

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



“RESOLUCIÓN TÓRICA DE SINGULARIDADES”

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

graduando

SUAREZ SANCHEZ, JHON FRANKLIN

Asesor

FERNÁNDEZ SÁNCHEZ, PERCY BRAULIO

Jurado

HERNANDEZ IGLESIAS, MAURO FERNANDO

NECIOSUP PUICAN, HERNÁN

Lima - Perú

Octubre -2018

RESOLUCIÓN TÓRICA DE SINGULARIDADES¹

SUAREZ SANCHEZ, JHON FRANKLIN ²

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. FERNÁNDEZ SÁNCHEZ, PERCY BRAULIO (Asesor)

Dr. NECIOSUP PUICAN, HERNÁN (presidente)

Dr. HERNANDEZ IGLESIAS, MAURO FERNANDO (miembro)

Lima - Perú
Octubre -2018

¹Version final con las correcciones del jurado

²Proyecto DGI 2017- 01-0083



Dedicado a mi familia

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios, por darme la oportunidad de hacer realidad uno de mis sueños.

Agradezco infinitamente a mi familia, mis hermanos Walter, Gilbert y mi pequeño hermanito Ricardo; en especial a mis padres Rosa Sánchez y Palemon Suarez; que con su apoyo moral y comprensión hicieron que nunca decaiga y siga en busca de tan añorado sueño.

Agradezco a mis amigos(as) que compartieron alegrías y penas a lo largo de mis estudios de maestría; entre ellos, Jorge Velasquez, David y Daniel Sanchez, Jorge Condeña, Héctor Llanos, etc.

Agradezco a los profesores de la maestría en matemáticas que me impartieron sus enseñanzas y que fue de mucha utilidad para mi crecimiento académico, profesor Rudy Rosas, Jesús Zapata, Ronald Rabanal, Liliana Puchuri, Andrés Beltrán y Alfredo Poirier.

Agradezco también a los profesores de EE.GG.CC por su apoyo incondicional con mi persona, profesor Juan Montealegre, Roy Sánchez, Norberto Chau, Edwin Villogas, Elton Barrantes, Wilson Díaz, José Flores, Carlos Tapia, Marco Solorzano, Nancy Saravia, Alejandro Ortiz, Christiam Figueroa, Luis Valdivieso, Ing. Enrique Díaz.

Un agradecimiento especial para la persona que me dio su tiempo, y creo, que ese es el regalo más valiosos de todos; me refiero a mi asesor de tesis Dr. Percy Fernández Sánchez; con quien espero continuar en este proyecto de vida que recién empieza.

Agradezco la participación en el proyecto DGI 2017- 01-0083.

Por último y no menos importante agradezco a los profesores Hernan Neciosup y Mauro Hernández por sus correcciones, aportes y charlas con respecto a mi tesis.

Gracias PUCP, por acogerme en tu morada científica.

Resumen

Suarez Sanchez, Jhon Franklin

Maestría en Matemáticas

Resolución Tórica de Singularidades

En el presente trabajo de tesis, una variedad tórica afin es una variedad algebraica X que contiene un toro algebraico $T \approx (\mathbf{C}^*)^n$ como un abierto de Zariski denso y verifica que la acción del toro T sobre sí mismo se extiende a una acción del toro T sobre X . En este trabajo las variedades tóricas al cual hacemos referencia, son variedades algebraicas que se construyen de una manera especial, utilizando conos σ ; es entonces que podemos demostrar que siempre podremos encontrar una resolución de singularidades que es inducida por el refinamiento del cono σ . Por lo tanto, el problema de resolver las singularidades de las variedades tóricas se ha reducido al problema combinatorio de encontrar un refinamiento de un cono, por ello mostramos la construcción y resolución mediante ejemplos, no sin antes verificar todos los aspectos matemáticos que garanticen los objetivos de la tesis el cual es resolver singularidades de una variedad tórica.

Palabras claves: Variedades tóricas, Acción tórica, Resolución de singularidades.

Abstract

Suarez Sanchez, Jhon Franklin

Maestría en Matemáticas

Resolución Tórica de Singularidades

In the present thesis work, an affine toric variety is an algebraic variety X containing an algebraic torus $T \approx (\mathbb{C}^*)^n$ as a Zariski open dense and verify that the action of the torus T on itself extends to an action of the torus T on X . In this work the toric varieties to which we refer, are algebraic varieties that are constructed in a special way, using cones σ ; it is then that we can demonstrate that we can always find a resolution of singularities that is induced by the refinement of the cone σ . Therefore, the problem of solving the singularities of the toric varieties has been reduced to the combinatorial problem of finding a refinement of a cone, for that reason we show the construction and resolution by means of examples, but not before verifying all the mathematical aspects that guarantee the objectives of the thesis which is to solve singularities of a toric variety.

Keywords: Toric varieties, Toric action, Resolution of singularities.

ÍNDICE

Introducción	1
1 Principales resultados de geometría algebraica	3
1.1 Conjuntos algebraicos	3
1.2 Teorema de Hilbert y sus consecuencias	7
1.3 Ideales maximales y la topología de Zariski	10
1.4 El espectro de un anillo	13
2 Morfismos y singularidades	17
2.1 Funciones regulares en variedades cuasi afines	17
2.2 Funciones regulares	19
2.2.1 Morfismos de variedades afines	20
2.2.2 Morfismos de espectros	21
2.3 Introducción a la resolución de singularidades	22
3 Introducción a la variedad tórica afín y proyectiva	26
3.1 Definición de una variedad tórica afín	27
3.2 Puntos reticulares y variedades tóricas proyectivas	35
3.3 Variedades afines normales	36
4 Construcción de una variedad tórica Afín	38
4.1 Conos	38
4.2 Caras	46
4.3 Monoides	55
4.4 Variedades tóricas afines	58
4.4.1 Polinomios de Laurent	58
4.4.2 Variedad tórica afín	60
5 Variedades tóricas	68
5.1 Variedades algebraicas proyectivas	68

5.2	Abanicos	70
5.3	Ejemplos de variedades tóricas	73
6	La Acción tórica y sus órbitas	76
6.1	La acción tórica	76
6.2	Las orbitas de una acción tórica	83
6.3	La correspondencia de órbita-cono	86
7	Singularidades en variedades tóricas	92
7.1	Conos singulares.....	92
7.2	Superficies tóricas	102
7.2.1	Fracciones continuas y superficies tóricas	106
7.3	Resolución de singularidades	111
8	Ejemplos de resolución tórica de singularidades	115
9	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123



LISTA DE FIGURAS

1	$V((x^2 + y^2 - 1)(x - y))$	4
2	$V((x - 1)(y - 1)(z - 1))$	5
3	$V(x^3 - y^2)$	6
4	$V(x^2(x + 1) - y^2)$	7
5	Conos bidimensionales.....	39
6	$\sigma = (e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3)$	39
7	$\sigma_1 \rightarrow \check{\sigma}_1$	40
8	$\sigma_2 \rightarrow \check{\sigma}_2$	41
9	$\sigma_3 \rightarrow \check{\sigma}_3$	41
10	$\check{\sigma} \leftarrow \sigma$	41
11	τ_1, τ_2 caras de σ_2	46
12	$\check{\tau}$ dual de una cara de σ_2	51
13	Dual de una de las caras de $\sigma = (-e_1 - e_2, e_2)$	51
14	$S_{\sigma_3} = (e_1^*, e_1^* + 2e_2^*, e_1^* + e_2^*)$	56
15	$S_{\sigma_2} = (e_1^*, e_2^*)$	56
16	$S_{\sigma_1} = (e_1^*, e_2^*, -e_2^*)$	57
17	$X_\sigma = V(I_\sigma) = (x_1x_3 - x_2^2)$	61
18	Abanicos : $\sum \sum$	71
19	$\sum = \{\{0\}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, (e_1), (e_2), (-e_1 - e_2)\}$	73
20	$\sum = \{\{0\}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, (e_1), (e_2), (-e_1), (-e_2)\}$	74
21	$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ para $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$	87
22	Refinamiento de un cono.....	115
23	Refinamiento de $\sigma = (e_1, e_2)$	116
24	Refinamiento de σ	117
25	σ y el refinamiento \sum	118
26	σ y el refinamiento \sum	121
27	$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$	121

Introducción

La razón de la geometría algebraica es el estudio de ceros de polinomios, los cuales establecen variedades algebraicas bajo ciertos requerimientos. Por ejemplo, la hipérbola, la parábola y los hiperplanos son variedades algebraicas. En geometría algebraica, un fenómeno de particular interés es la singularidad. Informalmente, las singularidades ocurren cuando el espacio tangente a un punto particular en la variedad no está bien definida. Considere por ejemplo la curva $y^2 = x^3 - x^2$ en \mathbb{R}^2 ; entonces la curva se cruza en 0, y como consecuencia si cruzamos cualquier línea a través del origen con la curva obtenemos una doble raíz.

Una pregunta de gran interés es la siguiente: dada cualquier variedad algebraica X ¿cómo resolver sus singularidades?. Si suponemos que Y es una variedad no singular, una resolución de singularidades es una función $\varphi : X \rightarrow Y$ con las siguientes características; que dicha función $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ debe tener componentes racionales, y además debe definirse en casi todo X , de modo que el conjunto de puntos dónde no está definido, forma una subvariedad algebraica.

El matemático japonés Heisuke Hironaka en 1964, brindó una respuesta a nuestra pregunta. El célebre Teorema de Hironaka, el cual refiere que una resolución de singularidades de X siempre existe, siempre y cuando la variedad X esté sobre un cuerpo de característica cero. Hironaka por su gran contribución en 1970, fue premiado con el máximo galardón para un matemático, la medalla Fields. Sin embargo, aunque conocemos la existencia de una resolución de singularidades de cualquier variedad algebraica X , es excesivamente difícil determinarlo.

Una variedad tórica afín es una variedad algebraica X que contiene un toro algebraico $T \approx (\mathbb{C}^*)^n$ como un abierto de Zariski denso y verifica que la acción del toro T sobre sí mismo se extiende a una acción del toro T sobre X . Así, $(\mathbb{C}^*)^n$ y $(\mathbb{C})^n$ son ejemplos de variedades tóricas afines. A lo largo de la historia, las variedades tóricas han recibido diversos nombres y definiciones, desde la primera definición formal dada por Demazure [5] hasta las últimas publicaciones dada por Fulton [7].

