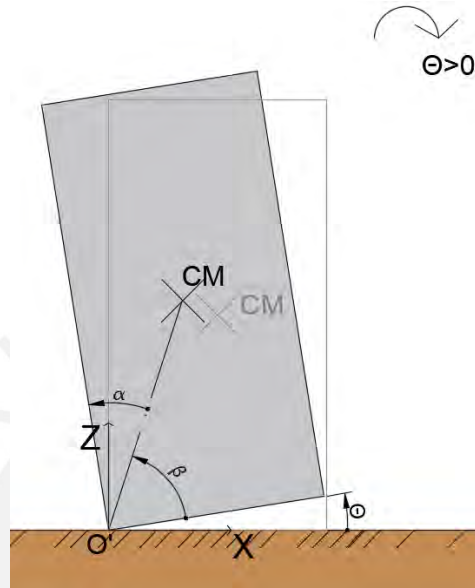


Figura 42: Giro del Bloque respecto de O'

De la Figura 42 se halla el vector de posición del centro de masa:

$$\bar{r}_{CMO'} = (R * \cos(\theta - \beta), -R \sin(\theta - \beta)), \quad [85]$$

Donde

$\bar{r}_{CMO'}$: Posición del centro de masa respecto del sistema de referencia en el punto O

De acuerdo a la figura 42

$$\beta = 90 - \alpha, \quad [86]$$

Por lo tanto reemplazando [86] en [85] y simplificando los ángulos se obtiene

$$\bar{r}_{CMO'} = (R \sin(\alpha + \theta), 0, R \cos(\alpha + \theta)), \quad [87]$$

Se halla la posición del centro de masa respecto del marco de referencia inercial inicial como se observa en la figura 43

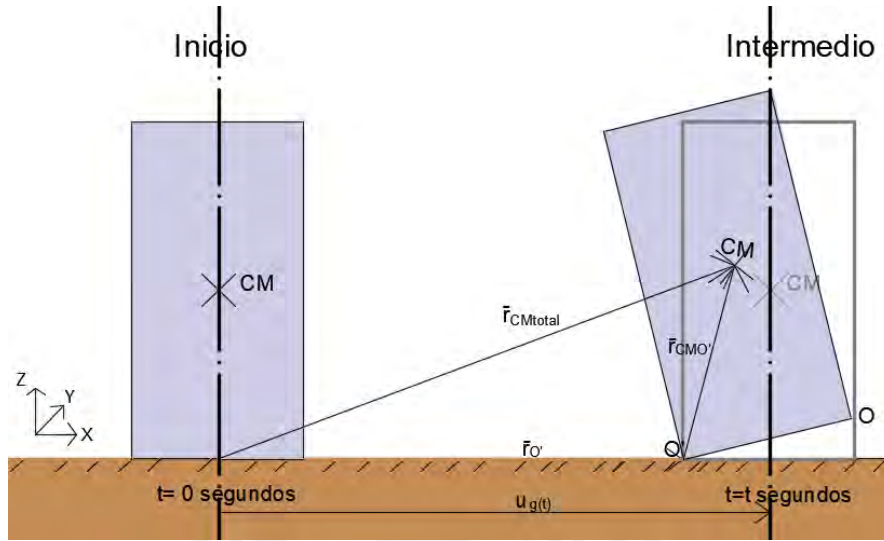


Figura 43: Posición del centro de masa del bloque rígido cuando gira respecto de O'

$$\bar{r}_{CMTotal} = \bar{r}_{CMO'} + \bar{r}_{O'}, \quad [88]$$

Donde

$$\bar{r}_{O'} = (u_{g(t)} - b, 0, 0), \quad [89]$$

$\bar{r}_{O'}$ = Posición del punto O' respecto del sistema de referencia inercial inicial

Por lo tanto, reemplazando [87] y [89] en [88]

$$\bar{r}_{CMTotal} = (R \sin(\alpha + \theta), 0, R \cos(\alpha + \theta)) + (u_{g(t)} - b, 0, 0)$$

$$\bar{r}_{CMTotal} = (R \sin(\alpha + \theta) + u_{g(t)} - b, 0, R \cos(\alpha + \theta)), \quad [90]$$

Se deriva la ecuación [90] y se obtiene la velocidad y la aceleración total del centro de masa

$$\bar{v}_{CMTotal} = (R \cos(\alpha + \theta)\dot{\theta} + \dot{u}_{g(t)}, 0, -R \sin(\alpha + \theta)\dot{\theta}), \quad [91]$$

$$\bar{a}_{CMTotal} = (-R \sin(\alpha + \theta)\dot{\theta}^2 + R \cos(\alpha + \theta)\ddot{\theta} + \ddot{u}_{g(t)}, 0, -R \cos(\alpha + \theta)\dot{\theta}^2 - R \sin(\alpha + \theta)\ddot{\theta}),$$

$$[92]$$

En la figura 44 se muestra el Diagrama de cuerpo libre (DCL) y el Diagrama Cinético del bloque rígido cuando gira respecto de O'.

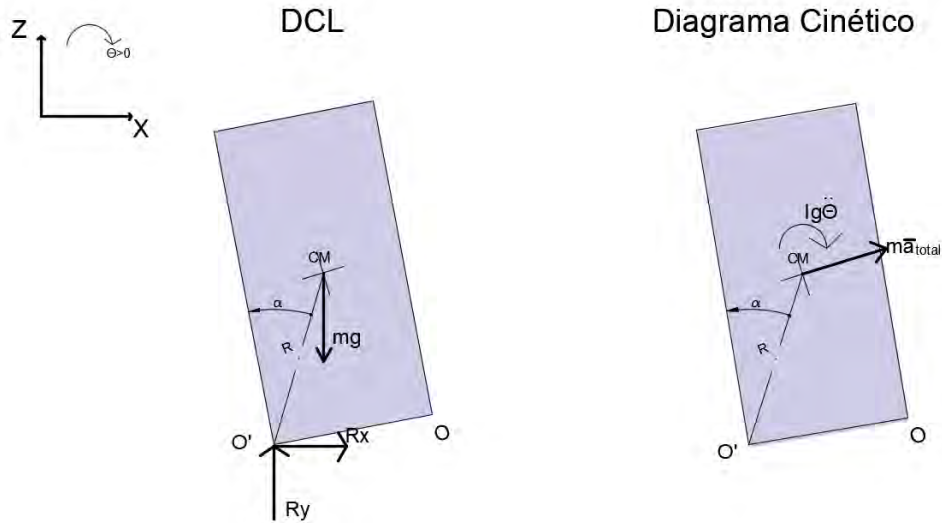


Figura 44: DCL y DC del Bloque rígido cuando gira respecto de O'

Se realiza sumatoria de torques respecto de la esquina O

$$\sum \bar{T}_{O'} = I \ddot{\theta}$$

$$\bar{r}_{CMO'} \times m \bar{g} = I_G \ddot{\theta} + \bar{r}_{CMO'} \times m \ddot{u}_g$$

$$(R \cos(\theta - 90 + \alpha), -R \sin(\theta - 90 + \alpha)) \times (0, 0, -mg)$$

$$= I_G \ddot{\theta} (0, 1, 0)$$

$$+ (R \cos(\theta - 90 + \alpha), -R \sin(\theta - 90 + \alpha)) \times m (R \sin(\alpha + \theta) \dot{\theta}^2 + R \cos(\alpha + \theta) \ddot{\theta})$$

$$+ \ddot{u}_g (0, -R \cos(\alpha + \theta) \dot{\theta}^2 - R \sin(\alpha + \theta) \ddot{\theta})$$

$$m \ddot{u}_g(t) R \cos(\alpha + \theta(t)) = I_O \ddot{\theta}(t) - mgR \sin(\alpha + \theta(t)), \quad [45]$$

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento del bloque rígido cuando bascula son las siguientes

$$m \ddot{u}_g(t) R \cos(\alpha + \theta(t)) = I_O \ddot{\theta}(t) - mgR \sin(\alpha + \theta(t)), \quad \theta(t) < 0 \quad [46]$$

$$-mgR \sin(\alpha - \theta(t)) = I_O \ddot{\theta}(t) + m \ddot{u}_g(t) R \cos(\alpha - \theta(t)), \quad \theta(t) > 0 \quad [47]$$

Las ecuaciones desarrolladas en [47] y en [46], son las mismas que se encuentran en la literatura en "The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes" (Housner, 1963).

Respuesta numérica de la ecuación del comportamiento dinámico de la columna basculante

Las ecuaciones [46] y [47] no tienen soluciones analíticas publicadas y tampoco se desarrollarán en el presente trabajo.

Existirá una disipación de energía provocada por la colisión del bloque con el suelo cuando el bloque cambie de sentido de la rotación. De acuerdo a Makris, la conservación de momento antes y después del impacto (Makris, 2014) es la que sigue:

$$I_0 \dot{\theta}_1 - m \dot{\theta}_1 2bR \sin(\alpha) = I_0 \dot{\theta}_2 \quad [57]$$

Donde,

$\dot{\theta}_1$ = Velocidad angular justo antes del impacto

$\dot{\theta}_2$ = Velocidad angular justo después del impacto

De la ecuación [57], se halla que el coeficiente de restitución (r) es igual a

$$r = \frac{\dot{\theta}_2^2}{\dot{\theta}_1^2} \quad [58]$$

Reemplazando la ecuación [57] en la ecuación [58] se obtiene que el coeficiente de restitución es igual a

$$r = \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2(\alpha)\right)^2 \quad [59]$$

La ecuación [51] resulta el máximo coeficiente de restitución que puede ocurrir durante la oscilación del bloque rígido. Como se observa en la ecuación [51], el coeficiente de restitución depende solo de la esbeltez de la columna.

No obstante, Calio halló la siguiente ecuación para determinar el coeficiente de restitución (Calio & Marletta, 2003)

$$r = \frac{h}{R} \quad [60]$$

Donde

h = Media altura de la columna (m)

R = Radio de giro de la columna (m)

Por lo tanto, a continuación se muestra como se halla la velocidad angular justo después del impacto:

$$\dot{\theta}_2 = r \dot{\theta}_1, \quad \text{cuando } \theta_{(t)} = 0 \quad [61]$$

En el presente estudio se utilizara el coeficiente de restitución desarrollado por Makris. Esto se debe a que de acuerdo a que se asumirá que se tiene una pérdida de energía máxima en cada impacto para ser más conservadores.

Se procederá a resolver las ecuaciones [46] y [47] teniendo en consideración la perdida de energía de la ecuación [59]. Se utilizara 3 métodos de respuesta paso a paso de ecuaciones diferenciales de segunda grado. Los 3 métodos a utilizar son: aceleración angular constante, aceleración angular promedio y aceleración angular lineal.

Las condiciones iniciales para resolver las ecuaciones del comportamiento dinámico de la columna son las siguientes:

- Velocidad angular inicial es 0 rads^{-1}
- Posición angular inicial es 0 rad
- Altura del bloque rígido es 3 metros
- Base del bloque rígido es 1 metro
- Angulo de fase de la aceleración del suelo es 0 rad .

Se variará los métodos para hallar las respuestas de las ecuaciones y se escogerá el mejor para realizar el análisis. Es por ello que se resolvió las ecuaciones utilizando las siguientes combinaciones de amplitudes de aceleración sinusoidal (P_o) y frecuencia angular (w):

| Po (m/s²) | w (rad/s) | | | | |
|-----------------------------|------------------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | X | X | X | X | X |
| 5 | X | X | X | X | X |
| 6 | X | X | X | X | X |
| 7 | X | X | X | X | X |
| 8 | X | X | X | X | X |
| 9 | X | X | X | X | X |
| 10 | X | X | X | X | X |

No se utilizaron las amplitudes de la aceleración de la onda menores a 4, dado que, de acuerdo a la ecuación [77] estas ecuaciones no producen la oscilación de una columna de base 1 metro y altura 3 metros. A continuación se presentan los resultados de los 3 métodos utilizados para hallar la aceleración angular, velocidad angular y posición angular (radianes y grados sexagesimales). La línea verde representa el método de aceleración angular constante. La línea

azul representa el método de aceleración angular promedio. Finalmente, la línea roja representa el método de aceleración angular lineal.

La figura 45 representa la combinación $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

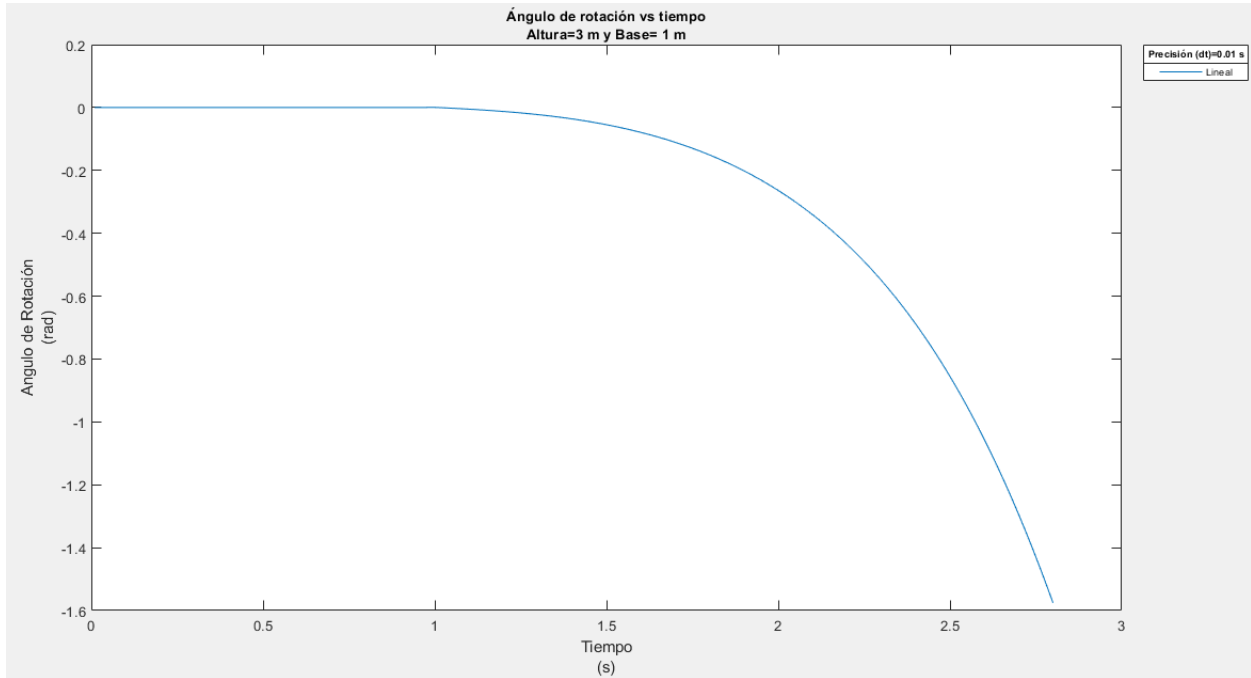


Figura 45: Parámetros del bloque para $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 46 representa la combinación $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

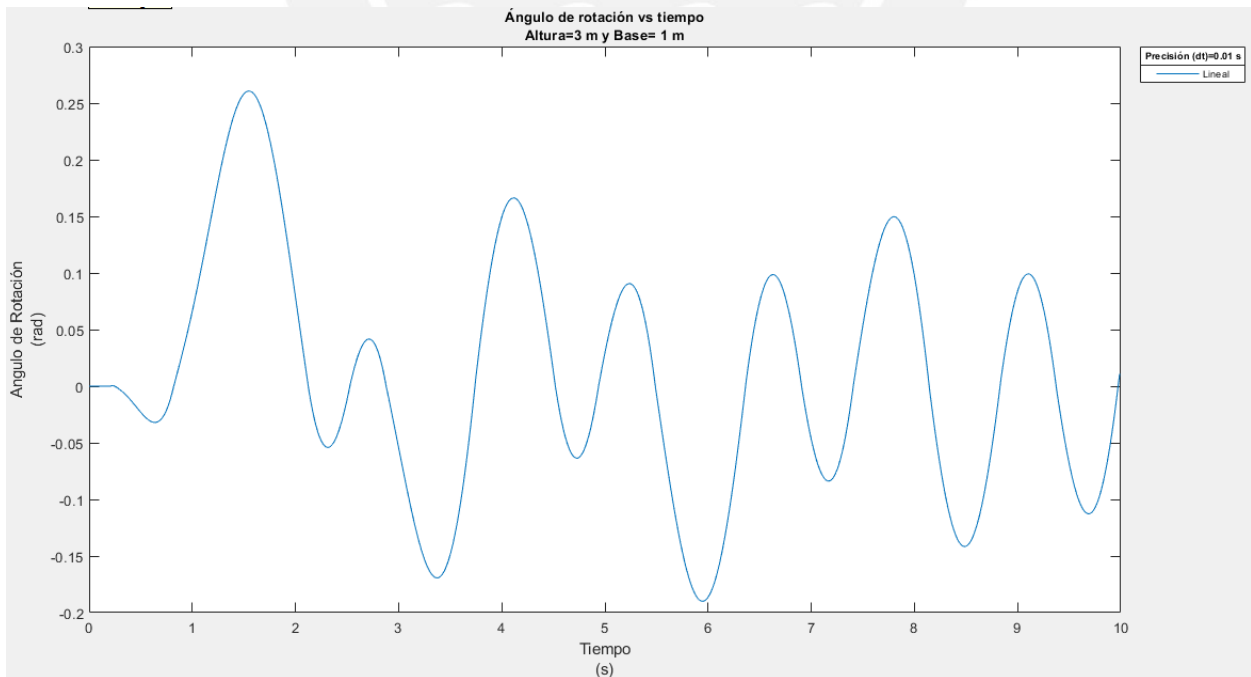


Figura 46: Parámetros del bloque para $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 47 representa la combinación $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

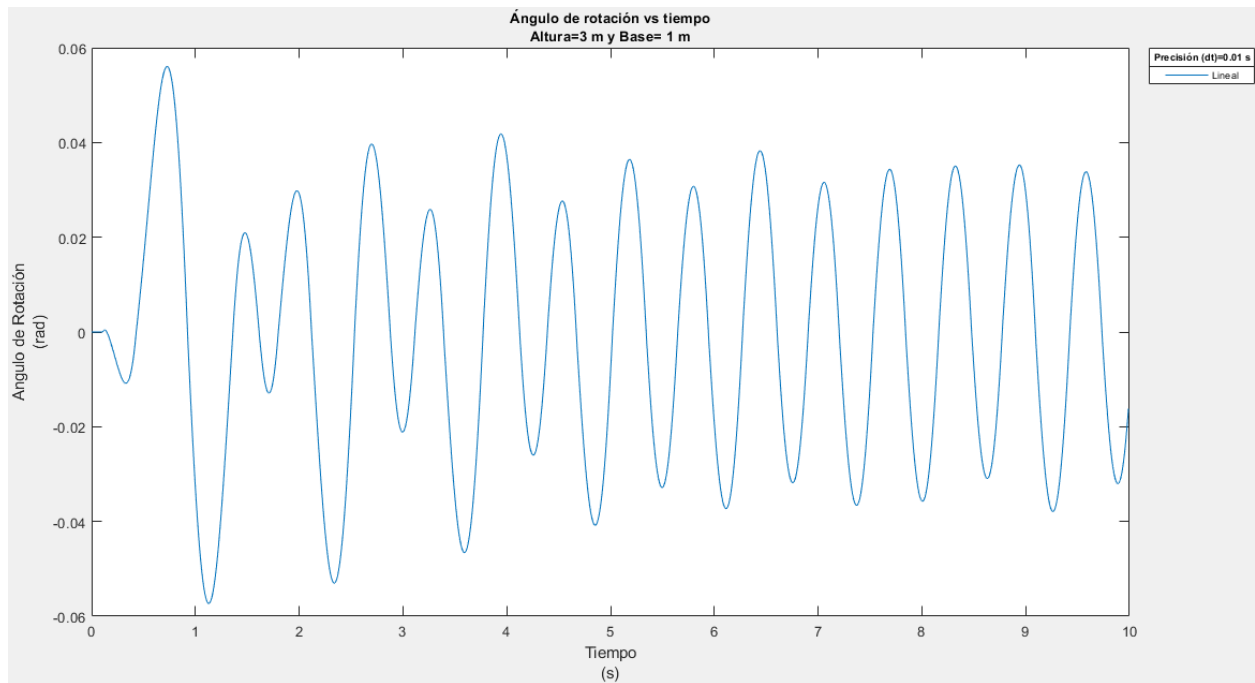


Figura 47: Parámetros del bloque para $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

Para $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$

La figura 48 representa la combinación $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

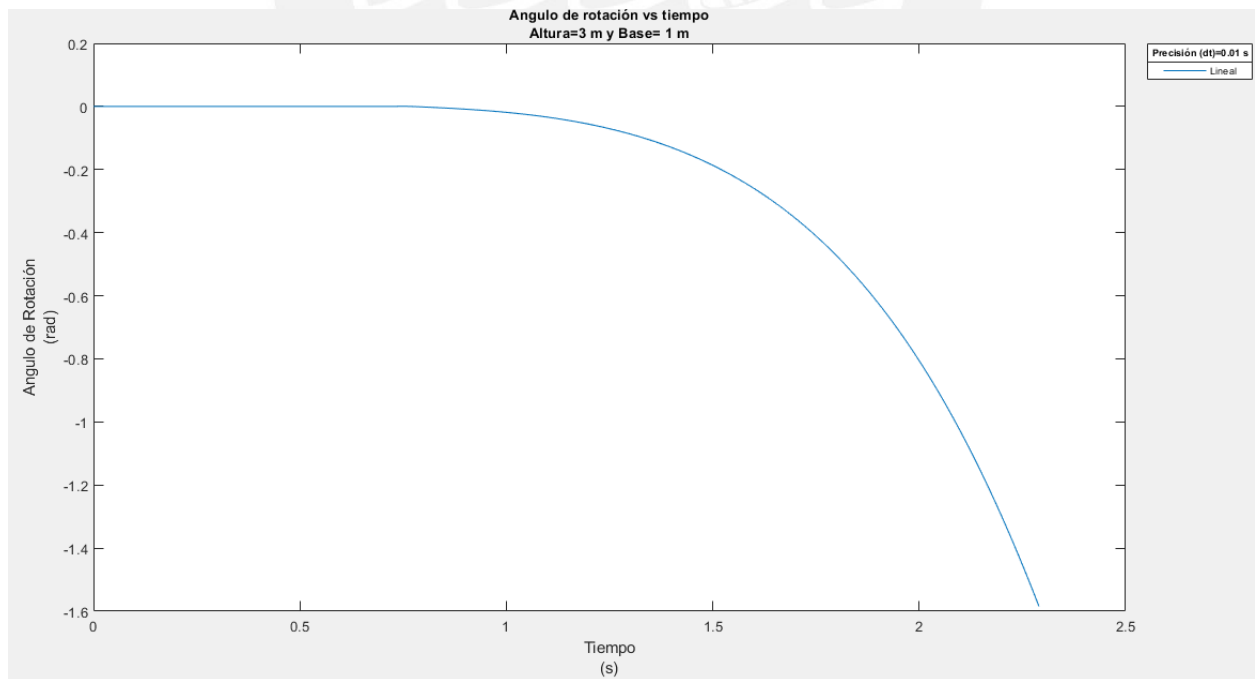


Figura 48: Parámetros del bloque para $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 49 representa la combinación $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

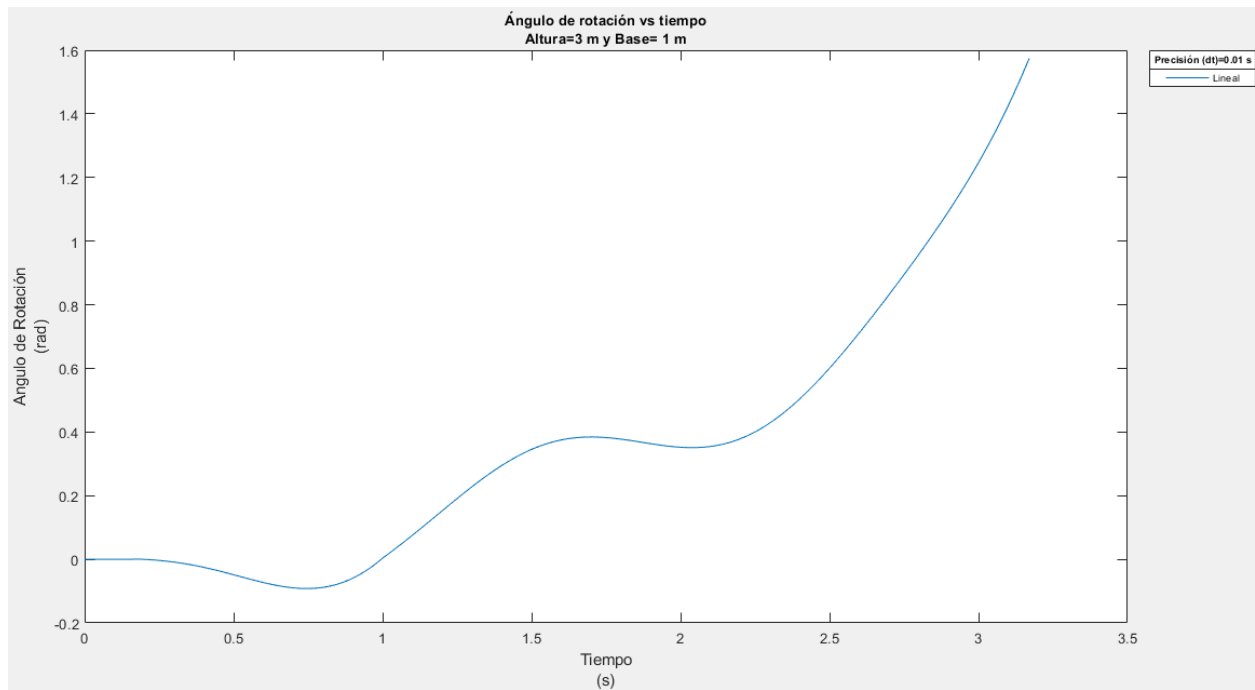


Figura 49: Parámetros del bloque para $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 50 representa la combinación $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

