PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

PERTINENCIA DE SITUACIONES PROBLEMA SOBRE LOS IRRACIONALES EN TEXTOS DIDÁCTICOS DE LA SECUNDARIA PERUANA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR:

Michael Junior Ynca Palma

ASESOR:

Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

Julio, 2018

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo analizar las tareas planteadas en los textos didácticos oficiales empleados en la secundaria peruana en relación a la noción de número irracional y, asimismo, analizar en qué medida dichas tareas contribuyen a la comprensión de dicha noción matemática. El interés por este estudio surge a raíz de la identificación de la naturaleza particular que poseen los irracionales y, también, porque es considerado como tema de estudio en la Educación Básica Peruana para el desarrollo de competencias matemáticas asociadas a la resolución de problemas. Ello implica que los textos didácticos presenten tareas y actividades sobre el número irracional, por lo cual es necesario analizar su pertinencia. Para alcanzar este objetivo, se reconstruyen los significados de referencia asociados al número irracional por medio del estudio de investigaciones sobre la epistemología de este objeto matemático y, a partir de estos significados, se extraen aspectos propios que caracterizan al número irracional, las cuales se toman en cuenta para el análisis de las tareas presentes en los textos didácticos. En el proceso de reconstrucción de los significados de referencia e identificación de aspectos sobre la razón de ser del número irracional, se emplean herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). En particular, se consideran los objetos primarios (situación problema, lenguaje, proposiciones, propiedades, procedimientos y argumentos) inmersos en las distintas situaciones problemáticas asociadas al número irracional. Como resultado del trabajo, se obtuvieron cinco significados parciales del número irracional y se identifica al número irracional como un concepto asociado al infinito, que aparece en contextos intra matemáticos y que implican procesos de aproximación. Del estudio a las tareas presentes en los textos didácticos sobre los irracionales, se concluye que estas tareas no rescatan aquellos aspectos característicos propios de este número y tampoco las asocian a los significados reconocidos, solo se justifica su presencia por medio de operaciones, aproximaciones y su uso en fórmulas.

Palabras clave: Número irracional, EOS

ABSTRACT

This work aims to analyze the tasks raised in the official didactic texts used in a Peruvian high school in relation to the notion of irrational numbers, and also to analyzing to what extent these tasks contribute to the understanding of this mathematical notion. The interest for this study arises from the identification of the particular nature that irrationals have and, also, because this is considered as a subject of study in Peruvian school curriculum for the development of mathematical competences associated to solving problems. This implies that didactic texts present tasks and activities about irrational numbers and it is necessary to analyze their relevance. To achieve this objective the meanings associated with the irrational number are reconstructed through the study of research on the epistemology of this mathematical object and, from these meanings, aspects proper to the irrational number are extracted, which are taken into account for the analysis of the tasks present in the didactic texts. In the process of reconstruction of the meanings and identification of aspects about the reason of being of the irrational number, theoretical tools of onto semiotic Approach of the Cognition and Mathematical Instruction (EOS) are used. In particular, the primary objects (problem situation, language, propositions, properties, procedures and arguments) associated with the irrational number are considered. As a result of the work, five partial meanings of the irrational number were obtained and the irrational number was identified as a concept associated with infinity, which appears in intra-mathematical contexts and which involves approximation processes. From the study to the present tasks in the didactic texts about the irrationals it is concluded that these tasks do not rescue those characteristic aspects of this number and do not associate them with the recognized meanings; only its presence is justified by means of operations, approximations and its use in formulas.

Keywords: Irrational numbers, EOS

DEDICATORIA

A mis padres, Carlos y Elvina.

AGRADECIMIENTOS

De manera muy especial, a mi asesora, la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, quien con sus conocimientos, dedicación y paciencia han motivado y ayudado la culminación de esta tesis.

A los miembros del jurado, Dr. Francisco Ugarte y la Mg. Cintya Gonzales por sus observaciones, sugerencias y recomendaciones para este trabajo.

A cada uno de los profesores de la maestría, por todos los conocimientos impartidos que han contribuido en mi formación académica.

A mis padres, Carlos y Elvina, que con mucho amor y desvelo han sabido educarme y hacer de mí una mejor persona.

A mis hermanas, Denisse y Evelyn, por sus consejos y apoyo incondicional.

A cada uno de mis compañeros de la maestría en la Pontificia Universidad Católica del Perú por todos los conocimientos y experiencias compartidas en el aula.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS/CUADROS

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

Los números racionales e irracionales son considerados en el currículo de matemáticas de la secundaria peruana, por lo que los textos didácticos de ese nivel incluyen actividades para su aprendizaje. Sin embargo, la naturaleza de dichos conjuntos numéricos es muy distinta. Es decir, los números racionales surgen de la necesidad de resolver problemas asociados a la medición, distribución, razón, entre otros fenómenos, mientras que los irracionales surgen ante la imposibilidad de encontrar una razón entre dos magnitudes. Por ejemplo, un número irracional no puede ser expresado como el cociente entre dos cantidades enteras. Reconocer este hecho, fue el punto de partida para construir un nuevo conjunto numérico, cuyo desarrollo atravesó por varias etapas. Desde la didáctica matemática, ese estudio es fundamental para reconocer la idoneidad epistémica de cualquier proceso de instrucción o propuesta curricular.

En ese sentido, el presente trabajo está dedicado al análisis de los textos didácticos empleados en la secundaria peruana, donde se introducen los números irracionales. La finalidad del estudio es ver en qué medida las tareas propuestas en dichos textos son pertinentes para introducir en la secundaria peruana el objeto matemático número irracional.

En esa línea, se han desarrollado algunas investigaciones en donde se discuten los diferentes usos y significados que se le atribuyeron a los números irracionales. En este capítulo, se presenta los resultados de dichas investigaciones, las que contribuirán con el desarrollo de nuestro trabajo. Esta revisión permitirá identificar la naturaleza de los números irracionales y ello brindará elementos para que las actividades propuestas para su aprendizaje consideren la razón de ser de dicho conjunto numérico.

1.1 Antecedentes

Los antecedentes de esta investigación han sido organizados de la siguiente manera: en primer lugar, se considera aquellas referidos a investigaciones sobre la organización de conjuntos numéricos para su enseñanza; en segundo lugar, se describen trabajos de corte epistemológico, donde se proponen modelos epistemológicos de referencia y significados de referencia de un objeto matemático para la enseñanza en la secundaria y, por último, investigaciones epistemológicas específicas relacionadas a los números irracionales. Después de describir cada una de estas investigaciones, se explica su relevancia para esta investigación.

Socas (2002) presenta una organización de los sistemas numéricos y propone una nueva estructura de cómo organizarlos, diferente a las propuestas en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España, pues considera determinante el papel que cumple una buena organización para una mejor comprensión de los sistemas numéricos. Su trabajo tiene como punto partida la ambigüedad de la expresión número decimal que, muchas veces, se concibe de manera errada, confundiéndose con la representación decimal de un número. Por ejemplo, la fracción 3/11 es llamado número decimal cuando es confundido con su representación en cifras decimales 0,2727272727272…. Un número decimal, según afirma el autor, es una fracción cuyo denominador es una potencia del 10, como en el siguiente ejemplo $\frac{5}{10};\frac{36}{100}$.

Socas (2002) rescata la naturaleza intrínseca del conjunto de los números, ya que, según refiere, solo requieren de adjetivos para poder identificarlos y diferenciarlos. Por ejemplo, si se refiere a un número *natural,* se entiende que hace referencia a un elemento de $\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\}$. Asimismo, un número *entero* se interpreta como un elemento de $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\}$, de igual forma, para un número *racional*, *irracional*, *real* y *complejo*. Sin embargo, esto no sucede con el término *número decimal,* el cual puede ser considerado como un elemento del sistema de números en base diez, como la representación de un número real en su forma decimal o como un número racional cuyo denominador es una potencia del diez, por ejemplo, los números 135 0,2727272727272… y $\frac{3}{10}$ respectivamente.

En ese sentido Socas, define al conjunto D (elementos formados por las fracciones cuyo denominador son potencias de diez) por su naturaleza intrínseca, pues se puede definir en $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ la relación binaria R, donde (a_1,n_1) y (a_2,n_2) están relacionados si $(a_1,n_1)R(a_2,n_2)\Leftrightarrow a_1 10^{n_2}=a_2 10^{n_1}$. Dicha relación define un nuevo sistema de numeración, ya que a cada clase (a,n) se le puede otorgar su propia representación como $[a/10^n]$ que es el conjunto de todos los pares equivalentes a (a,n) bajo la relación binaria R, como se ve en el siguiente ejemplo:

$$[3/10^2]=\left\{(3,2)/3\times 10^{n_2}=a_2\times 10^2\right\}=\left\{(3,2);(30,3);(300,4);(3000,5);...\right\}$$

El hecho que D sea presentado como otro conjunto numérico, menciona Socas (2002), es en el sentido que ayudaría, principalmente, a poder diferenciar la expresión número decimal exclusivamente para los elementos de D, así como se diferencia la fracción como un elemento de los racionales. Por ello, considera abandonar la organización clásica de sistemas de numeración, el cual considera, primero, el estudio de los naturales, luego, a los enteros, los racionales (compuestos por los enteros, decimales limitados, periódicos puros y mixtos), los irracionales (decimales ilimitados no periódicos) y, finalmente, los reales como unión de los anteriores. De este modo, el autor propone que el conjunto de los racionales está conformado por los números decimales D y los no decimales (D^C), siendo estos últimos los que tienen un desarrollo de infinitas cifras con periodicidad pura o mixta, puesto que la primera tiene una cantidad finita de cifras en el desarrollo. Por esto, se le llamará irracional a aquellos números cuya representación decimal posee infinitas cifras sin periodo.

Socas (2002) resalta también el orden de los números decimales en la recta decimal y su densidad, es decir, teniendo en cuenta que siempre entre dos números decimales se puede encontrar otro número decimal. De la misma manera, menciona que incluir a D en los sistemas numéricos ayudaría al estudiante a comprender que un número puede tener diferentes formas de representación y, además, a partir de D, cómo se puede ir construyendo $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$; dicho de otro modo, considerar a D como un sistema numérico entre el conjunto $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

Socas (2002) ubica a los números irracionales, en su trabajo, en dos conjuntos: los números algebraicos, aquellos números que son raíz de un polinomio con coeficientes racionales; y los números trascendentes, aquellos que no lo son. Sin embargo, en su investigación, no presenta una propuesta de cómo se podría abordar o introducir los números irracionales en la escuela. Cabe señalar que esta investigación es relevante para nuestro trabajo, puesto que en él se plantea pertinente trabajar con los números irracionales en su representación con cifras decimales, ya que ello permitiría ver las diferencias que hay entre cada uno de los conjuntos numéricos (números naturales, enteros, racionales e irracionales). Dicho de otro modo, será útil para identificar si el número irracional, en su representación decimal, está asociada a alguno de los significados que tiene el objeto matemático número irracional.

Por otro lado, con respecto a los temas de corte epistemológico y significados de un objeto matemático, se ha encontrado la investigación de Escolano y Gairín (2005), cuyo trabajo se centra en mostrar obstáculos didácticos cuando se prioriza en la introducción de los racionales la relación parte-todo. Así mismo, plantean una propuesta didáctica alternativa para introducir este conjunto numérico (números racionales) a estudiantes de primaria (12 años).

En esta investigación, los autores cuestionan la forma de cómo se introduce los números racionales en las escuelas españolas, pues, tal como lo mencionan, este conjunto numérico se introduce centrándose en el significado parte-todo; y que, a su vez, este mismo significado es utilizado para introducir los números decimales. Además, señalan que introducir las fracciones con el significado parte-todo genera obstáculos didácticos, por ejemplo, la creencia de la no existencia de las fracciones impropias o que el estudiante considere que las fracciones son números, pero que no representan una medida. Tal es así que, si a un estudiante se le menciona la mitad de la superficie de un cuadrado, siendo S la superficie del cuadrado, este lo representará con $\frac{1}{2}$; es decir, no considera la magnitud de la superficie. Dicho de otro modo, lo correcto sería representar la mitad de la superficie del cuadrado como $\frac{S}{2}$. No obstante, el estudiante solo lo representa con $\frac{1}{2}$.

En esa línea, Escolano y Gairín (2005) plantean una propuesta didáctica alternativa sobre la forma de introducir los números racionales. En ella, consideran que la mejor forma de introducir estos números es por medio de tareas de medición y de repartos, puesto que para construir el significado de fracción es necesario considerar problemas que requieran medir magnitudes de objetos concretos. Para llegar a dicha conclusión y presentar su propuesta, los autores afirman que dichas tareas se han identificado a través de un estudio epistemológico, ya que este tipo de estudio les ha permitido rescatar e identificar actividades asociadas a los números racionales. En ese sentido, para construir el significado de fracción, número racional, se hace necesario considerar problemas que requieran medir magnitudes de objetos concretos (acciones realizadas con objetos). Es por ello que consideran que el modelo de medición de magnitudes es idóneo para la introducción de los racionales.

Se debe aclarar que nuestra investigación no se centra en los números racionales; sin embargo, el resultado del trabajo de Escolano y Gairín (2005) es importante para nuestro estudio, debido a que, si los problemas en situaciones de medición concreta son un contexto adecuado para la introducción de los números racionales, estas tareas quedarían excluidas para justificar la introducción de los números irracionales. En otros términos, las tareas asociadas a la medición concreta no serían pertinentes para introducir los números irracionales, ya que estos problemas no generarían la necesidad de contar con un nuevo conjunto de números, en este caso, con los irracionales.

A continuación, se presentará trabajos de corte epistemológico donde nos muestran la importancia de este tipo de estudio para la didáctica de las matemáticas. En ese sentido, estos trabajos, para nuestra investigación, son considerados como ejemplos de cómo un análisis epistemológico permite reconocer elementos que motivaron el origen y la evolución de cierto objeto matemático, para nuestro caso, los números irracionales. En seguida, se detallarán dichas investigaciones.

En la didáctica de las matemáticas, existen trabajos sobre modelos epistemológicos de referencia (MER). Al respecto, Gascón (2014) refiere que, en la didáctica de las matemáticas, los hechos didácticos en conjunto con los hechos históricos pueden servir para identificar fenómenos didácticos y que, a su vez, sirven para diseñar, evaluar y corregir determinados modelos epistemológicos de referencia. Este último se entiende como modelo liberado de la dependencia de modelos epistemológicos dominantes, ligados a alguna institución (institución escolar, libros, planes de estudio, textos, etc.). En ese sentido, según lo que afirma el autor, se entiende que, para realizar un investigación de tipo epistemológico, se debe de mirar de una manera diferente a como lo ve un investigador en historia de las matemáticas por ejemplo, es decir, emancipándolo del modelo histórico y, así, identificar aquellos fenómenos didácticos que no son visibles en el modelo histórico y, a partir de ello, proponer explicaciones y soluciones apropiadas a dichos fenómenos.

De igual forma, Cid y Bolea (2010) realizan un estudio epistemológico para plantear un MER para la enseñanza de los números negativos a estudiantes de un primer curso de matemáticas en la secundaria (o a finales de la primaria). De acuerdo a las autoras, el modelo dominante que se reconoce es que los números negativos se abordan en un contexto aritmético y, para justificar la necesidad de estos números, utilizan modelos concretos, tales como deudas, ganancias, temperatura, etc. De este modo, interpretar y justificar la necesidad de la existencia, y el uso del signo "+ y –" de un número, por medio de una analogía con esos hechos concretos.

Esta forma de introducir la enseñanza de los números negativos, según refieren Cid y Bolea (2010), es muy habitual, puesto que muchas de estas propuestas provienen de investigaciones en innovación educativa y campos de la investigación didáctica. Sin embargo, hay investigadores que han criticado dicha forma de enseñar los negativos, pues consideran que en lugar de mejorar la comprensión del estudiante pueden llevarlos a confusiones o convertirse en obstáculos didácticos.

En ese sentido, en la búsqueda de un MER, Cid y Bolea (2010) realizan un análisis epistemológico sobre los números negativos y refieren que estos nacen en un entorno algebraico y no aritmético. En otras palabras, se originan para realizar cálculos algebraicos. Las autoras señalan que un antecedente de ello se encuentra en el trabajo de Diofanto, quien desarrolla la idea de plantear la regla de los signos con fines operatorios (realizar operaciones). Por ello, plantean que se debe de explorar la enseñanza de los números negativos en un entorno algebraico y, luego, contrastar el resultado con aquellos obtenidos donde la enseñanza se da en un entorno aritmético. Con esta finalidad, plantean y construyen un modelo epistemológico de referencia del álgebra escolar que ayude a diseñar actividades de estudio e investigación.

Se debe aclarar que en nuestro trabajo no se pretende realizar un MER. Sin embargo, lo mencionado por Gascón (2014), y Cid y Bolea (2010) es relevante para nuestro estudio, pues nos indican que al realizar un análisis epistemológico sobre un objeto matemático, en nuestro caso, los números irracionales, es fundamental para identificar contextos idóneos para su introducción, algunos de los cuales podrían adaptarse para la secundaria.

Continuando con otras investigaciones desde la perspectiva epistemológica, se ha identificado el trabajo de Pino (2010), cuyo objetivo fue reconstruir diferentes significados parciales de la derivada para construir su holosignificado (significado global). Para dicha investigación, el autor realiza un análisis histórico epistemológico del objeto derivada, identificando aquellos problemas que le dieron origen y que permitieron su desarrollo.

En tal sentido, para la reconstrucción de los significados de la derivada, el autor desarrolla una metodología del tipo cualitativo, mediante la búsqueda, revisión y análisis de documentos de investigaciones sobre el desarrollo histórico epistemológico de la noción de derivada. Los elementos teóricos que utiliza para reconocer y describir aquellas situaciones problemas de cada significado parcial es el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

A partir del trabajo desarrollado, el autor describe nueve significados parciales de derivada, las cuales son la tangente en la matemática griega, sobre la variación en la edad media, métodos algebraicos para hallar tangentes, concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes, las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos, métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes, el cálculo de fluxiones, el cálculo de diferencias y la derivada como límite.

Es preciso mencionar que el trabajo de Pino (2010), aun sin considerar el objeto matemático de nuestro interés, será de utilidad en nuestra investigación, puesto que se considerará como modelo para describir y articular los diferentes significados de número irracional, asimismo, los elementos de la metodología que emplea en su investigación y las consideraciones que toma para identificar los objetos que intervienen en los sistemas de prácticas donde se originan los números irracionales.

Por otro lado, al realizar la búsqueda de investigaciones epistemológicas del objeto matemático abordado en esta investigación, los números irracionales, se han encontrado solo algunos trabajos. A continuación, se mostrarán dichos estudios.

Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) realizan un estudio enfocado al análisis epistemológico de los números irracionales para construir su holosignificado. En él, presentan configuraciones epistémicas, donde se interrelacionan seis objetos primarios (elementos lingüísticos, situaciones problema, concepto-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos). Estas configuraciones conformarán lo que se denomina el holosignificado del número irracional. A su vez, este holosignificado sirvió como referencia para analizar los textos empleados en la escuela secundaria a través de la presencia o ausencia de los diferentes usos de esta noción en los textos escolares que fueron analizados por los autores.

La investigación de Reina et al. (2012) emplea las herramientas teóricas que ofrece el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Los elementos que este marco ofrece permite, a través de un análisis histórico epistemológico, ver cómo el objeto matemático número irracional emerge a partir de una actividad matemática. Dicho análisis se realiza por medio de seis objetos primarios que se relacionan entre sí, conformando un conjunto de configuraciones, las cuales están relacionadas a un determinado contexto y uso.

En el análisis histórico epistemológico, Reina et al. (2012) identifican momentos históricos y actividades matemáticas que permitieron el desarrollo de la noción de número irracional, estos momentos son los siguientes:

- *Encontrar la razón entre dos segmentos dados*. En este momento histórico, la actividad matemática se centra en encontrar una unidad que divida en una cantidad entera de veces a dos segmentos. Esta actividad está asociada a la geometría y el número irracional surge como resultado de la imposibilidad de determinar la razón entre la longitud de la diagonal de un cuadrado y la longitud de su lado.
- *La reformulación de la teoría de proporciones*. En esta etapa, ante el descubrimiento de los inconmensurables, se reformula el concepto de proporcionalidad dejada por la escuela pitagórica. Con esta reformulación, se origina una nueva forma de comparar y obtener equivalencias entre dos números irracionales.
- *Aproximaciones de un número irracional*. En este momento histórico, el número irracional emerge en trabajos con fracciones continuas, ya que aproximar un número irracional era una forma de indagar y describir a los números irracionales.
- Finalmente, una última etapa consiste en que a los irracionales se les otorga la categoría de número con una cierta estructura.

Como resultado de dicho estudio, Reina et al. (2012) obtuvieron cinco configuraciones epistémicas de referencia asociadas a los números irracionales. Dichas configuraciones se mencionan a continuación:

- Configuración epistémica implícita de los números irracionales. Esta configuración está relaciona con la inconmensurabilidad de dos segmentos a una medida en común (contexto puramente geométrico).
- Configuración epistémica explícita de los números irracionales. Esta configuración se destaca por la noción de comparación de magnitudes inconmensurables, aquí aún se está en el contexto geométrico.
- Configuración epistémica de la aproximación racional de los números irracionales. En esta configuración, se relaciona el uso de las fracciones continuas para aproximaciones a números irracionales y la aproximación por racionales a irracionales.
- Configuración epistémica aritmética de los números irracionales. Esta configuración está asociada a la crisis de los fundamentos del cálculo, es decir, con el cuestionamiento de la existencia de los números irracionales.
- Configuración epistémica de la existencia y clasificación de los números irracionales, vinculada a la diferenciación entre los números algebraicos y los trascendentes. Es decir, se tiene la noción del número irracional ya evolucionado, donde ya se puede hacer una distinción entre los dos tipos de número irracional (algebraico y trascendente).

A partir de dichas configuraciones, los autores propusieron un holosignificado de número irracional, el cual consta de todos los objetos que están inmersos en cada una de las diferentes configuraciones. Sin embargo, señalan que el significado de número irracional es relativo, pues comprender esta noción puede tener diferentes niveles que indiquen que se ha asimilado algunos objetos de las configuraciones epistémicas y la relación que hay entre ellas.

Por otro lado, con respecto a los textos analizados, Reina et al. (2012) afirman que los números irracionales se introducen de manera muy simplificada optando por las aproximaciones. La justificación se basa en aproximaciones por números racionales sujetos a instrumentos de medida, por ejemplo, el uso de las calculadoras como medio para aproximar, pero sin trabajar con expresiones simbólicas. Otro aspecto, con la que justifican la introducción de los irracionales, son las aproximaciones mediante números decimales.

Por lo descrito sobre el trabajo realizado por Reina et al. (2012), se cree que será fundamental para nuestro estudio, pues se contará con una primera aproximación a los distintos significados de número irracional. No obstante, se considera que dicho trabajo no presenta un análisis epistemológico extenso, por lo contrario, es breve. Por ejemplo, si bien menciona los procedimientos empleados en la actividad matemática en cada una de las configuraciones, no la muestra en su análisis epistemológico y, en el caso de la clasificación de los números irracionales, no menciona qué originó a clasificarlos. En ese sentido, se ampliará y completará dicho trabajo haciendo explícito la parte epistemológica, mostrando los objetos emergentes en la actividad matemática donde esté inmerso el concepto de número irracional. Asimismo, los resultados obtenidos en el análisis de textos serán útiles para este trabajo, ya que nos permitirá contrastar nuestros hallazgos con lo encontrado por dichos autores.

Por otro lado, hay investigaciones referidas a algunos números irracionales particulares que se centran en hallar su holosignificado. Una de ellas es la desarrollada por Konic, Godino, Castro y Rivas (2014) sobre el holosignificado del número irracional π. Según estos investigadores, la identificación de los diferentes significados de π permitirá dar respuestas a cuestiones relacionadas a su enseñanza, tales como qué papel desempeña este número en el currículo educativo, en qué niveles se estudia π y qué aspectos de este, y con qué otros objetos matemáticos está relacionado. Incluso, permitirá elaborar propuestas para su enseñanza en la primaria y secundaria.

Dicha investigación es del tipo descriptivo y epistemológico. Para identificar aquellas actividades matemáticas, donde estuvo inmerso el número π, utilizaron el marco teórico de Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

De la investigación histórica epistemológica realizada por Konic et al. (2014), la evolución de π se puede caracterizar en tres etapas. La primera es la de medir la circunferencia de un círculo. En esta primera etapa, los problemas están relacionados a contextos reales y geométricos. La segunda etapa considerada es la de describir curvas, encontrar mecanismos para la búsqueda de decimales que se obtienen del cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, además, el comportamiento de dichos decimales. Los autores mencionan que estos problemas se presentan en diferentes contextos, como en la trigonometría y la geometría analítica. Por último, la tercera etapa está asociada a la búsqueda de propiedades de π y en hallar la mayor cantidad de cifras decimales de π en un menor tiempo.

Del mismo modo, los autores refieren que los objetos primarios (situaciones problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje) vinculados a π en una primera etapa fueron la consideración del diámetro como una unidad de medida, la relación entre diámetro y el perímetro de un círculo, la aproximación del área de un círculo por medio de otras áreas, la diferencia entre un número decimal y una expresión decimal de un número. También, mencionan que en las etapas sucesivas han encontrado objetos que conllevan una mayor complejidad, como es el caso de concebir la longitud de una circunferencia como el límite del perímetro de un polígono de n lados, determinar el número de decimales de π, reconocimiento de π como irracional y la trascendencia de π. Los autores concluyeron que algunos de los objetos antes mencionados son considerados en los currículos y los libros didácticos, pero esto no se hace promoviendo la necesidad de conocer los significados de π.

En el artículo de Konic y colaboradores, se muestran diez problemas (sistemas de práctica) donde emerge π, pero no se describe los otros objetos emergentes en relación a cada una de las situaciones problemáticas mencionadas, a excepción de una que muestra por medio de un esquema, la cual se denomina “cuadratura del círculo” en el Egipto antiguo. Asimismo, no menciona o nombra de manera explícita los diferentes significados de π. Entonces, se puede decir que, si bien hay investigaciones sobre los números irracionales y números irracionales particulares, se considera que es necesario mostrar en detalle y hacer explícito cuáles son los objetos que se articulan en cada uno de dichos sistemas de prácticas.

Por último, presentamos una investigación que no es referido a los significados del número irracional, sin embargo, si considera un estudio epistemológico sobre este objeto matemático.

Pommer (2012), presenta una propuesta didáctica para introducir los números irracionales en la enseñanza básica. Está investigación, que es del tipo cualitativa, realiza, primeramente, un análisis exploratorio a los textos escolares empleados en la enseñanza básica del Brasil y concluye que los números irracionales son presentados de manera polarizada, unos enfocados en lo práctico (ejemplos particulares) y otros en lo teórico (definiciones), favoreciendo más al desarrollo operatorio (cálculo) que la comprensión misma de la noción de número irracional.

En consecuencia, el autor afirma que, para comprender el concepto de número irracional, es necesario considerar aquellos aspectos, asociados al número irracional, que se fueron desarrollando a lo largo de la historia de las matemáticas. En ese sentido, considera una propuesta epistemológica sobre los números reales desarrollada por Machado (2009) (citado en Pommer, 2012) y, a partir de ella, considera tres ejes que, según el autor, constituyen los pilares esenciales para enfocar el concepto de los números irracionales, dichos ejes son los siguientes:

- discreto/continuo, asociados a la acción de contar y medir.
- exacto/aproximado, asociados a los trabajos de aproximaciones.
- finito/infinito, asociados a conflictos sobre la concepción del infinito potencial.

A partir de dichos resultados, Pommer (2012), propone actividades relacionadas con las aproximaciones y los procesos iterativos infinitos, cada una de estas tareas contemplan el apoyo de plantillas y software computacionales. Las actividades propuestas, están orientados a la obtención de la mayor cantidad de cifras decimales y la obtención de un valor aproximado a un número irracional notable como $\pi, e,$ y Φ. Este investigador, considera que por medio de estas tareas se podría hacer la distinción entre lo exacto y lo aproximado, asimismo, comprender que, para obtener un valor aproximado, siempre es necesario realizar truncamientos en los procesos iterados. Además, por la capacidad limitada de un computador no sería posible encontrar todas las cifras decimales de un número irracional, es decir, con dichas actividades se podría asociar al número irracional con el infinito.

En ese sentido, es necesario señalar que la propuesta dada por Pommer (2012), es relevante para nuestro estudio, puesto que nos permite disponer con tareas y actividades, consideradas adecuadas, para introducir los números irracionales. Dicho de otro modo, esta propuesta nos permitirá ver si tareas y actividades de este tipo son contempladas en los textos escolares empleados en la secundaria peruana.

Hasta aquí, se ha mostrado trabajos en didáctica de las matemáticas, cuyo interés se ha centrado en diferentes conjuntos numéricos, valorando la importancia de reconocer y plantear modelos epistemológicos, y, para esa finalidad, han identificado situaciones que originaron el desarrollo de objetos matemáticos (derivada, números irracionales, número π), las cuales se asocian a significados que han ido tomando dichos objetos matemáticos a lo largo del desarrollo de la matemática. En ese sentido, estos trabajos contribuirán a valorar y evaluar modelos de enseñanza que son empleados en las diferentes instituciones (escuelas, libros, planes curriculares, etc.) al abordar cada uno de esos temas.

En el siguiente apartado, se explicará la pertinencia de nuestro trabajo de investigación, presentando qué aspectos lo justifican y qué aportaría a la comunidad en investigación de didáctica de la matemática.

1.2 Justificación del trabajo de investigación

En el documento del nuevo Currículo Nacional, Perú (2017), en el apartado IV, se describe las competencias, capacidades y estándares de aprendizaje nacionales de la educación básica, en donde señala que un estudiante que se encuentre en el ciclo VII, del tercero al quinto grado de secundaria, debe ser competente de resolver problemas de cantidad, problemas referidos a pequeñas y grandes cantidades, de magnitudes o de intercambios de tipo financiero traduciéndolas en expresiones racionales e irracionales, realizando operaciones con ellas y expresando su comprensión de las propiedades que tienen dichos números. Además, menciona que se espera que un estudiante ubicado en un nivel destacado comprenda sobre los números irracionales. Por ello, se considera que la elección del objeto matemático número irracional, como foco de estudio, es pertinente, puesto que es un concepto considerado por la educación básica del Perú para su enseñanza.

Por otro lado, en la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas, hay una preocupación por conocer los diferentes significados que tienen los diferentes objetos matemáticos, pues ello permite una mejor comprensión acerca del mismo objeto, poder diferenciarlos de otros objetos, reconocerlos en sus diferentes representaciones y establecer relaciones entre sus diferentes significados así como con otros objetos. Siguiendo esa misma línea, se entiende que estudiar e investigar sobre los diferentes significados de número irracional justifica como pertinente nuestro trabajo, ya que una investigación de este objeto matemático aportaría a la comunidad de la didáctica de las matemáticas.

En nuestra búsqueda de investigaciones sobre número irracional, se han encontrado muchos estudios, como las realizadas por Rezende y Ignatius (2013), Herrera (2010), Crespo (2009), cuyo foco de atención son las dificultades y conflictos cognitivos que presentan los estudiantes en la escuela de nivel medio, asimismo, se han encontrado investigaciones como la de Pommer (2012) quien hace una propuesta de actividades y tareas para introducir los números irracionales. Sin embargo, en relación a investigaciones centradas en los significados de número irracional, solo se encontraron trabajos como el de Konic et al. (2014) sobre los significados del número irracional π y el desarrollado por Reina et al. (2012) sobre los significados de número irracional. No obstante, de ambas investigaciones, se puede decir que falta explicitar algunos puntos sobre las tareas que involucre al número irracional, en el caso del trabajo de Reina et al. (2012), lo mismo que en el artículo de Konic et al. (2014) sobre π, donde solo menciona las situaciones problemáticas donde emerge π, mas no muestra en detalle las tareas asociadas a él.

Tomando en consideración lo descrito en el párrafo anterior, nuestro trabajo es relevante para la comunidad en investigación matemática, pues nuestro estudio pretende hacer explícito cada uno de los significados y las tareas que estén asociados al número irracional, sobre todo el trabajo realizado por Reina et al. (2012), ya que es una primera aproximación a los diferentes significados de número irracional. También, teniendo en cuenta que falta detallar más las diferentes problemáticas y situaciones que dieron origen a los números irracionales, se pretende ampliar o, en todo caso, complementar lo ya hecho por dichos autores, explicitando las situaciones problemáticas, los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos y el lenguaje usados en cada tarea asociada al número irracional.

Del mismo modo, identificar los diferentes significados de número irracional nos permitirá conocer cuáles son los significados que presentan los libros empleados en la escuela secundaria peruana y si estos presentan tareas significativas para abordar los números irracionales. En esa línea, Astudillo y Sierra (2004) (citados por

Sánchez y Valdivé, 2011) señalan que los textos escolares constituyen un medio de transmisión de conocimiento matemático y que es reflejo de las diferentes manipulaciones de los contenidos a lo largo del tiempo, debido a que ellos presentan diferentes propuestas con otros tipos de problemas a las siguientes generaciones. Por tal razón, se considera que nuestro trabajo aportará a la comunidad de investigación en didáctica de la matemática, pues uno de nuestros objetivos a desarrollar es analizar los significados pretendidos en los textos didácticos empleados en la secundaria peruana y si estos están en correspondencia con los significados de número irracional.