Las variedades tóricas al cual hacemos referencia, son variedades algebraicas que se construyen de una manera especial, utilizando conos σ ; es entonces que podemos demostrar que siempre podremos encontrar una resolución de singularidades que es inducida por un refinamiento del cono σ . Por lo tanto, el problema de resolver las singularidades de las variedades tóricas se ha reducido al problema combinatorio de encontrar un refinamiento de un cono σ .

El presente trabajo está organizado como sigue: en el Capítulo 1, presentamos una descripción de la geometría algebraica clásica. Dando mención a los conjuntos algebraicos, teoremas de Hilbert, la interacción entre álgebras, ideales máximos además de la topología de Zariski y el espectro. En el Capítulo 2 definimos funciones racionales y singularidades. En el Capítulo 3 brindamos una descripción detallada del significado de un carácter y sub grupo de un solo parámetro; además de mencionar a la definición formal de una variedad tórica afín y proyectiva. En el capítulo 4, describimos el proceso de construcción de una variedad tórica afín desde la elección de un cono σ hasta su variedad tórica afín asociada X_σ . En el capítulo 5, veremos cómo pegar variedades tóricas afines para obtener variedades tóricas proyectivas. En el capítulo 6, describiremos la acción del toro sobre variedades tóricas, cabe mencionar también que veremos las orbitas de una acción tórica y la relación que guarda la correspondencia orbita cono. En el capítulo 7, estudiaremos acerca de las singularidades en variedades tóricas donde mencionaremos cómo resolver una singularidad tórica. Por último en el capítulo 8, exploraremos algunos ejemplos para el caso de superficies tóricas que se obtienen a partir de conos bidimensionales y resolveremos la singularidad de dicha superficie.

El presente trabajo de tesis es de gran importancia ya que las variedades tóricas desde 1991, tienen su propio número de clasificación 14M25 (en la MathSciNet database), para los interesados podrían revisar en el apéndice A del libro de Cox. Además, se han observado aplicaciones de las variedades tóricas en la programación entera, en teoría de códigos, en resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales, etc.

Capítulo 1

1 Principales resultados de geometría algebraica

En este primer capítulo empezaremos con el estudio de la geometría algebraica clásica que utilizaremos en la construcción de variedades tóricas. Como referencia para esta sección utilizaremos [2] y [8]. A pesar de que todos los resultados que mencionaremos se pueden enunciar sobre cualquier cuerpo K , nosotros elegiremos darlos sobre el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, el cual es un cuerpo algebraicamente cerrado y denotaremos por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ al anillo de polinomios de n -variables sobre \mathbb{C} .

1.1 Conjuntos algebraicos

Geometría Algebraica es el estudio de los ceros de polinomios y por ende estudiaremos polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, y sus conjuntos de cero correspondientes dentro de \mathbb{C}^n .

Definición 1.1.1. *Dado un subconjunto $S \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, el siguiente conjunto de ceros comunes de un conjunto de polinomios,*

$$V(S) = \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0, \forall f \in S\}$$

se llama conjunto algebraico afín (Variedad afín) definido por S .

Sea I el ideal generado por S , entonces $V(I) = V(S)$. Un subconjunto X de \mathbb{C}^n se dice que es un conjunto algebraico afín si existe un subconjunto $S \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $X = V(S)$. El conjunto que es generado por un solo polinomio se conoce como curva $n = 2$, superficie $n = 3$ y en general híper superficie para $n \geq 4$.

Definición 1.1.2. *Dado un subconjunto X de \mathbb{C}^n , definimos:*

$$I(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : \forall \alpha \in X, f(\alpha) = 0\}$$

llamado el ideal de X .

Por lo tanto, tenemos que la aplicación V manda subconjuntos de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ en conjuntos algebraicos afines y la aplicación I manda subconjuntos de \mathbb{C}^n en ideales.

$$\{ \text{subconjuntos algebraicos de } \mathbb{C}^n \} \xleftrightarrow{V} \{ \text{ideales de } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \}$$

Estas aplicaciones cumplen las propiedades siguientes, cuyas demostraciones se puede encontrar en [2, pag. 3] y [8, pag. 3].

1. Si $S_1 \subseteq S_2$ son subconjuntos de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, entonces $V(S_1) \supseteq V(S_2)$.
2. Si $X_1 \subset X_2$ son subconjuntos de \mathbb{C}^n , entonces $I(X_1) \supseteq I(X_2)$.
3. Dados dos subconjuntos X_1, X_2 de \mathbb{C}^n , tenemos que $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$.

Además, es posible mostrar que la unión finita de dos conjuntos algebraicos, la intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos, el conjunto vacío y el conjunto \mathbb{C}^n son conjuntos algebraicos.

Ejemplo 1.1.3. Construimos algunos ejemplos en \mathbb{C}^2 . Sea J el ideal generado por $(x^2 + y^2 - 1)$, $V(J)$ es un círculo (complejo). Ahora sea K el ideal generado por $(x - y)$, $V(K)$ es una línea. Se puede ver que $V((J, K))$ es la intersección del círculo $V(J)$ con la línea $V(K)$. Este ejemplo muestra que tanto las intersecciones como las uniones de conjuntos algebraicos son también conjuntos algebraicos.

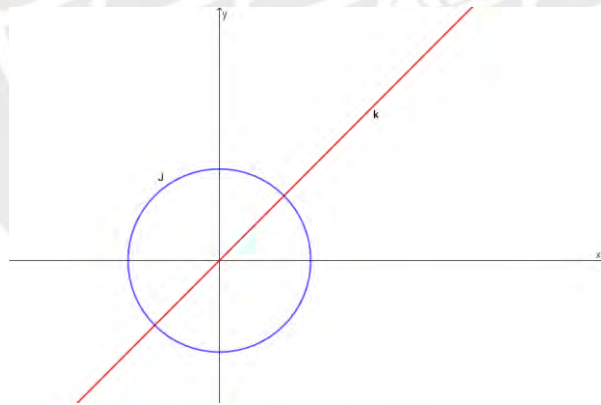


Figura 1: $V((x^2 + y^2 - 1)(x - y))$

Observación 1.1.4. En base a lo expuesto anteriormente, podemos definir la topología de Zariski sobre el espacio \mathbb{C}^n tomando como conjuntos abiertos los complementarios de los conjuntos algebraicos en \mathbb{C}^n . Dado que los cerrados de la topología de Zariski en

\mathbb{C}^n se corresponden con los conjuntos de ceros de polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, tenemos que la topología de Zariski en \mathbb{C}^n es menos fina que la topología usual en \mathbb{C}^n .

Definición 1.1.5. Un subconjunto no vacío Y de un espacio topológico X es irreducible si no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos propios de X , cada uno de ellos cerrados en Y . El conjunto vacío no se considera irreducible. Si $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{C}^n$ diremos que X_1 es una sub variedad de X_2 .

Ejemplo 1.1.6. Sea L el ideal en $\mathbb{C}[x, y, z]$ generado por $((x - 1)(y - 1)(z - 1))$. $V(L)$ es la unión de los tres planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. Por lo tanto $V(L)$ no es irreducible. Sin embargo, refiriéndonos al ejemplo 1.1.3, tanto $V(J)$ como $V(K)$ son irreducibles. No podemos probar esto todavía, pero veremos que esto es, porque tanto J como K son ideales primos. Ver Corolario 1.2.12.

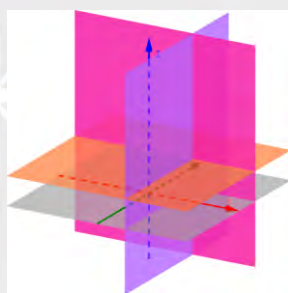


Figura 2: $V((x - 1)(y - 1)(z - 1))$

Ejemplo 1.1.7. Sea M el ideal en $\mathbb{C}[x, y]$ generado por $((x^3 - y^2))$. $V(M)$ es una curva irreducible denominada *curva cuspidal*.

Ejemplo 1.1.8. Sea N el ideal en $\mathbb{C}[x, y]$ generado por $(x^2(x + 1) - y^2)$. $V(N)$ es una curva irreducible denominada *Folium Cartesii*.

Veamos algunos resultados sobre conjuntos irreducibles.

Definición 1.1.9. Un ideal \mathfrak{p} en un anillo conmutativo R se dice que es primo si $\mathfrak{p} \neq R$ y para todo $a, b \in R$, se cumple: $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p} \text{ o } b \in \mathfrak{p}$.

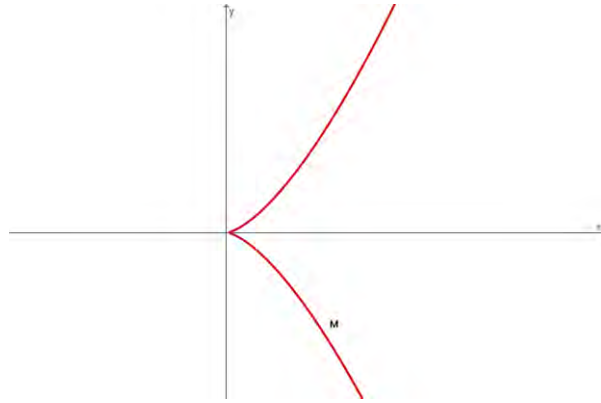


Figura 3: $V(x^3 - y^2)$

Definición 1.1.10. *Un anillo $(R, +, \cdot)$ es llamado dominio o dominio de integridad si, el producto de dos elementos cuales quiera no nulos de R es un elemento no nulo, es decir, $\forall x, y \in R \setminus \{0\}, x \cdot y \neq 0$.*

Proposición 1.1.11. *Dado un anillo conmutativo R , un ideal $\mathfrak{p} \subset R$ es primo si, y solo si, el anillo cociente R/\mathfrak{p} es dominio de integridad.*

Demostración. Ver [8, pag.4] y [14, pag.20].

Q

Proposición 1.1.12. *Un conjunto algebraico es irreducible si, y solo si, el ideal que lo genera es primo.*

Demostración. Ver [11, 1.1.9] y [14, pag.74].

Q

Proposición 1.1.13. *Sean X^j e Y^j espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo con $X \subset X^j$ e $Y \subset Y^j$. Se cumple que si X es irreducible en X^j , entonces Y es irreducible en Y^j .*

Demostración. Ver [8, pag. 3].