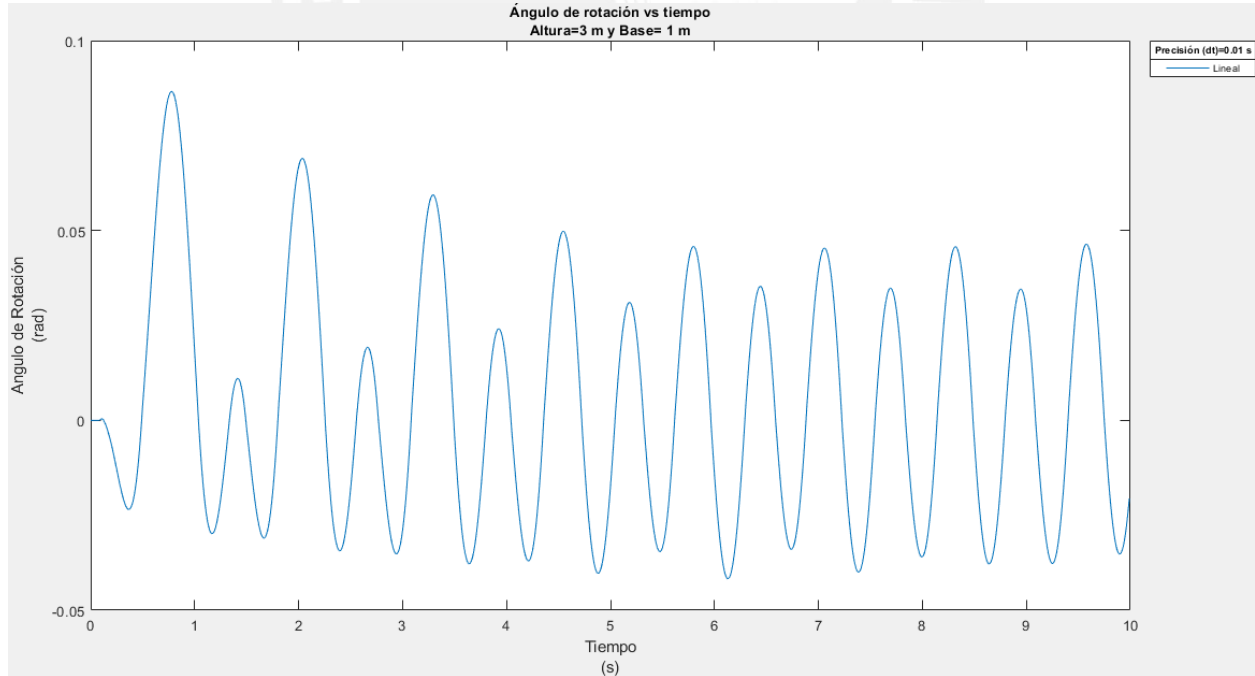


Figura 50: Parámetros del bloque para $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

Para $P_0=6 \text{ ms}^{-2}$

La figura 51 representa la combinación $P_0=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

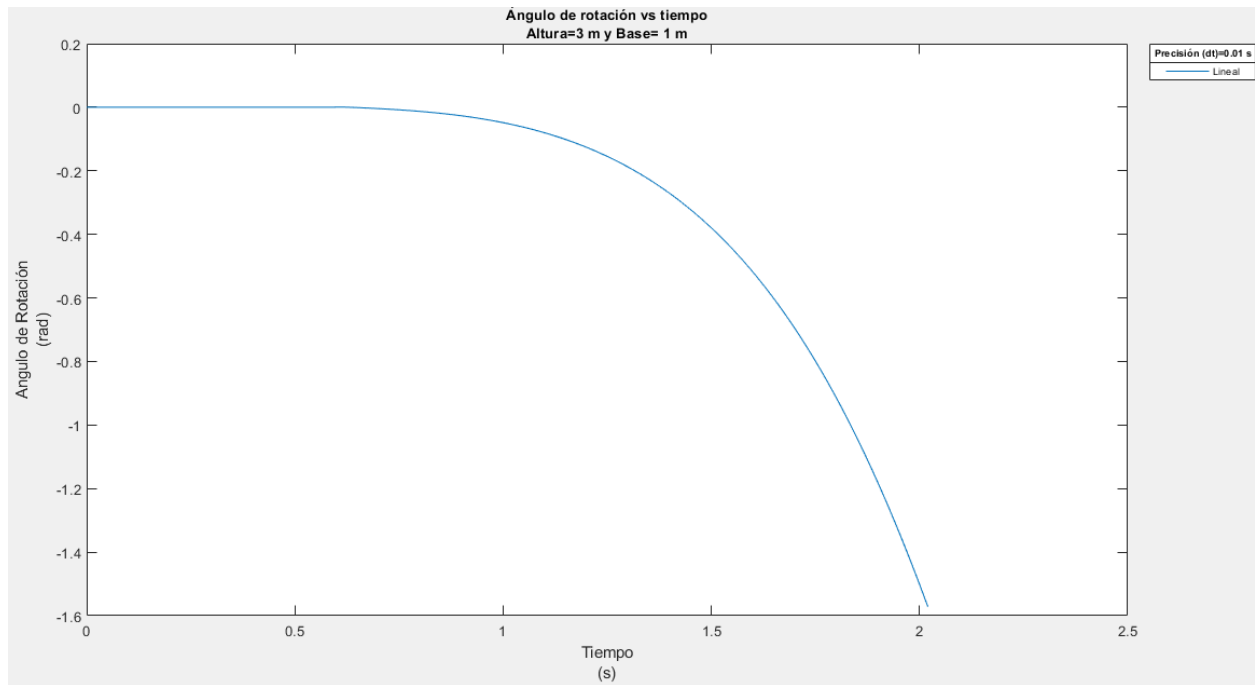


Figura 51: Parámetros del bloque para $P_0=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 52 representa la combinación $P_0=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

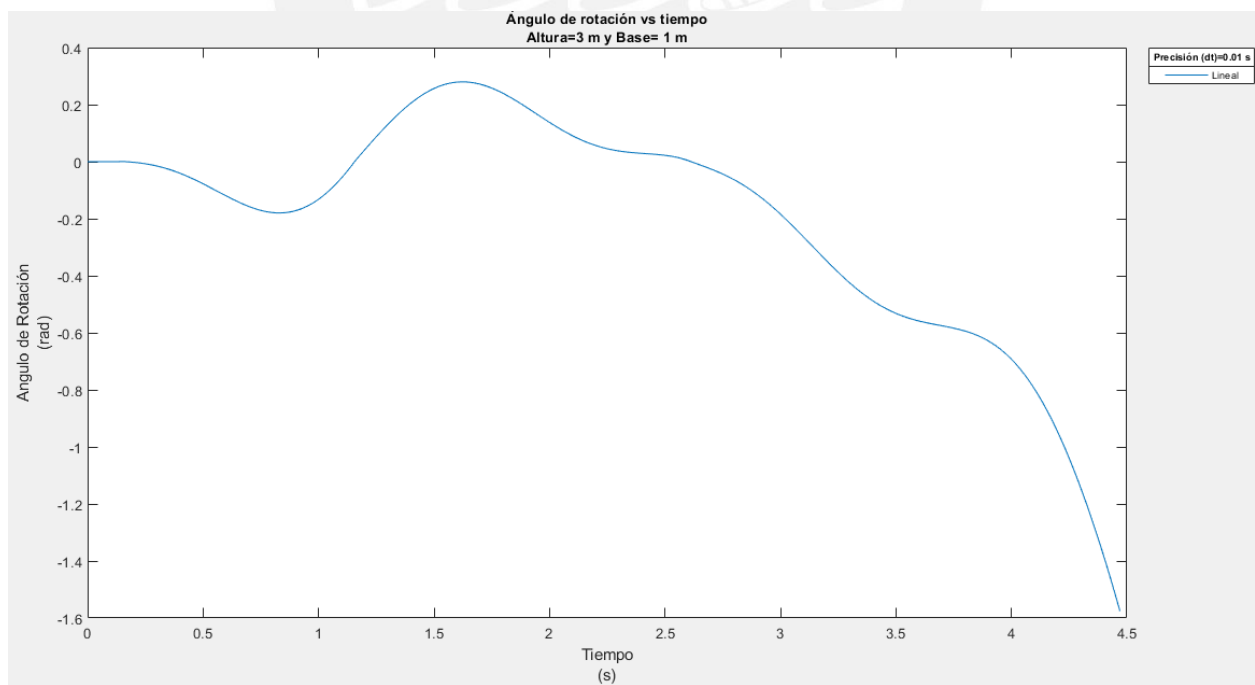


Figura 52: Parámetros del bloque para $P_0=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 53 representa la combinación $P_0=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

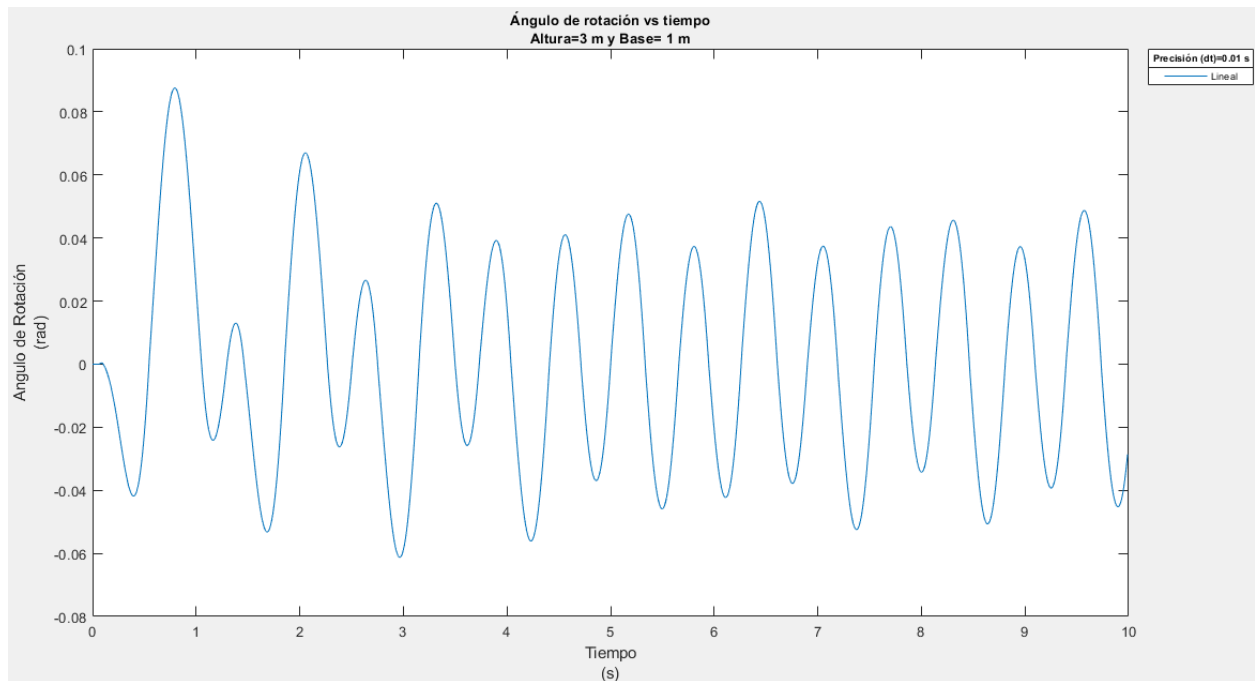


Figura 53: Parámetros del bloque para $P_0=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

Para $P_0=7 \text{ ms}^{-2}$

La figura 54 representa la combinación $P_0=7 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

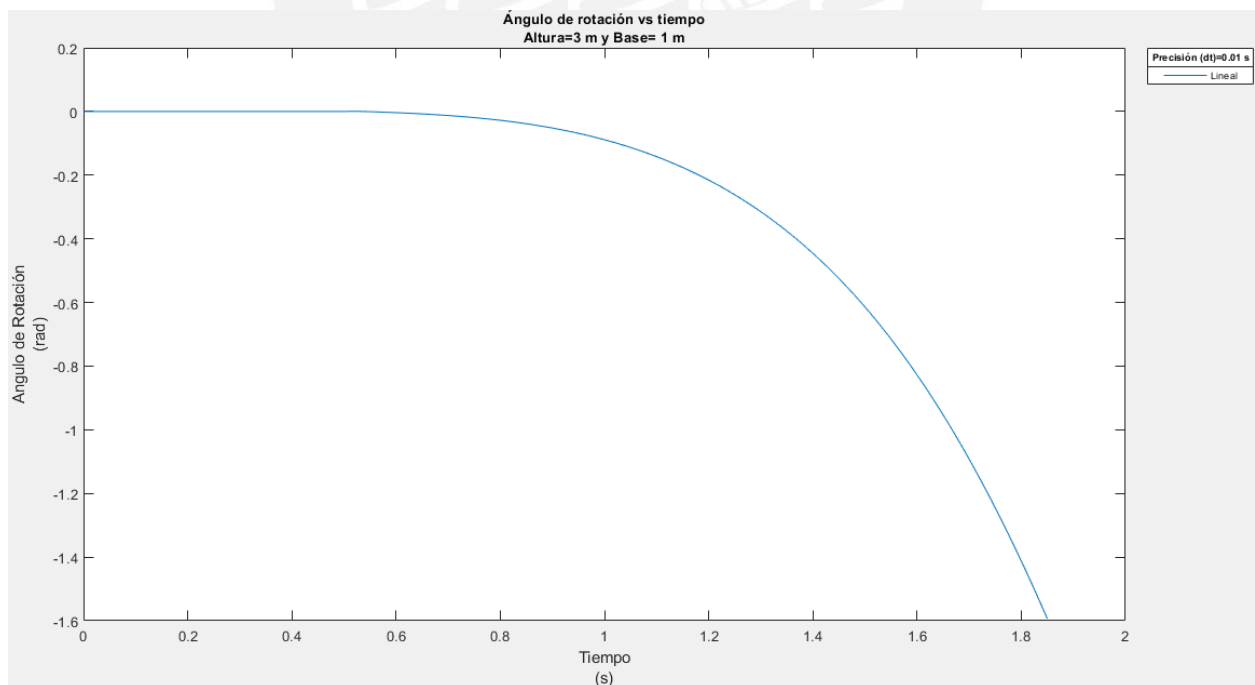


Figura 54: Parámetros del bloque para $P_0=7 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 55 representa la combinación $P_0=7 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

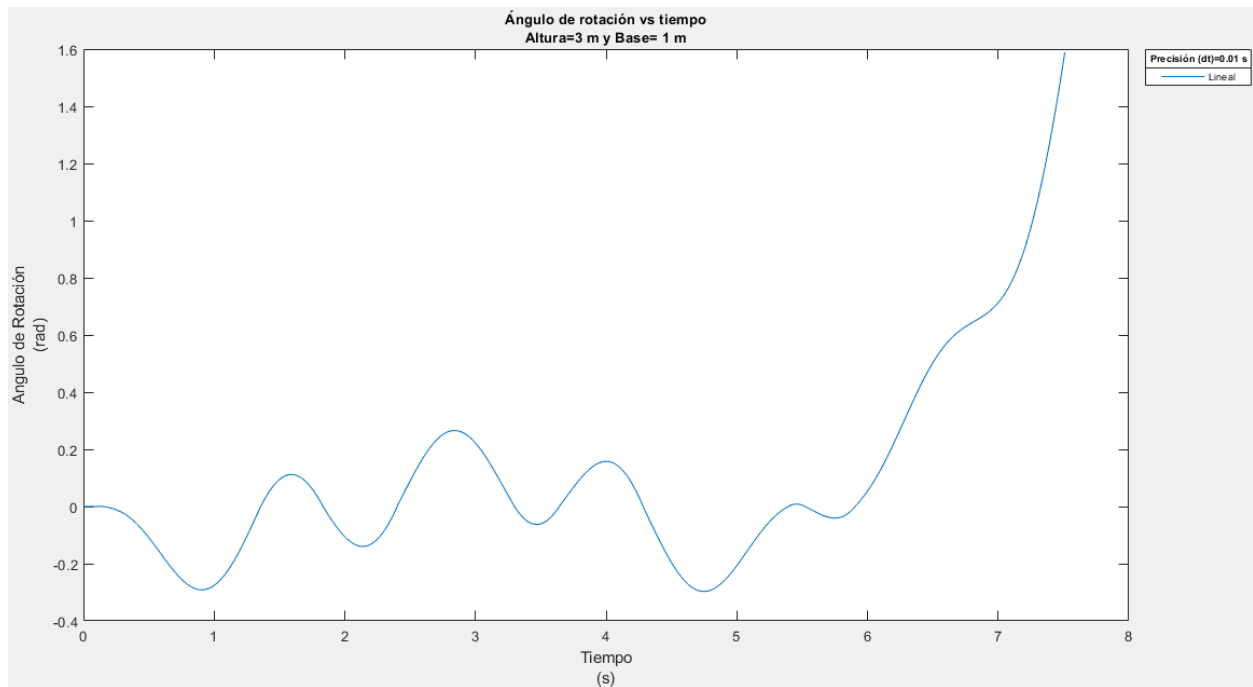


Figura 55: Parámetros del bloque para $P_0=7 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 56 representa la combinación $P_0=7 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

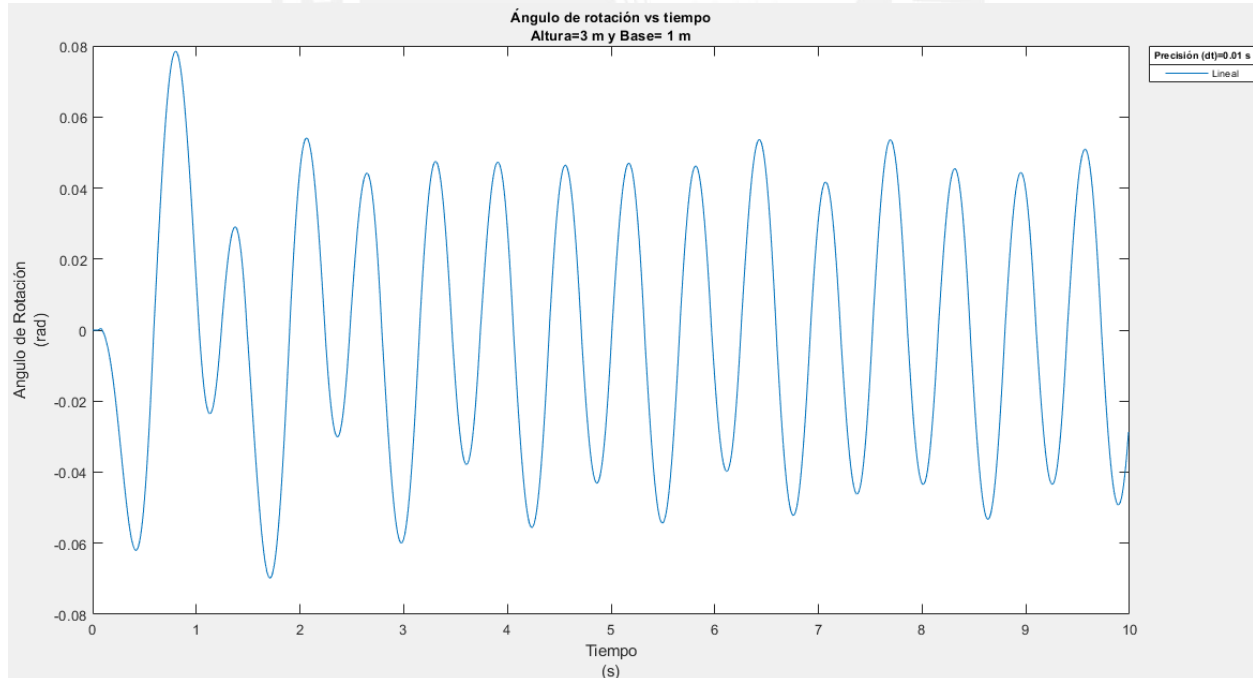


Figura 56: Parámetros del bloque para $P_0=7 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

Para $P_0=8 \text{ ms}^{-2}$

La figura 57 representa la combinación $P_o=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

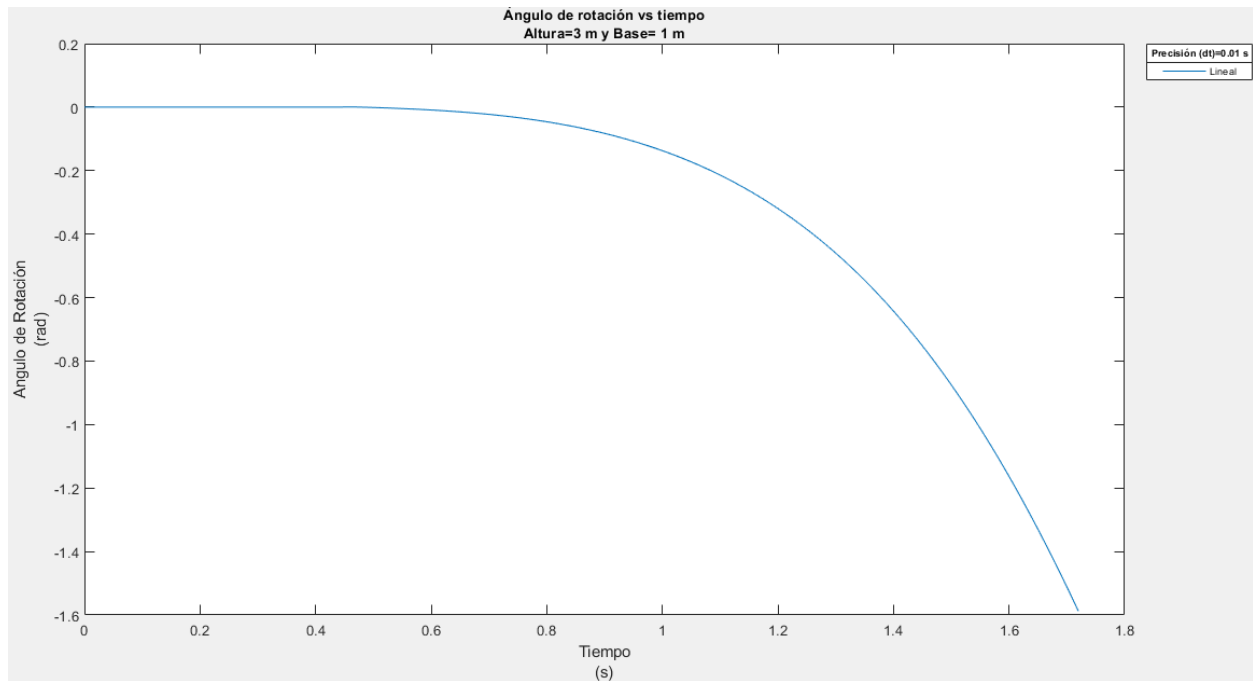


Figura 57: Parámetros del bloque para $P_o=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 58 representa la combinación $P_o=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

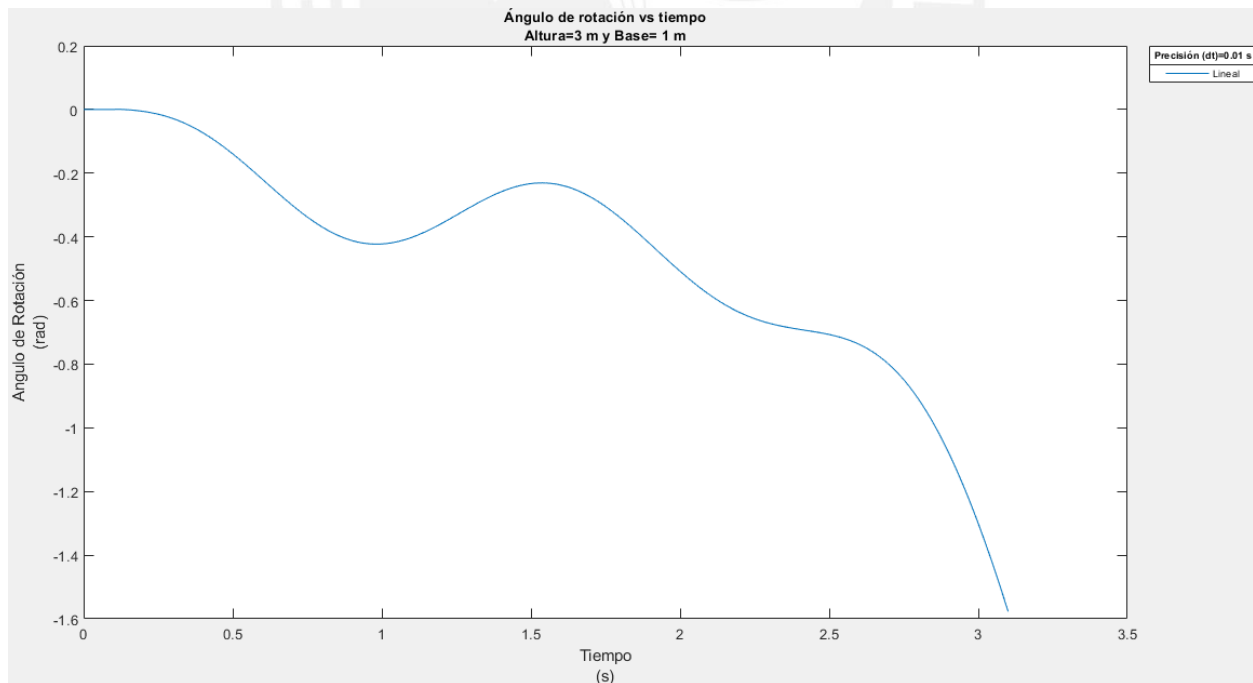


Figura 58: Parámetros del bloque para $P_o=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 59 representa la combinación $P_o=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