Otra de las implicancias de este trabajo, podría ser la formación de profesores, ya que, tal como señalan Pino (2010) y Reina et al. (2012), la construcción de los significados parciales de un objeto matemático permite realizar investigaciones sobre los conocimientos que debe tener un profesor sobre un determinado objeto matemático para su idoneidad en la enseñanza. Si bien el foco de esta investigación no son los conocimientos que debe tener un profesor, consideramos que nuestro trabajo sería un aporte para futuras investigaciones interesadas en ese aspecto.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

Por lo expuesto anteriormente, el interés de esta investigación radica en determinar en qué medida los problemas propuestos en los textos escolares de la secundaria peruana son contextos adecuados para introducir y emplear la noción de los números irracionales, así también cuestionar si la secundaria es el nivel educativo en el que deben de abordarse. Asimismo, para realizar este estudio, se hará uso de algunas herramientas que proporciona el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.

Por lo mencionado en el párrafo anterior, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Son pertinentes los problemas planteados en los textos didácticos, empleados en la educación secundaria, para introducir los números irracionales?

Para poder responder a dicha pregunta, nos planteamos como objetivo general:

- Identificar aquellas tareas o problemas que justificarían el empleo de número irracional en la educación básica y analizar si estas tienen relación con las que se abordan en los textos didácticos empleados actualmente

Para ello, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los diferentes significados de referencia de número irracional a través de un estudio epistemológico
- Reconocer aspectos que caracterizan la naturaleza del número irracional
- Identificar en qué medida las tareas de los textos didácticos empleados actualmente consideran algunos de los aspectos identificados previamente

CAPÍTULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Con la finalidad de identificar qué tareas requieren de la noción de número irracional, nos hemos propuesto identificar los diferentes significados que tiene este conjunto numérico. Para identificar los significados de número irracional, en nuestra investigación, usaremos resultados de investigaciones históricos epistemológicos, como lo realizado por González (2008), Murillo (2014), Bergé (2004), Havil (2012) y otras más. Se ha adoptado algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Este enfoque brinda las herramientas necesarias para por poder construir los significados parciales de número irracional y la reunión de estos significados parciales contribuirán a la construcción del holosignificado de número irracional. En este capítulo, se presenta y describe las herramientas que nos proporciona el EOS para alcanzar dicho objetivo.

2.1 El enfoque ontosemiótico de la cognición e Instrucción Matemática

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) ha sido desarrollado por Godino y colaboradores, desde el año 1994 hasta la actualidad, motivados por encontrar, adoptar y articular, desde un punto de vista global, los diferentes principios teóricos del conocimiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje (Godino, 2014).

Este enfoque, según Godino, Batanero y Font (2009), parte de la formulación de una ontología de los objetos matemáticos, considerando tres aspectos de la matemática, que son la actividad de resolución de problemas, el uso de un lenguaje simbólico y el sistema de conceptos organizados de manera lógica.

Godino et al. (2009) consideran a una *situación problema* como noción primaria que permite definir los conceptos teóricos de *sistemas de prácticas*, *objet*o y la de *significado*. Estos tres conceptos teóricos planteados son considerados para esta investigación, puesto que son herramientas que nos permiten analizar al objeto matemático número irracional. A continuación, se describirá estas tres nociones de manera breve.

2.1.1 Sistemas de prácticas

El EOS considera definir la noción de sistemas de prácticas, porque ello le permite resumir las características que tiene una actividad matemática. Godino y Batanero (1994) define *práctica matemática* como “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validar la solución o generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 334).

Asimismo, según estos autores, una práctica matemática no sigue solo un proceso lineal y deductivo, sino muchas veces en el intento de la obtención de soluciones a dichos problemas matemáticos se presentan errores, ensayos y procedimientos ineficaces que posteriormente son descartados, lo que lleva a la práctica matemática a una adecuación organizativa. Es por ello que definen como *práctica significativa* “si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otra solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p.335).

Del mismo modo, el EOS propone que las situaciones problema en general son socialmente compartidas. Es decir, las prácticas matemáticas significativas pueden ser desarrolladas por una persona o en el seno de una institución (entendiéndose por institución al grupo de personas que están involucradas en una misma situación problemática). Es por ello que el EOS clasifica los sistemas de prácticas matemáticas significativas en dos tipos, *las personales y las institucionales* (Godino y Batanero, 1994). En el siguiente apartado, se describirá los objetos que emergen e intervienen en los sistemas de prácticas.

2.1.2 Objetos emergentes e intervinientes

El EOS está basado en supuestos epistemológicos y pragmatistas. En tal sentido, Godino (2014) afirma que los objetos matemáticos emergen de las prácticas matemáticas y que los objetos que intervienen pueden ser ostensivos; es decir símbolos, gráficos, etc., y no ostensivos, que vendrían a ser los conceptos, proposiciones, etc., cuya representación pueden ser de manera textual, oral, gráfica e, inclusive, de manera gestual. También, menciona que de los sistemas de prácticas matemáticas operatorias y discursivas hay una nueva emergencia de objetos que provienen de las mismas, y que estas llevan a su organización y su estructura.

Tal como se refirió líneas arriba sobre noción de práctica personal e institucional, los objetos que emergen en cada una de dichas prácticas se definen como *objetos personales* si emergen de la práctica matemática de una persona y *objetos institucionales* si ellas emergen en el seno de una práctica matemática institucional (Godino, 2014).

Asimismo, Godino et al. (2009) refieren que, la consecuencia de que un agente realice y evalúe una práctica matemática, este activa un conjunto conformado por situaciones problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. De esta manera, propone seis tipos de entidades a las cuales denomina *objetos matemáticos primarios* y los clasifica de la siguiente manera:

- *Elementos lingüísticos* (términos, enunciados, notaciones, gráficos,…) en los diferentes registros (escritos, orales, gestuales,…)
- *Situaciones-Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios,…)
- *Conceptos-Definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, número irracional,…)
- *Proposiciones* (enunciados conceptuales,…)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,…)

También, Godino et al. (2009) mencionan que estos objetos se van organizando en entidades de mayor complejidad, por ejemplo, sistemas conceptuales, teorías, etc. Los objetos primarios, afirman los autores, dan una visión más amplia de lo que tradicionalmente se concebía, es decir, en entidades conceptuales y procedimentales, las cuales no son suficientes para poder describir a aquellos objetos que intervienen y emergen en la práctica matemática. En ese sentido, las situaciones problema son causantes del origen de la actividad matemática. El lenguaje representa a las otras entidades, además, que sirve como herramienta de acción. Los argumentos son aquellos que justifican los diferentes procedimientos y proposiciones que van relacionando a los conceptos entre sí.

Cabe mencionar que la articulación de los objetos primarios, impulsados por un agente en la práctica matemática, activa lo que se denomina *configuración* que Godino et al. (2009) definen como las redes de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas, y las relaciones que se van estableciendo entre los mismos. Estas pueden ser *configuraciones cognitivas* siempre que la red de dichos objetos sean personales o *configuraciones epistémicas* cuando la red de objetos sean institucionales. La figura 1 muestra la articulación de los objetos primarios.

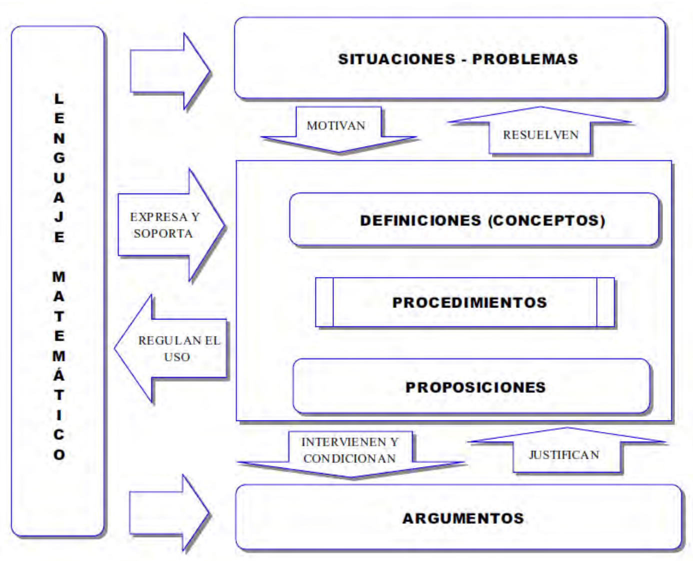


Figura 1. Configuración de objetos primarios
Fuente: Godino et al. (2009, p. 7)

Por otro lado, queda describir la noción de *significado*. En la siguiente sección, se explicitará esta noción, puesto que será utilizada de manera prioritaria en esta investigación.

2.1.3 Significados

El EOS en respuesta a la pregunta ¿qué significa o representa un objeto matemático? propone como respuesta y define que el *significado* de un objeto matemático es el sistema de prácticas que realiza una persona o una institución para resolver un tipo de situaciones problema en donde dicho objeto emerge. De acuerdo a lo mencionado, se denominará *significado personal* en caso el sistema de prácticas es desarrollado por una persona o *significado institucional* si las prácticas son desarrolladas en el seno institucional. En ese sentido, el EOS considera sus supuestos en principios epistemológicos y pragmáticos (Godino et al., 2009).

Por otro lado, la relatividad de los significados (personales o institucionales) conduce a tipificar los significados. Para ello, Godino et al. (2009) propone los siguientes tipos de significados institucionales:

- Implementado: proceso de estudio específico es el sistema de prácticas implementadas por el docente
- Evaluado: subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio
- Referencial: sistema de prácticas que se utiliza como referencia para elaborar el significado pretendido

Este último tipo de significado (referencial) será parte del significado holístico (global) del objeto matemático, pues el significado global, *holosignificado*, es el conjunto de los diferentes significados que surgen de distintos sistemas de prácticas. Además, obtener dicho significado global requiere realizar un estudio histórico–epistemológico del objeto en cuestión. Sin embargo, en nuestro estudio, profundizaremos resultados de investigaciones histórico–epistemológico sobre los números irracionales.

Con respecto de los significados personales el EOS, propone los siguientes tipos:

- Global: es la totalidad del sistema de prácticas personales que manifiesta el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: es lo que efectivamente expresa el sujeto del sistema de prácticas donde se incluyen tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: estas son lo que manifiesta el sujeto de las prácticas en conformidad con las pautas establecidas por la institución.

La figura 2 muestra en resumen lo antes descrito.

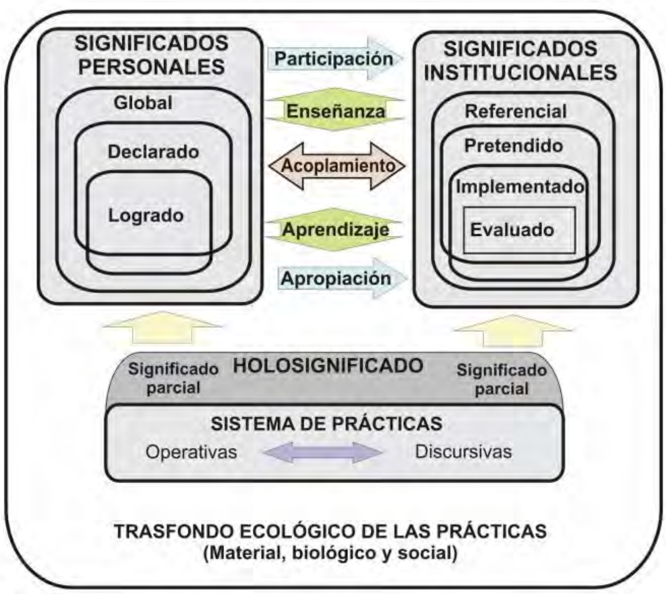


Figura 2. Tipos de significados
Fuente: Godino et al. (2009, p.6)

Como en esta investigación deseamos describir los diferentes significados de número irracional, se utilizará la noción de configuración epistémica para luego reconstruir el holosignificado de número irracional, el cual es entendido como el conjunto de los significados parciales que resultan de las articulaciones de los seis objetos primarios antes descritos, ver figura 3.

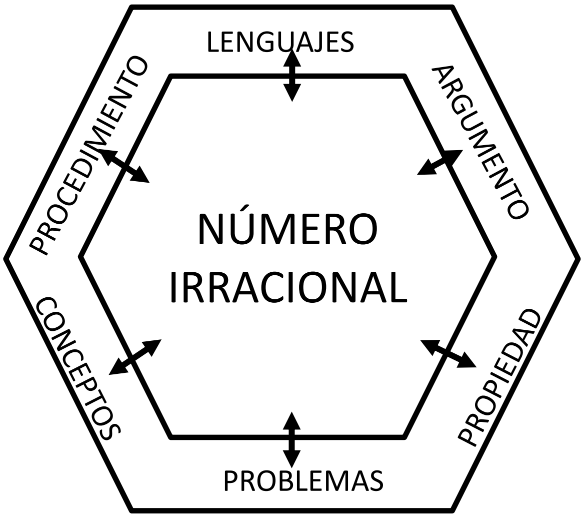


Figura 3. Configuración epistémica de número irracional
Adaptado de Godino et al. (2007, p 13)

2.2 Método de Investigación

Los aspectos metodológicos de nuestra investigación están guiados por el trabajo de Pino (2010), quien afirma que un trabajo de reconstrucción de los significados de un objeto matemático tiene un carácter del tipo cualitativo basado en la búsqueda y análisis de documentos e investigaciones relativas a su evolución histórica.

Con respecto a la investigación cualitativa, Martínez (2006) menciona que este tipo de investigación consiste en identificar la naturaleza y la estructura de las realidades de tal forma que se logren dar con la razón de su comportamiento y manifestaciones. Es decir, se trata del estudio de un todo, el cual conforma una unidad de análisis y que dicho estudio hace que ese algo quede definido como lo que es, ya sea una persona, una entidad social, étnica, etc.

El propósito de nuestra investigación es cuestionar si los problemas planteados en los textos didácticos que se emplean en la secundaria peruana sobre los números irracionales corresponden con aspectos inherentes de este objeto matemático. En ese sentido, nuestra investigación está enmarcada en un estudio de tipo cualitativo, puesto que para cuestionar los problemas planteados en los textos didácticos debemos de identificar aquellas situaciones problemáticas donde emergen los objetos primarios (situaciones problemas, definiciones y conceptos, lenguaje, propiedades y proposiciones, argumentos, y los procedimientos) asociadas al número irracional.

A partir de la articulación de estos objetos primarios, debemos reconstruir los diferentes significados del número irracional, identificar y seleccionar aquellos aspectos de la razón de ser del número irracional, luego, identificar qué tipo de tareas podrían ser consideradas en la enseñanza de este conjunto numérico en la secundaria peruana teniendo en cuenta los significados pretendidos en la institución y, finalmente, contrastar si las tareas presentes en los textos empleados en la Educación Básica del Perú se corresponden con los aspectos antes seleccionados.

En ese sentido, para alcanzar nuestro objetivo, nos debemos basar en la búsqueda de toda información necesaria, y, luego, estructurarlo de manera lógica y coherente, tal como refiere Martínez (2006). Es decir, nuestro trabajo se encuentra sujeto a la exploración y levantamiento de información bibliográfica, ya que para identificar los significados de número irracional nos basamos en la exploración de investigaciones históricas epistemológicas sobre el número irracional, de igual forma, en la revisión y el análisis de los textos didácticos.

Es así que, por lo mencionado en el párrafo anterior, nuestra investigación es de tipo bibliográfico. Al respecto, Gil (2002) afirma que las investigaciones bibliográficas están basadas en la exploración de materiales ya existentes y constituidos, como libros, artículos e investigaciones científicas. Además, para el desarrollo de este tipo de investigación, según el autor, se requiere de ciertas etapas, las cuales no necesariamente se sigue en orden estricto, dichas etapas son *la elección del tema de investigación*, *levantamiento bibliográfico*, *elaboración de plan*, *búsqueda de fuentes*, *organización de la investigación*, y, *finalmente, la redacción*.

A partir de lo expuesto, para alcanzar los objetivos de nuestra investigación, nos hemos planteado seguir tres etapas, cada una de ellas relacionadas con los objetivos específicos propuestos. A continuación, se mostrarán las etapas que se llevará a cabo para el desarrollo de este estudio:

- Etapa 1: Identificación de los significados de número irracional

  En esta primera etapa, se describirán los objetos primarios emergentes (situaciones problemas, definiciones y conceptos, lenguaje, propiedades y proposiciones, argumentos, y procedimientos) en la actividad matemática donde está inmerso el concepto de número irracional. Es decir, se describirá las configuraciones epistémicas asociadas al número irracional y, a partir de estas configuraciones, identificar los diferentes significados de este objeto matemático. Esta identificación permitirá, en la etapa 2, caracterizar aspectos sobre la naturaleza del número irracional a los cuales está asociado. A partir de ello, se examinará cuáles pueden ser consideradas para introducir el concepto de número irracional en la educación básica del Perú.

  Para la identificación y descripción de los significados de número irracional, se desarrollará los siguientes puntos:

  - Identificación de las situaciones problemáticas

    En este primer punto, se hace una revisión y análisis de investigaciones de corte histórico epistemológico relacionadas con el conjunto de los números irracionales. El objetivo es identificar y describir aquellos problemas donde aparece el concepto de número irracional, en otras palabras, identificar y describir cómo este concepto ha ido apareciendo y evolucionando a lo largo de la historia de la matemática.

- Reconstrucción de los significados de número irracional

  A partir de la identificación de las situaciones problemáticas, donde aparece el concepto número irracional, se procederá a la descripción de los seis objetos primarios (situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que emergen en la búsqueda de la solución a dichas situaciones problemáticas. La articulación de estos objetos primarios conformará, lo que el EOS denomina, la configuración epistémica. Esta, a su vez, permitirá asociar un significado al número irracional.

El desarrollo de estos dos aspectos, en esta primera etapa, admitirá alcanzar nuestro primer objetivo específico, relacionado con la construcción de un significado de referencia para los irracionales.

A continuación, se describirá la segunda etapa planteada en este estudio.

- Etapa 2: Descripción de los aspectos asociados a la naturaleza del número irracional

  Como hemos señalado, identificar los significados del número irracional está relacionado a los objetos primarios que emergen al buscar solución a una problemática que da origen al número irracional. En tal sentido, estos objetos primarios permitirán examinar algunos de los aspectos a los cuales el número irracional está asociado. Asimismo, estos aspectos permitirán ver qué tipos de tareas toman en cuenta dichos aspectos y así identificar cuáles podrían ser consideradas para la enseñanza del número irracional.

  Dicho de otro modo, una vez identificada los aspectos inherentes, propios, que caracterizan al número irracional, se podrá sugerir qué tipo de tareas deberían ser adecuadas para introducir el concepto de número irracional. Es decir, en esta segunda etapa, se detallará qué tareas o qué aspectos deberían tomarse en cuenta para ser consideradas como apropiadas para introducir los números irracionales en la educación básica regular del Perú.

Así, la selección de los aspectos inherentes del número irracional y la sugerencia de tareas relevantes serán de utilidad para contrastar con las tareas propuestas en los textos escolares en la introducción de los números irracionales.

La propuesta de tareas relevantes es atribuida a los significados del número irracional y a los seis objetos primarios descritas en la etapa 1, pues a partir de ellas se podrá sugerir los tipos de tareas que podrían ser las adecuadas para introducir el concepto de número irracional. Asimismo, esta selección facilitará alcanzar el segundo objetivo específico de nuestra investigación.

Por otro lado, una vez hecha la caracterización de las tareas relevantes, se procederá al análisis de los textos didácticos. Este análisis será la tercera y última etapa de nuestro estudio.

- Etapa 3: Análisis de las tareas propuestos en los textos didácticos relacionadas al número irracional

  En esta última etapa, se analizará los textos didácticos empleados en la educación básica regular donde se introducen el conjunto de los números irracionales y donde hacen uso de este conjunto numérico en la solución de problemas. Este análisis se realizará describiendo los objetos primarios emergentes en las tareas propuestas, esto con el propósito de identificar si aquellos aspectos, tenidos en cuenta en los textos, están en concordancia a los identificados en la etapa 2. Es decir, al identificar y contrastar los aspectos atribuidos en los textos didácticos con los hallados en la etapa 2, se podrá cuestionar si las tareas planteadas en los textos didácticos son pertinentes para introducir los números irracionales. Este cuestionamiento permitirá responder y alcanzar el objetivo general de nuestra tesis.

  Asimismo, los textos que serán analizados en esta etapa son seleccionados de acuerdo a lo mencionado en el nuevo currículo nacional. Es decir, se analizará aquellos textos de los grados o niveles correspondientes donde se desarrolla el concepto de número irracional. Además, los textos a analizar son aquellos que el Ministerio de Educación entrega de manera gratuita a los estudiantes de todos los centros de educativos del Perú.

Al finalizar estas tres etapas, relacionadas a nuestros objetivos específicos, estaremos en las condiciones de responder a nuestra pregunta de investigación y con ello ver la pertinencia de las tareas presentadas en los textos didácticos.

A continuación, se detallará explícitamente los significados parciales del número irracional, por medio de las herramientas del EOS y teniendo en cuenta su evolución.

CAPÍTULO III: RECONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LOS IRRACIONALES

En este capítulo, se realiza un estudio a investigaciones de tipo histórico epistemológico con el objetivo de analizar e identificar los sistema de prácticas, los objetos que emergieron de dichas prácticas al resolver situaciones problemáticas que conllevaron a su origen y al desarrollo del objeto matemático número irracional. A partir de este análisis, se pretende alcanzar el primer objetivo que nos hemos planteado, es decir, identificar los diferentes significados de referencia de número irracional.

En ese sentido, nos hemos propuesto describir aquellos objetos que emergieron en las situaciones problemáticas donde el objeto matemático número irracional estuvo inmerso de manera implícita, describiendo los conceptos que introdujeron el lenguaje que utilizaron, las proposiciones que emplearon sobre los conceptos, los procedimientos que utilizaron teniendo en cuenta los argumentos, en la cual se basaron para justificar los procedimientos que fueron empleados en la solución de sus problemas, es decir, empleando las herramientas que ofrece el EOS.

En este estudio, se está considerando (como una primera aproximación del significado del número irracional) la investigación realizada por Reina et al. (2012) sobre las configuraciones epistémicas del número irracional, donde incluye cuatro momentos importantes en la construcción del significado de número irracional, a los que denominó los inconmensurables, proporcionalidad e inconmensurabilidad, aproximación de irracionales, y la irracionalidad. Es necesario aclarar que del análisis de estos cuatro momentos, los autores describen cinco configuraciones epistémicas. Sin embargo, en nuestra investigación, se describirá cinco momentos de las que se desprenden 5 configuraciones epistémicas del número irracional.

Analizados los resultados de estudios históricos epistemológicos que involucraron al número irracional, en el apartado 3.1, se presentará las diferentes problemáticas que permitieron que emerja el concepto de número irracional. En el apartado 3.2, se realiza la descripción de los 5 significados parciales de número irracional, que en lenguaje del EOS, serán nuestras 5 configuraciones epistémicas de número irracional, las cuales hemos denominado *1) significado de número irracional como* *razón conmensurable, 2) significado de número irracional como razón inconmensurable, 3) significado de número irracional como aproximación por racionales, 4) significado de número irracional como número, y 5) significado de número irracional como algebraico o trascendente*. Estas configuraciones epistémicas, significados parciales, se han determinado teniendo en cuenta que cada una de ellas está involucrado a diferentes situaciones problema, y que dos configuraciones son diferentes siempre que los objetos primarios han variado; es decir, que las definiciones, proposiciones, argumentaciones, situaciones problemas y los lenguajes empleados son distintas en cada una de estas configuraciones (Pino, 2010).

3.1 Estudio histórico epistemológico de los irracionales

A continuación, se explican los diferentes momentos históricos de cómo el objeto matemático número irracional se ha desarrollado a lo largo de la historia matemática y, también, se considera aquellos sistema de prácticas que se realizaron para resolver diferentes problemas que se relacionaron con el número irracional.

Teniendo en cuenta el trabajo de Reina et al. (2012), se considera cinco momentos importantes en el desarrollo del número irracional, desde el origen de las magnitudes inconmensurables desarrolladas en la matemática de la cultura griega; la evolución y reconocimiento de los inconmensurables; pasando por la matemática del renacimiento, donde el número irracional está asociada a las aproximaciones por medio de las fracciones continuas; seguido de la crisis de los fundamentos de la matemática, donde destacan los aportes de Dedekind y Cantor; concluyendo con la clasificación del conjunto de los números irracionales como números algebraicos y trascendentes.

3.1.1 Los inconmensurables

Según refiere Tovar (2011), en Grecia del siglo V a.C, se cultivaban las matemáticas y era la escuela pitagórica quien más sobresalía, puesto que dicha escuela tenía un carácter religioso basado en el principio “todo es número”. Las matemáticas que practicaban los pitagóricos estaban basadas en hechos concretos, como por ejemplo, las cuerdas sonoras, cuerdas que cortadas a cierta proporción emitían sonidos placenteros al oído. Esta práctica les generó la idea que cualquier par de segmentos siempre tienen una parte en común. Euclides, en su libro X, los define como magnitudes conmensurables (Euclides, trad., 1576), en otros términos, que todo par de segmentos es múltiplo de una misma unidad. Así, con la ayuda de esta unidad de medida, formaban las denominadas razones, las cuales les servía para comparar magnitudes homogéneas.

En tal sentido, Oller y Gairín (2013) afirman que la razón entre dos magnitudes eran concebidos a partir del proceso llamado antifairesis, es decir, para obtener la medida en común (unidad) de dos magnitudes utilizaban dicha técnica. Este procedimiento consiste en restarle al mayor el menor de las longitudes, tantas veces hasta que la diferencia que quede sea menor a la menor de las longitudes iniciales. Luego, considerando estas dos últimas longitudes como iniciales, se repite el proceso hasta que ya no se pueda seguir restando. Por ejemplo, en términos numéricos, calculemos por medio del antifairesis de qué número (de qué unidad) son múltiplos 32 y 6.

El procedimiento del antifairesis es como sigue:

$$\left(32,6\right) \Rightarrow (26,6) \Rightarrow (20,6) \Rightarrow (14,6) \Rightarrow (8,6) \Rightarrow (2,6)$$

Luego:

$$\left(6,2\right) \Rightarrow (4,2) \Rightarrow (2,2) \Rightarrow (0,2)$$

Entonces, 32 y 6 son múltiplos de 2; es decir, 2 es la unidad en común de 32 y 6. Con ello, la razón de 32 a 6 es como 16 a 3, pues 32 contiene dieciséis veces a 2 y 6 contiene tres veces a 2.

Por otro lado, respecto al descubrimiento de la existencia de magnitudes no conmensurables, González (2008) menciona que se manejan dos hipótesis posibles de cómo pudieron descubrirse. Según este autor, la primera es atribuida a Hipaso de Metaponto, al intentar encontrar, de manera empírica (usando la geometría), la unidad en común del lado y la diagonal de un pentágono regular. Esta hipótesis se plantea porque estaría más acorde con los trabajos que realizaban los griegos entorno al *pentagrama místico pitagórico* (estrella pentagonal formado por las diagonales de un pentágono regular).

La segunda hipótesis que se maneja es que los inconmensurables fueron descubiertos al intentar encontrar la unidad en común del lado de un cuadrado y su diagonal. Esta hipótesis está asociada a trabajos con la *duplicación del cuadrado* (duplicar el área del cuadrado construyendo un nuevo cuadrado teniendo como lado la diagonal del cuadrado inicial). De igual forma, Gonzales (2008) señala que la primera hipótesis sería la que tiene mayor aceptación.

En ese sentido, los inconmensurables fueron descubiertos al intentar obtener la unidad en común de la diagonal y el lado de un pentágono, y el procedimiento empleado fue el método de la antifairesis. A continuación, se describirá dicho procedimiento:

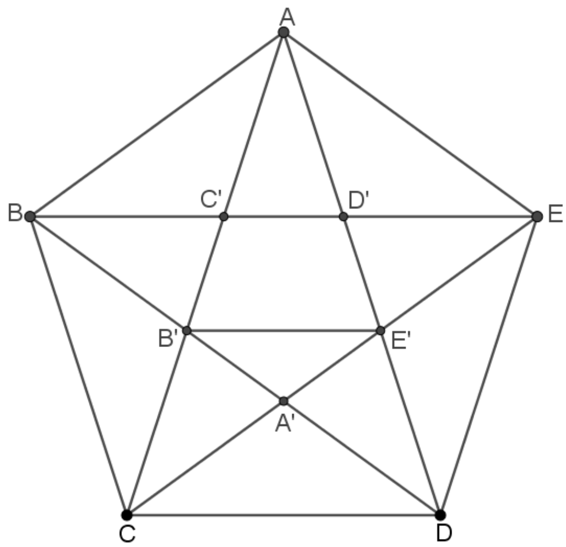


Figura 4. Inconmensurabilidad de lado y la diagonal
Fuente: (Tovar, 2011, p. 10)

De la figura 4 se tiene que:

$DEAB'$ es un paralelogramo ($DE = AB'$), entonces $AB = AB'$.

Como $AC > AB \Rightarrow CB' = AC - AB$.

Como $AB > CB' \Rightarrow B'C' = AB - CB'$, pues $AC' = CB'$.

Ahora quitamos $B'C'$ a CB', pero $CB' = B'E'$, que es lo mismo que quitar $B'C'$ a $B'E'$; es decir, empezaríamos a buscar la razón entre el lado y la diagonal del nuevo pentágono obtenido $A'B'C'D'E'$. Esto nos llevaría, al realizar el mismo procedimiento, a obtener otro pentágono más pequeño que $A'B'C'D'E'$ y si se continua obtendríamos pentágonos cada vez más pequeños, lo que implica realizar infinitas veces el mismo procedimiento sin conseguir encontrar la razón entre el lado y la diagonal del pentágono. Dicho de otro modo, no se podría obtener una unidad de manera concreta (empírica), ya que cada vez que se realicen las restas la longitud de los segmentos se irán haciendo cada vez más pequeños. Por lo tanto, ambos segmentos son inconmensurables.

Vemos en este problema cómo el número irracional está implícitamente inmerso. En efecto, escribiendo con la notación actual, observamos en la figura 4 que los triángulos BAE y EAD' son semejantes (basta con completar ángulos), y como consecuencia de ello tendremos que:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AD'}$$

Luego, si hacemos $BD' = a$ y $D'E = b$; y sabiendo que $D'E = AD'$ se tiene:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow \quad ab + b^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - ab$$

$$b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$5\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{b}{2}(1+\sqrt{5}) \quad \vee \quad a = \frac{b}{2}(1-\sqrt{5})$$

Es decir, al intentar obtener dicha razón, notamos que los griegos trabajaban implícitamente con números irracionales. En términos actuales, dicho número irracional es $\sqrt{5}$. Por lo tanto, según esta hipótesis, $\sqrt{5}$ sería uno de los primeros números irracionales que se originaron.

En tanto a la segunda hipótesis del descubrimiento de segmentos inconmensurables, al tratar de encontrar la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado por medio del antifairesis, el procedimiento sería como el que describiremos a continuación.

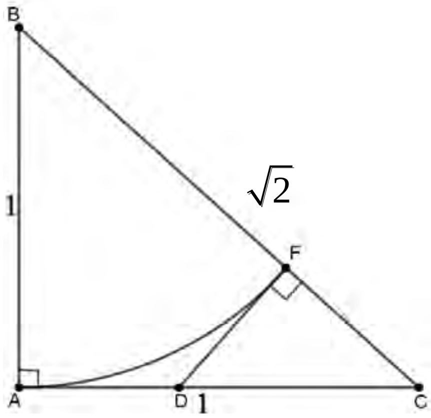


Figura 5. Inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado
Fuente: (González, 2008, p. 106)

Como el objetivo en este problema es encontrar una misma unidad tanto para el lado del cuadrado como de la diagonal, se toma la mitad de un cuadrado de lado 1.

Luego, sea F, ver figura 5, el punto de intersección entre el arco AF del sector circular de centro en B y radio 1 con la diagonal BC, entonces, se tiene. Por el método de la antifairesis, se debe de obtener la diferencia entre BA y BC que es lo mismo que la diferencia entre BF y BC.

Luego, se traza la tangente DF en el punto F, de aquí $AD = FD$, entonces se tiene lo siguiente:

$$FC = BC - BF = BC - BA \ \ldots(*)$$

No obstante, $FD = FC$, pues el triángulo DFC es isósceles.

De $(*)$ se desprende que:

$$DC = AC - AD = AC - FD = AC - FC \ \ldots(**)$$

Así, se obtiene un nuevo triángulo rectángulo, de la cual se necesita adquirir una misma unidad de su lado con la hipotenusa. Si hacemos nuevamente este procedimiento, como el primer rectángulo, se obtendría un triángulo nuevo, pero más pequeño. Es decir, se tendría que repetir el mismo proceso indefinidamente y, al igual que en el caso del pentágono, sería imposible conseguirlo de manera concreta (empírica), debido a que las longitudes de la hipotenusa y el cateto se van haciendo cada vez más pequeños. Por lo tanto, ambas longitudes no son conmensurables.

Además, se puede notar que en este problema aparece de manera implícita el número irracional $\sqrt{2}$.

La demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado es equivalente a decir que $\sqrt{2}$ es irracional. Asimismo, la prueba en el lenguaje actual se realiza mediante el razonamiento de reducción al absurdo y la diferenciación entre número par e impar, algo que Aristóteles ya antes había hecho referencia (Gonzales, 2008). La prueba es la siguiente:

Supongamos que existen $p\ y\ q$ enteros primos entre sí, tales que:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2,$$

Es decir, p^2 es par. Esto implica que p también es par ($p = 2k\ , k \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow (2k)^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \ \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

Es decir, q^2 es par y, por lo tanto, q es par ($p = 2r\ , r \in \mathbb{Z}$)

Como se puede ver, esto contradice al hecho que p y q son primos entre sí, por ello, no existe un racional tal que su cuadrado sea 2.