Q

Definición 1.1.14. *Una variedad algebraica afín es un subconjunto cerrado irreducible de \mathbb{C}^n respecto de la topología de Zariski.*

Un subconjunto abierto de una variedad afín es una variedad cuasi-afín.

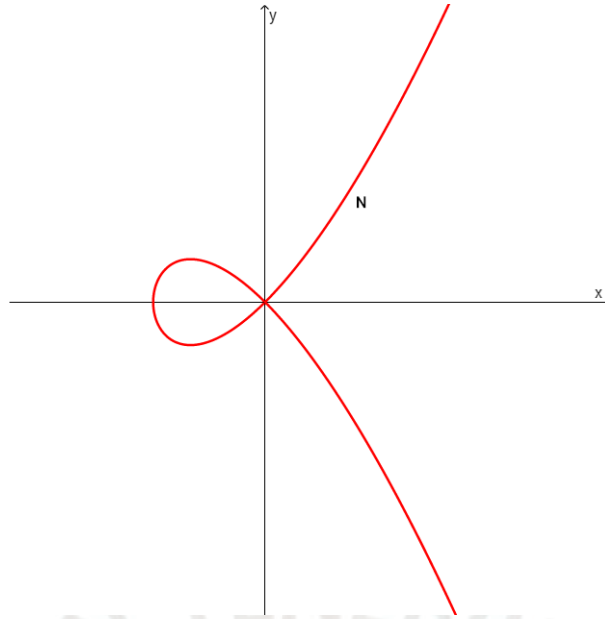


Figura 4: $V(x^2(x+1) - y^2)$

1.2 Teorema de Hilbert y sus consecuencias

El teorema base (*Basisatz*) y el teorema de los ceros (*Nullstellensatz*) de Hilbert, nos permiten establecer varias correspondencias muy importantes entre ideales y conjuntos algebraicos. Aquí radica la belleza de la geometría algebraica, ya que nos permite estudiar conjuntos algebraicos a través de los polinomios.

El primero de los teoremas de Hilbert nos dice que cada conjunto algebraico puede ser expresado como la unión de un número finito de conjuntos algebraicos irreducibles.

Definición 1.2.1. *Se dice que un anillo es Noetheriano si todos los ideales en el anillo son finitamente generados. En particular, los cuerpos son anillos Noetherianos.*

Teorema 1.2.2 (Teorema base de Hilbert (*Basisatz*)) *Si K es un anillo noetheriano, entonces $K[x_1, \dots, x_n]$ es un anillo noetheriano.*

Demostración. Ver [11, 1.2.2].

Q

Como \mathbb{C} es un cuerpo, entonces es Noetheriano, el siguiente corolario es claro.

Corolario 1.2.3. $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano.

Demostración. Ver [8, pag. 5] y [11, 1.2.3].

Q

El teorema 1.2.2 tiene muchas implicaciones. Enunciaremos alguno de ellos.

Corolario 1.2.4. Cada conjunto algebraico es la intersección de un número finito de hipersuperficies.

Demostración. Ver [11, 1.2.4].

Q

Corolario 1.2.5. Si $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ es una secuencia descendente de conjuntos algebraicos, entonces existe un número entero r tal que $X_r = X_{r+1} = X_{r+2} \dots$. Esto se conoce como la condición de cadena descendente.

Demostración. Ver [11, 1.2.5] y [14, 3.2].

Q

Lema 1.2.6. Todo conjunto algebraico X es una unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles.

Demostración. Ver [11, 1.2.6].

Q

Corolario 1.2.7. La descomposición de cualquier conjunto algebraico X en una unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles, son esencialmente únicos.

Demostración. Ver [8, 1.5] y [11, 1.2.7].

Q

Definición 1.2.8. Si $J \subset K$, entonces el radical de J es,

$$\text{rad}(J) = \sqrt{J} = \{f \in K : \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in J\}.$$

Tenga en cuenta que \sqrt{J} es un ideal porque $f, g \in \sqrt{J} \Rightarrow f^n, g^m \in J$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto si $r \geq m + n - 1$ entonces $(f + g)^r = \sum_{i=1}^r f^i g^{r-i} \in J$.

Lema 1.2.9. Si J es primo, entonces $\sqrt{J} = J$.

Demostración. Ver [8, pag.3] y [11, 1.2.9].

Q

Teorema 1.2.10 (Teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz)).

1. *Todo ideal máximo J del anillo de polinomios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es de la forma $m_a = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ para algún punto $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. En otras palabras $J = V((a))$*
2. *Para todo ideal propio $J \subsetneq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que $V(J) \neq \emptyset$.*
3. *Para todo ideal $J \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que $I(V(J)) = \sqrt{J}$*

Demostración. Ver [8, pag. 4], [11, 1.2.10] y [14, 5.6].

Q

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos

Corolario 1.2.11. *Existe una correspondencia uno a uno entre ideales radicales y subconjuntos algebraicos.*

Demostración. Ver [11, 1.2.11] y [14, 5.8].

Q

La correspondencia es :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ideales radicales}\} & \longleftrightarrow & \{\text{conjuntos algebraicos}\} \\ J & \longmapsto & V(J) \\ I(X) & \longleftarrow & X \end{array}$$

Corolario 1.2.12. *Si J es un ideal primo, entonces $V(J)$ es irreducible. Por lo tanto, hay una correspondencia uno a uno entre ideales primos y variedades algebraicas (conjuntos algebraicos irreducibles).*

Demostración. Ver [11, 1.2.12] y [14, pag. 76].

Q

Finalmente, es evidente del Teorema 1.2.10 (1) que

Corolario 1.2.13. *Existe una correspondencia $a \rightarrow m_a$ uno a uno entre puntos de \mathbb{C}^k e ideales máximos J de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.*

$$\mathbb{C}^k \leftrightarrow \{J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], J \text{ ideal maximal}\} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$$

Esto nos permite dar la siguiente descripción del conjunto $V(I)$ para un ideal I .

Demostración. Ver [11, 1.2.13] y [14, pag. 77].

Q

Observación 1.2.14. *Teniendo en cuenta que hay una correspondencia uno a uno entre ideales máximos de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y homomorfismos de \mathbb{C} -álgebras $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}$. Además, que cada ideal maximal es el núcleo de un homomorfismo de álgebras y cada homomorfismo de álgebras tiene un ideal maximal como núcleo. Por el Corolario (1.2.13), podemos deducir que existe una correspondencia uno a uno entre los ideales maximales y \mathbb{C}^n ; y finalmente asegurar que hay una correspondencia uno a uno entre $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C})$ y \mathbb{C}^n .*

Sea $\varphi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}$ un homomorfismo \mathbb{C} -álgebra. Si p es un polinomio arbitrario, entonces, en consecuencia de la definición de homomorfismos de un álgebra, $\varphi(p) = p(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$. Es decir, es la evaluación de p en el punto $x = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$. Se puede ver que el núcleo de φ es m_x . Así, nuestra correspondencia es

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}) &\leftrightarrow \mathbb{C}^n \\ \varphi &\leftrightarrow \varphi(x) \end{aligned}$$

1.3 Ideales maximales y la topología de Zariski

En esta parte exploramos otras correspondencias entre ideales maximales y conjuntos algebraicos. Nosotros mencionamos, en la observación 1.1.4., una topología llamada topología de Zariski, que se usará mucho en los capítulos subsiguientes. La Topología Zariski debe su nombre a Oscar Zariski, ex profesor de Harvard y uno de los mayores geómetras algebraicos del siglo veinte.

Lema 1.3.1. *Si $J \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ entonces $V(J) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid J \subseteq m_x\}$.*

Demostración. Ver [11, 1.3.1] y [14, pag.80].

Q

Definición 1.3.2. *Si X es un conjunto algebraico, entonces $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$*

es el anillo de coordenadas o el anillo de funciones regulares del conjunto algebraico $\text{afn } X$.

Supongamos que $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Si tomamos dos polinomios arbitrarios $g, g^j \in f + I(X)$ entonces $g|_X = g^j|_X$. Por lo tanto, podemos pensar de manera equivalente en $\mathbb{C}[X]$ como $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Por otro lado, podemos observar que el objeto algebraico más importante asociado a X es su anillo de coordenadas

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X).$$

Los elementos de $\mathbb{C}[X]$ se pueden interpretar como las funciones polinomiales \mathbb{C} - evaluadas en X . Tenga en cuenta que $\mathbb{C}[X]$ es un \mathbb{C} -álgebra, lo que significa que su estructura de espacio vectorial es compatible con su estructura de anillo.

A consecuencia de lo expuesto hasta el momento podemos enunciar el siguiente resultado:

$\mathbb{C}[X]$ es un dominio integridad $\Leftrightarrow I(X)$ es un ideal primo $\Leftrightarrow X$ es irreducible.

Lema 1.3.3 Sea $J \subseteq R$. Los ideales maximales del anillo R/J son precisamente aquellos de la forma m/J donde m es maximal en R y $J \subset m$.

Demostración. Ver [11, 1.3.3].

Q

Lema 1.3.4. Si X es un conjunto algebraico afn con el anillo de coordenadas $\mathbb{C}[X]$, entonces hay una correspondencia uno-a-uno entre:

$$\begin{aligned} X &\leftrightarrow \{\text{ideales maximales en } \mathbb{C}[X]\} \\ x &\leftrightarrow m_x/I(X). \end{aligned}$$

Ahora contamos con las herramientas necesarias para la generalización de la observación 1.2.14.

Demostración. Ver [11, 1.3.4].

Q

Corolario 1.3.5. *Lo siguiente es una correspondencia biyectiva:*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[X], \mathbb{C}) &\leftrightarrow X \\ \varphi &\rightarrow (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Sea X un conjunto algebraico afín. Si Y es un conjunto algebraico tal que $Y \subseteq X$ diremos que Y es un subconjunto algebraico de X .

Demostración. Ver [11, 1.3.5].

Q

Proposición 1.3.6. *Los subconjuntos algebraicos de X forman los conjuntos cerrados de la topología de Zariski. Los conjuntos abiertos de la topología de Zariski en X son los complementos en X de los subconjuntos algebraicos. Un subconjunto abierto principal es el complemento en X de $V(\mathbf{n})$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Denotemos a $D(\mathbf{n}) := X - V(\mathbf{n})$. Los conjuntos abiertos de Zariski de un conjunto algebraico también se conocen como variedades cuasi afines. A menos que se diga lo contrario, cuando hacemos referencias topológicas como “abierto”, “cerrado” o “denso” nos referimos a la topología de Zariski.*

Demostración. Ver [14, 5.9].

