PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Percy López Vega

ASESOR

Mg. Mihály Andre Martínez Miraval

San Miguel, 2018

DEDICATORIA

A Rosario y Jimena,

por su infinita comprensión y paciencia

en las muchas horas de ausencia.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Mg. Mihály Martínez por su incansable apoyo en el desarrollo de este trabajo de investigación, a las integrantes del jurado: Dra. Katia Vigo y Mg. Elizabeth Advíncula, quienes con sus sugerencias contribuyeron al mejoramiento de esta tesis; a los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática quienes con su enseñanza y ejemplo ayudaron a formarme como docente y en especial a la Dra. Jesús Flores por su valiosa orientación en el desarrollo de este trabajo.

RESUMEN

El conocimiento y uso de las superficies cuádricas es fundamental para el profesional de ingeniería y arquitectura. Es por eso que creemos pertinente el enriquecimiento de las propiedades de estas superficies, relativas a la forma y dimensiones de sus secciones rectas, al desarrollar con los estudiantes actividades didácticas en un ambiente de Geometría Dinámica y buscar que el artefacto hiperboloide se convierta en instrumento. El presente trabajo tiene como objeto analizar el proceso de génesis instrumental del hiperboloide en alumnos de arquitectura, cuando desarrollan una secuencia didáctica mediados por el software GeoGebra. Para el desarrollo de esta investigación trabajamos con estudiantes de la carrera de Arquitectura de una universidad de Lima y buscamos responder la pregunta: ¿cómo se produce el proceso de Génesis Instrumental del Hiperboloide cuando estudiantes de arquitectura desarrollan una secuencia de actividades mediada por el GeoGebra? Para responder esta pregunta, desarrollamos una secuencia de actividades didácticas y usamos como marco teórico, el Enfoque Instrumental de Rabardel (2011) y como marco metodológico, ciertos aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995). Los resultados presentados muestran que el uso del GeoGebra facilitó el enriquecimiento de los estudiantes con las propiedades del hiperboloide y a su vez, propició la formación de esquemas de utilización y acción instrumentada respecto al hiperboloide y a sus elementos tanto geométricos como algebraicos. Ambos aspectos constituyen, dentro del marco del Enfoque Instrumental de Rabardel (2011), evidencia de Instrumentación e Instrumentalización y nos indica que se dio en los estudiantes la Genesis instrumental del hiperboloide.

Palabras clave: Cuádricas, esquema, Génesis Instrumental, GeoGebra.

ABSTRACT:

The knowledge and use of the quadric surfaces is fundamental for the professional of engineering and architecture. That is why we believe the enrichment of these properties is pertinent, by developing with the student's didactic activities in an environment of Dynamic Geometry and looking for the hyperboloid artefact to become an instrument. The purpose of this paper is to analyse the process of instrumental genesis of the Hyperboloid in architecture students, when they develop a didactic sequence mediated by the GeoGebra software. For the development of this research we worked with students of the Architecture career of a University of Lima and we sought to answer the question: how is the Hyperboloid Instrumental Genesis process produced when architecture students develop a sequence of activities mediated by the GeoGebra To answer this question, we developed a sequence of didactic activities and used the theoretical framework of Rabardel's Instrumental Approach (2011) and as a methodological framework, certain aspects of didactic engineering by M. Artigue (1995). The presented results show that the use of the GeoGebra facilitated the enrichment of the students with the properties of the hyperboloid and at the same time, favoured the formation of schemes of use and instrumented action with respect to the hyperboloid and its geometric and algebraic elements. Both aspects constitute, within the framework of Rabardel's Instrumental Approach (2011) evidence of Instrumentation and Instrumentalization and it indicates that the instrumental Genesis of the hyperboloid was given.

Key words: Quadrics, scheme, Instrumental Genesis, GeoGebra.

ÍNDICE

Lista de figuras

Lista de Cuadros

CONSIDERACIONES INICIALES

Las superficies cuádricas, explica Ibáñez (2004), son de gran importancia en ingeniería, arquitectura, física y otras ciencias, por lo que resulta necesario que el profesional de estas áreas logre un conocimiento de estos objetos matemáticos y los pueda utilizar en la solución de problemas. Dicho conocimiento de las superficies cuádricas se ve facilitado con el uso de los Software de Geometría Dinámica (SGD) como el GeoGebra, que en el marco de los aspectos teóricos y metodológicos de la didáctica de la matemática, guiaron nuestra investigación.

Este trabajo tiene por objetivo estudiar el proceso de Génesis Instrumental del hiperboloide cuando estudiantes de arquitectura desarrollan una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra. Por ello, escogimos como marco teórico el Enfoque Instrumental, como marco metodológico aspectos de la Ingeniería Didáctica, y estructuramos nuestro trabajo en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación, las investigaciones de referencia de nuestro trabajo que se enfocan en objetos matemáticos como el hiperboloide o superficies cuádricas, que usen el Enfoque Instrumental como marco teórico, o desarrollen secuencias didácticas usando el GeoGebra. También presentamos la justificación de la investigación, así como la pregunta y objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo, presentamos el marco teórico y metodológico. Tomamos como marco teórico el Enfoque Instrumental de Rabardel (2011) y explicaremos los mecanismos usados para el análisis de nuestra problemática, presentando como marco metodológico aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

En el tercer capítulo, estudiamos al hiperboloide de una hoja como objeto matemático, mostrando aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos del mismo. También estudiamos la manera cómo es tratado el hiperboloide en los libros didácticos de nivel universitario.

El cuarto capítulo, tratamos la parte experimental de la investigación, y en él presentamos a los sujetos de la investigación, el escenario en que se llevó la secuencia didáctica, así como el conjunto de actividades propuestas, sus análisis *a* *priori* y a posteriori y su confrontación para la respectiva validación. Por último, presentamos las consideraciones finales de nuestra investigación.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

Las superficies cuádricas son de gran importancia en Ingeniería y Arquitectura, sin embargo, las dificultades que presentan los estudiantes en observar las propiedades de las cónicas inmersas en las superficies cuádricas, el contenido geométrico cada vez más reducido en los sílabos de los cursos universitarios de matemática, la falta de conocimientos geométricos sólidos que permitan al estudiante la solución de problemas en el área profesional, y la falta de trabajos sobre superficies cuádricas, en especial el hiperboloide, motivaron nuestra investigación. Para llevarla a cabo, diseñamos una secuencia didáctica con el uso de la tecnología en un ambiente de geometría dinámica mediada por el GeoGebra 3D.

Por tal motivo, se han buscado antecedentes relacionados al trabajo con cónicas y cuádricas, al uso de la tecnología para generar nociones intuitivas del objeto matemático estudiado, y la construcción de conocimientos mediante el proceso de Génesis instrumental, cuyos términos y procesos explicaremos en un capítulo posterior.

En este capítulo, presentaremos la problemática de investigación, e incluiremos algunas investigaciones que han tratado el estudio de cónicas tales como elipses y circunferencias, y de funciones cuádricas por medio de los Software de Geometría Dinámica SGD, que señalan las dificultades en su aprendizaje, o las bondades de utilizar la tecnología, y que utilizan el enfoque instrumental como marco teórico. También describiremos algunas herramientas del GeoGebra usadas en nuestra investigación, la justificación de este estudio y los objetivos que nos hemos planteado.

1.1 Investigaciones de referencia

Para explicar la importancia del uso de la Tecnología en la enseñanza de la matemática, presentamos el trabajo de Laborde (2001) quien señala la brecha existente en Francia entre el apoyo institucional para el uso de las tecnologías en la enseñanza y su débil integración en la práctica docente. La autora indica que el proceso de integración de la tecnología es largo y el objetivo de su investigación fue identificar y analizar los pasos de esta integración en un proceso de tres años con el diseño de escenarios de enseñanza basados en Cabri-geometrè.

El análisis final de su trabajo, Laborde (2001) indicó que el papel de la tecnología pasó de ser un simple representador gráfico o un proveedor de datos a ser un constituyente esencial del significado de las tareas y por consiguiente amplió las concepciones de los objetos matemáticos construidos con el uso de la tecnología. Finalmente, señala que el trabajo con tecnologías trae consigo la aparición de otro tipo de tares que permiten ampliar la concepción de los objetos matemáticos en los alumnos, por ejemplo: transformar una figura, cambiar sus dimensiones y forma, rotar, desplazar etc. son nuevas tareas que requieren un nuevo diseño de las secuencias didácticas y finalmente una nueva metodología en la enseñanza de la matemática.

En un trabajo posterior, Laborde C., Kynigos C., Hollebrands K. y Strasser, R. (2006) mencionan la naturaleza dual de la enseñanza de la geometría: axiomática e intuitiva, pero que debido a la reforma de la matemática moderna carece en la actualidad de representaciones gráficas de los objetos geométricos. Los investigadores, concluyen que la enseñanza de la geometría debería contribuir al reconocimiento de diagramas, movimientos y representaciones espaciales por lo que la enseñanza de la geometría debería contar con representaciones gráficas, las cuales sí están presentes en los ambientes tecnológicos.

También presentamos el trabajo de Gonzales, Martínez y Ruiz (2011) quienes abordan la problemática del actual papel que tiene la geometría en la formación de estudiantes de nivel superior, y señalan que dicha disciplina ha sido relegada a actividades de simple observación, cuando, tradicionalmente, era el área de la matemática que consolidaba y daba coherencia a los proyectos arquitectónicos del siglo pasado.

Los autores muestran resultados estadísticos sobre un estudio en que se investigó la *valoración de los conocimientos geométricos sobre las superficies curvas* que tienen los estudiantes de carreras técnicas y profesionales de una universidad de Granada (España), tanto en el área académica como en el ejercicio profesional. Dichos resultados obtenidos a través de una encuesta mostraron que es la carrera de arquitectura aquella en la que existe una mayor valoración de las superficies curvas en el desarrollo profesional comparado con el estudio en aulas.

En su trabajo de investigación los autores describen el estado de la enseñanza de la geometría en las escuelas de arquitectura, y señalan que, a finales de la década del

90, la geometría se encontraba desplazada por la enseñanza de otras ciencias, aun cuando los conceptos geométricos son complejos e integran conocimientos de otras áreas y sirven como soporte al planteamiento de conjeturas constructivas, en consecuencia, a la génesis de los proyectos.

El trabajo de investigación parte de los siguientes supuestos:

> 1. HIPÓTESIS DE PARTIDA.
> A. Los alumnos de titulaciones con una mayor carga lectiva, deberían de tender a un mayor conocimiento de los conceptos geométricos de superficies.
> B. Las profesiones con mayores competencias en el desarrollo estructural de construcciones, deberían tener un mayor conocimiento de los mecanismos resistentes de las superficies laminares.
> C. Las personas con experiencia profesional, deberían tener una mayor motivación para el aprendizaje en el manejo de superficies geométricas y sus aplicaciones al diseño y la construcción.
> D. La aplicabilidad de los conocimientos a otros ámbitos, debería fomentar el interés por la materia. (Gonzales et al. 2011, p.3)

Luego del análisis estadístico de los resultados arrojados por la encuesta, Gonzales et al. (2011) ven corroboradas sus hipótesis y concluyen remarcando la gran importancia de las superficies cuádricas, en especial las regladas, en el ejercicio profesional. También señalan que el uso de la informática y del diseño asistido por computadora (CAD) que en la actualidad se emplea, aumentan la necesidad de conocimientos geométricos sólidos respecto a las superficies cuádricas. Por ese motivo, en nuestra investigación pondremos énfasis en el trabajo geométrico por parte del estudiante, a fin de que conozca de forma dinámica, las propiedades de las superficies a través de la tecnología.

Por otro lado, existen investigaciones orientadas a la incorporación de nuevos conocimientos en el aprendizaje del estudiante mediante un proceso de génesis instrumental, tales como Chumpitaz (2013) cuyo objetivo fue el estudio de la función definida por tramos y León (2014) que estudió la génesis instrumental de la elipse.

El trabajo de Chumpitaz (2013) tuvo por objetivo el estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos usando el SGD GeoGebra, en ese sentido, estudió los procesos de instrumentalización del software GeoGebra, así como del objeto matemático función definida por tramos.

La investigación se centró por lo tanto en aquellas acciones que instrumentalizaban el SGD y la función definida por tramos. Dicha investigación se llevó a cabo con estudiantes del curso Análisis Matemático I en la carrera de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola, tuvo como marco teórico el Enfoque Instrumental, como método usó aspectos de la Ingeniería Didáctica y buscó responder las preguntas: *¿Cómo una secuencia de aprendizaje puede minimizar las dificultades que se presentan a los estudiantes cuando instrumentalizan algunas propiedades del software GeoGebra en su aprendizaje de la función definida por tramos*? o *¿Cómo una secuencia de aprendizaje puede minimizar las dificultades que se presentan a los estudiantes al instrumentalizar propiedades de la función definida por tramos en su aprendizaje con el GeoGebra*?. Buscó también destacar en qué forma los softwares computacionales pueden generar nuevas metodologías en la enseñanza.

Al emplear como metodología de investigación, aspectos de Ingeniería Didáctica, Chumpitaz (2013) analizó qué concepto tenían los estudiantes sobre función definida por tramos y sobre la continuidad y discontinuidad de funciones desde el punto de vista gráfico y encontró deficiencias en el aprendizaje que generan dificultades en el aprendizaje de otros objetos matemáticos.

Los objetivos de la investigación del autor fueron: analizar las acciones de los estudiantes que usan GeoGebra en una actividad de aprendizaje de la función definida por tramos y analizar las acciones de los estudiantes al usar GeoGebra e instrumentalizan la función definida por tramos. Estos objetivos, propiciaron la creación de actividades que permitieron a los estudiantes familiarizarse con el GeoGebra, también permitieron el diseño de acciones para instrumentalizar el GeoGebra y la función definida por tramos y la identificación de las dificultades de los estudiantes al realizar dicha instrumentalización.

En el análisis a posteriori, el investigador señala la emergencia de las propiedades de la función definida por tramos, lo cual en términos de Rabardel (1995) son evidencia de la instrumentalización; sin embargo, en esta última fase, el autor señala que el análisis a posteriori mostró algunas dificultades en las acciones de los estudiantes en el acceso a los símbolos disponibles en el GeoGebra y dificultades al identificar puntos en la vista gráfica; así como también dificultades en identificar el dominio y realizar transformaciones de funciones, las cuales fueron minimizadas gracias a la interfaz del GeoGebra.

Del mismo modo, presentamos el trabajo de León (2014), en cuya investigación estudia los procesos de instrumentalización de la elipse en alumnos de Arquitectura y Administración de Proyectos, la cual se llevó a cabo durante una secuencia de 15 actividades mediadas por el SGD GeoGebra.

En su investigación, el autor orienta su trabajo con la pregunta: *¿una secuencia de actividades mediada por GeoGebra permite a los alumnos de Arquitectura y Administración de Proyectos instrumentalizar la elipse?* El autor utiliza el Enfoque Instrumental como base teórica y como método de investigación, aspectos de la Ingeniería Didáctica.

Como justificación de su investigación, el autor resalta errores y dificultades en la enseñanza de la elipse:

> Representaciones mayormente estáticas que no permiten la visualización de lugares geométricos.
> Se depende mucho de los ejes coordenados y no de las características de los lugares geométricos
> Dificultades al analizar el objeto matemático si es rotado o trasladado a otro sistema coordenado. (p.38)

En el análisis a posteriori, el autor señala que los estudiantes, gracias al GeoGebra, relacionaron los componentes $a,\ b$ y c de la elipse con el semieje mayor, el semieje menor y la distancia focal respectivamente, así como también la relación $a^2 = b^2 + c^2$, la ubicación de focos y lado recto, lo cual muestra, según el autor, que los estudiantes consiguieron la génesis instrumental del objeto matemático de estudio.

El autor hace notar que aun cuando la instrumentalización de la elipse y del GeoGebra se dio de manera durable, siempre deberá ser observada en actividades posteriores.

Si bien es cierto que las investigaciones anteriores de Chumpitaz (2013) y León (2014) difieren de la nuestra porque se han trabajado en el plano, reconocemos la importancia del SGD (Software de Geometría Dinámica) en los procesos de instrumentación e instrumentalización (procesos que detallaremos en el Capítulo 2 de nuestra investigación) de los objetos matemáticos trabajados en ambas tesis, dado que trabajaremos procesos similares mediados por el GeoGebra, pero en el espacio. El uso de los SGD permite al estudiante: interactuar con el objeto matemático de una manera natural e intuitiva, formular hipótesis y justificarlas, relacionar de forma dinámica las representaciones del objeto matemático en diferentes registros etc., lo cual se consigue gracias a la función arrastre que es una de las características más saltantes de los SGD.

En ese sentido, citamos los trabajos relativos a la influencia de la función arrastre de SGD realizadas por Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002) y Muslera (2011).

En su estudio, Arzarello et al. (2002) describen la función arrastre mediante la presentación de jerarquías y señalan a su vez diversas actitudes y objetivos que los estudiantes pueden movilizar cuando utilizan esta función.

El trabajo realizado por el autor pone de manifiesto que la naturaleza de las relaciones entre el nivel perceptivo y teórico requiere un análisis dinámico que implica diferentes componentes: didácticos, cognitivos y epistemológicos.

Los investigadores afirman que, “el arrastre se puede considerar como una práctica para mediar la relación teórico – perceptiva de una manera específica creando entidades con nuevas características que emergen de la solución de los problemas” (Arzarello et al., 2002, p.66).

En su investigación, los autores explican que la posibilidad de arrastre ofrece una retroalimentación a la fase de descubrimiento y apoya el rol de las pruebas como explicaciones “reales” propiedades y de conjeturas al explorar figuras al moverlas y observar la manera en que las formas cambian (o no cambian).

A su vez, los investigadores afirman que resolver problemas apoyados por SGD pueden enmarcarse en un proceso cognitivo de ida y vuelta entre la percepción y las ideas abstractas que se van generando. En tal sentido, muestran ejemplos cortos de aplicación de los diversos tipos de arrastre, para posteriormente presentar una actividad orientada de manera secuencial y desarrollada en un salón de clase, usando como medio el SGD Cabri, cuyo fin es manipular los cuadriláteros, cambiar su forma y observar qué ocurre con el cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos interiores. Finalmente presenta las modalidades cognitivas que se dieron en cada episodio de la prueba.

Las observaciones finales de la investigación señalan que en un principio el grupo de estudiantes no era muy propenso al uso de la función arrastre, pero esta circunstancia cambió con la continua experimentación. La función arrastre de los SGD es importante para nuestra investigación porque la utilizamos para manipular la gráfica de las superficies y realizar cortes con planos paralelos a los planos coordenados con el fin de que los estudiantes analicen las propiedades de las cónicas entre otros usos.

Por otra parte, Muslera y De La Torre (2011) describen la integración del SGD, específicamente el GeoGebra, en la solución de problemas de cálculo en estudiantes de primer año universitario y manifiestan que la función arrastre es un elemento fundamental, que permite al sujeto manipular, mover, girar y en general interactuar con la representación gráfica del objeto estudiado, manteniéndose las propiedades de las construcciones geométricas.

En una última etapa, los autores presentan la actividad guiada: *Encuentre la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y que sea tangente a una curva* que fue aplicada a un grupo de veintiocho estudiantes con edades entre 17 y 20 años, pertenecientes al primer año de Licenciatura en Química de una Universidad de Ciencias.

Las conclusiones obtenidas por los investigadores indican que una vez que los estudiantes se apropian de las características de la función arrastre y la utilizan ésta se transforma en el único medio para resolver las situaciones planteadas.

“La apropiación del arrastre no es ni evidente ni inmediata para los estudiantes ni para los profesores. Es un proceso largo y complejo” (Muslera et al. 2011 p.557). Sin embargo, señalan los autores que es posible identificar esquemas de uso que permiten transformar la función en instrumento, lo cual desde el punto de vista del Enfoque Instrumental constituye la aparición de esquemas de utilización de los objetos geométricos por lo que consideramos este antecedente útil en nuestra investigación.

Resaltamos el trabajo de Peñaloza (2016) que estudia el proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de arquitectura, mediado por el GeoGebra.

El autor justifica la pertinencia de su estudio dada la importancia de las superficies cuádricas en la carrera de arquitectura, en sus aplicaciones y en el uso de las características de simetría en el caso de parábolas, elipses e hipérbolas; el hecho que al graficar una superficie a partir de sus secciones rectas muchas veces no se incluyen conexiones necesarias entre las trazas y la superficie; los problemas cognitivos en relación a la matemática cuando se desarrollan actividades mediadas por ambientes tecnológicos.

En ese sentido, y debido a lo escaso de los estudios relativos a la enseñanza y aprendizaje de las superficies cuádricas, mediados por un ambiente de geometría dinámica, Peñaloza (2016) considera pertinente realizar una investigación con el uso del GeoGebra 3D.

En su trabajo, el autor presenta como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica y cita a Duval quien afirma que:

> […] la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación, ya que no hay otra manera de tener acceso al objeto matemático directamente por la percepción, siendo los estudiantes capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos y utilizarlos. (Duval, 1995, p.144).

La metodología que se emplea en la investigación presenta características de una investigación cualitativa y usa aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como metodología de investigación.

En la fase experimental, el investigador describe dos tipos de actividades: actividades con lápiz y papel y actividades con el software GeoGebra 3D que se llevaron a cabo con estudiantes de primer ciclo de la carrera de Arquitectura que llevaban el curso Matemática 1 en una Universidad de Lima.

Para la elaboración de la secuencia didáctica, el autor se guía por la pregunta de investigación: ¿Cómo se realiza el proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura en una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra?

La elección de los antecedentes que fundamentan nuestra investigación, si bien es cierto no se relacionan exactamente con nuestro trabajo, nos dan luces sobre la necesidad del uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de ciertos objetos matemáticos; para la adquisición de propiedades algebraicas y geométricas del objeto en estudio, a partir de funciones como el arrastre y de apoyar a la producción de trabajos relacionados con superficies cuádricas.

Por ello, pensamos que, en nuestro caso, el GeoGebra es pertinente para nuestra investigación. De las herramientas del GeoGebra, emplearemos la función Arrastre de los deslizadores para que los estudiantes interactúen con el artefacto Hiperboloide en las actividades didácticas orientadas a su instrumentalización, por lo que se hará necesario su uso junto con otras herramientas del SGD, cuyo estudio no forman parte de los objetivos de nuestra investigación. Pero sí estudiaremos el enriquecimiento de los estudiantes con las propiedades del hiperboloide observables con su manipulación a través del GeoGebra y buscaremos evidencia de la creación de esquemas de utilización cuando se emplea el GeoGebra al desarrollar actividades didácticas relativas al hiperboloide, ya que ambos, el enriquecimiento de las propiedades del hiperboloide y la creación de esquemas de utilización del hiperboloide, son, dentro del marco teórico elegido, evidencias de instrumentalización e instrumentación en el hiperboloide y nos permitirán afirmar si se da la génesis del hiperboloide.

1.2 Justificación

El estudio de las superficies cuádricas resulta fundamental para el futuro profesional de Arquitectura. En el caso particular del hiperboloide, esta superficie presenta diversas características y aplicaciones: en ingeniería tiene aplicación en la fabricación de reflectores hiperbólicos, torres de enfriamiento, etc.; en arquitectura es muy utilizada en la construcción de torres, con una utilización mínima de material pero que presentan una gran rigidez al ser una superficie doblemente reglada, lo que la hace especialmente resistente a cargas axiales en dos direcciones.

Al respecto, Ibañez (2004) nos explica:

> Por otra parte, el hiperboloide de una hoja es una superficie doblemente reglada, está formada por las rectas que se apoyan en dos circunferencias paralelas (estructura de malla).
> El hiperboloide elíptico se obtiene si se consideran dos elipses paralelas. Además, el hiperboloide es una superficie cuadrática, es decir, su expresión en coordenadas x, y, z del espacio es un polinomio de segundo grado, luego matemáticamente sencilla. Por último, mencionemos que esta superficie se puede utilizar en arquitectura, aparte de para otras cuestiones, para realizar cubiertas de doble curvatura del segundo tipo, es decir, el caso de la curvatura de Gauss negativa. (p. 17)

Por lo anterior, consideramos que es importante el estudio del hiperboloide porque: no hay muchos trabajos sobre cuádricas bajo el enfoque instrumental; en las aulas de clase se suele trabajar con lápiz y papel y no se aprecian las características y propiedades de la superficie; la complejidad de trabajar en 3D en la adquisición de nociones intuitivas en el registro gráfico, las cuales se consiguen al trabajar con el GeoGebra y la función arrastre; la importancia de tener buenos conocimientos de estas superficies para la construcción de columnas, torres, bóvedas en carreras como arquitectura e ingeniería. Y finalmente, porque está en la malla curricular en las Carreras de arquitectura en ingeniería.

A su vez, el estudio de las superficies cuádricas como el hiperboloide, paraboloide y las superficies cilíndricas forma parte del plan de estudios de las carreras de Arquitectura e Ingeniería en diversas universidades de Perú.

En principio, el curso de Matemática 1 se dicta en la Pontificia Universidad Católica del Perú y forma parte del Plan de Estudios de pregrado en las carreras de Ingeniería y en particular, en la carrera de Arquitectura.

En el sílabo, en la Unidad 04: Geometría en el espacio, vectores, se ubica el tema de Superficies cuádricas (los paraboloides; los elipsoides y los hiperboloides). Y se indican como contenidos procedimentales, el estudio de dichas superficies a partir de sus trazas.

El Cuadro 1 nos muestra el Plan de Estudios en la Facultad de Arquitectura y Urbanismo (FAU) de la Pontificia Universidad Católica del Perú, durante los 4 primeros semestres

Cuadro 1: Plan de estudios de la FAU de la PUCP, ciclos 1, 2, 3 y 4

Fuente: Plan de estudios de Arquitectura, Pontificia Universidad Católica del Perú

El sílabo de Matemática 1 en la semana 15 se presenta en el Cuadro 2.

Cuadro 2: Sílabo de Matemática 1 (semana 15)

14	18/11	partir de las curvas que resultan de la intersección de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados.
15	Del 21/11 al 25/11	Superficies cuádricas (parte 2): gráfica de ecuaciones de segundo grado en tres variables. Los paraboloides, elipsoides e hiperboloides.
16	Del 28/11 al 2/12	**EXAMEN DE MATEMÁTICA 1**

Fuente: Sílabo de Matemática 1 (FAU), recuperado de:
http://facultad.pucp.edu.pe/arquitectura/cursos/matematicas-1-0101/

Por otro lado, es importante tal como explica Chumpitaz (2013), la interacción de los estudiantes con este tipo de representaciones por medios computacionales y señala como un aspecto positivo, que la inexperiencia de los alumnos en el uso del SGD no llega a ser un obstáculo al momento de realizar el estudio del aprendizaje de las funciones definidas por tramos.

A su vez, León (2014) menciona la necesidad de estudiar la instrumentalización de los SGD y en particular del GeoGebra, dada la inadecuada forma en que se ha venido tratando la enseñanza de las cónicas en la secundaria. En tal sentido, Contreras et al. (2002, citado por León, 2014) señala que el tratamiento excesivamente analítico de las cónicas en la escuela secundaria se refleja en un pobre manejo y comprensión de dichas representaciones en el primer año de universidad.

Es por ello, por lo que creemos pertinente el estudio de la influencia de la función arrastre en el proceso de instrumentación del hiperboloide, al tratar acerca de la elaboración de los esquemas de utilización de los artefactos SGD e hiperboloide y por tanto del aprendizaje de dicha representación del objeto matemático.

Nuestra elección del GeoGebra se basa en que es un software de libre licencia, se actualiza constantemente y, a diferencia de softwares como Cabri II Plus o Cabri3D, incluye una ventana algebraica (vista algebraica) asociada a la vista gráfica. Pensamos que esto es de gran importancia pues permite al estudiante establecer la conexión entre el objeto geométrico espacial de la vista gráfica y su representación algebraica. Al respecto, podemos citar a Iranzo Domènech, N., & Fortuny, J. M. (2009) quienes afirman sobre este tema:

> Conocidos programas, como por ejemplo Cabri Géomètre II (www.Cabri.com) y Cinderella (www.cinderella.de), facilitan la experimentación con Geometría Sintética. Escogemos trabajar con GeoGebra (www.GeoGebra.org) ya que es un software de

> código abierto que integra de forma dinámica Geometría Sintética y Analítica y la expresión algebraica de objetos gráficos (Hohenwarter y Preiner, 2007). También porque es un software intuitivo que no requiere estrategias de uso avanzadas para utilizarlo en el contexto de esta investigación. En este estudio se analiza la relación entre la resolución de problemas de Geometría Analítica con lápiz y papel y con GeoGebra. (Iranzo & Fortuny, 2009 p.433)

Como mencionamos anteriormente, en los trabajos de Laborde (2001) y Gonzales et. al (2006) se pone de manifiesto la importancia del uso de los ambientes tecnológicos en la enseñanza de la matemática, en particular, el uso de los SGD para la enseñanza de la geometría.

También reconocen la importancia de los SGD, los trabajos de Chumpitaz (2013) y León (2014), por su parte, los trabajos de Arzarello et al. (2002) y Muslera y De La Torre (2011) muestran la utilidad del GeoGebra en el proceso de génesis instrumental de objetos geométricos.