Por otra parte, habría otro problema geométrico donde se pudieron descubrir a los inconmensurables. Este problema estaría asociado a trabajos que tuvieron que ver con la *sección áurea*. Al respecto, Gonzales (2008) afirma que esta noción aparece en el libro VI de los Elementos en su definición 3, donde manifiesta que “se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando un segmento total es a la parte mayor como la mayor es a la menor”(p. 107).

Figura 6. Media y extrema de un segmento

En la figura 6, el punto M divide en media y extrema razón si se cumple que:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$$

Extremiana, Hernández y Rivas (2005) muestran que el punto M se obtiene de la siguiente manera:

- Con una regla trazar el segmento AM y sobre él trazar un cuadrado.
- Encontrar el punto medio C del segmento AM. Ello se logra trazando una perpendicular a AM pasando por la intersección de las circunferencias con un mismo radio y con centro A y B.
- Trazar el segmento CE
- Trazar una circunferencia con centro en C y radio CE
- Trazar la prolongación de *AM* hasta que corte a la circunferencia anterior en el punto B (ver figura 7)

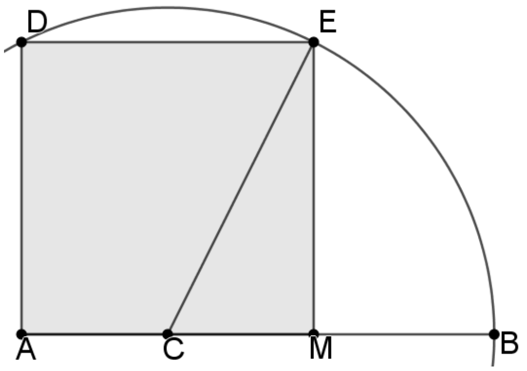


Figura 7. Obtención de la división en media y extrema razón
Adaptación de Extremiana et al. (2005, p. 155)

La demostración de que el punto M corta en media y extrema razón es una aplicación del teorema de Thales, y se presenta de la siguiente forma:

- Prolongar el segmento AM hasta que corte en el punto G, intersección con la circunferencia de centro C y radio CB
- Trazar una circunferencia con centro A y radio AG que corta en H al lado AD del cuadrado, además, $AG = MB$
- Se tiene los segmentos paralelos HM y DB. Por el teorema de Thales o en todo caso aplicando la proposición 11 del libro VI de Euclides (dadas dos rectas hallar la tercera proporcional), ver figura 8, se tiene:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AH}; \quad \text{es decir} \quad \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Como se puede observar, para encontrar el punto donde un segmento se corta en media y extrema razón, se utilizan procedimientos basados en construcciones y proposiciones geométricas, es decir, usan argumentos geométricos y algunos argumentos deductivos en base a resultados anteriores, como por ejemplo el teorema de Thales.

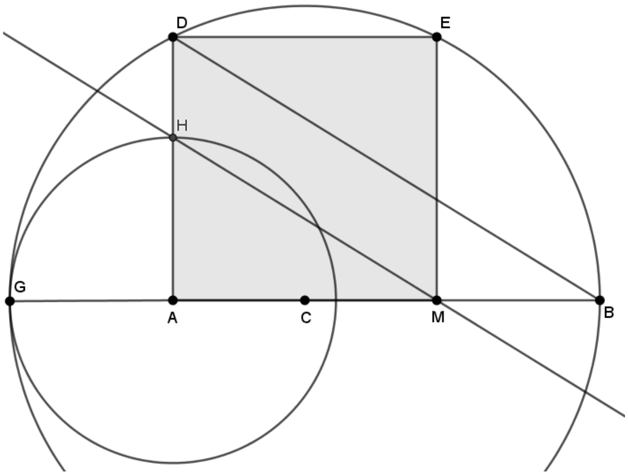


Figura 8. Demostración de la división en media y extrema razón

Para encontrar la razón $\frac{a}{b}$, en la proporción anterior, resolvamos $\frac{a}{b}=x$. Usando nuestro lenguaje actual (en términos algebraicos), se tendría:

$$x^2 - x - 1 = 0 \ ,$$

cuyas soluciones son las siguientes:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ ; \ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Dicho en otros términos, como consecuencia de esta actividad matemática, al dividir el segmento en media y extrema razón, se observa que también aparece de manera implícita un número irracional.

Por otro lado, en los Elementos de Euclides, se describen los conocimientos matemáticos de manera deductiva y con rigor. En su libro VI, Euclides, entre muchos otros aspectos de la geometría y la aritmética, muestra algunas definiciones y proposiciones como:

“Definición 3. Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor, como el mayor es al menor.

Proposición 1. Los triángulos y los paralelogramos que están debajo de una misma altura son entre sí como las bases” (Euclides, trad., 1576).

Mientras que en el libro V, Euclides nos muestra:

“Definición 5. Una razón es una determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

Definición 4. La proporción es la semejanza entre dos razones” (Euclides, trad., 1576).

De acuerdo a lo descrito, se ha puesto en evidencia que los griegos, dentro de su actividad matemática, venían trabajando con el número irracional, pero en un ámbito implícito. Esto significa que el número irracional no era concebido por los griegos, sin embargo, estaba presente en los problemas geométricos que resolvían. El inconmensurable se llama irracional, puesto que no es posible expresarlo como una razón de dos enteros, más aún porque se encuentra fuera del logos, es decir, fuera de la razón (Gonzales, 2008).

Cabe señalar que al descubrirse los inconmensurables, la matemática griega sufrió un estancamiento en su evolución, debido a que los resultados, que hasta entonces eran válidas, estaban basados en que todo par de segmento tenía una unidad en común. Es decir, para que la matemática griega evolucione, conllevaba a una reformulación en las definiciones y propiedades dejadas por la escuela pitagórica. Es así que, tiempo después, Eudoxo de Cnido, matemático de la escuela platónica, reformuló y encontró una manera para trabajar con los inconmensurables. En ese sentido, a partir del trabajo de Eudoxo, el número irracional emergerá de otros sistemas prácticas, como los que se describen en el siguiente apartado.

3.1.2 Proporcionalidad e inconmensurabilidad

La contradicción encontrada a la filosofía de la escuela pitagórica no solo haría que se remuevan las bases de sus ideas, sino también la búsqueda de replantearlas, sobre todo la idea de las razones y proporciones, para así poder encontrar un buen funcionamiento de su teoría, donde también se incluya a los segmentos inconmensurables.

Consideramos a modo de ejemplo la demostración de la proposición 1 del libro VI de los elementos de Euclides que dice “todos los triángulos con la misma altura son como a sus bases” (González 2008, p. 111). En otras palabras, el área de dos triángulos, a una misma altura, está en la misma razón que sus bases. Esta proposición quedaba afectada, ya que había la posibilidad de que las bases de los triángulos sean inconmensurables, es decir, no sería posible encontrar la razón entre las longitudes de dichas bases.

La demostración dada por la escuela pitagórica, basada en su definición de proporción (dos razones a/b y c/d son proporcionales, $a/b = c/d$, si existen m, n, p, q tal que $a = mp,\ b = mq,\ c = np,\ d = nq$), es como sigue a continuación:

Sean los triángulos ABC y ADE, cuyas bases son BC y DE, están ubicadas sobre la recta MN, ver figura 9. De acuerdo a la escuela pitagórica, BC y DE tienen una unidad en común. Así podemos decir que si GH es la unidad en común para ambos segmentos, entonces, GH está contenido m veces en BD y n veces en DE; es decir, los triángulos ABC y ADE quedan divididos en m y n triángulos pequeños. Además, como los triángulos están a una misma altura, todos tienen la misma área, de aquí se tiene que $S(ABC)/S(ADE) = BC/DE$, denotamos $S(ABC), S(ADE)$ como el área de dichos triángulos.

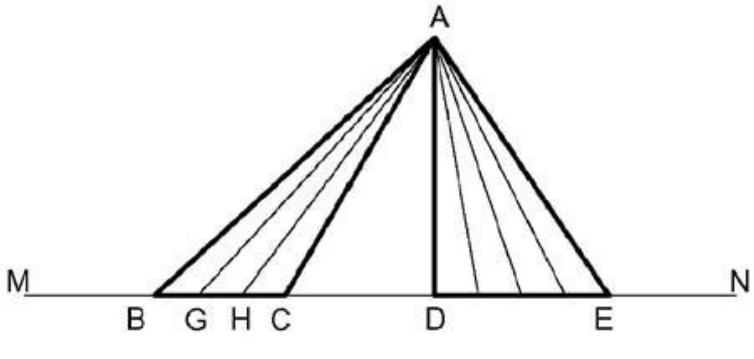


Figura 9. Proporcionalidad de las áreas de triángulos según Pitágoras
Fuente: González (2008)

Es claro que la demostración anterior debió ser replanteada, ya que la aparición de segmentos inconmensurables hacía inválida dicha prueba. Así, Eudoxo de Cnido redefine la igualdad de razones de la siguiente manera:

Dos razones a/b; c/d son proporcionales si para m y n enteros se tiene que:

$$na > mb \text{ y } nc > md \text{ o } na = mb \text{ y } nc = md \text{ o } na < mb \text{ y } nc < md$$

En ese sentido, con esta nueva forma de definición de proporcionalidad, proposición 1 del libro VI de los elementos de Euclides, "todos los triángulos con la misma altura son como a sus bases" (González, 2008, p. 111), sería demostrado sin considerar la naturaleza conmensurable o no conmensurable de las bases de dichos triángulos. La prueba de esta proposición es como sigue:

Sean los dos triángulos ABC y ADE a una misma altura, donde las bases se sientan sobre el segmento MN, ver figura 10.

Trazar segmentos con la misma longitud de BC a partir del vértice B y unir los puntos $B_2, B_3, ..., B_m$ mediante segmentos con el vértice A. Del mismo modo, trazar segmentos de igual longitud que DE y unir los puntos $E_2, E_3, ..., E_n$ con el vértice A.

Así, se tiene $B_mC = mBC$ y $DE_n = nDE$ y, en consecuencia, las áreas de los triángulos son $S(AB_mC) = mABC$ y $S(ADE_n) = nS(ADE)$.

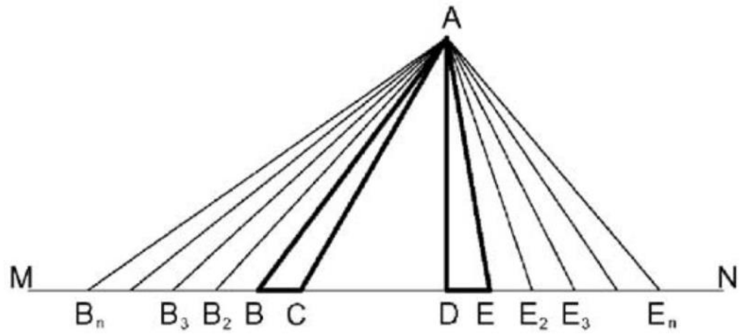


Figura 10. Proporcionalidad de las áreas de triángulos según Eudoxo
Fuente: González (2008)

Como ambos triángulos están a una misma altura, el que tenga mayor longitud en su base tendrá mayor área, así se tendría entonces que:

$$mBC > nDE \Rightarrow S(AB_mC) > S(ADE_n) \Rightarrow mS(ABC) > nS(ADE) \quad \text{o}$$

$$mBC = nDE \Rightarrow S(AB_mC) = S(ADE_n) \Rightarrow mS(ABC) = nS(ADE) \quad \text{o}$$

$$mBC < nDE \Rightarrow S(AB_mC) < S(ADE_n) \Rightarrow mS(ABC) < nS(ADE)$$

Es decir,

$$\frac{S(ABC)}{S(ADE)} = \frac{BC}{DE}$$

En ese sentido, con la nueva definición de proporcionalidad dada por Eudoxo, quedaban resuelto todas las proposiciones dejadas por el pitagorismo, cuyas demostraciones solo eran válidas para magnitudes conmensurables.

Sin embargo, aún quedaba algo pendiente por resolver, pues quedaba pendiente la comparación entre las figuras curvas y las rectilíneas. Este estudio también se le atribuye a Eudoxo (Boyer, 1987). Con respecto a lo antes mencionado, Eudoxo afirmaba “si existe una razón entre dos magnitudes, entonces existe un múltiplo de alguno de ellas tal que supere a la otra”. Este axioma, al cual hace alusión Eudoxo, sería un punto clave para la prueba de la proposición donde se señala que “las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros”. Es decir, escribiendo en nuestro lenguaje actual, si $a(\mathrm{C}_1)$, $a(\mathrm{C}_2)$ representan las áreas de dos círculos y $d_1 \; y \; d_2$ los diámetros de dichas circunferencias respectivamente, entonces se cumple que:

$$\frac{a(\mathrm{C}_1)}{d_1^2} = \frac{a(\mathrm{C}_2)}{d_2^2}$$

Notemos que, en esta proporción, se encuentra de manera implícita el valor de π, puesto que:

$$\frac{a(\mathrm{C}_1)}{d_1^2} = \frac{a(\mathrm{C}_2)}{d_2^2} = \frac{\pi r_2^2}{4r_2^2} = \frac{\pi}{4}$$

La prueba de esta proposición se hace por medio de reducción al absurdo y por el llamado “método de exhaución”. Los argumentos que hacen validar este método son en base a la siguiente proposición:

> Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor a su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos con ese proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo de antemano. (Boyer, 1987, p.129)

El método de exhaución es un proceso infinito, puesto que la diferencia que se va obteniendo en cada iteración se va haciendo pequeño y se puede hacer tan pequeño como se desee. De esa manera, se podría decir que los griegos, por medio de este método, trabajaron implícitamente la idea de límites.

Asimismo, Arquímedes emplearía este método de exhaución para dar un valor aproximado del número irracional π, ello en su intento de encontrar el área del círculo aproximado por medio de las áreas de polígonos regulares. Según Rey Pastor y Babini (1985), Arquímedes demostró, en su obra *De la medida del círculo*, que la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro está entre los valores $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$. Del mismo modo, encontró que la razón entre el área del círculo y el cuadrado de su diámetro es $\frac{11}{14}$ que no es más que la cuarta parte de $3\frac{1}{7}$. La forma en cómo abordó este cálculo, según estos autores, fue inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en un círculo, duplicando el número de lados iniciando con un hexágono (ver figura 11) hasta lograr polígonos regulares de 96 lados (uno inscrito y otro circunscrito); es decir, las aproximaciones que hizo fueron tanto por defecto como por exceso. Sobre la forma de cómo Arquímedes logró tales aproximaciones no se sabe, pero algo que es seguro es que en esa época conocían algún método para calcular raíces cuadradas por la relación de inconmensurabilidad entre las diagonales y los lados de todos esos polígonos a excepción del hexágono (Rey pastor y Babini, 1985).

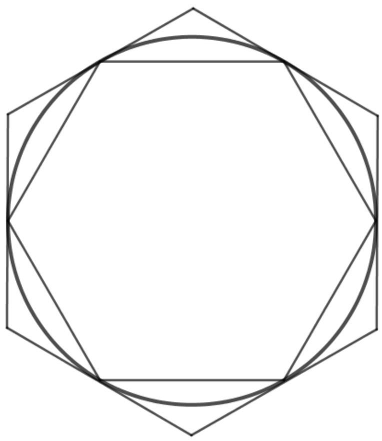


Figura 11. Método de exhaución

3.1.3 Aproximación de irracionales por fracciones continuas

Antes de describir sobre el origen del uso de las fracciones continuas como un medio de aproximación a un número irracional, se definirá lo que es una fracción continua.

Murillo (2014) menciona que una fracción se dice continua generalizada a una expresión que tiene la siguiente forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\cdots \, a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}$$

Se puede observar que cada a_i, b_i para cada $i = 1, 2, 3, ..., n$ son número reales o complejos.

Asimismo, para nuestro propósito (relacionar las fracciones continuas con los números irracionales) se mostrará un caso particular de fracción continua, la llamada fracción continua simple, donde a_1 es entero y a_i es entero positivo para $i \geq 2$ y todo $b_i = 1$, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, la cual denotaremos como $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$, es decir:

$$[a_1, a_2, a_3, ..., a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Del mismo modo, Murillo (2014) muestra la definición de los convergentes c_k de la fracción continua simple anterior. Estas son las fracciones:

$$\begin{aligned} c_1 &= [a_1] \\ c_2 &= [a_1, a_2] \\ c_3 &= [a_1, a_2, a_3] \\ &\cdots \\ c_k &= [a_1, a_2, a_3, ..., a_k] \end{aligned}$$

Por otro lado, si nos referimos al origen de las aproximaciones de un número irracional por medio de fracciones continuas, se dice que tuvieron su origen o, por lo menos, hay indicios del uso de las fracciones continuas en la cultura de los babilonios, pero el método de aproximación que emplearon fue la de fracción continua en forma ascendente ($\text{H}\varnothing\text{yrup}$, 1988, citado por Reina, 2010) que son de la forma:

$$\frac{a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3}{b_3}}{b_2}}{b_1}$$

Donde a_i y b_i son enteros y positivos.

También, se evidencia en el método del algoritmo de Euclides, al hallar el máximo común divisor, el empleo de manera implícita de las fracciones continuas. Por ejemplo, al hallar el máximo común divisor de 340 y 120, se efectúa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 340 &= 2(120) + 100 \\ 120 &= 1(100) + 20 \\ 100 &= 5(20) + 0 \end{aligned}$$

Aunque si se transforma en fracciones continuas, se tiene:

$$\frac{340}{120} = 2 + \frac{100}{120} = 2 + \frac{1}{\frac{120}{100}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

Notemos aquí que, al representar 340/120 como una fracción continua simple, se obtiene, mediante un proceso finito, algo que Euler relacionaría para demostrar que todo número racional se puede representar como una fracción continua simple finita, del mismo modo, caracterizará a los irracionales. Más adelante, se describirá a detalle.

También, según Murillo (2014), posterior a Euclides, no hubo mayor aporte ni avances con respecto a el estudio de la teoría de números (estudio de los números enteros) hasta por lo menos entre los años 500 y 1200, donde en la India se utilizaba el proceso de las fracciones continuas para buscar soluciones a ecuaciones diofánticas con dos y tres incógnitas, y aproximar algunos números irracionales. Así, en Italia, se daría la primera aproximación de $\sqrt{13}$ y ello se debe a Rafael Bombelli. Posteriormente, Antonio Cataldi daría uso del método empleado por Bombelli para calcular el valor aproximado de $\sqrt{18}$, mostrando además valores menores y mayores aproximados a la raíz cuadrada del número buscado.

El método aplicado por Cataldi consiste en expresar $N = a^2 + b$ para aproximar $\sqrt{N}$, donde a es el mayor entero, cuyo cuadrado es menor que N, luego:

$$\sqrt{N} - a = \frac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{2a + (\sqrt{N} - a)} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + (\sqrt{N} - a)}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + (\sqrt{N} - a)}}$$

Se puede apreciar que $\sqrt{N} - a$ se puede seguir remplazando y obtener una fracción continua. Cabe señalar que la notación empleada por Cataldi para representar la fracción continua fue el símbolo & (Rey Pastor y Babini, 1985), ver figura 12.

$$\boxed{\sqrt{N} = a \,\&\, \frac{b}{2a.} \,\&\, \frac{b}{2a.} \,\&\, \frac{b}{2a.} \ldots}$$

Figura 12. Notación de una fracción continua
Fuente (Pastor y Babini, 1985, p. 18)

Así, si queremos obtener el valor aproximado de $\sqrt{18}$, se observa que $4 < \sqrt{18} < 5$, entonces:

$$\sqrt{18} - 4 = \frac{18 - 16}{\sqrt{18} + 4} = \frac{2}{8 + (\sqrt{18} - 4)} = \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + (\sqrt{18} - 4)}}}$$

Luego,

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + (\sqrt{18} - 4)}}}$$

Nótese que la primera aproximación es $4+\frac{2}{8}=\frac{17}{4}$, la segunda es $4+\frac{2}{8+\frac{2}{8}}=4+\frac{8}{33}=\frac{140}{33}$ y así sucesivamente (Rey Pastor y Babini, 1985).

Por otro lado, Leonardo Euler estudia a las fracciones continuas, llegando a resultados como el siguiente teorema "todo número racional se puede representar como una única fracción continua simple finita" (una fracción continua se dice finita si la cantidad de términos es finita e infinita si su número de términos es infinito). La prueba de este teorema está basada en el algoritmo de la división de Euclides.

En efecto, se considera al número racional $x=\frac{p}{q}$, con $q>0$.

Entonces, $\exists\, a_1, r_1 \,/\, \frac{p}{q}=a_1+\frac{r_1}{q}$, con $0<r_1<q$.

Luego, $\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{\frac{q}{r_1}}$, entonces $\exists\, a_2, r_2 \,/\, \frac{q}{r_1}=a_2+\frac{r_2}{r_1}$ con $0<r_2<r_1$.

Así, el número racional considerado se puede escribir como:

$$x=\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}$$

Continuando con este proceso, se obtiene una sucesión de residuos enteros y positivos, tales que $0<r_{i+1}<r_i$, es procedimiento finito, así un número racional puede ser representado por una fracción continua finita. Del mismo modo, por equivalencia del teorema anterior, se concluye que una fracción continua infinita representa a un número irracional (Murillo, 2014).

El empleo de fracciones continuas dio la posibilidad, tanto a Euler como a Lagrange, de describir a los números racionales e irracionales. Un aporte de Lagrange es el recíproco del teorema demostrado por Euler, es decir, "todo número irracional cuadrático se puede representar como una fracción continua simple infinita y periódica", del cual se entiende que un número irracional cuadrático es la solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y que una fracción continua periódica es de la forma $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n, \overline{b_1, b_2, b_3, ..., b_m}]$, donde m representa la longitud del periodo, asimismo, una fracción continua periódica pura tiene la forma $[\overline{b_1, b_2, b_3, ..., b_m}]$.

Con relación a lo antes mencionado, los llamados números metálicos (soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - bx - 1 = 0$, con $b > 0$. Si $b = 1$, se tendrá como solución al número de oro, para $b = 2$ el número de plata, entre otros.) tienen una representación continua periódica de la forma $[b, \bar{b}]$.

En efecto, de la ecuación cuadrática se tiene lo siguiente:

$$x = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}} = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}}} = [b, \bar{b}]$$

Por ejemplo, se tendría que el número de plata es solución de la ecuación $x^2 - 2x - 1 = 0$, luego:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}} = [2, \bar{2}]$$

Para ejemplificar los números que tienen representación de una fracción continua simple no periódica, se tiene al número irracional π, cuya demostración fue realizado por Johann Heinrich Lambert.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + ...}}}}}}} = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 2, ...]$$

Para aproximar π, se tiene que tomar sus convergentes respectivos:

$$c_1 = [a_1] = [3] = 3$$

$$c_2 = [a_1, a_2] = [3, 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

$$c_3 = [a_1, a_2, a_3] = [3,7,15] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}$$

Entonces, mientras más convergentes tiene la fracción, se mejora la aproximación, aunque los cálculos se hacen más complicados.

Con todo lo descrito, se ha puesto en evidencia cómo las fracciones continuas están presentes de manera implícita en trabajos con los números racionales por medio del algoritmo de Euclides y que, muchos siglos después, el problema de calcular raíces cuadradas de cantidades que no son cuadrados perfectos llevó a aproximarlos con valores racionales por medio de las fracciones continuas. Es decir, con la finalidad de resolver dicho problema, han surgido definiciones y procedimientos que son justificados por teoremas, en términos del EOS, emergen objetos primarios en este nuevo sistema de prácticas. La descripción de dichos objetos se hará en el apartado 3.2.3.

3.1.4 La crisis en los fundamentos matemáticos

La evolución de los números irracionales culmina con el reconocimiento de ellos como número. Para ello, fue necesario el desarrollo del cálculo. Tal como señala Bergé (2004), el avance del cálculo fue notable con los aportes de matemáticos del siglo XVIII, como Euler, Lagrange y D´Alembert. Luego, a inicios del siglo XIX, las matemáticas se convirtieron en una profesión, porque investigadores matemáticos estaban siendo integrados en las universidades, por lo que se requería que las matemáticas estuviesen bien fundamentadas para ser enseñada. Es decir, se debía construir una matemática sin “vacíos”, sin que pueda verse como algo inconsistente. Al respecto, el filósofo George Berkeley hacía una crítica a ciertos principios que eran usados en las matemáticas, aduciendo y criticando a aquellos incrementos que luego desaparecen, o aquellos que no son ceros, pero que luego se anulan, o lo infinitamente más pequeño de lo infinitamente pequeño (Babini, 1967).

Este tipo de situaciones llevó a buscar una construcción del análisis en base a la aritmética y así dejar de lado el apoyo en figuras geométricas, que era considerado como argumento válido para sustentar sus resultados. Los impulsadores de esta postura fueron los matemáticos Augustin Louis Cauchy, quien consideraba que no solo se podía confiar en la geometría y en lo sentidos; y Bernard Bolzano, quien argumentaba que para que las pruebas tengan mayor rigor científico no debería obtenerse nada solo de una simple mirada a las figuras (Bergé, 2004).

Para la segunda mitad del siglo XIX, los matemáticos se propusieron construir un nuevo sistema numérico que tenga como base a los números racionales, el cual sí era considerado un conjunto numérico fundamentado, donde además, en este nuevo sistema numérico, el conjunto de los números reales se pudieran demostrar todas las propiedades apoyadas en la aritmética (Bergé, 2004).

A continuación, se describirá las construcciones hechas por Richard Dedekind y la de Georg Cantor.

En su escrito sobre la continuidad y los números irracionales, Dedekind (1963) describe primeramente la relación de orden del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), donde sobresalen las propiedades:

- La tricotomía: Dados $p,q \in \mathbb{Q}$ se cumple que $p > q$ o $p < q$ o $p = q$
- La transitividad: Dados p,q y $r \in \mathbb{Q}$ si se cumple que $p > q$ y $q > r \Rightarrow p > r$
- La densidad de $\mathbb{Q}$: Dados $p,q \in \mathbb{Q}$ tal que $p > q$ o $p < q$ existe infinitos r entre p y q

Como $\mathbb{Q}$ es un conjunto bien ordenado, se tiene que para cada $p \in \mathbb{Q}$ corta a $\mathbb{Q}$ en dos conjuntos A_1 y A_2 disjuntos, tales que cada elemento $p_1 \in A_1$ verifica $p_1 < p$. Lo mismo que para cada elemento $p_2 \in A_2$, se cumple $p < p_2$, donde p puede estar en A_1 o A_2, en todo caso, todo elemento A_1 es menor a todo elemento de A_2.

Posteriormente, estas mismas propiedades Dedekind las asocia a cada punto de la recta con un número racional; es decir, afirma que los números racionales identificados como los puntos de una recta están ordenados y, además, son densos.

Así:

- Si p está a la derecha de q, y q está a la derecha de r, entonces p también estará a la derecha de r; entonces, se dirá que q se encuentra ubicado entre los puntos p y r.
- Si p y r son dos puntos diferentes, entonces, existen infinitos puntos q entre p y r.

- Si p es un punto de la recta L, entonces, todos los puntos en L se pueden dividir en dos conjuntos: P_1 y P_2, cada una con infinitos elementos, donde los elementos p_1 de P_1 son todos los puntos que están ubicados a la izquierda de p, y los elementos p_2 de P_2 son todos los puntos que están ubicados a la derecha de p. Incluso, el punto p puede estar en P_1 o P_2. Sea cualquiera de los casos, se tiene que la recta L ha sido dividida en dos partes: P_1 y P_2, donde todo los puntos de P_1 se encuentran ubicados a la izquierda de todos los puntos de P_2.

En ese sentido, si se asigna al cero el punto O de la recta, los racionales que están a la izquierda son los negativos y los de la derecha racionales positivos. Ahora, en todo número racional se puede identificar un punto P; es decir, un racional será el extremo derecho del segmento OP. Sin embargo, considerando la existencia de magnitudes inconmensurable, Dedekind indica que la recta contiene infinitos puntos que no son racionales. Es decir, la recta tiene mucho más puntos que los números racionales. Estos son otros entes de carácter numérico que otorgan la continuidad de la recta. Es así que plantea el axioma "si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, esta corte de la recta en dos partes" (Dedekind, 1963, p. 11).

En ese sentido, Dedekind define una cortadura como la descomposición de un conjunto en dos conjuntos A_1 y A_2, cada uno con infinitos elementos, donde todo elemento de A_1 es menor que todo elemento de A_2, denotándola (A_1, A_2). A partir de esta definición de cortadura, demuestra que existen infinitas cortaduras que no son generadas por un número racional.

Por ejemplo, los conjuntos

$$A_1 = \left\{x \in \mathbb{Q} / x \leq 0 \vee x^2 < 3\right\} \text{ y } A_2 = \left\{y \in \mathbb{Q} / y > 0 \wedge y^2 > 3\right\}$$

Definen la cortadura (A_1, A_2), la cual no es generada por un número racional.

En efecto,

i) Observamos que $\forall x \in A_1$ y $\forall y \in A_2$ se tiene que $x < y$.

Si $x \leq 0$ es obvio, ya que $y > 0$,

Si $x > 0 \Rightarrow x^2 < 3$, entonces $x^2 < 3 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$.

ii) El conjunto A_1 no posee máximo

En efecto, supongamos que sí, y que x es el máximo de A_1.

Entonces, $x > 0$ y $x^2 < 3$, ahora consideremos a un $x_1 = \dfrac{x(x^2+9)}{3x^2+3}$, donde $x \in \mathbb{Q}$.

Como $x^2 < 3$ y $x > 0 \Rightarrow 0 < 2x(3-x^2)$, además $0 < 3x^2+3 \Rightarrow \dfrac{2x(3-x^2)}{3x^2+3} > 0$

Observemos que $x_1 - x = \dfrac{2x(3-x^2)}{3x^2+3} > 0 \Rightarrow x_1 > x$

También, $x^2 < 3 \Rightarrow x^2 - 3 < 0 \Rightarrow (x^2-3)^3 < 0$, además $(3x^2+3)^2 > 0$

Entonces, se tiene que $\dfrac{(x^2-3)^3}{(3x^2+3)^2} < 0$, pero $x_1^{\,2} - 3 = \dfrac{(x^2-3)^3}{(3x^2+3)^2} \Rightarrow x_1^{\,2} < 3$

Así, $x_1 \in A_1$ con $x_1 > x$, lo cual es contradictorio, puesto que *x* es el máximo. Por lo tanto, A_1 no posee máximo.

iii) El conjunto A_2 no posee mínimo

En efecto, supongamos que sí, y sea y el máximo de A_2.

Luego $y > 0$ y $3 < y^2$, consideremos a un $y_1 = \dfrac{y(y^2+9)}{3y^2+3}$, donde $y_1 \in \mathbb{Q}$.

Como $y^2 > 3$ y $0 < y \Rightarrow 0 > 2y(3-y^2)$, además $0 < 3y^2+3 \Rightarrow \dfrac{2y(3-y^2)}{3y^2+3} < 0$

Observemos que $y_1 - y = \dfrac{2y(3-y^2)}{3y^2+3} < 0 \Rightarrow y_1 < y$

También $y^2 > 3 \Rightarrow y^2 - 3 > 0 \Rightarrow (y^2-3)^3 > 0$, y además $(3y^2+3)^2 > 0$

Entonces, tenemos que $\dfrac{(y^2-3)^3}{(3y^2+3)^2} > 0$, pero $y_1^{\,2} - 3 = \dfrac{(y^2-3)^3}{(3y^2+3)^2} \Rightarrow y_1^{\,2} > 3$

Así, $y_1 \in A_2$ con $y_1 < y$, lo cual es contradictorio, puesto que *y* es el mínimo. Por lo tanto, A_1 no posee mínimo.

iv) No existe un número racional tal que su cuadrado sea 3.

En efecto, supongamos que exista un $\frac{t}{u} \in \mathbb{Q} / \left(\frac{t}{u}\right)^2 = 3 \;\; t,u \in \mathbb{Z}^+$, con u el mínimo valor que satisface dicha ecuación.

Como $1 < \left(\frac{t}{u}\right)^2 < 4 \Rightarrow 1 < \frac{t}{u} < 2 \Rightarrow u < t < 2u$

De la última desigualdad, se tiene que $t - u > 0, \;\; 3u - t > 0$.

Sean $u' = t - u$ y $t' = 3u - t$, tal que $u' < u$, entonces se tiene que $t'^2 - 3u'^2 = (3u - t)^2 - 3(t - u)^2 = 2(3u^2 - t^2) = 0$

De aquí, se obtiene que $t'^2 - 3u'^2 = 0 \Rightarrow \frac{t'^2}{u'^2} = 3$, lo cual es contradictorio, pues $u' < u$, satisfaciendo la ecuación.

Así, mostramos que la cortadura (A_1, A_2) no es generada por un número racional.

De este modo, Dedekind demuestra que existen infinitas cortaduras que son generadas por números que no son racionales. Entonces, define un nuevo número α, al que denomina número irracional, a todos aquellos que generan este tipo de cortaduras. Asimismo, afirma que dos números son diferentes si generan cortaduras totalmente diferentes. Luego de definir y caracterizar a estos dos números, procede a definir y demostrar todas las operaciones y propiedades de los números racionales para este nuevo conjunto numérico que denomina conjunto de los números reales y la denota $\mathbb{R}$.

Por otro lado, el matemático Joseph Fourier sostuvo que una función real de variable real definida en un intervalo. Por ejemplo, en $[-\pi, \pi]$, puede ser representado como una serie trigonométrica de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n sen(x) + b_n \cos(x))$$

Donde, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos(x) dx$ y $b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) sen(x) dx, \forall n \geq 1$ (Torretti, 1998, p.14).