Q

Lema 1.3.7.

1. *La topología de Zariski no es de Hausdorff.*
2. *Todo subconjunto abierto de una variedad algebraica X es denso.*

Demostración. Ver [11, 1.3.7].

Q

Denotamos la topología inducida por la norma estándar en \mathbb{C}^n como la topología “usual”. Aunque la topología de Zariski para nosotros es predeterminado, la topología usual será utilizado en varios lugares de esta tesis.

Lema 1.3.8. *Si X contiene un conjunto U que es el abierto “usual”, entonces $X = \mathbb{C}^n$. Así, si W es un conjunto abierto Zariski de X , entonces el conjunto cerrado “usual” más pequeño que contiene W es X .*

Demostración. Ver [11, 1.3.8].

Q

Observación 1.3.9. Hemos visto que los conjuntos abiertos de Zariski son densos con respecto a ambas topologías. Además, más adelante veremos que el toro n -dimensional $(\mathbb{C} - \{0\})^n$ es un subconjunto abierto de Zariski de una variedad tórica. A partir de los lemas 1.3.7 y 1.3.8 podemos decir que el toro es un subconjunto abierto denso de variedades tóricas con respecto a ambos topologías.

1.4 El espectro de un anillo

Sea X un conjunto algebraico afín. Del Lema 1.3.4 sabemos que existe una correspondencia entre los ideales maximales $m \ni I(X)$ y los puntos en X . Pero los puntos en X son conjuntos cerrados (los ceros de los ideales maximales) en la topología de Zariski. Esto sugiere entonces que podemos definir una topología homeomorfa para la topología de Zariski en el conjunto de todos los ideales maximales conteniendo $I(X)$. Como $I(X)$ es un álgebra finitamente generada, definimos nuestra topología en álgebras finitamente generadas.

Sea A un \mathbb{C} -álgebra finitamente generada.

Definición 1.4.1. El Espectro de A es el conjunto de todos los ideales maximales de A , lo cual denotaremos como $\text{Specm}(A)$ y al conjunto de todos los ideales primos $\text{Spec}(A)$, donde $\text{Specm}(A) \subseteq \text{Spec}(A)$.

Más adelante introduciremos otras definiciones equivalentes del espectro.

Definición 1.4.2. Sea $J \subseteq A$. Los conjuntos cerrados de nuestra topología serán de la forma $\overline{V}(J) = \{m \in \text{Spec}(A) : J \subseteq m\}$. Los complementos de conjuntos cerrados son conjuntos abiertos.

Lema 1.4.3. La topología está bien definida:

1. Si $K, L \subseteq A$, entonces $\overline{V}(K) \cup \overline{V}(L) = \overline{V}(KL)$.
2. Si $\{J_\alpha\}_{\alpha \in P}$ es cualquier conjunto de ideales de A , entonces $\bigcap_{\alpha \in P} \overline{V}(J_\alpha) = \overline{V}(J)$,

donde J es el ideal más pequeño que contiene todos los ideales en $\{J_\alpha\}_{\alpha \in P}$.

Demostración. Ver [11, 1.4.3] y [14, pag.77].

Q

Lema 1.4.4. Si $\varphi : A \rightarrow B$ es un isomorfismo, entonces $\text{Spec}(A)$ es homeomorfo a $\text{Spec}(B)$.

Demostración. Ver [11, 1.4.4].

Q

Hasta ahora solo hemos estudiado el espectro como una entidad algebraica. Ahora vemos que también se puede estudiar como una entidad geométrica; ya que el espectro es homeomorfo a un conjunto algebraico.

Sea A un \mathbb{C} -álgebra finitamente generado con generadores $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Asumiendo que A es un dominio integridad (es decir $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $y = 0$); podemos definir un homomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$ donde $\varphi(x_i) = a_i$ y extenderlo naturalmente a sumas y múltiplos de x_i . Finalmente por el Teorema del Isomorfismo de anillos tenemos que,

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \ker(\varphi) \subset A.$$

Desde que A es un dominio de integridad, $\ker(\varphi)$ es primo. Por lo tanto, mediante el estudio de los espectros de las álgebras de la forma $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$, donde J es primo; podemos entender el espectro de las \mathbb{C} -álgebras finitamente generados.

A partir de ahora asumimos $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$, donde J es primo. Esto nos lleva a una extensión del Lema 1.3.4, que facilitará una interpretación geométrica del espectro.

Proposición 1.4.5. La biyección $\gamma : V(A) \rightarrow \text{Spec}(A)$ donde $x \mapsto m_x$ es un homeomorfismo.

Demostración. Ver [11, 1.4.5].

Q

Por lo tanto, el espectro de un A álgebra finitamente generada (donde A es un dominio de integridad) es homeomorfo a un conjunto algebraico afín. Esto sugiere una definición alternativa del espectro:

Definición 1.4.6. (*Definición geométrica del espectro*). Sea A un álgebra finitamente generada; la definición del anillo de coordenadas del espectro, o solo espectro, de A es $V(J)$ donde $A \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/J$.

Esto requiere algunas observaciones.

Observación 1.4.7. Veamos a qué se refiere nuestra notación. Supongamos que A es un \mathbb{C} -álgebra con generadores $\{w_1, \dots, w_k\}$. A menudo acostumbramos escribir (x_1, \dots, x_k) como las coordenadas para A ; esta es una forma abreviada de referirnos al conjunto $V(J) \subseteq \mathbb{C}^k$, donde J es tal que $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/J \subset A$. Es decir, cuando escribimos (x_1, \dots, x_k) como coordenadas para A , estamos dando referencia a un conjunto algebraico $V(J)$ en \mathbb{C}^k que es homeomorfo a $\text{Spec}(A)$.

Observación 1.4.8. Hasta ahora la definición del anillo de coordenadas del espectro, solo está definida hasta el homeomorfismo. Supongamos que $A \subset \mathbb{C}[y_1, \dots, y_k]/J^j$ y $A \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/J^{jj}$. Por lo tanto, $V(J^j)$ y $V(J^{jj})$ son ambos homeomorfos al $\text{Spec}(A)$. En el capítulo siguiente veremos que $V(J^j)$ y $V(J^{jj})$ son más que solo homeomorfos; es decir, ellos son isomorfos, esto implica que existe un “morfismo” biyectivo entre ellos. Por el Corolario 1.3.5 hay una relación biyectiva entre $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(A, \mathbb{C})$ y $\text{Spec}(A)$. Esto nos lleva a una tercera forma de entender al espectro.

Definición 1.4.9. (*Homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras, definición del espectro*).

El espectro del homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras de A es $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(A, \mathbb{C})$.

Si $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ entonces, por la Observación 1.3.5, la correspondencia es:

$(y_1, \dots, y_n) \in V(J) \rightarrow \xi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(A, \mathbb{C})$, donde $\xi(x_i) = y_i$.

Observación 1.4.10. Todas estas definiciones del espectro son útiles. La definición del anillo de coordenadas es a veces más intuitiva ya que uno puede “visualizarla”. Sin embargo, la definición del anillo de coordenadas también requiere la introducción de coordenadas; lo que puede significar una notación muy engorrosa (como es quizás el caso en Ewald ([6])). Por otro lado, la definición algebraica del espectro a menudo hace que

las pruebas sean más elegantes. Además, es más consistente con la definición utilizada en geometría algebraica avanzada, donde el espectro se define como el conjunto de todos los ideales primos (ver [8, p 70]). La definición de homomorfismo C -álgebra es útil cuando A no puede ser fácilmente expresado como el cociente de un anillo polinómico por un ideal radical. También encaja elegantemente con una cuarta definición del Espectro que se presentará en un capítulo posterior la definición de Semigrupo-Homomorfismo del espectro.



Capítulo 2

2 Morfismos y singularidades

En el capítulo anterior definimos el anillo de coordenadas $\mathbb{C}[X]$ de una variedad afín X . Observamos que el anillo de coordenadas es esencialmente la restricción del anillo de polinomios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ en X . En este capítulo definiremos funciones adicionales en variedades afines, y también veremos las funciones en variedades cuasi-afines. Concluimos con el enunciado del teorema de "Resolución de Singularidades" de Hironaka.

2.1 Funciones regulares en variedades cuasi-afines

En esta sección veremos las funciones definidas en las variedades cuasi-afines $X \subset \mathbb{C}^n$. Específicamente, queremos tomar fracciones de polinomios de conjuntos afines y cuasi-afines. Para que nuestra definición sea consistente, debemos tomar un ligero desvío y mirar el álgebra de los anillos. Sea entonces R un anillo.

Definición 2.1.1. *Un subconjunto multiplicativamente cerrado $Q \subset R$ es un subconjunto que satisface;*

a) $s, q \in Q \Rightarrow sq \in Q$.

b) $1 \in Q$.

Lema 2.1.2. *Sea $Q \subset R$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Definamos a $R[Q^{-1}]$ como el conjunto de clases de equivalencia del conjunto $\left\{ \frac{r}{q} : r \in R, q \in Q \right\}$ con una relación de equivalencia $\frac{r}{q} \sim \frac{r'}{q'} \Leftrightarrow q' \cdot rq' - r'q = 0$ para algún $q'' \in Q$. $R[Q^{-1}]$ es un anillo con las operaciones:*

$$\frac{r}{q} + \frac{r'}{q'} = \frac{rq' + r'q}{qq'} \quad \text{y} \quad \frac{r}{q} \cdot \frac{r'}{q'} = \frac{rr'}{qq'}$$

Además, tenemos un homomorfismo natural de anillos $R \rightarrow R[Q^{-1}] : r \mapsto \frac{r}{1}$.

La prueba de esto requiere una verificación de rutina; consulte [4] y [8] para más detalles.

Considere $Q = \{1, q, q^2, \dots\}$ para algunos $q \in R$. Es claro que Q es multiplicativamente cerrado. Escribiremos $R[q^{-1}] := R[Q^{-1}]$. Lo mencionado es útil para el siguiente lema .

Lema 2.1.3. Sea $x \in R$. Entonces $R[x^{-1}] \subset R[y]/(xy - 1)$.