Las investigaciones mencionadas, refuerzan nuestra idea de escoger el GeoGebra como SGD para realizar nuestra investigación.

Respecto a la elección del objeto matemático para nuestro trabajo (hiperboloide de una hoja) resumimos a continuación los motivos por los cuales es pertinente realizar nuestra investigación:

- La presencia de este objeto matemático en el currículo de estudios superiores de arquitectura e ingeniería.
- La ausencia de investigaciones donde se trabaje en ambientes tridimensionales (3D) y en particular con superficies cuádricas.
- Los beneficios del uso de los SGD para la adquisición de propiedades de los objetos matemáticos trabajados y la adquisición de sus propiedades relacionando representaciones gráficas y algebraicas.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Nuestro trabajo de investigación está guiado por la pregunta:

¿Cómo se produce el proceso de Génesis Instrumental del Hiperboloide cuando estudiantes de arquitectura desarrollan una secuencia de actividades mediada por el GeoGebra?

Para responder a nuestra pregunta, nos planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar el proceso de Génesis Instrumental del Hiperboloide cuando estudiantes de arquitectura desarrollan una secuencia de actividades mediadas por el GeoGebra.

Nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar en las acciones de los estudiantes, los posibles esquemas de utilización (uso y de acción instrumentada) cuando desarrollan actividades didácticas sobre la noción de hiperboloide mediadas por el GeoGebra.
2. Determinar la asociación, por parte de los estudiantes, de sus esquemas de utilización sobre las propiedades del hiperboloide cuando enfrentan la solución de un problema.
3. Distinguir el surgimiento y enriquecimiento de las propiedades del hiperboloide cuando los estudiantes desarrollan un problema con el uso del GeoGebra.

1.4 El GeoGebra

El GeoGebra es un software de geometría dinámica, de libre uso, desarrollado por *The International GeoGebra Institute* con sede en Linz, Austria.

Describiremos ahora el ambiente de trabajo en el modo Gráficos 3D en el cual está presente por defecto la Vista Algebraica. En dicha ventana hemos podido apreciar la barra de Menú y la barra de Herramientas, como se muestra en la figura 1.

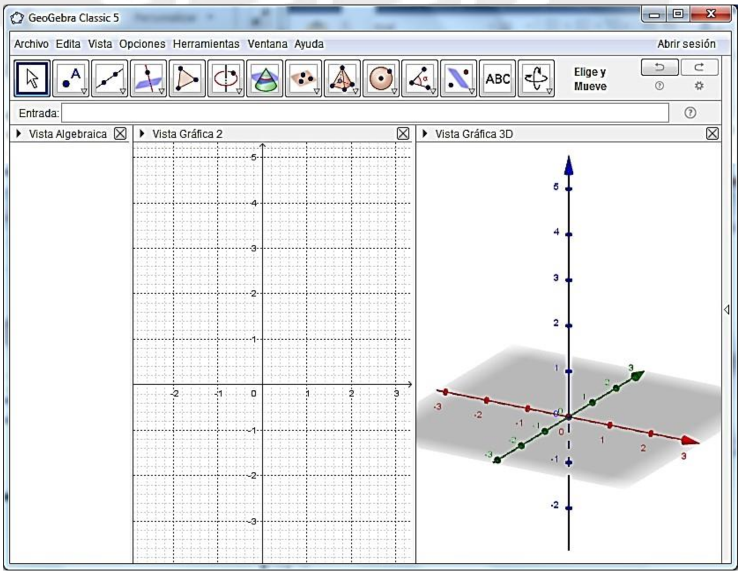


Figura 1: Entorno 3D del GeoGebra

En la Figura 1, se pueden apreciar las siguientes zonas:

- Barra de Menú, ubicada en la parte superior de la ventana. En ella figuran los principales Menús de un ambiente en Windows y permiten gestionar características generales de los archivos creados en GeoGebra, así como el modo de trabajo de GeoGebra (hoja de cálculo, cálculo simbólico, etc.)
- Barra de herramientas 3D, ubicada debajo de la barra de Menú. Presenta las herramientas de construcción de los objetos geométricos por medio del mouse. Su descripción la presentaremos luego.
- Vista algebraica, ubicada en el extremo izquierdo de la ventana. En ella aparecerán las coordenadas, ecuaciones o medidas de los objetos geométricos que sean ingresados con el mouse en las ventanas gráficas o con el teclado en la barra de entrada.
- Vista gráfica 2, ubicada en la zona central de la ventana. En ella se pueden ingresar puntos directamente con el mouse, construir objetos geométricos planos con los botones de la barra de herramientas y fijar deslizadores. La vista Gráfica 2 corresponde al plano XY y todo objeto que se dibuje en ella, aparecerá en la vista Gráfica 3D como un objeto con coordenada $z = 0$.
- La vista Gráfica 3D, ubicada en el extremo derecho de la ventana. En ella aparecerán los objetos tridimensionales construidos con las herramientas de la barra de herramientas o mediante la introducción de su ecuación en la barra de entrada. Esta vista puede ser girada mediante arrastre por medio de mouse, puede ser desplazada mediante arrastre por medio del mouse o puede ser ampliada/reducida mediante giro de la rueda del mouse.

La barra de herramientas 3D

Posee el conjunto de botones con el que se pueden construir los objetos geométricos tridimensionales, tal y como se muestra en la figura 2.

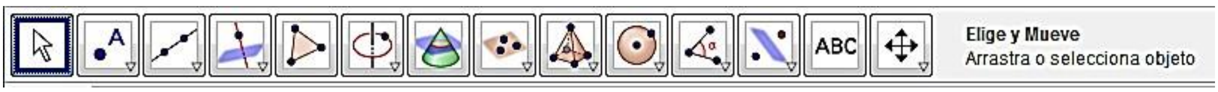


Figura 2: Barra de herramientas 3D en GeoGebra

Esta barra presenta las principales herramientas que por defecto aparecen, pero se puede personalizar el conjunto de botones mostrado. El nombre, función y ayuda de cada botón aparece en el extremo derecho de la barra cuando el botón es seleccionado.

Trabajo en el Modo Gráficos 3D

Una vez activada la ventana 3D, la ventana se muestra como en la Figura 1 y en ella podemos elegir trabajar en la vista Gráfica 2 o en la Vista Gráfica 3D haciendo click con el mouse en cualquiera de ambas regiones.

Es importante notar que la representación gráfica de una misma ecuación dependerá de la vista en la que estemos trabajando.

Por ejemplo, si hemos seleccionado la Vista Gráfica 2 e ingresemos en la barra de entrada la ecuación $x = 2$, obtendremos la gráfica de una recta paralela al eje Y, mostrada en la figura 3.

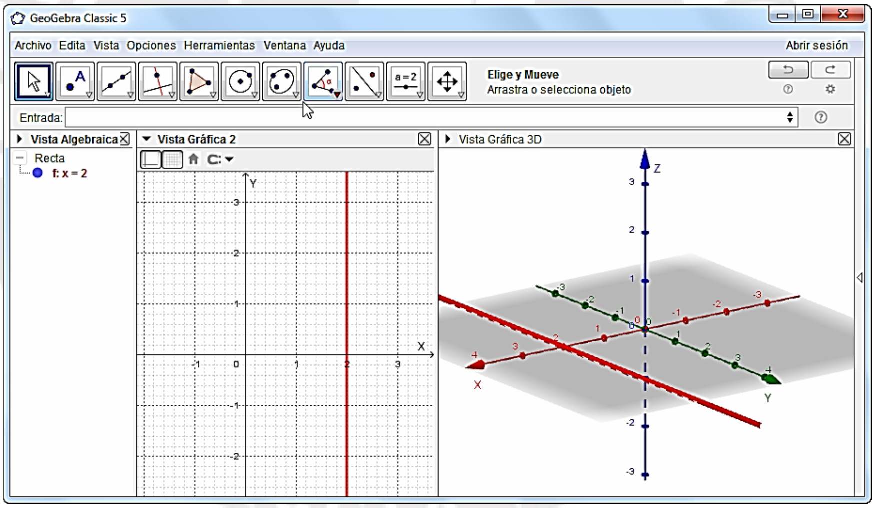


Figura 3: Gráfica de x=2 en la Vista Gráfica 2

Si seleccionamos previamente la Vista Gráfica 3D, la ecuación anterior se graficará como un plano perpendicular al eje X tal como se muestra en la figura 4.

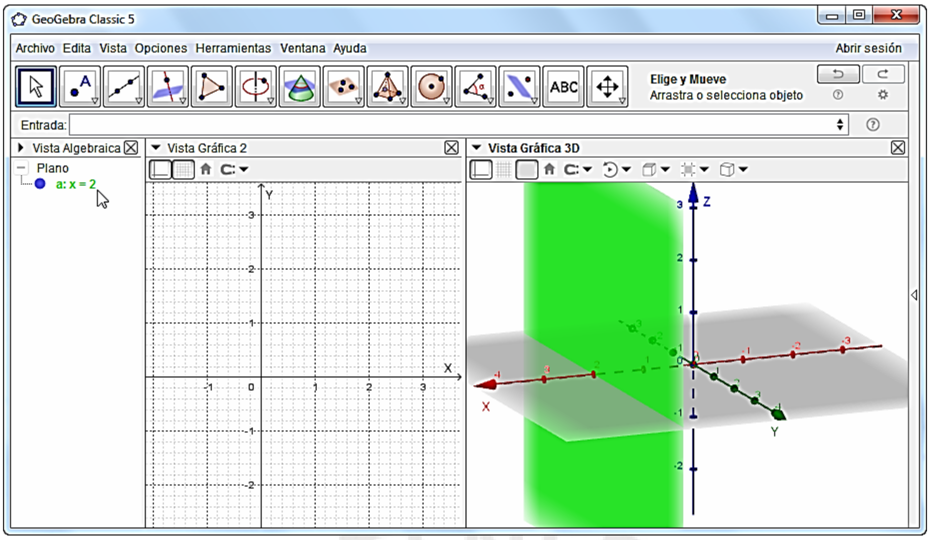


Figura 4: Gráfica de $x = 2$ en la Vista Gráfica 3D.

Puntos y arrastre en GeoGebra 3D

Como se ha descrito en el Capítulo 1 de esta investigación, la función arrastre en los SGD es lo que le da la característica de permitir manipular los objetos geométricos por medio del mouse. En particular, en GeoGebra, usaremos el arrastre de puntos, el arrastre de deslizadores y el arrastre de la vista gráfica para el surgimiento de las propiedades de nuestros objetos geométricos.

Un punto se puede ingresar de muchas formas:

- Ingresando sus coordenadas entre paréntesis y separadas por coma. Por ejemplo, si se trabaja en la Vista Gráfica 2, ingresamos en la barra de entrada: $(1,2)$ ↵ y si trabajamos en la Vista Gráfica 3D ingresamos en la barra de entrada $(1,2,3)$ ↵ .
- Seleccionando la herramienta punto  y haciendo click derecho en cualquier lugar del plano de la Vista Gráfica 2.
- Seleccionando la herramienta punto  y haciendo click derecho en cualquier lugar de la Vista Gráfica 3D, se obtendrá la vista de la figura 5.

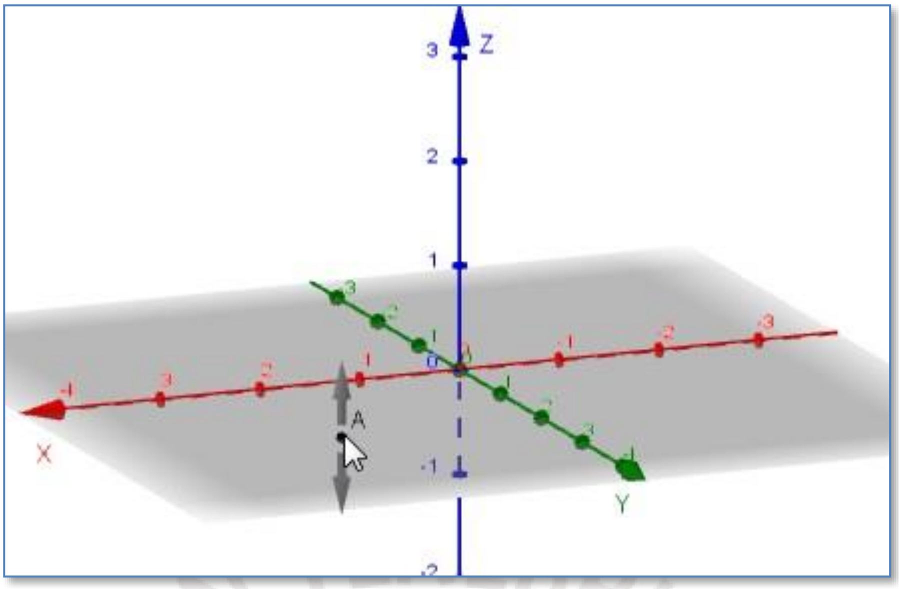


Figura 5: Punto en el plano XY en la Vista Gráfica 3D

Al aparecer ambas flechas verticales en el punto A, podremos arrastrar dicho punto para fijar con el mouse su coordenada z.

Las coordenadas de los puntos ingresados por medio del mouse se obtienen escribiendo en la barra de entrada:

$x[A]$, para la abscisa del punto A.

$y[A]$, para la ordenada del punto A.

$z[A]$, para la cota del punto A.

Como ejemplo, ubicamos con el mouse el punto A en el eje X y el punto B en el eje Y, luego ingresamos en la barra de entrada la expresión:

$$\frac{x^2}{(x[A])^2} - \frac{y^2}{(y[B])^2} = 1$$

y obtenemos en la Vista Gráfica la figura 6.

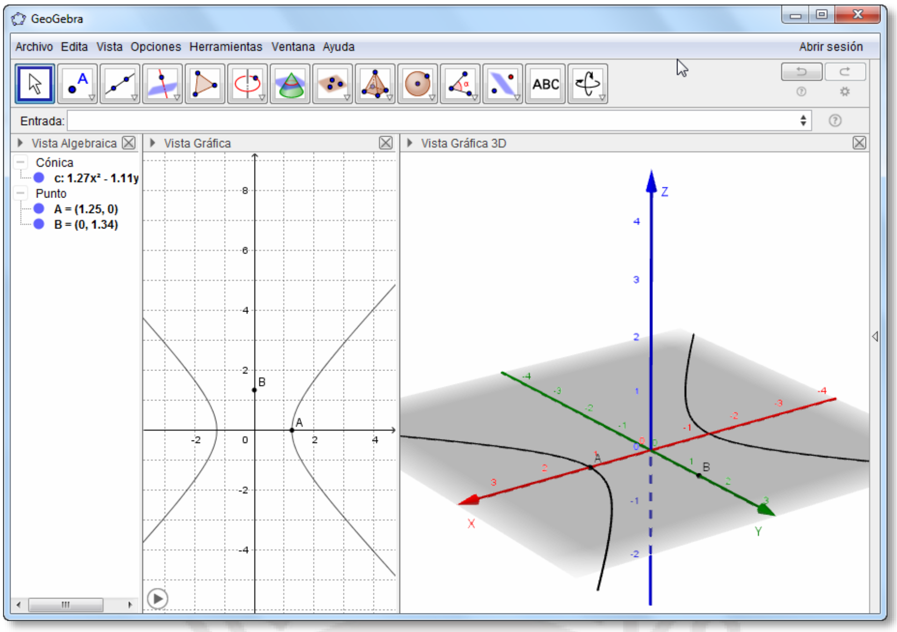


Figura 6: Hipérbola en las ventanas 2D y 3D de GeoGebra.

Se observa que los objetos trazados en la Vista gráfica 2D en el plano XY, aparecen en el plano XY de la vista gráfica 3D. Al arrastrar los puntos A y B sobre los ejes X e Y, se observa el cambio de forma y dimensiones de la hipérbola, es decir, se puede “manipular” la hipérbola con el arrastre de los puntos A y B.

Si extendemos la actividad anterior al entorno 3D, ubicaremos los puntos A, B y C en los ejes X, y y Z respectivamente, como se muestra en la figura 7.

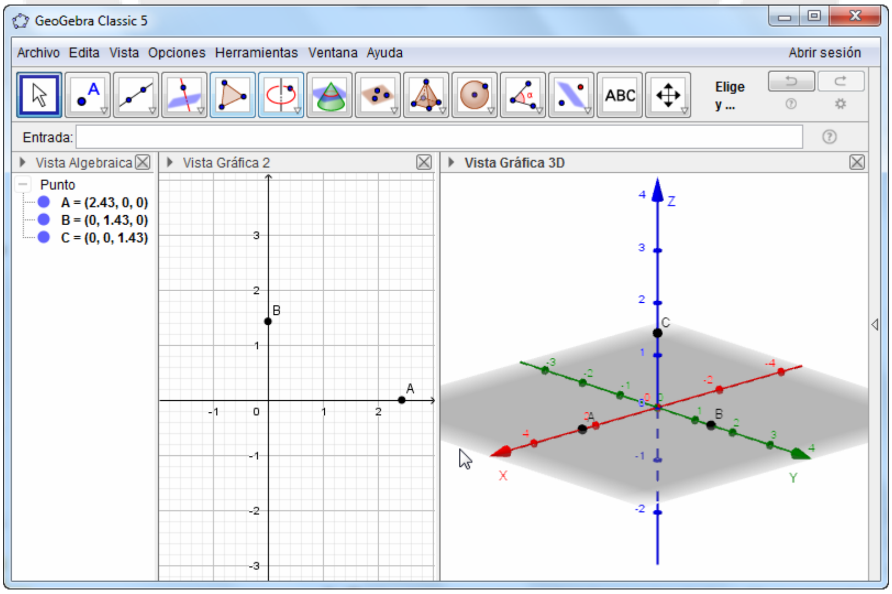


Figura 7: Puntos A, B y C en los ejes X, Y y Z.

- Ingresamos en la barra de entrada

$$\frac{x^2}{(x[A])^2} + \frac{y^2}{(y[B])^2} - \frac{z^2}{(z[C])^2} = 1 \cdots (1)$$

y obtenemos en la vista gráfica 3D la figura 8, que es un hiperboloide de una hoja, cuya forma y dimensiones se manipulan arrastrando A, B y C.

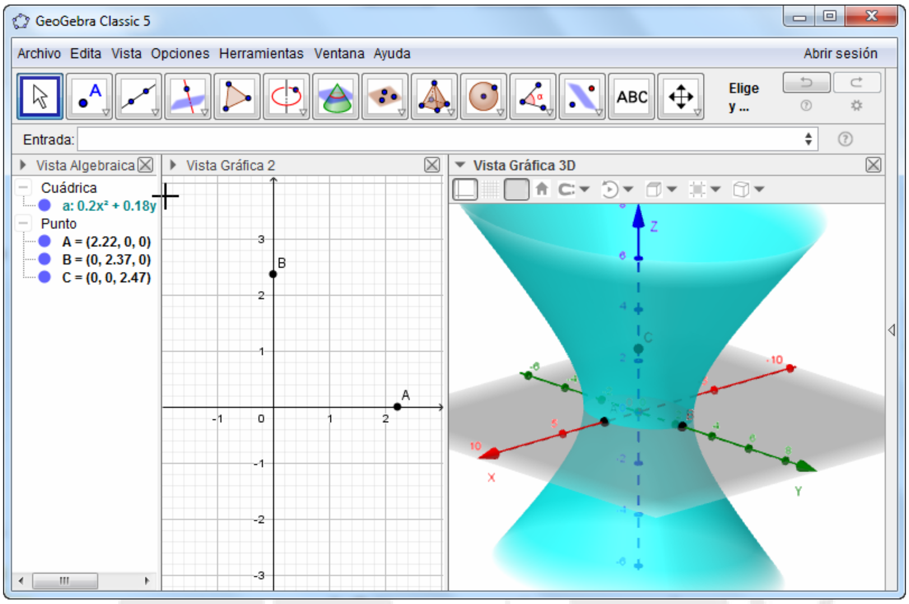


Figura 8: Hiperboloide de una hoja con puntos de control A, B y C.

Deslizadores y Casillas de control en GeoGebra 3D

La herramienta deslizador es una de las principales características de los SGD y permite interactuar sobre los valores de cualquier parámetro (dimensiones de un objeto, coordenadas de un punto etc.) mediante el arrastre del deslizador.

Para crear un deslizador, seleccionamos el icono correspondiente de la barra de herramientas (ver figura 9)

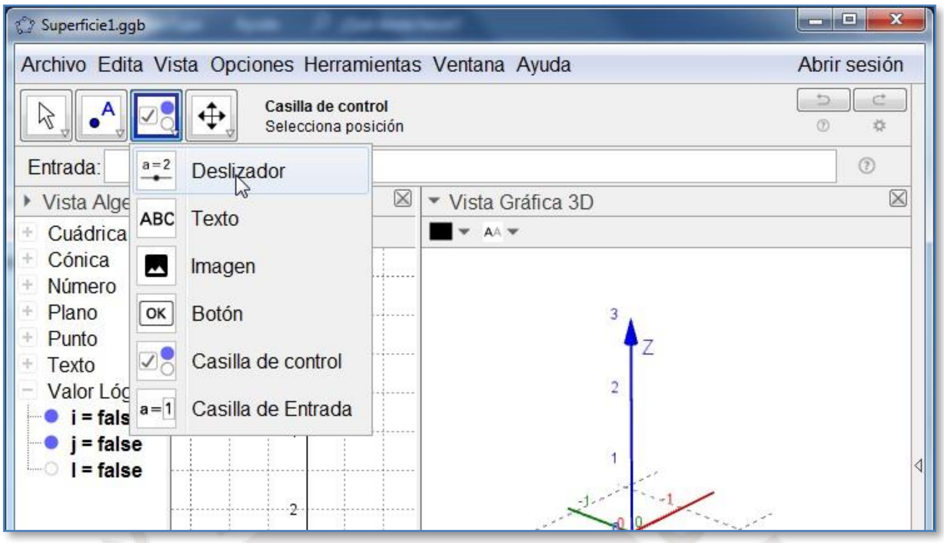


Figura 9: Herramienta deslizador

Para el diseño de nuestra actividad didáctica, crearemos un deslizador para el parámetro k y lo ubicaremos en la vista gráfica, con dirección vertical según la figura 10.

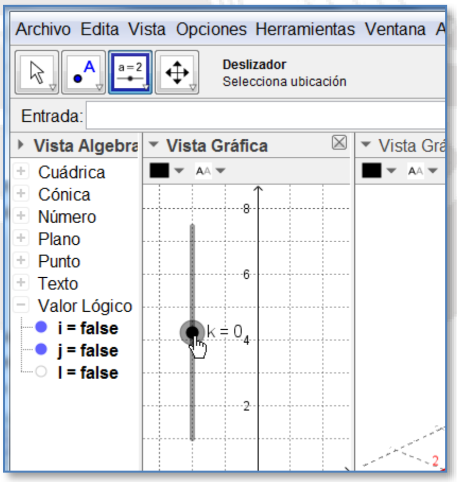


Figura 10: Deslizador para *k*, ubicado en la Vista Gráfica.

Una vez que hemos creado el deslizador de k, podemos usar la variable definida k, en la formación de las ecuaciones de nuestros planos de corte. Creamos los planos de corte, ingresando sus ecuaciones en la barra de entrada:

- $x = k$ ↲
- $y = k$ ↲

- $z = k$ ↲

Veremos el efecto de mover el deslizador k en la gráfica del plano $z = k$.

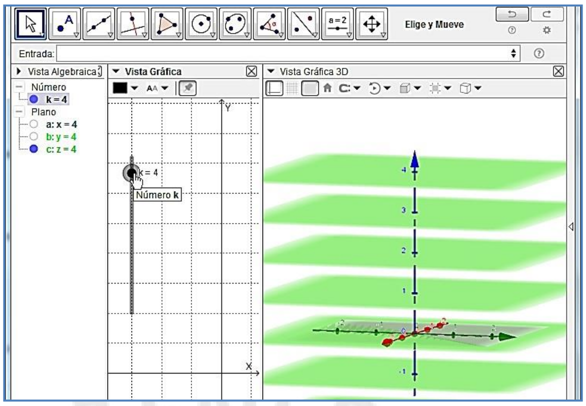


Figura 11: El plano *z* = *k* y el deslizador para *k*.

Para trazar secciones de la superficie del hiperboloide, fijaremos los puntos $A,\ B,\ C$ sobre los ejes $X,\ Y,\ Z$ y luego, basados en estos "puntos de control", construimos la gráfica, ingresando en la barra de entrada la ecuación del hiperboloide de una hoja

$$x\text{^}2/(x[A])\text{^}2 + y\text{^}2/(y[B])\text{^}2 - z\text{^}2/(z[C])\text{^}2 = 1 \quad ↲$$

Luego ingresamos en la barra de entrada la ecuación del plano de corte, por ejemplo $z = k$. Para intersecar ambas superficies, activamos la herramienta Intersección de dos superficies como muestra la figura 12.

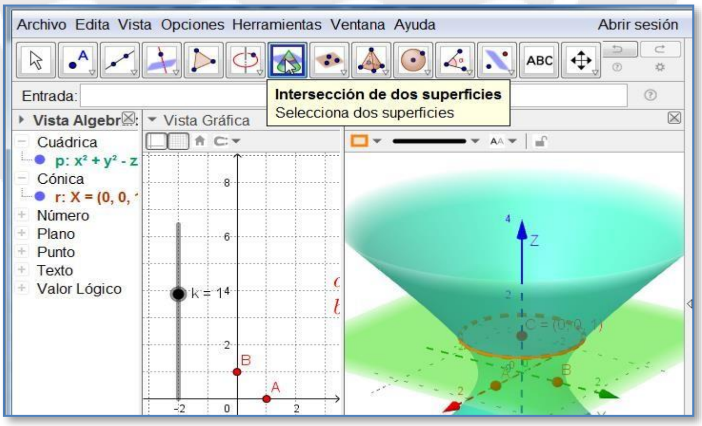
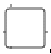


Figura 12: Intersección de dos superficies

Una herramienta importante para nuestra actividad didáctica es la Casilla de control, que es un objeto que ubicaremos en la Vista Gráfica y cuya función es otorgarle a cierto grupo de objetos, la característica de ser visible o no, según la casilla de control esté seleccionada  o no seleccionada . Para crear una casilla de control, seleccionamos el icono correspondiente de la barra de botones (ver figura 13)

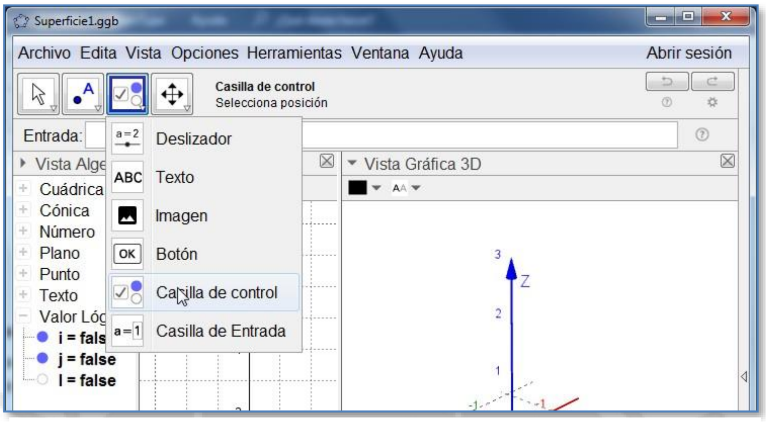


Figura 13: Herramienta Casilla de control

Con el fin de poder visualizar los planos de corte necesarios en las diferentes orientaciones, creamos las casillas de control siguientes:

- Corte con $x = k$
- Corte con $y = k$
- Corte con $z = k$.

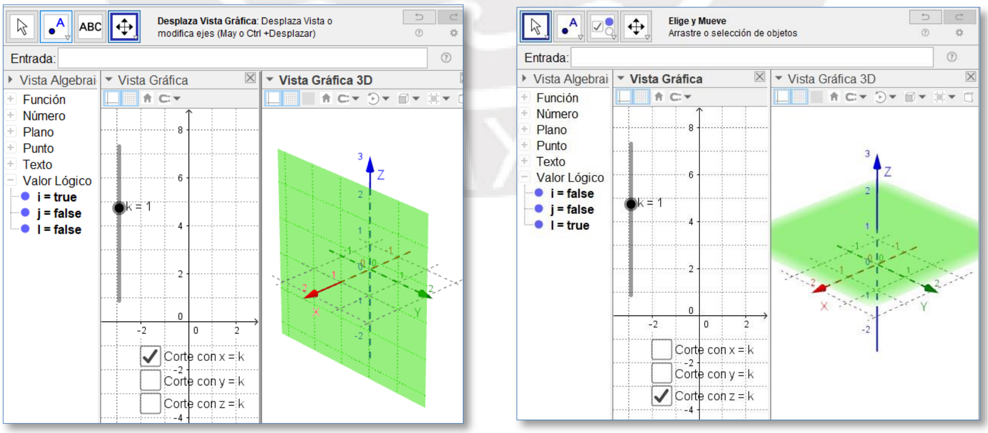


Figura 14: Casillas de control para Corte con *x=k* y *z=k*

Ahora, si visualizamos la gráfica del hiperboloide, podemos activar la casilla de control correspondiente y mostrar las secciones generadas en él, por diferentes planos de corte.