En ese sentido, según Torretti (1998), Georg Cantor había realizado trabajos con series de Fourier para verificar si una función admitía solo una o más de una representación por series trigonométricas, sin considerar las condiciones para que una función adquiera dicha representación. Es decir, si f fuese o no integrable o si la serie era convergente o no. Cantor probó que, si una función admite una representación por series trigonométricas, esta representación es única. Para la demostración, se basó en el siguiente resultado:

"Si para todo x en un intervalo finito I, se cumple que $\lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n sen(x) + b_n \cos(x)) = 0$, entonces $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0 \quad y \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = 0$".

Se observó que dicho resultado era válido para una cantidad finita de valores, donde las sucesiones no eran convergentes o no eran cero. De ahí, el interés de Cantor se centró en extender la validez de su teorema para una cantidad infinita de dichos valores en un intervalo I. Para ello, fue necesario construir los números reales (Torretti, 1998).

Asimismo, Bergé (2004) menciona que Cantor, en dicho trabajo, con las series trigonométricas, se ve obligado a dar ciertas definiciones y construir el conjunto de los números reales, donde construye a los números irracionales por medio de sucesiones de números racionales, en otros términos, mediante sucesiones de Cauchy (sucesiones fundamentales). Este nuevo conjunto de números satisface que todas las sucesiones tengan límites en dicho conjunto, extendiendo también las operaciones y las relaciones de orden de $\mathbb{Q}$. Para ello, Cantor denomina A al conjunto de todos los números racionales, agrega un nuevo número *b* que está relacionado con una sucesión de números racionales $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ y otro número $b^{'}$ relacionado con $\{a'_1, a'_2, a'_3, ..., a'_m, ...\}$, donde determina una relación de orden entre b y b', en la cual se cumple que $b' = b;\ b' > b;\ b' < b$ siempre que $a_n - a'_n$ es cada vez nulo, o es menor que un número racional negativo, o es mayor que un número racional positivo respectivamente, obviamente, siempre que n crece. Del mismo modo, define una relación de orden entre un b asociada a una sucesión $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ y un número racional *a* del mismo modo como el caso anterior, es decir, $a = b;\ a > b;\ a < b$ siempre que $a_n - a$ es cada vez pequeño, es menor que un número racional negativo o es cada vez mayor a un número racional positivo a medida que *n* crece. Así, un b asociado a una sucesión $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ se tiene que $a_n - b$ es cada vez más pequeño, siempre que n crece.

En ese sentido, cada *b* se define como el límite de la sucesión $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$. Cantor denomina B al conjunto conformado por cada *b* asociada a una sucesión fundamental y, con ello, extiende las operaciones de los números racionales (suma, diferencia, producto y cociente) con los elementos de A y B. Por ejemplo, dados tres elementos b, b', b'' de B, se define que $b + b' = b''$ si se cumple que $a_n + a'_n - a''_n$ tiende a cero, siempre que n crece (Bergé, 2004).

El nuevo conjunto generado B, cuyos elementos no están en A, los denomina número irracional y números racionales a elementos de A, considerando cada elemento de A como una sucesión constante. Asimismo, según la autora, esta es la forma de la completitud que da Cantor al conjunto de los números reales.

3.1.5 Clasificación de los números irracionales

Tartaglia, Cardano y Ferrari, matemáticos de origen italiano, centraron sus trabajos en encontrar soluciones (fórmulas) a ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado expresados en términos de radicales. En esa búsqueda de encontrar soluciones a ecuaciones polinomiales, los llevaría a descubrir otro tipo de número irracional, los llamados irracionales algebraicos.

Abel, matemático Noruego, estudia los llamados números algebraicos, soluciones de ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros. En dicho estudio, demuestra que no es posible encontrar solución a una ecuación polinomial de quinto grado en términos de radicales. Es decir, no existe una fórmula que exprese soluciones de una ecuación de quinto grado, lo cual fue generalizado por Evariste Galois, quien demostró que existen números algebraicos que no son expresables por radicales. Por ejemplo, para la raíz de la ecuación $x^5 - x - 1 = 0$, resuelto por divisores binómicos, las posibles soluciones serían $+1, -1$; sin embargo, ninguna de las dos satisface la ecuación, es decir, no hay solución racional. No obstante, esta posee solución y es el número $1.16730397826141868 43...$, el cual no es expresable por medio de radicales, tal como Abel había demostrado (Havil, 2012).

En ese mismo sentido, el surgimiento de los números algebraicos, según Maor (2008), haría que surjan nuevas interrogantes, como por ejemplo que todo número racional a/b es algebraico, puesto que es solución de la ecuación $bx - a = 0$. Por lo tanto, por equivalencia lógica, si un número no es algebraico, entonces, no es racional. En otras palabras, si un número no es algebraico, es irracional. A partir de este hecho, surge la pregunta ¿existirán números irracionales que no son algebraicos? Los matemáticos de inicios del siglo XIX sospecharon que sí existían, pero ninguno mostraba uno. Todo hacía creer que si se encontraba uno de esos números solo sería un caso particular.

Sin embargo, en el año 1844, el matemático Francés Joseph Liouville mostró la existencia de dichos números, que hoy en día son conocidos como *números de Liouville*, por ejemplo, el número:

$$\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\ldots$$

Que en su representación decimal es $0{,}110001000000000000000000100\ldots$, donde el crecimiento de la cantidad de ceros aumenta de manera rápida. La demostración que este irracional no es algebraico se realiza por reducción al absurdo y es como sigue:

Supongamos que $\alpha=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\ldots$ es algebraico, entonces sería raíz de un polinomio $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_1x+c_0$, consideramos a este polinomio el de menor grado posible del cual α es raíz.

Por ser un número irracional, se puede aproximar por una sucesión de números racionales. La sucesión $\beta=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\ldots+\frac{1}{10^{j!}}$ aproxima a α para *j* suficientemente grande.

Antes de seguir con la demostración, se presentarán algunos resultados previos.

i) Afirmamos que $f(\beta)\neq 0$.

   En efecto, ya que si fuera cero entonces:

   $$f(\beta)=(x-\beta)q(x)$$

   Donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ con coeficientes racionales, consideramos k como el producto de los denominadores de dichos coeficientes.

   Luego, $f(\beta)=(x-\beta)k^{-1}q_1(x)$, donde $q_1(x)$ posee coeficientes enteros.

Como α es raíz, se tiene $f(\alpha) = (\alpha - \beta)k^{-1}q_1(\alpha) = 0$, entonces $(\alpha - \beta) = 0$ o $q_1(\alpha) = 0$

Como $\alpha \neq \beta \Rightarrow q_1(\alpha) = 0$, lo cual es una contradicción, pues sería raíz de un polinomio de un grado mucho menor que *f*. Luego, $f(\beta) \neq 0$, entonces $|f(\beta)| > 0$

ii) Como $\alpha < 1, \beta < 1 \Rightarrow \alpha^n < 1, \ \beta^m < 1, \ \text{y} \ \alpha^n \beta^m < 1$ para cualquier *n*, *m* enteros.

iii) Para cualquier *m* entero, se cumple la siguiente factorización:

$$\alpha^m - \beta^m = (\alpha - \beta)(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\beta + \alpha^{m-3}\beta^2 + ... + \alpha\beta^{m-2} + \beta^{m-1})$$

Luego, por las desigualdades anteriores (ii):

$$\alpha^m - \beta^m < m(\alpha - \beta)$$

iv) Si efectuamos la suma finita de β, se tendría a $\beta = \dfrac{t}{10^{j!}}$, donde *t* es un entero.

v) Sea $N = n|c_n| + (n-1)|c_{n-1}| + (n-2)|c_{n-2}| + ... + |c_1|$ entero.

vi) Afirmamos $\alpha - \beta < \dfrac{2}{10^{(j+1)!}}$.

En efecto, como $\alpha - \beta = \dfrac{1}{10^{(j+1)!}} + \dfrac{1}{10^{(j+2)!}} + \dfrac{1}{10^{(j+3)!}} + \dfrac{1}{10^{(j+4)!}} + ...$, observamos que en el (*j*+1)! lugar después de la coma aparece el primer 1 (en su representación decimal) y luego continúan (*j*+2)! Ceros para el siguiente 1, así sucesivamente garantizamos que es mucho menor que $\dfrac{2}{10^{(j+1)!}}$

vii) $|f(\beta)|10^{n(j!)}$ es entero. En efecto: por (iv) se tiene

$$|f(\beta)| = |c_n\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1} + c_{n-2}\beta^{n-2} + ... + c_1\beta + c_0|$$
$$= \left|\frac{c_n t^n}{10^{n(j!)}} + \frac{c_{n-1}t^{n-1}}{10^{(n-1)(j!)}} + \frac{c_{n-2}t^{n-2}}{10^{(n-2)(j!)}} + ... + \frac{c_1 t}{10^{j!}} + c_0\right|$$

Luego,

$$10^{n(j!)}|f(\beta)| = |c_n t^n + 10^{j!}c_{n-1}t^{n-1} + 10^{2(j!)}c_{n-2}t^{n-2} + ... + 10^{(n-1)(j!)}c_1 + 10^{n(j!)}c_0|$$

El lado derecho de la igualdad es una cantidad entera, entonces $|f(\beta)|10^{n(j!)}$ es entera.

Ahora probaremos que $0 < |f(\beta)|10^{n(j!)} < 1$:

En efecto, como

$$\left| f(\alpha)-f(\beta)\right| = \left| c_n(\alpha^n-\beta^n)+c_{n-1}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+c_{n-2}(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})+...+c_1(\alpha-\beta)\right|$$

Por (iii) y (v) queda:

$$\begin{aligned}\left| f(\alpha)-f(\beta)\right| &< \left| nc_n(\alpha-\beta)+(n-1)c_{n-1}(\alpha-\beta)+(n-2)c_{n-2}(\alpha-\beta)+...+c_1(\alpha-\beta)\right| \\ &= \left|\alpha-\beta\right|\left| nc_n+(n-1)c_{n-1}+(n-2)c_{n-2}+...+c_1\right| \\ &< \left|\alpha-\beta\right|\left(n\left|c_n\right|+(n-1)\left|c_{n-1}\right|+(n-2)\left|c_{n-2}\right|+...+\left|c_1\right|\right) \\ &= \left|\alpha-\beta\right| N\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left| f(\alpha)-f(\beta)\right| < \left|(\alpha-\beta)\right| N$ … (viii)

Luego, por (i) y el hecho que $f(\alpha)=0$, se tiene:

$$0<10^{n(j!)}\left| f(\beta)\right| = \left| f(\alpha)-f(\beta)\right| 10^{n(j!)}$$

Por (vi) y (viii)

$$\begin{aligned}0<10^{n(j!)}\left| f(\beta)\right| &= \left| f(\alpha)-f(\beta)\right| 10^{n(j!)} \\ &< \left|(\alpha-\beta)\right| N10^{n(j!)} \\ &< \frac{2}{10^{(j+1)!}}N10^{n(j!)} = \frac{2N}{10^{(j+1-n)(j!)}}\end{aligned}$$

Aquí hacemos notar que N y n son fijos (N dependiendo de n). Después, para un *j* suficientemente grande, se tiene que el lado derecho de la desigualdad es menor que 1. Por lo tanto,

$$0<10^{n(j!)}\left| f(\beta)\right| <1$$

Esto es una contradicción, ya que por (vii) se tendría un entero entre 0 y 1. Por ende, α es trascendente (Niven, 1961).

Asimismo, Liouville presentó al número $0{,}12345678910111213...$, conformado por los números naturales ubicados de manera creciente, que tampoco es algebraico. Así, un número que no es algebraico se denominan *números trascendentales*, puesto que dichos números trascienden más allá de los algebraicos (Maor, 2008).

La demostración que realizó Liouville desencadenaría en un teorema que hoy se conoce como *el teorema de aproximación de Liouville*: "Si α es una raíz irracional de un polinomio irreductible $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ con coeficientes enteros, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una cantidad finita de muchos números racionales $\frac{p}{q}$, tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+\varepsilon}}$" (Havil, 2012, p.184) (traducción propia). Asimismo, la definición de los *números de Liouville* es "todo número real para el cual existe una sucesión $\frac{p_n}{q_n}$ de números racionales verificando $0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < q_n^{-n}, \forall n > 1$" (Rosales, 2010, p. 5).

Por otro lado, una vez que se logró crear y demostrar la existencia de este nuevo tipo de números, los matemáticos de la época se volcaron a estudiar la naturaleza de aquellos números irracionales conocidos, tales como e y π, cuya irracionalidad ya eran conocidos (Maor, 2008). El matemático Charles Hermite sería el responsable de la demostración de la trascendencia de e. Lo mismo realizaría Carl Louis Ferdinand Lindemann, quien demostró la trascendencia de π. Con esta última, se prueba que es imposible cuadrar el área de una circunferencia, ya que si x es el lado de un cuadrado, entonces, cuadrar el área de un círculo de radio 1, sería equivalente a resolver la ecuación $x^2 - \pi = 0$, lo cual es imposible porque π es trascendente.

Las demostraciones de la irracionalidad de e y π no serán incluidas en nuestro trabajo por lo extenso de la prueba, pero podemos mencionar que los procedimientos empleados para la demostración son la reducción al absurdo, construcción de sumas con las derivadas de orden *k* de un polinomio, propiedades como la linealidad de la integral y propiedad de desigualdades con valor absoluto. Todo ello representado y operado algebraicamente, ver figura 13. La prueba completa se puede estudiar en Havil (2012, p.190).

$$|f(x)| \leqslant \frac{m^{p-1}m^{mp}}{(p-1)!} = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

and so,

$$\left| \sum_{r=0}^{m} a_r \mathrm{e}^r \int_0^r \mathrm{e}^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{m} |a_r|\mathrm{e}^r \int_0^r \mathrm{e}^{-x}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{r=0}^{m} |a_r|\mathrm{e}^r \int_0^r \mathrm{e}^{-x}\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{m} |a_r|\mathrm{e}^r(1-\mathrm{e}^{-r}) = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=0}^{m} |a_r|(\mathrm{e}^r - 1).$$

With m fixed we can allow p to increase so that the factorial in the denominator reduces the expression to a number less than 1.

Figura 13. Procedimientos usados en la demostración de la trascendencia del número *e*. Fuente (Havil, 2012, p. 193)

Por otro lado, cabe señalar que a partir del estudio de los números algebraicos y la clasificación de los irracionales, se pudo probar que e y π no pueden ser construidos con regla y compas.

Otro interés que giraba alrededor de los números algebraicos y trascendentes era referido a cuál de los dos conjuntos tenía mayor cantidad de elementos. Al respecto, Cantor sería quien dé respuesta a esta nueva cuestión. Inclusive, se tendría como consecuencia la prueba de la existencia de más números irracionales que racionales.

El trabajo de Cantor consistió en demostrar, principalmente, la numerabilidad de los números algebraicos (Cantor define “un conjunto infinito S es Numerable o Contable si existe una biyección entre S y $\mathbb{N}$). De acuerdo a Havil (2012), la idea de Cantor consistió en agrupar los números algebraicos de acuerdo al tamaño de su *altura* h, dicha altura es una cantidad entera y la define como sigue:

$$h = n - 1 + |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots |a_0|$$

Donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ y *n* son los coeficientes enteros, y el grado del polinomio del cual son raíces dichos números algebraicos, por ejemplo:

La altura h del polinomio $3x - 4 = 0$ es $h = 1 - 1 + |3| + |-4| = 7$ y la raíz $4/3$ está en el grupo de todos los números algebraicos de altura 7.

La tabla 1 muestra los primeros números algebraicos agrupados con respecto a sus alturas (Havil, 2012).

Tabla 1. *Agrupación de los números algebraicos respecto a su altura*

Altura h	**Grado del polinomio** n	**Polinomio**	**Raíces**
2	1	$x=0$	0
3	1,2	$2x=0,\ x\pm1=0$ $x^2=0$	$0,\ \pm1$
4	1,2,3	$3x=0,\ 2x\pm1=0,\ x\pm2=0$ $2x^2=0,\ x^2\pm1=0,\ x^2\pm x=0$ $x^3=0$	$0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm1,\ \pm2$
5	1,2,3,4	$4x=0,\ 3x\pm1=0$ $2x\pm2=0,\ x\pm3=0$ $3x^2=0,\ 2x^2\pm1=0,\ x^2\pm2=0$ $2x^2\pm x=0,\ x^2\pm2x=0,\ x^2\pm x\pm1=0$ $2x^3=0,\ x^3\pm1=0,\ x^3\pm x=0,\ x^3\pm x^2=0$ $x^4=0$	$0,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{2},$ $\pm1,\ \pm3,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$ $\pm\sqrt{2},\ \pm2,$ $\frac{\pm1\pm\sqrt{5}}{2}$

Dado que cada polinomio de grado *n* puede tener a lo más *n* raíces reales, entonces, cada grupo de número algebraico posee una cantidad finita de elementos. Ahora bien, para cada altura, se puede generar una sucesión de números algebraicos, evitando su repetición donde, además, se incluya a todos los números algebraicos. Dicha sucesión es la que sigue:

$$(0);\ \ (-1,1);\ \ (-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2);\ \ (-3,\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1-\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2},3);\ \ ...$$

Así, la biyección entre $\mathbb{N}$ y los números algebraicos se define como:

$$\varphi(n)=n+1=\text{altura del polinomio}\rightarrow(\text{número de raíces con altura } n+1)$$

De este modo,

$$\varphi(1)=2\rightarrow\omega_1=0$$
$$\varphi(2)=3\rightarrow\omega_2=-1,\ \omega_3=1$$
$$\varphi(3)=4\rightarrow\omega_4=-2,\ \omega_5=-\frac{1}{2},\ \omega_6=\frac{1}{2},\ \omega_7=2$$
$$\varphi(4)=5\rightarrow\omega_8=-3,\ \omega_9=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \omega_{10}=-\sqrt{2},\ \omega_{11}=\sqrt{2},\ \omega_{12}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \omega_{13}=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$
$$\omega_{14}=-\frac{1}{3},\ \omega_{15}=\frac{1}{3},\ \omega_{16}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \omega_{17}=\sqrt{2},\ \omega_{18}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \omega_{19}=3$$
$$\vdots$$

Luego, ordenando se obtiene una sucesión de números algebraicos totalmente enumerados.

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ ...$$

Por eso, el conjunto de números algebraicos es numerable. En términos actuales, se podría decir que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable (Havil, 2012).

Asimismo, el hecho que Cantor probara la no numerabilidad del conjunto de los números reales, por medio de la demostración que el intervalo $[0,1]$ es infinito no numerable, llevaría a probar la no numerabilidad de los números trascendentes. Si este último fuera numerable al unir con los algebraicos, harían que los reales sean numerables, lo cual es una contradicción con la no numerabilidad de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, los números trascendentes son no numerables y ello implica que los irracionales son no numerables (antes vimos que todo número trascendente es irracional).

En todo lo descrito en este apartado, se ha visto la tipificación de los números irracionales, como números algebraicos y números trascendentales, y que el conjunto de los números irracionales posee más elementos que los racionales, más aún es no numerable.

En la siguiente sección, nos centraremos en reconocer y describir, en términos de nuestro marco teórico (EOS), los objetos primarios que emergen en cada una de las situaciones problemáticas que se ha descrito.

3.2 Propuesta de significados parciales del número irracional

En todo el apartado 3.1, se ha descrito algunos de los diferentes momentos y problemas que permitieron la evolución del número irracional. Se ha explicado que el número irracional emergió del intento de encontrar una razón entre dos magnitudes, pero, al no poder encontrar dicha razón, se llegó a la denominada crisis de los inconmensurables. Esta fue superada replanteando la definición de razón y proporción. Posteriormente, en el renacimiento, el número irracional se estudió a través de fracciones continuas. Después, con los trabajos de Dedekind y Cantor, los irracionales asumieron el estatus de número y, finalmente, fueron clasificados como algebraicos y trascendentes. Como es natural en el quehacer matemático, para tratar cada uno de esos problemas, se emplearon diferentes lenguajes, procedimientos y argumentos.

A partir de lo anterior, en este apartado, se proponen significados parciales del número irracional. Para ello, se tendrán en cuenta las herramientas que ofrece el EOS para estudiar los objetos matemáticos, en particular, las configuraciones asociadas a los significados. Ello implica describir los seis objetos que emergen (situaciones problemas, lenguaje, definiciones y conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentaciones) al resolver los problemas asociados a distintos momentos importantes, identificados previamente para la construcción de los irracionales.

El objetivo de reconstruir significados parciales del número irracional, permitirá estudiar los textos didácticos empleados en la educación básica del Perú. Como consecuencia, permitirá evidenciar si dichos textos consideran tareas asociadas a alguno de los significados del número irracional. Asimismo, para la reconstrucción de dichos significados, nos basamos en la investigación realizada por Reina et al. (2012) que nos da una aproximación de los significados del número irracional.

3.2.1 Significado de irracional como razón conmensurable

La denominación de número irracional como razón conmensurable, aun cuando un irracional es asociado a una magnitud inconmensurable (aquellas magnitudes a las que no es posible hallar una unidad de medida), corresponde al hecho que el número irracional era tratado en un sentido implícito hasta su descubrimiento como tal, puesto que la actividad matemática se centraba en comparar dos segmentos y hallar la razón entre ellas o el de cortar un par de segmentos en media y extrema razón, donde, por ejemplo, el número irracional $\sqrt{5}$ estaba implícitamente asociado con encontrar longitudes en media y extrema razón.

En ese sentido, el primer significado que atribuiremos al número irracional será como razón entre dos magnitudes conmensurables. Asimismo, la configuración epistémica asociada a este significado parcial de número irracional la describimos en la tabla 2.

Tabla 2. *Configuración epistémica asociada al significado de número irracional como razón conmensurable*

Objetos Primarios	Descripción
Situaciones Problemas	• Encontrar la razón entre dos magnitudes • Dividir un segmento en media y extrema razón
Lenguaje	• Verbal: basado en lo geométrico (punto, recta, segmento, cuadrado, pentagrama, círculo, etc.) • Simbólico: uso de letras como notación para identificar vértices, segmentos, arcos, etc. • Gráfico: dibujos geométricos (punto, recta, segmento, polígonos, circunferencia, etc.)
Conceptos/ Definiciones	• Previos: magnitud, razón (comparación entre dos magnitudes por una unidad de medida en común), proporción (igualdad entre dos razones), segmentos conmensurables, número (como múltiplo de una unidad), conceptos y definiciones geométricas como punto, recta, ángulo, círculo, circunferencia, arco, etc. • Emergentes: segmentos inconmensurables
Proposiciones/ Propiedades	• Propiedades de proporcionalidad • Propiedades y proposiciones para construcciones geométricas • Teorema de Pitágoras.

Procedimientos	• Construcciones geométricas, como trazado de segmentos (diagonales de cuadrado, pentágonos), construcciones de rectas (paralelas, perpendiculares), construcción de figuras geométricas (cuadrado, circunferencias, arcos de circunferencia) • Técnica del antifairesis para hallar la unidad de dos segmentos • Técnicas para dividir un segmento en media y extrema razón
Argumentos	• Validación apoyada en construcciones geométricas • Demostraciones deductivas en base a resultados previos

3.2.2 Significado de irracional como razón inconmensurable

Una vez definida la razón y proporción en sentido de Eudoxo, la actividad matemática ya incluía el tratamiento con magnitudes inconmensurables. Entonces, consideramos número irracional como razón inconmensurable. La configuración epistémica asociada a este significado queda descrita en la tabla 3.

Tabla 3. *Configuración epistémica asociada al significado de número irracional como razón inconmensurable*

Objetos Primarios	Descripción
Situaciones Problemas	• Encontrar y definir la razón, proporción para magnitudes inconmensurables
Lenguaje	• Verbal: basado en lo geométrico (punto, recta, segmento, cuadrado, pentagrama, círculo, etc.) • Simbólico: uso básicamente de letras como notación para identificar elementos geométricos (vértices, segmentos, arcos, etc.). • Gráfico: dibujos geométricos (punto, recta, segmento, polígonos, circunferencia, etc.)
Conceptos/	• Previos: magnitud, segmentos conmensurables e

Definiciones	inconmensurables, razón y proporción para magnitudes conmensurables, conceptos geométricos como punto, recta, ángulo, círculo, circunferencia, arco, etc. • Emergentes: razón y proporción en el sentido de Eudoxo
Proposiciones/ Propiedades	• Propiedades de proporcionalidad • Propiedades y proposiciones para construcciones geométricas • Proposiciones usadas para aproximar magnitudes
Procedimientos	• Construcciones geométricas (segmentos, diagonal del cuadrado/pentágono, rectas paralelas/perpendiculares, cuadrados, circunferencias, etc.). • Técnicas para dividir un segmento en media y extrema razón • Método de exhaución
Argumentos	• Validar sus resultados apoyados en sus construcciones • Demostrar deductivamente en base a resultados anteriores • Demostrar por reducción al absurdo

3.2.3 Significado de irracional como aproximación por racionales

Se considera que la denominación de *significado de número irracional como aproximación por medio de racionales* resulta tácita, en el sentido que el irracional está asociada en la aproximación de su valor por medio de las fracciones continuas, es decir, por números racionales.

La tabla 4 presenta los objetos primarios que se articulan en la configuración epistémica de este significado parcial de número irracional.

Tabla 4. *Configuración epistémica asociada al significado de número irracional como aproximación por racionales*

Objetos Primarios	Descripción
Situaciones Problemas	• Obtener de raíces cuadradas de números enteros no cuadrados perfectos

	• Aproximar irracionales por fracciones continuas
Lenguaje	• Verbal: lenguaje algebraico (solución de ecuaciones, ecuaciones cuadráticas, radicales) y lenguaje numérico. • Simbólico: símbolos para denotar las raíces cuadradas ($\sqrt{\ }$), las fracciones y las fracciones continuas.
Conceptos/ Definiciones	• Previos: solución de una ecuación lineal y cuadrática, raíz cuadrada, máximo común divisor, conceptos algebraicos para resolver ecuaciones cuadráticas. • Emergentes: fracción continua, fracción continua finita, fracción continua infinita, convergente de una fracción continua, fracción simple continua, número metálicos (familia del número de oro).
Proposiciones/ Propiedades	• Propiedades algebraicas relacionadas a ecuaciones cuadráticas, racionalización y productos notables; propiedades aritméticas asociadas a operaciones con fracciones y a las divisiones sucesivas (algoritmo de Euclides) • Propiedades y proposiciones de fracciones continuas. Por ejemplo, toda fracción continua simple infinita representa a un número irracional; toda fracción continua periódica representa un número irracional cuadrático. • Propiedades de los números metálicos
Procedimientos	• Algoritmo de Euclides • Aproximaciones a números irracionales por medio de los convergentes (cantidad finita de fracciones simples continuas obtenidas por el truncamiento de una fracción continua simple infinita) de una fracción continua
Argumentos	• Demostrar deductivamente en base a resultados anteriores • Afirmaciones basadas en operaciones algebraicas y aritméticas (algoritmo de Euclides)

3.2.4 Significado de irracional como número.

En este significado, se incluyen aquellas prácticas donde los irracionales asumen su estatus de número. Por ello, reciben tratamientos aritméticos y son asociados a la completitud de la recta, donde se estudian sus propiedades. Los elementos emergentes de esta configuración se describen en la tabla 5.

Tabla 5. *Configuración epistémica asociada al significado de número irracional como número*

Objetos Primarios	Descripción
Situaciones Problemas	• Problema en los fundamentos de la matemática • Problema sobre la continuidad de la recta numérica
Lenguaje	• Verbal: usa términos algebraicos, geométricos (punto, recta, continuidad), términos de teoría de conjuntos • Simbólico: uso de letras como notación para identificar a los conjuntos, notación usada para sucesiones, cortaduras, desigualdades, límites y series $(a_n,\ (A,B), <,\ ,\lim, \sum\ )$. • Gráfico: dibujos para las biyecciones (pruebas de Cantor)
Conceptos-Definiciones	• Previos: número racional, series, funciones, sucesiones de Cauchy, convergencia, límites, funciones trigonométricas, densidad, relación de orden • Emergentes: cortadura, número irracional como límite de números racionales y como cortadura.
Proposiciones/ Propiedades	• Propiedades del axioma del supremo • Propiedades de los números racionales e irracionales • Propiedad del buen orden • Continuidad de la recta
Procedimientos	• Cortaduras de Dedekind, límites de sucesiones fundamentales (sucesiones de Cauchy) • Asociación de los puntos de la recta con los racionales

Argumentos	• Axioma de la completitud de la recta • Demuestran sus resultados deductivamente y de manera formal.

3.2.5 Significado de irracional como número algebraico o trascendente

Luego de asumir su estatus de número, los números irracionales fueron divididos en dos grupos y pueden ser identificados como un número algebraico o como un número trascendente. Es por ello que hemos considerado optar por dicha denominación.

Los elementos identificados para este significado se muestran en la tabla 6.

Tabla 6. *Configuración epistémica asociada al significado de número irracional como algebraico o trascendente*

Objetos Primarios	Descripción
Situaciones Problemas	• Encontrar soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros, donde las soluciones sean diferentes a los racionales e irracionales algebraicos • Búsqueda de otros irracionales
Lenguaje	• Verbal: expresiones algebraicas y de conjuntos • Simbólico: uso de letras como notación para identificar conjuntos, notación de polinomios y funciones, valor absoluto ($P(x); f(x); \|\ \|$) • Gráfico: dibujos geométricos para números construibles
Conceptos-Definiciones	• Previas: números racionales, números irracionales, densidad, valor absoluto, raíz de una ecuación polinómica, números algebraicos, derivadas, integrales • Emergentes: números trascendentes como los números de Liouville, conjuntos numerables y no numerables, números construibles, altura de una ecuación polinómica

Proposiciones/ Propiedades	• Propiedades de valor absoluto • Propiedades de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros • Propiedades de las integrales y derivadas (linealidad, TFC) • Propiedades de los números trascendentes (son infinitos, son irracionales, son más numerosos que los racionales)
Procedimientos	• Construcción de números de Liouville • Construcción de números por medio de la desigualdad de Liouville • Uso de desigualdades de valor absoluto • Agrupación de números algebraicos por el tamaño de su altura
Argumentos	• Demostraciones deductivas • Reducción al absurdo

3.3 Identificación de aspectos fundamentales asociados a la naturaleza de los irracionales

En este apartado, en correspondencia a la segunda etapa de nuestro estudio y como consecuencia de la identificación de los significados de referencia del número irracional, se describirá algunos aspectos asociados a la naturaleza de los números irracionales que hemos identificado. De esta manera, estamos en condiciones de identificar qué tareas podrían incluirse en la educación secundaria para introducir los números irracionales y cuáles no serían pertinentes. Esto debido a que alguno de los conocimientos previos y los objetos que se movilizan estarían fuera del dominio de la matemática estudiada en dicho nivel educativo.

Se empezará señalando que, de los significados descritos, se reconoce la complejidad del número irracional. Sin embargo, rescatando algunos de los aspectos elementales asociadas a la naturaleza del número irracional, se podrían proponer algunas tareas que sí podrían ser abordadas en la educación básica. Por esta razón, se presentará a continuación algunos de esos aspectos. Asimismo, se irá sugiriendo el tipo de tareas que podrían ser adecuadas para introducir la enseñanza de los números irracionales.

- Aspecto 1

  La noción de infinito está asociada intrínsecamente con el número irracional. El infinito ha estado presente siempre, desde el descubrimiento de los inconmensurables. Por ejemplo, llevó a los griegos a reconocer que era necesario repetir un infinito número de veces el método del antifairesis para encontrar una unidad común de dos segmentos. Así también, se reconoce la presencia del infinito cuando se quiere aproximar el área de un círculo por medio de polígonos inscritos o circunscritos a dicho círculo, puesto que el área de dichos polígonos son más próximos a la del círculo siempre que tengan la mayor cantidad de lados; asimismo, en la caracterización del número irracional como una fracción continua infinita; también como el límite de números racionales, y, finalmente en la representación decimal compuesta por infinitas cifras sin un periodo.

En esa línea, investigaciones desarrolladas en Educación Matemática con relación a nociones asociadas al infinito, corresponden a la línea de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado, donde los conceptos toman un papel dual, debido a que pueden ser considerados como un proceso y también como un objeto (Cantoral, 2005). Asimismo, se reconocen dos tipos de infinito, un infinito potencial y un infinito actual. Al respecto, Roa y Oktaç (2014) afirman que el infinito potencial es percibido como una transformación que se va repitiendo sin fin, las cuales se generan por medio de un proceso, tantos elementos como uno desee. Por otra parte, señalan que el infinito actual es cuando se hace referencia a algo ya terminado, como un objeto estático el cual puede construirse a partir de un proceso.

La complejidad del infinito ha sido reportada en muchas investigaciones de estudio, como la realizada por Garbin y Azcárate (2001) sobre el concepto del infinito actual, donde muestran que los estudiantes de bachillerato (universitarios en los primeros ciclos) responden con incoherencias o de manera inconsistente a una misma pregunta asociada al infinito, pero con diferentes tipos de representación (lenguaje geométrico, verbal, numérico, gráfico y algebraico). Otra investigación referida al infinito es la desarrollada por Villabona y Roa (2016), quienes hacen un estudio sobre los procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes, donde afirman que el realizar acciones sobre los procedimientos permite construir estructuras más complejas (objeto).

Así, el hecho que la noción de infinito sea intrínseca al número irracional nos permite explicar lo compleja que resulta esa noción y las prácticas que lo involucran. En esa línea, tomando en cuenta lo mencionado por Villabona y Roa (2016), las tareas que podrían considerarse como adecuadas, para entender la relación que existe entre la noción de infinito y los irracionales, son aquellas que incluyen procesos de iteración, por ejemplo, tareas como las de aproximar el valor de $\sqrt{18}$ por medio de fracciones continuas (tal como ha sido descrita en el análisis epistemológico), puesto que encontrar un valor aproximado a este irracional por fracciones continuas no lleva a procesos iterativos. De esta manera, se podría asociar al infinito con el número irracional. Cabe señalar que, para este tipo de tareas, deben ser considerados los objetos primarios (como los conceptos previos por ejemplo) descritos en el significado de número irracional como aproximación de racionales.