Demostración. Ver [11, 2.1.3].

Q

Sea X una variedad afín, y $Q := \{f \in \mathbb{C}[X] : f \neq 0\}$.

Veamos que Q es un conjunto multiplicativamente cerrado. En efecto, supongamos por contradicción que $0 \neq f, g \in \mathbb{C}[X]$ y $fg \notin Q$ (es decir, $fg = 0$). Entonces $X = (V(f) \cap X) \cup (V(g) \cap X)$. Es decir, si Q no es multiplicativamente cerrado, X no es irreducible, lo cual es una contradicción; desde que X es irreducible. Por lo tanto, Q es multiplicativamente cerrado. Ahora tenemos las herramientas suficientes para la siguiente definición:

Definición 2.1.4. Sea $\mathbb{C}(X) := \mathbb{C}[X][Q^{-1}]$, el cuerpo de funciones o anillo de funciones racionales.

1. Una función f es racional si $f \in \mathbb{C}(X)$.
2. Una función racional f es regular en $p \in Y$ si existen $g, h \in \mathbb{C}[X]$ donde $h(p) \neq 0$ y $f(p) = \frac{g(p)}{h(p)}$. Note que f está bien definida en una vecindad $\{x : h(x) \neq 0\}$.
3. Si f es regular en todas partes de X , entonces f es una función regular en X .

Observación 2.1.5. Note que si $f \in \mathbb{C}(X)$, entonces f puede no estar definida en todos los puntos de X . En efecto, f estará definida donde f sea regular.

También podemos definir las funciones regulares en variedades cuasi afines. Sea $U \subset X \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad cuasi afín.

Definición 2.1.6. Supongamos que f es racional en X . Diremos que f es regular en U si f es regular en cada punto de U .

Sea $D(f) \subseteq X$ un conjunto abierto principal. Recordemos que $D(f) = X - V(f)$.

Lema 2.1.7. El conjunto de funciones regulares en $D(f)$ es $\mathbb{C}[X][f^{-1}] \subseteq \mathbb{C}(X)$.

Demostración. Ver [11, 2.1.7].

Q

El siguiente corolario lo obtenemos al establecer $f=1$.

Corolario 2.1.8. *El conjunto de funciones regulares en X es $\mathbb{C}[X]$.*

Demostración. Ver [11, 2.1.8].

Q

Ejemplo 2.1.9. *Sea $f := z_1 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y sea $X = V(f)$. Observamos que X es el plano cuando $z_1=0$, y $D(f)$ es el complemento de este plano. Consideremos h una función racional en $\mathbb{C}(X)$ tal que $h = \frac{1}{z_1 z_2}$. Observe que h no es regular cuando $z_2=0$, pero es regular en todos los demás casos. Ahora, sea U la variedad cuasi afín $X - V(z_2)$; observamos que h es regular en todo U . Generalmente, podremos decir, por el Lema 2.1.7, que las funciones regulares en U son de la forma $\frac{g}{z_2^p} : p \in \mathbb{N}, g \in \mathbb{C}[X]$.*

2.2 Funciones regulares

En esta sección definiremos funciones regulares entre variedades cuasi afines como composición de funciones regulares.

Recuerde que las variedades afines también son variedades cuasi afines; por lo tanto, nuestras definiciones también se aplican a las variedades afines.

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad cuasi afín.

Definición 2.2.1. *Sea $W \subset \mathbb{C}^m$ otra variedad cuasi afín. Entonces una función regular o morfismo de variedades cuasi afines es una función $\varphi : U \rightarrow W$ de la forma*

$$\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)),$$

donde φ_i son funciones regulares en U . Esto nos lleva a una noción de isomorfismo.

Definición 2.2.2. *Un morfismo de variedades $\varphi : U \rightarrow W$ es un isomorfismo si existe un morfismo inverso $\phi : W \rightarrow U$ tal que $\varphi \circ \phi = id_W$ y $\phi \circ \varphi = id_U$. En tal caso, escribiremos $U \subset W$.*

Si $U \subset W \subset W^j$ donde W es un subconjunto abierto o cerrado Zariski de W^j escribiremos $U \hookrightarrow W^j$. Si W es un conjunto abierto, diremos que φ es una incrustación abierta

de U en W^j , y si W es un conjunto cerrado diremos que φ es una “incrustación” cerrada de U en W^j .

Definición 2.2.3. *Sea Y una variedad afín. Una función racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ es una función regular definida en un subconjunto abierto denso U de X . φ es birracional si tiene una inversa racional $\phi : Y \dashrightarrow X$ tal que $\varphi \circ \phi$ y $\phi \circ \varphi$ son la función identidad en conjuntos abiertos densos.*

2.2.1 Morfismos de variedades afines

En capítulos posteriores, estaremos estudiando variedades afines, así que volvemos a concentrarnos en estos. Sea X e Y variedades afines. El resultado principal de esta sección es la Proposición 2.2.1.4; donde se menciona que X e Y son isomorfos si y solo si $\mathbb{C}[X]$ y $\mathbb{C}[Y]$ son isomorfos.

Definición 2.2.1.1 *Dado cualquier morfismo de variedades afines $\varphi : X \rightarrow Y$ entonces definimos el pull-back $\varphi^* : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$, $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$. φ^* es un homomorfismo de \mathbb{C} -álgebra. Como las componentes de un morfismo son funciones racionales, está claro que un morfismo es continuo con respecto a la topología “usual”. De hecho, el morfismo también es continuo con respecto a la topología de Zariski.*

Lema 2.2.1.2 *Dado un morfismo de variedades $\varphi : X \rightarrow Y$ continuo, con respecto a la topología de Zariski. Si φ es un isomorfismo, entonces también es un homeomorfismo.*

Demostración. Ver [8, pag. 24] y [11, 2.2.5].

Q

Definición 2.2.1.3 *Sea $\phi : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ un homomorfismo de álgebras. Definamos la inversa del pull-back de ϕ , $\phi^\wedge : X \rightarrow Y$ de la siguiente manera*

$$(\phi^\wedge)(x) = ((\phi \circ y_1)(x), \dots, (\phi \circ y_m)(x))$$

Afirmamos que ϕ^\wedge es un morfismo. Además, $(\phi^\wedge)^* = \phi$. Caso contrario, si φ es un morfismo de X a Y , entonces $(\varphi^*)^\wedge = \varphi$.

Demostración. Que nos lleva al resultado más importante de la sección; la corresponden-

cia biyectiva entre isomorfismos de álgebra e isomorfismos de variedades.

Proposición 2.2.1.4 Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ un morfismo de variedades afines, y $\varphi^* : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ su correspondiente homomorfismo de anillos. Entonces φ^* es un isomorfismo si y solo si φ es un isomorfismo.

Demostración. Ver [8, pag. 25] y [11, 2.2.7]. Q

Observación 2.2.1.5 Este resultado será particularmente útil en uno de los capítulos posteriores. Significa que si dos álgebras finitamente generadas son isomorfas, entonces sus espectros geométricos son también isomorfas. Si solo hubiésemos requerido de que X e Y fueran homeomorfas, para poder tener que $X \subset Y$, entonces no hubiésemos podido definir la contraparte, y por ende no sería posible probar la Proposición 2.2.1.4. Es por eso que necesitábamos definir el morfismo en términos de funciones regulares.

2.2.2 Morfismos de espectros

Sean X e Y variedades afines, y $\varphi : X \rightarrow Y$ un morfismo. En la Proposición 1.4.5, vimos que X e Y son homeomorfas a $\text{Spec}(\mathbb{C}[X])$ y $\text{Spec}(\mathbb{C}[Y])$ respectivamente. Por lo tanto, bajo este homeomorfismo, φ se puede ver como un morfismo de espectros, $\varphi : \text{Spec}(\mathbb{C}[X]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[Y])$. En efecto, veremos que este morfismo puede describir las definiciones geométricas de los espectros.

Lema 2.2.2.1 Si $x \in X$, entonces $m_{\varphi(x)} = (\varphi^*)^{-1}(m_x)$.

Demostración. Ver [11, 2.2.9]. Q

Este Lema nos permite entender un morfismo puramente algebraico. Suponga que A y B son cada uno un \mathbb{C} -álgebra finitamente generada y dominios integros, supongamos también que

$$A \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X) \quad \text{y} \quad B \subset \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]/I(Y), \quad (2.2)$$

donde X e Y son conjuntos algebraicos afines. Sea $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de \mathbb{C} -álgebra. Bajo los isomorfismos de (2.2) podemos escribir esto como $\phi_1 :$

$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X) \rightarrow \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]/I(Y)$. Esto induce el morfismo de espectros

$$\phi^\wedge : \text{Spec}(\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]/I(Y)) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X))$$

definido de tal manera que $\phi^\wedge(m_y) = \phi_1^{-1}(m_y)$. Tomando este resultado en A y B , este puede ser visto de tal manera que ϕ^\wedge es una función continua; $\phi^\wedge : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$, $\phi^\wedge(m) = \phi^{-1}(m)$. Por lo tanto, podemos enunciar la siguiente proposición

Proposición 2.2.2.2 Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo, donde A y B son cada uno es una \mathbb{C} -álgebra finitamente generada y sin divisores de ceros. Entonces ϕ induce una función continua $\phi^\wedge : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$, $\phi^\wedge(m) = \phi^{-1}(m)$ que denotamos como un morfismo de espectros.

Demostración. Ver [11, 2.2.10].

Q

También podemos realizar el morfismo en términos de homomorfismos de \mathbb{C} -álgebra. Suponga que $\phi : A \rightarrow B$ es el homomorfismo de la Proposición 2.2.2.2. Si $\xi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(B, \mathbb{C})$ tiene como núcleo a $m \in \text{Spec}(B)$ entonces $\xi \circ \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(A, \mathbb{C})$, el cual tiene núcleo $\phi^{-1}(m)$. Por lo tanto, el morfismo $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ realizado en términos de homomorfismos de \mathbb{C} -álgebra es $\xi \rightarrow \xi \circ \phi$.

Es decir, podemos entender el morfismo inducido en términos de coordenadas, en términos de ideales máximos y en términos de homomorfismos de \mathbb{C} -álgebras. Los últimos dos son útil porque nos permiten trabajar con el morfismo inducido sin configuración de las coordenadas.