Activamos la casilla Corte con $z = k$ y observamos diversas secciones paralelas que se obtienen al usar el *arrastre* en el deslizador para $k = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. (Figura 15)

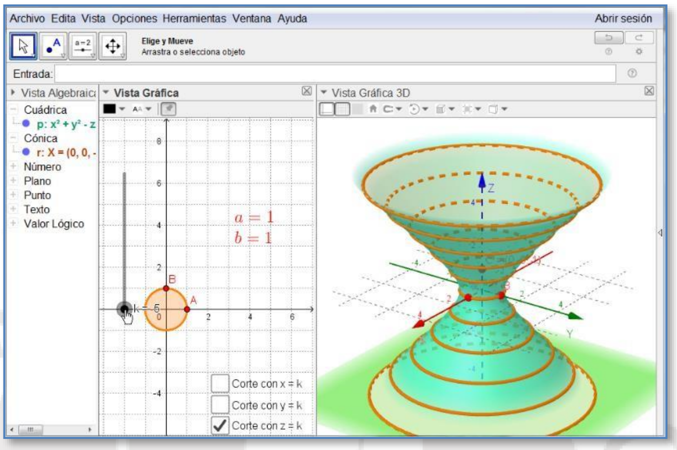


Figura 15: Secciones en el hiperboloide con planos *z* = *k*.

Activaremos ahora la casilla Corte con $y = k$ y mostraremos en la figura 16 el efecto al arrastrar el deslizador para $k = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

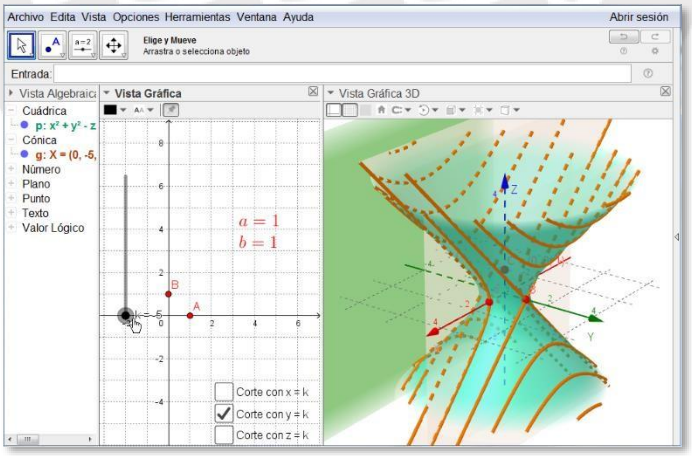


Figura 16: Secciones del hiperboloide con planos
y*=*k

La barra de herramientas de GeoGebra permite también la elección del punto de vista del observador. La herramienta Vista frontal es muy importante para visualizar secciones de manera frontal y poder establecer su tipo y características.

Aplicaremos vistas frontales a las secciones rectas sobre la superficie del hiperboloide y mostraremos los resultados en las siguientes figuras.

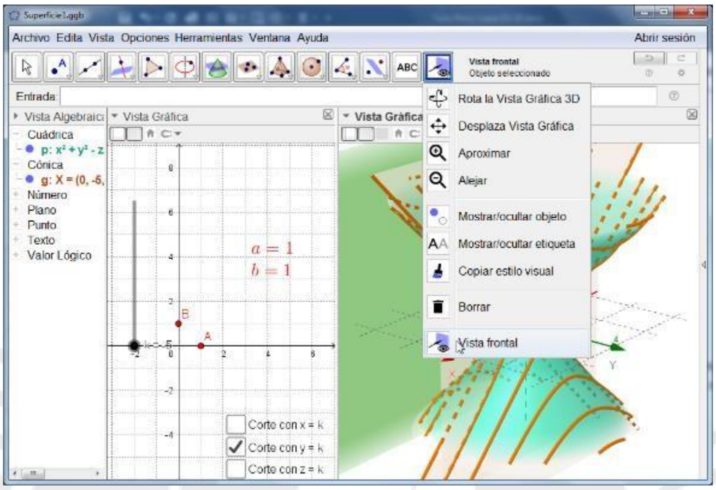


Figura 17: Herramienta Vista frontal

Para seleccionar la dirección de la vista a mostrar, ubicamos el puntero del mouse en el eje correspondiente hasta que adopte la forma de flecha (ver figura 18) y hacemos click izquierdo.

Aplicaremos la herramienta Vista frontal a las secciones determinadas por los planos de ecuación $y = k$.

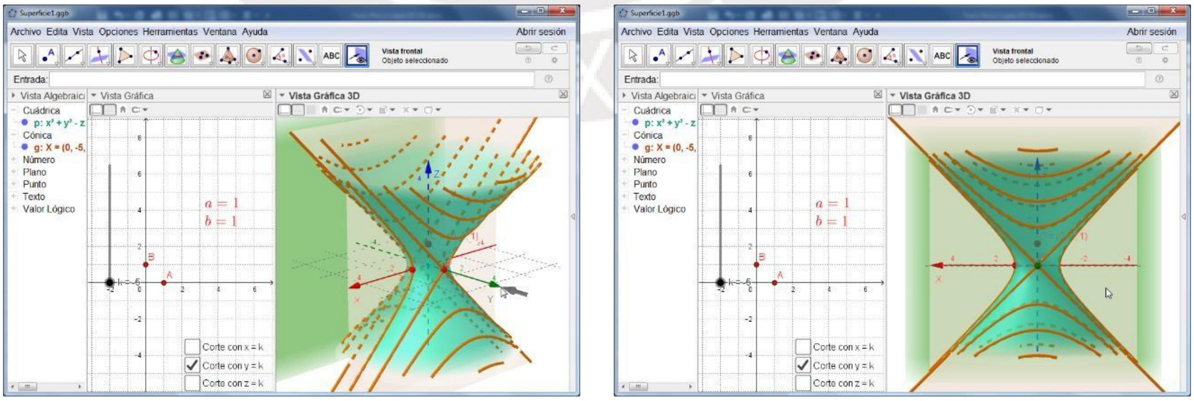


Figura 18: Vista frontal de las secciones con los planos y=k

Ahora usaremos la herramienta Vista frontal en las secciones hechas con los planos de ecuación $z = k$, ubicando el cursor del mouse sobre el eje Z en la vista gráfica 3D hasta que adopte la forma de flecha (ver Figura 19).

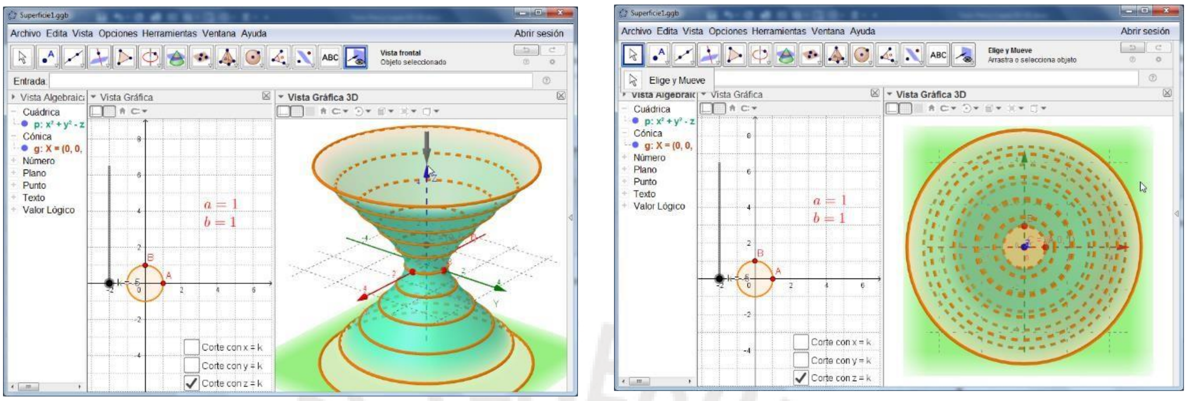


Figura 19: Vista frontal de las secciones con los planos z=k

CAPÍTULO II: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En este capítulo mostramos aspectos del enfoque Instrumental propuesto por Rabardel (2011), así como, aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995).

2.1 Aspectos del Enfoque Instrumental

El objetivo de la investigación a realizar nos hace ubicar nuestro trabajo en el marco del Enfoque Instrumenta (EI) de Rabardel, dado que esperamos que el estudiante consiga la génesis instrumental del hiperboloide, a partir de los procesos de instrumentalización e instrumentación, propios de dicho enfoque.

En la primera parte de su trabajo, Rabardel (1995) describe las acciones de los hombres y los instrumentos y distingue diversas perspectivas como la antropocéntrica con el enfoque ergonómico y la perspectiva centrada en la tecnología, en la que el hombre está en una posición residual frente a la técnica. Ambas perspectivas describen el accionar del hombre frente a los instrumentos.

En una segunda parte, distingue el concepto de instrumento y su diferencia con artefacto, distinguiendo interacciones entre el sujeto y el artefacto y luego entre el sujeto e instrumento, pero lo que la mayoría de los autores distinguen en la actividad con instrumentos es la existencia de tres polos presentes: el sujeto, el instrumento y el objeto.

Empezamos por definir lo que el autor entiende por: *sujeto*, *objeto*, *artefacto* e *instrumento* en el desarrollo de su marco teórico.

Sujeto: usuario, operario, trabajador, estudiante que realiza alguna acción con instrumentos.

En nuestra investigación, los sujetos serán dos estudiantes de la facultad de Arquitectura de una universidad de Lima.

Objeto: es aquella entidad a la cual se dirige la acción del sujeto por medio del instrumento. Puede ser cierta materia prima, una realidad, un objeto de cierta actividad, un problema a resolver utilizando un instrumento, etc.

En nuestra investigación, orientada al trabajo del profesional de la arquitectura que utiliza la superficie del hiperboloide, el objeto puede ser cualquier requerimiento que se satisfaga con el uso de dicha superficie: como una torre de enfriamiento o la bóveda de una galería.

Artefacto: se refiere, de la manera más neutra posible, al "objeto material fabricado", en términos de Rabardel (1985), es la "cosa que ha sufrido una transformación de origen humano", susceptible de un uso orientado a actividades intencionales. Un artefacto puede ser de naturaleza muy variada como una regla, un computador, un sistema de ecuaciones, entre otros. En nuestro caso será el hiperboloide.

Instrumento: El autor define al instrumento como el artefacto inscrito en un uso debido a la acción del sujeto. En tal sentido, el autor afirma que el instrumento en sí no existe, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, en consecuencia, se afirma también que el instrumento es *el artefacto en acción* y señala la doble naturaleza del instrumento:

> … una entidad mixta, que comprende, a la vez, al sujeto y al objeto (en el sentido filosófico del término): el instrumento es una entidad compuesta que incluye una componente artefactual (un artefacto, una fracción de artefacto o un conjunto de artefactos) y una componente cognitiva (el o los esquemas de utilización, a menudo relacionados con esquemas de acción más generales) (Rabardel, 1985, p. 178)

En nuestra investigación, el artefacto puede ser el hiperboloide juntamente con su gráfica; o el hiperboloide, su gráfica y la ecuación cartesiana de dicha superficie, o como veremos más adelante, el hiperboloide con sus secciones características paralelas a los planos coordenados.

En ese sentido, los autores Verillon y Rabadel (1995) señalan la diferencia entre un artefacto, que es un objeto dado susceptible de tener algún uso específico, y un instrumento que es un constructo psicológico: el artefacto se vuelve instrumento cuando el sujeto se ha apropiado de él y lo ha integrado a su actividad mediante el desarrollo de esquemas de utilización, esto se conoce como la génesis instrumental. Asimismo, Trouche (2004) manifiesta que dicha génesis es un proceso complejo y está vinculado a las características del artefacto, sus potencialidades y restricciones, y a la actividad del sujeto sus conocimientos previos y métodos de trabajo.

En nuestro trabajo, consideramos como artefacto al hiperboloide, el cual será usado por el sujeto (estudiante) en la resolución de actividades que forman parte de nuestra secuencia didáctica. La actividad didáctica busca la movilización de las propiedades del artefacto (hiperboloide) y la aparición de esquemas de utilización para convertir el artefacto (hiperboloide) en instrumento usado en la solución de problemas.

Génesis Instrumental

En el enfoque instrumental, Rabardel (2011) estudia la diferencia entre artefacto e instrumento y describe los procesos de transformación progresiva de artefacto en instrumento conocido como Génesis Instrumental, también señala dos clases de perspectivas de mediación que nos permiten diferenciar las características de nuestros instrumentos: la mediación epistémica en la que el instrumento permite el conocimiento del objeto y la mediación pragmática en la que el instrumento permite transformar al objeto.

Y es así que Verillon y Rabardel (1985) proponen el modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada con la que caracterizan los polos: sujeto, instrumento y objeto que es denominado por Rabardel (2011) como "Triada característica de la Actividad con Instrumentos" (p.98).

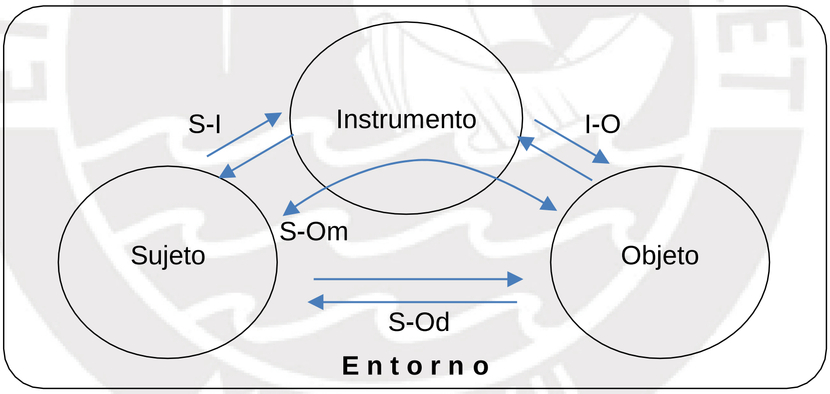


Figura 20: Triada característica de la actividad con Instrumentos
Fuente: Rabardel (2011 p.98)

La génesis instrumental es el proceso de formación de un instrumento por un sujeto a partir de un artefacto. Describe las variaciones en las interacciones entre el sujeto y el artefacto a lo largo del tiempo, a medida que el sujeto va adquiriendo experiencia y la práctica le va haciendo más eficaz usando el artefacto (Rabardel, 2011). Dichas interacciones entre sujeto y artefacto tienen un componente físico (manipulación del teclado, del mouse, de la orientación del hiperboloide, etc.) y otro psicológico (interpretación de la información recibida por el sujeto y toma de decisiones respecto de cómo actuar sobre el artefacto).

La génesis instrumental tiene dos componentes: La instrumentación y la instrumentalización.

Instrumentación e Instrumentalización

Al respecto, Rabardel (2011) indica:

> Los **procesos de instrumentalización** se refieren al surgimiento y la evolución de los componentes artefacto del instrumento: selección, reagrupación, producción e institución de funciones, desvíos y catacresis, atribución de propiedades, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, etc.) que prolongan las creaciones y realizaciones de artefactos cuyos límites son difíciles de determinar debido a este proceso de transformación. (p. 211)

Así, a partir de la instrumentalización, el sujeto aprende a utilizar de manera más eficaz, los componentes artefacto necesarios, hasta llegar a un manejo tal que le permita utilizarlos en la resolución de problemas.

Este proceso, sin embargo, no es siempre duradero a lo largo del tiempo y al respecto, el autor distingue dos niveles de instrumentalización:

- En un primer nivel, la Instrumentalización local, relacionada con una acción específica y en una circunstancia determinada de su desarrollo. El artefacto solo es instrumentalizado momentáneamente.
- En un segundo nivel, la función adquirida se conserva de forma permanente como propiedad del artefacto con respecto a un tipo de acciones y situaciones. Se dice que la instrumentalización es durable o permanente.

En nuestro trabajo con el hiperboloide, identificamos algunos procesos de instrumentalización cuando, por ejemplo, el estudiante reconoce que la superficie de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ presenta secciones circulares al ser intersecada por planos de ecuación $z=k$, lo que permite intuir que a y b siempre serán iguales; o que el signo que antecede a $\frac{z^2}{c^2}$ es negativo implica que la superficie es un hiperboloide cuyo eje es el eje z; etc.

El autor también explica:

> Los **procesos de instrumentación** son relativos al surgimiento de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: construcción, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación recíproca, asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 2011, p. 211)

Algunos procesos de instrumentación los encontramos cuando el estudiante es capaz de, a partir de cortes paralelos a los planos coordenados, reconocer las secciones cónicas que componen su superficie y representarlas gráficamente en un sistema 3D. O cuando a partir de la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, el estudiante es capaz de reconocer un hiperboloide y señalar que a, b y c son dimensiones de dicha superficie, o cuando, mediante esquemas de acción instrumentada, el estudiante es capaz de distinguir la orientación del eje del hiperboloide cuando el signo negativo en su ecuación antecede a $\frac{x^2}{a^2}$ o $\frac{y^2}{b^2}$, esta acomodación de la superficie y su adaptación a nuevas situaciones constituyen esquemas de utilización generados en el sujeto.

Tal como afirma Trouche (2004) "la instrumentación es precisamente el proceso por el cual el artefacto imprime su marca en el sujeto y permite desarrollar una actividad dentro de algunas fronteras (restricciones del artefacto)" (p. 556)

Esquemas de utilización

Con relación a los esquemas, Vergnaud (1990, citado por Rabardel, 2011) señala que: “los conocimientos de carácter científico se construyen sobre esquemas organizadores de la conducta, y que es en estos esquemas donde hay que buscar los conocimientos en acto de los sujetos” (p. 164)

Dentro de la clasificación de los esquemas, Rabardel (2011) distingue en ellos dos niveles: Los **esquemas de *uso***, relativos a tareas segundas o elementales y que no pueden descomponerse en tareas más pequeñas, en nuestra investigación, un esquema de uso es el arrastre de un deslizador para desplazar un plano de corte del hiperboloide en forma paralela y **los esquemas de *acción instrumentada*** o relativo a tareas primeras, que consisten en una totalidad compuesta por esquemas de primer nivel y cuyo significado está dado por el acto global que tienen como tarea. Mediante estos esquemas hay una recomposición de la actividad dirigida a la realización de la tarea principal.

Por lo tanto, desde este enfoque, el autor señala que el artefacto no es en sí instrumento. El instrumento es el artefacto en acción, enmarcado en una actividad, con los esquemas de utilización creados por el sujeto. Y, a su vez, los artefactos y sus esquemas pueden modificar la acción del sujeto y hacerlo recomponer sus esquemas, es decir, los instrumentos también modifican la acción del sujeto y lo mueven a crear o recomponer otros esquemas.

Los artefactos, explica Rabardel (2011), son instrumentalizados por el sujeto con la creación de los esquemas de utilización, pero también es posible la necesidad de crear esquemas nuevos o recomponer la acción del sujeto según se acceda a un nuevo artefacto.

En nuestra investigación se producen esquemas de utilización al permitir la modificación del hiperboloide manejando las variables didácticas en la actividad. Estas modificaciones son concernientes al tipo de sección transversal, a la orientación de su eje, al ajuste de su ecuación respecto a situaciones presentes en la actividad. Dichas acciones son desde el punto de vista del enfoque instrumental, indicadores de los procesos de instrumentalización e instrumentación.

En consecuencia, a partir de la secuencia didáctica, pretendemos que los estudiantes realicen los procesos descritos en los párrafos anteriores y logren realizar la génesis instrumental del hiperboloide.

2.2 Aspectos de la Ingeniería Didáctica como método de investigación

Nuestra investigación es de corte cualitativo y puede ser aplicada a diversas áreas de la investigación. En ese sentido, Taylor y Bogdan (1987) hacen una descripción general sobre esta metodología de investigación y señalan que esta metodología produce datos descriptivos como palabras, testimonios de las personas y diversos tipos de conducta observable; que es inductiva y desarrolla conceptos, intelecciones y comprensiones partiendo de los datos; que en la metodología cualitativa el investigador ve a las personas en conjunto con su entorno; el investigador cualitativo interactúa con el informante de un modo no intrusivo; la investigación cualitativa se orienta más al estudio de los procesos sociales dentro de los cuales se sitúa la actividad matemática.

Por su parte, Martínez, M. (2006) complementa lo dicho por Taylor y Bogdan y afirma que:

> la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones. De aquí, que lo cualitativo (que es el todo integrado) no se opone

> a lo cuantitativo (que es sólo un aspecto), sino que lo implica e integra, especialmente donde sea importante. (Martínez, 2006, p.128)

En general, Martínez, M. (2006) describe las características de todo proceso de investigación y distingue dos etapas principales: La recolección de toda la información que pudiera ilustrar lo sucedido y luego la elaboración de un informe coherente con dicha información, ubicado en un determinado marco teórico.

Como haremos una intervención en clase para que estudiantes de Arquitectura se apropien de la noción de hiperboloide, el método que consideramos pertinente es la Ingeniería Didáctica, sin embargo, en nuestra investigación solo utilizaremos aspectos de este método que presentamos a continuación.

La Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica surge como método de investigación en la década de los ochenta y se llamó así gracias a Artigue (1995) porque el trabajo en didáctica es similar al del ingeniero quien se basa en sus conocimientos científicos y se somete a un control de tipo científico al abordar dos cuestiones importantes en la didáctica de la matemática: las acciones en el sistema de enseñanza que para nuestro estudio lo constituye el sistema de enseñanza del hiperboloide en el nivel superior y el papel que conviene hacer tomar a las acciones didácticas en la enseñanza actual del hiperboloide mediante el uso del GeoGebra 3D.

Al respecto, la autora menciona que:

> La ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la *micro-ingeniería* y el de la *macro-ingeniería*, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. (Artigue, 1995, p.36)

Por ello, la ingeniería didáctica es un método de investigación adecuado para estudiar las acciones de los estudiantes respecto a secuencias didácticas con objetos matemáticos y difiere de las investigaciones de tipo estadístico en la forma de validación que en este caso no es externa basada en hipótesis y parámetros fijos, sino que su validación es interna como explicaremos más adelante al describir las fases de análisis *a priori* y a posteriori.

En su investigación, Artigue (1995) describe el método de ingeniería didáctica y distingue las cuatro fases que explicaremos a continuación y los aspectos de ellas que usaremos en nuestra investigación.

Análisis preliminar. En esta fase la autora señala que se pueden tener en cuenta aspectos como:

- "El análisis epistemológico de los contenidos tomados en cuenta en la enseñanza",
- "El análisis de la enseñanza tradicional del objeto de estudio".
- "El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución".
- El análisis del conjunto de restricciones en el que se llevará a cabo la secuencia didáctica.

Al respecto, Artigue (1995) distingue restricciones en tres dimensiones:

> • La dimensión *epistemológica* asociada a las características del saber en juego
> • La dimensión *cognitiva* asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza
> • La dimensión *didáctica* asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. (p. 40)

En nuestro estudio, en el aspecto epistemológico mostraremos la evolución a través de la historia del concepto de hiperboloide y saberes involucrados; en el aspecto cognitivo presentamos trabajos de investigación que han hecho uso de la geometría dinámica y/o han usado el mismo marco teórico que emplearemos; en el aspecto didáctico presentaremos libros de texto que tratan sobre el objeto hiperboloide como Lehmann (2005) para analizar el enfoque que se le da al objeto hiperboloide. Asimismo, señalamos las instituciones en donde se enseña el hiperboloide, su ubicación en la malla curricular de enseñanza.

La concepción y el análisis *a priori*. Según Artigue (1995), en esta fase el investigador, con la información obtenida en la fase anterior y el marco teórico elegido para lograr el objetivo de la investigación, debe elaborar la secuencia didáctica que permita actuar sobre las variables del sistema no limitadas por las restricciones, que las denomina *variables de comando* o variables didácticas. Al respecto, la autora distingue dos tipos de variables didácticas: las variables macro didácticas, relativas a la organización global de la ingeniería y las variables micro didácticas o locales que se refieren a una secuencia o fase de la ingeniería. Las variables micro didácticas, señala la investigadora, se elaborarán con el objeto de facilitar la creación del conocimiento matemático en los estudiantes de una manera constructiva, inducen a un cambio de estrategia en la solución de situaciones problema

En nuestra investigación, usaremos las siguientes variables micro didácticas:

- El signo negativo (–) en la ecuación canónica de la cuádrica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
- Los valores de los parámetros a, b, c.
- La relación de orden existente entre a y b.
- El valor del parámetro k del deslizador.
- La relación de orden existente entre a y k.
- Las secciones transversales de la superficie.

y elaboraremos una secuencia de actividades en la que se utilice lápiz y papel en un principio y GeoGebra posteriormente con el fin de que el estudiante movilice nociones de algunas cónicas para luego llegar a las superficies cuádricas, en particular al hiperboloide. Dicha secuencia de actividades buscará, mediante la variación de las variables didácticas, que los estudiantes se apropien de las características del hiperboloide que se mostrarán por medio del GeoGebra y que aso utilicen en la solución de problemas.

Aplicaremos la secuencia didáctica a un grupo de estudiantes de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de una universidad de Lima.

Respecto al análisis *a priori* que se realiza en esta fase después de la concepción, Artigue (1995) nos menciona lo siguiente:

> ... el objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis a posteriori. (p. 45)

Es decir, esta etapa del análisis *a priori* tiene un carácter descriptivo y predictivo. En nuestra investigación, predeciremos (plantearemos supuestos) resultados a obtener en el accionar de los estudiantes respecto a la secuencia de actividades que se vaya a proponer.

Experimentación. La fase de experimentación es el momento de poner en funcionamiento todo el dispositivo construido, corrigiendo de ser necesario las variables micro didácticas cuando el experimento indique esa necesidad, volviendo al análisis *a priori* en un proceso de complementación (Almouloud 2008, p. 67).

Es en ese momento en el que aplicaremos la secuencia de actividades las cuales propiciarán la aparición y desarrollo de los componentes artefacto del hiperboloide, dirigidos a producir la génesis instrumental del Hiperboloide y de la cual recogeremos datos para ser analizados en la última fase de la ingeniería.

Análisis a posteriori. Según Artigue (1995), en esta fase el conjunto de datos recogidos en la fase experimental, observaciones, grabaciones y producciones de los estudiantes tanto dentro de clase como fuera de ellas se analizan dentro del marco teórico y el análisis *a priori*.

En nuestro trabajo de investigación, esta fase es en la que recogeremos la producción realizada por el estudiante respecto a la secuencia de actividades realizada en la fase experimental, como los desarrollos y respuestas a las actividades, archivos del GeoGebra, realizaciones hechas con lápiz y papel, producción de los estudiantes en el GeoGebra y capturadas mediante grabaciones, el análisis a posteriori contemplará la creación de esquemas de utilización o el surgimiento de las características artefacto del hiperboloide en el accionar de los alumnos.

Según la autora, es en esta etapa en que en la confrontación de los análisis *a priori* y a posteriori se fundamenta la validación de los supuestos formulados en la investigación.

En nuestro estudio, la validación será la contrastación entre los supuestos realizados en el análisis *a priori* y los resultados obtenidos en el análisis a posteriori. Esta contrastación se hará en el marco del enfoque instrumental, y determinaremos si los estudiantes lograron la Génesis del Hiperboloide.

CAPITULO III: ESTUDIO DEL HIPERBOLOIDE

En este capítulo, trataremos sobre nuestro objeto matemático, el hiperboloide. Realizamos una reseña histórica de las superficies cuádricas y cómo nuestro objeto matemático en estudio es tratado en los libros didácticos.

3.1 Reseña Histórica de las superficies cuádricas.

El estudio de las secciones cónicas y de las superficies cuádricas ha sido tratado por diversos estudios de la Historia de la Matemática. Así, Peñaloza (2016) nos refiere que dicho estudio se remonta a la antigua Grecia y explica la generación de las secciones cónicas como resultado de cortar la superficie de un cono. Añade, además, que no se obtuvieron ecuaciones de las secciones cónicas ya que el álgebra como la conocemos hoy no se había formalizado sino hasta muchos siglos después.

Autores como Ortiz (2005) describen los trabajos con cónicas, hechos por los geómetras griegos Apolonio en su obra “Cónicas” y Menecmo como uno de los precursores de dicho trabajo.

Menecmo (aproximadamente 350 A.C.) fue alumno de Eudoxo y creó las secciones cónicas y las aplicó en la solución del problema de la duplicidad del cubo cuyo estudio había iniciado Hipócrates.