- Aspecto 2

  Otro aspecto fundamental es que el origen, la razón de ser de los irracionales, siempre ha respondido a problemas en contextos matemáticos, inclusive, desde su origen (contextos geométricos, aritméticos).

  En ese sentido, aquellas tareas concretas que impliquen mediciones directas no generarán la necesidad de emplear números irracionales, porque estas tareas son pertinentes, como menciona Escolano y Gairín (2005), para introducir los números racionales, ya que para medir se emplea una unidad de medida y el resultado de una medición siempre se reportará como un número con una cantidad finita de cifras decimales, es decir, como un número racional.

  Así, tareas centradas en el cálculo de una medida no serán pertinentes. Por ejemplo, en el caso particular de tareas que pidan al estudiante calcular por medio de un instrumento de medición, la longitud de una circunferencia o la diagonal de un cuadrado no le permitirán atribuirle el significado de número irracional. Sin embargo, en este aspecto, no se puede incluir a aquellas tareas en las que se pide determinar teóricamente la medida de una longitud empleando una fórmula, como por ejemplo tareas que pidan determinar la longitud de la hipotenusa de un triángulo o la diagonal de un cuadrado, puesto que la presencia de los irracionales generarán ecuaciones cuadráticas, las cuales sí están asociadas a la noción de número irracional, ya que la solución de dicha ecuación cuadrática está relacionada a una raíz cuadrada, es decir, al significado del número irracional como aproximación por racionales.

- Aspecto 3

  El número irracional también está asociado a las ecuaciones polinómicas (relacionado a la última configuración epistémica del número irracional como algebraico o trascendente), donde el número irracional es considerado como solución de ecuaciones polinómicas de coeficientes enteros, los llamados números irracionales algebraicos.

  En ese sentido, al introducir los números irracionales, se podría considerar tareas sobre la búsqueda de soluciones a ecuaciones cuadráticas, donde las soluciones sean raíces cuadradas de números enteros no cuadrados perfectos. Asimismo, para atribuir un significado al símbolo $\sqrt{\ }$, se podrían complementar por medio de preguntas. Por ejemplo, ¿cómo puedo obtener el valor de $\sqrt{2}$?, ¿existe un número racional cuyo cuadrado es igual a 2?, ¿a qué número racional está más próximo? Es decir, aquellas interrogantes que permitan observar y notar la necesidad de un nuevo tipo de número para dar solución a dicha ecuación y que los números racionales no son suficientes para encontrar solución a algunas ecuaciones, en otras palabras, tareas que propongan el principio de necesidad.

- Aspecto 4

  En relación a la representación con cifras decimales del número irracional, tal como se señaló en el análisis epistemológico, esta ha sido empleada por Cantor para demostrar la no numerabilidad de los reales, así como por Liouville en la construcción de los números trascendentes. Esta representación de los irracionales en cifras decimales, es decir, como un número con cifras decimales infinitas sin periodo, permite establecer una diferencia concreta con los números racionales (número con cifras decimales finitas o periódicas). Por esa razón, se considera que las tareas asociadas a este aspecto podrían contribuir a la comprensión de los números irracionales.

Sin embargo, como menciona la investigación de Reina y Wilhelmi (2017), dada una representación decimal, reconocer a un número como racional o irracional por medio de la visualización, no es posible. Para ello, según los autores, es necesario conocer la estructura de su origen, es decir, cómo se ha obtenido dicha representación. Así, por ejemplo, el número representado en la figura 14 muestra una apariencia de cierto periodo en sus cifras, lo cual puede llevar a afirmar que se trata de un número racional. En efecto, si se mostrara de manera parcial, como usualmente se observa en los textos, se podría tener el número $2,72727272727272...$, que aparentemente es el número racional $2,72$, o el número

$$2,72727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272\\ 72727272727272727272727272695636363...$$

Este número, a partir de la cifra 100, tiene una apariencia de tener periodo, es decir, se observaría como el número racional:

$$2,72727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272\\ 727272727272727272727272727269563.$$

Así, sucesivamente, se van tomando parcelas. Con una cantidad finita de cifras decimales, se observarían regularidades típicas de un número racional periódico puro o mixto. Sin embargo, este número es irracional, puesto que proviene de calcular:

$$\sqrt{\frac{9\times 100^{50}+(112-44\times 50)}{121}}$$

2,727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727
2727272727272727272727269563636363636363636363636363636363636363636363636363636
3636363636363636363636363636363636363636363452872727272727272727272727272727272
727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272725144232727272
727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727
2727272696409556363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363
6363636363636363636363636358624184680727272727272727272727272727272727272727272
727272727272727272727272727272727272727272727185515358899199999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999998410251
39936255999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999
99999999999997003323887798425599999999999999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999994206426183076956159999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999999998857507243302775754752
. . .

Figura 14. Número irracional con aparente periodicidad
Fuente: (Reina, Wilhelmi, 2017, p. 5)

Del mismo modo, Reina y Wilhelmi (2017) muestran números racionales con apariencia de no tener periodicidad. No obstante, el periodo de dicho número racional se puede apreciar después de una cantidad grande de cifras decimales. Por ejemplo, el número racional $\frac{1}{498}$, ver figura 15, en su representación con cifras decimales, posee un periodo compuesto por 498 cifras (color rojo), el cual comienza desde la segunda cifra decimal.

Así, si solo se mostrase algunas cifras decimales de dicho número, por ejemplo $0,001002004008016032...$, podría llevar a afirmar que dicho número es irracional cuando realmente no es el caso.

0,0010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505010 02…

Figura 15. Número racional con aparente no periodicidad
Fuente: (Reina, Wilhelmi, 2017, p. 5)

En ese sentido, de acuerdo a las observaciones de estos investigadores, considerar tareas sobre la representación de un número irracional con cifras decimales serán pertinentes en la medida que se considere construir un número irracional, teniendo en cuenta cómo está estructurada, además, de no poseer periodo. Así, tareas que tengan este aspecto, permitirían comprender la diferencia entre un número racional y un irracional, mas no por el reconocimiento de un número ya dado.

- Aspecto 5

  Este quinto aspecto está asociado al primero, pues está relacionado a la necesidad de enfatizar que cualquier intento de hacer operaciones con un número irracional implica un proceso de aproximación. Al respecto, Pommer (2012) afirma que actividades relacionadas al cálculo numérico pueden ayudar a hacer la distinción entre lo exacto y lo aproximado, y que a partir de esa distinción se pueda acceder al concepto de número irracional.

De ese modo, se podrían implementar tareas que requieran el uso de computadoras y software para realizar cálculos de aproximación, ya que tareas de este tipo permitirían comprender que para obtener un valor aproximado de un número irracional es necesario realizar el truncamiento en alguna de sus cifras decimales. Asimismo, comprender que las computadoras siempre darán como resultado un número racional aproximado permitirá asociar al número irracional con el infinito, ya que por más grande que sea la capacidad de memoria de un computador, este tiene sus limitaciones y siempre realizará una cantidad finita de pasos.

Por ejemplo, tareas que requieran iteraciones para aproximar el valor de π, utilizando la aproximación del área de un círculo por medio de polígonos (método de exhaución), podrían contribuir con la comprensión de número irracional y su naturaleza infinita.

El análisis a investigaciones de corte epistemológico sobre los números irracionales, nos ha servido para describir diferentes significados parciales del número irracional. A su vez, estos significados nos han permitido detallar diferentes aspectos sobre su naturaleza y puntualizar sobre qué podría considerarse en las tareas para introducir los números irracionales. Asimismo, con todo lo señalado en la sección 3.3, se ha logrado alcanzar el segundo objetivo planteado de nuestra investigación, en concordancia con la segunda etapa planteada en la metodología de este estudio.

Con el propósito de lograr nuestro último objetivo, revisar los libros didácticos empleados en la secundaria, en el siguiente capítulo, se analizarán los textos didácticos empleados en la secundaria peruana para luego ver si algunos de los aspectos descritos, en este apartado, son considerados en las tareas planteadas en dichos textos.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE TEXTOS DIDÁCTICOS EMPLEADOS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

Con el propósito de alcanzar el tercer y último objetivo específico de nuestra investigación, en este capítulo, se ha dedicado al análisis de textos didácticos empleados en la secundaria peruana. La finalidad de este análisis es ver en qué medida las tareas empleadas, para introducir los números irracionales, consideran aspectos de su naturaleza, como los descritos explícitamente en la sección 3.3 del capítulo anterior. Es decir, dichos aspectos nos permitirán reconocer qué tareas serían pertinentes para abordar la noción de número irracional en la secundaria.

En ese sentido, primero, se ubicará el estudio de los irracionales en el currículo nacional. Para ello, tomando en consideración que el área de matemáticas se describe en términos de competencias, identificaremos aquellas que involucran a los números irracionales. Luego, son analizados los textos oficiales de matemáticas del tercer al quinto grado de educación secundaria, ya que en este nivel es donde se estudian los irracionales.

Para el análisis de los libros, se han identificado las unidades que explícitamente declaran que estudian a los números irracionales. También, se incluye un estudio de otras unidades en donde los irracionales aparecen como parte de la solución de un problema, por ejemplo, en geometría, trigonometría, etc. Asimismo, el análisis se hará describiendo las tareas desde el EOS.

4.1 Los irracionales en los documentos oficiales

El nuevo currículo nacional del Perú divide el desarrollo del área matemática en cuatro competencias. Cada una de estas competencias están asociadas a 1) resolver problemas de cantidad, 2) resolver problemas de regularidad, equivalencia y cambio, 3) resolver problemas de movimiento, forma y localización, y 4) resolver problemas de gestión de datos e incertidumbre (Perú, 2017). Asimismo, el concepto de número irracional aparece en la competencia de resolver problemas de cantidad y se desarrolla con estudiantes que se encuentren en el ciclo VII, es decir, en el nivel secundario que comprende del tercer al quinto grado.

Respecto a la competencia “resuelve problemas de cantidad”, un estudiante que se encuentre al final del ciclo VII, según el nuevo currículo nacional:

> Resuelve problemas referidos a las relaciones entre cantidades muy grandes o muy pequeñas, magnitudes o intercambios financieros, traduciéndolas a expresiones numéricas y operativas con números irracionales o racionales (…). Expresa su comprensión de los números racionales e irracionales, de sus operaciones y propiedades (…) empleando lenguaje matemático y diversas representaciones (…). Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos de cálculo y estimación para resolver problemas, los evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. (Perú, 2017, p. 145)

En esta línea, el nuevo currículo nacional refiere que un estudiante de este ciclo, para comprender el concepto de número irracional, debe usar diversas representaciones, lenguaje matemático, propiedades, procedimientos y resolver problemas de varios tipos.

Si bien mencionan problemas donde está inmerso el número irracional, el currículo nacional no muestra ninguno de estos problemas. Es por ello que, para ver en qué medida pretenden alcanzar dicha competencia, se analizarán los textos didácticos usados en la secundaria peruana.

Los textos didácticos que se han elegido para su análisis son los libros que el Ministerio de Educación del Perú distribuye gratuitamente a los estudiantes de todos los niveles. La razón de la elección de estos textos didácticos es porque, primero, es el de mayor uso, lo que implica un representatividad asociada a un significado institucional; y, segundo, porque al ser libros oficiales que el Ministerio de Educación distribuye a sus estudiantes estos deben de ir en concordancia con las competencias que, según el currículo nacional, un estudiante debe lograr.

En ese sentido, los libros seleccionados para nuestro análisis son los siguientes:

- Matemática 3 secundaria, (Perú, 2016a)
- Matemática 3 cuaderno de trabajo, (Perú, 2016b)
- Matemática 4 secundaria, (Perú, 2016c)
- Matemática 4 cuaderno de trabajo, (Perú, 2016d)
- Matemática 5 secundaria, (Perú, 2016e)

- Matemática 5 cuaderno de trabajo, (Perú, 2016f)

En el siguiente apartado, describimos y analizamos dichos textos didácticos seleccionados.

4.2 Pertinencia de las situaciones problema propuestas en los textos didácticos

En esta sección, se presenta el análisis de los textos didácticos empleados en la secundaria peruana. Cada apartado está dedicado al análisis del texto didáctico por grado. Es decir, del tercero al quinto grado, el análisis se realiza en los capítulos donde se introducen los números irracionales y en aquellos capítulos donde hacen uso de este conjunto numérico.

4.2.1 Análisis de las situaciones propuestas en el texto didáctico del tercer grado

En este apartado, se presenta el análisis de los textos utilizado por estudiantes del tercer grado de secundaria. Los libros seleccionados son "Matemática 3, secundaria" (Perú, 2016a). En él, se presentan aspectos teóricos y una serie de problemas resueltos; y "Matemática 3, cuaderno de trabajo" (Perú, 2016b), empleado como material que complementa al texto anterior, en el cual se proponen tareas con preguntas que guían al estudiante a resolverlas.

En ese sentido, este apartado está compuesto por dos secciones: la primera dedicada a describir los problemas propuestos en el texto didáctico y la segunda a describir los problemas propuestos en el cuaderno de trabajo.

4.2.1.1 Análisis del texto didáctico

El texto del tercer grado está compuesto por 12 capítulos. En el primero de ellos, introduce el concepto de los números irracionales.

Por otro lado, los capítulos en las cuales se hallaron tareas donde los irracionales aparecen como parte de la solución de un problema se mencionan a continuación:

- Capítulo 4: Estudio de las progresiones aritméticas y geométricas
- Capítulo 6: Estudio de las ecuaciones cuadráticas
- Capítulo 8: Estudio de los triángulos rectángulos y razones trigonométricas
- Capítulo 10: Estudio sobre sólidos geométricos

- Capítulo 11: Estudio dedicado a la estadística

A continuación, se detallará el análisis del texto.

El texto, en el primer capítulo, donde se introducen a los números irracionales, inicia definiendo al número irracional como aquel número que tiene infinitas cifras decimales no periódicas y que no pueden ser representados como una fracción. Es decir, la definición de número irracional no se origina por la necesidad de resolver una situación problemática, sino más bien como justificación de la existencia de otro tipo de número diferente a los racionales. Del mismo modo, caracteriza este conjunto numérico afirmando que los irracionales pueden ser de dos tipos, algebraicos o trascendentes, ver figura 16.

Al presentar esta caracterización de los irracionales, muestra ejemplos particulares como π; $\sqrt{3}$; $0{,}101100111000...$, donde, si bien menciona que los irracionales en su representación con cifras decimales posee infinitas cifras, no se hace explícito el aspecto del infinito cuando se presenta $\sqrt{3}$, ni tampoco que no pueda ser representado por una fracción.

Asimismo, al ejemplificar a los irracionales algebraicos, como soluciones de ecuaciones algebraicas, solo presenta el caso particular de una ecuación cuadrática y no sobre otro tipo de raíces como $\sqrt[3]{3}$ u otro que no tenga índice dos. Del mismo modo, al presentar ejemplos de irracionales trascendentes, no hace mención que, si un número está en su representación decimal, no se puede determinar qué tipo de número es (racional o irracional), tal como mencionamos en el aspecto 4.

Conjunto de los números irracionales

Un número irracional es aquel que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Además, no se puede expresar como fracción.

Los números irracionales pueden ser:

- **Números irracionales algebraicos.** Son aquellos números que corresponden a soluciones inexactas de ecuaciones algebraicas. Así, la ecuación $x^2 = 3$ tiene dos soluciones irracionales algebraicas: $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$.
- **Números irracionales trascendentes.** Son aquellos números que no corresponden a soluciones de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo: $\pi = 3{,}141\ 59\ldots$

Existen números irracionales cuya escritura decimal presenta cierta regla de formación, pero no periodo. Por ejemplo: $0{,}101100111000\ldots$; $0{,}2468101214\ldots$

Figura 16. Definición de número irracional en el texto de tercer grado
Fuente: (Perú, 2016a, p. 16)

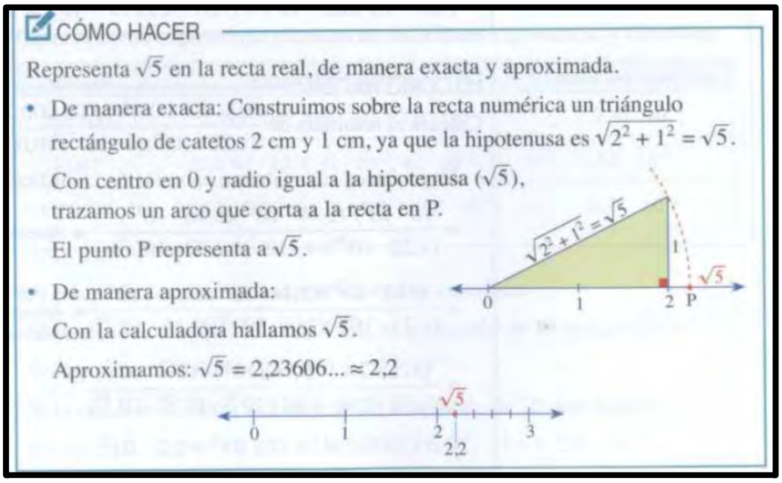
Por otro lado, el texto presenta 4 situaciones problemas, todas situadas en el contexto matemático (geométrico): una asociada a la representación de número irracional en la recta numérica, otra al cálculo de perímetros, y, finalmente, a la medida teórica de la diagonal de un rectángulo (teorema de Pitágoras), es decir, asociadas a π y a la raíz cuadrada de un entero no cuadrado perfecto.

A continuación, se describirán los problemas presentados donde se introduce a los números irracionales.

- Problema 1: *Representar un número irracional en la recta real*

  Se pide representar el número irracional $\sqrt{5}$ en la recta numérica de manera exacta y aproximada. El procedimiento empleado para su representación exacta es a través de construcciones geométricas, construcción de un arco con centro en el origen de la recta numérica y radio igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo, cuyos catetos son 2cm y 1cm. Para la representación aproximada, se basa en el uso de la calculadora aproximando el resultado a un racional y, así, ubicarlo en la recta numérica, ver figura 17.

  Además, se puede mencionar que los objetos primarios emergentes en la solución son conceptos de aproximación, propiedades geométricas (teorema de Pitágoras), el lenguaje verbal geométrico (recta), el gráfico, simbólico, y la argumentación que se basa en construcciones geométricas y en la definición de número irracional.


CÓMO HACER

Representa $\sqrt{5}$ en la recta real, de manera exacta y aproximada.

- De manera exacta: Construimos sobre la recta numérica un triángulo rectángulo de catetos 2 cm y 1 cm, ya que la hipotenusa es $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

  Con centro en 0 y radio igual a la hipotenusa ($\sqrt{5}$), trazamos un arco que corta a la recta en P.

  El punto P representa a $\sqrt{5}$.
- De manera aproximada:

  Con la calculadora hallamos $\sqrt{5}$.

  Aproximamos: $\sqrt{5}=2{,}23606... \approx 2{,}2$

Figura 17. Problema de representar $\sqrt{5}$ en la recta
Fuente: (Perú, 2016a, p. 17)

- Problema 2: *Encontrar el perímetro de un terreno*

  El problema plantea calcular la longitud de uno de los lados de un terreno rectangular, ver figura 18. Para el cálculo de la longitud de uno de los lados del terreno rectangular, se procede usando el teorema de Pitágoras. Es decir, el número irracional emerge como solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 26^2 = 50^2$, donde x representa la longitud de uno de los lados del terreno. Para la obtención de la longitud, primero, se realiza el cálculo teórico, pero luego se procede al valor aproximado por medio de la calculadora.

  Para dar respuesta a este problema, emerge el concepto de aproximación (por exceso y defecto) y el de redondeo, que se usó al resolver el problema 1, pero recién se define antes de resolver el problema 2.

  De los objetos primarios emergentes podemos decir que: el concepto previo es la la definición de perímetro, las propiedades siguen siendo geométricos y algebraicos, lo mismo que los elementos lingüísticos (símbolos para ecuaciones, gráficos) y sus argumentos (trazos de la diagonal, teorema de Pitágoras).

  Cabe destacar que el texto aclara que la finalidad de la aproximación es para poder hacer cálculos con números irracionales, ya que, por su infinitud de cifras decimales, se requiere solo una cantidad finita de cifras decimales. Sin embargo, esta tarea tampoco muestra la relación que hay entre el número irracional y el infinito, puesto que, como mencionamos en el aspecto 5, la limitación de la calculadora mostrará una cantidad finita de cifras decimales.


CÓMO HACER — EN CONTEXTO

David tenía un terreno rectangular como el que se muestra. Si compró terrenos contiguos que aumentaron las dimensiones del terreno original en 5 metros, siendo b el nuevo largo y a el nuevo ancho, ¿cuánto mide el nuevo perímetro del terreno? (**Aproxima por exceso** al centésimo).

- Calculamos el largo l del terreno y lo aproximamos por exceso al milésimo:

  $l = \sqrt{50^2 - 26^2} \rightarrow l = \sqrt{1824} = 42{,}708|31301\ldots \rightarrow 42{,}709$

- Hallamos el nuevo perímetro del terreno y aproximamos al centésimo:

  $b = 42{,}709 + 5 = 47{,}709$ m; $a = 26 + 5 = 31$ m $\rightarrow$ P $= 157{,}41|8$ m $\approx 157{,}42$ m

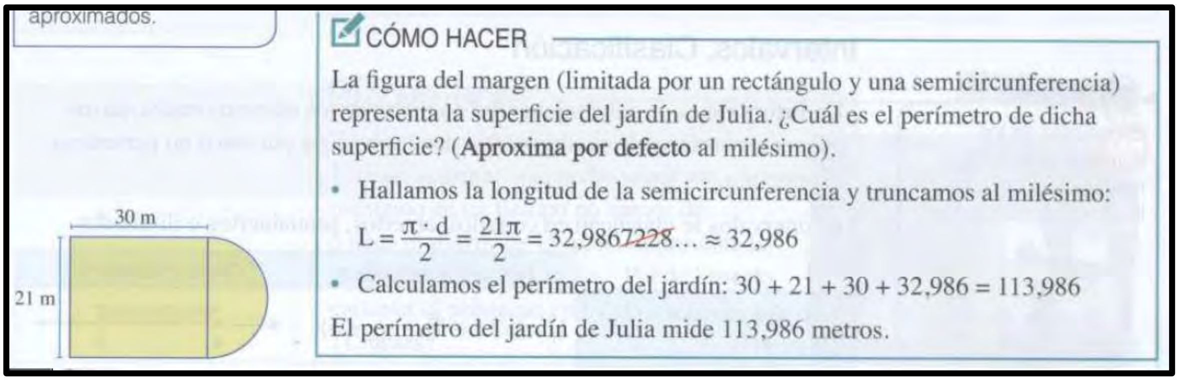
El nuevo perímetro del terreno es de 157,42 m.

Figura 18. Problema de la longitud del lado de un rectángulo
Fuente: (Perú, 2016a, p. 17)

- Problema 3: *Encontrar el perímetro del terreno conformado por un rectángulo y un semicírculo*

  En este problema, ver figura 19, se pide calcular el perímetro de un terreno formado por segmentos y una semicircunferencia. El número irracional emerge por la presencia de π. Para la solución, se utiliza la fórmula para calcular la longitud de una circunferencia. Además, π aparece como una constante que acompaña a la formula y no se discute la relación que tiene este número con la circunferencia. Nuevamente, se procede a la aproximación del resultado por medio de la calculadora.

  Los conocimientos previos considerados son el perímetro de una circunferencia y la fórmula para su cálculo. Los argumentos se basan en las fórmulas geométricas y los elementos lingüísticos son geométricos, tanto en lo verbal como en lo gráfico.



CÓMO HACER

La figura del margen (limitada por un rectángulo y una semicircunferencia) representa la superficie del jardín de Julia. ¿Cuál es el perímetro de dicha superficie? (**Aproxima por defecto** al milésimo).

- Hallamos la longitud de la semicircunferencia y truncamos al milésimo: $L = \frac{\pi \cdot d}{2} = \frac{21\pi}{2} = 32{,}986\cancel{7228}\ldots \approx 32{,}986$
- Calculamos el perímetro del jardín: $30 + 21 + 30 + 32{,}986 = 113{,}986$

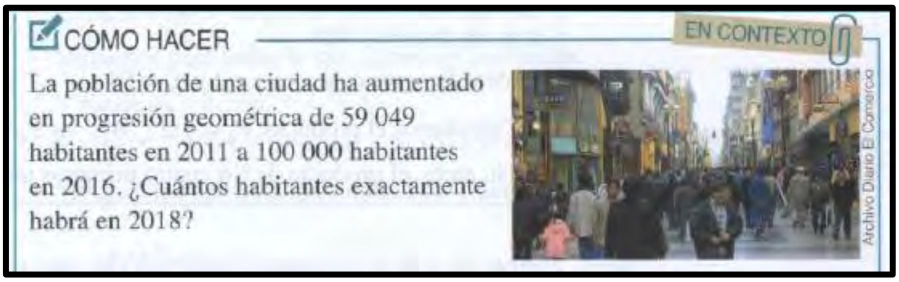
El perímetro del jardín de Julia mide 113,986 metros.

Figura 19. Problema del perímetro
Fuente: (Perú, 2016a, p. 17)

Si bien, líneas arriba, mencionamos 4 problemas presentes en el texto, solo analizaremos estos tres, puesto que el cuarto problema presentado es de la misma naturaleza que el problema 3. Es decir, está relacionado a la longitud de un arco de circunferencia.

Por otro lado, la aparición de los irracionales en la solución en diferentes problemas, donde no se trabaja exclusivamente el tema de los irracionales, se ha encontrado las siguientes situaciones problema:

En el capítulo 4, al resolver problemas sobre progresiones geométricas e interpolaciones, se muestran expresiones algebraicas para el cálculo de la razón de la progresión. Sin embargo, el desarrollo de la solución lleva al cálculo de extraer la raíz de un número, el resultado acaba siendo una cantidad entera o racional, debido a que los elementos de la progresión están conformados por cantidades enteras, por ejemplo, véase la figura 20.


CÓMO HACER

EN CONTEXTO

La población de una ciudad ha aumentado en progresión geométrica de 59 049 habitantes en 2011 a 100 000 habitantes en 2016. ¿Cuántos habitantes exactamente habrá en 2018?

Archivo Diario El Comercio

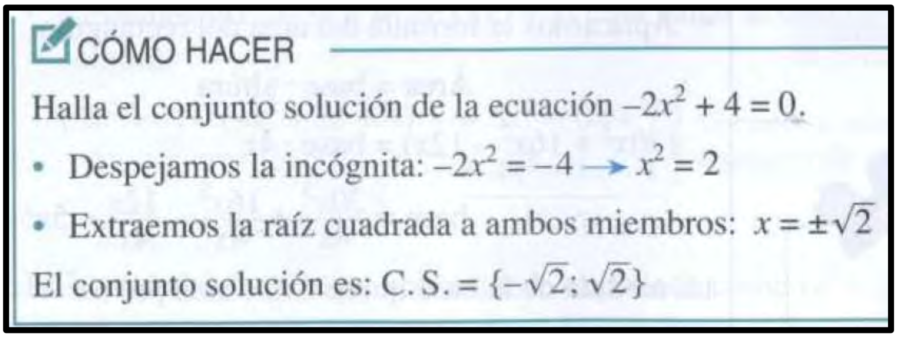
Figura 20. Problema de progresión geométrica
Fuente: (Perú, 2016a, p. 61)

La solución a este problema lleva a extraer la raíz quinta:

$$100000 = 59049r^{6-1} \Rightarrow r^5 = \frac{100000}{59049} \Rightarrow r = \frac{10}{9}$$

Como se puede observar, la razón de esta progresión es una cantidad racional. Esto se debe a que los números presentados llevan a una solución de este tipo.

Del mismo modo, en el capítulo 6, donde se desarrolla las ecuaciones y funciones cuadráticas, se plantean problemas donde aparecen números irracionales como soluciones de dichas ecuaciones. Los problemas planteados son puramente intra matemáticos, en el ámbito algebraico y geométrico, por ejemplo, ver figura 21:


CÓMO HACER

Halla el conjunto solución de la ecuación $-2x^2 + 4 = 0$.

- Despejamos la incógnita: $-2x^2 = -4 \rightarrow x^2 = 2$
- Extraemos la raíz cuadrada a ambos miembros: $x = \pm\sqrt{2}$

El conjunto solución es: C. S. = $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

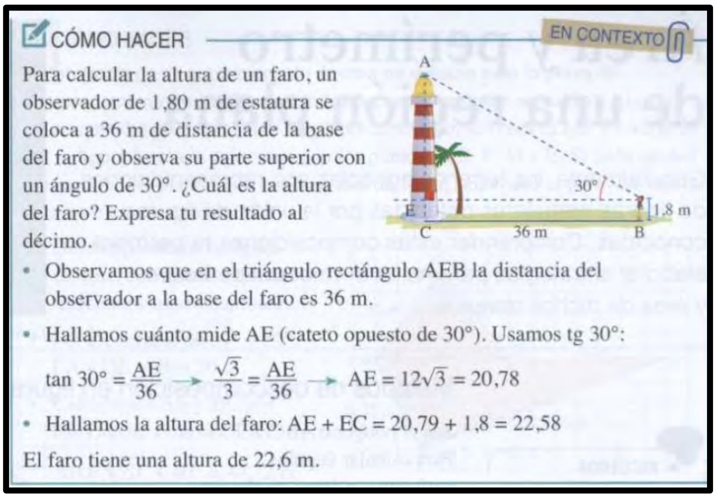
Figura 21. Irracional como solución de una ecuación cuadrática en el texto de tercer grado
Fuente: (Perú, 2016a, p. 88)

En este problema, como es de esperarse, ya no se discute si la solución es racional o irracional, más bien se considera solución real. Se puede notar que no se utiliza la aproximación para dar respuesta al problema, sino se deja en términos del símbolo de la raíz cuadrada.

Los procedimientos empleados para resolver ecuaciones cuadráticas son el despeje de ecuaciones o el uso de la fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática. Para ello, emerge la definición de conjunto solución, ecuación cuadrática y discriminante, y propiedades emergentes de cómo calcular la suma y producto de sus soluciones. Los argumentos están basados en sus definiciones. El lenguaje utilizado es el verbal algebraico y geométrico (perímetro de un rectángulo, ecuación, soluciones, raíces). En lo simbólico, se usa letras para definir variables y figuras geométricas (rectángulo) en problemas de áreas.

El capítulo 8 es donde más abundan problemas con el uso de los números irracionales. Los problemas planteados son más geométricos. Sin embargo, hay presencia algebraica. Los temas que se desarrollan, en este capítulo, son triángulos rectángulos (se reduce al uso del teorema de Pitágoras), razones trigonométricas (definición del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante en un triángulo rectángulo para ángulos 30°-60°, 45°-45°), ángulo de elevación y depresión, y problemas sobre áreas y perímetros de figuras planas.

En vista que se presentan muchos problemas, se ha elegido uno de ellos donde estén todos los conceptos antes mencionados, a excepción de áreas y perímetros, como el mostrado en la figura 22.


CÓMO HACER

EN CONTEXTO

Para calcular la altura de un faro, un observador de 1,80 m de estatura se coloca a 36 m de distancia de la base del faro y observa su parte superior con un ángulo de 30°. ¿Cuál es la altura del faro? Expresa tu resultado al décimo.

- Observamos que en el triángulo rectángulo AEB la distancia del observador a la base del faro es 36 m.
- Hallamos cuánto mide AE (cateto opuesto de 30°). Usamos tg 30°:

$$\tan 30° = \frac{AE}{36} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AE}{36} \rightarrow AE = 12\sqrt{3} = 20{,}78$$

- Hallamos la altura del faro: AE + EC = 20,79 + 1,8 = 22,58

El faro tiene una altura de 22,6 m.

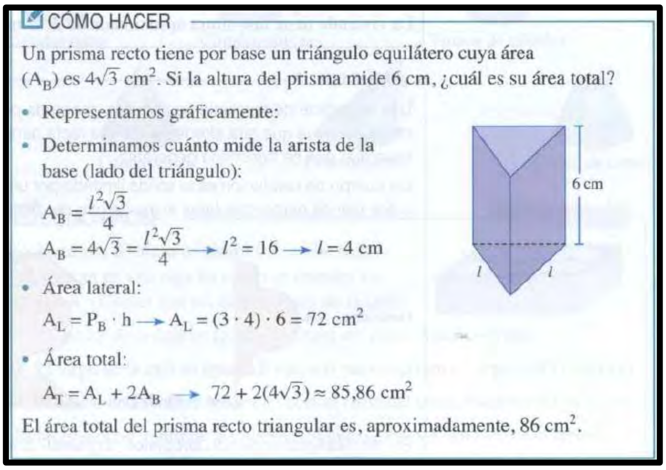
Figura 22. Problemas de triángulos rectángulos, razón trigonométrica, ángulo de elevación
Fuente: (Perú, 2016a, p. 125)

Se puede apreciar que, para la solución del problema, se hace uso del concepto de ángulo de elevación y razón trigonométrica. Asimismo, se resuelve por medio de la razón trigonométrica tangente del triángulo notable 30°-60°, y, a partir de ella, se obtiene la relación entre el número irracional $\sqrt{3}$ y 3. Se puede notar que, para dar respuesta, se vuelve a dar uso a la calculadora, pero no la deja representada como un símbolo, como en el caso de las soluciones en los problemas de ecuaciones cuadráticas. Para su solución, se debe de tener conocimientos previos de conceptos de razones, proporciones y aproximaciones. El lenguaje utilizado, como se puede apreciar, son el verbal, gráfico y simbólico, todos ellos en el ámbito geométrico.