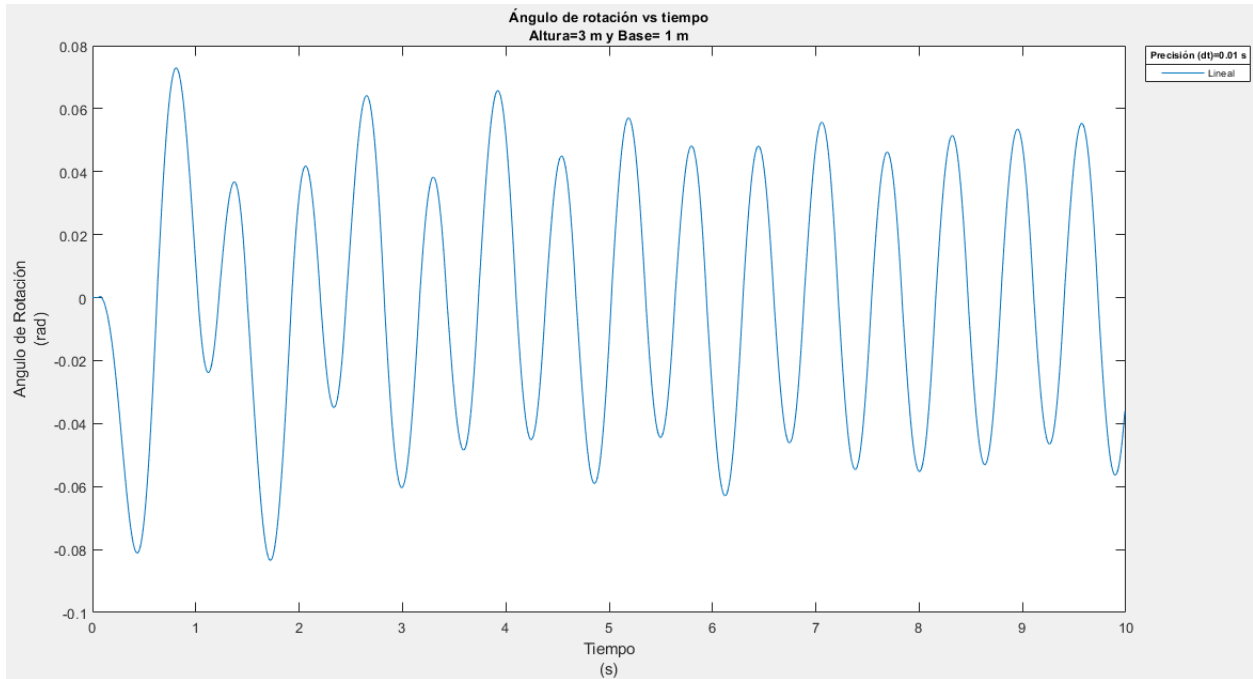


Figura 59: Parámetros del bloque para $P_0=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

Para $P_0=9 \text{ ms}^{-2}$

La figura 60 representa la combinación $P_0=9 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

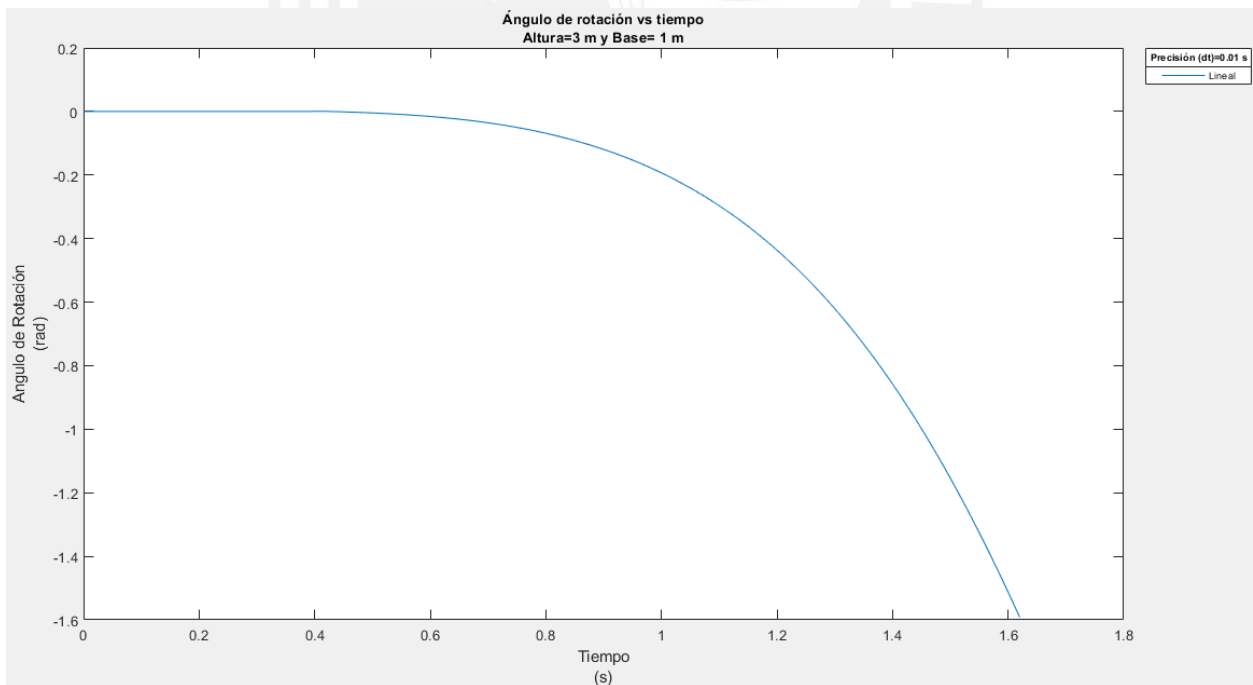


Figura 60: Parámetros del bloque para $P_0=9 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 61 representa la combinación $P_0=9 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

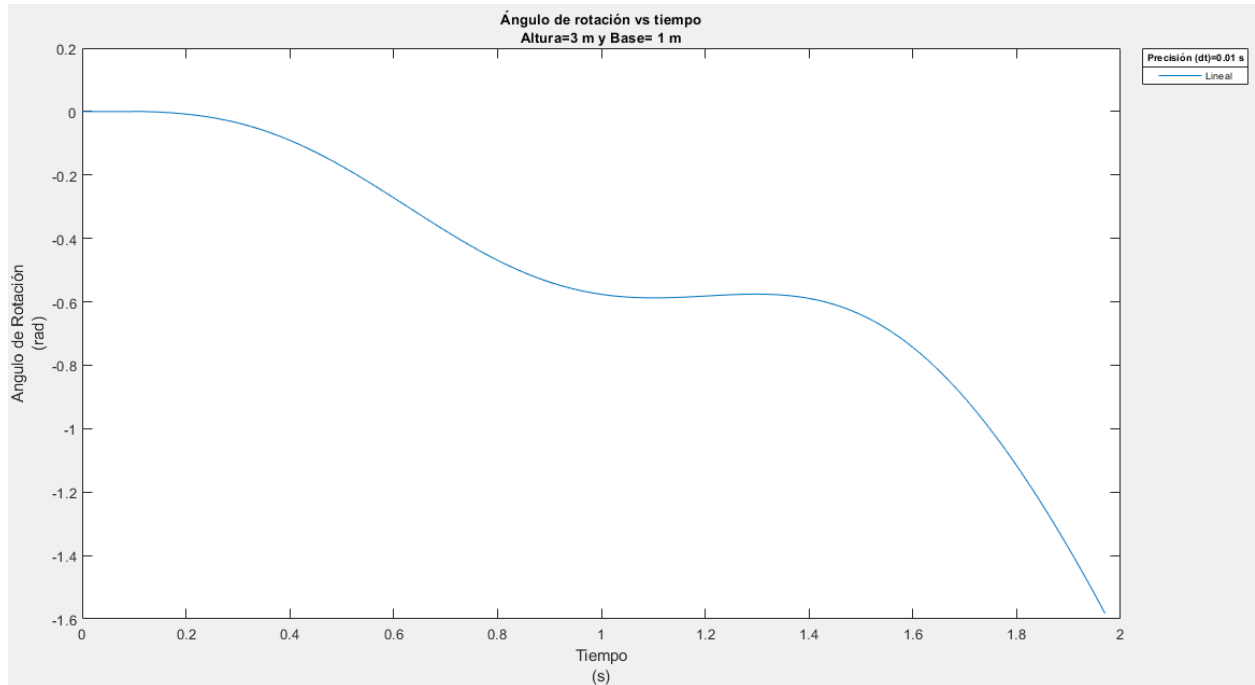


Figura 61: Parámetros del bloque para $P_0=9 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 62 representa la combinación $P_0=9 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

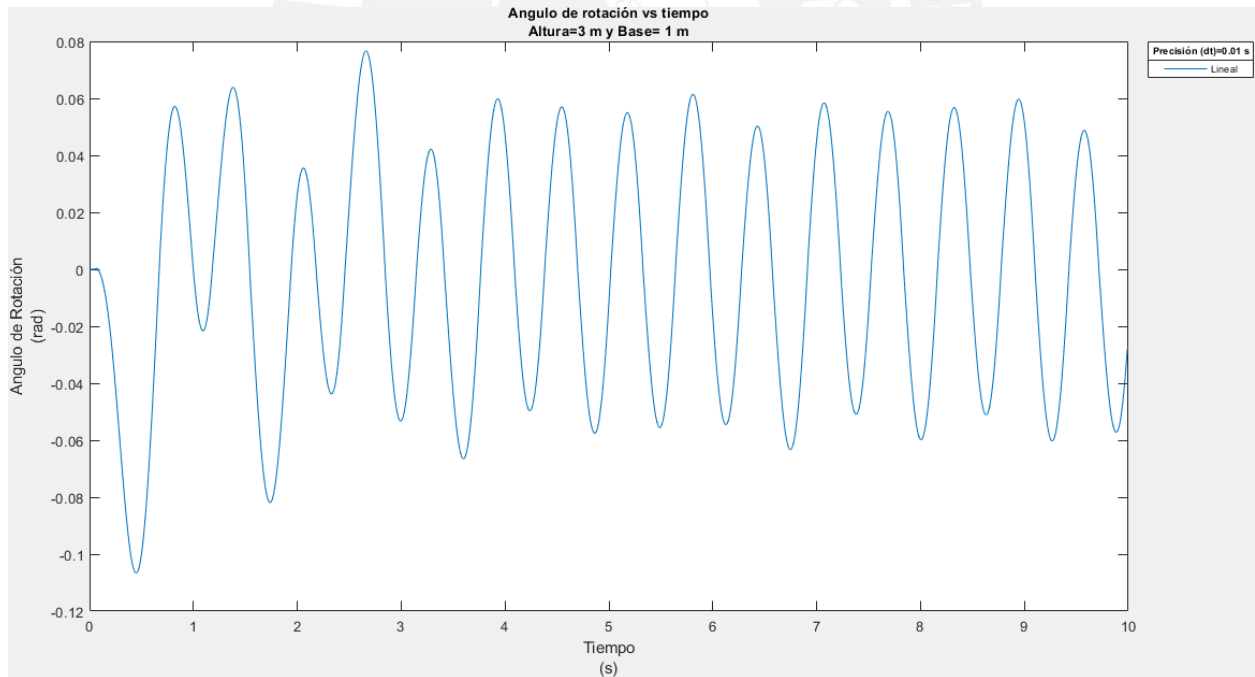


Figura 62: Parámetros del bloque para $P_0=9 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

Para $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$

La figura 63 representa la combinación $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

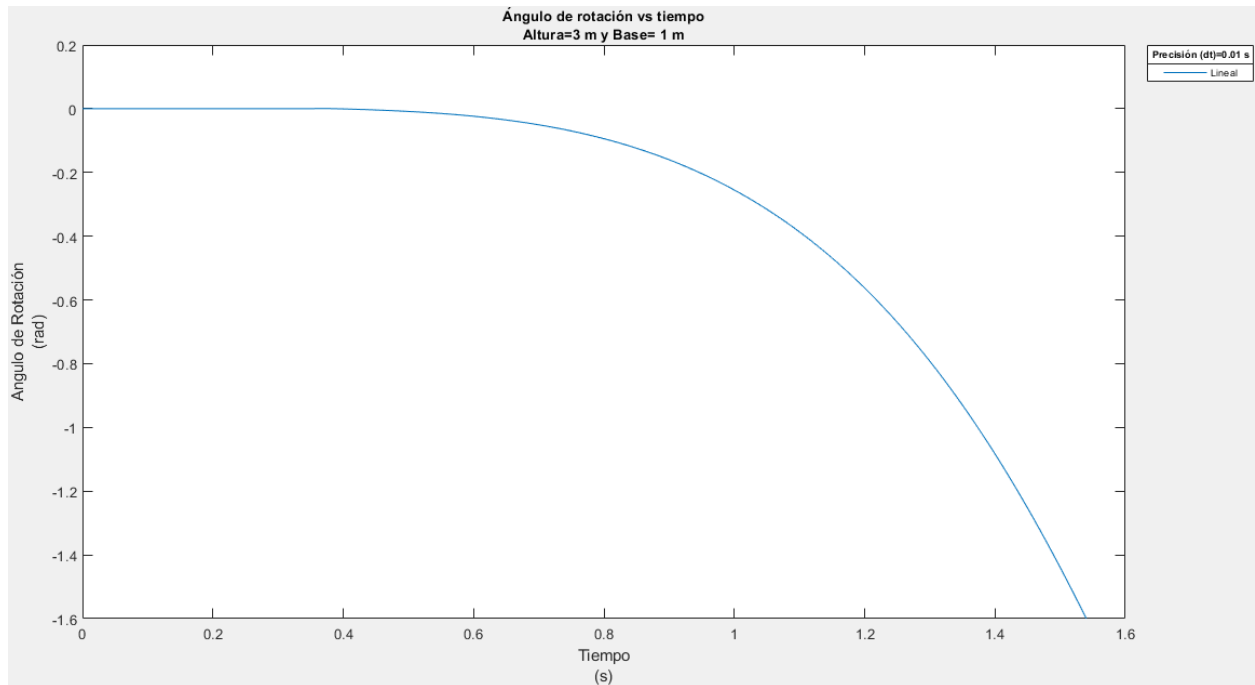


Figura 63: Parámetros del bloque para $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=1 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 64 representa la combinación $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

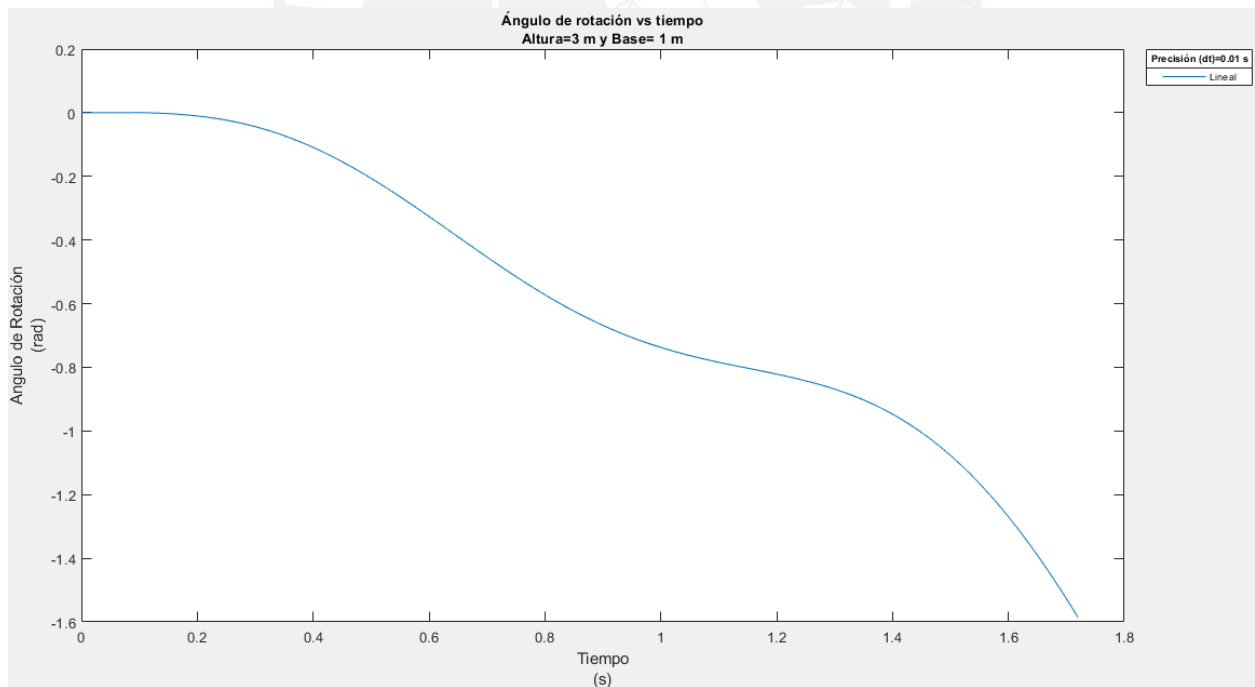


Figura 64: Parámetros del bloque para $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$

La figura 65 representa la combinación $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

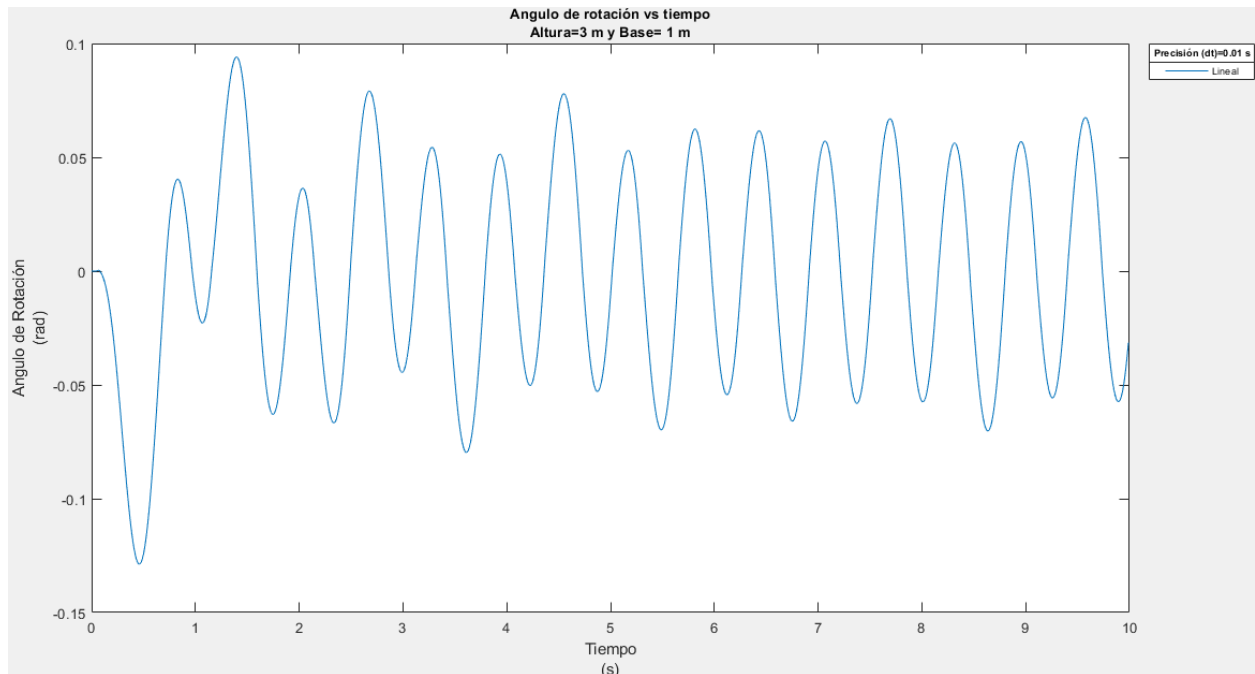


Figura 65: Parámetros del bloque para $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=10 \text{ rad.s}^{-1}$

Como se puede observar en las imágenes anteriores, existen diferencias en los resultados obtenidos mediante la utilización de los 3 métodos numéricos. El método donde se asume la aceleración angular constante, nos resulta valores inestables a comparación de los resultados obtenidos por el método de aceleración angular promedio y lineal. Es por ello que se descarto el uso de la aceleración angular constante por su baja precisión. Luego, se puede observar que varias respuestas de la posición angular producidas por los métodos de aceleración angular promedio y lineal son las mismas. Sin embargo, existen respuestas que son opuestas entre ambos métodos. Es por ello que se procedió a verificar estos resultados con la utilización del software Working Model.

De los ensayos numéricos realizados con el bloque de altura 3m, se escogieron las siguientes combinaciones para comparar la respuesta de la posición angular con la respuesta del software del Working Model

| P_0 (m/s ²) | w (rad/s) | | | | | | |
|---------------------------|-------------|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | | X | | | X | | |
| 5 | | | X | | X | | |
| 6 | | | | X | X | | X |

| | | | | | | | |
|----|--|--|--|--|---|---|---|
| 7 | | | | | X | | |
| 8 | | | | | | X | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | X |

En los siguientes gráficos se observa superpuesto los resultados de la posición angular versus el tiempo de 3 métodos: Working Model (Runge-Kutta), aceleración angular constante y aceleración angular promedio para una precisión de 0.02 segundos.

La figura 66 muestra la combinación $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=2 \text{ rad.s}^{-1}$ para los tres métodos mencionados.

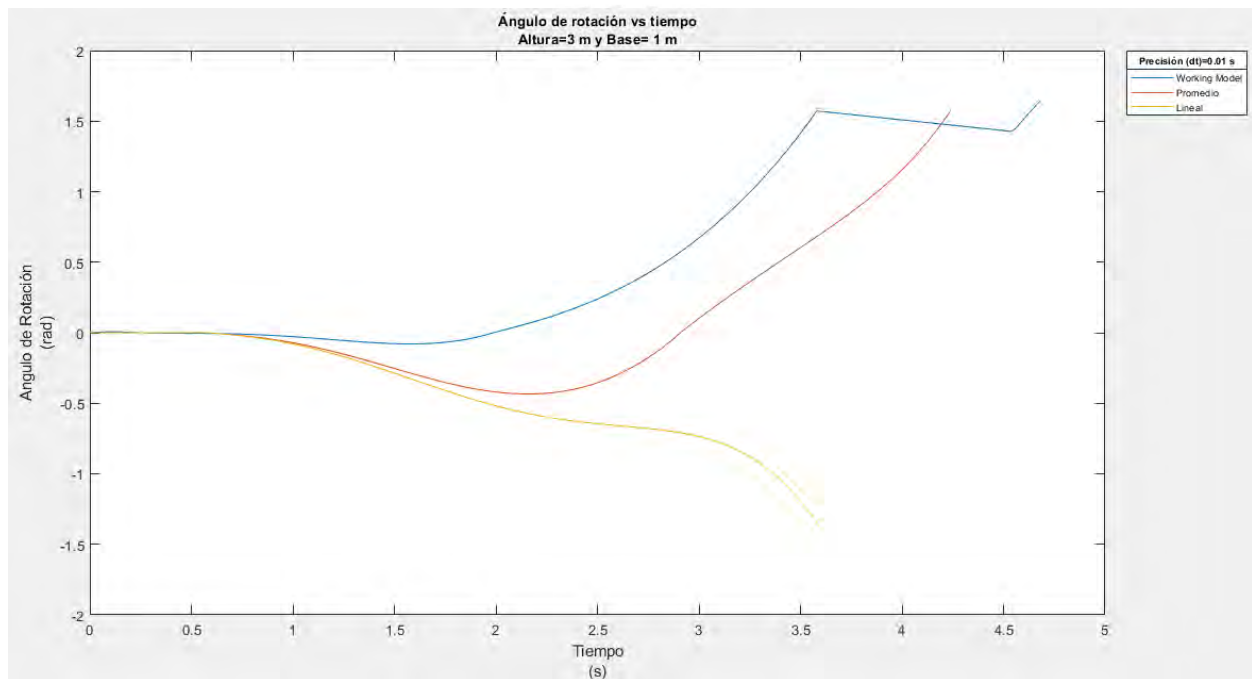


Figura 6: Parámetros del bloque para $P_0=4 \text{ ms}^{-2}$ y $w=2 \text{ rad.s}^{-1}$ para los 3 métodos de respuesta

La figura 67 muestra la combinación $P_0=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=3 \text{ rad.s}^{-1}$ para los tres métodos mencionados.

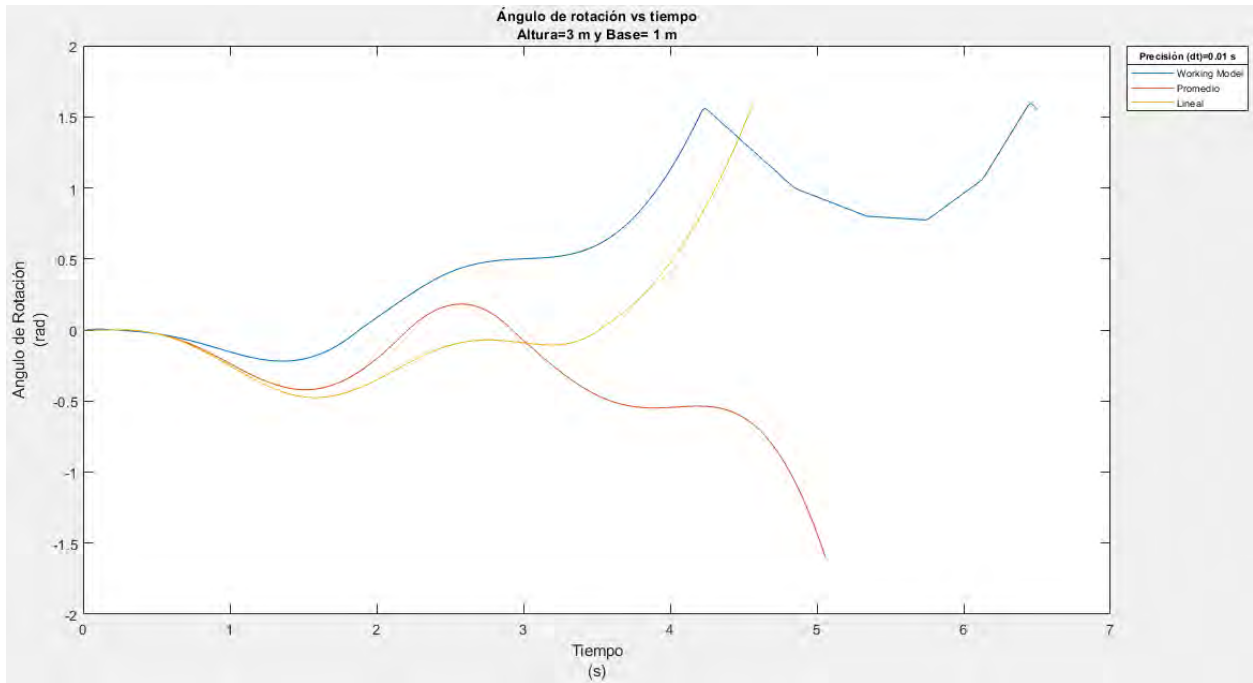


Figura 67: Parámetros del bloque para $P_o=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=3 \text{ rad.s}^{-1}$ para los 3 métodos de respuesta
La figura 68 muestra la combinación $P_o=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$ para los tres métodos mencionados.