Menecmo desarrolló una metodología basada en las relaciones métricas en triángulos rectángulos obtenidos al cortar un cono por un plano que contiene al eje del cono. Los teoremas de proporcionalidad en triángulos produjeron ecuaciones que se ajustaban a las soluciones de problemas clásicos, imposibles de resolver con regla y compás. Al respecto, el autor señala que:

> […] Menecmo introduce esas curvas como secciones de un cono circular recto con un plano perpendicular a una generatriz. La parábola fue llamada la sección de un cono rectángulo; la hipérbola a la sección de un cono obtusángulo, y la elipse a la sección de un cono acutángulo. Aristeo (aprox. 320 A.C.) también estudió a las secciones cónicas; escribió una importante obra al respecto, el “Libro de los Lugares Sólidos”. (Ortiz, 2005, p. 293)

Sin embargo, el autor señala a Apolonio (Perga 262 a.C. – Alejandría 190 a.C.) como quien establece los principios de la geometría analítica de una manera formal en su obra “Las Cónicas”, por lo que nos señala:

> […] con Apolonio se inicia la teoría de la convergencia uniforme. Y por supuesto, con él se inicia la importante teoría de la geometría analítica de un modo formal; esto en

> una época en que no existía el álgebra de un modo organizado que le hubiera sugerido, posiblemente, algebrizar a la geometría de las cónicas, como lo hicieron muchos siglos después, Kepler, Cavalieri y sobre todo Descartes. (Ortiz, 2005, p. 294)

Además, Peñaloza (2016) nos refiere trabajos de Leonard Euler (1707-1783) respecto a las superficies cuádricas en su obra *Introducción al análisis de los Infinitos* y destaca la importancia del segundo tomo ya que en él utiliza por primera vez sistemas coordenados de dos y tres dimensiones que establecen las bases para la geometría analítica de los sólidos.

Autores como Boyer C. (1968) al respecto afirman:

> […] Un apéndice largo y sistemático a su libro *Introductio* es quizás la contribución más significativa de Euler a la geometría, ya que representa prácticamente la primera exposición de libros de texto de geometría analítica sólida. Las superficies, tanto algebraicas como trascendentales, se consideran en general y luego se subdividen en categorías. Aquí encontramos, evidentemente por primera vez, la noción de que las superficies de segundo grado constituyen una familia de cuádricas en el espacio, análogas a las cónicas en geometría plana. A partir de la ecuación cuadrática general de diez términos f (x, y, z) = 0, (p. 580)

A su vez, el autor añade que Euler afirmó que la suma de términos del segundo grado, igualada a cero, da la ecuación del cono asintótico, real o imaginario. Más aún, presentó las ecuaciones para la traslación y rotación de ejes (en la forma que, por cierto, todavía lleva el nombre de Euler) para reducir la ecuación de una superficie cuádrica no singular a una de las formas canónicas correspondientes a los cinco tipos fundamentales: el elipsoide real, los hiperboloides de una y dos hojas, y los paraboloides elípticos e hiperbólicos.

En consecuencia, el investigador señala que el trabajo de Euler se acerca más a los libros de texto modernos que a cualquier otro libro antes de la Revolución Francesa.

A continuación, presentaremos como es tratado el Hiperboloide en los libros de texto modernos.

3.2 El Hiperboloide en los libros matemáticos

En la primera fase de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), el análisis preliminar, se tratan las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica del objeto matemático. En la dimensión didáctica, entre otros aspectos se analiza el tratamiento que tiene el objeto matemático en los libros de texto. En tal sentido, presentaremos el tratamiento que tiene el hiperboloide de una hoja en el libro “Geometría Analítica” Lehmann Ch. (2005).

Un hiperboloide es una superficie de revolución que resulta de girar una hipérbola alrededor de uno de sus dos ejes de simetría. Si el giro es alrededor del eje focal, se obtiene un *hiperboloide de dos hojas* (p.430).

Esta definición, presentada en un libro matemático, no deja de ser importante, pero nos parece insuficiente dentro de nuestro marco teórico, que busca estudiar el surgimiento de propiedades y la creación de esquemas de uso por parte del estudiante. Nos permitimos, por lo tanto, añadir una representación gráfica a la definición dada por Lehman (2005). Así, en la figura 21 mostramos el hiperboloide de dos hojas

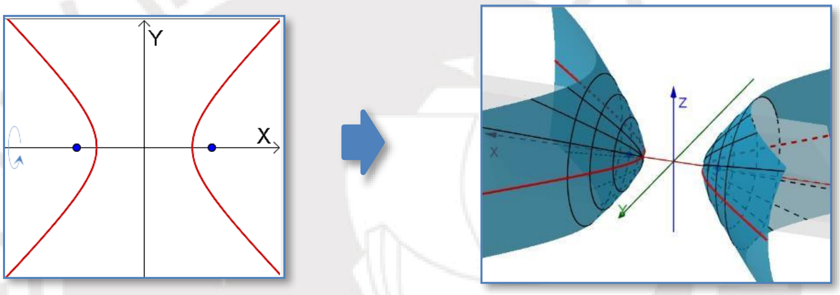


Figura 21: Hiperboloide de revolución de dos hojas
Fuente: Elaboración propia con GeoGebra 3D

Añade el autor que, si el giro es alrededor del eje normal, se obtiene un *hiperboloide de una hoja* lo cual creemos, también amerita una representación gráfica como parte de nuestro trabajo. La figura 22 muestra el hiperboloide de revolución de una hoja, que será el objeto matemático usado en nuestra actividad didáctica.

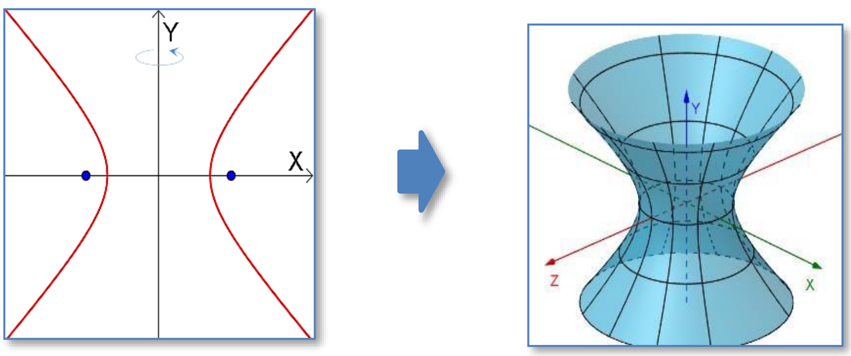


Figura 22: Hiperboloide de revolución de una hoja
Fuente: Elaboración propia con GeoGebra 3D

Tal como afirmamos, centraremos nuestro estudio en el hiperboloide de una hoja, por las características estructurales y arquitectónicas que presenta esta superficie. Al respecto, Ibañez (2004) menciona que:

> Como superficie reglada se puede realizar fácilmente en arquitectura, lo cual es una ventaja a la hora de utilizarla. **Gaudí** utilizó el hiperboloide de una hoja en la cúpula de las caballerizas de la Finca Güell (1887) (para **Gaudí** el hiperboloide simbolizaba la luz, ya que esta entra por el cuello circular y se desliza por el hiperboloide), en los capiteles del Palau Güell (1888), en la bóveda para el giro de carruajes del Parc Güell (1914) y finalmente, en el proyecto del templo de la Sagrada Familia. (p. 17)

En relación con nuestro objeto matemático, Lehmann (2005) describe la forma canónica de la ecuación del hiperboloide genérico de una hoja como:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \cdots (1)$$

el cual puede también tener las otras formas canónicas:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{o} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

que dependen de cuál sea el eje cartesiano que no interseca al hiperboloide.

Al respecto, el autor analiza las características geométricas del hiperboloide representado algebraicamente por la ecuación (1), cuya gráfica se observa en la figura 23. Dicho análisis servirá también para las otras ecuaciones ya que las tres superficies difieren solamente en sus orientaciones respecto a los ejes coordenados.

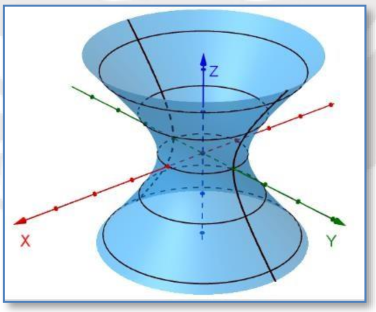


Figura 23: Hiperboloide genérico
Fuente: Adaptado de Lehman
(2005 p.430)

Las intersecciones con el eje X: (hacemos $y = z = 0$) $x_1 = -a$, $x_2 = a$

las intersecciones con el eje Y: (hacemos $x = z = 0$) $y_1 = -b$, $y_2 = b$

No existen intersecciones con el eje Z.

Las trazas sobre los planos cartesianos son:

Sobre el plano XY: $(z = 0)$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una elipse

Sobre el plano YZ: $(x = 0)$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ es una hipérbola

Sobre el plano XZ: $(y = 0)$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ es una hipérbola

Además, la superficie es simétrica respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y origen de coordenadas.

Si analizamos las secciones del hiperboloide con planos paralelos al XY, haremos $z = k$ en la ecuación (1), obteniendo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 1$$

de donde:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

es decir:

$$\frac{x^2}{a^2(1+\frac{k^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1+\frac{k^2}{c^2})} = 1 \cdots (2).$$

La ecuación (2) muestra que la secciones son elipses, cuyos ejes van creciendo a medida que k aumenta. Se desprende de esto que la superficie de la ecuación (1) no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente a lo largo de la dirección Z. En general, afirmamos que cualquier hiperboloide se extiende en la dirección del eje cuya variable aparece en la ecuación con signo negativo.

Hiperboloide de revolución:
Si en la ecuación (1) se cumple que $a = b$, se obtendrá un hiperboloide de revolución de una hoja.
En general, Lehmann (2005) describe al hiperboloide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

como una superficie doblemente reglada, que puede generarse por las familias de rectas con ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad \wedge \quad k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \quad \cdots (3)$$

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k\,(1+\frac{y}{b}) \quad \wedge \quad k\,(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=1-\frac{y}{b} \quad \cdots (4)$$

cada una de las familias de rectas (3) y (4) se llama *haz alabeado* de segundo orden o *regulus* del hiperboloide. Mostramos algunas generatrices de dicho haz en la figura 24.

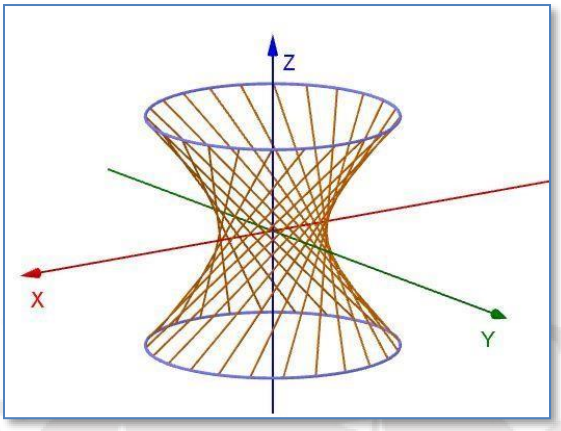


Figura 24: *Regulus* del hiperboloide
Fuente: Adaptado de Lehman (2005 p.430)

En la actividad didáctica desarrollada, encontramos el *regulus* del hiperboloide cuando la superficie es cortada por planos paralelos al eje cuando $k = a$. Creemos que llegar a esta conclusión es importante por dos motivos: primero, emerge una propiedad del hiperboloide respecto a sus secciones rectas por planos de ecuación $x = k$ o $y = k$, cuando $k = a$. Segundo, esto muestra al estudiante que la superficie del hiperboloide puede considerarse como una superficie reglada. Si bien es cierto, nuestra actividad didáctica no trata de superficies regladas, consideramos importante en la formación del estudiante de arquitectura el descubrimiento de esta característica y la recomendamos para trabajos posteriores.

3.3 El hiperboloide en los libros didácticos

Como parte de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) se toma en cuenta, como su primera etapa, el estudio de aspectos didácticos de nuestro objeto de estudio y la manera cómo es enfocado en el grupo de estudiantes que son sujetos de nuestra investigación.

En ese sentido, consideramos pertinente presentar dos libros que tratan las características del hiperboloide, como parte de un estudio más amplio que se refiere a las Superficies Cuádricas o Cuadráticas y que se encuadran en el marco teórico que empleamos y justifican las actividades a proponer. Dichos textos se mencionan en el siguiente cuadro:

Cuadro 3: Textos consultados

Autor	Título	Capitulo	Páginas
Leithold, Louis (1999)	El Cálculo. 7ª edición.	10	848 - 859
Ugarte, Francisco y Yucra, Janet (2014)	Matemáticas para Arquitectos. 2ª edición.	4	249 – 293, 345 y 346.

Fuente: Elaboración propia

En el primer texto, Leithold (1999) define el concepto de superficie de revolución y nos indica que

> Si una curva plana se gira alrededor de una recta fija que está en el plano de la curva, entonces la superficie así generada se denomina **superficie de revolución**. La recta fija se llama **eje** de la superficie de revolución y la curva plana recibe el nombre de **curva generatriz** (o **revolvente**). (Leithold 1999 p.848)

Presenta también ejemplos de superficies de revolución como cilindros y esferas como se aprecia en la figura 25.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Una esfera generada al girar la semicircunferencia $y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$, alrededor del eje y se muestra en la figura 10. La figura 11 muestra el cilindro circular recto para el cual la generatriz es la recta $z = k$ del plano xz y su eje es el eje x.

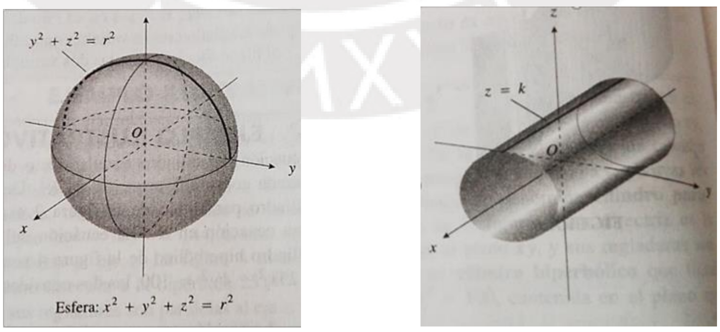


Figura 25: Superficies cuádricas (Leithold p.849)

El enfoque dado por Leithold (1995) a las superficies de la figura 25, permitirá formar esquemas de utilización en el estudiante cuando manipule curvas planas mediado por el GeoGebra en la construcción de superficies de revolución.

A continuación, el autor generaliza la rotación de curvas alrededor de un eje, tratándose de curvas generadas por una ecuación de la forma $z = f(y)$.

En la figura 26, $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la superficie de revolución. Por P pasa un plano perpendicular al eje y, que corta a dicho eje en $Q_0(0, y, 0)$. Sea $P_0(0,\ y,\ z_0)$ el punto de intersección del plano con la curva generatriz. Como la sección transversal de la superficie con el plano que pasa por P es una circunferencia, P estará en la superficie si y solo si

$$|\overline{Q_0P}|^2 = |\overline{Q_0P_0}|^2 \cdots (1)$$

Pero, $|\overline{Q_0P}|^2 = x^2 + z^2$ y $|\overline{Q_0P_0}|^2 = z_0^2$, por lo que al reemplazar en (1) se obtiene

$$x^2 + z^2 = z_0^2$$

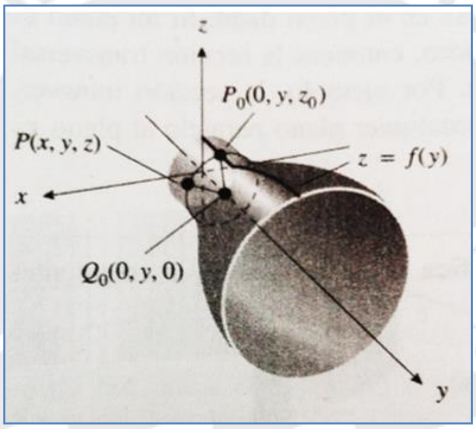


Figura 26: Superficie de revolución
(Leithold p.848)

Debido a que el punto P_0 está en la curva generatriz, sus coordenadas deben cumplir $z_0 = f(y)$, obteniéndose finalmente

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2,$$

que es la ecuación de la superficie de revolución.

El análisis realizado por Leithold (1995) toma en cuenta los conocimientos previos que un estudiante de este nivel debe tener, es decir, los estudiantes saben trazar la gráfica de ciertas curvas planas, los estudiantes conocen las características geométricas de las gráficas de las cónicas y este análisis extiende los conocimientos de las gráficas y de ecuaciones del plano al espacio y permitirá luego la identificación de las Superficies Cuádricas según los coeficientes de su ecuación.

El texto de Leithold trata también sobre las gráficas de las superficies Cuádricas y al respecto señala

> […] La gráfica de una ecuación de segundo grado en las variables x, y y z
> $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \cdots (5)$$
> se denomina **superficie cuádrica**. Los tipos más simples de superficies cuádricas son los cilindros parabólicos, elípticos e hiperbólicos, los cuales ya se han estudiado. Ahora se considerarán otros seis tipos de superficies cuádricas. En el estudio de cada una de estas superficies, se elegirán los ejes coordenados de modo que las ecuaciones resulten en su forma más simple, y se hará referencia a las secciones transversales de las superficies en planos paralelos a los planos coordenados. Estas secciones transversales ayudan a visualizar la superficie. (Leithold 1999, p. 850)

Uno de nuestros objetivos específicos planteados es la identificación, por parte del estudiante, de los elementos del hiperboloide y la representación gráfica de sus elementos. En ese sentido, el enfoque realizado por Leithold (1999) al trabajar con las secciones transversales (trazas) de las superficies cuádricas, nos proporciona un conjunto de actividades pertinentes para alcanzar nuestro objetivo.

El autor presenta una descripción gráfica y algebraica de las siguientes superficies cuádricas

Elipsoide

Superficie representada algebraicamente por la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \cdots (6)$$

donde a, b, c son positivos.

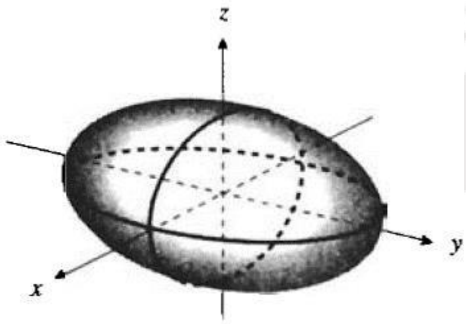


Figura 27: Elipsoide
(Leithold p.850)

Si en (6) hacemos $z = 0$, se obtiene una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

para obtener las secciones transversales de la superficie en los planos $z = k$, se reemplaza z por k en la ecuación del elipsoide obteniendo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

Si $|k|<c$, la sección transversal es una elipse

Si $|k|=c$, la intersección es el punto $(0,0,k)$

Si $|k|>c$, no existe intersección

El mismo análisis se puede realizar para secciones transversales formadas por planos paralelos a los otros planos coordenados.

Se menciona la **esfera** como un caso particular del elipsoide en el cual $a=b=c=r$.

A continuación, Leithold (1999) describe el hiperboloide de una hoja desde el punto de vista de una superficie cuádrica con las siguientes características

Hiperboloide elíptico de una hoja

Superficie representada algebraicamente por la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \cdots (7)$$

donde a, b, c son positivos.

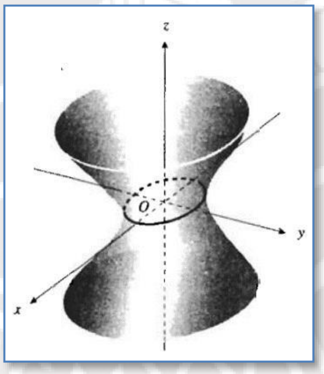


Figura 28: Hiperboloide elíptico de una hoja
(Leithold p.851)

Las secciones transversales en los planos $z=k$ son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

Las secciones transversales en los planos $x=k$ son las hipérbolas

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$$

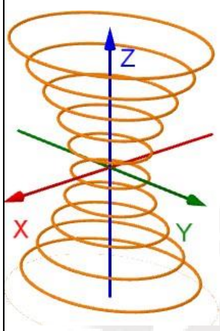
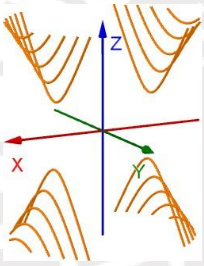
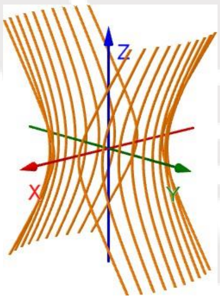
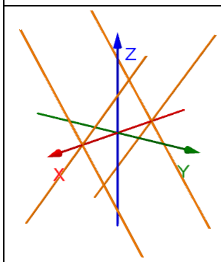
Si $|k|<a$, el eje transverso de la hipérbola es paralelo al eje y.

Si $|k|>a$, el eje transverso es paralelo al eje z.

Si $|k| = a$, la hipérbola degenera en dos rectas.

El estudio de las secciones transversales es, por tanto, fundamental en la creación de esquemas de utilización del hiperboloide. El enfoque mostrado por Leithold (2005) sustenta los resultados a priori de nuestra actividad por lo que, aun cuando no aparece en el texto, nos permitimos mostrar la representación gráfica descrita por el autor.

Cuadro 4: Secciones del hiperboloide de una hoja

	Secciones transversales en planos $z = k$.
	Secciones transversales en planos $x = k$, con $\lvert k\rvert > a$.
	Secciones transversales en planos $x = k$, con $\lvert k\rvert < a$.
	Secciones transversales en planos $x = k$, con $\lvert k\rvert = a$.

Fuente: Elaboración propia con GeoGebra 3D

Por su parte, el texto de Ugarte y Yucra (2014) inicia el Capítulo 4 y describe aspectos generales del espacio cartesiano, así como las cónicas vistas desde como intersección de una superficie cónica y un plano secante.

Al igual que Leithold (1999), el texto de Ugarte y Yucra propone la gráfica de ecuaciones de tres variables a partir de las secciones determinadas por planos paralelos a los planos coordenados y con ayuda de estas curvas (cónicas) elabora bosquejos de las superficies pedidas.

Una diferencia importante en el texto de Ugarte y Yucra (2014) es el trabajo con superficies que no están centradas en el origen del sistema de coordenadas y que por lo tanto requieren un manejo algebraico más complejo para la determinación de sus secciones transversales.

Así, los autores proponen el siguiente ejemplo en el que se emplea las secciones cónicas estudiadas anteriormente y la determinación de secciones transversales.

> **Ejemplo 159.** Considere la superficie S de ecuación $4x^2 + 4z^2 - (y-2)^2 = 4$:
>
> a. Si es posible, halle los valores de z para los cuales:
>
> i. $x = \sqrt{2}, y = 1$
>
> ii. $x = \sqrt{7}, y = 8.$
>
> b. Determine las intersecciones de S con por lo menos cuatro planos coincidentes o paralelos a los planos coordenados. En caso de obtener cónicas, grafique las proyecciones de cada una de estas cónicas sobre el plano coordenado paralelo al plano de intersección y señale su nombre, coordenadas de sus centros y vértices y según sea el caso, el radio o la longitud de los ejes.
>
> c. A partir de los cortes obtenidos en el ítem b., bosqueje la gráfica de S y señale los ejes coordenados del sistema cartesiano elegido, (Ugarte y Yucra 2014 p.269)

Un último aspecto importante y presente en el texto de Ugarte y Yucra lo encontramos en la página 345, en la cual describe al hiperboloide como una superficie reglada, presentando las ecuaciones del haz de rectas (*regulus*) que generan el hiperboloide. Analizado dentro del marco teórico del enfoque instrumental, el texto muestra el estudio del hiperboloide, y en general de las superficies cuádricas, haciendo énfasis en sus secciones rectas, por lo que nos parece adecuado como base teórica para el diseño de nuestra actividad didáctica. También muestra el tratamiento y transformación de las ecuaciones de las cuádricas, lo cual consideramos adecuado para el manejo de la representación algebraica de nuestra superficie. Sin embargo, no profundiza en el estudio del hiperboloide a partir de sus secciones con los diversos planos coordenados, razón por la cual creemos pertinente la realización de nuestra investigación para complementar el estudio de esos aspectos.

CAPITULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo, desarrollaremos el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a la secuencia didáctica planteada, con el fin de corroborar si se consiguió o no la génesis instrumental del hiperboloide. Previamente, describiremos el lugar en que se realizaron las actividades didácticas, los sujetos que la realizaron y las fichas de las actividades.

4.1 Desarrollo de la investigación

Se desarrolló con el uso del GeoGebra 5.0, con un grupo de estudiantes de la carrera de Arquitectura en una Universidad de la ciudad de Lima.

Los estudiantes se presentaron voluntariamente y fueron elegidos dos de ellos para realizar esta investigación.

La parte experimental de nuestra investigación se realizó en un ambiente académico del tercer piso del CEPREPUC, ubicado en el pabellón P del Campus de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Este salón estaba provisto de mesas de trabajo, pizarra acrílica, conexión WiFi a Internet y una Laptop para cada estudiante.

Los materiales que se emplearon fueron lápiz, calculadora, papel y dos computadoras con los siguientes softwares instalados:

- GeoGebra 5.0 utilizado como medio para la interacción con el objeto a estudiar y
- Camtasia 9 para realizar el registro en video de las acciones del estudiante.

Los estudiantes no habían recibido formación universitaria en el uso del GeoGebra, pero manifestaron haberlo usado en el colegio en la realización de gráficos de funciones en 2D.

Los estudiantes ya tenían conocimiento sobre las secciones cónicas y se encontraban estudiando las superficies cuádricas en la actualidad, por tal motivo, pensamos que no iban a tener dificultades en responder a la ficha que contenía las actividades.

La resolución de la ficha se llevó a cabo en una sola sesión de 2 horas 40 minutos con un intermedio para el refrigerio. Esta parte experimental se llevó a cabo un día sábado, fuera del horario de clases de los estudiantes, y se extendió desde las 12m hasta las 2:50 pm.

Descripción de las actividades

El cuadro 5 muestra aspectos generales de las actividades propuestas, así como el tiempo estimado para la realización de cada una.

Cuadro 5: Tipos de actividad didáctica

Actividad	Actividad 0	Actividad 1	Actividad 2
Contenido	Familiarización con GeoGebra	Hiperboloide de una hoja	Hiperboloide circular de una hoja
Tiempo (estimado)	30 min	1 hora	1 hora 30 min

En la actividad 0, el investigador proporcionó a los estudiantes la ficha con las actividades orientadas a la familiarización del estudiante con el entorno del GeoGebra, y de sus principales herramientas como el arrastre, así como también se evocaron las propiedades de la hipérbola, las características de sus ejes y vértice, y la relación que las coordenadas de los vértices tienen con la ecuación de la hipérbola.

En la actividad 1, el investigador presentó al estudiante en fichero de GeoGebra "Superficie1.ggb" con una serie de preguntas y propuestas de acciones relativas a la manipulación del hiperboloide de una hoja, el descubrimiento de sus propiedades y la variación de su forma al manipular, mediante el arrastre, los valores de los parámetros a, b y c de su ecuación, así como la dirección de su eje en función de su ecuación.

En esta actividad, también se inicia la determinación de las secciones del hiperboloide cuando es cortado por planos paralelos a los planos coordenados y se analizan casos en que la sección perpendicular al eje del hiperboloide es elipse o circunferencia. Esta actividad busca el surgimiento de las propiedades del hiperboloide de una hoja desde el punto de vista de sus secciones rectas, lo cual, en el marco del Enfoque Instrumental de Rabardel (2011), constituye el surgimiento de los componentes artefacto del instrumento y nos dará indicios de la génesis instrumental del hiperboloide.

En la actividad 2, el investigador proporciona al estudiante el fichero "Superficie2.ggb" donde se presenta una serie de preguntas y acciones relativas al hiperboloide circular de una hoja.

En una primera pregunta de dicha actividad, se busca enriquecer al estudiante con las propiedades del hiperboloide circular de una hoja a partir de la variación de su forma al manipular, mediante el arrastre, determinados puntos de la superficie y relacionarlos con los cambios que ocurren en la ecuación, y a partir del tipo de sección recta que presenta el hiperboloide al ser cortado por planos perpendiculares a los ejes coordenados. Esto contribuye según el marco teórico del Enfoque Instrumental, al proceso de instrumentalización del hiperboloide.

En la segunda pregunta, se le proporciona al estudiante la ecuación del hiperboloide con el objetivo de que esboce el gráfico de su superficie. En esta pregunta, el estudiante esboza el gráfico de la superficie a partir de los esquemas de uso de los cortes (o del manejo de secciones) paralelos a los planos coordenados, y de las secciones cónicas que componen su superficie; según el enfoque instrumental, el uso de los cortes a través de los planos cartesianos, dada la ecuación de la superficie, constituye esquemas de acción instrumentada y ubica al estudiante en el proceso de instrumentación del hiperboloide. Esta actividad se llevó a cabo haciendo uso de lápiz y papel.

Una tercera pregunta, busca a partir de dos secciones cónicas, pertenecientes a dos diferentes cortes paralelos a los planos XY y XZ, que el estudiante determine la ecuación de la superficie y esboce su gráfica. En términos de Rabardel, el estudiante usará sus esquemas de acción instrumentada del hiperboloide, lo cual constituirá evidencia de la instrumentación de dicha superficie. Esta actividad se llevó a cabo haciendo uso de lápiz y papel.

La cuarta y última pregunta, supone el uso de todos los esquemas adquiridos en las preguntas anteriores al proporcionarse al estudiante una sección circular determinada por un plano perpendicular al eje Y en lugar del eje Z, que se había venido usando en las preguntas anteriores. Esto generará un nuevo esquema de acción instrumentada al utilizar esquemas ya adquiridos respecto a la sección circular, respecto al eje del hiperboloide y respecto a la construcción de la ecuación.

Este último conjunto de acciones en el estudiante constituiría, en términos del marco teórico del Enfoque Instrumental, la formación de esquemas de acción instrumentada que nos permiten detectar la génesis instrumental del hiperboloide.