Cabe mencionar que no mostramos problemas sobre áreas y perímetros de figuras planas, como mencionamos líneas arriba, en vista que son del mismo tipo que los problemas presentados en la introducción de números irracionales, y, además, todas ellas se reducen al uso del teorema de Pitágoras.

En el capítulo 10, se desarrolla problemas sobre áreas, volúmenes de prismas y cuerpos de revolución. Con respecto a los problemas de áreas, se puede mencionar que se procede empleando el teorema de Pitágoras. Además, notamos que en la información del problema explícitamente ya aparecen números irracionales, que en problemas anteriores no se presentaban, sino que emergían en la solución de los problemas, como por ejemplo el problema mostrado en la figura 23.

Se puede apreciar que el área del triángulo está dada por el número irracional $4\sqrt{3}$. A partir de él, se puede obtener la longitud del lado del triángulo (base del prisma). El procedimiento empleado es algebraico, igualando la fórmula del área de un triángulo equilátero. Así, los procedimientos son algebraicos, uso de fórmulas para obtener áreas y empleo de la calculadora para dar una respuesta sin el uso del símbolo de raíz cuadrada.


CÓMO HACER

Un prisma recto tiene por base un triángulo equilátero cuya área (A_B) es $4\sqrt{3}$ cm². Si la altura del prisma mide 6 cm, ¿cuál es su área total?

- Representamos gráficamente:
- Determinamos cuánto mide la arista de la base (lado del triángulo):

$$A_B = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_B = 4\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow l^2 = 16 \rightarrow l = 4 \text{ cm}$$

- Área lateral:

$$A_L = P_B \cdot h \rightarrow A_L = (3 \cdot 4) \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

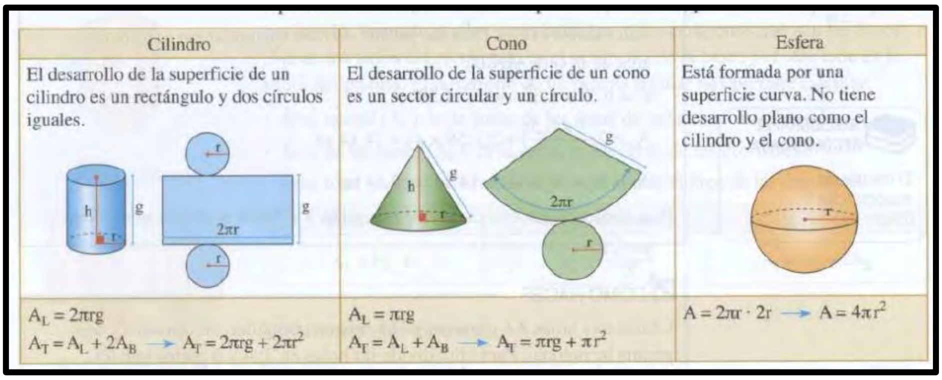
- Área total:

$$A_T = A_L + 2A_B \rightarrow 72 + 2(4\sqrt{3}) \approx 85{,}86 \text{ cm}^2$$

El área total del prisma recto triangular es, aproximadamente, 86 cm².

Figura 23. Problema del área total del prisma
Fuente: (Perú, 2016a, p. 150)

Por otro lado, con respecto a problemas sobre volúmenes de cuerpos de revolución, más que problemas se presentan solo aspectos referidos a las fórmulas para la obtención de volúmenes y a la relación que guardan los volúmenes de estos sólidos, como el volumen de una semiesfera con respecto a la de un cono y cilindro, por ejemplo, ver figura 24. La presencia de los irracionales en este capítulo es por la presencia de π en cada una de las fórmulas.

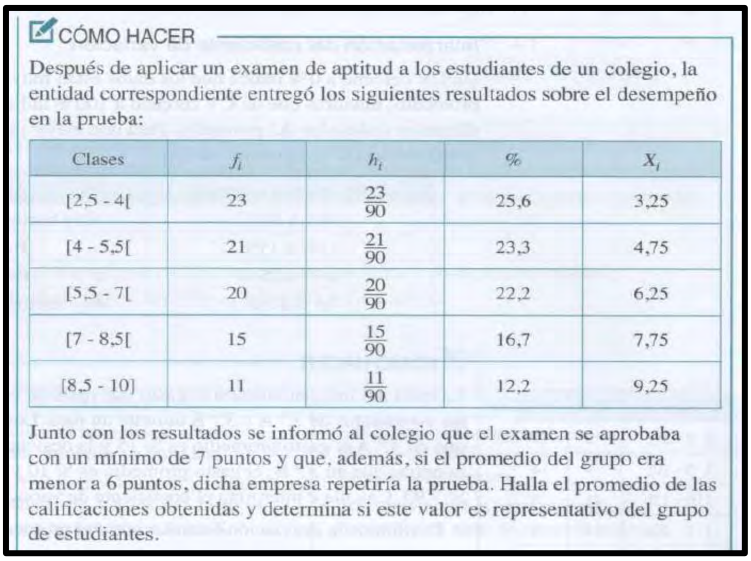


Cilindro	Cono	Esfera
El desarrollo de la superficie de un cilindro es un rectángulo y dos círculos iguales.	El desarrollo de la superficie de un cono es un sector circular y un círculo.	Está formada por una superficie curva. No tiene desarrollo plano como el cilindro y el cono.
$A_L = 2\pi rg$ $A_T = A_L + 2A_B \rightarrow A_T = 2\pi rg + 2\pi r^2$	$A_L = \pi rg$ $A_T = A_L + A_B \rightarrow A_T = \pi rg + \pi r^2$	$A = 2\pi r \cdot 2r \rightarrow A = 4\pi r^2$

Figura 24. Fórmulas para calcular volúmenes de sólidos de revolución
Fuente: (Perú, 2016a, p. 152)

Finalmente, en el capítulo 11, la presencia del número irracional se origina al calcular las medidas de dispersión, en este caso, el de desviación estándar, el cual se obtiene al calcular la raíz cuadrada de la varianza de datos agrupados. Es decir, el número irracional aparece en cálculos desarrollados en la estadística.

En la figura 25, se muestra la tabla de datos agrupados, de ellos se pide calcular la varianza y la desviación estándar.



CÓMO HACER

Después de aplicar un examen de aptitud a los estudiantes de un colegio, la entidad correspondiente entregó los siguientes resultados sobre el desempeño en la prueba:

Clases	f_i	h_i	%	X_i
[2,5 - 4[	23	$\frac{23}{90}$	25,6	3,25
[4 - 5,5[	21	$\frac{21}{90}$	23,3	4,75
[5,5 - 7[	20	$\frac{20}{90}$	22,2	6,25
[7 - 8,5[	15	$\frac{15}{90}$	16,7	7,75
[8,5 - 10]	11	$\frac{11}{90}$	12,2	9,25

Junto con los resultados se informó al colegio que el examen se aprobaba con un mínimo de 7 puntos y que, además, si el promedio del grupo era menor a 6 puntos, dicha empresa repetiría la prueba. Halla el promedio de las calificaciones obtenidas y determina si este valor es representativo del grupo de estudiantes.

Figura 25. Problema de la varianza y la desviación estándar.
Fuente: (Perú, 2016a, p. 173)

Su solución implica hacer varios cálculos y el uso de fórmulas, como el de promedio para datos agrupados, el de desviación estándar y la de varianza.

Así, la media $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 5,75$, luego la varianza será $V = \frac{\sum f_i (\bar{x} - x_i)^2}{\sum f_i} = 4,05$

Finalmente, la desviación estándar $s = \sqrt{V} = \sqrt{4,05}$ es un número irracional. Sin embargo, el texto nuevamente aproxima a un valor racional y da como respuesta $2,01$. Entonces, para la solución de este problema, se han tenido en cuenta conceptos estadísticos, como media, varianza, desviación estándar, datos agrupados, marca de clase y frecuencias. La aparición de número irracional es resultado de un cálculo.

Hasta aquí, se han analizado los problemas planteados en el texto de tercer grado, poniendo más énfasis en aquellos presentados en la introducción de los números irracionales. Después, se ha descrito algunos problemas de otras unidades donde el número irracional se presenta en la solución de estas tareas.

A continuación, se presenta la descripción de los problemas presentados en los cuadernos de trabajo empleado en el tercer grado de secundaria.

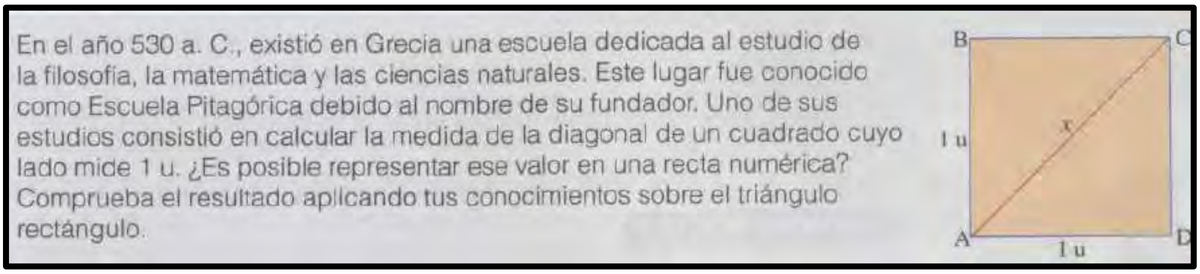
4.2.1.2 Análisis del cuaderno de trabajo

El cuaderno de trabajo del tercer grado aborda a los números irracionales en el primer capítulo, de los ocho capítulos que contiene. Asimismo, es preciso señalar que, aun teniendo menos capítulos que el texto anterior, mantiene los mismos temas tratados. Además, se plantean problemas de la misma forma que el texto. La diferencia se manifiesta en el hecho de que los problemas están puestos en un contexto relacionado con actividades a la que Perú (2016) denomina “contextos de la realidad”, aunque su solución este asociado enteramente a la matemática.

Este cuaderno, donde trata explícitamente el concepto de número irracional, presenta dos problemas sobre los números irracionales. Ambos problemas están relacionados con hallar la medida de la diagonal en un cuadrado, la hipotenusa de un triángulo y su representación en la recta numérica. Es decir, en el ámbito de la geometría, la diferencia es que el segundo problema es guiado y sugiere, para desarrollarlo, el uso del Software libre Geogebra.

- Problema 1: *Representar* $\sqrt{2}$ *en la recta numérica*

  El problema plantea si es posible representar la medida de la hipotenusa de un cuadrado, cuyos lados miden uno, ver figura 26.



En el año 530 a. C., existió en Grecia una escuela dedicada al estudio de la filosofía, la matemática y las ciencias naturales. Este lugar fue conocido como Escuela Pitagórica debido al nombre de su fundador. Uno de sus estudios consistió en calcular la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 u. ¿Es posible representar ese valor en una recta numérica? Comprueba el resultado aplicando tus conocimientos sobre el triángulo rectángulo.

Figura 26. Cálculo de la diagonal de un cuadrado
Fuente: (Perú, 2016b, p. 26)

Para la solución a este problema, el cuaderno guía al estudiante a realizar construcciones con regla y compas, ubicando un cuadrado de lado 1cm sobre la recta numérica. Luego, se le pide graficar un arco de radio igual a la diagonal del cuadrado con centro en el vértice inferior izquierdo del cuadrado. Así, $\sqrt{2}$ es representado como la intersección entre el arco y la recta numérica.

Tal como en el texto anterior, no se observa que esta actividad pueda mostrar la naturaleza del infinito, además, si bien se hacen preguntas como ¿el valor de x es mayor o menor a 1,5? o ¿aproximadamente qué valor es?; estas preguntas no pueden responder si dicha aproximación se podría mejorar con una cantidad mayor de cifras decimales. Se sugirió, en el aspectos 5, que tareas donde se pueda aproximar a un número irracional por medio de iteraciones podrían ayudar, primero, a comprender su naturaleza de infinito y, luego, entender que una aproximación se puede mejorar si se toman más cifras decimales. Asimismo, no se menciona, ni tampoco se pregunta, si todos los irracionales pueden construirse por medio de regla y compas.

- Problema 2: *Calcular la medida de la longitud de la rampa*

  En este segundo problema, se pide calcular la longitud de una rampa, ver figura 27. Para su solución, se guía al estudiante por medio de pautas y preguntas, ya que se le indica al estudiante hacer ciertos procedimientos con el software Geogebra. Por ejemplo, se le pide al estudiante ubicar en el plano cartesiano los puntos $(0,0)$; $(5,0)$ y $(5,2)$ (puntos que se corresponden con las longitudes de la altura y la base de la rampa) y, a partir de ellas, graficar un triángulo rectángulo, y, como en el problema anterior, intersectar el arco de longitud igual a la hipotenusa con el eje de las abscisas.

Por medio del software, se le pide que calcule la longitud de la hipotenusa y, de esta forma, poder responder si se trata de un número irracional o no. Hay que resaltar que, en vista a la capacidad limitada del software, la cantidad que arroje será un número con una cantidad finita de cifras decimales, es decir, un número racional. Esto implica que el estudiante no observará la verdadera naturaleza de número irracional y solo justificaría que es irracional por la definición, es decir, por ser una raíz cuadrada inexacta. Después, se le pide hallar la longitud mediante el teorema de Pitágoras, resultado que será $\sqrt{29}$

En un parque de la localidad, se construirá una rampa para *skate* cuya altura será de 2 m. Además, desde el punto de apoyo con el suelo hasta la proyección en el suelo de la parte más alta, dicha rampa tendrá 5 m de distancia. ¿Cuánto medirá la longitud de la rampa?

Figura 27. Problema de la longitud de la rampa
Fuente: (Perú, 2016b, p. 28)

Por otro lado, con respecto a problemas de otros capítulos, en cuyas soluciones aparezcan los irracionales, hemos encontrado que algunas de ellas, si bien pueden ser asociados a un irracional, sus soluciones son enteros o números racionales. Tal es el caso del capítulo 5, donde se trata el tema de ecuaciones cuadráticas. Se puede observar que todas ellas presentan soluciones enteras, por ejemplo, ver figura 28.

Martín dispone de un pedazo de cartulina rectangular cuyo largo es 4 cm más que su ancho. Si quiere elaborar con ella una caja en forma de paralelepípedo cuya altura sea 6 cm, ¿cómo quedaría expresado algebraicamente el volumen de dicha caja? ¿Podrá hacer una caja de 840 cm^3 de volumen?

Figura 28. Problema del volumen de la caja
Fuente: (Perú, 2016b, p. 182)

En este problema, se pide encontrar el volumen de un paralelepípedo mediante el planteamiento de una ecuación cuadrática $6(x-6)(x-2)=840$. Sin embargo, su solución presenta raíces enteras (16 y -8).

Asimismo, al hacer una revisión de los capítulos 7 y 8, donde se plantean problemas relacionados a áreas, perímetros, volúmenes y estadística, respectivamente. Se ha encontrado que cada uno de ellos son del mismo tipo que los planteados en el texto teórico y, como mencionamos al inicio de este apartado, la diferencia solo radica en el contexto en el que están descritos. Es por eso que no lo detallaremos, puesto que haría repetitivo el análisis.

En relación a los dos textos analizados, se puede decir que las tareas presentadas:

- No plantean problemas que originen la necesidad de un nuevo número y se justifica por existencia.
- Se corresponden con el aspecto 2 que sugerimos en el capítulo anterior, pues todos están asociados a contextos puramente matemáticos.
- No consideran aproximaciones iteradas (aspecto 5) y solo se trabaja con aproximaciones de hasta con 3 cifras decimales por medio de truncamiento.
- Las ecuaciones cuadráticas planteadas se originan por emplear el teorema de Pitágoras, pero no se plantean tareas que consideren el aspecto 3, reduciéndose al cálculo aproximado del valor de la raíz cuadrada.
- Sobre π solo se dice que es trascendente, pero no se menciona sobre su naturaleza o su relación con el perímetro o área de una circunferencia, por ejemplo, si es construible o no. En este caso, se menciona ello, pues hay tareas de representar las raíces cuadradas en la recta numérica.
- No se presentan tareas de reconocimiento de un número en su representación decimal (aspecto 4), solo como un ejemplo en la definición de número irracional.
- En las tareas de otros capítulos, los irracionales aparecen acompañando fórmulas y, a veces, respuestas sin ser aproximados.

A continuación, se presenta el análisis de los textos utilizado por los estudiantes del cuarto grado de secundaria.

4.2.2 Análisis de las situaciones propuestas en el texto didáctico del cuarto grado

Los libros son “Matemática 4, secundaria” (Perú, 2016c), donde se presentan aspectos teóricos y una serie de problemas resueltos, y “Matemática 4, cuaderno de trabajo” (Perú, 2016d).

Esta sección, así como en la anterior, está compuesto por dos apartados, la primera dedicada a describir los problemas desarrollados en el texto didáctico y la segunda a los problemas que propone el cuaderno de trabajo.

4.2.2.1 Análisis del texto didáctico

El concepto de número irracional se presenta en el primer capítulo, de los doce capítulos tratados en el texto. Los irracionales son abordados en la tercera sección de las ocho que compone dicho capítulo. Asimismo, los números irracionales también son tratados en la sección donde se estudia a los números reales. En ese sentido, incluiremos dicha sección en este análisis, así como también aquellos capítulos donde aparecen los números irracionales como parte de soluciones de situaciones problemáticas de otros conceptos matemáticos.

Lo números irracionales son presentados por medio de una definición, tal como en el texto del tercer grado, donde se menciona que el número irracional es aquel número que no puede ser expresado como una fracción. Del mismo modo, menciona que un número irracional puede ser de dos tipos: algebraicos o trascendentes, a los cuales describe y ejemplifica, ver figura 29.
Es decir, no se presenta por principio de necesidad, sino se justifica su existencia por medio de la definición. A diferencia del texto del tercer grado, este presenta a tres de los números irracionales trascedentes más representativos como son π, e, Φ

Sin embargo, no se hace referencia sobre el origen de dichos números, salvo el de π, del cual señalan que sirve para realizar cálculos de la longitud de la circunferencia y que su uso servirá para problemas de movimiento circular.

El conjunto de los números irracionales es aquel cuyos elementos no pueden ser expresados como fracción. Se simboliza por $\mathbb{I}$.

Un número irracional puede ser:

- **Algebraico.** Aquel que corresponde a soluciones de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes son números enteros. Así, la ecuación $x^2 = 2$ tiene dos soluciones irracionales algebraicas: $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.
- **Trascendente.** Aquel que no es solución de ninguna ecuación polinómica y presenta números decimales al azar, sin periodicidad y sin un patrón determinado. Muchos de ellos son especialmente conocidos.

  $\pi = 3,14159\ldots$; $e = 2,7182818284\ldots$; $\Phi = 1,6180339887\ldots$

Figura 29. Definición de número irracional en el texto de cuarto grado
Fuente: (Perú, 2016c, p. 14)

Luego de definir al número irracional, se presenta un conjunto de problemas. A continuación, se analizarán las tareas planteadas en el texto, donde se introducen a los números irracionales.

El texto presenta tareas resueltas. Los problemas están planteados en un contexto puramente matemático (aritmético y geométrico).

De las tareas, se puede decir que en mayoría están relacionados a la representación del número irracional en la recta real, donde la solución recae en el uso del teorema de Pitágoras. De los problemas planteados, se tienen los siguientes:

- Problema 1: *Reconocer un número irracional*

  Este problema (figura 30) plantea identificar las siguientes seis cifras que continua, implícitamente sugiere reconocer si un número que está expresado con cifras decimales es irracional. Para ello, identifica la formación de las primeras cifras decimales que presenta dicho número, y, a partir de ello, inferir las siguientes seis cifras decimales. Sin embargo, por el aspecto 4 que describimos en el capítulo anterior, reconocer la formación de las primeras cifras decimales no garantiza que se trate de un irracional, salvo se construya y se mencione explícitamente cómo será la formación de dicho número. Es decir, se diga su origen o se explicite su estructura que garantice que se trate de un número irracional.

CÓMO HACER

Sea 0,255225552225555… ¿Cuáles son las seis cifras que continúan en la parte decimal?

- Observamos que la parte decimal se inicia con un "2" y dos "5". Luego, continúa con dos "2" y tres "5", y así va aumentando en uno el número de veces que se repite el "2" y el "5".

Las seis cifras que continúan en la parte decimal son
0,255225552225555222255

Figura 30. Reconocimiento de un número irracional
Fuente: (Perú 2016c, p. 14)

- Problema: *Representar un número irracional en la recta real de manera aproximada*

  En este problema, se plantea representar la raíz cuadrada de un número entero no cuadrado perfecto en la recta numérica, ver figura 31. Para la representación de dicho número, se procede con el uso de la calculadora para aproximar al número irracional y ver entre qué valores racionales se encuentra más próximo. A este proceso de representación, Perú (2016c) lo denomina representación de manera "aproximada". De los conceptos previos, se tiene el de aproximación. Estos conceptos se argumentan por medio del uso de la calculadora, y se justifica su naturaleza de irracional por la definición de número irracional y raíz cuadrada inexacta.

CÓMO HACER

Representa en la recta numérica el número $\sqrt{10}$ aproximado al décimo.

- Ingresamos $\sqrt{10}$ en la calculadora: $\sqrt{10} = 3,1622776\ldots \approx 3,2$

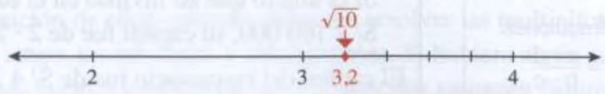


Figura 31. Representación aproximada de $\sqrt{10}$ en la recta
Fuente: (Perú 2016c, p. 14)

- Problema: *Representar un número irracional de manera exacta en la recta real*

  Nuevamente, se pide representar la raíz cuadrada de un número entero, pero esta vez de manera "exacta" en la recta real, ver figura 32. Este problema es del mismo tipo que la anterior, pero el procedimiento de la representación se realiza haciendo uso de la regla y compas. Los números que se pide representar de manera exacta son los números $\sqrt{10}$ y el número áureo ($\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$), ver figura 33. En el problema del número áureo, se observa que al operar aritméticamente un número racional con un irracional se obtiene como resultado un número irracional. No obstante, no se hace mención al respecto. Asimismo, no explican nada sobre la naturaleza del número áureo, solo muestra que se puede construir a partir de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1/2, y que se denota por la letra griega Φ.

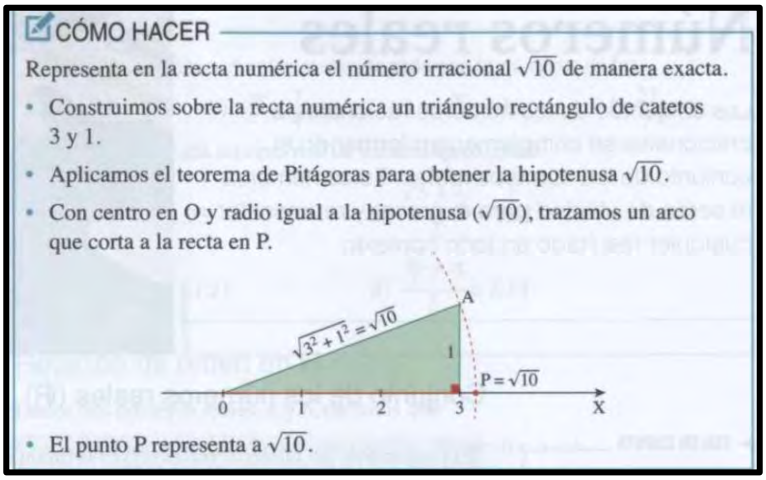


Figura 32. Representación exacta de $\sqrt{10}$ en la recta real
Fuente: (Perú, 2016c, p. 15)

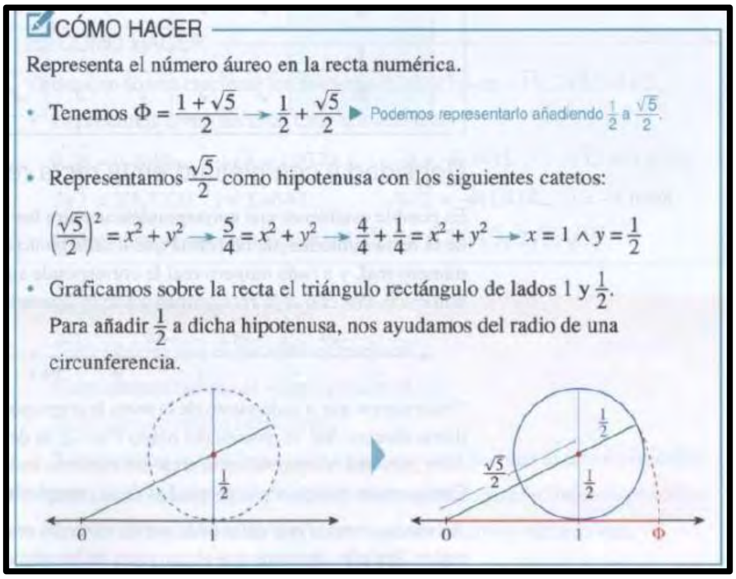


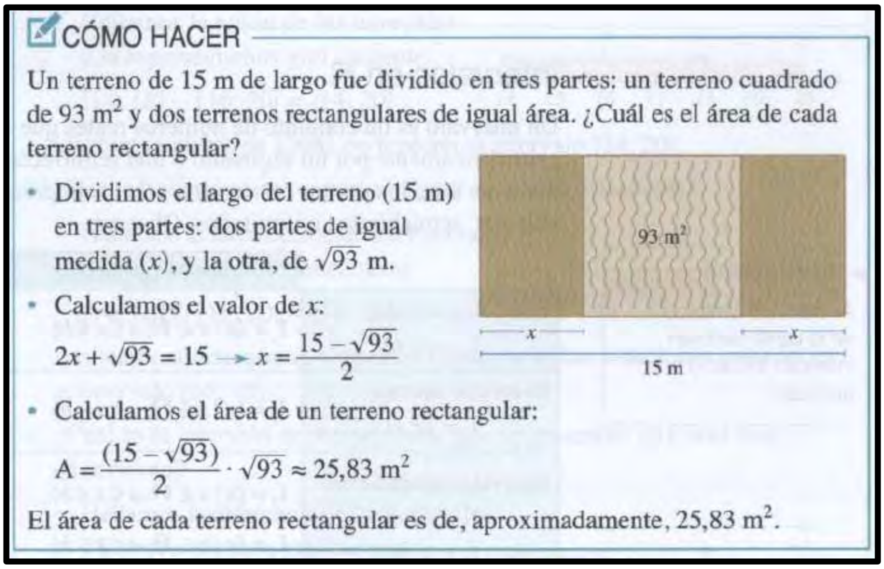
Figura 33. Representación del número áureo en la recta real.
Fuente: (Perú, 2016c, p. 15)

De los objetos primarios emergentes, se puede mencionar que el lenguaje utilizado son el verbal, gráfico y simbólico, todo ellos en el ámbito geométrico y algebraico. Los argumentos están basados en las construcciones geométricas y el teorema de Pitágoras. De las propiedades, se tienen las geométricas y algebraicas, como el teorema de Pitágoras, las construcciones geométricas y la solución de ecuaciones.

- Problema: *Encontrar el área de un terreno rectangular*

  Este problema está planteado en la sección donde se desarrolla el tema del conjunto de los números reales. El número irracional emerge como la longitud del lado de un cuadrado, cuya área mide 93 m^2, ver figura 34.

  Asimismo, la solución involucra conocimientos sobre ecuaciones cuadráticas ($x^2 = 93$, x es el lado del cuadrado). Este problema se presenta como una aplicación sobre operaciones con números reales. Se procede haciendo uso de conocimientos previos, como fórmula del área de un cuadrado, rectángulo, también, el empleo de ecuaciones algebraicas lineales. Además, se hace uso de la calculadora para aproximar el valor obtenido.



CÓMO HACER

Un terreno de 15 m de largo fue dividido en tres partes: un terreno cuadrado de 93 m^2 y dos terrenos rectangulares de igual área. ¿Cuál es el área de cada terreno rectangular?

- Dividimos el largo del terreno (15 m) en tres partes: dos partes de igual medida (x), y la otra, de $\sqrt{93}$ m.
- Calculamos el valor de x:
  $2x + \sqrt{93} = 15 \rightarrow x = \dfrac{15 - \sqrt{93}}{2}$
- Calculamos el área de un terreno rectangular:
  $A = \dfrac{(15 - \sqrt{93})}{2} \cdot \sqrt{93} \approx 25{,}83 \text{ m}^2$

El área de cada terreno rectangular es de, aproximadamente, 25,83 m^2.

Figura 34. Problema del área de un terreno
Fuente: (Perú, 2016c, p. 19)

Hasta aquí, se ha descrito los problemas presentes en el capítulo dedicado solo a los irracionales. A continuación, se describirán las tareas presentes en otros capítulos del texto.

Con respecto a las tareas presentadas en otros capítulos, donde el número irracional es parte de la solución, se ha encontrado que dicho capítulos son los siguientes:

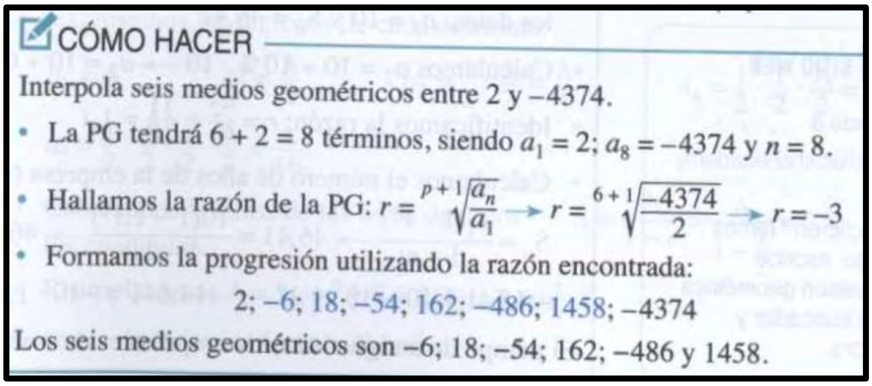
- Capítulo 3: Sucesiones y progresiones geométricas
- Capítulo 5: Estudio de las ecuaciones cuadráticas
- Capítulo 6: Estudio sobre triángulos rectángulos
- Capítulo 7: Estudio de áreas, perímetros de regiones planas y prismas
- Capítulo 8: Estudio sobre ángulos de elevación y depresión
- Capítulo 10: Estudio sobre sólidos geométricos
- Capítulo 11: Estudio dedicado a la estadística

En seguida, se detallará las tareas planteadas en estos capítulos.

El tema de las progresiones geométricas, como mencionamos antes, se desarrollan en el capítulo 3. En él, se presentan algunos problemas de cálculo de términos n-ésimos, la razón de la progresión y la razón para una interpolación de medios geométricos. Para ello, se muestran fórmulas donde intervienen radicales como:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \text{y} \quad r = \sqrt[p+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Esto significa que pueden obtenerse valores irracionales. Sin embargo, de los problemas analizados, todos ellos muestran cantidades racionales. Esto se debe a que las progresiones están conformadas por valores enteros y racionales, o son acomodados de tal forma que se obtengan resultados enteros o racionales, tal como se muestra en la figura 35.


CÓMO HACER

Interpola seis medios geométricos entre 2 y -4374.

- La PG tendrá $6 + 2 = 8$ términos, siendo $a_1 = 2$; $a_8 = -4374$ y $n = 8$.
- Hallamos la razón de la PG: $r = \sqrt[p+1]{\frac{a_n}{a_1}} \rightarrow r = \sqrt[6+1]{\frac{-4374}{2}} \rightarrow r = -3$
- Formamos la progresión utilizando la razón encontrada:

$2; -6; 18; -54; 162; -486; 1458; -4374$

Los seis medios geométricos son -6; 18; -54; 162; -486 y 1458.

Figura 35. Problema de interpolación de medios geométricos
Fuente: (Perú, 2016c, p. 55)

En el capítulo 5, donde se desarrolla el concepto de las ecuaciones cuadráticas, se presentan tareas con el objetivo de mostrar las diferentes formas (por despeje o por fórmula general) de encontrar las soluciones, ver figura 35. Cabe señalar que otros problemas solo presentan soluciones enteras o racionales. Es decir, las ecuaciones son planteadas de tal forma que se tenga ese tipo de soluciones.

CÓMO HACER

Halla las raíces de $5x^2 - 10 = 0$.

- Realizamos los siguientes pasos:

$5x^2 - 10 + 10 = 0 + 10$ ◀ Se suma 10 en ambos lados. → $5x^2 = 10$

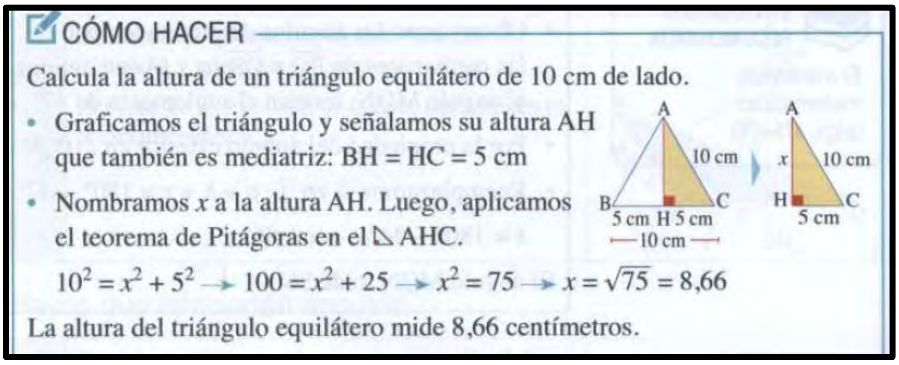
$5x^2 \div 5 = 10 \div 5$ ◀ Se divide entre 5. → $x^2 = 2$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$ ◀ Se extrae la raíz cuadrada. → $x = \pm\sqrt{2}$

Las raíces de la ecuación $5x^2 - 10 = 0$ son $x_1 = +\sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.