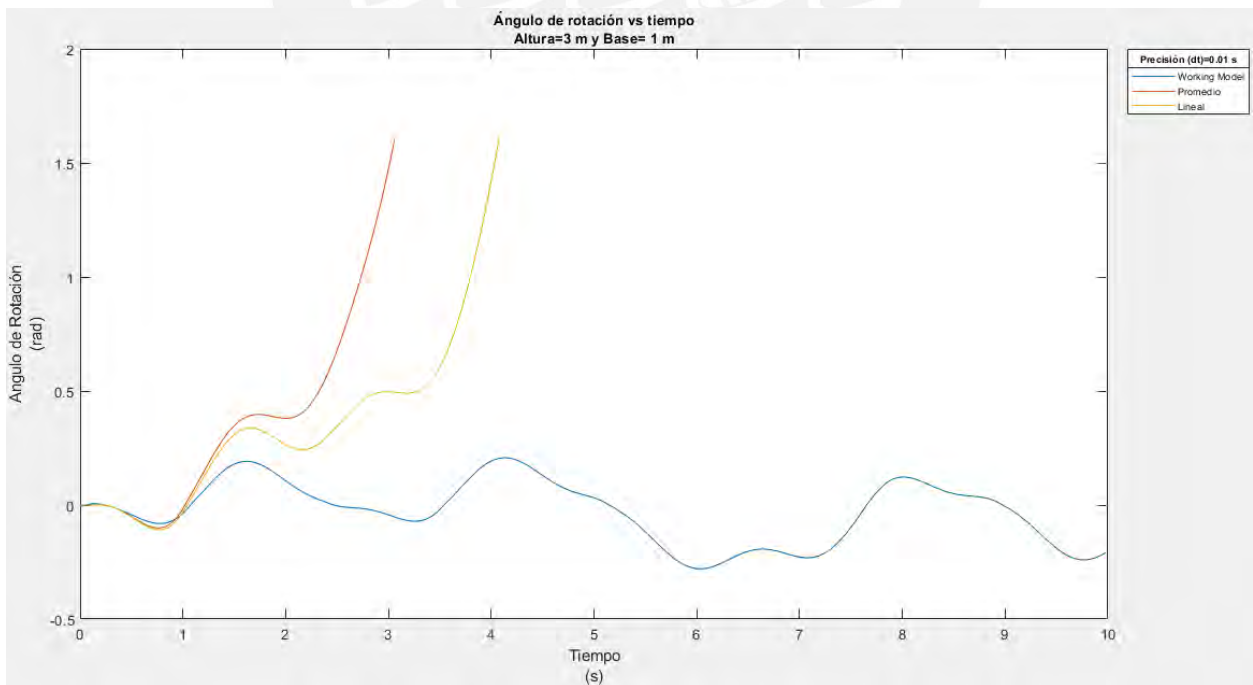


Figura 68: Parámetros del bloque para $P_o=5 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$ para los 3 métodos de respuesta
La figura 69 muestra la combinación $P_o=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=4 \text{ rad.s}^{-1}$ para los tres métodos

mencionados.

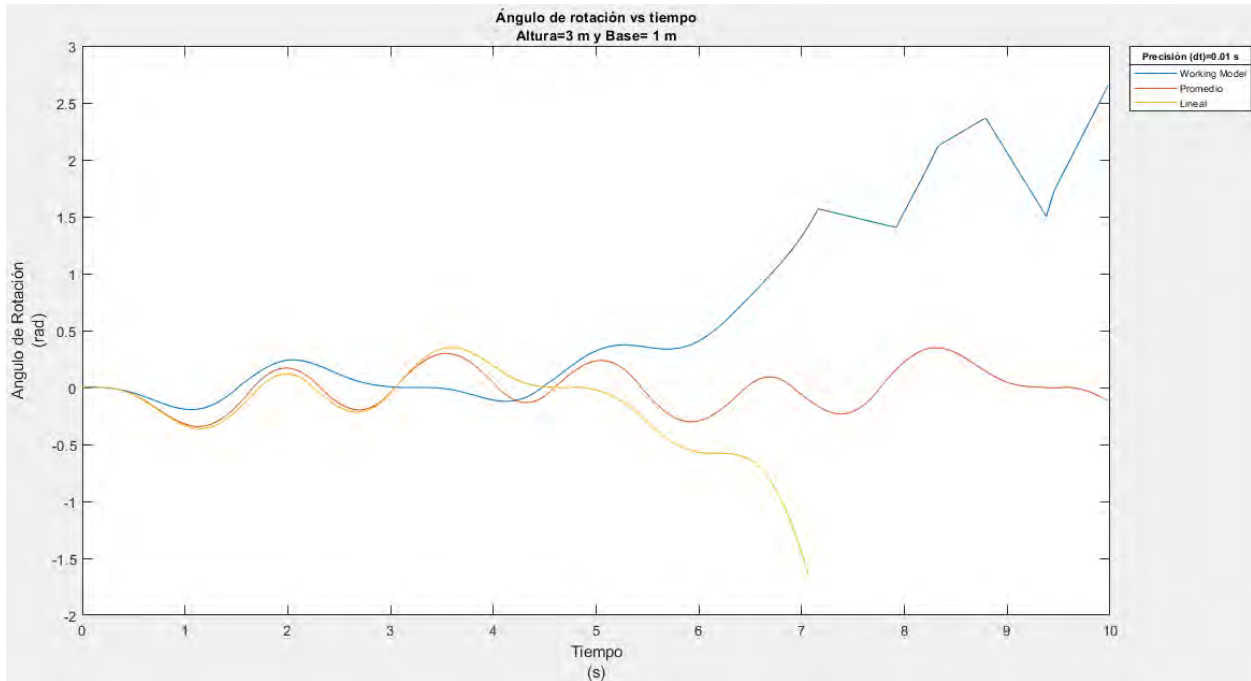


Figura 69: Parámetros del bloque para $P_o=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=4 \text{ rad.s}^{-1}$ para los 3 métodos de respuesta

La figura 70 muestra la combinación $P_o=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=7 \text{ rad.s}^{-1}$ para los tres métodos mencionados.

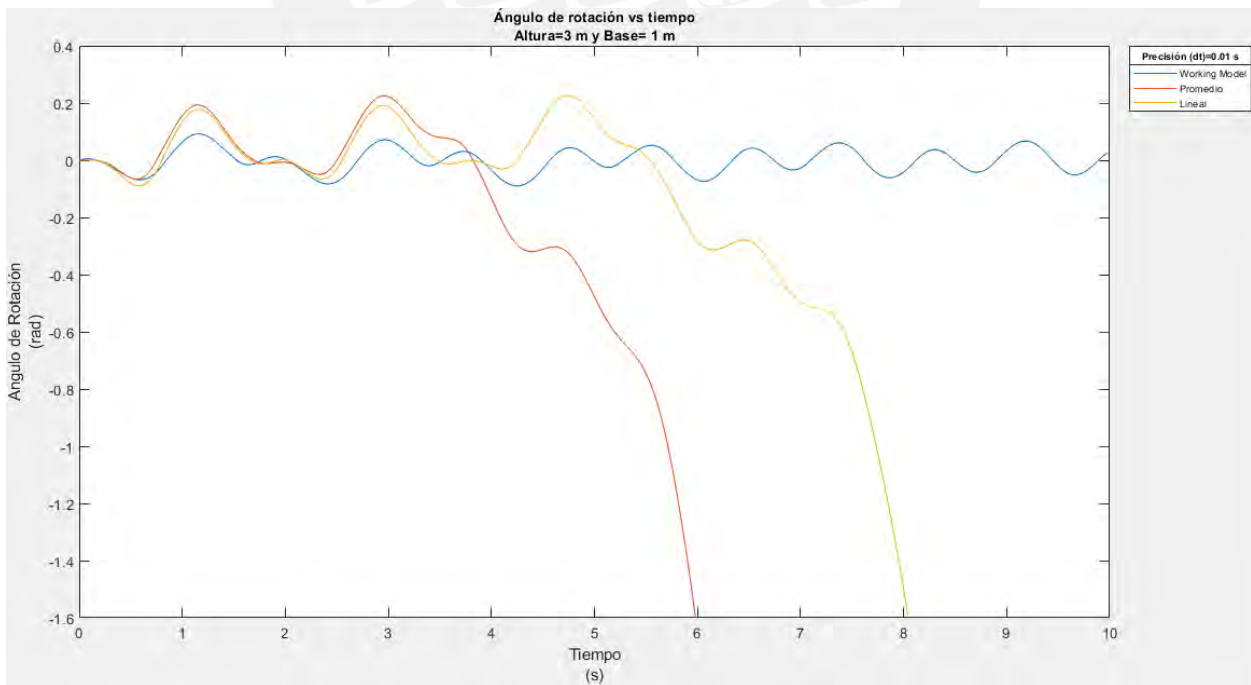


Figura 70: Parámetros del bloque para $P_o=6 \text{ ms}^{-2}$ y $w=7 \text{ rad.s}^{-1}$ para los 3 métodos de respuesta

La figura 71 muestra la combinación $P_o=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$ para los tres métodos

mencionados.

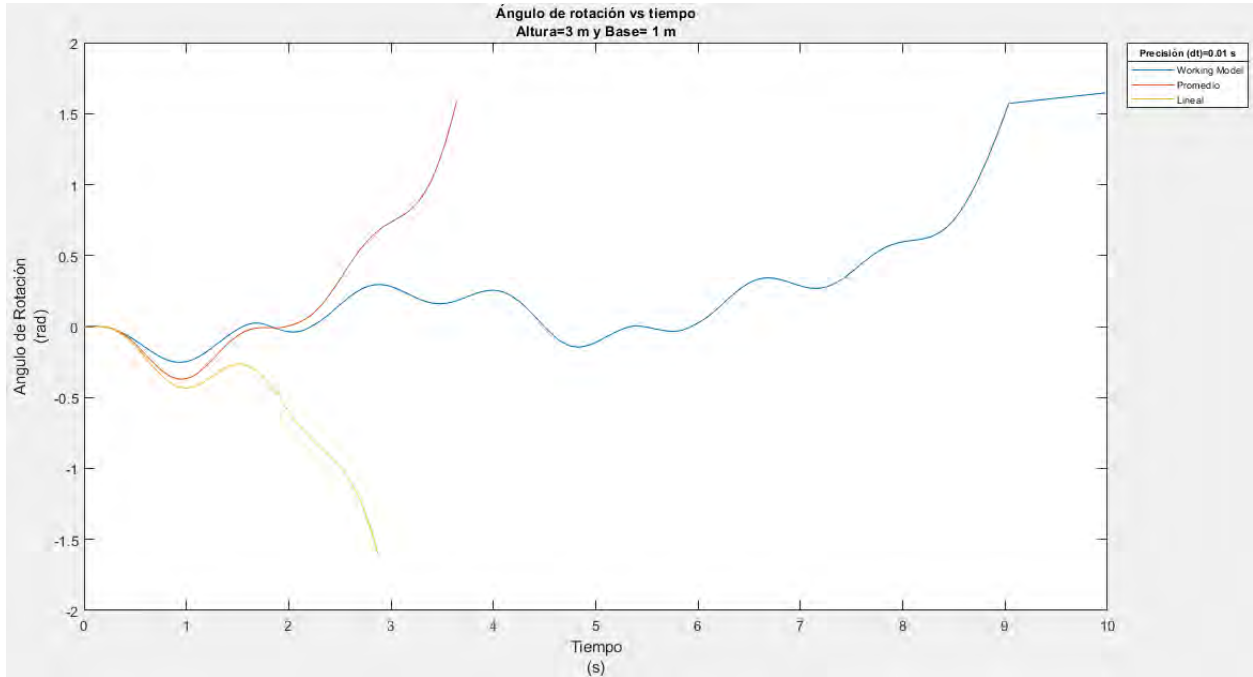


Figura 71: Parámetros del bloque para $P_0=8 \text{ ms}^{-2}$ y $w=5 \text{ rad.s}^{-1}$ para los 3 métodos de respuesta. La figura 72 muestra la combinación $P_0=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=7 \text{ rad.s}^{-1}$ para los tres métodos mencionados.

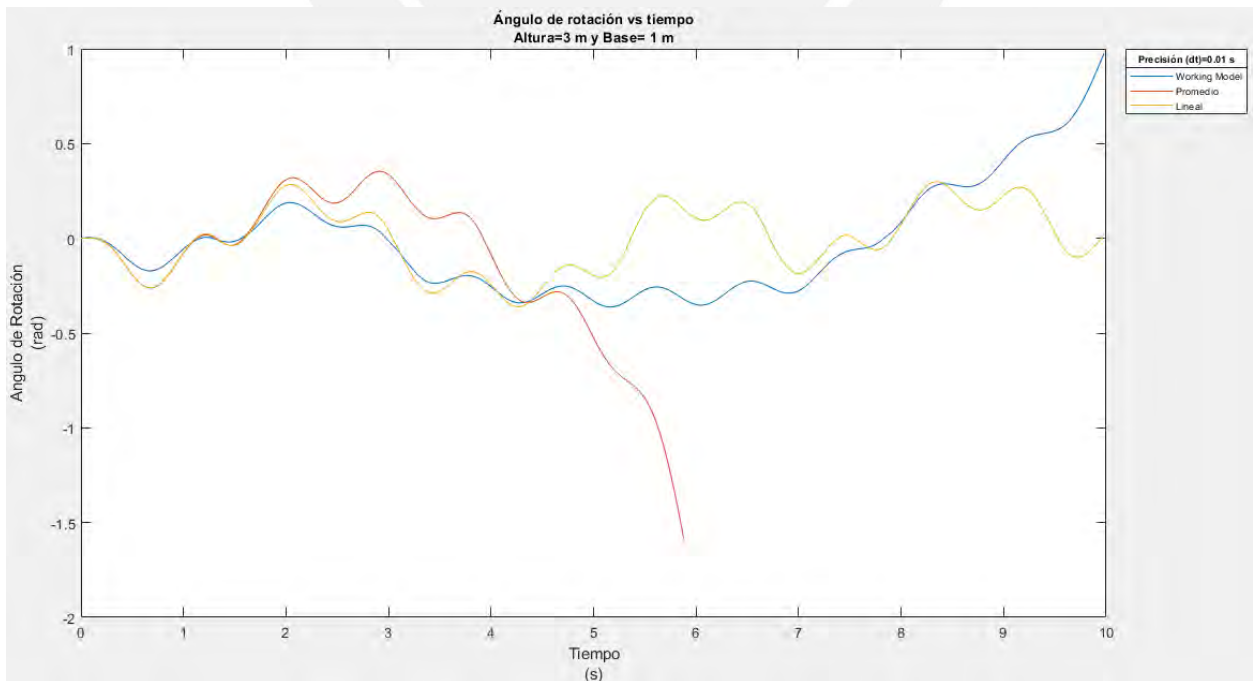


Figura 72: Parámetros del bloque para $P_o=10 \text{ ms}^{-2}$ y $w=7 \text{ rad.s}^{-1}$ para los 3 métodos de respuesta. Como se observa en los gráficos del 6 al 72, las respuestas entre los 3 métodos son diferentes. De la misma manera, es importante tener en cuenta que el modelo de Working Model tiene una desventaja la cual es la superposición de bloques. No obstante, se ha podido observar que el método de aceleración angular lineal es el más estable y concuerda con el modelo de Working Model hacia el sentido de la volcadura. Por lo tanto, se proseguirá a continuar el presente estudio utilizando el método de aceleración angular lineal para resolver las ecuaciones del comportamiento dinámico del bloque oscilante.

Se resolvieron las ecuaciones del comportamiento dinámico del bloque ante las siguientes combinaciones de aceleración en la base utilizando el método de aceleración angular lineal:

| Po (m/s ²) | w (rad/s) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 2 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 3 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 4 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 5 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 6 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 7 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 8 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 9 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 10 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 11 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 12 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 13 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 14 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 15 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 16 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 17 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 18 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 19 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| 20 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |

La estabilidad de las respuestas mediante métodos para resolver ecuaciones paso a paso, como el método de aceleración angular constante, varían de acuerdo al tamaño del paso de tiempo para la integración. Es por ello que se resolvieron las ecuaciones del comportamiento dinámico del bloque ante combinaciones de aceleración (las mencionadas anteriormente) utilizando

diferenciales de tiempo iguales a 0.01 segundos, 0.005 segundos, 0.002 segundos y 0.001 segundos para la altura de bloque de 3 metros y ancho de 1 metro. En cada uno de estos 4 ensayos, se determinó los tres estados posibles del comportamiento dinámico del bloque: la traslación, la oscilación y la volcadura (Caliò & Marletta, 2003). A continuación en los siguientes gráficos 73, 74, 75 y 76 se muestran los resultados en forma de puntos de los estados del comportamiento dinámico del bloque.

La figura 73 muestra el comportamiento dinámico de la columna para una serie de aceleraciones sinusoidales resuelta con una precisión de 0.01 segundos.

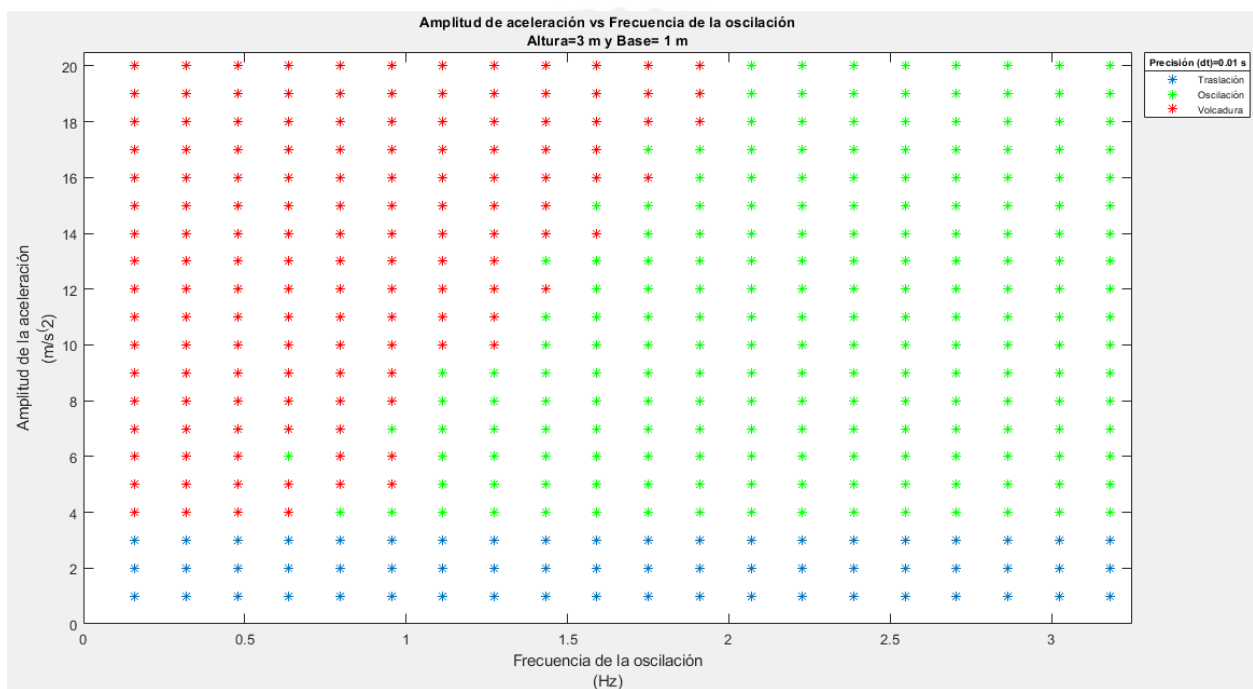


Figura 73: Mapa del comportamiento dinámico de una columna (H=3 m) y precisión de 0.01 segundos

La figura 74 muestra el comportamiento dinámico de la columna para una serie de aceleraciones sinusoidales resuelta con una precisión de 0.005 segundos.

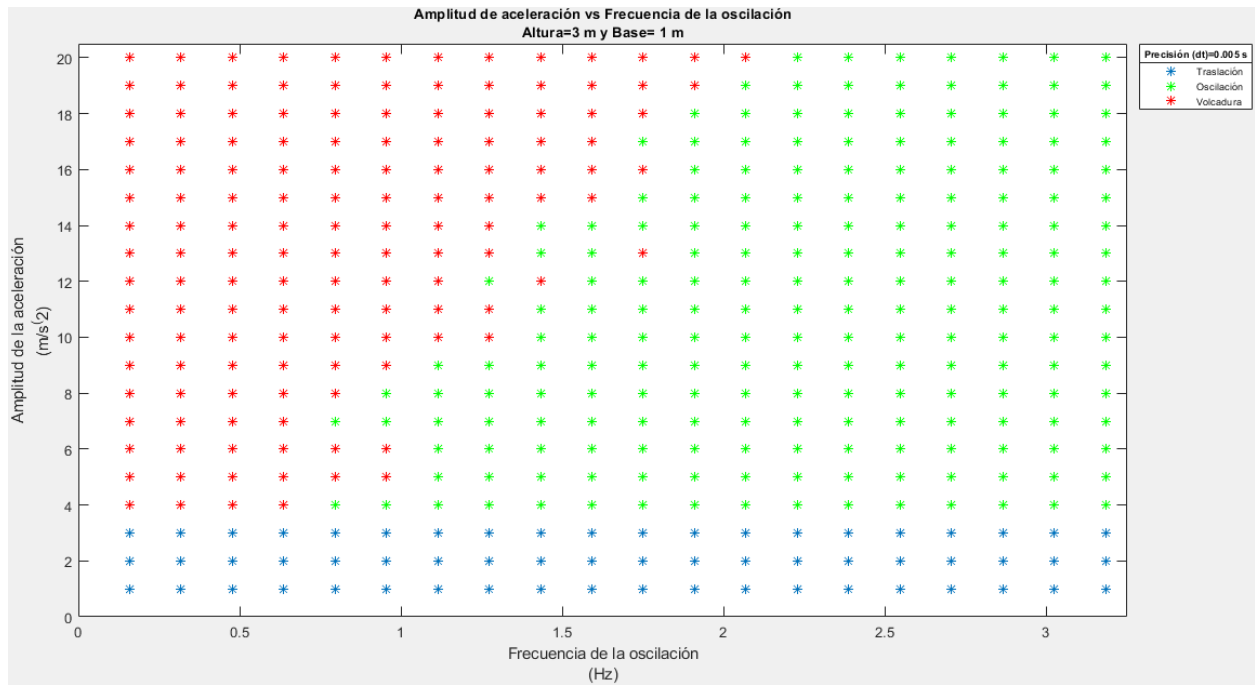


Figura 74: Mapa del comportamiento dinámico de una columna (H=3 m) y precisión de 0.005 segundos

La figura 75 muestra el comportamiento dinámico de la columna para una serie de aceleraciones sinusoidales resuelta con una precisión de 0.002 segundos.

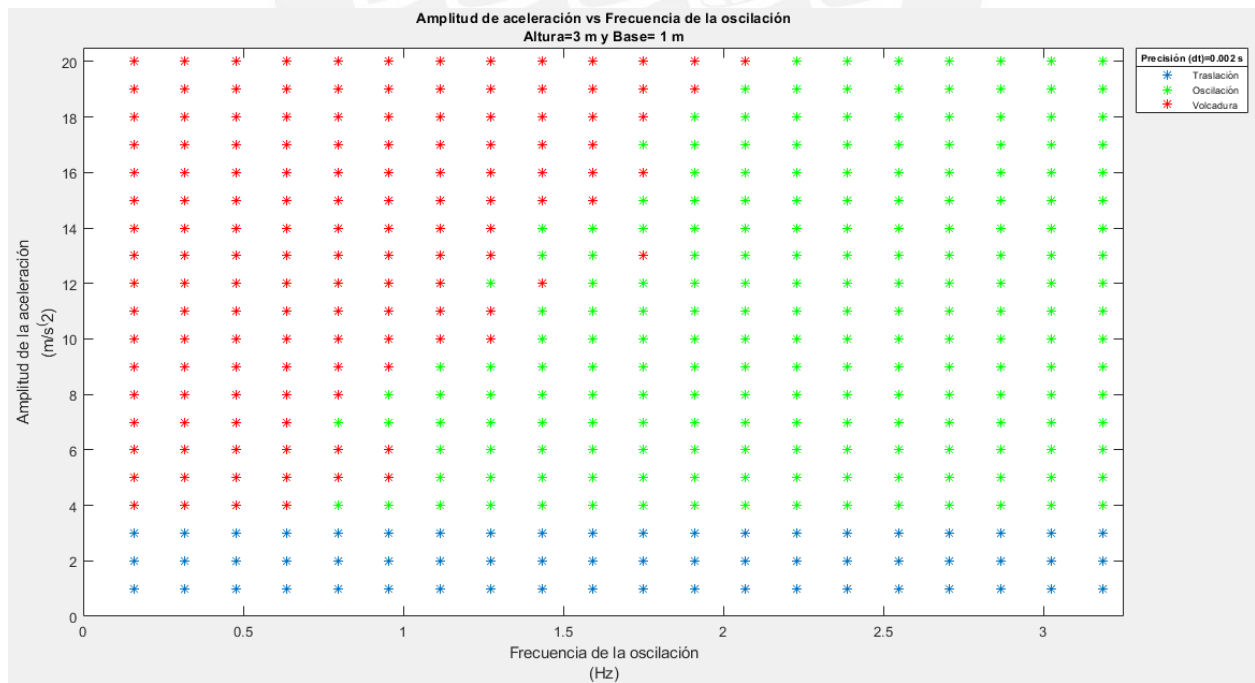


Imagen XX: Mapa del comportamiento dinámico de una columna (H=3 m) y precisión de 0.002 segundos

La figura 76 muestra el comportamiento dinámico de la columna para una serie de aceleraciones sinusoidales resuelta con una precisión de 0.001 segundos.