2.3 Introducción a la resolución de singularidades

En esta sección establecemos uno de los resultados más importantes de la geometría algebraica. El Teorema de Hironaka donde indica que existe una resolución de singularidades de cualquier variedad algebraica sobre un cuerpo de característica cero. Sin embargo, haremos algunos comentarios sobre la dimensión de una variedad, singularidades y espacio proyectivo. Es posible profundizar estos temas; sin embargo, nuestra discusión no

será detallada, ya que no se requieren detalles para caracterizar las singularidades de las variedades tóricas.

Sea X una variedad algebraica casi afín.

Definición 2.3.1. *La dimensión de X es el supremo de todos enteros n tales que existe una cadena;*

$$\emptyset \neq X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$$

de conjuntos cerrados irreducibles distintos.

Tenga en cuenta que la dimensión debe ser finita ya que, por Corolario 1.2.5, una secuencia infinita de conjuntos algebraicos distintos $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X_3 \subsetneq \dots$ no existe. Para más detalles consulte [8, pag. 6] y [11, pag. 20].

Proposición 2.3.2. *Si $U \subset X$ es una variedad casi afín, entonces $\dim(U) = \dim(X)$. También $\dim(\mathbb{C}^n) = n$. Además, como el toro $(\mathbb{C}^*)^n$ es un subconjunto abierto de \mathbb{C}^n , la dimensión de $(\mathbb{C}^*)^n$ es n .*

Demostración. Ver [8, pag.6] y [11, 2.3.2].

Q

Lema 2.3.3. *Si Y es una variedad algebraica afín, entonces la dimensión de Y es igual a la dimensión de su anillo coordenado $R[Y]$.*

Demostración. Ver [8, 1.7].

Q

Proposición 2.3.4. *Si Y es una variedad cuasi afín, entonces $\dim Y = \dim \bar{Y}$.*

Demostración. Ver [8, 1.10].

Q

Ahora que tenemos una noción de dimensión, podemos pasar a las singularidades. Si $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y $P \in \mathbb{C}^n$ tal que $f(P) = 0$, se define el $d_P f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot (x_i - p_i)$, esto se conoce como el *diferencial* de f en P . Sea f irreducible, el *espacio tangente* $T_P V(f)$ de $V(f)$ en P , es el conjunto de llegada de $d_P f$.

Si X es una variedad e $I(X)$ es generado por f_1, \dots, f_k , entonces definimos el espacio tangente de X en P como $T_P X = \bigcap_{i=1}^k T_P V(d_P f_i)$. Se dice que P es un punto no singular si la

dimensión de $T_P X$ (como espacio vectorial) es igual a la dimensión de X ; de lo contrario, diremos que P es una *singularidad*.

Esta es la definición clásica de singularidad. Sin embargo, no es la definición más adecuada para nuestros propósitos. Por lo que requerimos una comprensión explícita de la geometría de $X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$; sin embargo, esto no es fácil de determinar en variedades tóricas. Por lo tanto, trabajaremos con una definición más algebraica de singularidad.

Definición 2.3.5. *Un punto $P \in X$ es no singular si la dimensión de $\frac{m_P}{m_P^2}$ como un espacio vectorial es igual a la dimensión de X donde m_P es un ideal maximal; caso contrario, P es singular.*

Es sencillo probar que esta definición es equivalente a la definición del espacio tangente.

La prueba implica reconocer que el núcleo de $d_p : m_p \rightarrow T_P X$ es m_p^2 , que se desprende del hecho de que el diferencial de cualquier monomio $(x_1 - p_1)^{a_1} \dots (x_n - p_n)^{a_n}$, es igual a cero, si $\sum_i a_i \geq 2$. Y por el teorema de isomorfismo obtenemos que $\frac{m_p}{m_p^2} \cong (T_P X)_*$.

Ahora tenemos el conocimiento necesario acerca de las singularidades, de tal manera que podremos caracterizar las singularidades de variedades tóricas en un capítulo posterior.

Pasamos entonces al célebre teorema de Hironaka. Dado que las matemáticas que abarca dicho teorema va mucho más allá del alcance de esta tesis, solo indicamos una versión limitada de ella.

El resultado crucial en mención no se obtuvo hasta 1964, año en que Heisuke Hironaka daba una demostración de la resolución de singularidades para variedades de cualquier dimensión sobre cuerpos de característica cero en su extenso artículo Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ver [HI].

Definición 2.3.6. *Sea X una variedad casi afín singular. Si Y es una variedad casi afín no singular y $f : Y \rightarrow X$ es una función birracional sobreyectiva entonces diremos que f es una resolución de singularidades.*

Teorema 2.3.7. *Hironaka. Si X es una variedad cuasi afín singular, entonces siempre*

existe una resolución de sus singularidades. Para variedades sobre cuerpos de característica 0.

La belleza de las variedades tóricas es que no necesitamos matemática sofisticada de la prueba de Hironaka para comprender la resolución de sus singularidades. Nosotros podemos determinar si una variedad tórica es singular o no, meramente a través del estudio del abanico que lo genera. Además, veremos en un capítulo posterior que el problema de resolver las singularidades de una variedad tórica se puede reducir al problema de encontrar un refinamiento de su abanico. En el Capítulo final, calcularemos específicamente la resolución de singularidades de conos bidimensionales.



Capítulo 3

3 Introducción a la variedad tórica afín y proyectiva

Antes de apreciar la construcción de una variedad tórica afín y proyectiva a partir de un cono, la cual se realizará en los siguientes capítulos, veremos la formalización matemática para sustentar dicha construcción mencionada.

Tomando en cuenta la observación 1.3.9, además que \mathbb{C}^* es un grupo multiplicativo y $T \approx (\mathbb{C}^*)^n$ una variedad afín isomorfa a $(\mathbb{C}^*)^n$, se tiene que T hereda la estructura de grupo a partir de este isomorfismo.

Un *carácter* de un toro T es un morfismo $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ que es a su vez es un grupo de homomorfismos. Por ejemplo, si consideramos $m = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ tendremos el carácter $\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ definido de la manera siguiente:

$$\chi^m(z_1, \dots, z_n) = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}. \quad (3.3)$$

Se puede mostrar que todos los caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ son de la forma indicada líneas arriba y además que los caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ forman un grupo isomorfo a \mathbb{Z}^n (ver [2, pag.10]). Para un toro arbitrario T , estos caracteres forman un grupo abeliano M de rango igual a la dimensión de T . Es costumbre decir que si $m \in M$, eso nos dará el carácter $\chi^m : T \rightarrow \mathbb{C}^*$. Por otro lado, un *subgrupo de un solo parámetro* del toro T es un morfismo $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$ que es a su vez es un homomorfismo de grupos. Si consideramos como en el caso anterior, $u = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$ tendremos el sub grupo de un parámetro $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ definido de la manera siguiente:

$$\lambda^u(z) = (z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_n}). \quad (3.4)$$

Similar al caso anterior todos los subgrupos de un parámetro de $(\mathbb{C}^*)^n$ son de la forma indicada líneas arriba y además los subgrupos de un parámetro forman un grupo isomorfo a \mathbb{Z}^n (ver [2, pag.10])

Por otro, lado para un toro arbitrario T , los subgrupos de un solo parámetro forman un

grupo abeliano libre N de rango igual a la dimensión de T . Al igual que con el grupo de caracteres, un elemento $u \in N$ nos da subgrupos de un parámetro $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow T$.

Además, podemos asegurar la existencia de un producto bilineal, definido de la manera siguiente $(,) : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$.

Lo mencionado anteriormente nos dice que:

- Intrínsecamente dado un caracter χ^m y un subgrupo de un parámetro λ^u , la composición $\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ es un caracter de \mathbb{C}^* , que está definida por $z \rightarrow z^l$ donde $(m, u) = l, l \in \mathbb{Z}$.
- Concretamente, si $T = (\mathbb{C}^*)^n$ con $m = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n, u = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$ obtenemos la siguiente relación, la cual es el producto bilineal usual

$$(m, u) = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (3.5)$$

Además, se concluye que un caracter y subgrupo de un parámetro de un toro T forman grupos abelianos libres M y N de rango finito asociado el producto bilineal $(,) : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ que identifica M con $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ y N con $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$.

En consecuencia, de todo lo expuesto, podemos asegurar que el isomorfismo de $T \approx (\mathbb{C}^*)^n$ induce la base dual de M y N , es decir, los isomorfismos $M \approx \mathbb{Z}^n$ y $N \approx \mathbb{Z}^n$ convierte a los caracteres en monomios de Laurent (3.3), los subgrupos de un parámetro en curvas monomiales (3.4) y el producto en el producto interno usual (3.5).

3.1 Definición de una variedad tórica afín

A continuación daremos ciertas definiciones y observaciones necesarias para este capítulo.

Observación 3.1.1 *Datos necesarios sobre T .*

- Si T es un toro y $H \subseteq T$ es una subvariedad irreducible que también es un subgrupo, entonces H es un toro.*
- Si T_1, T_2 son toros y $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ es un morfismo de grupos algebraicos, entonces $(\varphi(T_1))$ es un toro cerrado en T_2 .*

c) Si T actúa sobre W linealmente, donde W es un espacio vectorial, $\chi^m : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ denota su correspondiente carácter, W_m el subespacio de W modo que $t \cdot w = \chi^m(t)w$ para todo $t \in T$ y $w \in W$ de tal forma que $W_m \cap W_n = \{0\}$. Entonces $W = \bigoplus_{m \in M} W_m$.

Definición 3.1.2 Una variedad tórica afín es una variedad irreducible V que contiene al toro $T \approx (\mathbb{C}^*)^n$ como un subconjunto abierto de Zariski tal que la acción de T en sí misma extiende la acción algebraica de T en V . (Entenderemos por una acción algebraica a la acción $T \times V \rightarrow V$ dada por un morfismo).

Ejemplo 3.1.3 La curva plana $C = V(x^3 - y^2)$ es una variedad tórica afín pues es irreducible y contiene al toro.

$$C \setminus \{0\} = C \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3); t \in \mathbb{C}^*\} \approx \mathbb{C}^*,$$

donde el isomorfismo es $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Ejemplo 3.1.4 La variedad $V(xy - zw) \subseteq \mathbb{C}^4$ es una variedad tórica que contiene al toro

$$V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}); t_i \in \mathbb{C}^*\} \approx (\mathbb{C}^*)^3,$$

donde el isomorfismo es $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$.