Figura 36. Número irracional como solución de una ecuación cuadrática en el texto de cuarto grado
Fuente: (Perú, 2016c, p. 82)

En el desarrollo del tema de triángulos, capítulo 6, hay una diversidad de secciones que presentan problemas donde intervienen los números irracionales, tales como problemas dedicados exclusivamente al uso del teorema de Pitágoras, triángulos notables y relaciones métricas. Véase los ejemplos mostrados en las figuras 37, 38 y 39.



CÓMO HACER

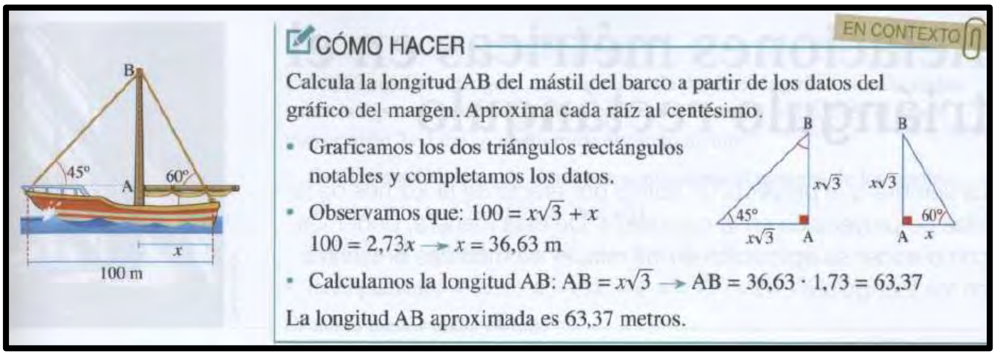
Calcula la altura de un triángulo equilátero de 10 cm de lado.

- Graficamos el triángulo y señalamos su altura AH que también es mediatriz: BH = HC = 5 cm
- Nombramos x a la altura AH. Luego, aplicamos el teorema de Pitágoras en el ⊿AHC.

$10^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 100 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 75 \rightarrow x = \sqrt{75} = 8{,}66$

La altura del triángulo equilátero mide 8,66 centímetros.

Figura 37. Problema sobre el teorema de Pitágoras
Fuente: (Perú, 2016c, p. 102)



EN CONTEXTO

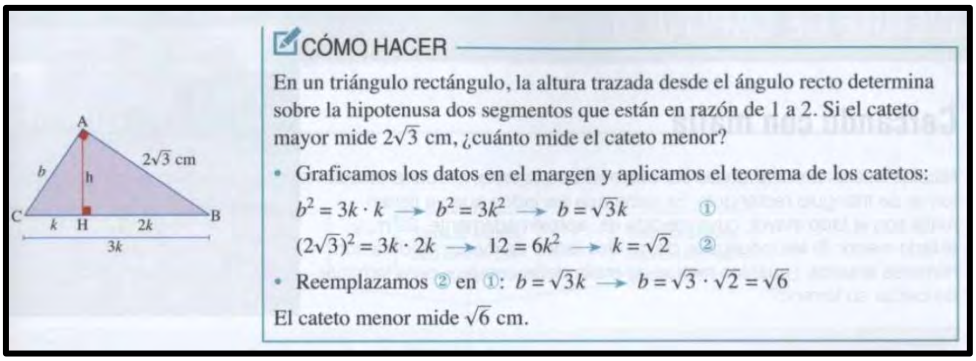
CÓMO HACER

Calcula la longitud AB del mástil del barco a partir de los datos del gráfico del margen. Aproxima cada raíz al centésimo.

- Graficamos los dos triángulos rectángulos notables y completamos los datos.
- Observamos que: $100 = x\sqrt{3} + x$
  $100 = 2{,}73x \longrightarrow x = 36{,}63$ m
- Calculamos la longitud AB: $AB = x\sqrt{3} \longrightarrow AB = 36{,}63 \cdot 1{,}73 = 63{,}37$

La longitud AB aproximada es 63,37 metros.

Figura 38. Problema de triángulos notables
Fuente: (Perú, 2016c, p. 105)



CÓMO HACER

En un triángulo rectángulo, la altura trazada desde el ángulo recto determina sobre la hipotenusa dos segmentos que están en razón de 1 a 2. Si el cateto mayor mide $2\sqrt{3}$ cm, ¿cuánto mide el cateto menor?

- Graficamos los datos en el margen y aplicamos el teorema de los catetos:
  $b^2 = 3k \cdot k \longrightarrow b^2 = 3k^2 \longrightarrow b = \sqrt{3}k$ ①
  $(2\sqrt{3})^2 = 3k \cdot 2k \longrightarrow 12 = 6k^2 \longrightarrow k = \sqrt{2}$ ②
- Reemplazamos ② en ①: $b = \sqrt{3}k \longrightarrow b = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$

El cateto menor mide $\sqrt{6}$ cm.

Figura 39. Problema de relaciones métricas
Fuente: (Perú, 2016c, p. 17)

Por otro lado, en el capítulo 7, se desarrollan temas como áreas, perímetros, sólidos y sólidos de revolución. A diferencia del texto del tercer año, en este, sí se presentan problemas resueltos de sólidos de revolución (en el texto anterior solo se presentaron las fórmulas y la relación entre los volúmenes de la esfera, cilindro y el cono).

Sin embargo, los problemas presentados son similares a las del texto de tercer grado. Por ejemplo, en el tema de perímetros, se muestra una figura poligonal en el plano cartesiano, la cual, para su solución, se debe particionar en otras conocidas. Así, se puede calcular la longitud de todos los segmentos que componen el perímetro de la figura. Del mismo modo, se procede para el cálculo de áreas. En ese sentido, para el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes de prismas, el número irracional tiene presencia como parte de fórmulas, por ejemplo, con la presencia de π en las fórmulas de volúmenes de revolución, o con el teorema de Pitágoras en la solución de ecuaciones cuadráticas que tienen como raíces a número racionales o enteros no cuadrados perfectos, tal como se muestra en las figuras 40, 41, 42.

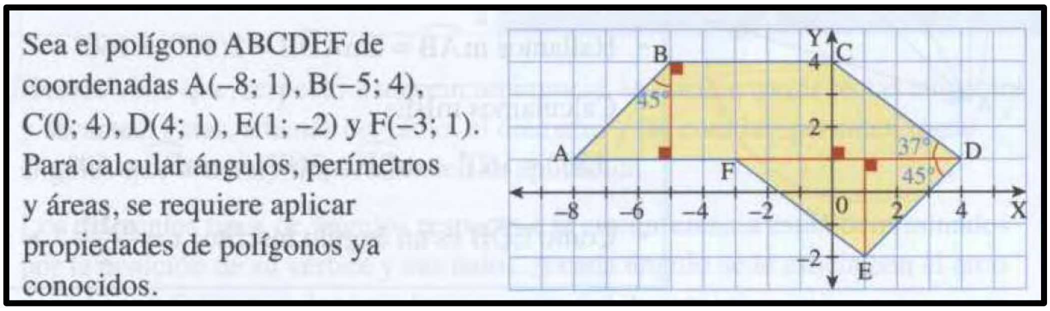


Figura 40. Problemas de áreas de polígonos en el plano cartesiano
Fuente: (Perú, 2016c, p. 116)

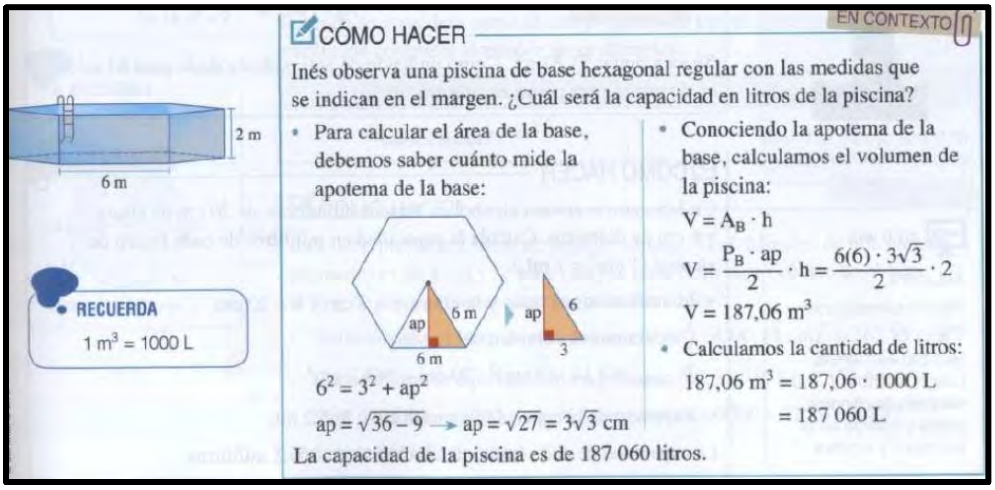


Figura 41. Problemas sobre prismas
Fuente: (Perú, 2016c, p. 119)

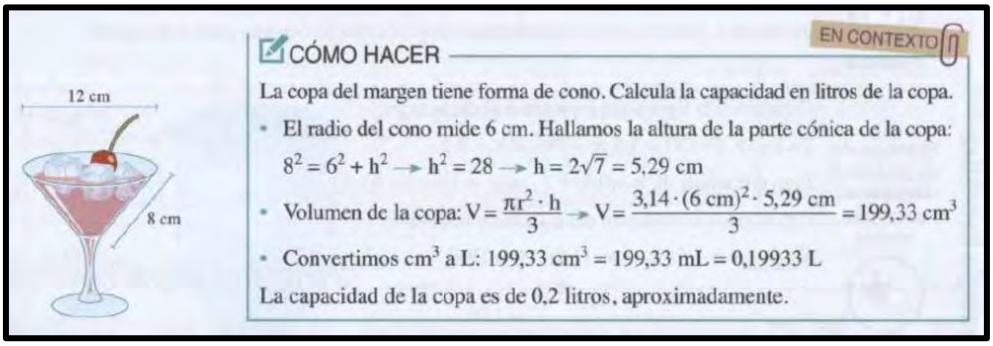
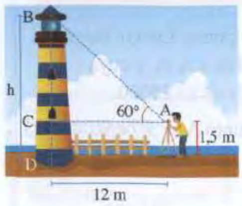


Figura 42. Problemas sobre volúmenes de sólidos de revolución
Fuente: (Perú, 2016c, p. 17)

En el capítulo 8, se desarrolla el tema de ángulos de elevación y de depresión. Acerca de estos problemas, se podría decir que son como casos particulares de triángulos notables, ya que los ángulos que se emplean son justamente los dados a conocer en el tema de triángulo notables (30°- 60°), tal como se muestra en la figura 43. Esta es la razón por la cual emerge el número irracional, como relación de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo de acuerdo a la medida de sus ángulos internos.

EN CONTEXTO

CÓMO HACER



Un topógrafo observa con un teodolito la cima de un faro con un ángulo de elevación de 60°. Si el teodolito se ubica a 1,5 m de altura y a una distancia horizontal de 12 m del faro, ¿cuál es la altura del faro?

- Por ◺ notable de 30° y 60°, $\overline{AC}$ es el cateto opuesto a 30°; por lo tanto, su valor es k.
  $AC = k = 12\text{ m} \rightarrow k = 12$
- Observamos que la altura del faro ($\overline{BD}$) es igual a BC + CD.
- Calculamos BC cuyo valor es $k\sqrt{3}$: $BC = k\sqrt{3} = 12(1{,}73) = 20{,}76\text{ m}$
- Calculamos la altura del faro: $h = BC + CD = 20{,}76\text{ m} + 1{,}5\text{ m} = 22{,}26\text{ m}$

La altura del faro es de 22,26 metros, aproximadamente.

Figura 43. Problemas de ángulos de elevación y depresión
Fuente: Perú (2016c, p.132)

En problemas en trigonometría, también, se ha encontrado que el número irracional emerge. En el capítulo 10, donde aborda estos problemas, nuevamente el número irracional está asociado a la relación existente entre las longitudes entre los lados de un triángulo rectángulo y sus ángulos internos. Es decir, un número irracional se puede identificar como el valor de la razón trigonométrica de un ángulo, por ejemplo, $\tan(60°) = \sqrt{3}$. Asimismo, el número irracional es identificado como un ángulo, debido a la presencia de π en el sistema radianes. Tal como se muestran en las figuras 44 y 45.

CÓMO HACER

Calcula el valor numérico de $F = \dfrac{\cos 60° + \operatorname{sen}^2 30° - \tan^2 60°}{\csc^2 60° - \tan^2 60° \cdot \cot 45°}$.

- Expresamos cada razón trigonométrica en función de sus valores numéricos:

$$F = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (\sqrt{3})^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - (\sqrt{3})^2 \cdot 1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 3}{\frac{4}{3} - 3} = \frac{-\frac{9}{4}}{-\frac{5}{3}} = \frac{27}{20}$$

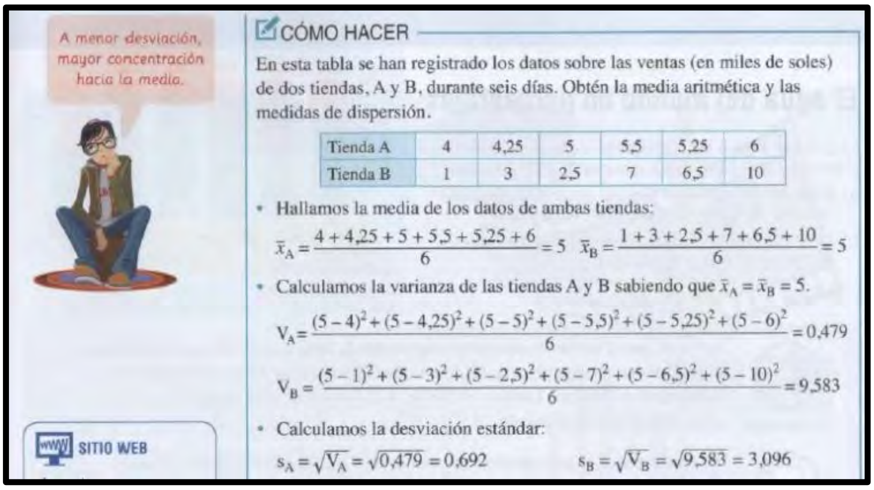
El valor numérico de F es 27/20.

Figura 44. Número irracional en problemas de razones trigonométricas
Fuente: (Perú, 2016c, p.154)

x	$f(x) = 2\operatorname{sen} 6x$
$\frac{\pi}{12}$	$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2$
$\frac{\pi}{6}$	$2\operatorname{sen}\pi = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -2$

Figura 45. Número irracional como un ángulo
Fuente: (Perú, 2016c, p. 158)

Finalmente, se encontró la presencia de los números irracionales en conceptos de la estadística (capítulo 11), en donde el número irracional surge en el cálculo de la desviación estándar, relacionado al concepto de medidas dispersión. Para calcular dicha medida, hay que calcular la raíz cuadrada de la variación. Véase el problema mostrado en la figura 46.


A menor desviación, mayor concentración hacia la media.

CÓMO HACER

En esta tabla se han registrado los datos sobre las ventas (en miles de soles) de dos tiendas, A y B, durante seis días. Obtén la media aritmética y las medidas de dispersión.

Tienda A	4	4,25	5	5,5	5,25	6
Tienda B	1	3	2,5	7	6,5	10

- Hallamos la media de los datos de ambas tiendas:

$$\bar{x}_A = \frac{4 + 4{,}25 + 5 + 5{,}5 + 5{,}25 + 6}{6} = 5 \quad \bar{x}_B = \frac{1 + 3 + 2{,}5 + 7 + 6{,}5 + 10}{6} = 5$$

- Calculamos la varianza de las tiendas A y B sabiendo que $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 5$.

$$V_A = \frac{(5-4)^2 + (5-4{,}25)^2 + (5-5)^2 + (5-5{,}5)^2 + (5-5{,}25)^2 + (5-6)^2}{6} = 0{,}479$$

$$V_B = \frac{(5-1)^2 + (5-3)^2 + (5-2{,}5)^2 + (5-7)^2 + (5-6{,}5)^2 + (5-10)^2}{6} = 9{,}583$$

- Calculamos la desviación estándar:

$$s_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{0{,}479} = 0{,}692 \qquad s_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{9{,}583} = 3{,}096$$

SITIO WEB

Figura 46. Número irracional en la estadística
Fuente: (Perú, 2016c, p. 175)

Como se puede observar, los problemas planteados son del tipo intra matemático; es decir, problemas estrictamente en el ámbito de las matemáticas (aritmético y geométrico) y uno en el área de la estadística.

Hasta aquí, han sido analizado problemas en los cuales son introducidos los números irracionales. De igual forma, se ha sumado a ellos los problemas donde este conjunto numérico se presenta en soluciones asociados a otros conceptos matemáticos.

A continuación, se mostrará el análisis de los problemas propuestos en el cuaderno de trabajo del cuarto grado.

4.2.2.2 Análisis del cuaderno de trabajo

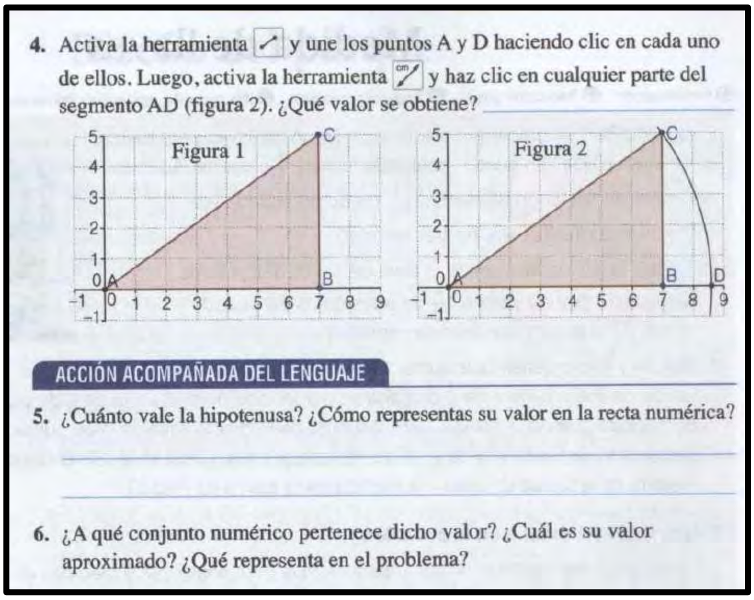
En este apartado, se analizarán los problemas planteados en el cuaderno de trabajo, donde se motiva el uso de los números irracionales.

El tema de los números irracionales es abordado en el primer capítulo, de los ocho capítulos presentados. En él, se presentan situaciones asociadas a eventos cotidianos de la vida real. Estos problemas están relacionados con 1) aplicación del teorema de Pitágoras, 2) longitud de la circunferencia y 3) representación del número irracional en la recta real, por ejemplo, ver figura 47.

> Sandra y Milagros van de compras a un centro comercial. Al llegar, Sandra sube al segundo nivel por la escalera eléctrica, mientras que Milagros la espera al pie de esta. Se sabe que la distancia horizontal del pie de la escalera a la proyección del punto más alto de la escalera mide 7 metros. Además, al llegar al segundo nivel, Sandra alcanza una altura de 5 metros con respecto al primer nivel. ¿Cuál será la longitud de la escalera eléctrica?

Figura 47. Problema de la longitud de escalera
Fuente: (Perú, 2016d, p. 16)

En este problema, se le pide al estudiante que encuentre la longitud de la escalera, el cual se podría obtener mediante el uso del teorema de Pitágoras. Es decir, se debe plantear una ecuación cuadrática ($x^2 = 5^2 + 7^2$), cuya solución es el número irracional $\sqrt{74}$. Sin embargo, el cuaderno de trabajo le sugiere al estudiante que calcule la medida de la hipotenusa haciendo uso del software libre Geogebra, ver figura 48.


4. Activa la herramienta y une los puntos A y D haciendo clic en cada uno de ellos. Luego, activa la herramienta y haz clic en cualquier parte del segmento AD (figura 2). ¿Qué valor se obtiene?

ACCIÓN ACOMPAÑADA DEL LENGUAJE

5. ¿Cuánto vale la hipotenusa? ¿Cómo representas su valor en la recta numérica?

6. ¿A qué conjunto numérico pertenece dicho valor? ¿Cuál es su valor aproximado? ¿Qué representa en el problema?

Figura 48. Longitud de la escalera con uso del software
Fuente: (Perú, 2016d, p. 17)

En ese sentido, según el aspecto 5, expuesto en el capítulo anterior, las limitaciones que tienen las computadoras hará que el software arroje un número con una cantidad finita de cifras decimales. Es decir, el valor asignado por el Geogebra a dicha longitud será un número racional. Por ende, responder a preguntas como ¿cuánto mide la hipotenusa? y ¿a qué conjunto numérico pertenece dicho valor?, podrían llevar al estudiante a tener una concepción diferente a la de un número irracional, más aún llevarlo a afirmar qué es un número racional.

Por otro lado, en el segundo problema planteado, la situación está asociada a la longitud de la circunferencia, ver figura 49. Cabe mencionar que la longitud de la circunferencia es presentada como un número racional. Asimismo, nuevamente, para la solución, se tiene que recurrir al teorema de Pitágoras y a algunos conceptos previos de propiedades geométricas sobre la circunferencia, fórmulas sobre áreas y perímetros de figuras geométricas. Además, por los datos presentados, más parece un problema de números racionales y que lo único que podría asociar con los números irracionales es el símbolo de π, la cual se presenta con un valor aproximado (un número racional).

En una maqueta de un proyecto de urbanización, Valeria observa un parque circular cuyo contorno mide 125,6 metros de longitud y en cuyo centro hay un piso en forma de cuadrado. Se sabe que el perímetro del piso estará cercado por una reja, mientras que el resto del parque estará cubierto de césped. Considera la aproximación $\pi = 3,14$.

1. ¿Cuál es el área de la superficie que ocupa el parque?
2. ¿Cuál es la longitud de la reja que rodeará el cuadrado central?
3. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la superficie del piso y el área de la superficie que estará cubierta de césped?

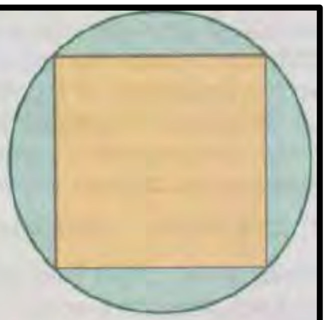


Figura 49. Problema asociado a π
Fuente: (Perú, 2016d, p. 19)

Respecto al tercer problema, se puede manifestar que su solución está asociada a la representación de número irracional en la recta real (ver figura 50), puesto que el problema sugiere plasmar unas cámaras de seguridad como puntos a lo largo de una recta. Del mismo modo, en su segunda interrogante, sugiere que el estudiante entienda que el conjunto de los números irracionales (reales) es denso.

Un equipo de ingenieros prepara un proyecto de un circuito de cámaras de seguridad para un condominio. Un dibujante técnico será el encargado de representar en un plano la ubicación de las cámaras en un circuito en serie. Se sabe que la exactitud del trazo de los puntos garantizará que el circuito funcione correctamente. Además, las cámaras deberán estar ubicadas en los puntos $1; \sqrt{2}; \frac{4}{3}$ y $\sqrt{3} + 1$ u correspondientes a la longitud del pasadizo principal del condominio. ¿Cómo se conseguirá dibujar la ubicación de los puntos con precisión? En un futuro, ¿será posible incluir una cámara más?

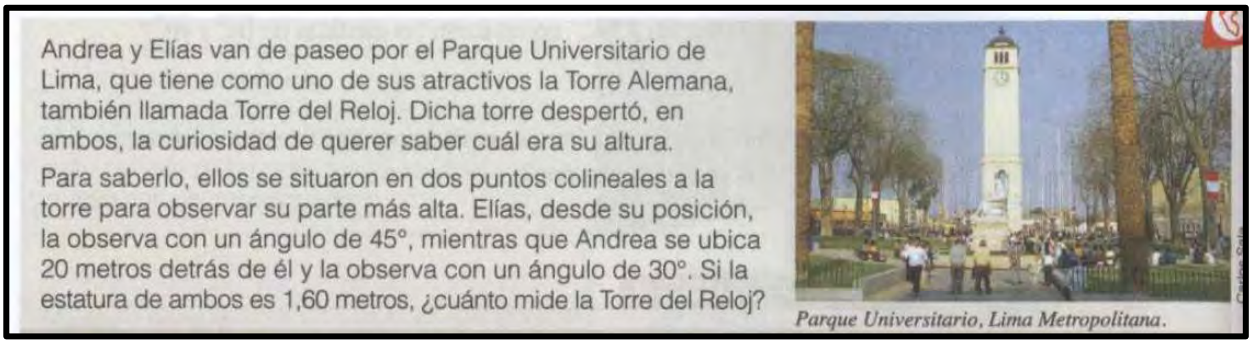
Figura 50. Problema de la densidad de números irracionales
Fuente: (Perú, 2016d, p. 20)

Cabe señalar, que no se ha incluido, en el análisis, dos problemas planteados, porque estos están relacionados a perímetros y al teorema de Pitágoras, y no contribuirá al análisis por ser del mismo tipo que los problemas anteriores.

Luego de haber descrito, líneas arriba, las tareas planteadas que son tratadas explícitamente en el capítulo dedicado a los números irracionales, a continuación, se analizarán los problemas presentes en los otros capítulos.

Con referencia a los problemas hallados en capítulos dedicados a otros conceptos y áreas de la matemática, se puede señalar que todos ellos son de las mismas características que los planteados en el texto, la diferencia radica en que estos problemas son puestos en un contexto donde el estudiante se siente familiarizado. Perú (2016c) las denomina situaciones significativas vinculadas al contexto familiar, al económico, a lo social y científico. Sin embargo, al resolverlas, se ha notado que el contexto no aporta elementos al plantear el problema y se resuelve empleando fórmulas o relaciones existentes entre los lados de un triángulo.

En la figura 51, se muestra un ejercicio con un contexto social, pero al resolverlo solo movilizará relaciones existentes entre las longitudes de un triángulo rectángulo (casos especiales de triángulos notables).

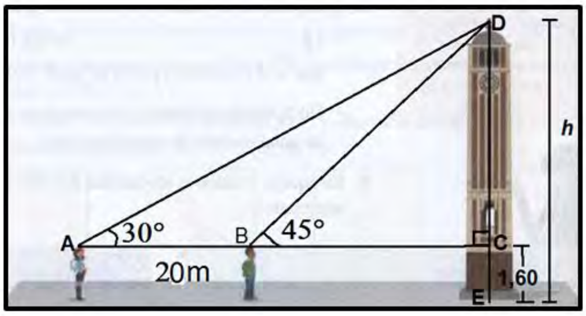

Andrea y Elías van de paseo por el Parque Universitario de Lima, que tiene como uno de sus atractivos la Torre Alemana, también llamada Torre del Reloj. Dicha torre despertó, en ambos, la curiosidad de querer saber cuál era su altura.

Para saberlo, ellos se situaron en dos puntos colineales a la torre para observar su parte más alta. Elías, desde su posición, la observa con un ángulo de 45°, mientras que Andrea se ubica 20 metros detrás de él y la observa con un ángulo de 30°. Si la estatura de ambos es 1,60 metros, ¿cuánto mide la Torre del Reloj?

Parque Universitario, Lima Metropolitana.

Figura 51. Problema sobre triángulos rectángulos
Fuente: Perú (2016d, p. 112)

El cuaderno de trabajo no muestra la solución de los problemas, pero sí da pautas para su solución. Por ello, siguiendo dichas pautas y la forma cómo se soluciona los problemas del texto didáctico, una solución para el ejercicio anterior (figura 51) sería como se muestra en la figura 52.



- Del triángulo notable de 45° tenemos que: DC=BC=k
- En el triángulo notable de 30°: DC=k , entonces AC=$k\sqrt{3}$
- Del gráfico observamos que: AC=$20+k=k\sqrt{3}$, luego $20=1,73k-k=0,73k$
  $\rightarrow k=27,40\ m$
- Observamos que la altura de la torre es h, que es igual a DC+CE
- Calculando la altura $h=\ 27,40\ m+1,60\ m=29\ m$
  La altura de la torre es 29 metros, aproximadamente.

Figura 52. Solución de triángulos rectángulos
Fuente: (Perú, 2016d, p.112)

Se observa en esta solución que el número irracional surge como la relación entre las longitudes de un triángulo rectángulo notable. Asimismo, se pone en juego el concepto de aproximación para operar con un irracional y el concepto de triángulos notables para ángulos de 45°- 45° y 30°- 60°. Los elementos lingüísticos usados son los geométricos (trazos y gráficos) y algebraicos (ecuaciones). Los argumentos están basados en trazos y construcción de triángulos rectángulos. Cabe recalcar que el contexto empleado solo ha servido como un elemento “decorativo”, puesto que su solución sigue enmarcada en el ámbito geométrico, es decir, considera el aspecto 2 (contexto matemático). Así, el número irracional es presentado para realizar cálculos y operaciones. No se articula características asociadas al número irracional, como el infinito, operaciones iteradas.

Como se menciona, líneas arriba, los problemas presentados en otros capítulos y otros conceptos matemáticos poseen las mismas características que las del texto didáctico, con la diferencia que los problemas del cuaderno de trabajo están puestas en un contexto, como el problema analizado (figura 51 y figura 52). En otras palabras, presenta problemas contextualizados de conceptos, como progresiones, áreas, perímetros, relaciones métricas, trigonometría, volúmenes y estadística, pero en cada una de ellas la presencia del número irracional, en las soluciones, es por medio de fórmulas. Es por ello que no se hará análisis de los problemas de los otros problemas planteados en los diferentes capítulos, ya que esto nos llevará a realizar un análisis idéntico a lo hecho para el texto didáctico de este grado.

De lo descrito, se puede afirmar que, aunque aparentemente se considere un contexto social o económico en el enunciado, para su solución, solo se hace uso de conocimientos geométricos, trigonométricos o algebraicos propios de la matemática. En ese sentido, el texto de cuarto de secundaria contiene las consideraciones dadas en el aspecto 2. Asimismo, por lo descrito, el texto de cuarto grado de secundaria tiene similitud con las tareas propuestas planteadas en el texto de tercer grado. Es así que:

- No consideran tareas con relación a cálculos de aproximaciones iteradas (aspecto 5) y solo se limita a aproximaciones con el uso de la calculadora.
- Las ecuaciones cuadráticas solo llevan a realizar cálculos por aproximación. Sin embargo, no hay indagaciones para poder responder si existe algún número cuyo cuadrado resulte dar con dicho número. Es decir, no se proponen tareas que consideren el aspecto 3.
- Sobre π, e, y Φ solo se dice que son trascendentes y nada relacionado a su origen. Solo se muestra que Φ es construible, pero no los otros dos.
- Se presenta una tarea implícitamente sobre el reconocimiento de un número en su representación decimal. Sin embargo, no se hace anotaciones sobre las consideraciones que hay que tener, como las del aspecto 4.
- En las tareas de otros capítulos, los irracionales aparecen en fórmulas. Incluso, algunas respuestas ya no son aproximadas a un valor racional, sino más bien se dejan de manera simbólica, es decir, en términos de $\pi, \sqrt{\ }$ u otros símbolos que representen algún número irracional.
- Ninguna tarea es presentada con un principio de necesidad.

A continuación, se realizará el análisis del texto y cuaderno de trabajo empleado por los estudiantes de quinto de secundaria.

4.2.3 Análisis de las situaciones propuestas en el texto didáctico del quinto grado

Los libros seleccionados son “Matemática 5, secundaria” (Perú, 2016e) y “Matemática 5, cuaderno de trabajo” (Perú, 2016f). En el primero, se exponen aspectos teóricos sobre temas como los números reales, sucesiones, proporcionalidad, sistemas de ecuaciones, ecuación y función cuadrática, cuerpos geométricos, trigonometría, geometría en planos, geometría analítica y estadística. El segundo, así como los cuadernos del tercer y cuarto grado, es un material complementario al texto anterior, pues, en su contenido, se plantean problemas para que el estudiante los resuelva.

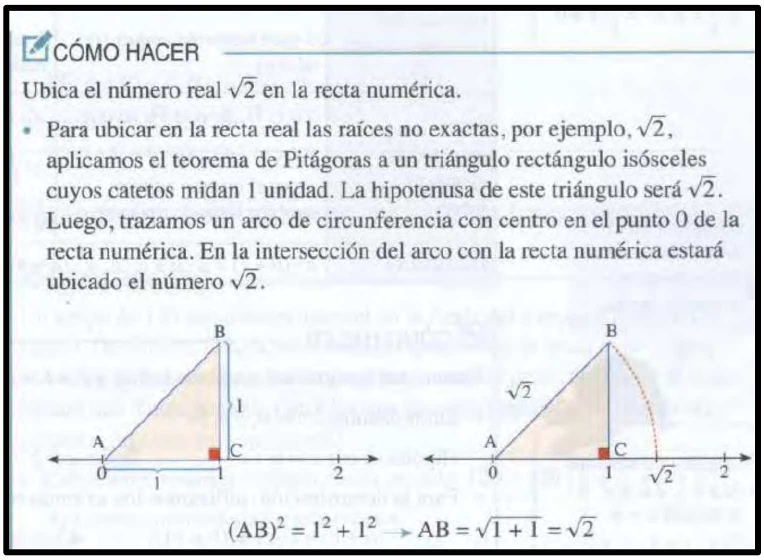
4.2.3.1 Análisis del texto didáctico

El texto está compuesto por doce capítulos. De ellos, los números irracionales son abordados en el primer capítulo, cuyo título es “números reales y magnitudes”. Los irracionales son abordados en el tema de números reales y no se presenta un capítulo exclusivo para los irracionales como en los textos anteriores.