4.2 Las actividades y su análisis

A continuación, presentamos una breve descripción de las actividades propuestas en la secuencia didáctica, y el análisis de las respuestas dadas por el estudiante que hemos denominado Leonidas.

Descripción de la actividad 0

El objetivo de esta actividad es familiarizar al estudiante con los principales comandos del GeoGebra, necesarios para evocar las propiedades de la hipérbola, y que serán usados más adelante en la manipulación del hiperboloide.

Sin embargo, esta actividad 0 (ver Anexo 1) no será analizada desde el punto de vista del Enfoque Instrumental, ya que la hipérbola no es nuestro objeto de estudio, pero sí consideramos pertinente el trabajo previo con esta cónica por lo expuesto en el párrafo anterior.

Tampoco presentaremos un análisis *a priori* (como etapa de la Ingeniería Didáctica) para la actividad 0 pero sí esperamos la realización por parte del estudiante, de las actividades guiadas en la hoja de trabajo de la actividad 0 y la apropiación de las características algebraicas y gráficas de la hipérbola, tales como ejes, vértices, distancia entre vértices, coeficientes, etc.

Descripción de la actividad 1

La actividad 1 está compuesta por cinco ítems cuyo fin es guiar al estudiante en la realización de acciones que le permitan hacerse de las propiedades del hiperboloide de una hoja.

Entre las propiedades que esperamos que los estudiantes adapten a su aprendizaje figuran las siguientes:

- La sección del hiperboloide de eje vertical con el plano $z = 0$ se ve afectada al movilizar los parámetros a y b. Si estos son iguales, las secciones cónicas perpendiculares al eje del hiperboloide serán circunferencias de distintos radios y, si son diferentes, serán elipses.
- La “apertura” de la sección lateral del hiperboloide, depende del parámetro c.

- El uso de cortes paralelos al plano XY (fijación de valores de z) permite identificar qué cónicas componen la base del hiperboloide.

Para lo cual, movilizaremos las siguientes variables micro didácticas:

- El signo negativo (–) en la ecuación canónica de la cuádrica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
- Los valores de los parámetros a, b, c.
- La relación de orden existente entre a y b.
- El valor del parámetro k del deslizador.
- La relación de orden existente entre a y k.
- Las secciones transversales de la superficie.

Pensamos que, si el estudiante evidencia estas propiedades del hiperboloide, relacionando los parámetros de su ecuación con la forma de la superficie, los utilizará más adelante para tener una idea de cómo será la superficie a partir de su ecuación, o, qué relación guardarían los parámetros de la ecuación a partir de una gráfica.

Según el enfoque instrumental, y a partir de las respuestas dadas por los estudiantes o de sus acciones frente al GeoGebra, identificaremos si se han generado esquemas de uso de dichas propiedades.

El proceso en el cual se encontraría el estudiante a partir de esta actividad sería el de instrumentalización, debido a que, según Rabardel (2011), esta se define como la aparición de las propiedades del objeto de estudio, es decir, de los componentes artefacto del instrumento.

<u>Análisis a priori de la actividad 1: El hiperboloide de una hoja</u>

Analizaremos las acciones y respuestas que esperamos de los estudiantes al desarrollar cada uno de los ítems de las preguntas que conforman la actividad 1 (ver Anexo 2).

El objetivo del ítem 1. a) es que el estudiante relacione la forma del hiperboloide con la forma de su ecuación algebraica y note que el signo menos en la ecuación indica la dirección del eje del hiperboloide.

1. *Abra el archivo Superficie1.ggb de la carpeta GeoGebra.* a) *Describa la superficie que se observa en la ventana 3D*

Análisis a priori 1. a)

A priori se consideró que los estudiantes movilizarían esquemas preexistentes de cónicas (circunferencias, elipses, hipérbolas), cuádricas y rotación de ejes en 3D, para indicar que las secciones horizontales (paralelas al plano XY) de esta superficie están compuestas por circunferencias o elipses, y las secciones laterales (paralelas al eje Z) por hipérbolas. Sin embargo, es posible que el estudiante relacione la superficie lateral con secciones parabólicas paralelas al eje Z. La superficie observada por el estudiante en este ítem se muestra en la figura 29.

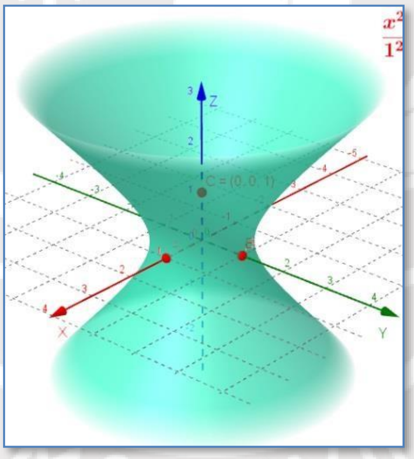


Figura 29: Hiperboloide de una hoja con eje vertical

También debemos considerar que, en la descripción de la superficie, el estudiante puede valerse de términos coloquiales o metáforas, fuera del contexto matemático tales como: jarro, envase, florero, reloj de arena, etc. sin mencionar las secciones cónicas.

El objetivo de los ítems 1. b) y c) es que el estudiante relacione la forma de la "cintura" del hiperboloide con la relación entre los valores de los parámetros a y b, y, posteriormente, relacione la “abertura” del hiperboloide al cambiar los valores del parámetro c de la ecuación.

b) *Arrastre los puntos A y B en la vista gráfica y describa cómo cambia la forma de la superficie obtenida y cómo se modifica su ecuación* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

cuando $a = b$…………………………………………………………………………

y cuando $a \neq b$…………………………………………………………………………

c) *Arrastre el punto C en la Vista Gráfica 3D y describa cómo cambia la forma de la superficie obtenida.* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

<u>Análisis a priori 1. b)</u>

A priori se consideró que los estudiantes, al movilizar los puntos A y B manteniendo igual sus distancias al origen, reconocerían que la sección obtenida es una circunferencia, centrada en el origen, de radio igual a “a” o a “b”, y cuando $a \neq b$, la sección obtenida sería una elipse con semiejes iguales a “a” y “b”. Del mismo modo, esperamos que reconozcan que dichos parámetros "a" y "b", elevados al cuadrado, son los denominadores de las variables x e y respectivamente. Para ello, deberán movilizar los esquemas de uso: representación algebraica y/o gráfica de circunferencias y elipses.

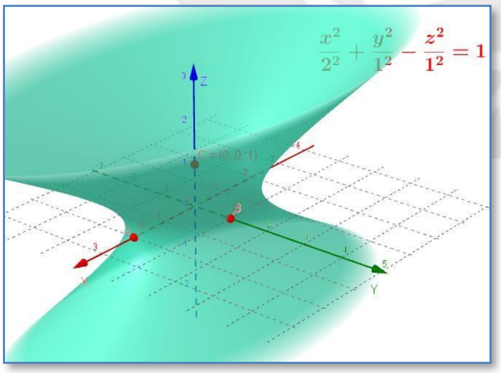


Figura 30: Hiperboloide de una hoja con *a* = 2, *b* = 1

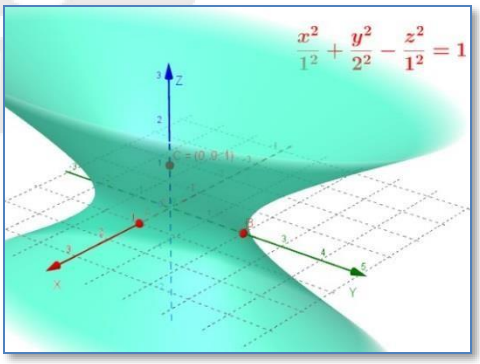


Figura 31: Hiperboloide de una hoja con *a* = 1, *b* = 2

Análisis a priori 1. c)

Esperamos *a priori* que el estudiante observe que el desplazamiento del punto *C* en el eje Z, hace cambiar la forma de la superficie, "cerrándola" sobre el eje Z cuando *C* se aleja del origen y "abriéndola" cuando *C* se acerca al origen, tal como se muestra en las figuras 32 y 33. En el primer caso se tiene $c = 1$ y en la segunda gráfica $c = 2$.

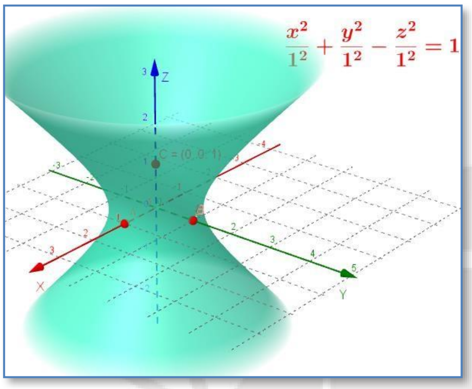


Figura 32: Hiperboloide de una hoja con $c = 1$.

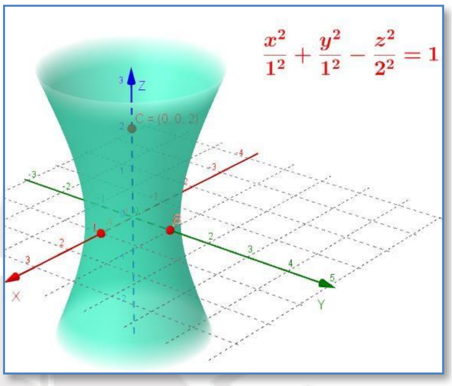


Figura 33: Hiperboloide de una hoja con $c = 2$.

Para ello, deben movilizar esquemas de uso relacionados a la representación algebraica y gráfica de la hipérbola y superficies cuádricas.

El objetivo del ítem 1. d) es que el estudiante utilice la vista Gráfica 3D y no solo relacione la forma de la "cintura" del hiperboloide con la relación $a = b$ o $a \neq b$, sino que determine que las coordenadas de los puntos *A*, *B* y *C* son precisamente los parámetros a, b y c de la ecuación del hiperboloide.

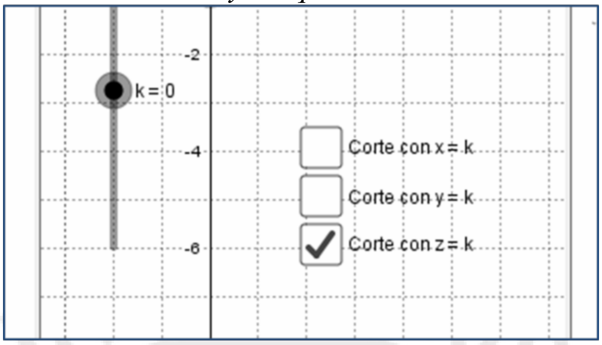
d) ¿Qué representan las distancias de los puntos A, B y C al origen, en la ecuación de la superficie dada $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *que se muestra en la Vista Gráfica 3D?*

Análisis a priori 1. d)

A priori se consideró que los estudiantes relacionarán las coordenadas de los puntos A, B y C sobre los ejes X, Y, Z con los valores de los denominadores a, b, c en la ecuación de la superficie. Es probable que se mencione que las distancias de los puntos *A* y *B* al origen, definidas por los parámetros "a" y "b" indican si el hiperboloide es circular o elíptico y que la distancia del punto *C* al origen, definen la "apertura" del hiperboloide. Para ello, deben movilizar los esquemas de uso de propiedades de las cónicas y ecuaciones de las cuádricas.

El objetivo del ítem 1. e) es reconocer qué tipo de cónica se presenta al cortar el hiperboloide con el plano $z = k$, cuando $k = 0$.

e) Active la casilla "corte con z = k" y ubique el deslizador en k = 0.



Describa qué cónica es la sección obtenida en la superficie y qué sucede con esta sección cuando arrastramos A y B tal que a = b.

<u>Análisis a priori 1. e)</u>

A priori se consideró que los estudiantes, al marcar la casilla Corte con $z = k$ y colocar el deslizador $k = 0$, reconozcan que si $a \neq b$, la sección cónica es una elipse y si $a = b$, es una circunferencia.

Luego, se espera que describan la cónica con mayor precisión, indicando que el radio es "a" o "b" en el caso de una circunferencia o que "a" y "b" son las longitudes de los semiejes de la elipse cuando $a \neq b$, asimismo se espera que indique que el centro de la sección cónica en cualquiera de los casos es el punto de coordenadas $(0, 0, k)$.

Para ello, deben movilizar los esquemas de uso de propiedades de cónicas, de cortes transversales y de secciones cónicas. La figura 34 muestra el caso en que $a = b$, y las figuras 35 y 36 los casos en que $a > b$ y $a < b$ respectivamente.

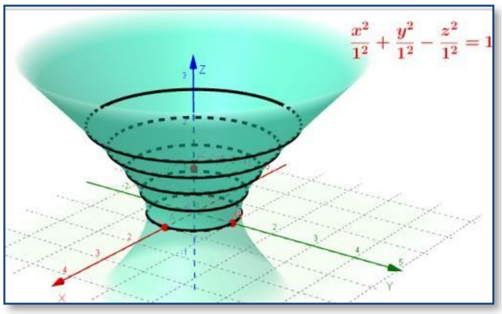


Figura 34: Hiperboloide con $a = b$.

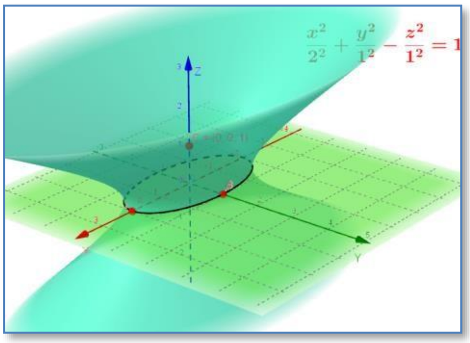


Figura 35: Hiperboloide con a > b.

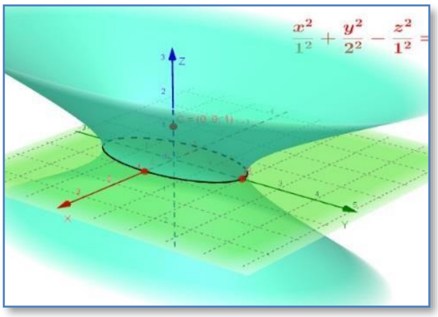
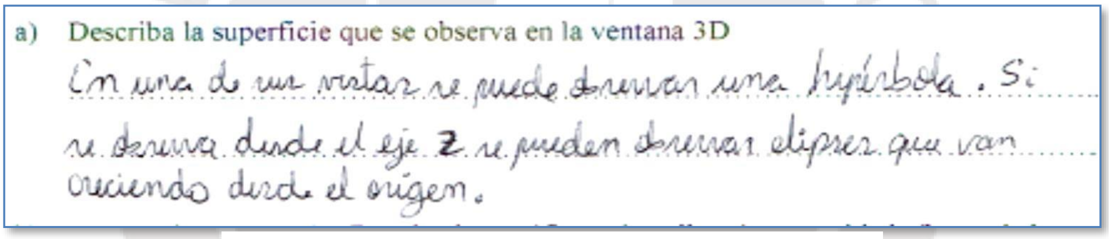


Figura 36: Hiperboloide con a < b

Estos resultados obtenidos por el estudiante constituirán un esquema de utilización de sección perpendicular circular o elíptica, según la variable didáctica relación entre a y b.

Análisis a posteriori de las acciones de Leonidas

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 1. a).


a) Describa la superficie que se observa en la ventana 3D

En una de sus vistas se puede observar una hipérbola. Si se observa desde el eje Z se pueden observar elipses que van creciendo desde el origen.

Figura 37: Respuesta de Leonidas a la pregunta 1.a)

A partir de la respuesta dada en la figura 37, se puede evidenciar a posteriori que Leónidas movilizó esquemas preexistentes sobre cónicas, al mencionar que en las diferentes vistas se observan hipérbolas y elipses. También se puso en evidencia que, para estar seguro de que la cónica descrita era una hipérbola, utilizó el esquema preexistente de rotación de ejes, consiguiendo una vista frontal del plano YZ (ver figura 38).

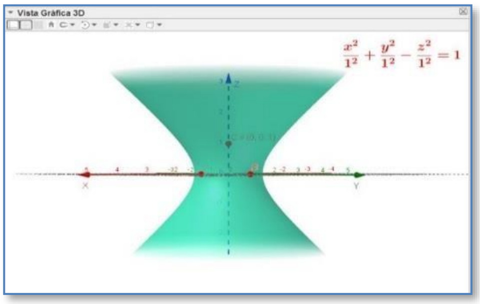


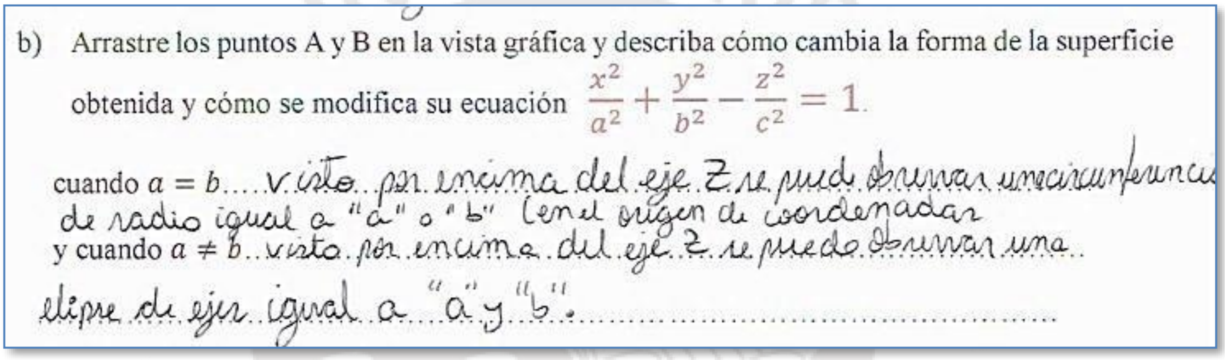
Figura 38: Respuesta gráfica de Leonidas a la pregunta 1.a)

Esta manipulación realizada de los ejes nos muestra que a Leónidas le resulta más cómodo tratar de ver la figura en dos dimensiones e, inconscientemente, pensamos está generando esquemas de utilización de cortes transversales paralelos al plano YZ.

Se puede afirmar que Leonidas movilizó esquemas de acción instrumentada, al mencionar que la superficie se compone de “elipses que van creciendo desde el origen”, sin haber realizado corte alguno a la superficie.

En estas acciones de Leonidas se observa la importancia del uso del GeoGebra en la manipulación de los ejes, con el fin de describir una superficie en 3D a partir de diferentes vistas.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 1. b).



b) Arrastre los puntos A y B en la vista gráfica y describa cómo cambia la forma de la superficie obtenida y cómo se modifica su ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

cuando $a = b$.... visto por encima del eje Z se pued observar unacircunferencia de radio igual a "a" o "b" (en el origen de coordenadas

y cuando $a \neq b$.. visto por encima del eje Z se puedo observar una elipse de ejes igual a "a" y "b".

Figura 39: Respuesta de Leonidas a la pregunta 1.b)

A partir de las respuestas dadas en la figura 39 se evidencia que Leonidas movilizó esquemas preexistentes de cónicas, tanto en sus representaciones gráficas, al posicionarse en una perspectiva desde el eje Z (ver figura 40) y diferenciar entre circunferencias y elipses por su forma; como en sus representaciones algebraicas, al

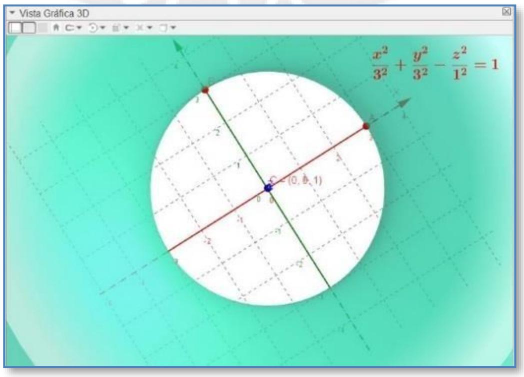
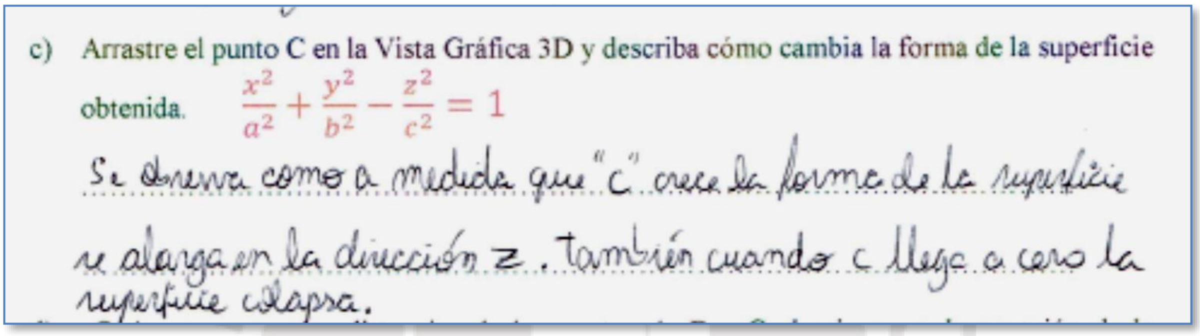


Figura 40: Respuesta gráfica de Leonidas a la pregunta 1.b)

reconocer que "a" o "b" son radios de la circunferencia cuando $a = b$ o los semiejes de una elipse cuando $a \neq b$.

El centrar el enfoque en la manipulación de los parámetros a y b, propició que Leonidas reconozca que estos parámetros están en relación con la forma que tiene la "cintura del hiperboloide" (sección de la superficie del hiperboloide determinada por el plano de ecuación $z = 0$) que puede ser circular o elíptica, y cómo se presentan estos parámetros en la ecuación algebraica de la superficie.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 1. c).


c) Arrastre el punto C en la Vista Gráfica 3D y describa cómo cambia la forma de la superficie obtenida. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Se observa como a medida que "c" crece la forma de la superficie se alarga en la dirección z. también cuando c llega a cero la superficie colapsa.

Figura 41: Respuesta de Leonidas a la pregunta 1.c)

En la respuesta a esta pregunta, Leonidas usa la herramienta arrastre sobre el punto C y describe lo que a su entender es el cambio en la forma de la superficie diciendo que se alarga en la dirección Z. Tal vez en términos coloquiales nos dé una idea de cómo varía la forma de la superficie.

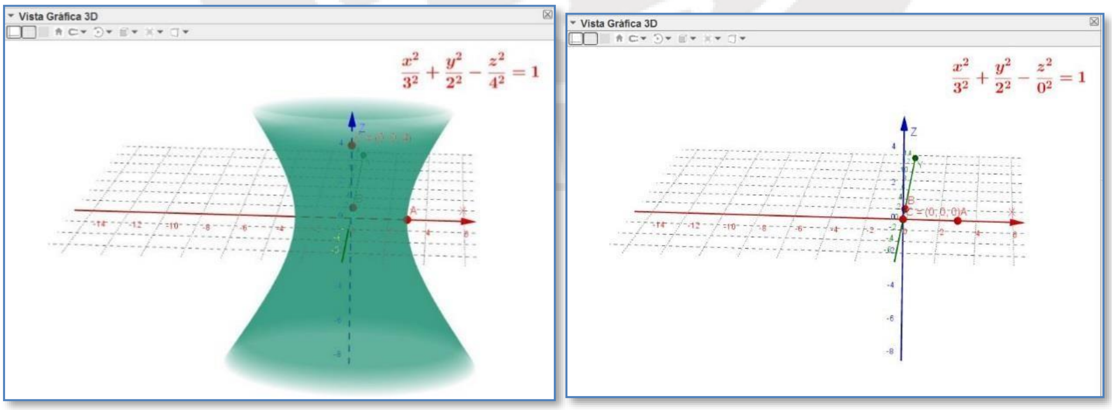
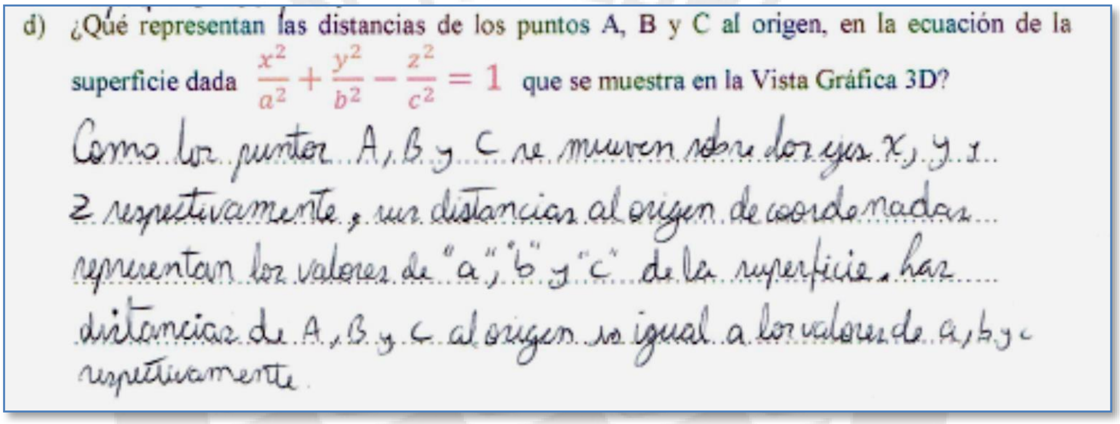


Figura 42: Respuestas gráficas de Leonidas a la pregunta 1c)

Por otro lado, el análisis de Leonidas es bastante más completo ya que usando la herramienta arrastre sobre el punto C, cambia el valor de c hasta hacerlo valer 0 y concluir a partir de la imagen en la vista gráfica 3D que la superficie “colapsa”. Si bien es cierto que esta opción no fue contemplada en el análisis *a priori*, su sola mención nos hace ver que se están generando esquemas de utilización y se está enriqueciendo con las propiedades del hiperboloide y las características de su ecuación. Al hacer $c = 0$, el término z^2/c^2 se hace imposible de calcular por lo que se aprecia que la superficie deja de mostrarse. En términos de Leonidas, esto significó un colapso de la superficie, en términos de Rabardel, se están generando esquemas de acción instrumentada al combinar esquemas de uso de la ecuación del hiperboloide y esquemas de uso de la gráfica de la superficie.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 1. d).


d) ¿Qué representan las distancias de los puntos A, B y C al origen, en la ecuación de la superficie dada $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ que se muestra en la Vista Gráfica 3D?

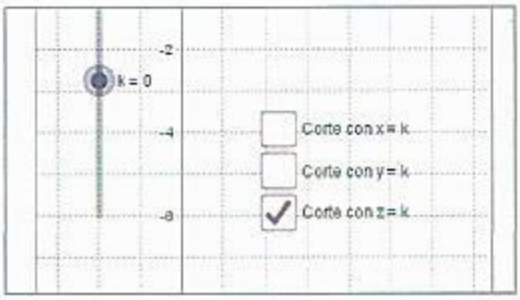
Como los puntos A, B y C se mueven sobre los ejes x, y y z respectivamente, sus distancias al origen de coordenadas representan los valores de "a", "b" y "c" de la superficie. Las distancias de A, B y C al origen es igual a los valores de a, b y c respectivamente.

Figura 43: Respuesta de Leonidas a la pregunta 1.d)

A partir de la respuesta mostrada en la figura 43, se puede evidenciar a posteriori que Leonidas movilizó esquemas de uso de ecuaciones de cuádricas, dado que reconoce la relación existente entre sus dimensiones (radios o semiejes) con los coeficientes de la ecuación. Reconocer tal relación se hace importante cuando a partir de determinados cortes respecto a algunos de los planos, se reconozcan los parámetros para construir la ecuación de la superficie.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 1. e).

e) Active la casilla "corte con z = k" y ubique el deslizador en k = 0.



Describa qué cónica es la sección obtenida en la superficie y qué sucede con esta sección cuando arrastramos A y B tal que $a = b$.

La cónica obtenida en la superficie es una elipse con ejes igual a los valores de "a" y "b" de la ecuación de la superficie. De esta manera al arrastrar los valores de A y B de tal forma que a = b la cónica obtenida es una circunferencia con radio igual a "a o b". (Solo en el caso k=0)

Figura 44: Respuesta de Leonidas a la pregunta 1e)

A partir de las respuestas mostradas en la figura 44, se puede evidenciar a posteriori que Leonidas movilizó los esquemas de uso cortes transversales, dado que reconoció rápidamente qué casilla marcar y, a modo de prueba, manipuló el deslizador k y observó las secciones cónicas que se iban trazando.

Del mismo modo, se evidencia que moviliza los esquemas de uso de propiedades de cónicas, aunque solo reconozca los radios de las circunferencias trazadas y los semiejes de las elipses que aparecen y no indique otras características como centros o vértices.

A partir de las respuestas dadas por Leonidas a cada ítem de la actividad 1, se puede evidenciar que la instrumentalización del hiperboloide se basó en el reconocimiento de propiedades y características de dicho objeto matemático, desde reconocer qué parámetros de la ecuación definen la "cintura" del hiperboloide o su curvatura; de reconocer a partir de dichos valores si se trata de un hiperboloide circular o elíptico; de utilizar diferentes vistas o cortes gracias a las bondades del GeoGebra, para identificar características gráficas de cómo está conformada la superficie, evidenciadas al movilizar el esquema de acción instrumentada sobre las formas de las secciones cónicas paralelas al plano XY: “elipses que van creciendo desde el origen”, hasta la rotación de ejes para visualizar el hiperboloide desde una perspectiva frontal al plano YZ.