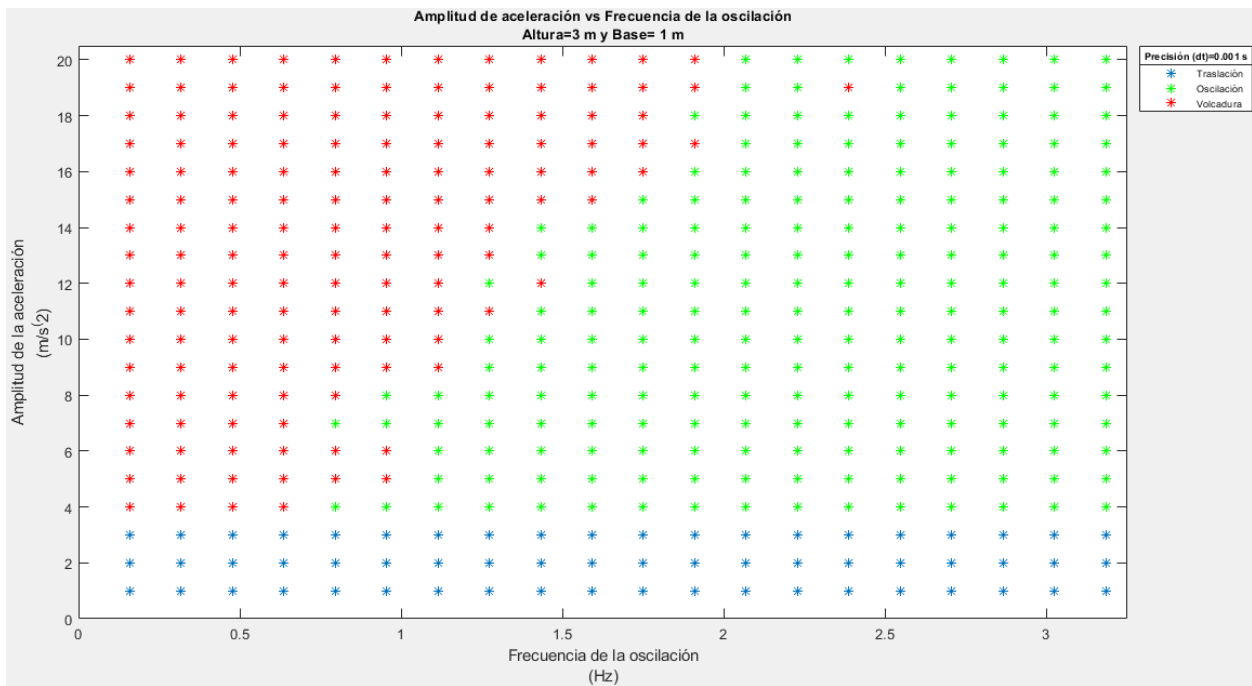


Figura 77: Mapa del comportamiento dinámico de una columna (H=3 m) y precisión de 0.001 segundos

Como se puede observar en los gráficos 73 y 77, el de menor y mayor precisión respectivamente, el comportamiento de la columna es el mismo. Por lo tanto, la respuesta producida por el método paso a paso con un diferencial de tiempo de 0.01 segundos es estable. Por lo tanto, los siguientes ensayos numéricos para las alturas de columna de 6 metros y de 12 metros se realizaran con esta precisión

La figura 78 muestra el mapa del comportamiento dinámica de una columna de altura de 6 metros resuelta con el método paso a paso de aceleración angular lineal con una precisión de 0.01 segundos.

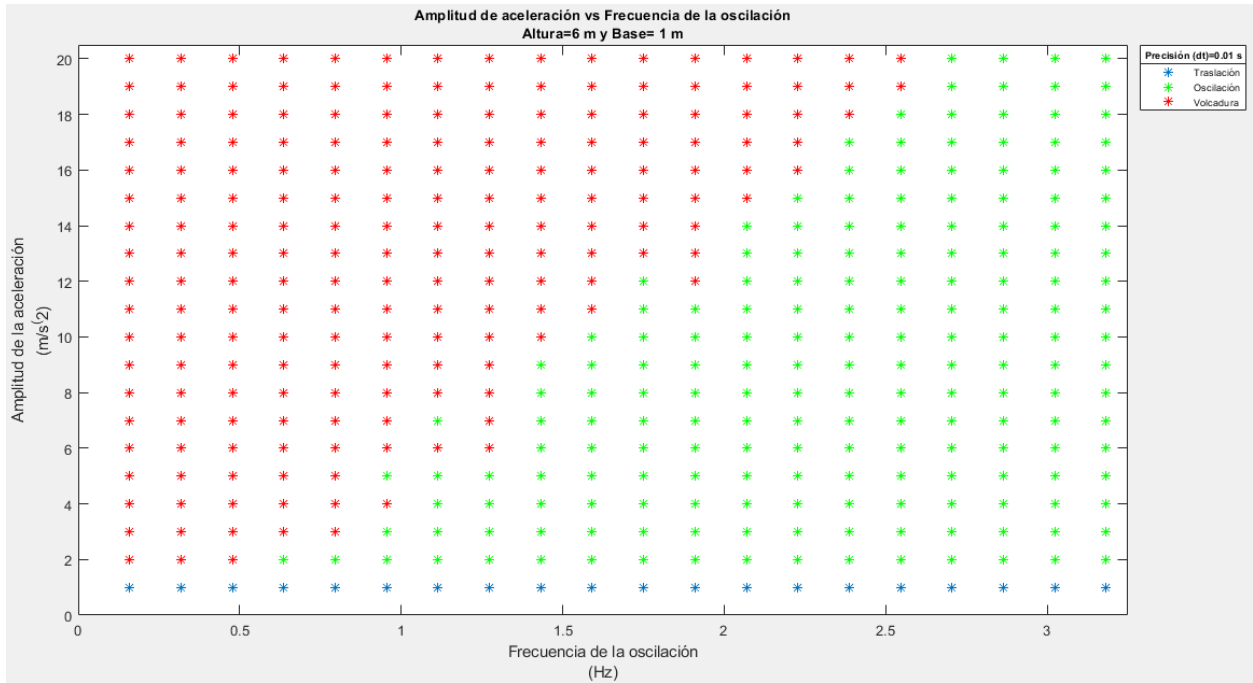


Figura 78: Mapa del comportamiento dinámico de una columna ($H=6$ m) y precisión de 0.01 segundos

La figura 79 muestra el mapa del comportamiento dinámica de una columna de altura de 12 metros resuelta con el método paso a paso de aceleración angular lineal con una precisión de 0.01 segundos.

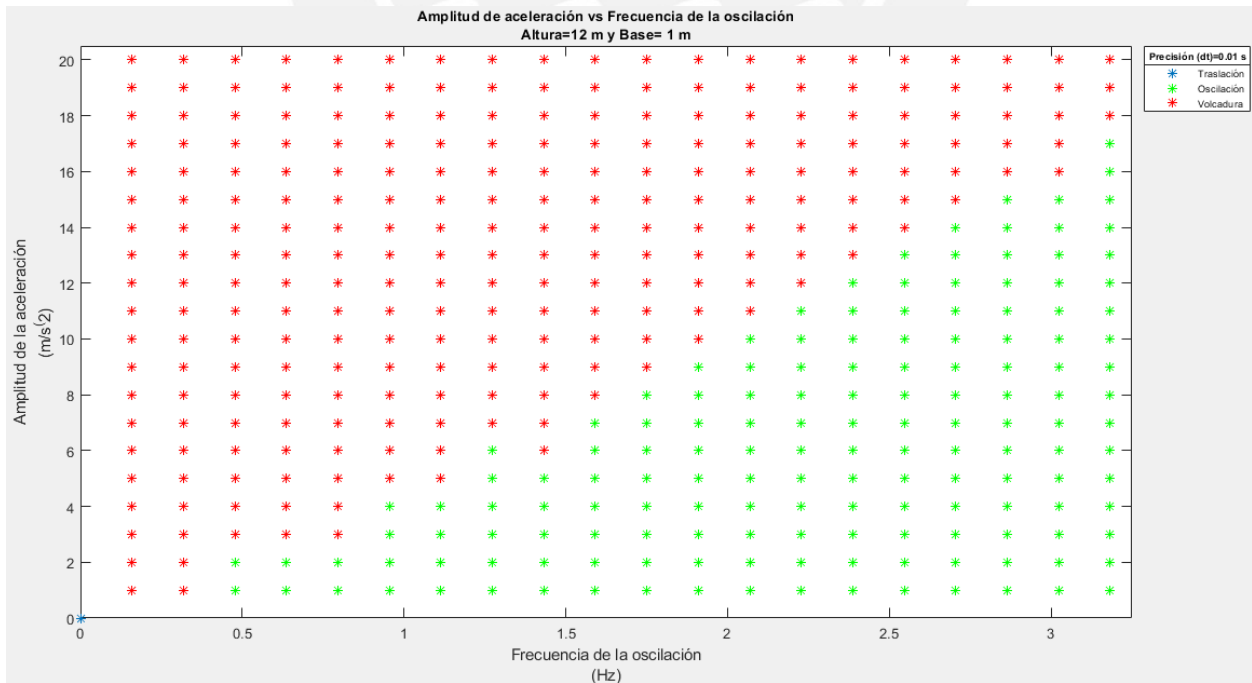


Figura 79: Mapa del comportamiento dinámico de una columna ($H=12$ m) y precisión de 0.01 segundos

segundos

A medida que se aumentó la altura de las columnas, las esbelteces disminuyeron. De la misma manera, el periodo natural de la columna disminuyó. En este estudio se considera que el periodo natural de la columna es igual al periodo natural de la columna cuando realiza una oscilación armónica simple. Se tuvo esta consideración por simplicidad y porque asumimos que no será muy diferente. Asimismo, en otros estudios se utilizó la misma consideración (Manos et al., 2013)(Makris & Vassiliou, 2015)(Manos & Demosthenous, 1995).

A continuación, en la tabla 1 se muestran las propiedades físicas y mecánicas de las tres columnas:

| Columna | Altura (m) | Base (m) | Esbeltez (rad) | Frecuencia Natural (Hz) | Coefficiente de Restitución |
|----------------|-------------------|-----------------|-----------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 3 | 1 | 0.3218 | 2.1572 | 0.8500 |
| 2 | 6 | 1 | 0.1651 | 1.5553 | 0.9595 |
| 3 | 12 | 1 | 0.0831 | 1.1054 | 0.9897 |

Tabla 1: Propiedades físicas y mecánicas de las columnas en estudio

Se procederá a realizar los gráficos del comportamiento dinámico de las columnas teniendo como ejes la amplitud de la excitación adimensional versus la relación de frecuencia de excitación.

La figura 80 muestra el mapa del comportamiento dinámico para un bloque con altura de 3 metros.

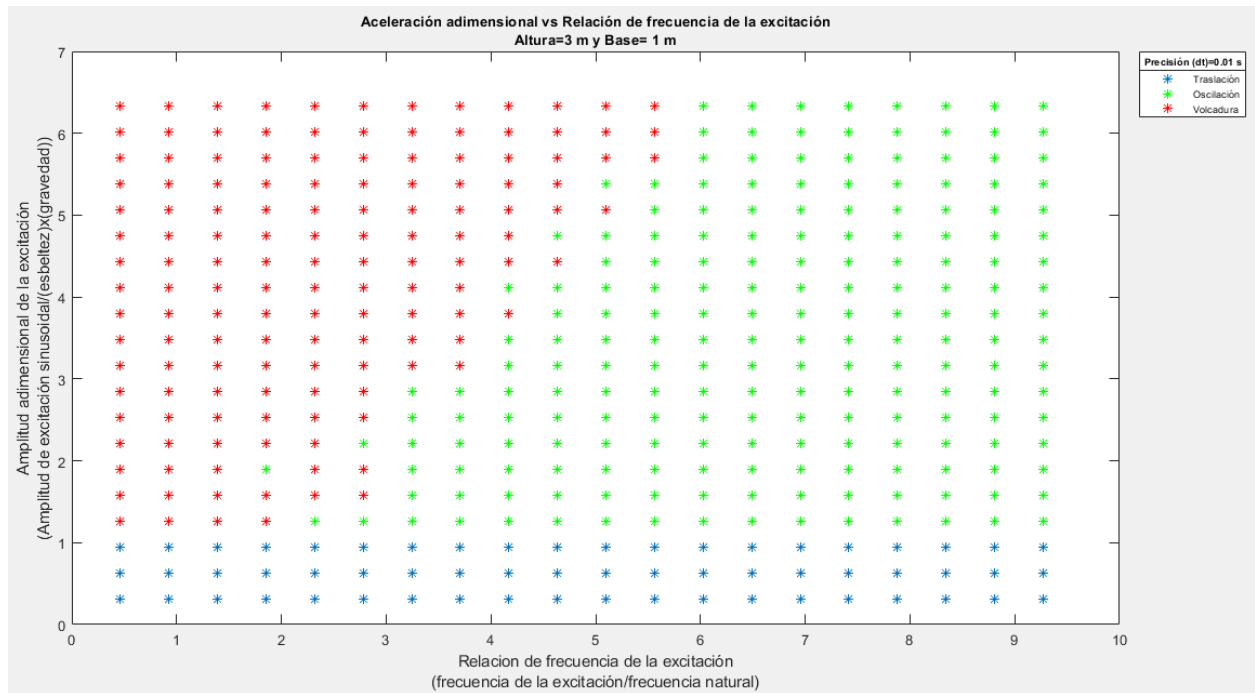


Figura 80: Mapa del comportamiento dinámico de una columna (H=3m) y precisión de 0.01 segundos

La figura 81 muestra el mapa del comportamiento dinámico para un bloque con altura de 6 metros.

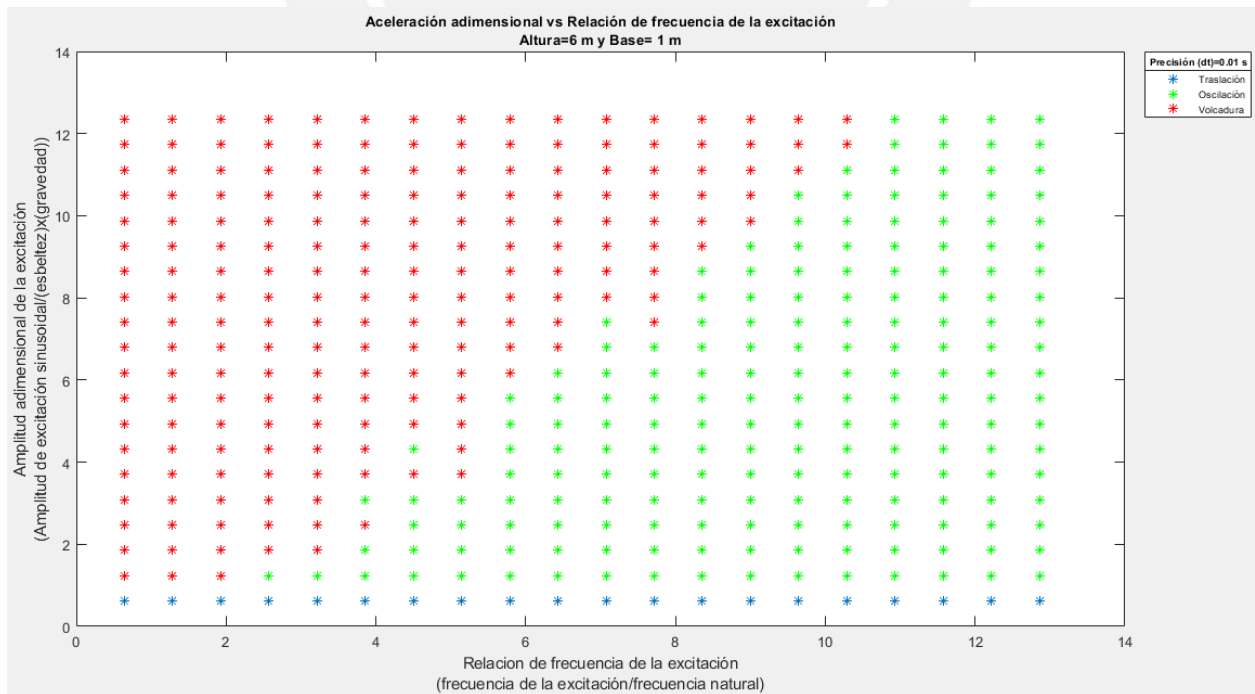


Figura 81: Mapa del comportamiento dinámico de una columna (H=6m) y precisión de 0.01 segundos

segundos

La figura 82 muestra el mapa del comportamiento dinámico para un bloque con altura de 12 metros.

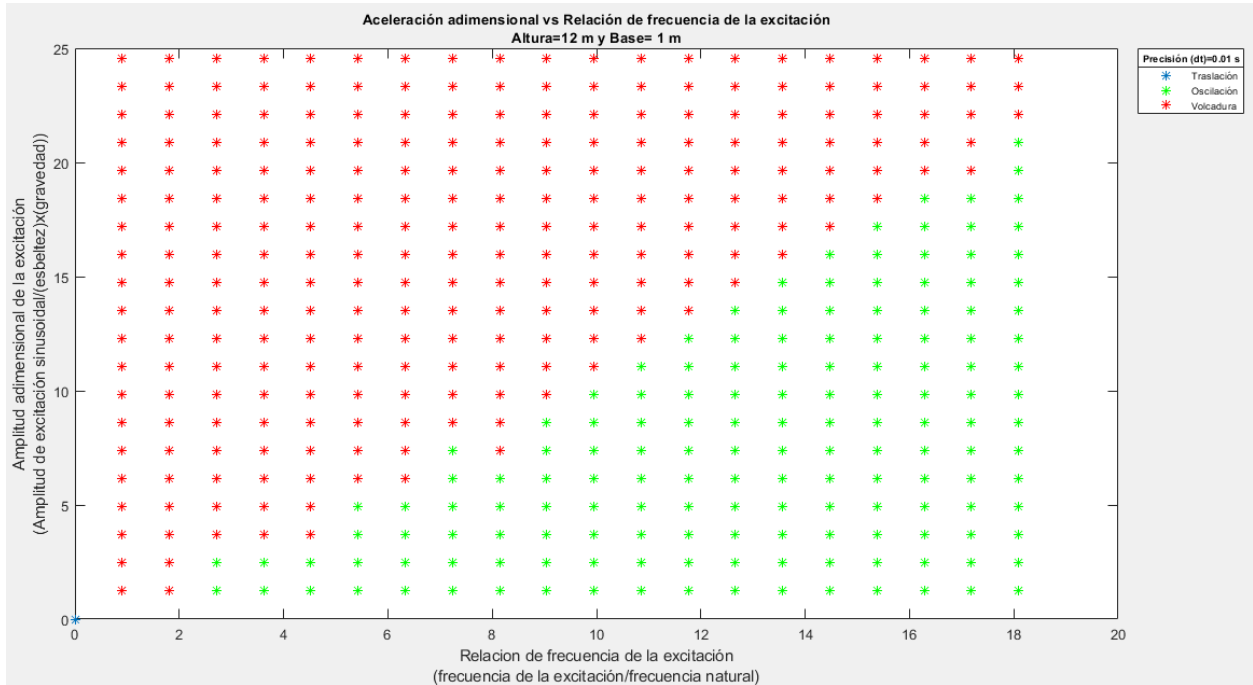


Figura 82: Mapa del comportamiento dinámico de una columna (H=12m) y precisión de 0.01 segundos

Además, otro parámetro importante es el del tiempo de volcadura de la columna y la rotación máxima del centro de masa del bloque para una excitación sinusoidal de base de duración de 10 segundos. Para ello se presentaran los resultados en forma de una superficie donde el eje X representa la relación de frecuencia de la excitación, el eje Y representa el tiempo adimensional de volcadura y el eje Z representa el ángulo de rotación máximo adimensional del centro de masa. Donde estos parámetros se calculan de la siguiente manera:

$$\text{Ángulo de rotación máximo adimensional} = \frac{\text{Ángulo máximo de rotación del bloque}}{\text{esbeltez del bloque}}$$

$$\text{Tiempo adimensional de volcadura del bloque} = \frac{\text{Tiempo de volcadura del bloque}}{\text{Periodo natural del bloque}}$$

La figura 83 muestra la superficie de la relación de frecuencias de la excitación versus tiempo adimensional de volcadura del bloque versus el ángulo de rotación adimensional para un bloque de altura de 3 metros y base de 1 metro.

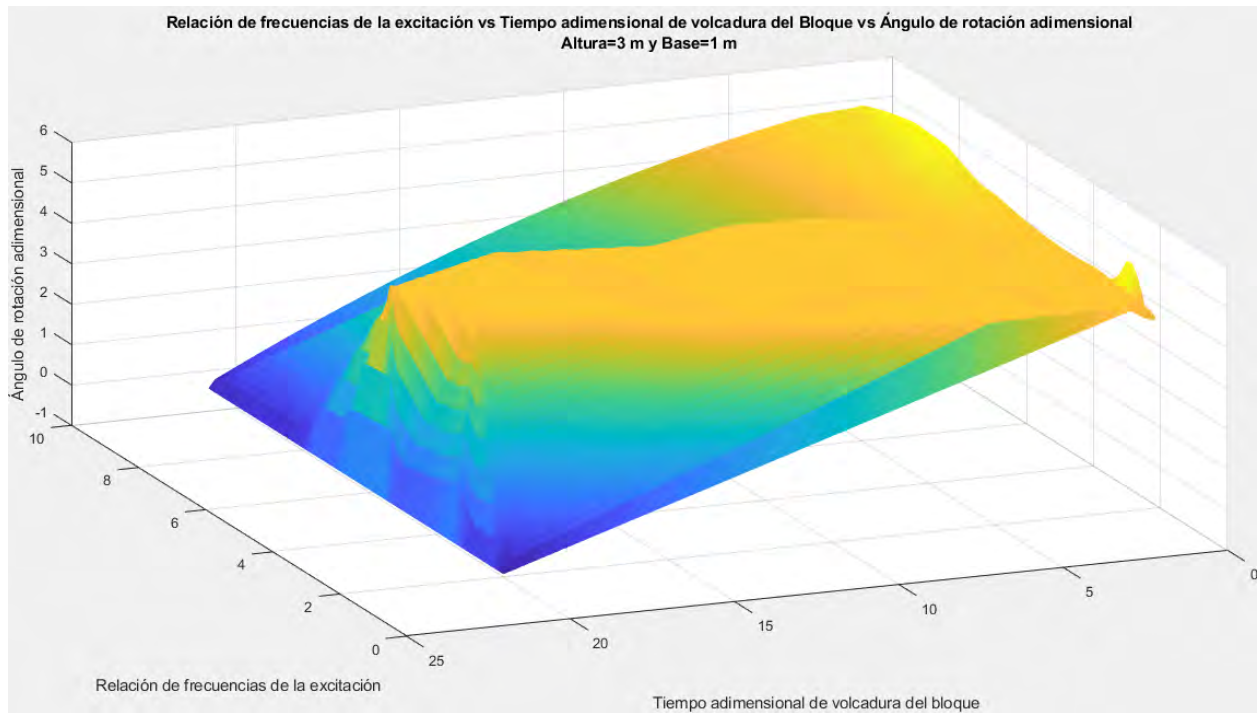


Figura 83: Relación de frecuencias de la excitación vs tiempo adimensional de volcadura del bloque vs ángulo de rotación adimensional para una altura de 3 metros.

La figura 84 muestra la superficie de la relación de frecuencias de la excitación versus tiempo adimensional de volcadura del bloque versus el ángulo de rotación adimensional para un bloque de altura de 6 metros y base de 1 metro.

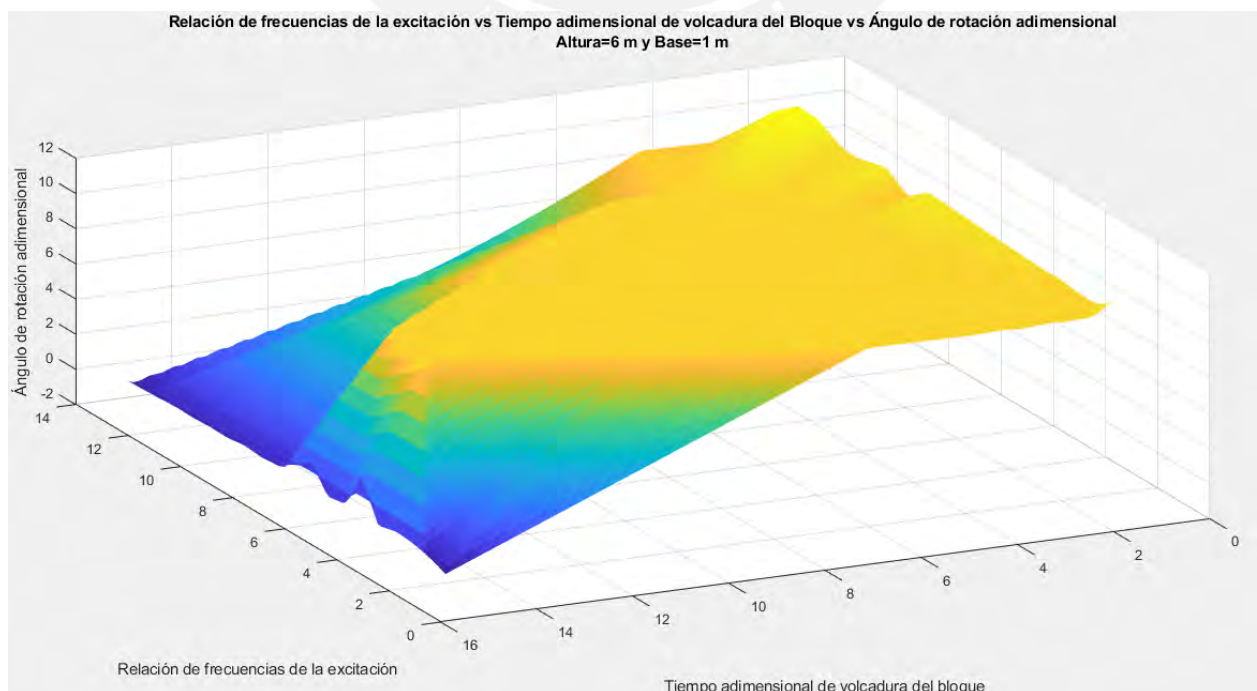


Figura 84: Relación de frecuencias de la excitación vs tiempo adimensional de volcadura del bloque vs ángulo de rotación adimensional para una altura de 6 metros.