En este capítulo, ya no se aborda los irracionales como tema de estudio. Por el contrario, se enfatiza en presentar a los números reales, mostrando algunas de sus propiedades, como la densidad, la completitud y su buen orden. Cabe señalar que la propiedad de densidad fue presentada, en los textos anteriores, para el conjunto de los racionales (no para los irracionales), a manera de observación y sin tareas que aborden dicha propiedad. Sin embargo, la densidad de los reales es abordado en un contexto donde interviene la magnitud tiempo, donde se muestra la existencia que entre dos valores de tiempo existe otro valor de tiempo. Los valores que considera el texto, para mostrar la densidad de los reales, son valores racionales.

Con respecto a los irracionales, estos se presentan como un número real. Asimismo, Perú (2016e) identifica al conjunto de los números irracionales como aquellos puntos de la recta numérica que no pueden ser ocupados por los números racionales, como por ejemplo $\sqrt{2},\pi$. Con referencia a los números irracionales que son identificados con un punto en la recta real, solo se muestra casos particulares para números de la forma $\sqrt{\ }$ de enteros positivos, sin discutir sobre otros números si son construibles o no, como en el caso de π .

De los problemas planteados, se muestra apenas uno y, como en el caso de los textos anteriores, se reduce a la representación en la recta de la raíz cuadrada de un número entero no cuadrado perfecto, ver figura 53.


CÓMO HACER

Ubica el número real $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

- Para ubicar en la recta real las raíces no exactas, por ejemplo, $\sqrt{2}$, aplicamos el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1 unidad. La hipotenusa de este triángulo será $\sqrt{2}$. Luego, trazamos un arco de circunferencia con centro en el punto 0 de la recta numérica. En la intersección del arco con la recta numérica estará ubicado el número $\sqrt{2}$.

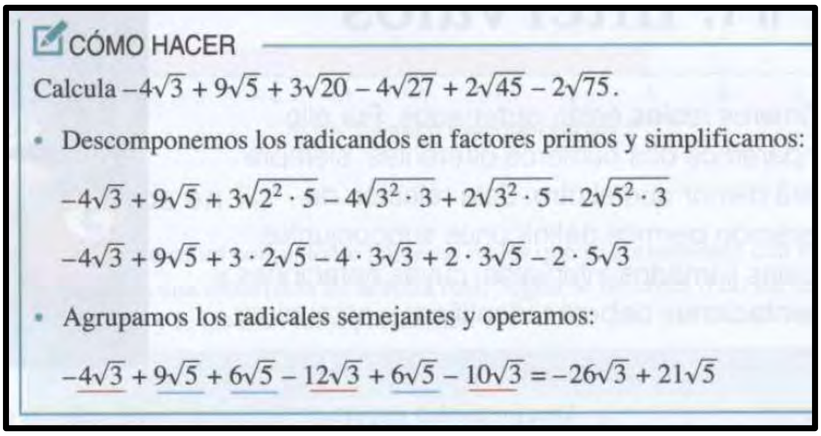
$(AB)^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Figura 53. Representación de $\sqrt{2}$ en la recta real
Fuente: (Perú, 2016e, p. 11)

Además, en la solución, se procede por medios geométricos (trazado de arcos, rectas perpendiculares) y por el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del radio del sector circular, cuya medida es el número irracional que se debe ubicar en la recta real. Es decir, del mismo modo como se introduce en los textos anteriores, no se discute la naturaleza de otros irracionales y tampoco si pueden ser construibles o no. Cabe precisar que en ninguno de los textos, se ha realizado tareas sobre la construcción de los números racionales, no obstante, sí lo asocian a un punto de la recta por medio de aproximación. Esto se evidencia cuando desarrollan el tema de intervalos.

Por otro lado, se observa que solo se toma en cuenta el aspecto 2, su naturaleza intra matemático, y no los otros aspectos asociados al infinito, a la aproximación y a procesos iterativos.

En las siguientes secciones del capítulo, se muestra propiedades de las operaciones algebraicas con los números reales. Posteriormente, se desarrolla las operaciones entre números racionales e irracionales. Sin embargo, en todos los problemas, se emplean irracionales particulares, todos compuestos de la forma $a\sqrt{b},\ b \in \mathbb{Z}$, ver figura 54, y no se realizan operaciones con otros números irracionales, como por ejemplo los números trascendentes $\pi, e,$ y Φ. Del mismo modo que los dos textos de los grados anteriores, no se menciona la existencia de números irracionales que no son construibles.



CÓMO HACER

Calcula $-4\sqrt{3} + 9\sqrt{5} + 3\sqrt{20} - 4\sqrt{27} + 2\sqrt{45} - 2\sqrt{75}$.

- Descomponemos los radicandos en factores primos y simplificamos:

$$-4\sqrt{3} + 9\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - 4\sqrt{3^2 \cdot 3} + 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - 2\sqrt{5^2 \cdot 3}$$

$$-4\sqrt{3} + 9\sqrt{5} + 3 \cdot 2\sqrt{5} - 4 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{5} - 2 \cdot 5\sqrt{3}$$

- Agrupamos los radicales semejantes y operamos:

$$-4\sqrt{3} + 9\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 12\sqrt{3} + 6\sqrt{5} - 10\sqrt{3} = -26\sqrt{3} + 21\sqrt{5}$$

Figura 54. Operaciones con números irracionales particulares, radicales
Fuente: (Perú, 2016e, p. 15)

Con respecto a los problemas donde se desarrollan otros conceptos matemáticos, pero existe presencia del número irracional, se ha observado en temas como progresiones geométricas, medidas de dispersión en estadística, razones trigonométricas en triángulos notables y cuerpos geométricos (volúmenes y áreas de prismas, y sólidos truncados) son muy similares a los planteados en los textos del tercer y cuarto grado, pero la única diferencia es el incremento en la dificultad de su desarrollo. En ese sentido, ya no incluiremos el análisis de dichos problemas.

En cambio, el texto de quinto grado incluye temas que no aparecen en los textos anteriores. Estos temas son funciones trigonométricas y geometría en el plano cartesiano. Dichos problemas de estos conceptos serán analizados a continuación.

En el capítulo 8, se desarrollan aspectos teóricos de las funciones trigonométricas, donde solo se analizan aspectos de la periodicidad de las funciones seno y coseno ($sen(\theta) = \mathrm{sen}(\theta \pm 2\pi)$ y $\cos(\theta) = \cos(\theta \pm 2\pi)$), pero no en el sentido de periodicidad de cifras decimales, sino de cómo el valor de estas funciones se repiten cada vez que se le suma o resta un múltiplo de 2π al ángulo inicial. De esa manera, las situaciones problemáticas están ausentes; sin embargo, el número irracional está presente como un ángulo, esto por la aparición π, ver figura 55, pero no se hace ninguna discusión sobre su naturaleza o alguna propiedad que este irracional cumple, solo se hace mención que tanto la función seno como coseno tienen periodo 2π.

En general, para todo $x \in \mathbb{R}$, tendremos que:

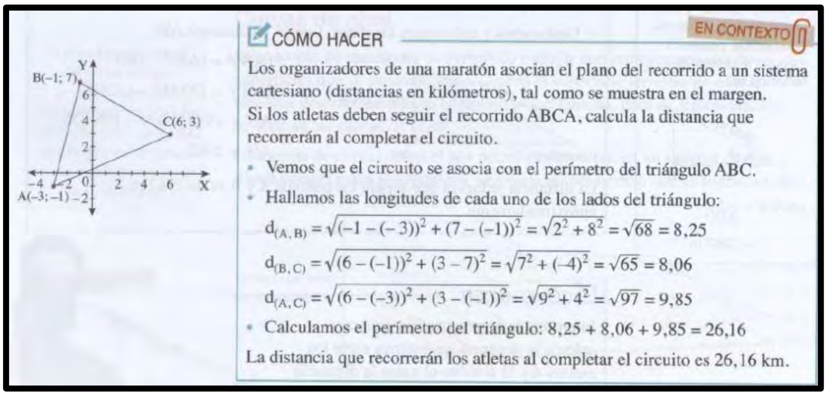
$$\text{sen } x = \text{sen } (x \pm 2\pi) \qquad \cos x = \cos (x \pm 2\pi)$$

Más aún, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x \pm 2k\pi) \qquad \cos x = \cos (x \pm 2k\pi)$$

Figura 55. Número irracional como periodo de funciones trigonométricas
Fuente: Perú (2016e, p. 118)

Otras tareas, donde aparece el número irracional, están presentes en el capítulo 11, donde se desarrolla el tema de la geometría en el plano cartesiano. Como se puede apreciar (figura 56), su presencia está dada en el cálculo de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano (teorema de Pitágoras) para calcular el perímetro de un triángulo. Aquí se requieren conceptos previos de geometría (perímetros), propiedades como el teorema de Pitágoras y plano cartesiano. Los procedimientos empleados también son geométricos, fórmula para calcular la distancia entre dos puntos. Los elementos lingüísticos siempre vinculados con lo geométrico y lo algebraico, tanto en lo verbal, lo simbólico y gráficos (figuras geométricas). Asimismo, los argumentos están basados en definiciones y gráficos geométricos.



Los organizadores de una maratón asocian el plano del recorrido a un sistema cartesiano (distancias en kilómetros), tal como se muestra en el margen.
Si los atletas deben seguir el recorrido ABCA, calcula la distancia que recorrerán al completar el circuito.

- Vemos que el circuito se asocia con el perímetro del triángulo ABC.
- Hallamos las longitudes de cada uno de los lados del triángulo:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(-1-(-3))^2+(7-(-1))^2} = \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{68} = 8,25$$
$$d_{(B,C)} = \sqrt{(6-(-1))^2+(3-7)^2} = \sqrt{7^2+(-4)^2} = \sqrt{65} = 8,06$$
$$d_{(A,C)} = \sqrt{(6-(-3))^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{9^2+4^2} = \sqrt{97} = 9,85$$

- Calculamos el perímetro del triángulo: $8,25 + 8,06 + 9,85 = 26,16$

La distancia que recorrerán los atletas al completar el circuito es 26,16 km.

Figura 56. Perímetros de polígonos en el plano cartesiano
Fuente: Perú (2016e, p.131)

Se han descrito problemas presentados en el texto didáctico del quinto grado. En seguida, se analizará los problemas planteados en el cuaderno de trabajo empleado por los estudiantes de grado académico.

4.2.3.2 Análisis del cuaderno de trabajo

El cuaderno de trabajo presenta ocho capítulos. En el primero de ellos, se aborda acerca de los números reales. Además, se presentan diversos problemas en diferentes contextos. Solo dos situaciones están relacionadas con los números irracionales.

La primera corresponde a un problema sobre la representación y la medida de un número irracional en la recta numérica, y la segunda sobre operaciones con los números reales. En realidad, este segundo problema está planteado como un juego, donde el objetivo es operar números irracionales, racionales y desarrollar el orden que tienen estos números. Por lo tanto, solo se presentará la primera situación.

- Problema: *Encontrar la longitud del diámetro de un semicírculo*

  En este problema, se desea obtener la medida del diámetro de un círculo, cuyo radio es el número irracional $\sqrt{5}$, ver figura 57. Para su solución, se sugiere graficar un cuadrado de lado 5, trazar la diagonal y, a partir de ella, graficar la circunferencia con radio $\sqrt{5}$, todo ello apoyado con el software

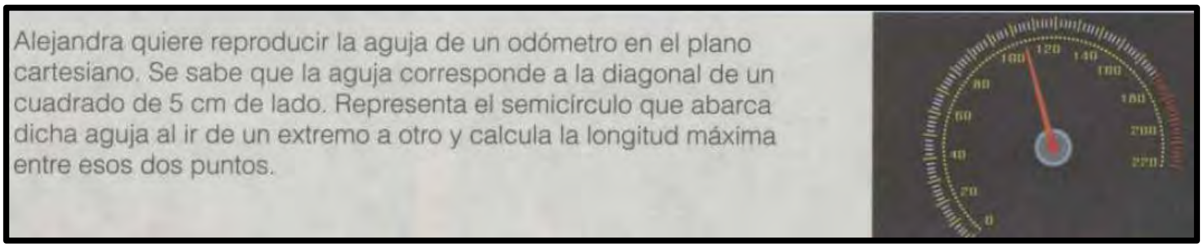


Figura 57. Problema de la longitud máxima del diámetro de una semicircunferencia
Fuente: (Perú, 2016f, p. 15)

  Geogebra. Al igual que en los textos de tercero y cuarto grado, se le pide a los estudiantes que midan el radio de la circunferencia con el Geogebra, pero como mencionamos antes, el software le dará como resultado un número racional. En este problema, se solicita la longitud máxima del diámetro, pero solo podría dar un valor máximo aproximado, ya que ese resultado se podrá ir mejorando cada vez que consideremos una cifra decimal más, pero no se menciona que por tratarse de un número irracional este resultado no tiene máximo. En todo caso, se debería dejar señalado teóricamente su valor, identificado con el símbolo $\sqrt{5}$.

Por otro lado, después de analizar el cuaderno de trabajo de quinto grado, no sorprende que los problemas planteados tengan la misma estructura que los textos y cuadernos de trabajo del tercer y cuarto grado, puesto que sus problemas son muy parecidos a la del texto didáctico. Es por esa razón que tampoco incluimos el análisis de dichos problemas.

A continuación, se presenta lo hallado del análisis realizado a los textos didácticos empleados en la secundaria peruana.

4.3 Sobre el análisis de textos

Del análisis de los textos podemos afirmar:

1. Los números irracionales se introducen a través de una definición, la cual no responde a una necesidad de resolver un problema y dar la definición. Así, un número irracional es presentado como un número con infinitas cifras decimales sin periodo o como aquel número que no puede ser representado como una fracción. Es decir, se considera el significado de la última configuración epistémica, a la que denominamos "Número irracional como algebraico o trascendente". Se justifica su existencia afirmando que existen otros números que no son racionales, y que servirán para relacionar diagonales y distancias circulares. No obstante, no presentan tareas donde se vea esa necesidad, sino más bien tareas donde solo se hace uso de los irracionales. Inclusive, cabe indicar que esta forma de presentar a los irracionales es el que predomina en los textos.

2. Las tareas de representación del número irracional en la recta real están presentes en todos los textos que hemos analizado. No obstante, este tipo de tareas solo representan a irracionales de la forma $\sqrt{\ }$ para números enteros positivos y no se señala que existen números irracionales que no pueden ser representados o construidos con regla y compas, como π por ejemplo. Cabe señalar que estas tareas de construcción están relacionadas con la última configuración epistémica, donde refiere la imposibilidad de construir π con regla y compas. Por otro lado, ninguno de los textos presenta, como un conocimiento previo, la construcción de los números racionales; es decir, no

hay tareas sobre cómo asociar un número racional, por ejemplo 1/4, a la recta real por medio de construcciones con regla y compas.

3. Por lo contrario, el libro de cuarto grado es el único que presenta un problema donde se propone reconocer un número irracional en su representación con cifras decimales, aunque muy implícitamente. Sin embargo, el texto no hace ninguna aclaración de que un número en su representación con cifras decimales no se puede reconocer como racional periódica o como irracional, a menos que sepamos su estructura o cómo este se origina, tal como se menciona en el aspecto 4 descrito en el capítulo anterior. Este problema planteado también está asociado a la configuración epistémica algebraico o trascendente, puesto que se usan conceptos de la representación decimal de un número irracional.

4. En los libros del tercero y cuarto grado, trabajan con aproximaciones, mientras que en el texto de quinto grado las aproximaciones casi son dejadas de lado, y más bien quedan en su representación simbólica, radicales con índice dos o el número π, acompañando, por medio de sumas o productos, a números enteros y racionales. Sin embargo, las aproximaciones siempre son utilizadas para responder, a lo que Perú (2016c) denomina problemas en contexto (problemas asociadas a lo social, económico, etc.), dado que la competencia exige al estudiante resolver problemas de cantidad tal que puedan traducirlos y estimarlos para resolver un problema.

5. El uso de la tecnología ha sido contemplado en tareas presentes en los textos analizados. Sin embargo, no se ha recurrido a ella para trabajar procesos iterativos, relacionados con el aspecto 5, la naturaleza del número irracional, donde se menciona que tareas de procesos iterados no podrían asociar al número irracional con el infinito, sino solo con la finalidad de calcular y aproximar un número irracional por un racional. Así, el uso de calculadoras o software de computadora se limita a visualizar números racionales, perdiéndose la naturaleza del número irracional asociado al infinito.

6. Tareas relacionadas a la medición concreta con algún instrumento están ausentes, salvo en los trabajos con el Geogebra que piden medir un segmento. Sin embargo, como mencionamos en el punto anterior, arrojan como resultado un valor racional.

7. Las tareas asociadas a procedimientos infinitos no se han encontrado en ninguno de los textos analizados. Una tarea con este tipo de procedimientos, que podrían ser tomadas en cuenta, son las fracciones continuas. Sin embargo, este concepto ni siquiera es trabajado en otros capítulos.

8. Del análisis realizado, se puede afirmar que los conocimientos previos que debe poseer el estudiante, para ser enseñado el número irracional, se reducen a conocimientos sobre los racionales y propiedades geométricas como áreas, perímetros, arcos, recta numérica y nociones de ecuaciones cuadráticas, y el teorema de Pitágoras. En ese sentido, los textos sí consideran y las especifican en la portada del capítulo, afirmando que estos conocimientos son clave para los nuevos conceptos que serán enseñados.

9. Los números trascendentes, como π, e, Φ, solo son mostrados como ejemplos de número irracional. Sobre el origen y naturaleza apenas uno de los libros menciona a π, pero a manera de anécdota.

Habiendo hecho el análisis de investigaciones sobre el origen epistemológico de los irracionales, descrito algunos de los significados parciales de estos números, y, a partir de estos significados, extraer algunos aspectos asociados al número irracional, se ha podido analizar los textos oficiales empleados por los estudiantes de la educación básica.

A partir de estas consideraciones, se puede señalar que las tareas planteadas en los textos oficiales, en los grados que el currículo Nacional del Perú establece el estudio de los números irracionales, no están en acorde con los aspectos a los que los números irracionales están asociados. Es decir, las tareas planteadas en los textos didácticos no son pertinentes para la introducción del número irracional.

CONSIDERACIONES FINALES

El currículo nacional considera a los números irracionales como uno de los conceptos a ser enseñados en la secundaria peruana. Es así que surge el interés por el estudio sobre las actividades y tareas que son usadas para introducir este concepto. En esa línea, este trabajo planteó como objetivo final estudiar libros oficiales usados en la secundaria peruana con el propósito de analizar la pertinencia de dichas actividades.

Para ello, fue necesario plantear como primer objetivo específico: *Identificar los diferentes significados de referencia del número irracional a través de un estudio epistemológico*. A partir de la revisión de antecedentes relacionados con estudios epistemológicos, se pudo reconocer la razón de ser de los irracionales.

En ese sentido, se ha considerado el trabajo de Reina et al. (2012) como uno de los más importantes, ya que se centra en el estudio de los irracionales, presentando una reconstrucción de los diferentes significados de este objeto matemático, además, de realizar un análisis de textos. De esa forma, dicho trabajo nos ha servido como una primera aproximación de los significados del número irracional. Asimismo, cabe señalar que los significados parciales hallados en nuestro estudio coinciden con los presentados por estos investigadores. Sin embargo, nuestro aporte se direcciona a hacer explícito y más amplio el análisis epistemológico desarrollado por dichos autores.

También, se consideraron estudios epistemológicos sobre otros conjuntos numéricos, ya que ello permitirá identificar la especificidad de los irracionales en relación a la de otros conjuntos. Por otra parte, se han tomado en cuenta estudios realizados, como el de Escolano y Gairín (2005), donde señalan que tareas sobre mediciones concretas son pertinentes para introducir los racionales, así, tareas de este tipo no serían adecuados para introducir los irracionales. Trabajos como ese permitirán identificar otros aspectos que deben ser considerados al analizar tareas presentes en los textos didácticos.

Asimismo, para la identificación de la metodología a seguir, se consideró la investigación de Pino (2010), en la que señala qué consideraciones se deben de tener en cuenta para reconstruir los diferentes significados de un objeto matemático.

De acuerdo a lo señalado por este autor, se procedió a la reconstrucción de los significados del número irracional. Para ello, se realizó la revisión de investigaciones de tipo epistemológica, las cuales permitieron analizar y describir aquellas situaciones problema donde se originó y desarrolló el número irracional.

Las situaciones problema hallados permitió reconstruir los significados de referencia del número irracional, teniendo en cuenta los objetos primarios que emergieron en la solución de dichos problemas. Es decir, el análisis no se ha realizado en el sentido estrictamente histórico, sino más bien identificando otros aspectos asociados al número irracional como conceptos, procedimientos, argumentos, propiedades y lenguaje empleado en la solución de los problemas. Asimismo, cada uno de los significados hallados se ha ido contrastando con los encontrados por Reina et al, (2012), puesto que dicho estudio nos da una primera aproximación de los significados del número irracional.

En este contexto, para alcanzar este primer objetivo, la revisión de trabajos antecedentes ha sido útil en la construcción de los significados de referencia del número irracional, debido a que nos ha servido para tener en cuenta aspectos relacionados al análisis epistemológico y otros relacionados al metodológico.

Por otro lado, con relación al segundo objetivo específico: *reconocer aspectos que caracterizan la naturaleza del número irracional,* a partir de los significados de referencia, se ha identificado algunos aspectos fundamentales asociados con la naturaleza de los números irracionales. Estos aspectos han sido extraídos de los significados parciales de número irracional, y, a partir de ellos, se han reconocido objetos y procesos inherentes a los irracionales, tales como su asociación al infinito; como para la obtención de una unidad de medida para dos segmentos inconmensurables por el método del antifairesis, el cual es un proceso infinito; del mismo modo, su carácter intra matemático, ya que su origen y su desarrollo han sido en ámbitos geométricos, aritméticos y algebraicos; y como en las situaciones problemas de partir un segmento en media y extrema razón, la completitud de la recta real y soluciones de ecuaciones polinómicas. El número irracional también está relacionado con su representación en cifras decimales, situaciones de la no periodicidad en sus cifras decimales, la cual difiere al de un número racional.

Finalmente, en relación al tercer objetivo específico: *identificar en qué medida las tareas de los textos didácticos empleados, actualmente, consideran algunos de los aspectos identificados previamente*, se han considerado los aspectos asociados a la naturaleza del número irracional hallados, y, en base a ellos, se analizaron los textos oficiales empleados en el tercer, cuarto y quinto grado de secundaria en el Perú, los cuales son distribuidos de manera gratuita por el Ministerio de Educación en todos los centros educativos estatales.

Del análisis de textos, se puede mencionar que las tareas propuestas no son idóneas para abordar los irracionales en la secundaria peruana. Ello debido a que, si bien las tareas son presentados en contextos intra matemáticos, hay otros aspectos que se han podido verificar, tales como su presentación simplificada por medio de la definición del número irracional como aquel número que no puede ser representado como una fracción o como aquel número cuya representación con cifras decimales no poseen un periodo. Es decir, no se presentan tareas que planteen el principio de necesidad de contar con un nuevo conjunto numérico diferente a los racionales.

Asimismo, el número irracional es clasificado como número irracional algebraico o trascendente, el cual también es presentado por medio de una definición. Sin embargo, solo se ejemplifican casos particulares. Por ejemplo, los irracionales algebraicos se presentan como la raíz de una ecuación cuadrática y no se hace mención a otros irracionales, como por ejemplo aquellas que son soluciones de ecuaciones polinómicas de grado mayor a dos.

Por otro lado, las tareas presentes en los textos están relacionadas a la representación del número irracional en la recta numérica por medio de regla y compas. No obstante, solo se emplean números particulares como las raíces cuadradas de números enteros no cuadrados perfectos, sin mencionar si existen otros números irracionales que pueden ser representados, o no con regla y compas. Tal es el caso de las raíces cúbicas de números enteros no cubos perfectos o números trascendentes como π que no pueden ser construidos con regla y compas.

Otras tareas asociadas al número irracional están presentes en problemas enteramente enfocadas a los cálculos de áreas y perímetros, donde el número irracional π, por ejemplo, se hace presente por medio de una fórmula.

Del mismo modo, se presentan tareas de medición por medio de un software (Geogebra), donde el resultado obtenido es un número racional. Es decir, con estas tareas, se pierde el aspecto fundamental al cual está asociado el número irracional, el infinito, de igual forma, en aquellas tareas donde se emplea el uso de calculadoras.

De lo hallado en los textos didácticos y los aspectos inherentes, propios de la naturaleza de los irracionales, se presentaron algunas recomendaciones sobre qué aspectos deberían tener en cuenta las tareas al introducir los números irracionales en la enseñanza. Cabe señalar que estas recomendaciones se han realizado de acuerdo a los aspectos inherentes descritos en los significados de referencia del número irracional.

Entonces, las tareas propuestas en los textos didácticos oficiales empleados en la secundaria peruana al abordar los números irracionales podrían considerar lo siguiente:

- Tareas que contengan el principio de necesidad, es decir, aquellas tareas que lleven al estudiante a observar que requiere de otro conjunto numérico (los irracionales) para la solución de un problema y no la justificación de su existencia por una definición
- Tareas que lleven a procesos infinitos, es decir, tomando en consideración aspecto del infinito inherente al número irracional
- Dejar de lado aquellas tareas que incluyan procesos de medición concreta por medio de instrumentos de medida
- Tareas relacionadas a la construcción de números irracionales con cifras decimales teniendo en cuenta la no periodicidad en sus cifras decimales
- Tareas sobre operaciones con números irracionales diferentes a aquellos que tienen la forma $a\sqrt{b},\ b \in \mathbb{Z}$ y asociar el proceso de aproximación para realizar cálculos con el número irracional
- Tareas asociadas a procesos infinitos iterados con la finalidad de que todo número irracional puede aproximarse mejor en cada iteración. Esto podría realizarse con el uso de tecnología.

El número irracional, al estar asociado al infinito, hace que su comprensión tenga una mayor dificultad, puesto que el concepto de infinito puede ser considerado como un proceso o como un objeto estático. La complejidad en la comprensión del infinito ha sido reportada en diversas investigaciones, como el de Garbin y Azcárate (2001), donde muestran la dificultad que presentan estudiantes universitarios de los primeros ciclos en la comprensión del infinito.

Asimismo, un estudiante comprende el significado del número irracional siempre que articule cada uno de los significados de referencia, es decir, identificar al número irracional hasta en un nivel mucho más abstracto, como los hallados en la configuración epistémica del número irracional como algebraico o trascendente. En cambio, con los conocimientos previos que tiene un estudiante de este nivel educativo, no podría lograr dicha articulación. Por tal motivo, al abordar este conjunto numérico en el nivel secundario, solo se podría realizar parcialmente.

Por otro lado, el modelo teórico considerado en esta tesis ha sido el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción Matemática (EOS), descrita en el capítulo dos, cuyas herramientas teóricas brindadas nos ha permitido reconstruir los significados parciales del número irracional, describiendo los objetos primarios (situaciones problemas, lenguaje empleado, definiciones y conceptos, proposiciones y propiedades, procedimientos, y los argumentos) que emergieron al tratar una situación problemática donde el número irracional está asociado. Asimismo, en nuestro análisis de los textos didácticos, al identificar los objetos primarios que emergen al resolver los diferentes problemas, tareas planteadas en ellos, se ha seguido la metodología planteada en el capítulo dos.

Finalmente, se mencionará algunas ideas para futuras investigaciones relacionadas con lo realizado.

- Proponer y elaborar actividades considerando los aspectos hallados en los significados parciales del número irracional, y estudiar en qué medida contribuyen a la comprensión del número irracional
- Ampliar este estudio a textos no oficiales que se emplean en la secundaria peruana para contrastar en qué medida las tareas presentes en dichos textos se corresponden con los aspectos inherentes a los números irracionales y lo que el currículo nacional propone referente a este concepto
- Estudiar en qué medida los profesores comprenden o toman en cuenta los significados del número irracional en la enseñanza de este objeto matemático

Estas cuestiones planteadas podrían contribuir a mejorar las tareas y actividades propuestas en los textos empleados en la secundaria peruana, y así mejorar y promover una mejor comprensión del número irracional en la secundaria peruana.

REFERENCIAS

Babini, J. (1967). *Historia de las ideas modernas en matemática*. Buenos Aires, Argentina: O.E.A

Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria* (Tesis de doctorado, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina). Recuperada de http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3718_Berge.pdf

Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza.

Cantoral, R. (2005). Pensamiento matemático avanzado: una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis. En R. Cantoral (Ed.), *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205 - 218). México D.F, México: Trillas

Cid, E y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, 575-594.

Crespo, C. C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Revista Premisa*, 11(41), 21-30. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/41%20Crespo.pdf

Dedekind, R. (1963). *Essays on the theory of numbers* (1a ed.). New York, United States: Dover Publications.

Escolano, R y Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en la educación primaria. *Unión*, (1), 17-35. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/1/Union_001.pdf

Euclides, (1576). *Los seis primeros libros de Los Elementos* (Rodrigo Çamorano, trad.) España: Sevilla, Casa de Alonso de la Barrera.

Extremiana, J., Hernandez, L., y Rivas, M. (2005). La divina razón de la belleza. *Sigma,* (27), 145-178. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2921472

Garbin, S., y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, (38), 53-67. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/38/053-067.pdf

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 99-123. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/ESP-1.pdf

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projectos de pesquisa* (4a ed.). Sao Paulo: Atlas.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de exhaución. *Sigma,* (33), 101-130. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2932730

Havil, J. (2012). *The Irrationals: A story of the numbers you can't count on*. United States American, New jersey: Princeton University Press.

Herrera, M. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 247-255). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/4547/

Konic, P. M., Godino, J. D., Castro, W. F. y Rivas, M. (2014). Estudio epistémico del número π: implicaciones didácticas. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1005-1012). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5658/

Maor, E. (2008). *e: a história de um número*. Brasil, Rio de Janeiro: Record.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en Psicología, 9*(1), 123-146. Recuperadoo de http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/psico/article/view/4033/3213

Murillo, M. (2014). Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades. *Revista digital Matemáticas, Educación e Internet, 15*(2), 1-26. Recuperado de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2171/1976

Niven, I. (1961). *Numbers: Rational and Irrational*. United States American, New York: Panel.

Oller, A y Gairín, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de la razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 317-138. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=7978

Perú, Ministerio de Educación (2017). Curriculo Nacional de Educación Básica. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Perú. Ministerio de Educación (2016a). Matemática 3 cuaderno de trabajo. Lima, Perú: Santillana

Perú. Ministerio de Educación (2016b). Matemática 3 secundaria. Lima, Perú: Santillana

Perú. Ministerio de Educación (2016c). Matemática 4 cuaderno de trabajo. Lima, Perú: Santillana

Perú. Ministerio de Educación (2016d). Matemática 4 secundaria. Lima, Perú: Santillana

Perú. Ministerio de Educación (2016e). Matemática 5 cuaderno de trabajo. Lima, Perú: Santillana

Perú. Ministerio de Educación (2016f). Matemática 5 secundaria. Lima, Perú: Santillana

Pino, L. (2010). *Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperada de: http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Luis_Pino_TFM_2010.pdf

Pommer, W, M. (2012). *A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais*. (Tesis de doctorado). Universidad de San Pablo, San Pablo, Brasil. Recuperado de: www.teses.usp.br

Reina, L. (2010). La fracción continua y el número irracional. Puntos de encuentro y algunos aportes didácticos. *Encuentro Latinoamericano de Profesores y Estudiantes de Matemática y Ciencias Naturales.* San Rafael, Mendoza, ARG. IES "Del Atuel". Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/299398416_LA_FRACCION_CONTINUA_Y_EL_NUMERO_IRRACIONAL_PUNTOS_DE_ENCUENTRO_Y_ALGUNOS_APORTES_DIDACTICOS

Reina, L., y Wilhelmi, M y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación matemática*, 24(3), 67-97. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40525846003.pdf

Reina, L., y Wilhelmi, M. R. (2017). Mimetismo ostensivo de objetos matemático. El caso de los números irracionales. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R.

Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López- Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/reina_wilhelmi.pdf

Rey Pastor, J., y Babini, J. (1985). *Historia de la Matemática*. 2. Barcelona, Expaña: Gedisa.

Rezende, V y Ignatius, C. (2013).Conhecimentos de alunos brasileiros e franceses relacionados ao campo conceitual dos números irracionais. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 8021-8027. Montevideo, Uruguay. Recuperado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/17.pdf

Roa, Solange. y Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática*, 26(1), 73-101. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40531694004

Rosales, A. (2010). Números trascendentes: Desarrollo histórico. *Revista digital Matemáticas, Educación e Internet*, 10(2), 1-12. Recuperado de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

Sanchez, J y Valdivé, C. (2011). El número irracional: un punto de vista epistemológico con interés didáctico. *Premisa* 16(62), 36-48. Recuperado de http://www.ucla.edu.ve/dac/revistateacs/articulos/Rev8-Art3-SanchezyOtros.pdf

Socas, M. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde la escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. *Números,* (50), 19-34. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/50/Articulo02.pdf

Torretti, R. (1998). El paraíso de Cantor. Santiago, Chile. Universitaria.

Tovar, J. (2011). *Un acercamiento al concepto y completitud de los números reales*. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/7275/1/johnedinsontovargil.2011.pdf

Villabona, D., y Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE.

Educación Matemática, 28(2), 119-150. Recuperado de: http://www.redalyc.org/jatsRepo/405/40546500005/index.html