Ejemplo 3.1.5 Consideremos la superficie en \mathbb{C}^{d+1} parametrizada por la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^{d+1} \\ (s, t) &\mapsto (s^d, s^{d-1}t, \dots, st^{d-1}, t^d). \end{aligned}$$

Podemos observar que φ define monomios en s, t utilizando todos los grados d .

Ahora, teniendo en cuenta x_0, \dots, x_d como las coordenadas de \mathbb{C}^{d+1} podemos determinar el ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]$, el cual es generado por las menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{array}{cccccc} \square & & & & & \\ \square & x_0 & x_1 & \dots & x_{d-2} & x_{d-1} & \square \\ & x_1 & x_2 & \dots & x_{d-1} & x_d & \end{array}$$

donde $I = (x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j; 0 \leq i < j \leq d-1)$. Por otro lado, se puede verificar que $\varphi((\mathbb{C}^2)^\Sigma) = V(I)_\Sigma$, entonces $\hat{\mathbb{C}}_d = \varphi(\mathbb{C}^2)$ es una variedad tórica afín. Además, se puede probar que $I \wedge \hat{\mathbb{C}}_d = I$, donde I es primo y en consecuencia $V(I)$ es irreducible.

Por último, se verifica que I es un ideal tórico (Def. 3.1.9) y $\hat{\mathbb{C}}_d$ es una variedad tórica que contiene al toro

$$\varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)^2_\Sigma = \hat{\mathbb{C}}_d \cap (\mathbb{C}^*)^{d+1} \approx (\mathbb{C}^*)^2.$$

Además, podemos mencionar también que la superficie afín $\hat{\mathbb{C}}_d$ se llama como normal racional de grado d .

Puntos reticulares: En la presente tesis un retículo es un grupo libre abeliano de rango finito. Por lo tanto el retículo de rango n es isomorfo a \mathbb{Z}^n . Por ejemplo T tiene retículo M (de caracteres) y N (de subgrupos de un parámetro). Antes de proseguir, debemos tener presente que en términos de productos tensoriales, se puede obtener un isomorfismo canónico $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \approx T$ a través de $u \otimes t \mapsto \lambda^u(t)$. Por lo tanto es costumbre escribir un toro reticular como T_N , en esta tesis dicha notación solo será usada en caso sea necesario.

Por otro lado, dado un T conjuntamente con su retículo de caracteres M , un conjunto $\mathbf{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ proporciona caracteres $\chi^{m_i}: T \rightarrow \mathbb{C}^*$. De tal manera que podemos definir la siguiente función

$$\varphi_{\mathbf{A}}: T \rightarrow \mathbb{C}^s \tag{3.6}$$

como

$$\varphi_{\mathbf{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \in \mathbb{C}^s, t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

y así enunciar la siguiente definición.

Definición 3.1.6 Dado un conjunto finito $\mathbf{A} \subseteq M$, la variedad tórica afín $Y_{\mathbf{A}}$ está definida por la clausura de Zariski de la imagen de la función $\varphi_{\mathbf{A}}$.

Proposición 3.1.7 Dado \mathbf{A} como se mencionó anteriormente, sea $\mathbf{Z}\mathbf{A} \subseteq M$ un sub retículo generado por \mathbf{A} . Entonces $Y_{\mathbf{A}}$ es una variedad tórica afín cuyo toro tiene carácter reticular $\approx \mathbf{Z}^n$. En particular, la dimensión de $Y_{\mathbf{A}}$ es el rango de $\mathbf{Z}\mathbf{A}$.

Demostración. Ver [2, pag. 13] (Proposición 1.1.8). Q

En términos concretos, fijada una base de M , podemos asumir $M = \mathbf{Z}^n$. Entonces los s vectores en $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Z}^n$ pueden ser considerados como columnas de una matriz A de orden $n \times s$ cuyas entradas son todas enteras. En este caso, la dimensión de $Y_{\mathbf{A}}$ es simplemente el rango de la matriz A .

Por lo expuesto podemos decir que toda variedad tórica afín es isomorfa con $Y_{\mathbf{A}}$ para algún subconjunto finito \mathbf{A} de un retículo.

Ideales toricas: Sea $Y_{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{C}^s = \text{Spec}(\mathbf{C}[x_1, \dots, x_s])$ una variedad tórica afín que proviene de un conjunto finito $\mathbf{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$. Podemos describir el ideal siguiente $I(Y_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathbf{C}[x_1, \dots, x_s]$; el cual es consecuencia de que $\varphi_{\mathbf{A}}$ induce una función de carácter reticular, es decir

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{A}} : \mathbf{Z}^s \rightarrow M \quad \text{dado por} \quad m = (m_1, \dots, m_s) \rightarrow \chi^m,$$

donde $\chi^m(y_1, \dots, y_s) = y_1^{m_1} \dots y_s^{m_s}$. Notemos que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base estándar \mathbf{Z}^s , entonces dado el isomorfismo $\hat{\varphi}_{\mathbf{A}}$ y como para $m, m' \in \mathbf{Z}^s$ se tiene que $\chi^{m+m'} = \chi^m \chi^{m'}$, entonces $\chi^{e_1}, \dots, \chi^{e_s}$ es una base de M . Por otro lado, si L es el núcleo de esta función, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \rightarrow \mathbf{Z}^s \rightarrow M.$$

En términos reales, los elementos $l = (l_1, \dots, l_s)$ de L satisfacen $\sum_{i=1}^s l_i m_i = 0$ con lo cual obtenemos una relación con los m_i . Además, que para cada $l \in L$ se tiene lo siguiente

$$l_+ = \sum_{l_i > 0} l_i e_i \text{ y } l_- = - \sum_{l_i < 0} l_i e_i.$$

Note que $l = l_+ - l_-$, y que $l_+, l_- \in \mathbf{N}^s$, entonces obtenemos la siguiente relación binomial

$$x^{l_+} - x^{l_-} = \sum_{l_i > 0} \binom{Q}{l_i} x^{l_i} - \sum_{l_i < 0} \binom{Q}{l_i} x^{-l_i}$$

la cual desaparece en la imagen de φ_A por lo tanto en Y_A , desde que Y_A es la clausura de Zariski de φ_A .

Proposición 3.1.8 *El ideal de una variedad tórica afín $Y_A \subseteq \mathbb{C}^s$ es*

$$I(Y_A) = \langle x^{l^+} - x^{l^-}; l \in L \rangle = \langle x^\alpha - x^\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ y } \alpha - \beta \in L \rangle.$$

Demostración. Sea I_L el lado derecho de la igualdad. Ya vimos que $I_L \subseteq I(Y_A)$. Ahora, elija a $T \approx (\mathbb{C}^*)^n$ y un orden monomial sobre las variables x_1, \dots, x_s . Entonces $M = \mathbb{Z}^n$, y $\varphi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s$ son los monomios de Laurent t^{m_i} en t_1, \dots, t_n .

Supongamos entonces que, $I_L \neq I(Y_A)$. Entonces existe $f \in I(Y_A) \setminus I_L$ con un término monomial principal mínimo con respecto a nuestro orden. Digamos que dicho término es

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^s x_i^{\alpha_i}.$$

Ahora, como $f(t^{m_1}, \dots, t^{m_s}) = 0$, existe un término $x^\beta = \prod_{i=1}^s x_i^{\beta_i}$ que es menor que x^α de acuerdo al orden de nuestra elección inicial tal que

$$\prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{\beta_i}.$$

Por lo tanto, $\sum (a_i - b_i) m_i = 0$, lo que implica $\alpha - \beta \in L$. Ahora $x^\alpha - x^\beta \in I_L$, entonces $f - x^\alpha + x^\beta \in I(Y_A) \setminus I_L$ con un término principal más pequeño, lo cual es una contradicción. Q

Definición 3.1.9 *Sea $L \subseteq \mathbb{Z}^s$ un sub retículo.*

a) *El ideal $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ y } \alpha - \beta \in L \rangle$ es llamado ideal reticular.*

b) *Un ideal reticular primo es llamado ideal tórico.*

Desde que las variedades tóricas son irreducibles, los ideales que aparecen en la proposición 3.1.8 son ideales tóricos. Veamos algunos ejemplos de ideales tóricos:

Ejemplo 3.1.10 $(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{C}[x, y]$.

Ejemplo 3.1.11 $(xz - yw) \subseteq \mathbb{C}[x, y, z, w]$.

Ejemplo 3.1.12 $(x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j; 0 \leq i < j \leq d-1) \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]$.

En cada ejemplo, tenemos ideales primos generados por binomios.

En un apartado posterior veremos que las variedades tóricas afines surgen de ideales tóricos.

La siguiente proposición prueba por qué dichos ideales son automáticamente tóricos.

Proposición 3.1.13 *Un ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ es tórico si y solo si es primo y es generado por binomios.*

Demostración.

La primera implicancia es inmediata, por definición. Veamos la recíproca, para ello primero considere $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ donde $I_L = \{x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}; i \in \mathbf{I}\}$, donde \mathbf{I} denota un conjunto de índices. Inmediatamente se puede observar que la intersección es diferente del vacío porque $(1, \dots, 1) \in V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$, y es un subgrupo ya que, $x^{\alpha_i} = x^{\beta_i}$ e $y^{\alpha_i} = y^{\beta_i}$, entonces $(xy)^{\alpha_i} = (xy)^{\beta_i}$. Finalmente, $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es irreducible ya que I es primo. Por lo tanto, $V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es un toro, al cual denotamos por T .

Sea, $\chi^{m_i}: T \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow \mathbb{C}^*$, por lo tanto $T = \varphi_{\mathbf{A}}(T)$ para $\mathbf{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$, lo cual implica que $V(I) = Y_{\mathbf{A}}$, ya que I es primo por el teorema de ceros de Hilbert, entonces es igual a I_L . Q

Semigrupo Afín: Un *semigrupo* es un conjunto S asociado a una operación binaria y un elemento identidad. Para el *semigrupo afín* que requerimos será necesario que:

- La operación binaria en S sea conmutativa. Considerando la operación $+$ y el elemento identidad 0 . Entonces un conjunto finito $\mathbf{A} \subseteq S$ será expresado de la manera siguiente

$$N\mathbf{A} = \left\{ \sum_{m \in \mathbf{A}} a_m m; a_m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S$$

- Los semigrupos son finitamente generados, en tal sentido para un conjunto finito $\mathbf{A} \subseteq S$ se tiene que $N\mathbf{A} = S$
- Los semigrupos pueden ser incrustados o ser un embebimiento en un retículo M .