La figura 85 muestra la superficie de la relación de frecuencias de la excitación versus tiempo adimensional de volcadura del bloque versus el ángulo de rotación adimensional para un bloque de altura de 12 metros y base de 1 metro.

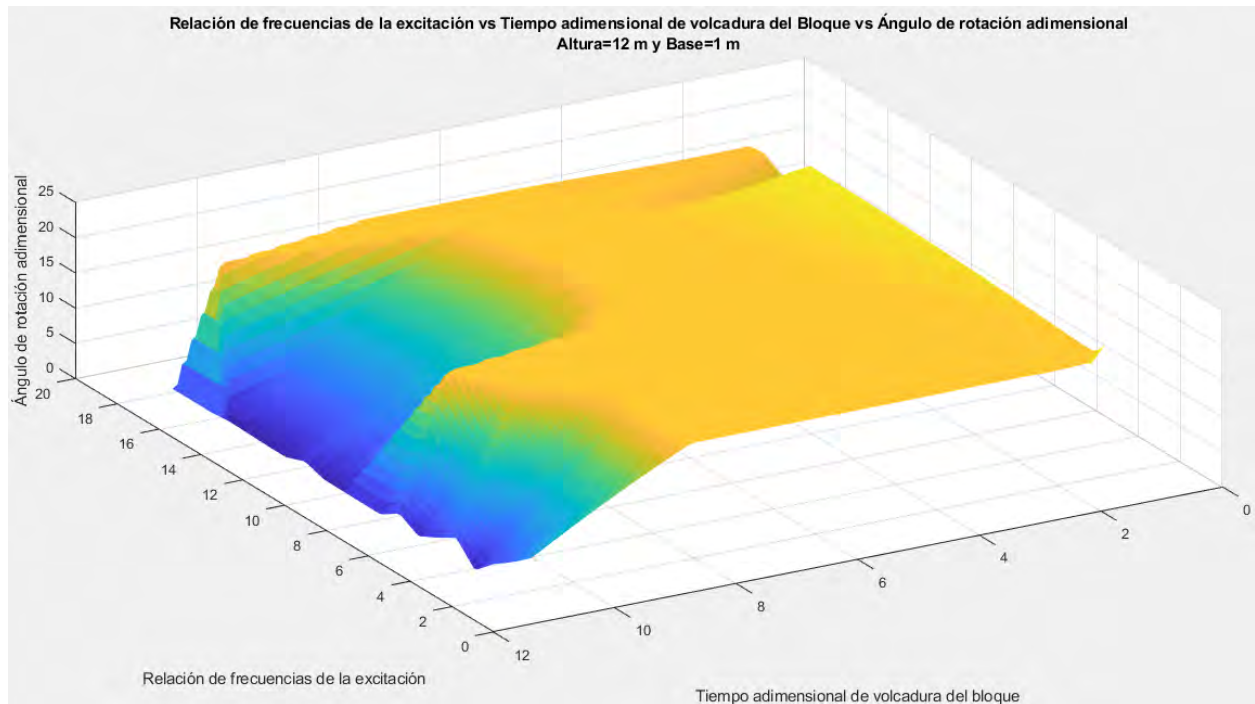


Figura 85: Relación de frecuencias de excitación vs tiempo adimensional de volcadura del bloque vs ángulo de rotación adimensional (Altura=12 metros)

Análisis de Resultados

Las figuras 73, 74, 75 y 76 muestran el mapa del comportamiento dinámico de una columna de altura de 3 metros y de base de 1 metro. Estos mapas fueron desarrollados con diferentes tamaños de diferenciales de tiempo (0.01 segundos, 0.005 segundos, 0.002 segundos y 0.001 segundos). Se realizó este procedimiento para encontrar el tamaño del diferencial de tiempo donde la respuesta de la ecuación del comportamiento dinámico paso a paso sea estable. Luego de realizar la comparación entre los resultados del comportamiento dinámico (traslación, oscilación, volcadura) entre la figura 73 (menor precisión) y la figura 76 (mayor precisión) se concluye que no existe una diferencia en más de 1 respuesta entre ambos gráficos. Es por ello que se decidió utilizar la el diferencial de tiempo de 0.01 segundos para el desarrollo del estudio, a parte de que el costo computacional en cuestión de tiempo es menor.

La figura 73 muestra que existe un fuerte cambio entre el estado de la traslación y el estado de oscilación y volcadura. De la misma manera, la traslación es independiente a la frecuencia de la oscilación y solo depende de la amplitud de la aceleración. Esto se puede comprobar con la ecuación [77] que marca el límite entre el estado de traslación y el estado de oscilación o volcadura. Para el caso del bloque de 3 metros que tiene una esbeltez de 0.3218 radianes, se necesita una aceleración mayor a 3.27 ms^{-2} para que comience el estado de oscilación. Es por ello que a partir de la amplitud de 4 ms^{-2} , se observa que el bloque se comporta en oscilación o volcadura.

En el caso del bloque de altura de 6 metros y base de 1 metro se observa en la figura 81 que al igual que en el bloque de 3 metros, la traslación es independiente a la frecuencia de la oscilación y solo depende de la amplitud de la aceleración. Además al aumentar la altura del bloque, la esbeltez disminuyo a 0.1651 radianes. Por lo tanto, utilizando la ecuación [77] se necesita una aceleración mayor a 1.6350 ms^{-2} para cambiar el comportamiento del bloque en traslación a oscilación o volcadura. Esta aceleración es menor a la que se necesito para cambiar el comportamiento en el bloque de 3 metros de altura.

Mientras que en el caso del bloque de 12 metros de altura, en la figura 79 se observa que no existe un claro limite entre la traslación y la oscilación-volcadura. Sin embargo, conociendo que la esbeltez de esta columna es 0.0831 rad y utilizando la ecuación [77] se calculo que el limite es

de una amplitud de aceleración de 0.8175 ms^{-2} . Dada la elección de las combinaciones de los ensayos numéricos este límite no se observa en la figura 79.

La tabla 1 muestra las propiedades físicas y mecánicas de las columnas en estudio. Se observa que a medida que la altura de las columnas aumenta, la frecuencia natural de la columna disminuye. Esto se debe a que la inercia rotacional de la columna es inversamente proporcional a la frecuencia natural de la oscilación. La altura y la inercia rotacional son directamente proporcionales.

Las figuras 80, 81 y 82 muestran los mapas del comportamiento dinámico de las columnas en relación de relación de frecuencias de excitación versus amplitudes adimensionales de la excitación. Es importante resaltar de los tres gráficos que cuando la relación de frecuencias de la excitación es igual a 1, independientemente de la amplitud adimensional de la excitación, todas las respuestas resultan en la volcadura del bloque. Esto se debe a que el bloque se encuentra en resonancia por lo que la frecuencia natural es igual a la frecuencia de la excitación. Con excepción cuando la amplitud es menor al límite para que comience la oscilación-volcadura del bloque.

Del mismo modo, es importante resaltar que la pendiente entre el límite de la oscilación y la volcadura disminuye a medida que la altura de la columna aumenta. Por lo tanto, la columna se vuelve más inestable al incrementar su esbeltez. Esto es debido a que la energía disipada por el impacto columna-suelo es menor a medida que la esbeltez disminuye como se puede observar en los coeficientes de restitución calculados con la ecuación [59] y se presentan en la tabla 1. De tal modo que el bloque tiene que experimentar velocidades angulares mayores en cada ciclo, resultando en aceleraciones y posiciones angulares más desfavorables.

Las figuras 83, 84 y 85 muestran las superficies generadas por la relación de frecuencias de la excitación (eje X) versus el tiempo adimensional de volcadura del bloque (eje Y) versus el ángulo de rotación adimensional (eje Z) para el bloque de altura de 3 metros. Se observa que el ángulo de rotación adimensional es máximo en los tres gráficos cuando la relación de frecuencias de la excitación se encuentra entre 0 y 6. Esta es la zona crítica del bloque, independientemente del tiempo adimensional de volcadura. Del mismo modo se observa que a partir de la relación de frecuencias mayor a 6 se observa un incremento del ángulo de rotación adimensional máximo mientras que el tiempo adimensional de volcadura disminuye. A medida que se aumenta la altura

del bloque, se observa que el cambio del ángulo de rotación adimensional máximo incrementa. No obstante, en el gráfico de altura de 12 metros se observa que a partir de la relación de frecuencias de excitación igual a 14, el ángulo de rotación adimensional máximo incrementa al igual que en las frecuencias del 0 al 6.

Conclusiones y Recomendaciones

El método de aceleración angular constante con un diferencial de tiempo de 0.01 segundos es estable para resolver la ecuación del comportamiento dinámico del bloque rígido. Esto se observa en los resultados de los mapas del comportamiento del bloque antes 400 combinaciones de aceleraciones sinusoidales.

La disminución de la esbeltez afecta en la estabilidad de las columnas. A medida que la altura del bloque incrementa, la columna se volvió más inestable para más combinaciones de excitaciones en la base.

El incremento en la altura disminuye la capacidad de disipación de energía de los bloques ocasionando que estos vuelquen más rápido y antes combinaciones de excitación en la base menores.

La simplificación de utilizar la frecuencia natural de un movimiento armónico simple de la columna es válida por lo que antes relación de frecuencias igual a 1 se provoca el fenómeno de resonancia independiente de la altura del bloque.

Independientemente de la altura del bloque o esbeltez, durante la relación de frecuencias de excitación de 0 al 6 se observa una zona crítica donde se presentan las rotaciones adimensionales máximas a lo largo del tiempo de volcadura adimensional.

Se recomienda lo siguiente:

- Realizar más ensayos numéricos en la banda entre la volcadura y la oscilación del bloque
- Realizar ensayos numéricos aumentando la base del bloque y manteniendo las alturas
- Utilizar un método numérico más preciso como Runge Kutta
- Optimizar los códigos de Matlab utilizando el compilador de Matlab

- Analizar la estabilidad de bloques ante registros sísmicos peruanos
- Analizar la estabilidad de monumentos históricos peruanos utilizando un modelo de bloques rígidos.



Anexo 1: Método de Aceleración Constante

```
clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Simple';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Posicion
Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial (Xpo)', 'Aceleracion
Inicial (Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial (s)', 'Base (m)', 'Altura
(m)'};
def = {'2', '3', '1', '0', '0', '150', '0', '0.2', '0.4'}; %Por default
ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este sea
resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);
%Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%Es un movimiento armonico simple
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
Xo=sscanf(resp{3}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{6}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{7}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{8}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{9}, '%f'); %Altura del bloque
%Se asumira un modelo de aceleracion constante, de tal manera que
%Xdi+1=Xdoi.
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
% $mXdp+KX=0$ 
%Se comenzara a iterar con cierto saltos llamados deltat
deltat=0.2; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Vector donde se guardan las posiciones.
veloXi=zeros(iter,1); %Vector donde se guardan las velocidad
acceXi=zeros(iter,1); %Vector donde se guardan las aceleraciones
tiempoXi=zeros(iter,1); %Vector donde se guardan los tiempos
analizados
posXi(1)=Xo; %Vector posicion inicial
veloXi(1)=Xpo; %Vector velocidad inicial
acceXi(1)=-rigidez*posXi(1)/masa; %Vector aceleracion
inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Vector tiempo inicial.

for i=2:iter %Iteraciones para hallar las aceleraciones

    posXi(i)=posXi(i-1)+veloXi(i-1)*deltat+(1/2)*acceXi(i-
1)*((deltat)^(2)); %Halla la posicion i+1
    veloXi(i)=veloXi(i-1)+acceXi(i-1)*deltat;
%Halla la velocidad i+1
    acceXi(i)=(-rigidez/masa)*posXi(i);
%Halla la aceleracion i+1
    tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;
%Halla EL tiempo i+1

end
```

```

figure; %Se crea una nueva imagen
axis(gca, 'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales
axis([0 50 -5 5]); %Se limita el dominio y rango del grafico

plot(tiempoXi, posXi, '*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
title('Posición CM vs Tiempo', 'FontSize', 10)
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Posición CM (m)')
axis equal; %Los ejes son iguales

hold on %Se utilizara el codigo "hold on"
para superponer graficos;
x = linspace(0, 15.93*pi); %Se creara el dominio de valores de
angulos desde 0 hasta 16*180.
omega = ((rigidez/masa)^(1/2)); %Se calcula el valor de frecuencia
angular
respuesta = cos(omega*x); %Respuesta teorica del movimiento
armonico simple
plot(x, respuesta); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo
hold off; %Se apaga la superposicion de
graficos

```



Anexo 2: Método de Aceleración promedio

```
clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Simple';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Posicion
Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial (Xpo)', 'Aceleracion
Inicial (Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial (s)', 'Base (m)', 'Altura
(m)'};
def = {'2', '3', '1', '0', '0', '500', '0', '0.2', '0.4'}; %Por default
ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este sea
resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);
%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%Es un movimiento armonico simple
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
Xo=sscanf(resp{3}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{6}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{7}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{8}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{9}, '%f'); %Altura del bloque
%Se asumira un modelo de aceleracion promedio, de tal manera que
%Xdi+1=Xdoi.
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
% $mXdp+kx=0$ 
%Se comenzara a iterar con cierto salos llamados deltat
deltat=0.1; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Posiciones en el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Velocidades en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Aceleraciones en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Tiempos en el transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Velocidad inicial.
acceXi(1)=-rigidez*posXi(1)/masa; %Aceleracion inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Tiempo inicial.

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

syms Xdpi

Xi=((deltat^2)/4)*(Xdpi+acceXi(i-1))+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
equation= masa*Xdpi+rigidez*Xi;
S=solve(equation==0, Xdpi);
acceXi(i)=S;
veloXi(i)=(acceXi(i)+acceXi(i-1))*(deltat/2)+veloXi(i-1);
posXi(i)=(acceXi(i)+acceXi(i-1))*((deltat^2)/4)+veloXi(i-
1)*deltat+posXi(i-1);
tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;

end
```

```

figure; %Crea una figura
axis(gca, 'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales

axis([-2 2 0 0.5]); %Se limita el dominio y rango del grafico

for i=1:iter %Se realizara el procedimiento n=iteraciones
veces para hallar las posiciones de los puntos del bloque.

    P1=[posXi(i)-(base/2) 0]; %Halla la posicion del punto 1 del
bloque (Esquina izquierda inferior)
    P2=[posXi(i)-(base/2) altura]; %Halla la posicion del punto 2 del
bloque (Esquina izquierda superior)
    P3=[posXi(i)+(base/2) altura]; %Halla la posicion del punto 3 del
bloque (Esquina derecha superior)
    P4=[posXi(i)+(base/2) 0]; %Halla la posicion del punto 4 del
bloque (Esquina derecha inferior)
    linea1=line([P1(1) P2(1)], [P1(2) P2(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 1 y 2
    linea2=line([P2(1) P3(1)], [P2(2) P3(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 2 y 3
    linea3=line([P3(1) P4(1)], [P3(2) P4(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 3 y 4
    linea4=line([P4(1) P1(1)], [P4(2) P1(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 4 y 1

    pause(deltat); %El tiempo en el que el programa
mantiene la imagen en la pantalla
    delete(linea1); %Se elimina la linea 1
    delete(linea2); %Se elimina la linea 2
    delete(linea3); %Se elimina la linea 3
    delete(linea4); %Se elimina la linea 4
end

figure; %Se crea una nueva imagen
axis(gca, 'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales
axis([0 50 -5 5]); %Se limita el dominio y rango del grafico

plot(tiempoXi, posXi, '*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
title('Posición CM vs Tiempo', 'FontSize', 10)
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Posición CM (m)')
axis equal; %Los ejes son iguales

hold on %Se utilizara el codigo "hold on" para superponer graficos;
x = linspace(0, 10*pi); %Se creara el dominio de valores de angulos
desde 0 hasta 16*180.
omega=((rigidez/masa)^(1/2)); %Se calcula el valor de frecuencia
angular
respuesta=cos(omega*x); %Respuesta teorica del movimiento
armonico simple
plot(x, respuesta); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo
hold off; %Se apaga la superposicion de
graficos

```

Anexo 3: Método de aceleración angular lineal

```
clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Simple';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Posicion
Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial (Xpo)', 'Aceleracion
Inicial (Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial (s)', 'Base (m)', 'Altura
(m)'};
def = {'2', '3', '1', '0', '0', '500', '0', '0.2', '0.4'}; %Por default
ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este sea
resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);
%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%Movimiento armonico simple
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
Xo=sscanf(resp{3}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{6}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{7}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{8}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{9}, '%f'); %Altura del bloque
%Se asumira un modelo de aceleracion lineal
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
% $mXdp+kx=0$ 
%Se comenzara a iterar con cierto salos llamados deltat
deltat=0.1; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Posiciones en el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Velocidades en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Aceleraciones en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Tiempos en el transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Velocidad inicial.
acceXi(1)=-rigidez*posXi(1)/masa; %Aceleracion inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Tiempo inicial.

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

syms Xdpi

Xi=((deltat^2)/2)*acceXi(i-1)+((deltat^2)/6)*(Xdpi-acceXi(i-
1))+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
equation= masa*Xdpi+rigidez*Xi;
S=solve(equation==0,Xdpi);
acceXi(i)=S;
veloXi(i)=acceXi(i-1)*deltat+(deltat/2)*(acceXi(i)-acceXi(i-
1))+veloXi(i-1);
posXi(i)=((deltat^2)/2)*acceXi(i-1)+((deltat^2)/6)*(acceXi(i)-
acceXi(i-1))+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;
```

```

end

figure; %Crea una figura
axis(gca, 'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales

axis([-2 2 0 0.5]); %Se limita el dominio y rango del grafico

for i=1:iter %Se realizara el procedimiento n=iteraciones
veces para hallar las posiciones de los puntos del bloque.

    P1=[posXi(i)-(base/2) 0]; %Halla la posicion del punto 1 del
bloque (Esquina izquierda inferior)
    P2=[posXi(i)-(base/2) altura]; %Halla la posicion del punto 2 del
bloque (Esquina izquierda superior)
    P3=[posXi(i)+(base/2) altura]; %Halla la posicion del punto 3 del
bloque (Esquina derecha superior)
    P4=[posXi(i)+(base/2) 0]; %Halla la posicion del punto 4 del
bloque (Esquina derecha inferior)
    linea1=line([P1(1) P2(1)], [P1(2) P2(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 1 y 2
    linea2=line([P2(1) P3(1)], [P2(2) P3(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 2 y 3
    linea3=line([P3(1) P4(1)], [P3(2) P4(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 3 y 4
    linea4=line([P4(1) P1(1)], [P4(2) P1(2)]); %Crea una linea entre
los puntos 4 y 1

    pause(deltat); %El tiempo en el que el programa
mantiene la imagen en la pantalla
    delete(linea1); %Se elimina la linea 1
    delete(linea2); %Se elimina la linea 2
    delete(linea3); %Se elimina la linea 3
    delete(linea4); %Se elimina la linea 4
end

figure; %Se crea una nueva imagen
axis(gca, 'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales
axis([0 50 -5 5]); %Se limita el dominio y rango del grafico

plot(tiempoXi, posXi, '*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
title('Posición CM vs Tiempo', 'FontSize', 10)
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Posición CM (m)')
axis equal; %Los ejes son iguales

hold on %Se utilizara el codigo "hold on" para superponer graficos;
x = linspace(0, 10*pi); %Se creara el dominio de valores de angulos
desde 0 hasta 16*180.
omega=((rigidez/masa)^(1/2)); %Se calcula el valor de frecuencia
angular
respuesta=Xo*cos(omega*x); %Respuesta teorica del movimiento
armonico simple
plot(x, respuesta); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo
hold off; %Se apaga la superposicion de
graficos

```

Anexo 4: Método de aceleración constante en sistema elástico amortiguado

```
clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Simple';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Coeficiente de
Amortiguamiento (c)', 'Posicion Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial
(Xpo)', 'Aceleracion Inicial (Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial
(s)', 'Base (m)', 'Altura (m)'};
def = {'2', '3', '1', '1', '0', '0', '150', '0', '0.2', '0.4'}; %Por default
ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este sea
resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);
%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el respo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%es un movimiento armonico simple, con amortiguamiento
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
amor=sscanf(resp{3}, '%f'); %amortiguamiento del resorte
Xo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{6}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{7}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{8}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{9}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{10}, '%f'); %Altura del bloque
%Se asumira un modelo de aceleracion constante, de tal manera que
%Xdi+1=Xdoi.
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
% $mXdp+cXp+kx=0$ 

deltat=0.1; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Posiciones en el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Velocidades en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Aceleraciones en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Tiempos en el transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Velocidad inicial.
acceXi(1)=(-rigidez*posXi(1)-amor*veloXi(1))/masa;
%Aceleracion inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Tiempo inicial.

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

    posXi(i)=posXi(i-1)+veloXi(i-1)*deltat+(1/2)*acceXi(i-
1)*((deltat)^(2)); %Halla la posicion i+1
    veloXi(i)=veloXi(i-1)+acceXi(i-1)*deltat;
%Halla la velocidad i+1
    acceXi(i)=(-1/masa)*(rigidez*posXi(i)+amor*veloXi(i));
%Halla la aceleracion i+1
    tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;
%Halla EL tiempo i+1
```

```

end

figure; %Se crea una nueva imagen
axis(gca, 'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales

plot(tiempoXi, posXi, '*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
title('Posición CM vs Tiempo', 'FontSize', 10) %Titulo del grafico
xlabel('Tiempo (s)') %Titulo del eje X
ylabel('Posición CM (m)') %Titulo del eje Y
axis equal; %Los ejes son iguales
hold on %Superposicion de graficos

%Se dibujo grafico de acuerdo a la respuesta conocida
D=(amor^2)-4*masa*rigidez;
Ccr=2*((masa*rigidez)^(1/2));
epsilon=amor/Ccr;
omega=(rigidez/masa)^(1/2);
omegadamp=omega*((1-(epsilon^2))^(1/2));
coefA=(Xpo+(epsilon*omega*Xo))/(omegadamp);
coefB=Xo;

x= linspace(0, 4.76*pi); %Se creara el dominio de valores de angulos
desde 0 hasta 16*180.

if D==0
    respuesta1=(exp(-omega*x).*(coefA*x+coefB)); %Respuesta
teorica del movimiento armonico simple
    plot(x, respuesta1); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo

elseif amor<(2*((masa*rigidez)^(1/2)))

respuesta2=((coefA*sin(omegadamp*x)+coefB*cos(omegadamp*x)).*(2.713).^(
-epsilon*omega*x);
    plot(x, respuesta2); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo
end

hold off

```


Anexo 5: Método de aceleración promedio en sistema elástico amortiguado

```

clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Simple';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Coeficiente de
Amortiguamiento (c)', 'Posicion Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial
(Xpo)', 'Aceleracion Inicial (Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial
(s)', 'Base (m)', 'Altura (m)'};
def = {'3', '2', '1', '1', '0', '0', '150', '0', '0.2', '0.4'}; %Por default
ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este sea
resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);
%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%Movimiento armonico simple, con amortiguamiento
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
amor=sscanf(resp{3}, '%f'); %amortiguamiento del resorte
Xo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{6}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{7}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{8}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{9}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{10}, '%f'); %Altura del bloque
%Se asumira un modelo de aceleracion constante, de tal manera que
%Xdi+1=Xdoi.
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
mXdpc+cXp+kx=0

deltat=0.1; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Posiciones en el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Velocidades en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Aceleraciones en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Tiempos en el transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Velocidad inicial.
acceXi(1)=(-rigidez*posXi(1)-amor*veloXi(1))/masa;
%Aceleracion inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Tiempo inicial.

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

syms Xdpi

Xi=((deltat^2)/4)*(Xdpi+acceXi(i-1))+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
Xpi=(Xdpi+acceXi(i-1))*(deltat/2)+veloXi(i-1);
equation= masa*Xdpi+amor*Xpi+rigidez*Xi;
S=solve(equation==0, Xdpi);
acceXi(i)=S;
veloXi(i)=(acceXi(i)+acceXi(i-1))*(deltat/2)+veloXi(i-1);
posXi(i)=(acceXi(i)+acceXi(i-1))*((deltat^2)/4)+veloXi(i-
1)*deltat+posXi(i-1);

```

```

    tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;

end

figure; %Se crea una nueva imagen
axis(gca,'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales

    plot(tiempoXi,posXi,'*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
    title('Posición CM vs Tiempo','FontSize',10) %Titulo del grafico
    xlabel('Tiempo (s)') %Titulo del eje X
    ylabel('Posición CM (m)') %Titulo del eje Y
    axis equal; %Los ejes son iguales
    hold on %Superposicion de graficos

%Se dibujo grafico de acuerdo a la respuesta conocida
D=(amor^2)-4*masa*rigidez;
Ccr=2*((masa*rigidez)^(1/2));
epsilon=amor/Ccr;
omega=(rigidez/masa)^(1/2);
omegadamp=omega*((1-(epsilon^2))^(1/2));
coefA=(Xpo+(epsilon*omega*Xo))/(omegadamp);
coefB=Xo;

    x = linspace(0,4.76*pi); %Se creara el dominio de valores de angulos
desde 0 hasta 16*180.

    if D==0
        respuesta1=(exp(-omega*x).*(coefA*x+coefB)); %Respuesta
teorica del movimiento armonico simple
        plot(x,respuesta1); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo

    elseif amor<(2*((masa*rigidez)^(1/2)))

respuesta2=((coefA*sin(omegadamp*x)+coefB*cos(omegadamp*x)).*(2.713).^(
-epsilon*omega*x);
        plot(x,respuesta2); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo
    end

    hold off