Por tanto, podemos afirmar que Leonidas, a partir del desarrollo de esta actividad, está en camino de conseguir la génesis instrumental del hiperboloide.

Descripción de la actividad 2

La actividad 2 está compuesta por cuatro preguntas que tienen por objetivo que el estudiante, a partir de la apropiación de ciertas propiedades del hiperboloide, de la relación entre sus representaciones en los registros gráfico y algebraico, y a partir de los esquemas de uso de propiedades de cortes transversales y de secciones cónicas, todas ellas adquiridas en la actividad 1, sea capaz de:

- Describir coherentemente el comportamiento del hiperboloide a partir de cortes transversales.
- Representar gráficamente la superficie de un hiperboloide a partir de su ecuación, donde se generarían esquemas de acción instrumentada de los cortes transversales.
- Determinar la ecuación del hiperboloide y representarla gráficamente a partir de la vista de dos secciones transversales diferentes, donde la sección circular está en el plano XY, lo que generaría esquemas de acción instrumentada de los parámetros de su ecuación canónica.
- Determinar la ecuación del hiperboloide y representarla gráficamente a partir de la vista de dos secciones transversales diferentes, donde la sección circular está en el plano XZ, lo que generaría esquemas de acción instrumentada de los parámetros de la ecuación canónica del hiperboloide, de la forma de la ecuación, y de la orientación de la superficie del hiperboloide.

Pensamos que, si el estudiante evidencia estas acciones, al reconocer y relacionar las representaciones del hiperboloide en los registros gráfico y algebraico, no solo cuando tiene secciones circulares paralelas al eje XY, sino con otras orientaciones, todo esto a partir de los esquemas de acción instrumentada generados, el proceso en el cual se encontraría el estudiante a partir de esta actividad sería el de instrumentación, debido a que, según Rabardel (2011), son acciones relativas al surgimiento de los esquemas de utilización y de acción instrumentada. Esto implicaría que el estudiante ya utiliza el hiperboloide como instrumento habiendo logrado la génesis instrumental.

Dichas acciones y esquemas los explicaremos en el siguiente análisis *a priori*.

Análisis a priori de la actividad 2: El hiperboloide circular de una hoja

Analizaremos las acciones y respuestas que esperamos de los estudiantes al desarrollar cada uno de los ítems de las preguntas que conforman la actividad 2 (ver Anexo 3). A continuación, presentamos el análisis a priori de cada uno de los ítems que forman parte de dicha actividad.

Análisis de la pregunta 1

Indicaremos las acciones y respuestas que esperamos de los estudiantes al desarrollar cada uno de los ítems de las preguntas que conforman la actividad 2:

El objetivo del ítem 1. a) es propiciar el surgimiento de la propiedad de la sección circular, al cortar la superficie por un plano perpendicular al eje del hiperboloide.

> 1. *Abra el archivo Superficie2.ggb de la carpeta GeoGebra.*
>
>   a) *Active la casilla "corte con z = k" y describa qué sucede con la sección obtenida en la Vista Gráfica 3D, al mover el deslizador de k.*

Análisis a priori 1. a)

Creemos *a priori* que el estudiante movilizará sus esquemas de acción instrumentada de corte con el plano $z = k$, desarrollados en la actividad anterior para realizar cortes paralelos al plano *XY* en la superficie del hiperboloide. Esperamos que, al tratarse de un hiperboloide circular, el estudiante movilice esquemas preexistentes sobre las características de la circunferencia y concluya que las secciones son circunferencias. Otro de los esquemas de uso adquiridos corresponde al desplazamiento del plano de corte mediante el deslizador de *k*.

Consideramos a priori que en esta actividad surgirá un esquema de acción instrumentada relativo a la variación de las secciones paralelas al plano *XY* a medida que deslizamos *k* y esperamos que el estudiante observe la aparición de circunferencias concéntricas, cuyos radios aumentan a medida que el valor de *k* se aleja de 0.

El objetivo del ítem 1. b) es lograr relacionar la sección obtenida al cortar el hiperboloide con el plano $z = 2$ y la ecuación de dicha sección cónica obtenida a partir de la ecuación del hiperboloide.

b) Realice el corte con el plano $z = 2$ y describa cuál es la ecuación de la sección obtenida e indique las características de esta sección.

<u>Análisis a priori 1. b)</u>

Creemos a priori que, en esta pregunta, el estudiante usará esquemas preexistentes de la ecuación de la sección recta de una superficie y sustituya en la ecuación

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$$

el valor de $z = 2$ para obtener $\quad x^2 + y^2 - 2^2 = 1$

y de forma reducida, expresarla así: $\quad x^2 + y^2 = 5,$

lo cual corresponde a una circunferencia de radio $\sqrt{5}$, según la vista gráfica 3D, (ver figura 45) ubicada en un plano paralelo al plano *XY* y cuyo centro se ubica en el eje *Z* en el punto de cota $z = 2$.

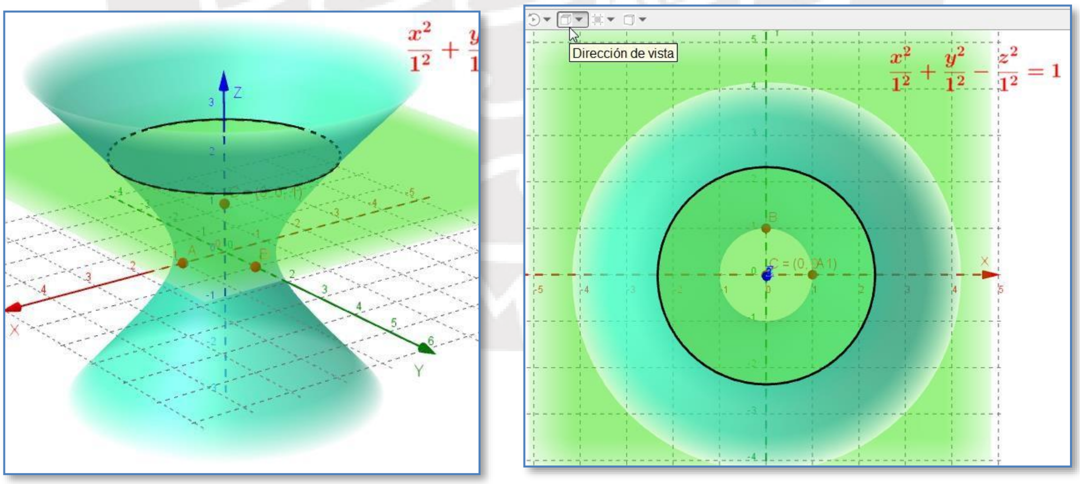


Figura 45: Sección recta con z=2

La obtención de estos resultados nos permite detectar en el accionar del estudiante, la formación de esquemas de utilización de las secciones del hiperboloide circular, lo cual sería evidencia de la instrumentación del hiperboloide.

El objetivo del ítem 1. c) es favorecer el surgimiento de la propiedad del hiperboloide cortado por un plano $x = k$, el cual determina una sección cónica en forma de hipérbola.

c) Active la casilla "corte con x = k" y describa qué cónica es la sección obtenida en la Vista Gráfica 3D

Análisis a priori 1. c)

Creemos a priori que el estudiante usará sus esquemas de acción instrumentada corte con $x = k$, desarrollados en las preguntas anteriores, para realizar cortes con planos de ecuación $x = k$ y movilizará esquemas preexistentes y esquemas de secciones cónicas que surgieron en la actividad 1 (es posible que no sea necesaria la rotación de la vista hacia una perspectiva frontal) para responder que las secciones obtenidas corresponden a hipérbolas cuyo eje focal es paralelo al eje *Y* o al eje *Z* como se aprecia en la figura 46.

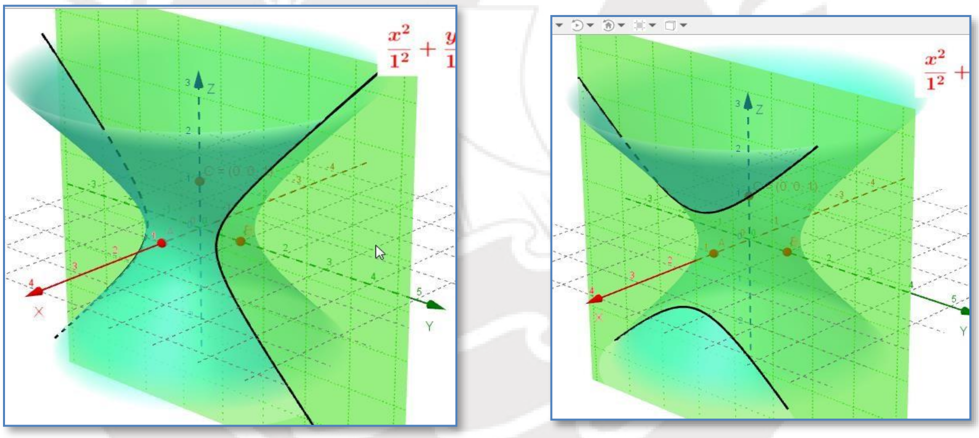


Figura 46: Secciones con *x* = *k*

Esta respuesta nos mostrará la aparición de esquemas de utilización de las secciones del hiperboloide y hará evidente la instrumentalización del hiperboloide.

El objetivo del ítem 1. d) es detectar en el accionar del estudiante esquemas de acción instrumentada sobre secciones del hiperboloide y propiedades de la sección cónica respecto a la dirección de su eje focal

d) Describa qué sucede con la sección obtenida al mover el deslizador de k.

Active  *y deslice k para obtener una mejor visualización.*

Análisis a priori 1. d)

Por lo tanto, esperamos a priori que el estudiante describa que al mover el deslizador k, las hipérbolas *pasen de tener eje focal horizontal, a tener eje focal vertical* a medida que el valor de k se aleja de 0.

Creemos que el estudiante usará esquemas uso de corte con $x = k$ y observará que cuando $k = a$, la sección obtenida es una hipérbola que ha degenerado en dos rectas secantes como se muestra en la figura 47. Este conjunto de respuestas hará evidente el surgimiento de esquemas de acción instrumentada respecto a las secciones del hiperboloide con planos de ecuación $x = k$, los cuales aportan a la instrumentación del hiperboloide.

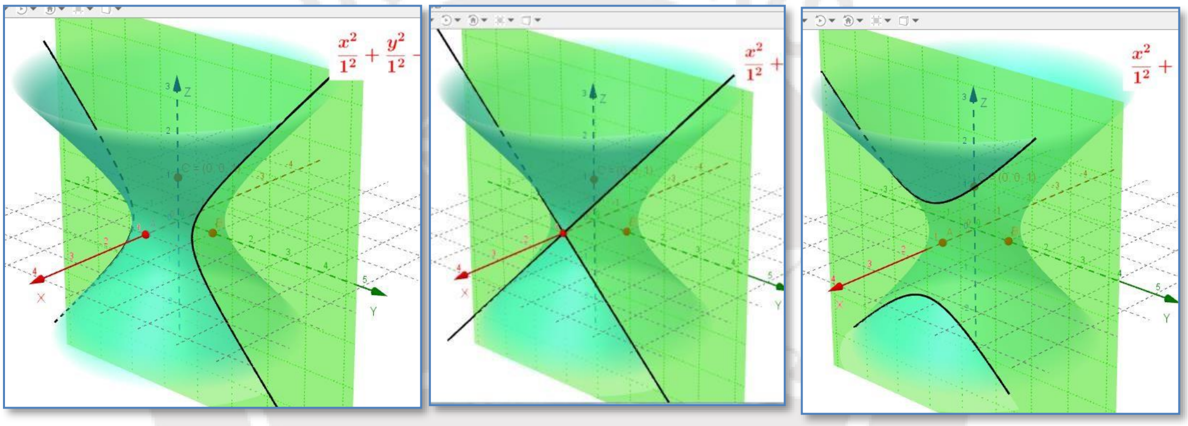


Figura 47: Secciones con |*k*| < *a*, |*k*| = *a* y |*k*| > *a*

Creemos a priori que, al hacer un resumen de sus observaciones, el estudiante completará las respuestas siguientes:

Si $|k| < a$, se obtienen hipérbolas de eje horizontal, cuyos vértices se acercan a medida que $|k|$ aumenta.

Si $|k| = a$, se obtienen dos rectas que se intersecan.

Si $|k| > a$, se obtienen hipérbolas de eje vertical, cuyos vértices se alejan a medida que $|k|$ aumenta.

El objetivo del ítem 1. e) es detectar en el accionar del estudiante esquemas de acción instrumentada sobre secciones del hiperboloide con un plano paralelo al eje de hiperboloide y ecuaciones de secciones cónicas.

e) Realice el corte con el plano $x = 2$ y describa cuál es la ecuación de la sección obtenida e indique las características de esta sección.

<u>Análisis a priori 1. e)</u>

Esperamos a priori que el estudiante usará sus esquemas de uso anteriores para obtener la sección con $x = 2$ y responderá que la sección es una hipérbola de eje focal vertical, centrada en el punto $(2,0,0)$ como muestra la figura y cuya ecuación es:

$$\frac{2^2}{1} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{1} = 1$$

es decir,

$$z^2 - y^2 = 3$$

$$\frac{z^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

lo cual representa la hipérbola de eje focal vertical mostrada a continuación:

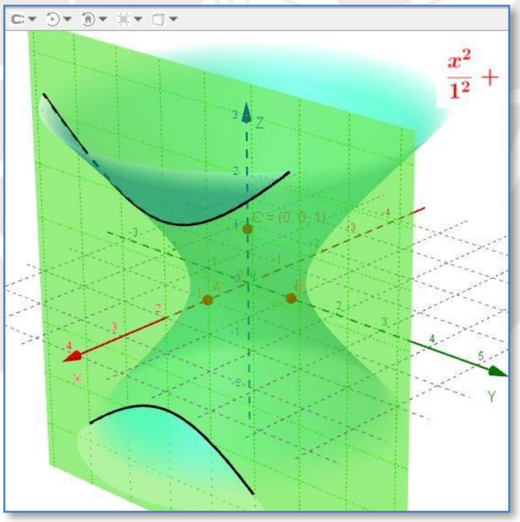


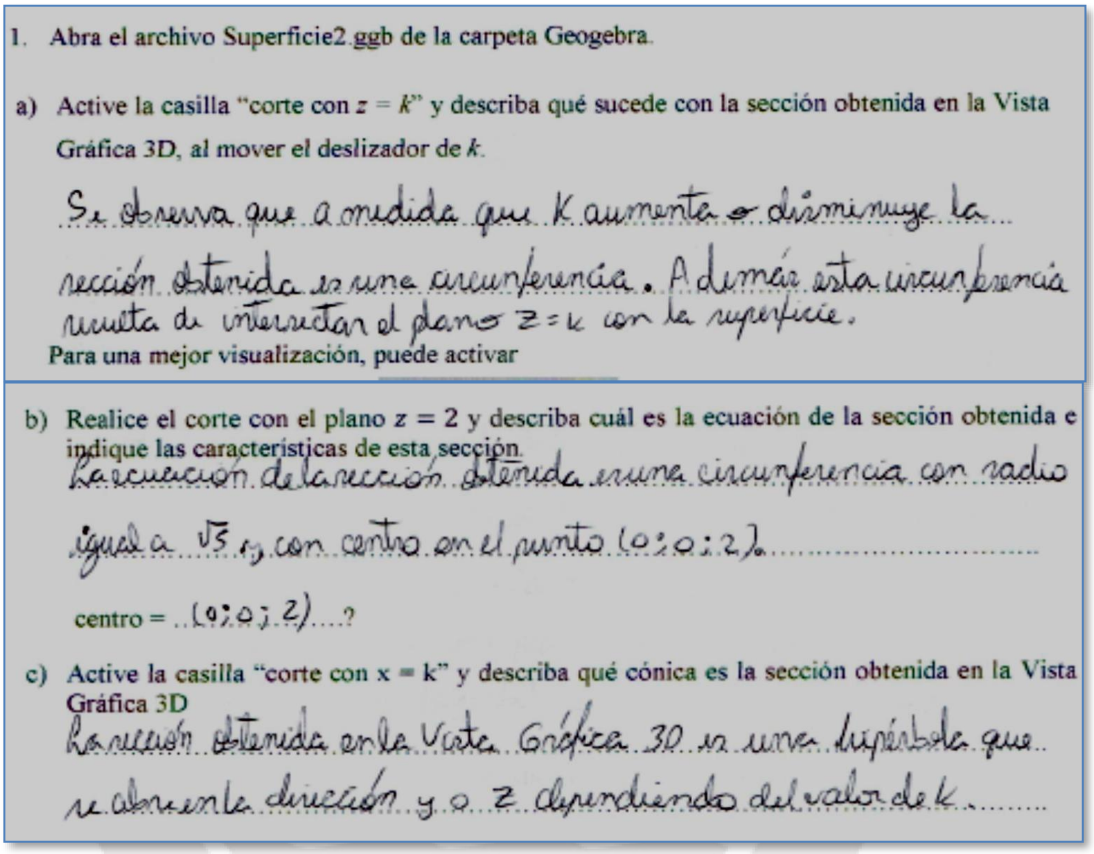
Figura 48: Sección con *x* = 2.

Un resultado similar se obtendría al cortar el hiperboloide con los planos de ecuación $y = k$, razón por la cual no presentaremos los resultados de dicha investigación porque es suficiente con los datos al usa r el plano $x = k$.

Análisis a posteriori de las acciones de Leonidas en la pregunta 1

Mostramos a continuación las acciones de Leonidas ante los requerimientos de la pregunta 1 de la actividad 2.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas a los ítems 1. a), b) y c).


1. Abra el archivo Superficie2.ggb de la carpeta Geogebra.

a) Active la casilla "corte con $z = k$" y describa qué sucede con la sección obtenida en la Vista Gráfica 3D, al mover el deslizador de k.

Se observa que a medida que K aumenta o disminuye la sección obtenida es una circunferencia. Además esta circunferencia resulta de intersectar el plano z=k con la superficie.

Para una mejor visualización, puede activar

b) Realice el corte con el plano $z = 2$ y describa cuál es la ecuación de la sección obtenida e indique las características de esta sección.

La ecuación de la sección obtenida es una circunferencia con radio igual a √5 y con centro en el punto (0;0;2).

centro = (0;0;2) ?

c) Active la casilla "corte con x = k" y describa qué cónica es la sección obtenida en la Vista Gráfica 3D

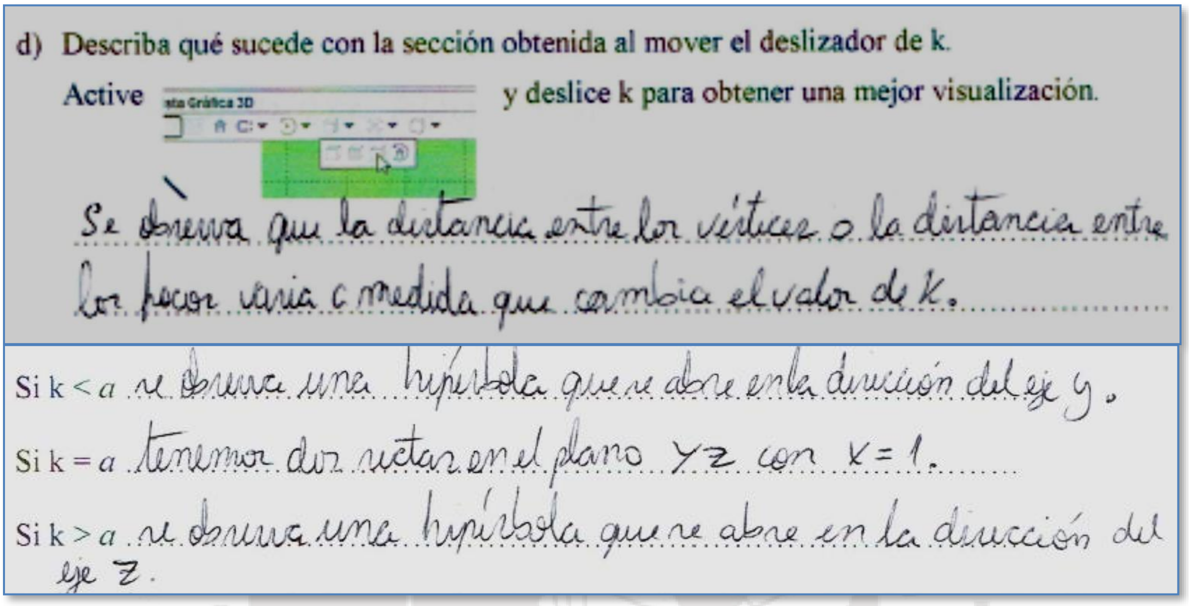
La sección obtenida en la Vista Gráfica 3D es una hipérbola que se abre en la dirección y o z dependiendo del valor de k.

Figura 49: Respuestas de Leonidas a la Actividad 2.1

Observamos a posteriori, en las respuestas de Leonidas de la figura 49 que, si bien es cierto, nota que la sección con $z = k$ es una circunferencia, su descripción en su respuesta dada en el ítem a), sobre cómo varía la circunferencia no es del todo completa, dado que no indica qué sucede con la circunferencia al variar *k*; sin embargo, de su respuesta dada en el ítem b), se evidencia un buen manejo de ecuaciones de cónicas al trabajar en una de las secciones, y de cuádricas al hallar el radio e identificar correctamente el centro de la circunferencia. Se puede notar la presencia de esquemas preexistentes sobre secciones cónicas, también esquemas de utilización del hiperboloide, esquemas de acción instrumentada respecto a las secciones de un hiperboloide.

En la pregunta c) de la figura 49, Leonidas observa que la sección es una hipérbola y muestra esquemas de acción instrumentada al combinar esquemas de uso sobre las secciones rectas de un hiperboloide. Esto es un indicio de que se va realizando la instrumentación de la superficie.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 1. d).



d) Describa qué sucede con la sección obtenida al mover el deslizador de k.

Active [sta Gráfica 3D] y deslice k para obtener una mejor visualización.

Se observa que la distancia entre los vértices o la distancia entre los focos varía a medida que cambia el valor de k.

Si k < a se observa una hipérbola que se abre en la dirección del eje y.

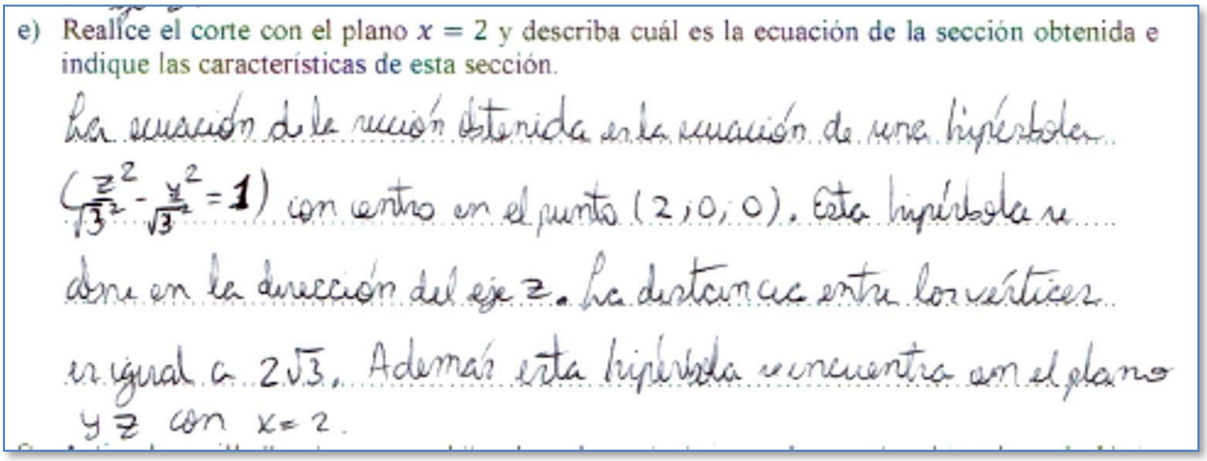
Si k = a tenemos dos rectas en el plano yz con x = 1.

Si k > a se observa una hipérbola que se abre en la dirección del eje z.

Figura 50: Respuestas de Leonidas a la pregunta 1d) de la Actividad 2

Observamos a posteriori en las respuestas de la figura 50, que Leonidas nota la existencia de hipérbolas, luego hace una descripción muy exacta de cómo varían dichas hipérbolas con los cambios en el deslizador k, lo cual es un indicio de que se está enriqueciendo con las propiedades del hiperboloide, al notar que existe un cambio en la dirección del eje focal y que la sección obtenida es una recta cuando $k = a$. Estas son propiedades del artefacto que surgen con esta actividad, evidencian desde el punto de vista del Enfoque Instrumental, la instrumentalización del hiperboloide además de los esquemas de acción instrumentada anteriores, por lo tanto, creemos que se empieza a dar la génesis instrumental.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 1. e).



e) Realice el corte con el plano $x = 2$ y describa cuál es la ecuación de la sección obtenida e indique las características de esta sección.

La ecuación de la sección obtenida es la ecuación de una hipérbola ($\frac{z^2}{\sqrt{3}^2}-\frac{y^2}{\sqrt{3}^2}=1$) con centro en el punto (2;0;0). Esta hipérbola se abre en la dirección del eje z. La distancia entre los vértices es igual a $2\sqrt{3}$. Además esta hipérbola se encuentra en el plano yz con x=2.

Figura 51: Respuesta de Leonidas a la pregunta 1e) de la Actividad 2

El accionar de Leonidas observada en la figura 51 al responder esta pregunta, nos muestra a posteriori la presencia de esquemas de utilización, no solo orientados a acciones segundas como puede ser la sustitución de $x = 2$ en la ecuación de la superficie, sino también esquemas de acción instrumentada sobre secciones rectas en superficies. Además de eso, en el estudiante Leonidas, se generan esquemas de acción instrumentada y asocia la ecuación canónica obtenida, con una hipérbola, correctamente descrita en cuanto a la dirección de su eje y la ubicación de su centro. Todo esto indica enriquecimiento de las propiedades del hiperboloide y movilización de esquemas de acción instrumentada. Creemos que se está dando la instrumentalización de la superficie y la instrumentación con la aparición de esquemas en el sujeto Leonidas.

Las acciones de Leonidas al responder las partes f), g) y h) de la pregunta 1, mostraron que la instrumentalización se había dado en las preguntas anteriores c), d) y e). No mostramos en este documento las respuestas de Leonidas a las preguntas f), g), h) por ser similares a las respuestas a c), d), e) pero se hizo evidente que los esquemas adquiridos se mantenían y podían ser adaptados a esta nueva situación en la que el plano cortante es $y = k$.

Por lo tanto, creemos a posteriori que se han creado esquemas de utilización que muestran la instrumentación y el sujeto Leonidas se ha enriquecido con las propiedades del hiperboloide surgidas hasta este momento.

Análisis de la pregunta 2

El objetivo del ítem 2. a) es detectar en el accionar del estudiante esquemas de utilización de la ecuación general del hiperboloide y su reescritura en forma canónica.

2. *Dada la ecuación de un hiperboloide:* $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ *a) Reescriba la ecuación en su forma canónica (ver pregunta 1.d, Actividad 1)*

Análisis a priori 2. a)

Pensamos a priori que, en la respuesta a esta pregunta, el estudiante movilizará esquemas de uso del hiperboloide respecto a su ecuación, adquiridos en la Actividad 1. También se emplearán esquemas preexistentes respecto al trabajo con las ecuaciones de la superficie y se realizará el siguiente conjunto de acciones

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$$

dividimos entre 4: $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ (ecuación canónica)

El objetivo del ítem 2. b) es detectar en el accionar del estudiante esquemas de acción instrumentada sobre gráfica del hiperboloide a partir de sus secciones y determinación de las secciones del hiperboloide a partir de su ecuación.

b) Realice cortes a la superficie dada, que le permitan trazar un esbozo de su gráfica e indique algunas características de las secciones obtenidas, mostrando una gráfica de ellas.

Análisis a priori 2. b)

Creemos a priori que el estudiante movilizará para esta pregunta, esquemas de utilización sobre secciones cónicas que lo lleven a determinar las ecuaciones de las secciones del hiperboloide con los planos de ecuación $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Esto es, reemplazando en la ecuación canónica del hiperboloide los valores de $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ se espera que obtenga:

Con $x = 0$ $\quad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

con $y = 0$ $\qquad\qquad$ $x^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

con $z = 0$ $\qquad\qquad$ $x^2 + y^2 = 1$

También se valdrá de esquemas de utilización de gráficas de cónicas en diversos planos coordenados, que lo lleven a trazar esbozos de las gráficas cuyas ecuaciones se obtuvieron, estos esbozos se realizarán en un sistema coordenado tridimensional, lo cual implica que el estudiante movilizará esquemas sobre trazado de cónicas a partir de su ecuación y los adaptará a nuevos planos, con diferentes orientaciones. Mostramos los posibles esbozos de las cónicas en la figura 52.

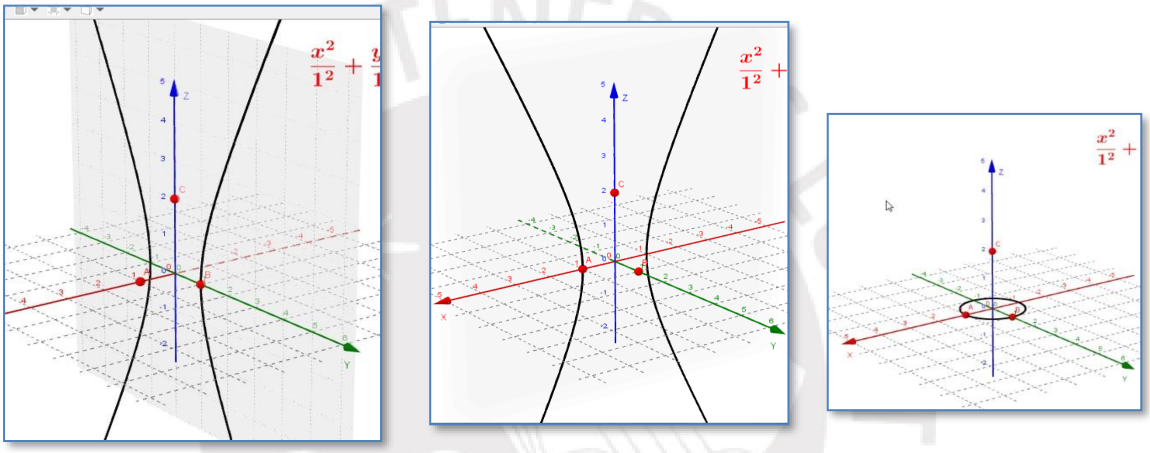


Figura 52: Secciones del hiperboloide con los planos *x* = 0, *y* = 0 y *z* = 0

El objetivo del ítem 2. c) es propiciar en el estudiante la creación de esquemas de acción instrumentada sobre la gráfica del hiperboloide a partir de sus secciones.

c) Haciendo uso de los resultados obtenidos en b), trace un esbozo de la gráfica del hiperboloide

Análisis a priori 2. c)

Creemos a priori que el estudiante usará los resultados de la parte anterior y combinará sus esquemas ya adquiridos con trazado del esbozo del hiperboloide (ver figura 53).

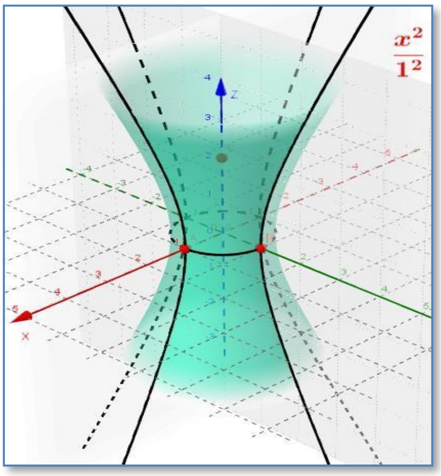
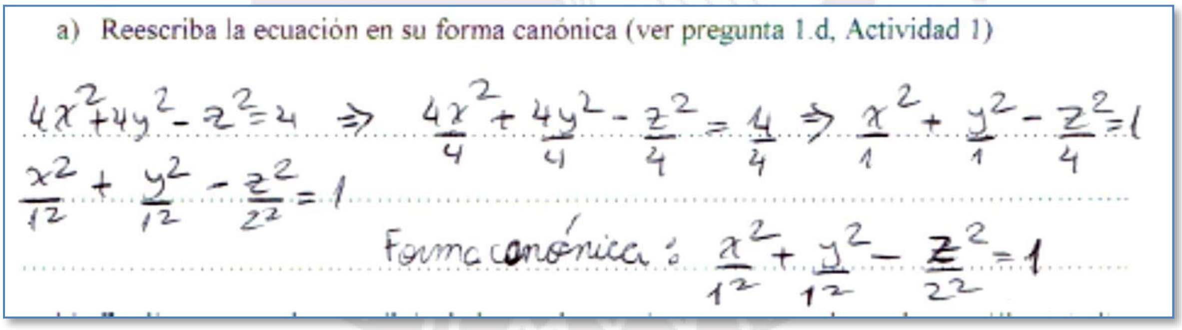


Figura 53: Hiperboloide a partir de sus secciones

Al realizar esta acción, el estudiante está formando esquemas de acción instrumentada respecto a la gráfica del hiperboloide a partir de su ecuación canónica. Estos esquemas, evidencian la instrumentación del hiperboloide.

Análisis a posteriori de las acciones de Leonidas a la pregunta 2

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 2. a).



a) Reescriba la ecuación en su forma canónica (ver pregunta 1.d, Actividad 1)

$$4x^2+4y^2-z^2=4 \Rightarrow \frac{4x^2}{4}+\frac{4y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=\frac{4}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1^2}-\frac{z^2}{2^2}=1$$

Forma canónica: $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1^2}-\frac{z^2}{2^2}=1$

Figura 54: Respuesta de Leonidas a la pregunta 2a)

Observamos a posteriori en las respuestas de la figura 54, que el estudiante usa nuevamente esquemas de acción instrumentada secciones rectas en superficies adquiridos en la Actividad 1, respecto a la transformación de una ecuación a su forma canónica, muestra esquemas de utilización, los cuales evidencian que se ha instrumentado en el manejo de la ecuación del hiperboloide.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 2. b).

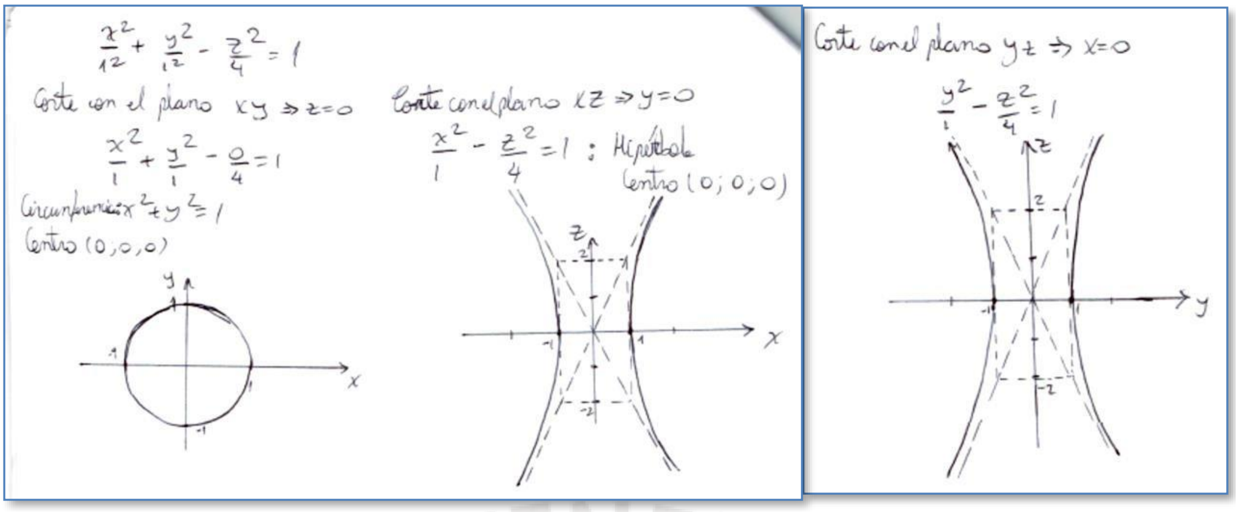


Figura 55 Respuesta de Leonidas a la pregunta 2b)

A partir de la respuesta de Leonidas de la figura 55, se evidencia que Leonidas moviliza esquemas de transformación de ecuaciones, emplea esquemas de acción instrumentada para asociar la forma de la ecuación con la forma de la gráfica de la sección transversal. Se ha instrumentado en la ecuación del hiperboloide y sus secciones rectas.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 2. c).

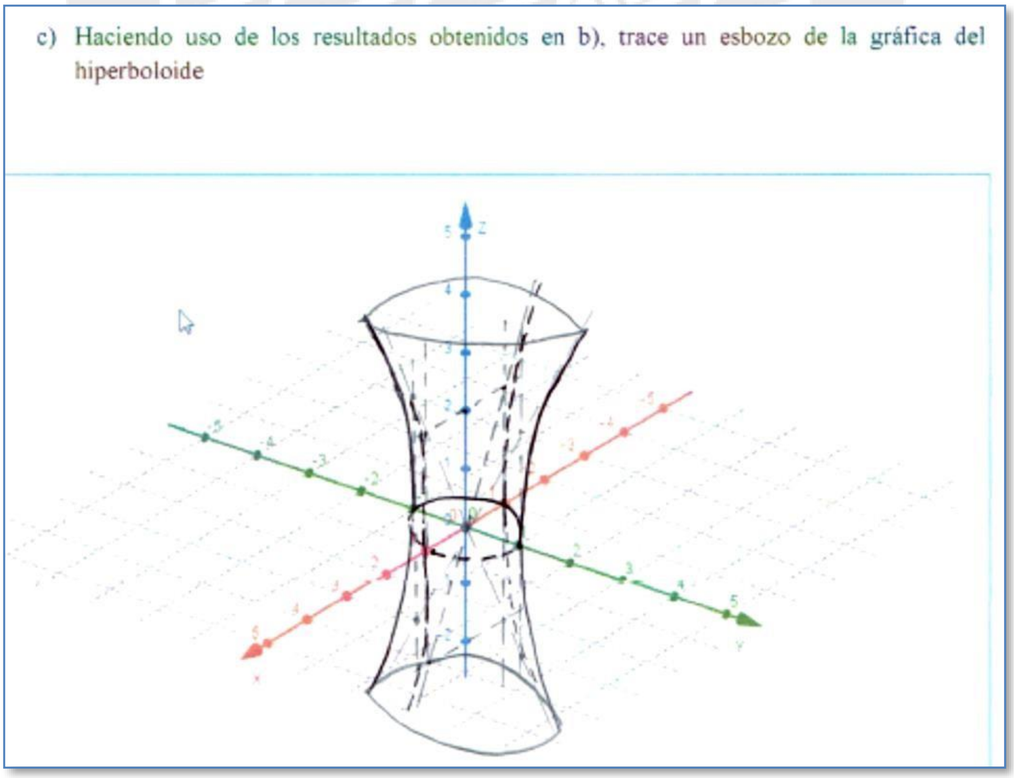


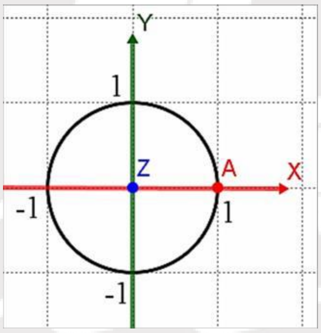
Figura 56: Respuesta de Leonidas a la pregunta 2c)

A partir de la respuesta de Leonidas de la figura 56, se puede evidenciar a posteriori que se movilizó esquemas de acción instrumentada sobre secciones rectas de superficies, también utilizó esquemas de acción instrumentada sobre gráficas de cónicas en planos XY, XZ, YZ, lo cual mostró la formación de esquemas de acción instrumentada nuevos, al combinar los esquemas ya conocidos y generar un nuevo esquema de trazado de superficie del hiperboloide en 3D, a partir de sus secciones rectas.

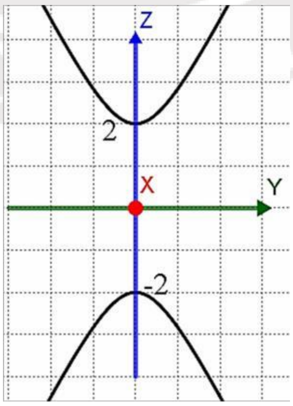
Análisis de la pregunta 3

El objetivo del ítem 3. a) es detectar en el accionar del estudiante esquemas de acción instrumentada sobre ecuación del hiperboloide a partir de sus secciones con diversos planos.

3. *Se sabe que la sección de un hiperboloide con el plano $z = 0$ es*



y su sección con el plano $x = \sqrt{2}$ es.



a) Determine los valores de a, b y c y escriba la ecuación del hiperboloide en su forma canónica

Análisis a priori 3. a)

Creemos a priori que, a partir de la sección circular, el estudiante empleará esquemas de utilización ya adquiridos en la pregunta 1 y determinará que $a = 1$ y $b = 1$.

También se formulará la ecuación del hiperboloide, como resultado de las acciones realizadas

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La obtención del resultado anterior evidenciaría el surgimiento de las propiedades del hiperboloide respecto a su eje de simetría a partir de la sección con $x = \sqrt{2}$, que se proporcionó.

Cuando $x = \sqrt{2}$, $y = 0$ se cumple que $z = 2$ y se obtiene la igualdad:

$$2 + 0 - \frac{2^2}{c^2} = 1$$

de donde: $c = 4.$

El objetivo del ítem 3. b) es propiciar en el estudiante la creación de esquemas de acción instrumentada sobre la gráfica del hiperboloide a partir de sus secciones.

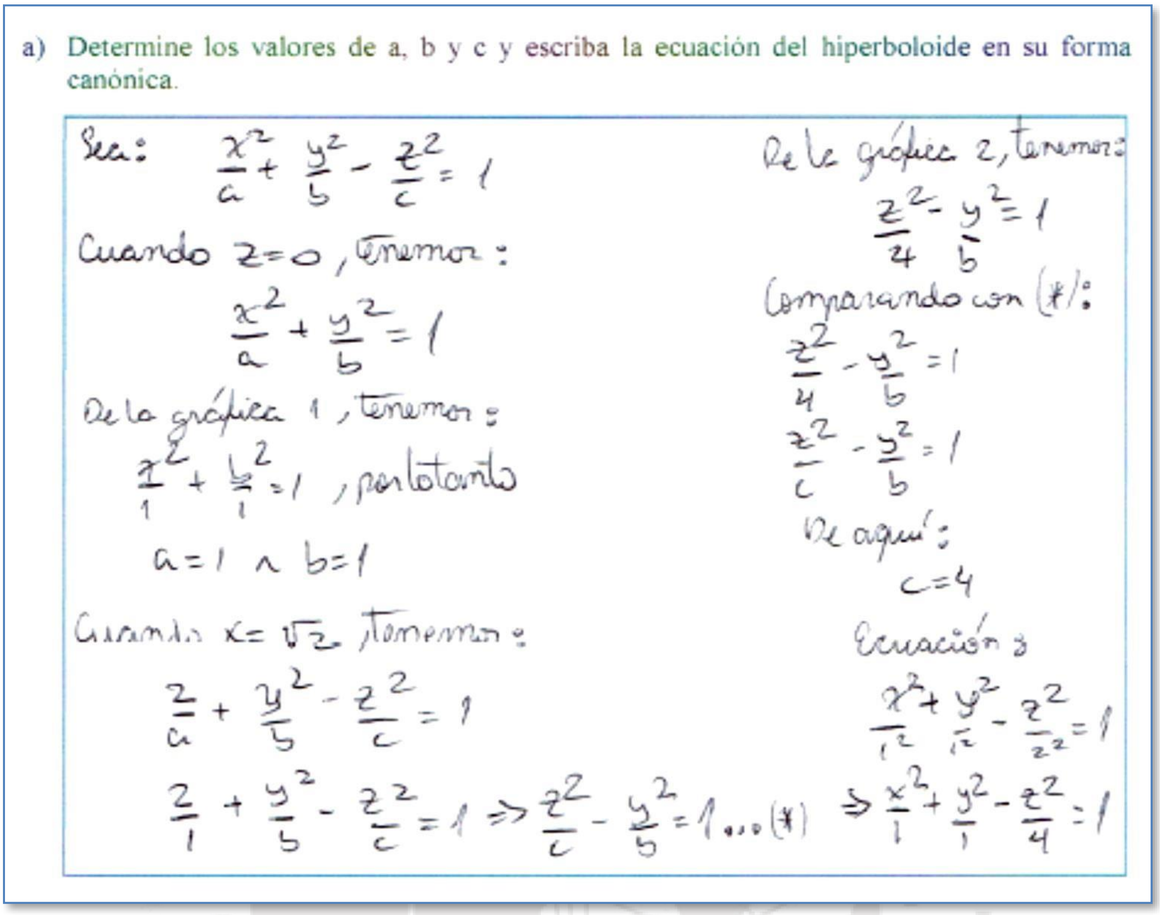
b) Trace un esbozo de la gráfica

Análisis a priori 3. b)

Creemos a priori que el estudiante usará los resultados del ítem 3. a), y de lo resuelto en el ítem 2. c) de la pregunta anterior, para realizar el esbozo de la superficie. El esbozo que debe realizar el estudiante se muestra en la figura 53, dado que se trata de la misma superficie. Se espera que combine sus esquemas ya adquiridos con el trazado del esbozo del hiperboloide.

Análisis a posteriori de las acciones de Leonidas a la pregunta 3

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 3. a).



a) Determine los valores de a, b y c y escriba la ecuación del hiperboloide en su forma canónica.

Sea: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}=1$

Cuando $z=0$, tenemos:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$$

De la gráfica 1, tenemos:

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}=1$, por lo tanto

$a=1 \wedge b=1$

Cuando $x=\sqrt{2}$, tenemos:

$$\frac{2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}=1$$

$$\frac{2}{1}+\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}=1 \Rightarrow \frac{z^2}{c}-\frac{y^2}{b}=1 \ldots (*)$$

De la gráfica 2, tenemos:

$$\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{b}=1$$

Comparando con (*):

$$\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{b}=1$$

$$\frac{z^2}{c}-\frac{y^2}{b}=1$$

De aquí:

$c=4$

Ecuación:

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1^2}-\frac{z^2}{2^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=1$$

Figura 57: Respuesta de Leonidas a la pregunta 3a)

A partir de las respuestas de la figura 57, evidenciamos que Leonidas moviliza esquemas sobre tratamiento de ecuaciones, identifica los coeficientes de la ecuación, con las dimensiones de la circunferencia e hipérbola que se dan en esta pregunta, esto constituye enriquecimiento de las propiedades del hiperboloide respecto a su ecuación; enriquecimiento con las propiedades del hiperboloide respecto a sus secciones transversales, y la transformación de los resultados para *a*, *b* y *c* en la ecuación del hiperboloide, todo esto constituye un esquema de acción instrumentada adquirido en la actividad 1 y en la pregunta 1 de la actividad 2. Desde el punto de vista del Enfoque Instrumental, podríamos afirmar que se ha dado la instrumentación con los esquemas de utilización de la ecuación y la instrumentalización con el surgimiento de las propiedades del hiperboloide.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 3. b).

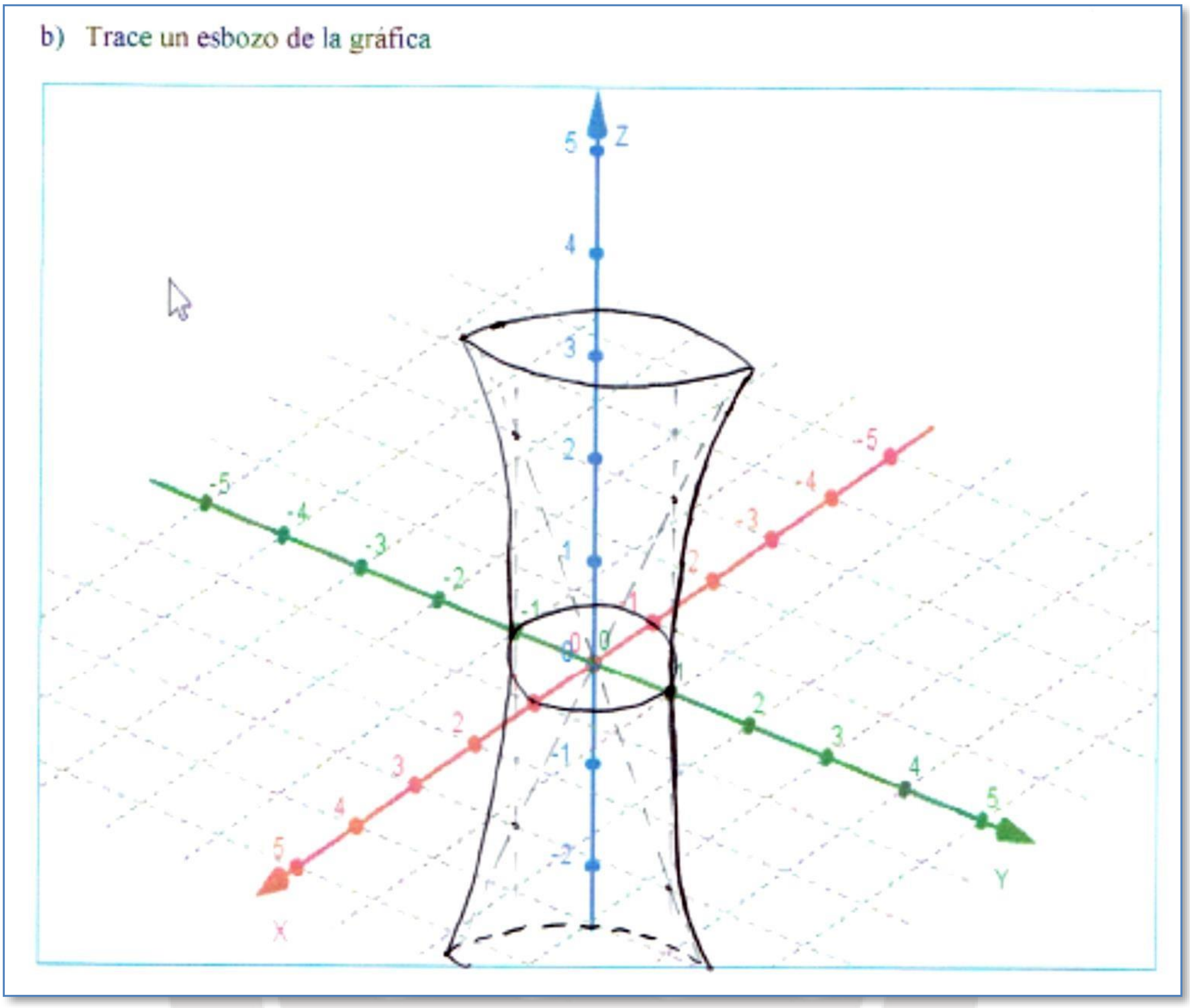


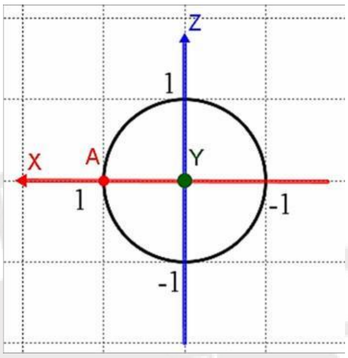
Figura 58: Respuesta de Leonidas a la pregunta 3b)

Observamos a posteriori en la figura 58 que Leonidas moviliza esquemas de acción instrumentada para trazar el esbozo de la superficie a partir de las ecuaciones de las secciones determinadas. Esto último constituye un esquema de acción instrumentada desde la pregunta 2 de la Actividad 2. Desde el punto de vista de Rabardel, este esquema nos indica la instrumentación del hiperboloide, dado que pudo esbozar la superficie del hiperboloide apoyado de las secciones cónicas, reconociendo la orientación del eje, asimismo, al reconocer las dimensiones de la cintura del hiperboloide y su forma circular en el cuello de la superficie, y el trazo de las asíntotas propias al graficar hipérbolas, mostradas en su gráfica, nos da indicios de la instrumentalización del hiperboloide, por lo cual debemos pensar que se ha dado su génesis instrumental.

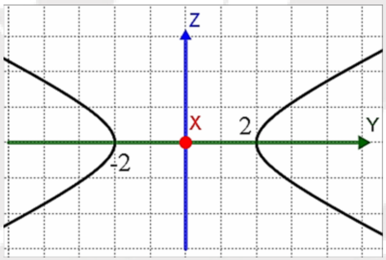
Análisis de la pregunta 4

El objetivo del ítem 4. a) y b) es detectar en el accionar del estudiante esquemas de acción instrumentada sobre ecuación del hiperboloide a partir de sus secciones y gráfica del hiperboloide a partir de su ecuación.

4. *Se sabe que la sección de un hiperboloide con el plano* $y = 0$ *es*



y su sección con el plano $x = \sqrt{2}$ *es.*



a) Determine los valores de a, b y c y escriba la ecuación del hiperboloide en su forma canónica

<u>Análisis a priori 4. a)</u>

Consideramos *a priori* que, para responder a esta pregunta, el estudiante debe movilizar, según Rabardel, esquemas de acción instrumentada adquiridos en las Actividades 1 y 2, y detectar que, si la sección circular está en el plano XZ, el eje del hiperboloide es el eje Y.

También creemos a priori que el asociar los radios de la sección circular, con los denominadores de la ecuación del hiperboloide, en consecuencia, $a = 1$ y $c = 1$ constituye un esquema de utilización y este conjunto de esquemas generará el siguiente planteamiento de la ecuación:

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1 \ldots (1)$$

Para validar las condiciones de la sección con $x = \sqrt{2}$, esperamos a priori que el estudiante movilice esquemas respecto a la obtención de secciones de una superficie y reemplace $x = \sqrt{2}$ en la ecuación (1) y se valga de las características de la sección dada que, según el enfoque instrumental, son esquemas de acción instrumentada. Por lo tanto, creemos que realizará el siguiente reemplazo:

$$(\sqrt{2})^2 - \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 1$$

de donde se desprende:

$$\frac{y^2}{b^2} - z^2 = 1 \ldots (2)$$

Al sustituir en la ecuación (2) las coordenadas de uno de los vértices de la hipérbola: $y = 2, z = 0$ se tiene:

$$\frac{2^2}{b^2} - 0^2 = 1$$

,

de donde se obtiene que $b = 2$, por lo que la ecuación pedida será:

$$x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

b) Trace un esbozo de la gráfica

Análisis a priori 4. b)

Esperamos que Leonidas realice el esbozo de la superficie tal y como se muestra en la figura 59.

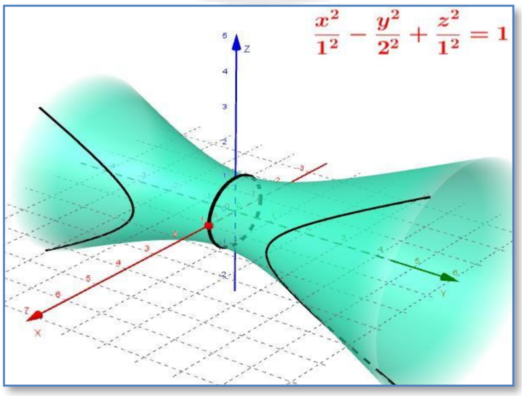


Figura 59: Hiperboloide de la pregunta 4

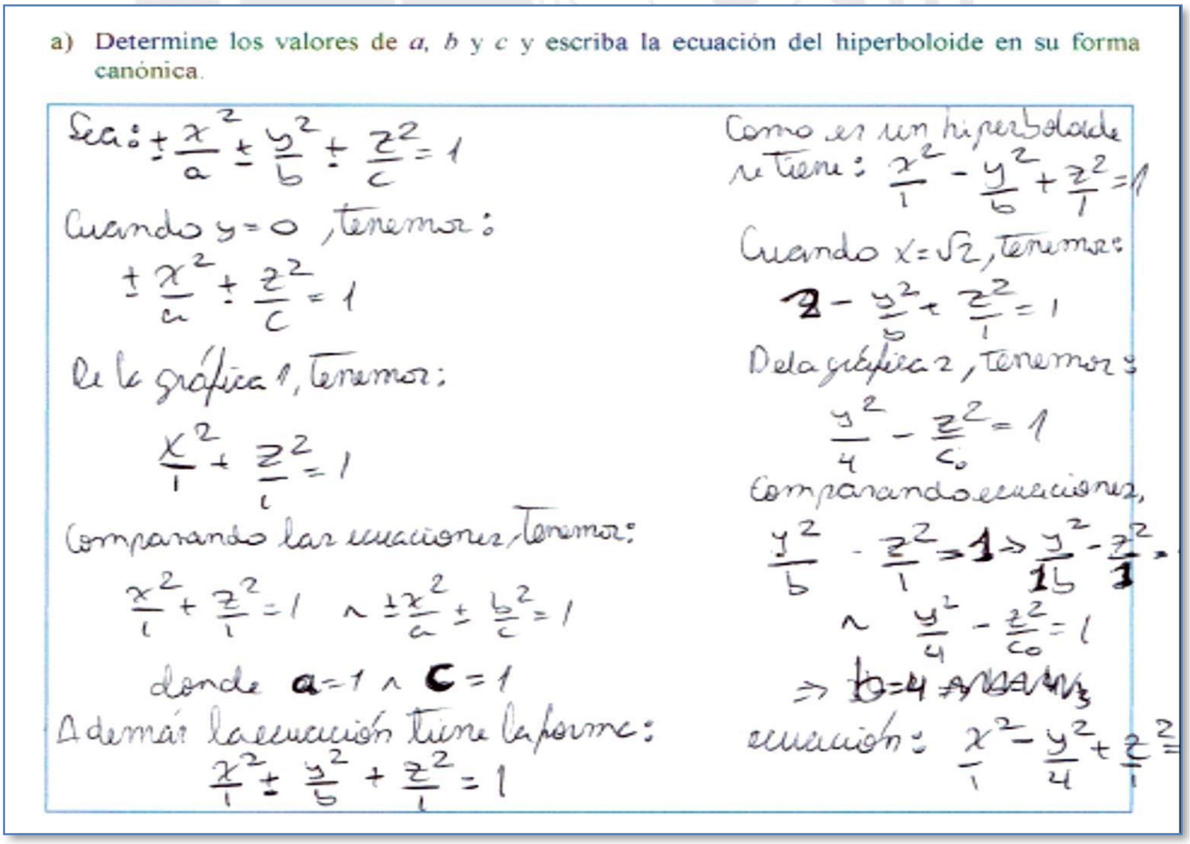
Creemos a priori que el conjunto de acciones necesarias para llevar a cabo la respuesta a esta pregunta, nos muestran esquemas de acción instrumentada del gráfico del hiperboloide a partir de secciones rectas hiperboloide, e indican la instrumentación de esta superficie.