```

Anexo 6: Método de aceleración lineal en sistema elástico amortiguado


```

clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Simple';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Coeficiente de
Amortiguamiento (c)', 'Posicion Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial
(Xpo)', 'Aceleracion Inicial (Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial
(s)', 'Base (m)', 'Altura (m)'};
def = {'2', '3', '1', '1', '0', '0', '150', '0', '0.2', '0.4'}; %Por default
ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este sea
resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);
%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%es un movimiento armonico simple, con amortiguamiento
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
amor=sscanf(resp{3}, '%f'); %amortiguamiento del resorte
Xo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{6}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{7}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{8}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{9}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{10}, '%f'); %Altura del bloque
%Se asumira un modelo de aceleracion lineal
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
mXdpc+cXp+kx=0

deltat=0.1; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Posiciones en el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Velocidades en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Aceleraciones en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Tiempos en el transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Velocidad inicial.
acceXi(1)=(-rigidez*posXi(1)-amor*veloXi(1))/masa;
%Aceleracion inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Tiempo inicial.

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

syms Xdpi

Xi=((deltat^2)/2)*acceXi(i-1)+((deltat^2)/6)*(Xdpi-acceXi(i-
1))+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
Xpi=((deltat)/2)*(Xdpi-acceXi(i-1))+acceXi(i-1)*deltat+veloXi(i-1);
equation= masa*Xdpi+amor*Xpi+rigidez*Xi;
S=solve(equation==0, Xdpi);
acceXi(i)=S;
veloXi(i)=acceXi(i-1)*deltat+(deltat/2)*(acceXi(i)-acceXi(i-
1))+veloXi(i-1);
posXi(i)=((deltat^2)/2)*acceXi(i-1)+((deltat^2)/6)*(acceXi(i)-
acceXi(i-1))+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;

```

end

```
figure; %Se crea una nueva imagen
axis(gca, 'equal'); %Se creara un grafico con ejes iguales

plot(tiempoXi, posXi, '*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
title('Posición CM vs Tiempo', 'FontSize', 10) %Titulo del grafico
xlabel('Tiempo (s)') %Titulo del eje X
ylabel('Posición CM (m)') %Titulo del eje Y
axis equal; %Los ejes son iguales
hold on %Superposicion de graficos

%Se dibujo grafico de acuerdo a la respuesta conocida
D=(amor^2)-4*masa*rigidez;
Ccr=2*((masa*rigidez)^(1/2));
epsilon=amor/Ccr;
omega=(rigidez/masa)^(1/2);
omegadamp=omega*((1-(epsilon^2))^(1/2));
coefA=(Xpo+(epsilon*omega*Xo))/(omegadamp);
coefB=Xo;

x = linspace(0,4.76*pi); %Se creara el dominio de valores de angulos
desde 0 hasta 16*180.

if D==0
    respuesta1=(exp(-omega*x).*(coefA*x+coefB)); %Respuesta
teorica del movimiento armonico simple
    plot(x, respuesta1); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo

elseif amor<(2*((masa*rigidez)^(1/2)))
respuesta2=((coefA*sin(omegadamp*x)+coefB*cos(omegadamp*x)).*(2.713).^(-epsilon*omega*x);
    plot(x, respuesta2); %Se grafica la respuesta de la
posicion vs el tiempo
end

hold off
```

Anexo 7: Método de aceleración constante en sistema amortiguado forzado

```
clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
```

```

display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Amortiguado Forzado';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Coeficiente de
Amortiguamiento (c)', 'Posicion Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial
(Xpo)', 'Aceleracion Inicial(Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial
(s)', 'Base (m)', 'Altura (m)', 'Coeficiente Fuerza (Po)', 'Frecuencia
fuerza(wl)'};
def = {'2', '3', '2', '1', '0', '0', '100', '0', '0.2', '0.4', '5', '3'}; %Por
default ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este
sea resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt,tit,[1 50],def);
%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%Es un Movimiento amortiguado forzado
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
amor=sscanf(resp{3}, '%f'); %amortiguamiento del resorte
Xo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{6}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{7}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{8}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{9}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{10}, '%f'); %Altura del bloque
Po=sscanf(resp{11}, '%f');
omegaele=sscanf(resp{12}, '%f');

%Se asumira un modelo de aceleracion constante
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
% $mXdp+cXp+kx=Po\text{Sen}(wt)$ 

deltat=0.2; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Posiciones en el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Velocidades en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Aceleraciones en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Tiempos en el transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Velocidad inicial.
acceXi(1)=(Po-amor*Xpo-rigidez*Xo)/(masa); %Aceleracion
inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Tiempo inicial.

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

    tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;
%Hallar EL TIEMPO i+1
    posXi(i)=posXi(i-1)+veloXi(i-1)*deltat+(1/2)*acceXi(i-
1)*((deltat)^(2)); %Hallar la posicion i+1
    veloXi(i)=veloXi(i-1)+acceXi(i-1)*deltat;
%Hallar la velocidad i+1
    acceXi(i)=(1/masa)*(Po*sin(omegaele*tiempoXi(i))-rigidez*posXi(i)-
amor*veloXi(i)); %Hallar la aceleracion i+1

end

```

```

figure; %Se crea una nueva imagen

plot(tiempoXi,posXi,'*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
title('Posición CM vs Tiempo','FontSize',10)
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Posición CM (m)')
axis equal; %Los ejes son iguales
hold on %Se utilizara el codigo "hold on" para superponer graficos;

%Dibujo de la respuesta teorica
syms x(t)
Dx=diff(x);
ode = 2*diff(x,t,2)+2*diff(x,t)+3*x == 5*sin(3*t);
cond1=x(0)==1;
cond2=Dx(0)==0;
conds=[cond1 cond2];
xSol(t) = dsolve(ode,conds);
xSol = simplify(xSol);
tiempo = linspace(0,6*pi);
sym t
posSuelo=vpa(subs(xSol(t),t,tiempo));
plot(tiempo,posSuelo);

hold off

```



Anexo 8: Método de aceleración promedio en sistema amortiguado forzado

```

clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
tit = 'Movimiento Armonico Amortiguado Forzado';

```

```

prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Coeficiente de
Amortiguamiento (c)', 'Posicion Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial
(Xpo)', 'Aceleracion Inicial (Xdpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial
(s)', 'Base (m)', 'Altura (m)', 'Coeficiente Fuerza (Po)', 'Frecuencia
fuerza(wl)'};
def = {'2', '3', '2', '1', '0', '0', '200', '0', '0.2', '0.4', '5', '3'}; %Por
default ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que este
sea resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);
%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%es un movimiento armonico simple, con amortiguamiento
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
amor=sscanf(resp{3}, '%f'); %amortiguamiento del resorte
Xo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Velocidad Inicial
Xdpo=sscanf(resp{6}, '%f'); %Aceleracion Inicial
iter=sscanf(resp{7}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{8}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{9}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{10}, '%f'); %Altura del bloque
Po=sscanf(resp{11}, '%f');
omegaele=sscanf(resp{12}, '%f');

%Se asumira un modelo de aceleracion promedio
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
% $mXdp+cXp+kx=PoSen(wt)$ 

deltat=0.01; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Se creara un vector de 1 columna compuesto
de 0's con "n" numero de filas, siendo "n" el numero de iteraciones del
problema que se realizara. En este vector se guardaran las posiciones en
el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Se creara un vector de 1 columna compuesto
de 0's con "n" numero de filas, siendo "n" el numero de iteraciones del
problema que se realizara. En este vector se guardaran las velocidades
en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Se creara un vector de 1 columna compuesto
de 0's con "n" numero de filas, siendo "n" el numero de iteraciones del
problema que se realizara. En este vector se guardaran las aceleraciones
en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Se creara un vector de 1 columna compuesto
de 0's con "n" numero de filas, siendo "n" el numero de iteraciones del
problema que se realizara. En este vector se guardaran los tiempos en el
transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Se guarda en la primera fila de la columna
de posiciones, el valor de la posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Se guarda en la primera fila de la columna
de velocidades, el valor de la velocidad inicial.
acceXi(1)=(Po-amor*Xpo-rigidez*Xo)/(masa);
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Se guarda en la primera fila de la columna
de tiempo, el valor del tiempo inicial.

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

syms Xdpi

tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;

```

```

Xi=((deltat^2)/4)*(Xdpi+acceXi(i-1))+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
Xpi=(Xdpi+acceXi(i-1))*(deltat/2)+veloXi(i-1);
equation= masa*Xdpi+amor*Xpi+rigidez*Xi;
S=solve(equation==Po*sin(omegaele*tiempoXi(i)),Xdpi);
acceXi(i)=S;
veloXi(i)=(acceXi(i)+acceXi(i-1))*(deltat/2)+veloXi(i-1);
posXi(i)=(acceXi(i)+acceXi(i-1))*((deltat^2)/4)+veloXi(i-
1)*deltat+posXi(i-1);

```

```
end
```

```

plot(tiempoXi,posXi,'*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion %Los ejes son iguales
axis equal;

hold on %Se utilizara el codigo "hold on" para superponer graficos;

%Dibujo de la respuesta teorica
syms x(t)
Dx=diff(x);
ode = 2*diff(x,t,2)+2*diff(x,t)+3*x == 5*sin(3*t);
cond1=x(0)==1;
cond2=Dx(0)==0;
conds=[cond1 cond2];
xSol(t) = dsolve(ode,conds);
xSol = simplify(xSol);
tiempo = linspace(0,6*pi);
sym t
posSuelo=vpa(subs(xSol(t),t,tiempo));
plot(tiempo,posSuelo);

hold off

```

Anexo 9: Método de aceleración lineal en sistema amortiguado forzado

```
clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras
display('Ingresar la masa del bloque');
display('Ingresar la rigidez del resorte');
display('Ingresar posicion inicial');
display('Ingresar velocidad inicial');
display('Ingresar aceleracion inicial');
tit = 'Movimiento Armonico Amortiguado Forzado';
prompt = {'Masa del Bloque (m)', 'Rigidez del bloque (k)', 'Coeficiente de
Amortiguamiento (c)', 'Posicion Inicial (Xo)', 'Velocidad Inicial
(Xpo)', 'Iteraciones', 'Tiempo inicial (s)', 'Base (m)', 'Altura
(m)', 'Coeficiente Fuerza (Po)', 'Frecuencia fuerza (wl)'};
def = {'2', '3', '2', '1', '0', '100', '0', '0.2', '0.4', '5', '3'}; %
%Por default ingresamos los datos del problema de la pregunta 2 para que
este sea resuelto con el programa realizado.
resp = inputdlg(prompt, tit, [1 50], def);

%Para poder resolver este ejercicio se tiene que tener en cuenta la
%siguiente hipotesis. Se asumira que en el tiempo en 0 segundos
%se suelta desde el reposo una masa que ha sido desplazada
%cierta distancia desde su posicion de equilibrio
%es un movimiento armonico simple, con amortiguamiento
masa = sscanf(resp{1}, '%f'); %masa del bloque
rigidez=sscanf(resp{2}, '%f'); %rigidez del resorte
amor=sscanf(resp{3}, '%f'); %amortiguamiento del resorte
Xo=sscanf(resp{4}, '%f'); %Posicion Inicial
Xpo=sscanf(resp{5}, '%f'); %Velocidad Inicial
iter=sscanf(resp{6}, '%f'); %Numero de iteraciones
tiempoinicial=sscanf(resp{7}, '%f'); %Tiempo inicial
base=sscanf(resp{8}, '%f'); %Base del bloque
altura=sscanf(resp{9}, '%f'); %Altura del bloque
Po=sscanf(resp{10}, '%f');
omegaele=sscanf(resp{11}, '%f');

%Se asumira un modelo de aceleracion lineal
%Se conoce la ecuacion dinamica del movimiento del bloque
% $mXdp+cXp+kx=Po\text{Sen}(wt)$ 

deltat=0.05; %Intervalo de tiempo para analizar la siguiente aceleración
posXi=zeros(iter,1); %Posiciones en el transcurso del tiempo.
veloXi=zeros(iter,1); %Velocidades en el transcurso del tiempo.
acceXi=zeros(iter,1); %Aceleraciones en el transcurso del tiempo.
tiempoXi=zeros(iter,1); %Tiempos en el transcurso del tiempo.
posXi(1)=Xo; %Posicion inicial.
veloXi(1)=Xpo; %Velocidad inicial.
tiempoXi(1)=tiempoinicial; %Tiempo inicial.
acceXi(1)=(Po-amor*Xpo-rigidez*Xo)/(masa); %Aceleracion inicial

for i=2:iter %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones

syms Xdpi

tiempoXi(i)=tiempoXi(i-1)+deltat;

Xi=((deltat^2)/6)*(Xdpi-acceXi(i-1))+((acceXi(i-
1))*((deltat^2)/2)+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);
Xpi=(Xdpi-acceXi(i-1))*(deltat/2)+(acceXi(i-1)*deltat)+veloXi(i-1);
```

```

equation= masa*Xdpi+amor*Xpi+rigidez*Xi;
S=solve(equation==Po*sin(omegaele*tiempoXi(i)),Xdpi);
acceXi(i)=S;
veloXi(i)=(acceXi(i)-acceXi(i-1))*(deltat/2)+acceXi(i-
1)*deltat+veloXi(i-1);
posXi(i)=(acceXi(i)-acceXi(i-1))*((deltat^2)/6)+acceXi(i-
1)*(deltat^2)/2+veloXi(i-1)*deltat+posXi(i-1);

end

figure; %Se crea una nueva imagen

plot(tiempoXi,posXi,'*'); %Se dibujara la variables del tiempo
acumulado y la posicion
axis equal; %Los ejes son iguales

hold on %Se utilizara el codigo "hold on" para superponer graficos;

%Dibujo de la respuesta teorica
syms x(t)
Dx=diff(x);
ode = 2*diff(x,t,2)+2*diff(x,t)+3*x == 5*sin(3*t);
cond1=x(0)==1;
cond2=Dx(0)==0;
conds=[cond1 cond2];
xSol(t) = dsolve(ode,conds);
xSol = simplify(xSol);
tiempo = linspace(0,6*pi);
sym t
posSuelo=vpa(subs(xSol(t),t,tiempo));
plot(tiempo,posSuelo);

hold off

```


**Anexo 10: Respuesta mediante tres métodos de solución pasó a pasó
(aceleración angular constante, aceleración angular promedio y
aceleración angular lineal) de la ecuación del comportamiento dinámico
de la columna oscilante**

```

clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras

Xao=0;           %Posicion angular Inicial
Xpao=0;         %Velocidad angular Inicial
duracion=10;    %Numero de pasos
tiempoinicial=0; %Tiempo inicial
base=1/2;       %Media Base del Bloque
altura=3/2;     %Media Altura del Bloque
deltat=0.02;    %Diferencial de tiempo

masa=2400*(2*base)*(2*base)*(2*altura); %Masa de la columna
concreto
Po=10;          %Amplitud de la aceleracion del suelo
omegaele=4;     %Frecuencia de la Aceleracion

R=((base^2)+(altura^2))^(1/2); %Radio de la columna
esbeltez=atan(base/altura); %Angulo de esbeltez de la columna
gravedad=9.81; %Aceleracion de la gravedad (m/s^2)
ineracia=(4/3)*masa*(R^2); %Inercia para bloques rectangulares
(m^4)
r=((1-(3/2)*((sin(esbeltez))^2))); %Coef.de restitution por el
impacto bloque-suelo
pasos=duracion/deltat;
p=masa*gravedad*R/(ineracia);
puntosX=1;
iter=2;

%%%%%% Metodo de Aceleracion angular CTE %%%%%%
posXaicte=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
posicion angular
veloXaicte=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
velocidad angular
acceXaicte=zeros(iter,puntosX); %Vecotr 0's donde se guarda
aceleracion angular
tiempoXicte=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda el tiempo
Dcte=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
posiciones angulares en grados
posTotalcte=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se guarda
posicion total del CM
manos1cte=zeros(puntosX,1);
manos2cte=zeros(puntosX,1);
manos3cte=zeros(puntosX,1);
manos4cte=zeros(puntosX,1);
manos5cte=zeros(puntosX,1);
manos6cte=zeros(puntosX,1);
manos7cte=zeros(puntosX,1);
j=1;
h=1;
i=1;
tiempoXicte(i,j)=tiempoinicial; %Tiempo iniciali=1;

while 1

```

```

posXaicte(i,j)=Xao; %Posicion Angular
veloXaicte(i,j)=Xpao; %Velocidad Angular
Dcte(i,j)=rad2deg(posXaicte(i,j)); %Posicion Angular en grados

if Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i,j))>=0

acceXaicte(i,j)=(masa*gravedad*R*sin(esbeltez)+masa*R*Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia); %Aceleracion angular inicial
i=i+1;
tiempoXicte(i,j)=tiempoXicte(i-1,j)+deltat;
posXaicte(i)=(posXaicte(i-1)+veloXaicte(i-1)*deltat+(1/2)*acceXaicte(i-1)*((deltat)^(2))); %Halla la posicion i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector
veloXaicte(i)=veloXaicte(i-1)+acceXaicte(i-1)*deltat;
%Halla la velocidad i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector
acceXaicte(i)=(-1/inercia)*((masa*gravedad*R*sin(esbeltez+posXaicte(i)))-(masa*R*cos(esbeltez+posXaicte(i))*Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i))));

elseif Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i,j))<0
acceXaicte(i,j)=(-masa*gravedad*R*sin(esbeltez)-masa*R*Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia);
%Halla la aceleracion angular inicial
tiempoXicte(i,j)=tiempoXicte(i,j)+deltat;
i=i+1;
posXaicte(i)=(posXaicte(i-1)+veloXaicte(i-1)*deltat+(1/2)*acceXaicte(i-1)*((deltat)^(2))); %Halla la posicion i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector
veloXaicte(i)=veloXaicte(i-1)+acceXaicte(i-1)*deltat;
%Halla la velocidad i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector
acceXaicte(i)=(1/inercia)*((-masa*gravedad*R*sin(esbeltez-posXaicte(i)))-(masa*R*cos(esbeltez-posXaicte(i))*Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i)))); %Halla la aceleracion i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector

end
i=i+1;
tiempoXicte(i,j)=tiempoXicte(i-1,j)+deltat;

while i<=pasos

if posXaicte(i-1,j)>=0 %Se realiza el procedimiento si la posicion angular es positiva

posXaicte(i)=(posXaicte(i-1)+veloXaicte(i-1)*deltat+(1/2)*acceXaicte(i-1)*((deltat)^(2))); %Halla la posicion i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector

if posXaicte(i,j)*posXaicte(i-1,j)<0 %Verifica cambio de signo debido al impacto en la posicion angular
veloXaicte(i,j)=r*veloXaicte(i-1,j); %Velocidad despues del impacto
else
veloXaicte(i)=veloXaicte(i-1)+acceXaicte(i-1)*deltat;
end

end

```

```

    acceXaicte(i)=(1/inercia)*((-masa*gravedad*R*sin(esbeltez-
posXaicte(i)))-(masa*R*cos(esbeltez-
posXaicte(i))*Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i))));      %Halla la
aceleracion i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del
vector

```

```

elseif posXaicte(i-1,j)<0
    posXaicte(i)=(posXaicte(i-1)+veloXaicte(i-
1)*deltat+(1/2)*acceXaicte(i-1)*((deltat)^(2)));      %Halla la posicion
i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector
    if posXaicte(i,j)*posXaicte(i-1,j)<0                %Verifica cambio de
signo debido al impacto en la posicion angular
        veloXaicte(i,j)=r*veloXaicte(i-1,j);      %Velocidad despues del
impacto
    else
        veloXaicte(i)=veloXaicte(i-1)+acceXaicte(i-1)*deltat;
%Halla la velocidad i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la
fila i del vector
    end

```

```

    acceXaicte(i)=(-
1/inercia)*((masa*gravedad*R*sin(esbeltez+posXaicte(i)))-
(masa*R*cos(esbeltez+posXaicte(i))*Po*sin(omegaele*tiempoXicte(i))));

```

```
end
```

```

Dcte(i,j) = rad2deg(posXaicte(i,j));                    %Posicion
angular en grados

```

```

if Po<gravedad*tan(esbeltez)
    manos1cte(h)=omegaele;
    manos2cte(h)=p;
    manos3cte(h)=Po;
    manos4cte(h)=R;
    manos5cte(h)=omegaele/p;
    manos6cte(h)=Po/R;
    manos7cte(h)=0;
    break

```

```

elseif abs(posXaicte(i,j))<pi/2
    manos1cte(h)=omegaele;
    manos2cte(h)=p;
    manos3cte(h)=Po;
    manos4cte(h)=R;
    manos5cte(h)=omegaele/p;
    manos6cte(h)=Po/R;
    manos7cte(h)=1;
    if i==pasos
        break
    end

```

```

elseif abs(posXaicte(i,j))>=pi/2
    manos1cte(h)=omegaele;
    manos2cte(h)=p;
    manos3cte(h)=Po;
    manos4cte(h)=R;
    manos5cte(h)=omegaele/p;
    manos6cte(h)=Po/R;
    manos7cte(h)=2;
    break
end

```

```

        i=i+1
        tiempoXicte(i,j)=tiempoXicte(i-1,j)+deltat;

end

        if j==puntosX
            break
        end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Metodo de Aceleracion angular PROMEDIO %%%%%%%%%%%
posXaiprom=zeros(iter,puntosX);           %Vector 0's donde se
guarda posicion angular
veloXaiprom=zeros(iter,puntosX);         %Vector 0's donde se
guarda velocidad angular
acceXaiprom=zeros(iter,puntosX);         %Vecotr 0's donde se
guarda aceleracion angular
tiempoXiprom=zeros(iter,puntosX);        %Vector 0's donde se
guarda el tiempo
Dprom=zeros(iter,puntosX);               %Vector 0's donde se
guarda posiciones angulares en grados
posTotalprom=zeros(iter,puntosX);        %Vector 0's donde se
guarda posicion total del CM
manos1prom=zeros(puntosX,1);
manos2prom=zeros(puntosX,1);
manos3prom=zeros(puntosX,1);
manos4prom=zeros(puntosX,1);
manos5prom=zeros(puntosX,1);
manos6prom=zeros(puntosX,1);
manos7prom=zeros(puntosX,1);
j=1;
h=1;
i=1;
tiempoXiprom(i,j)=tiempoinicial;         %Tiempo iniciali=1;
while 1
if abs(Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j)))<gravedad*tan(esbeltez)
posXaiprom(i,j)=0;                       %Vector 0's donde se guarda posicion
angular
veloXaiprom(i,j)=0;                       %Vector 0's donde se guarda velocidad
angular
acceXaiprom(i,j)=0;                       %Vecotr 0's donde se guarda aceleracion
angular
Dprom(i,j)=0;                             %Vector 0's donde se guarda posiciones
angulares en grados
end
if abs(Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j)))>=gravedad*tan(esbeltez)
break
end
i=i+1
tiempoXiprom(i,j)=tiempoXiprom(i-1,j)+deltat
end

while 1

posXaiprom(i,j)=Xao;                      %Posicion Angular
veloXaiprom(i,j)=Xpao;                   %Velocidad Angular
Dprom(i,j)=rad2deg(posXaiprom(i,j));     %Posicion Angular en grados

```

```

    if Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j))>=0

acceXaiprom(i,j)=(masa*gravedad*R*sin(esbeltez)+masa*R*Po*sin(omegaele*t
iempoXiprom(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia); %Aceleracion angular inicial
    i=i+1
    tiempoXiprom(i,j)=tiempoXiprom(i-1,j)+deltat;

    syms Xdpirom
    Xiprom=((deltat^2)/4)*(Xdpirom+acceXaiprom(i-1))+veloXaiprom(i-
1)*deltat+posXaiprom(i-1);
    equationprom=-inercia*Xdpirom-
masa*Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j))*R*cos(-esbeltez-Xiprom);

    Sprom=vpasolve(equationprom==masa*R*gravedad*sin(-esbeltez-
Xiprom),Xdpirom);
    acceXaiprom(i,j)=Sprom;

    posXaiprom(i)=((deltat^2)/4)*(acceXaiprom(i)+acceXaiprom(i-
1))+veloXaiprom(i-1)*deltat+posXaiprom(i-1); %Halla la posicion i+1
con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector
    veloXaiprom(i)=(acceXaiprom(i)+acceXaiprom(i-
1))*(deltat/2)+veloXaiprom(i-1);
%Halla la velocidad i+1 con la

elseif Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j))<0

    acceXaiprom(i,j)=(-masa*gravedad*R*sin(esbeltez)-
masa*R*Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia);
%Aceleracion angular inicial
    tiempoXiprom(i,j)=tiempoXiprom(i,j)+deltat;
    i=i+1;
    syms Xdpirom

    Xiprom=((deltat^2)/4)*(Xdpirom+acceXaiprom(i-1))+veloXaiprom(i-
1)*deltat+posXaiprom(i-1);
    equationprom=inercia*Xdpirom+masa*Po*sin(omegaele... %Ecuacion
dinamica de un giro positivo del bloque
    *tiempoXiprom(i,j))*R*cos(esbeltez-Xiprom);
    Sprom=vpasolve(equationprom==masa*R*gravedad*sin(esbeltez-...
%Resuelve la ecuacion dinamica para un giro positivo
Xiprom),Xdpirom);
    acceXaiprom(i,j)=Sprom;

    posXaiprom(i)=((deltat^2)/4)*(acceXaiprom(i)+acceXaiprom(i-
1))+veloXaiprom(i-1)*deltat+posXaiprom(i-1); %Halla la posicion i+1
con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector
    veloXaiprom(i)=(acceXaiprom(i)+acceXaiprom(i-
1))*(deltat/2)+veloXaiprom(i-1);
end
i=i+1;
tiempoXiprom(i,j)=tiempoXiprom(i-1,j)+deltat;

    while i<=pasos %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones
        syms Xdpirom
        if posXaiprom(i-1,j)>=0 %Se realiza el procedimiento
si la posicion angular es positiva

            syms Xdpirom
            Xiprom=((deltat^2)/4)*(Xdpirom+acceXaiprom(i-1))+veloXaiprom(i-
1)*deltat+posXaiprom(i-1);