El trazado del esbozo muestra esquemas de uso de la ecuación del hiperboloide relativas a los signos de los términos de la ecuación y su relación con el eje del hiperboloide y las dimensiones de este.

Por otro lado, estas acciones llevadas a cabo por el estudiante serían evidencia de esquemas de utilización y de acción instrumentada que nos estarían señalando la instrumentalización de esta superficie, por lo que, de cumplir ambos aspectos contemplados en la pregunta 4, consideramos que el estudiante ha instrumentado e instrumentalizado el hiperboloide y por lo tanto, logrado la Génesis Instrumental.

Análisis a posteriori de las acciones de Leonidas a la pregunta 4

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 4. a).



a) Determine los valores de a, b y c y escriba la ecuación del hiperboloide en su forma canónica.

Sea: $\pm\frac{x^2}{a} \pm \frac{y^2}{b} \pm \frac{z^2}{c} = 1$

Cuando $y=0$, tenemos:

$\pm\frac{x^2}{a} \pm \frac{z^2}{c} = 1$

De la gráfica 1, tenemos:

$\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$

Comparando las ecuaciones, tenemos:

$\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1 \wedge \pm\frac{x^2}{a} \pm \frac{z^2}{c} = 1$

donde $a=1 \wedge c=1$

Además la ecuación tiene la forma:

$\frac{x^2}{1} \pm \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{1} = 1$

Como es un hiperboloide se tiene: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{1} = 1$

Cuando $x=\sqrt{2}$, tenemos:

$2 - \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{1} = 1$

De la gráfica 2, tenemos:

$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{c_0} = 1$

Comparando ecuaciones,

$\frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{1b} - \frac{z^2}{1}$

$\wedge \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{c_0} = 1$

$\Rightarrow b=4$

ecuación: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} =$

Figura 60: Respuesta de Leonidas a la pregunta 4 a)

Observamos que Leonidas moviliza esquemas de acción instrumentada ya aparecidos en las preguntas 2 y 3 de la Actividad 2. Esto constituye según Rabardel, esquemas de acción instrumentada y nos da indicios de una instrumentación permanente en los esquemas de utilización del hiperboloide. Creemos que se ha instrumentado el hiperboloide con las acciones de Leonidas.

A continuación, presentamos la respuesta de Leonidas al ítem 4. b).

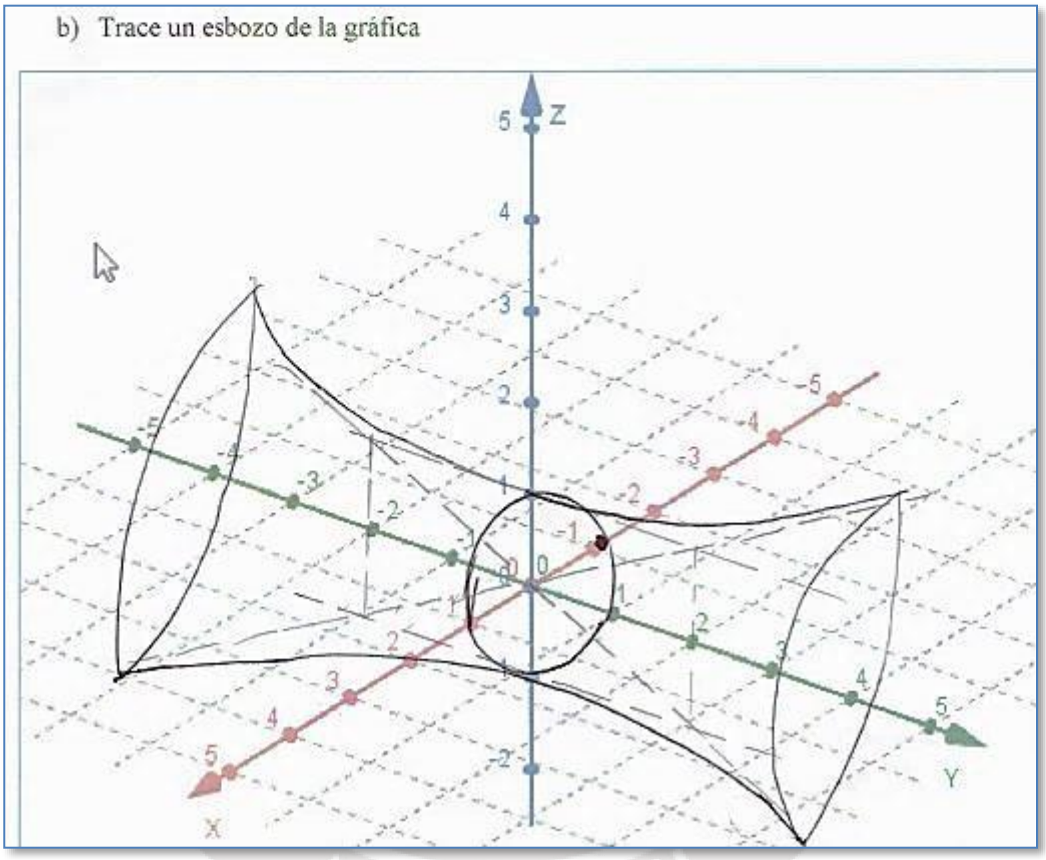


Figura 61: Respuesta gráfica de Leonidas a la pregunta 4 b)

Observamos a posteriori que Leonidas movilizó correctamente sus esquemas de acción instrumentada respecto al trazado de secciones de un hiperboloide, a la determinación de la orientación del eje del hiperboloide que coincide con el análisis *a priori* y que es un esquema de acción instrumentada nuevo. También se detecta en este último punto, el surgimiento de las propiedades del hiperboloide, por lo cual confiamos en que se ha dado la instrumentación e instrumentalización del objeto hiperboloide, las cuales muestran, por lo tanto, que se ha logrado la génesis instrumental con este conjunto de actividades.

CONSIDERACIONES FINALES

Luego del análisis a posteriori realizado sobre el accionar de nuestro sujeto de estudio, podemos realizar las siguientes observaciones:

La versatilidad del medio GeoGebra permitió establecer puentes entre las diversas formas de representaciones de los objetos matemáticos, en particular la representación gráfica y algebraica. Esto permitió que el estudiante reconociera propiedades y características del hiperboloide, entre ellas, cómo afectan los parámetros de su ecuación a la superficie, qué formas tienen las secciones transversales, la relación entre la ecuación y la orientación de la superficie, las características de la superficie a partir de los cortes transversales, entre otras.

Resaltar la importancia del medio GeoGebra como escenario de la elaboración de nuestra actividad didáctica, y sin el cual hubiera sido difícil la evocación de las propiedades del hiperboloide, en cierta forma, también facilitó la creación de esquemas por parte del sujeto de la investigación.

La transformación del artefacto simbólico hiperboloide en instrumento puede ser evidenciada cuando el estudiante resuelve la secuencia de actividades sobre el artefacto de estudio. El análisis de cómo el estudiante se fue apropiando de las características y propiedades del artefacto y la forma cómo fue movilizando los esquemas de utilización permitió verificar cómo se dio el proceso de génesis instrumental y esto estuvo orientado a conseguir los objetivos específicos de la investigación:

1. Identificar en las acciones de los estudiantes, los posibles esquemas de utilización (uso y de acción instrumentada) cuando desarrollan actividades didácticas sobre la noción de hiperboloide mediadas por el GeoGebra.
2. Determinar la asociación, por parte de los estudiantes de sus esquemas de utilización sobre las propiedades del hiperboloide cuando enfrentan la solución de un problema.
3. Distinguir el surgimiento y enriquecimiento de las propiedades del hiperboloide cuando los estudiantes desarrollan un problema con el uso del GeoGebra.

En ese sentido, el marco teórico escogido proporcionó las herramientas para distinguir las componentes de la génesis instrumental (instrumentación e instrumentalización), también nos permitió detectar en el accionar del estudiante esquemas de utilización para poder afirmar que efectivamente se dio la génesis instrumental. Por otra parte, debemos destacar que el estudiante, a partir de sus conocimientos previos, viene con un conjunto de esquemas preexistentes, los cuales fueron adaptados al nuevo artefacto para brindarle un cambio de significado. Por ejemplo, los estudiantes movilizaron sus esquemas de cónicas y gráficas 3D, y éstas fueron utilizadas para atribuirle un significado al hiperboloide.

También reconocemos la importancia del marco metodológico en la elaboración de nuestras actividades didácticas, ya que nos orientó en la selección y modificación de variables didácticas como secciones rectas y coordenadas de los puntos de arrastre que guiaron el accionar del estudiante y contribuyeron al surgimiento de las propiedades del hiperboloide.

Creemos que realizar una actividad didáctica sobre el hiperboloide de una hoja, en un ambiente de Geometría dinámica, mediados por un software como GeoGebra 3D y trabajando con secciones rectas de dicha superficie, contribuye al aprendizaje de este objeto matemático y complementa el tratamiento que tienen las superficies cuádricas en los libros de carácter matemático o cómo ha sido tratada históricamente la enseñanza de estas superficies.

Recomendamos que el presente trabajo continúe más adelante con investigaciones sobre la génesis instrumental de otras superficies cuádricas como el elipsoide y el paraboloide. Sugerimos también reconocer la importancia de las superficies regladas para el trabajo del estudiante de arquitectura y desarrollar actividades didácticas que exploten más esta característica tan importante. Es en ese sentido que nos permitimos recomendar investigaciones relativas al regulus del hiperboloide y al paraboloide hiperbólico que día a día ganan más espacio en el uso dado por los arquitectos.

Referencias

Almouloud, S. A., de Queiroz, C., & Coutinho, S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *3*(1), 62-77. Recuperado de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2008v3n1p62/12137

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. En: *Zentralblattfür Didaktik der Mathematik*, *34*(3), 66-72. Recuperado de http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02655708?LI=true#page-1

Boyer, C. (1968). *Historia de la Matemática*. Editorial Wiley. 3ra ed., p. 580. (Trad. por M. Martínez P.). Recuperado de https://edoc.site/historia-de-la-matematica-carl-boyer-pdf-free.html .

Chumpitaz, L. D. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediados por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

González, J. A., Martínez, M. J., & Ruiz, A. (2011). *Valoración de la geometría de superficies curvas entre profesionales y estudiantes*. Recuperado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/19707

Ibáñez, R. (2004). El vientre de un arquitecto (la búsqueda de la forma). En *Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas divulgaMAT*, Un paseo por la Geometría – Año 2003/2004, pp. 155-186. Recuperado de http://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/10/ribanez.pdf

Iranzo, D. N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(3), 433-446. Recuperado de http://ddd.uab.cat/record/51045/

Laborde, C. (2001). *Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 283-317. Recuperado de http://zeus.nyf.hu/~%20kovacsz/Laborde.pdf

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strasser, R. (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology.* Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers. Recuperado de https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-of-mathematics-educationa.pdf.

Lehmann Ch. (2005). *Geometría Analítica.* Versión en español por García, R. México D.F: Editorial LIMUSA, S.A. Trigésimo-octava impresión.

Leithold L. (1999). *El Cálculo 7ª edición*. Versión en español por Mata F. México D.F. Oxford University Press México, S.A. de C.V.

León, J. C. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5652.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología*, *9*(1), 123-146. Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf

Muslera, A. S., y De La Torre, E. (2011). La función arrastre en funciones usando GeoGebra. En *Investigación en Educación Matemática XV*, 555-564. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1839/1/410_Silva2011Lafunción_SEIEM13.pdf

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. UK: University of Bristol. Recuperado de https://hal.inria.fr/file/index/docid/190412/filename/Olivero-f-2002.pdf

Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática.* Volumen 1: La Matemática en la Antigüedad. Fondo editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, pp. 288-311. Recuperado de http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf

Peñaloza, T. (2016). Proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de arquitectura mediado por el GeoGebra. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Pontificia Universidad Católica del Perú. *Sílabo del curso Matemática 1 en el P.A. 2016-2*. Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Recuperado de: http://facultad.pucp.edu.pe/arquitectura/wp-content/uploads/2016/02/SILABO-MAT116-2016-2.pdf

Rabardel, P. (2011). Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Taylor, S. & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos*. Barcelona: Paidós. Recuperado de: http://mastor.cl/blog/wp-content/uploads/2011/12/Introduccion-a-metodos-cualitativos-de-investigaci%C3%B3n-Taylor-y-Bogdan.-344-pags-pdf.pdf

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, *9*(3), 281 - 307. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/3693391/LT-2004.pdf

Ugarte, F. & Yucra, J. (2014). *Matemáticas para Arquitectos.* Lima, Pontificia Universidad Católica del Perú. 2ª edición, pp. 249-293.

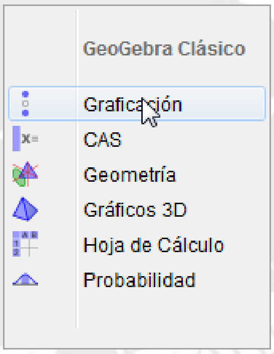
ANEXO 1

Actividad 0: Familiarización con el GeoGebra

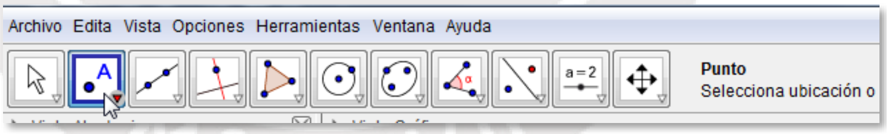
Nombres y Apellidos:

Cada pregunta resuelta con GeoGebra, guárdela en la carpeta GeoGebra del Escritorio, con nombre igual al número de pregunta.

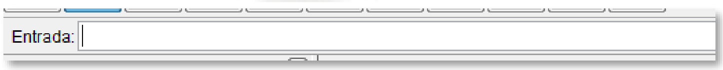
1. Abra el GeoGebra y seleccione el modo Graficación



a) Con la herramienta Punto, seleccione un punto A sobre el eje X y un punto B sobre el eje Y utilizando el botón izquierdo del mouse.



en la barra de entrada



ingrese la expresión: (x/x[A])^2-(y/y[B])^2=1 y presione ↵ .

b) Describa qué tipo de gráfica se obtiene, indique cuál es el eje focal y guarde su archivo.

....

....

c) ¿Qué cambio debe hacer en la ecuación anterior para que el eje focal sea el eje Y?

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

2. Ingrese la gráfica de la parte 1.a).

a) Con la herramienta Punto marque los vértices de la cónica. Guarde su archivo.

b) Manipule los puntos A y B sobre sus ejes y describa cómo cambia la gráfica.

…………………………………………………………………………………………

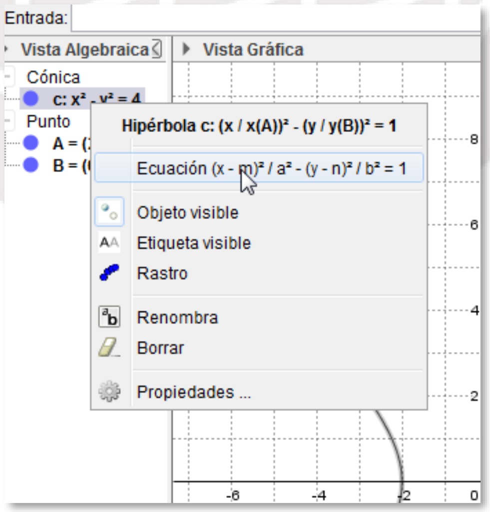
…………………………………………………………………………………………

c) Al mover A y B, ¿qué cambios se operan en la ecuación de la gráfica?

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

d) Puede explorar la ventana algebraica y hacer clic derecho en la ecuación de la cónica y seleccionar:



para visualizar la ecuación canónica de la cónica. Guarde su archivo e indique ¿qué representan las coordenadas de A y B en la ecuación de la cónica?

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

3. Ahora, con la herramienta Punto, fije en el plano, un punto cualquiera D a la derecha de A. Indique las coordenadas del punto elegido …………………………………

a) Arrastre los puntos A y B de modo que la gráfica de la cónica pase por el punto D.

   Indique tres pares de coordenadas de A y B que cumplan la condición anterior.

   A =…………………… B = ……………………

   A =…………………… B = ……………………

   A =…………………… B = ……………………

b) Si se fijara el punto A sobre el eje X, por ejemplo, A=(3, 0), calcule a partir de la ecuación de la hipérbola, las coordenadas del punto B de modo que la gráfica pase por el punto D anterior.

c) Compruebe el resultado obtenido en b), en el archivo de GeoGebra. Guarde el archivo.

CONCLUSIÓN: Tarea

1. Determine la ecuación de una hipérbola centrada en el origen, con eje focal horizontal, distancia entre vértices igual a 8 y que pase por el punto (7, 3).
2. ¿Sería posible si el eje es vertical? Justifique.

ANEXO 2

Actividad 1: El Hiperboloide de una hoja

1. Abra el archivo Superficie1.ggb de la carpeta GeoGebra.

   a) Describa la superficie que se observa en la ventana 3D

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   b) Arrastre los puntos A y B en la vista gráfica y describa cómo cambia la forma de la superficie obtenida y cómo se modifica su ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

   cuando $a=b$…………………………………………………………………………

   y cuando $a\neq b$……………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   c) Arrastre el punto C en la Vista Gráfica 3D y describa cómo cambia la forma de la superficie obtenida. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   d) ¿Qué representan las distancias de los puntos A, B y C al origen, en la ecuación de la superficie dada $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ que se muestra en la Vista Gráfica 3D?

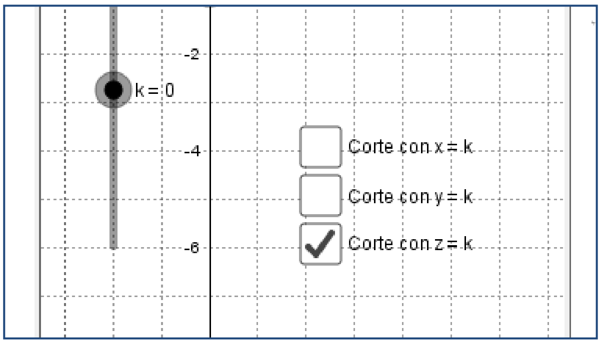
   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   e) Active la casilla “corte con z = k” y ubique el deslizador en k = 0.



Describa qué cónica es la sección obtenida en la superficie y qué sucede con esta sección cuando arrastramos A y B tal que $a = b$.

....

....

....

....

....

ANEXO 3

Actividad 2: El Hiperboloide circular de una hoja

1. Abra el archivo Superficie2.ggb de la carpeta GeoGebra.

   a) Active la casilla “corte con z = k” y describa qué sucede con la sección obtenida en la Vista Gráfica 3D, al mover el deslizador de k.

   …………………………………………………………………………………………….

   …………………………………………………………………………………………….

   Para una mejor visualización, puede activar

   mientras desliza k.

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   b) Realice el corte con el plano $z = 2$ y describa cuál es la ecuación de la sección obtenida e indique las características de esta sección.

   …………………………………………………………………………………………….

   …………………………………………………………………………………………….

   centro =......................?

   c) Active la casilla “corte con x = k” y describa qué cónica es la sección obtenida en la Vista Gráfica 3D

   ……………………………………………………………………………………..

   ……………………………………………………………………………………..

d) Describa qué sucede con la sección obtenida al mover el deslizador de k.

Active 

y deslice k para obtener una mejor visualización.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Si k < *a* ………………………………………………………………………….

Si k = *a* …………………………………………………………………………

Si k > *a* …………………………………………………………………………

e) Realice el corte con el plano $x = 2$ y describa cuál es la ecuación de la sección obtenida e indique las características de esta sección.

…………………………………………………………………………………………
.

…………………………………………………………………………………………
.

…………………………………………………………………………………………
.

…………………………………………………………………………………………
.

f) Active la casilla “corte con y = k” y describa qué cónica es la sección obtenida en la Vista Gráfica 3D

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

g) Describa en la Vista Gráfica 3D qué sucede con la sección obtenida al mover el deslizador de k.

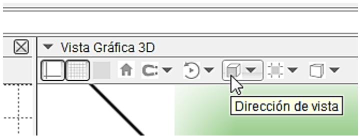
…………………………………………………………………………………………
.

....
.

Si k < *a* ....

Si k = *a* ....

Si k > *a* ....

Active 

para obtener una mejor visualización.

....

....
.

....
.

....
.

h) Realice el corte con el plano $y = 2$ y describa cuál es la ecuación de la sección obtenida e indique las características de esta sección.

....
.

....
.

....
.

....
.

…………………………………………………………………………………………….
.

…………………………………………………………………………………………….
.

2. Dada la ecuación de un hiperboloide: $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$

   a) Reescriba la ecuación en su forma canónica (ver pregunta 1.d)

   ……..……………………………………………………………………………………….

   ………………………………………………………………………………………………

   …..……………………………………………………………………………………….

   b) Realice cortes a la superficie dada, que le permitan trazar un esbozo de su gráfica e indique algunas características de las secciones obtenidas, mostrando una gráfica de ellas.

   ……………………………………………………………………………………………..

   ……………………………………………………………………………………………..

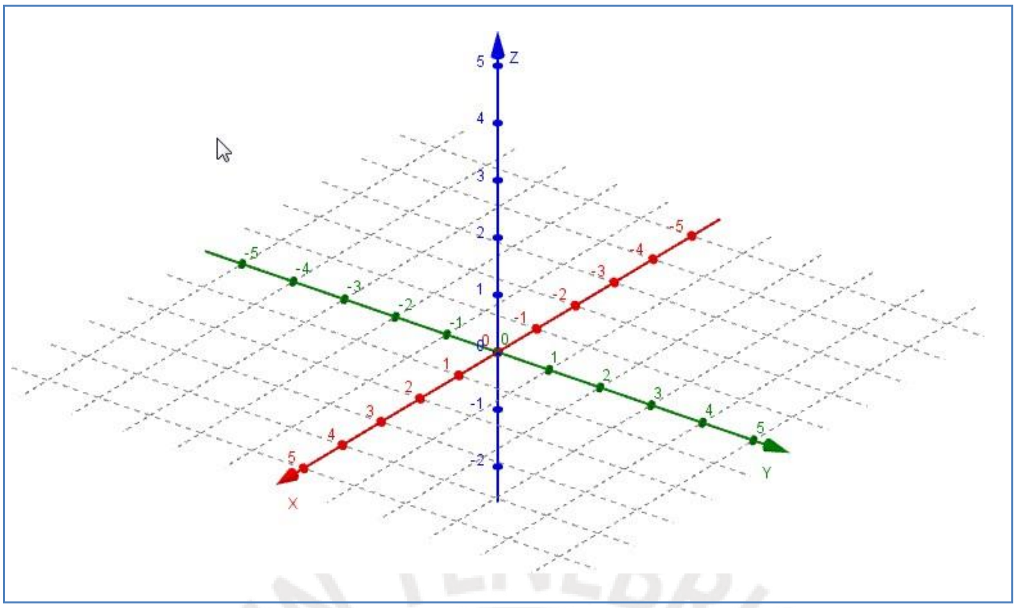
   ……………………………………………………………………………………………..

   ……………………………………………………………………………………………..

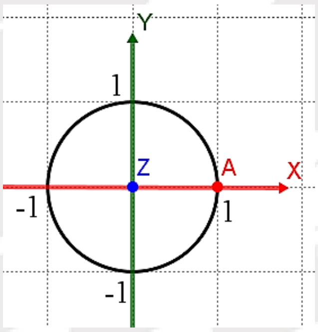
   ……………………………………………………………………………………………..

   ……………………………………………………………………………………………..

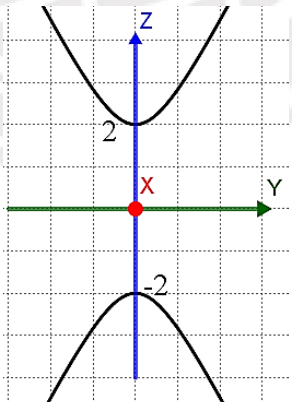
   c) Haciendo uso de los resultados obtenidos en b), trace un esbozo de la gráfica del hiperboloide



3. Se sabe que la sección de un hiperboloide con el plano $z = 0$ es

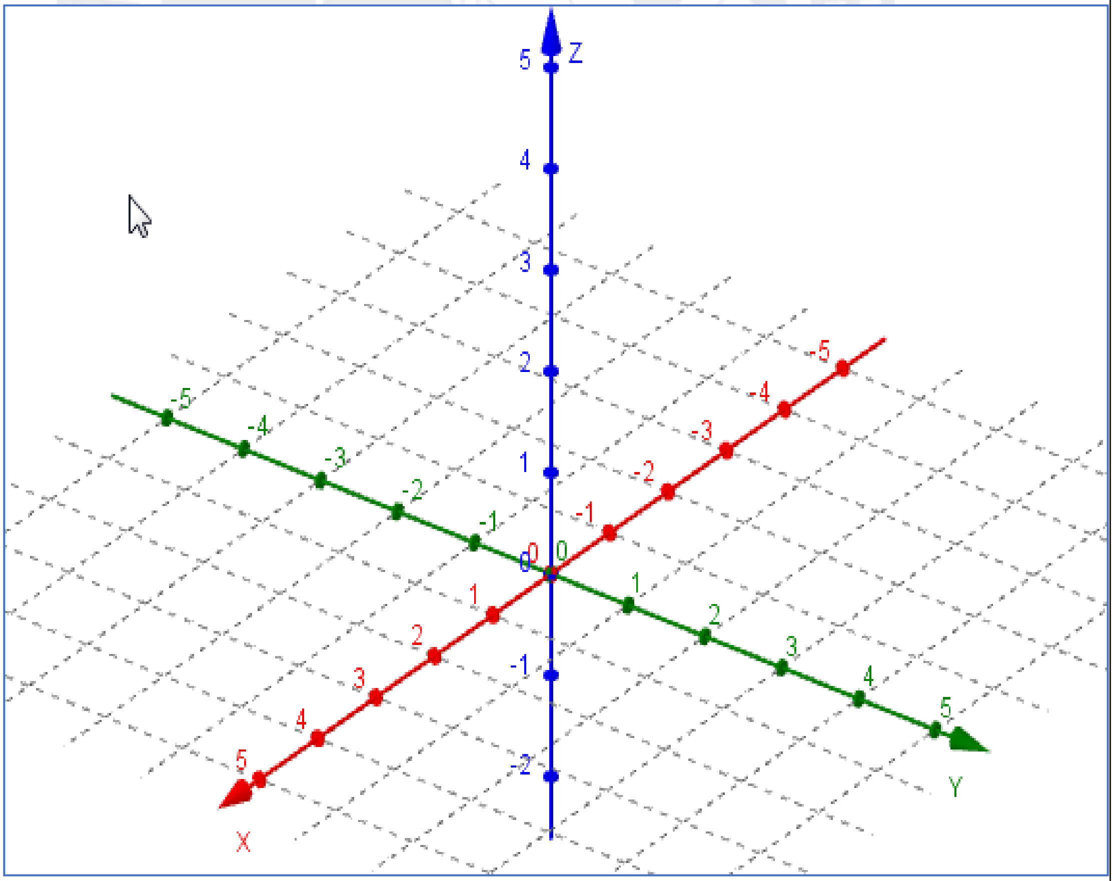


y su sección con el plano $x = \sqrt{2}$ es.

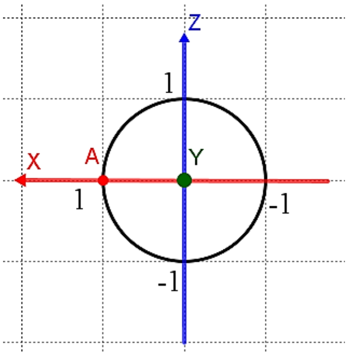


a) Determine los valores de a, b y c y escriba la ecuación del hiperboloide en su forma canónica.

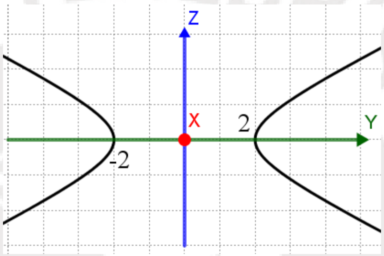
b) Trace un esbozo de la gráfica



4. Se sabe que la sección de un hiperboloide con el plano $y = 0$ es



y su sección con el plano $x = \sqrt{2}$ es.



a) Determine los valores de *a, b* y *c* y escriba la ecuación del hiperboloide en su forma canónica.

b) Trace un esbozo de la gráfica