```

```

equationprom= inercia*Xdpiprom+masa*Po*sin(omegaele... %Ecuacion
dinamica de un giro positivo del bloque
*tiempoXiprom(i,j))*R*cos(esbeltez-Xiprom);
Sprom=vpasolve(equationprom==masa*R*gravedad*sin(esbeltez-...
%Resuelve la ecuacion dinamica para un giro positivo
Xiprom),Xdpiprom);
acceXaiprom(i,j)=Sprom;

posXaiprom(i)=((deltat^2)/4)*(acceXaiprom(i)+acceXaiprom(i-
1))+veloXaiprom(i-1)*deltat+posXaiprom(i-1); %Halla la pos

if posXaiprom(i,j)*posXaiprom(i-1,j)<0 %Verifica cambio
de signo debido al impacto en la posicion angular
veloXaiprom(i,j)=r*veloXaiprom(i-1,j); %Velocidad despues del
impacto
else
veloXaiprom(i,j)=(acceXaiprom(i,j)-acceXaiprom(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
+acceXaiprom(i-1,j)*deltat+veloXaiprom(i-1,j); %Halla
la velocidad angular en el paso "i+1"
end
elseif posXaiprom(i-1,j)<0 %Se realiza el procedimiento
si la posicion angular es positiva

Xiprom=((deltat^2)/4)*(Xdpiprom+acceXaiprom(i-1))+veloXaiprom(i-
1)*deltat+posXaiprom(i-1);
equationprom= -inercia*Xdpiprom-
masa*Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j))*R*cos(-esbeltez-Xiprom);
Sprom=vpasolve(equationprom==masa*R*gravedad*sin(-esbeltez-
Xiprom),Xdpiprom);
acceXaiprom(i,j)=Sprom;
posXaiprom(i)=((deltat^2)/4)*(acceXaiprom(i)+acceXaiprom(i-
1))+veloXaiprom(i-1)*deltat+posXaiprom(i-1); %Halla la posicion i+1
con la informcion conocida y lo guarda en la fila i del vector

if posXaiprom(i,j)*posXaiprom(i-1,j)<0 %Verifica cambio
de signo debido al impacto en la posicion angular
veloXaiprom(i,j)=r*veloXaiprom(i-1,j);
%Velocidad despues del impacto
else
veloXaiprom(i,j)=(acceXaiprom(i,j)-acceXaiprom(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
+acceXaiprom(i-1,j)*deltat+veloXaiprom(i-1,j); %Halla
la velocidad angular en el paso "i+1"
end
end
Dprom(i,j) = rad2deg(posXaiprom(i,j));
%Posicion angular en grados

if posXaiprom(i-1,j)>=0 %Para
giros positivos
posTotalprom(i,j)=(-Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j)))/...
%Posicion total del C.M
(omegaele^2)+base-R*sin(esbeltez-posXaiprom(i,j));

elseif posXaiprom(i-1,j)<0 %Para
giros negativos
posTotalprom(i,j)=(-Po*sin(omegaele*tiempoXiprom(i,j)))/...
%Posicion total del CM
(omegaele^2)+base-R*sin(esbeltez+posXaiprom(i,j));

```

```

end
if Po<gravedad*tan(esbeltez)
manos1prom(h)=omegaele;
manos2prom(h)=p;
manos3prom(h)=Po;
manos4prom(h)=R;
manos5prom(h)=omegaele/p;
manos6prom(h)=Po/R;
manos7prom(h)=0;
break
elseif abs(posXaiprom(i,j))<pi/2
manos1prom(h)=omegaele;
manos2prom(h)=p;
manos3prom(h)=Po;
manos4prom(h)=R;
manos5prom(h)=omegaele/p;
manos6prom(h)=Po/R;
manos7prom(h)=1;
if i==pasos
break
end
elseif abs(posXaiprom(i,j))>=pi/2
manos1prom(h)=omegaele;
manos2prom(h)=p;
manos3prom(h)=Po;
manos4prom(h)=R;
manos5prom(h)=omegaele/p;
manos6prom(h)=Po/R;
manos7prom(h)=2;
break
end

i=i+1
tiempoXiprom(i,j)=tiempoXiprom(i-1,j)+deltat;
%Halla EL TIEMPO i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i
del vector

end %while
%omegaele=omegaele+j;

if j==puntosX
break
end

end %while

%%%%%%%% Metodo de Aceleracion angular LINEAL %%%%%%%%%

posXailineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posicion angular
veloXailineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda velocidad angular
acceXailineal=zeros(iter,puntosX); %Vecotr 0's donde se
guarda aceleracion angular
tiempoXilineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde
se guarda el tiempo

```

```

Dlineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posiciones angulares en grados
posTotallineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posicion total del CM
manos1lineal=zeros(puntosX,1);
manos2lineal=zeros(puntosX,1);
manos3lineal=zeros(puntosX,1);
manos4lineal=zeros(puntosX,1);
manos5lineal=zeros(puntosX,1);
manos6lineal=zeros(puntosX,1);
manos7lineal=zeros(puntosX,1);
j=1;
h=1;
i=1;
tiempoXilineal(i,j)=tiempoinicial; %Tiempo iniciali=1;

while 1
if abs(Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j)))<gravedad*tan(esbeltez)
posXailineal(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda posicion
angular
veloXailineal(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda velocidad
angular
acceXailineal(i,j)=0; %Vecotr 0's donde se guarda
aceleracion angular
Dlineal(i,j)=0; %Vector 0's donde se guarda
posiciones angulares en grados
end
if abs(Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j)))>=gravedad*tan(esbeltez)
break
end
i=i+1;
tiempoXilineal(i,j)=tiempoXilineal(i-1,j)+deltat;
end

while 1

posXailineal(i,j)=Xao; %Posicion Angular
veloXailineal(i,j)=Xpao; %Velocidad Angular
Dlineal(i,j)=rad2deg(posXailineal(i,j)); %Posicion Angular en grados
%posTotallineal(i,j)=0; %Posicion Total del CM
if Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j))>=0
acceXailineal(i,j)=(masa*gravedad*R*sin(esbeltez)+masa*R*Po*sin(omegaele
*tiempoXilineal(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia); %Aceleracion angular
inicial
i=i+1;
tiempoXilineal(i,j)=tiempoXilineal(i-1,j)+deltat;

syms Xdpilineal

Xilineal=((deltat^2)/6)*(Xdpilineal+acceXailineal(i-
1,j))+ (acceXailineal(i-1,j))*(deltat^2)/2+veloXailineal(i-
1,j)*deltat+posXailineal(i-1,j);

equationlineal= -inercia*Xdpilineal-
masa*Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j))*R*cos(-esbeltez-Xilineal);

Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*gravedad*sin(-esbeltez-
Xilineal),Xdpilineal);
acceXailineal(i,j)=Slineal;

posXailineal(i,j)=((deltat^2)/6)*(acceXailineal(i,j)-acceXailineal...

```



```

(i-1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat...
+posXailineal(i-1,j);
%Halla la posicion angular en el paso "i+1"

veloXailineal(i,j)=(acceXailineal(i,j)-acceXailineal(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
+acceXailineal(i-1,j)*deltat+veloXailineal(i-1,j);
%Halla la velocidad angular en el paso "i+1"

elseif Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j))<0
acceXailineal(i,j)=(-masa*gravedad*R*sin(esbeltez)-
masa*R*Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j))*cos(esbeltez))/(inercia);
%Aceleracion angular inicial
tiempoXilineal(i,j)=tiempoXilineal(i,j)+deltat;
i=i+1;
syms Xdpilineal
Xilineal=((deltat^2)/6)*(Xdpilineal+acceXailineal(i-
1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2)/2+veloXailineal(i-
1,j)*deltat+posXailineal(i-1,j);

equationlineal= inercia*Xdpilineal+masa*Po*sin(omegaele...
%Ecuacion dinamica de un giro positivo del bloque
*tiempoXilineal(i,j))*R*cos(esbeltez-Xilineal);
Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*gravedad*sin(esbeltez-...
%Resuelve la ecuacion dinamica para un giro positivo
Xilineal),Xdpilineal);
acceXailineal(i,j)=Slineal;

posXailineal(i,j)=((deltat^2)/6)*(acceXailineal(i,j)-
acceXailineal...
(i-1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat...
+posXailineal(i-1,j);

veloXailineal(i,j)=(acceXailineal(i,j)-acceXailineal(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
+acceXailineal(i-1,j)*deltat+veloXailineal(i-1,j);
%Halla la velocidad angular en el paso "i+1"
end
i=i+1;
tiempoXilineal(i,j)=tiempoXilineal(i-1,j)+deltat;

while i<=pasos %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones
syms Xdpilineal

if posXailineal(i-1,j)>=0 %Se realiza el
procedimiento si la posicion angular es positiva

Xilineal=((deltat^2)/6)*(Xdpilineal+acceXailineal(i-
1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2)/2+veloXailineal(i-
1,j)*deltat+posXailineal(i-1,j);

equationlineal= inercia*Xdpilineal+masa*Po*sin(omegaele...
%Ecuacion dinamica de un giro positivo del bloque
*tiempoXilineal(i,j))*R*cos(esbeltez-Xilineal);
Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*gravedad*sin(esbeltez-...
%Resuelve la ecuacion dinamica para un giro positivo

```

```

Xilineal),Xdpilineal);
acceXailineal(i,j)=Slineal;

    posXailineal(i,j)=((deltat^2)/6)*(acceXailineal(i,j)-
acceXailineal...
    (i-1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat...
    +posXailineal(i-1,j);
%Halla la posicion angular en el paso "i+1"

    if posXailineal(i,j)*posXailineal(i-1,j)<0                %Verifica
cambio de signo debido al impacto en la posicion angular
        veloXailineal(i,j)=r*veloXailineal(i-1,j);    %Velocidad despues
del impacto
    else
        veloXailineal(i,j)=(acceXailineal(i,j)-acceXailineal(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
        +acceXailineal(i-1,j)*deltat+veloXailineal(i-1,j);
%Halla la velocidad angular en el paso "i+1"
    end

    elseif posXailineal(i-1,j)<0                %Se realiza el
procedimiento si la posicion angular es positiva

        Xilineal=((deltat^2)/6)*(Xdpilineal+acceXailineal(i-
1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat+posXailineal(i-1,j);

        equationlineal= -inercia*Xdpilineal-
masa*Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j))*R*cos(-esbeltez-Xilineal);

        Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*gravedad*sin(-esbeltez-
Xilineal),Xdpilineal);
        acceXailineal(i,j)=Slineal;

        posXailineal(i,j)=((deltat^2)/6)*(acceXailineal(i,j)-acceXailineal...
        (i-1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat...
        +posXailineal(i-1,j);
%Halla la posicion angular en el paso "i+1"

        if posXailineal(i,j)*posXailineal(i-1,j)<0                %Verifica
cambio de signo debido al impacto en la posicion angular
            veloXailineal(i,j)=r*veloXailineal(i-1,j);
%Velocidad despues del impacto
        else
            veloXailineal(i,j)=(acceXailineal(i,j)-acceXailineal(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
            +acceXailineal(i-1,j)*deltat+veloXailineal(i-1,j);
%Halla la velocidad angular en el paso "i+1"
        end
    end

    Dlineal(i,j) = rad2deg(posXailineal(i,j));
%Posicion angular en grados

    if posXailineal(i-1,j)>=0                %Para
giros positivos
        posTotallineal(i,j)=(-Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j)))/...
%Halla la posicion total del C.M
        (omegaele^2)+base-R*sin(esbeltez-posXailineal(i,j));

```

```

elseif posXilineal(i-1,j)<0 %Para
giros negativos
    posTotallineal(i,j)=(-Po*sin(omegaele*tiempoXilineal(i,j)))/...
%Posicion total del CM
    (omegaele^2)+base-R*sin(esbeltez+posXilineal(i,j));

end

if Po<gravedad*tan(esbeltez)
    manos1lineal(h)=omegaele;
    manos2lineal(h)=p;
    manos3lineal(h)=Po;
    manos4lineal(h)=R;
    manos5lineal(h)=omegaele/p;
    manos6lineal(h)=Po/R;
    manos7lineal(h)=0;
    break
elseif abs(posXilineal(i,j))<pi/2
    manos1lineal(h)=omegaele;
    manos2lineal(h)=p;
    manos3lineal(h)=Po;
    manos4lineal(h)=R;
    manos5lineal(h)=omegaele/p;
    manos6lineal(h)=Po/R;
    manos7lineal(h)=1;
    if i==pasos
        break
    end
elseif abs(posXilineal(i,j))>=pi/2
    manos1lineal(h)=omegaele;
    manos2lineal(h)=p;
    manos3lineal(h)=Po;
    manos4lineal(h)=R;
    manos5lineal(h)=omegaele/p;
    manos6lineal(h)=Po/R;
    manos7lineal(h)=2;
    break
end

i=i+1
tiempoXilineal(i,j)=tiempoXilineal(i-1,j)+deltat;
%Halla EL TIEMPO i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i
del vector
end %while
%omegaele=omegaele+j;

if j==puntosX
    break
end

end %while

figure
ax1=subplot(4,1,1);

```

```

uwu=plot(ax1,tiempoXicte,acceXaicte,'g*')
hold on
uwu=plot(ax1,tiempoXiprom,acceXaiprom,'b*')
hold on
uwu=plot(ax1,tiempoXilineal,acceXailineal,'r*')
title(ax1,'Aceleracion Angular vs Tiempo','FontSize',10)

ax2=subplot(4,1,2)
uwu=plot(ax2,tiempoXicte,veloXaicte,'g*')
hold on
uwu=plot(ax2,tiempoXiprom,veloXaiprom,'b*')
hold on
uwu=plot(ax2,tiempoXilineal,veloXailineal,'r*')
title(ax2,'Velocidad Angular vs Tiempo','FontSize',10)

ax3=subplot(4,1,3)
uwu=plot(ax3,tiempoXicte,posXaicte,'g*')
hold on
uwu=plot(ax3,tiempoXiprom,posXaiprom,'b*')
hold on
uwu=plot(ax3,tiempoXilineal,posXailineal,'r*')
title(ax3,'Posicion Angular (rad) vs Tiempo','FontSize',10)

ax4=subplot(4,1,4)
uwu=plot(ax4,tiempoXicte,Dcte,'g*')
hold on
uwu=plot(ax4,tiempoXiprom,Dprom,'b*')
hold on
uwu=plot(ax4,tiempoXilineal,Dlineal,'r*')
title(ax4,'Posicion Angular (degrees) vs Tiempo','FontSize',10)

figure
awa=plot(tiempoXilineal,posXailineal,'r*')
hold on
awa=plot(tiempoXiprom,posXaiprom,'b*')
hold on
awa=plot(tiempoXicte, posXaicte,'g*')

saveas(uwu,'Po10W4CALIOVARIOSdt0,02v1.jpg')
saveas(awa,'Po10W4CALIOVARIOSdt0,02v2.jpg')

Tcte=table(manos1cte,manos2cte,manos3cte,manos4cte,manos5cte,manos6cte,manos7cte);
Tprom=table(manos1prom,manos2prom,manos3prom,manos4prom,manos5prom,manos6prom,manos7prom);
Tlineal=table(manos1lineal,manos2lineal,manos3lineal,manos4lineal,manos5lineal,manos6lineal,manos7lineal);

filename =
'C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt0,02.xlsx'
';
writetable(Tcte,filename,'Sheet',1);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt0,02.xlsx',posXaicte,2);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt0,02.xlsx',veloXaicte,3);

```

```

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', acceXaicte, 4);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', Dcte, 5);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', posTotalcte, 6);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', tiempoXicte, 7);

writetable(Tprom, filename, 'Sheet', 8);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', posXaiprom, 9);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', veloXaiprom, 10);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', acceXaiprom, 11);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', Dprom, 12);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', posTotalprom, 13);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', tiempoXiprom, 14);

writetable(Tlineal, filename, 'Sheet', 15);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', posXailineal, 16);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', veloXailineal, 17);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', acceXailineal, 18);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', Dlineal, 19);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', posTotallineal, 20);

xlswrite('C:\Users\CADCAE\Desktop\MECANICA1\16.11.18\Po10W4CALIOVARIOSdt
0,02.xlsx', tiempoXilineal, 21);

Tresumen=table(manos5lineal, manos6lineal, manos7cte, manos7prom, manos7line
al);

writetable(Tresumen, filename, 'Sheet', 22);

```

Anexo 11: Modelo numérico utilizado para resolver la ecuación del comportamiento dinámico en el presente estudio

```

clear; clc; close all; % limpia variables, limpia pantalla y cierra
figuras

Xao=0;           %Posicion angular Inicial
Xpao=0;         %Velocidad angular Inicial
duracion=10;    %Numero de pasos
tiempoinicial=0; %Tiempo inicial
base=1/2;       %Media Base del Bloque
altura=3/2;     %Media Altura del Bloque
deltat=0.01;    %Diferencial de tiempo

masa=2400*(2*base)*(2*base)*(2*altura); %Masa de la columna
concreto
Po=20;          %Amplitud de la aceleracion del suelo
omegaele=19;    %Frecuencia de la Aceleracion

R=((base^2)+(altura^2))^(1/2); %Radio de la columna
esbeltez=atan(base/altura); %Angulo de esbeltez de la columna
gravedad=9.81; %Aceleracion de la gravedad (m/s^2)
ineracia=(4/3)*masa*(R^2); %Inercia para bloques rectangulares
(m^4)
r=((1-(3/2)*((sin(esbeltez))^2))); %Coef.de restitution por el
impacto bloque-suelo
pasos=duracion/deltat;
p=masa*gravedad*R/(ineracia);
puntosX=1;
iter=2;
%%%%%% Metodo de Aceleracion angular LINEAL %%%%%%

posXailineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posicion angular
veloXailineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda velocidad angular
acceXailineal=zeros(iter,puntosX); %Vecotr 0's donde se
guarda aceleracion angular
tiempoXi=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda el tiempo
Dlineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posiciones angulares en grados
posTotallineal=zeros(iter,puntosX); %Vector 0's donde se
guarda posicion total del CM
manos1=zeros(puntosX,1);
manos2=zeros(puntosX,1);
manos3=zeros(puntosX,1);
manos4=zeros(puntosX,1);
manos5=zeros(puntosX,1);
manos6=zeros(puntosX,1);
manos7=zeros(puntosX,1);
j=1;
h=1;

while 1
tiempoXi(1,j)=tiempoinicial; %Tiempo iniciali=1;
posXailineal(1,j)=Xao; %Posicion Angular
veloXailineal(1,j)=Xpao; %Velocidad Angular
Dlineal(1,j)=rad2deg(posXailineal(1,j)); %Posicion Angular en grados
posTotallineal(1,j)=0; %Posicion Total del CM

```

```

acceXailineal(1,j)=(masa*gravedad*R*sin(esbeltez))/(inercia);
%Aceleracion angular inicial
i=2;
while i<=pasos %Se realizara n-1 itraciones del siguiente
proceso para hallar las aceleraciones
    syms Xdpilineal

    tiempoXi(i,j)=tiempoXi(i-1,j)+deltat;
%Halla EL TIEMPO i+1 con la informcion conocida y lo guarda en la fila i
del vector

    if posXailineal(i-1,j)>=0 %Se realiza el
procedimiento si la posicion angular es positiva

        Xilineal=((deltat^2)/6)*(Xdpilineal+acceXailineal(i-
1,j))+(acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2)/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat+posXailineal(i-1,j);

        equationlineal= inercia*Xdpilineal+masa*Po*sin(omegaele...
%Ecuacion dinamica de un giro positivo del bloque
        *tiempoXi(i,j))*R*cos(esbeltez-Xilineal);
        Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*gravedad*sin(esbeltez-...
%Resuelve la ecuacion dinamica para un giro positivo
        Xilineal),Xdpilineal);
        acceXailineal(i,j)=Slineal;

        posXailineal(i,j)=((deltat^2)/6)*(acceXailineal(i,j)-
acceXailineal...
(i-1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat...
+posXailineal(i-1,j);
%Halla la posicion angular en el paso "i+1"

        if posXailineal(i,j)*posXailineal(i-1,j)<0 %Verifica
cambio de signo debido al impacto en la posicion angular
            veloXailineal(i,j)=r*veloXailineal(i-1,j);
%Velocidad despues del impacto
        else
            veloXailineal(i,j)=(acceXailineal(i,j)-acceXailineal(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
+acceXailineal(i-1,j)*deltat+veloXailineal(i-1,j);
%Halla la velocidad angular en el paso "i+1"
        end

        elseif posXailineal(i-1,j)<0 %Se realiza el
procedimiento si la posicion angular es positiva

            Xilineal=((deltat^2)/6)*(Xdpilineal+acceXailineal(i-
1,j))+(acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2)/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat+posXailineal(i-1,j);

            equationlineal= -inercia*Xdpilineal-
masa*Po*sin(omegaele*tiempoXi(i,j))*R*cos(-esbeltez-Xilineal);

            Slineal=vpasolve(equationlineal==masa*R*gravedad*sin(-esbeltez-
Xilineal),Xdpilineal);
            acceXailineal(i,j)=Slineal;

            posXailineal(i,j)=((deltat^2)/6)*(acceXailineal(i,j)-acceXailineal...

```

```

(i-1,j))+acceXailineal(i-1,j)*(deltat^2/2)+veloXailineal(i-
1,j)*deltat...
+posXailineal(i-1,j);
%Halla la posicion angular en el paso "i+1"

    if posXailineal(i,j)*posXailineal(i-1,j)<0                %Verifica
cambio de signo debido al impacto en la posicion angular
        veloXailineal(i,j)=r*veloXailineal(i-1,j);
%Velocidad despues del impacto
    else
        veloXailineal(i,j)=(acceXailineal(i,j)-acceXailineal(i-
1,j))*(deltat^2/6)...
+acceXailineal(i-1,j)*deltat+veloXailineal(i-1,j);
%Halla la velocidad angular en el paso "i+1"
    end
end

    Dlineal(i,j) = rad2deg(posXailineal(i,j));
%Posicion angular en grados

    if posXailineal(i-1,j)>=0                                %Para
giros positivos
        posTotallineal(i,j)=(-Po*sin(omegaele*tiempoXi(i,j)))/...
%Posicion total del C.M
        (omegaele^2)+base-R*sin(esbeltez-posXailineal(i,j));

    elseif posXailineal(i-1,j)<0                            %Para
giros negativos
        posTotallineal(i,j)=(-Po*sin(omegaele*tiempoXi(i,j)))/...
%Posicion total del CM
        (omegaele^2)+base-R*sin(esbeltez+posXailineal(i,j));

    end

if Po<gravedad*tan(esbeltez)
    manos1(h)=omegaele;
    manos2(h)=p;
    manos3(h)=Po;
    manos4(h)=R;
    manos5(h)=omegaele/p;
    manos6(h)=Po/R;
    manos7(h)=0;
    break
elseif abs(posXailineal(i,j))<pi/2
    manos1(h)=omegaele;
    manos2(h)=p;
    manos3(h)=Po;
    manos4(h)=R;
    manos5(h)=omegaele/p;
    manos6(h)=Po/R;
    manos7(h)=1;
elseif abs(posXailineal(i,j))>=pi/2
    manos1(h)=omegaele;
    manos2(h)=p;
    manos3(h)=Po;
    manos4(h)=R;
    manos5(h)=omegaele/p;
    manos6(h)=Po/R;
    manos7(h)=2;
break

```



```

        end

        i=i+1

end %while
%omegaele=omegaele+j;

        if j==puntosX
            break
        end

end %while

T=table (manos1,manos2,manos3,manos4,manos5,manos6,manos7)

filename =
'C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\ExcelGraficoManos\DT=0.01S\Po20W19v2dt0,0
1.xlsx';
writetable(T,filename,'Sheet',1)

xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\ExcelGraficoManos\DT=0.01S\Po20W
19v2dt0,01.xlsx',posXailineal,2)
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\ExcelGraficoManos\DT=0.01S\Po20W
19v2dt0,01.xlsx',veloXailineal,3)
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\ExcelGraficoManos\DT=0.01S\Po20W
19v2dt0,01.xlsx',acceXailineal,4)
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\ExcelGraficoManos\DT=0.01S\Po20W
19v2dt0,01.xlsx',Dlineal,5)
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\ExcelGraficoManos\DT=0.01S\Po20W
19v2dt0,01.xlsx',posTotallineal,6)
xlswrite('C:\Users\Arturo\Desktop\TESIS\ExcelGraficoManos\DT=0.01S\Po20W
19v2dt0,01.xlsx',tiempoXi,7)

load handel
sound(y,Fs)

```

REFERENCIAS

- Caliò, I., & Marletta, M. (2003). Passive control of the seismic rocking response of art objects. *Engineering Structures*, 25(8), 1009–1018. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(03\)00045-2](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(03)00045-2)
- Chopra, A. (2014). *Dinámica de Estructuras* (Cuarta Edi). Pearson Educación de México.
- Hogan, S. J. (1989). On the Dynamics of Rigid-Block Motion Under harmonic Forcing. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 425(1869), 441–476. <https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0114>
- Housner, G. W. (1963). The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 53(2), 403–417.
- Makris, N. (2014). A half-century of rocking isolation. *Earthquake and Structures*, 7(6), 1187–1221. <https://doi.org/10.12989/eas.2014.7.6.1187>
- Makris, N., & Vassiliou, M. F. (2015). Seismic Assessment, Behavior and Retrofit of Heritage Buildings and Monuments, 37, 37–60. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16130-3>
- Makris, N., & Zhang, J. (1999). Rocking Response and Overturning of Anchored Equipment under Seismic Excitations. *Pacific Earthquake Engineering Research Center*, (November), 1–82.
- Manos, G. C., & Demosthenous, M. (1995). Models of Ancient Columns and Colonnades Subjected to Horizontal Base Motions—Study of their Dynamic and Earthquake Behaviour. *Transactions on the Built Environment*, 8, 1–3. <https://doi.org/10.1016/j.jcv.2014.08.024>
- Manos, G. C., Petalas, A., & Demosthenous, M. (2013). Numerical and Experimental Study of the Rocking Response of unanchored Body to Horizontal Base Excitation. *Compdyn 2013*, (June), 12–14.
- Pitilakis, K., & Tavouktsi, E. (2010). Seismic Response of the Columns of Two Ancient Greek Temples in Rhodes and Lindos. *8th International Symposium on the Conservation of Monuments in the Mediterranean Basin, Patra.*, (1), Vol. 31. Retrieved from http://library.tee.gr/digital/m2616/m2616_pitilakis.pdf