Un ejemplo simple de semigrupo afines $N^n \subseteq Z^n$. Generalmente, dado un retículo M y un conjunto finito $A \subseteq M$, obtenemos un semigrupo finito $NA \subseteq M$.

Dado un semigrupo afín $S \subseteq M$, el semigrupo de $C[S]$ álgebras es el espacio vectorial sobre C con S como base y la multiplicación inducido por la estructura de semigrupo de S . Para ser más precisos, si pensamos en M como un carácter reticular de T , para un $m \in M$ tendremos el caracter χ^m . Entonces

$$C[S] = \sum_{m \in S} c_m \chi^m \quad \text{Cy } c_m = 0 \text{ para una cantidad "finitamente grande" de } m \in S,$$

cuya multiplicación inducida es

$$\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}.$$

Si $S = NA$ para todo $A = \{m_1, \dots, m_s\}$, entonces $C[S] = C[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$.

Veamos a continuación dos ejemplos básicos.

Ejemplo 3.1.14 *El semigrupo afín $N^n \subseteq Z^n$ nos da el anillo de polinomios*

$$C[M] = C[x_1, \dots, x_n],$$

donde $x_i = \chi^{e_i}$ y e_1, \dots, e_n es la base estándar de Z^n .

Ejemplo 3.1.15 *Si e_1, \dots, e_n es una base del retículo M , entonces M es generado por $A = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ como un semigrupo afín. Considerando a $t_i = \chi^{e_i}$, el anillo de polinomios de Laurent es*

$$C[M] = C[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

El cual se puede verificar que es el anillo de coordenadas de T .

Los anillos de semigrupos afines dan lugar a las variedades tóricas de la manera siguiente.

Proposición 3.1.16 *Sea S un semigrupo afín. Entonces:*

a) $C[S]$ es un dominio integro finitamente generado como C -álgebra.

b) $\text{Spec}(C[S])$ es una variedad tórica afín cuyo toro T tiene carácter reticular ZS , y si $S = NA$ para un conjunto finito $A \subseteq M$, entonces $\text{Spec}(C[S]) = Y_A$.

Demostración.

Parte a: Considere, $\mathbf{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ lo cual implica que $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$, entonces $\mathbb{C}[S]$ es finitamente generado. Por otro lado, desde que $S \subseteq M$, se tiene que $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$ por lo tanto $\mathbb{C}[S]$ es un dominio de integridad, según el Ejemplo 3.1.15.

Parte b: Usando $\mathbf{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$, obtenemos el homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$\pi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \longrightarrow \mathbb{C}[M]$$

donde $x_i \mapsto \chi^{m_i} \in \mathbb{C}[M]$. Esto se corresponde con el morfismo $\varphi_{\mathbf{A}} : T \longrightarrow \mathbb{C}^s$ el cual proviene de (3.6), es decir, $\pi = (\varphi_{\mathbf{A}})^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \rightarrow \mathbb{C}[T] = \mathbb{C}[M]$. Además, el núcleo de π es el ideal tórico $I(Y_{\mathbf{A}})$; la imagen de π es $\mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}] = \mathbb{C}[S]$, por lo tanto el anillo de coordenadas de $Y_{\mathbf{A}}$ es

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[Y_{\mathbf{A}}] &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]/I(Y_{\mathbf{A}}) \\ &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]/\text{Ker}(\pi) \approx \text{Im}(\pi) = \mathbb{C}[S]. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) = Y_{\mathbf{A}}$. Desde que $S = \mathbf{N}\mathbf{A}$ lo cual implica que $\mathbf{Z}S = \mathbf{Z}\mathbf{A}$, es decir que el toro de $Y_{\mathbf{A}} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ y tiene el retículo de caracteres deseado, que es justamente lo que buscamos por la proposición 3.1.7. Q

Ejemplo 3.1.17 Considere el semigrupo afín $S \subseteq \mathbb{Z}$ generado por 2 y 3. Entonces $S = \{0, 2, 3, \dots\}$. Para el estudio de los semigrupos de $\mathbb{C}[S]$ álgebras, usaremos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[Y_{\mathbf{A}}] &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]/I(Y_{\mathbf{A}}) \\ &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]/\text{Ker}(\pi) \approx \text{Im}(\pi) = \mathbb{C}[S], \end{aligned}$$

donde π es el homomorfismos de \mathbb{C} -álgebras

$$\pi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \longrightarrow \mathbb{C}[M].$$

Si consideramos el conjunto $\mathbf{A} = \{2, 3\}$, entonces $\varphi_{\mathbf{A}}(t) = (t^2, t^3)$ y el ideal tórico es $I(Y_{\mathbf{A}}) = (x^3 - y^2)$; luego por el ejemplo (3.1.10) obtenemos

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t^2, t^3] \approx \mathbb{C}[x, y]/(x^3 - y^2)$$

y la variedad tórica $Y_{\mathbf{A}}$ es la curva $x^3 = y^2$.

3.2 Puntos reticulares y variedades tóricas proyectivas

Nuestro estudio empezará con observar que \mathbf{P}^n es una variedad tórica

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{P}^n \setminus V(x_0 \dots x_n) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{P}^n; a_0 \dots a_n \neq 0\} \\ &= \{(1, t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{P}^n; t_1, \dots, t_n \in \mathbf{C}^*\} \approx (\mathbf{C}^*)^n. \end{aligned}$$

Además, que la acción de T sobre si misma claramente se extiende a una acción sobre \mathbf{P}^n , haciendo a \mathbf{P}^n una variedad tórica. Describiremos el retículo asociado a T , usando la secuencia exacta del toro

$$1 \longrightarrow \mathbf{C}^* \longrightarrow (\mathbf{C}^*)^{n+1} \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 1$$

que proviene de la definición de \mathbf{P}^n . Por lo tanto, el carácter reticular de T es

$$\mathbf{M}_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}; \sum_{i=0}^n a_i = 0\}, \quad (3.7)$$

y el retículo de un subgrupo de un parámetro es el cociente.

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{Z}^{n+1} / \mathbf{Z}(1, \dots, 1).$$

Puntos reticulares y variedades tóricas proyectivas: Sea el toro T con los retículos M y N usuales. Considerando el conjunto finito $\mathbf{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ que fue utilizado para crear la variedad tórica afín $Y_{\mathbf{A}}$ como la clausura de Zariski de la imagen de la función

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{A}} : T &\longrightarrow \mathbf{C}^s \\ t &\longrightarrow (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)). \end{aligned}$$

Para obtener la variedad tórica proyectiva, consideremos $\varphi_{\mathbf{A}}$ como una función en $(\mathbf{C}^*)^s$ y haremos una composición con el homomorfismo $\pi : (\mathbf{C}^*)^s \longrightarrow T_{\mathbf{P}^{s-1}}$ obteniendo

$$T \longrightarrow \mathbf{C}^s \longrightarrow T_{\mathbf{P}^{s-1}} \subseteq \mathbf{P}^{s-1}. \quad (3.8)$$

Definición 3.2.1 Dado un conjunto finito $\mathbf{A} \subseteq M$, la variedad tórica proyectiva $X_{\mathbf{A}}$ es la clausura de Zariski en \mathbf{P}^{s-1} de la imagen de la función compuesta $\pi \circ \varphi_{\mathbf{A}}$ dada

en (3.8).

En concreto, X_A es la clausura de Zariski de la imagen de la función

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \mathbf{P}^{s-1} \\ t &\longrightarrow (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)). \end{aligned}$$

dado por los caracteres provenientes de $\mathbf{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$. En particular si $M = \mathbf{Z}^n$, entonces χ^{m_i} serán los monomios de Laurent t^{m_i} y X_A es la clausura de la imagen de

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \mathbf{P}^{s-1} \\ t &\longrightarrow (t^{m_1}, \dots, t^{m_s}). \end{aligned}$$

En la literatura, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Z}^n$ a menudo se da como una matriz A con entradas enteras, de modo que los elementos de \mathbf{A} son las columnas de A .

Para mayor información sobre lo expuesto en este capítulo revisar [2, pag.55].

3.3 Variedades afines normales

Sea R un dominio de integridad con un cuerpo de fracciones K . Entonces R es normal, o 'integralmente cerrado, si cada elemento de K es integralmente cerrado sobre R (lo que significa que es una raíz de un polinomio mónico en $R[x]$), en realidad se encuentra en R . Por ejemplo, cualquier DFU es normal.

Definición 3.3.1. *Una variedad afín irreducible V es normal si su anillo de coordenadas $\mathbf{C}[V]$ es normal.*

Ejemplo 3.3.2. *\mathbf{C}^n es normal ya que su anillo de coordenadas $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ es un DFU y por lo tanto normal.*

Veamos un ejemplo de una variedad afín no normal.

Ejemplo 3.3.3. *Sea $\mathbf{C} = V(x^3 - y^2) \subseteq \mathbf{C}^2$. Esta es una curva plana irreducible con una cúspide en el origen. Es fácil ver que $\mathbf{C}[\mathbf{C}] = \mathbf{C}[x, y]/(x^3 - y^2)$. Ahora, sea \bar{x} y \bar{y} en $\mathbf{C}[\mathbf{C}]$, entonces $\bar{y}/\bar{x} \in \mathbf{C}(\mathbf{C})$. Un cálculo muestra que $\bar{y}/\bar{x} \notin \mathbf{C}[\mathbf{C}]$ y que $(\bar{y}/\bar{x})^2 = \bar{x}$.*

En consecuencia C [C] y C no son normales.

Proposición 3.3.4. *Una variedad afín irreducible regular V es normal.*

Demostración. Ver [2, pag.7].

Q



Capítulo 4

4 Construcción de una variedad tórica Afín

El objetivo de este capítulo es mostrar el proceso de construir una variedad tórica afín, la cual asocia sucesivamente a un cono σ , en el espacio euclidiano \mathbf{R}^n , su cono dual, en el dual del espacio euclidiano $(\mathbf{R}^n)^*$, un monoide S_σ , una \mathbf{C} -álgebra \mathbf{R}_σ y finalmente una variedad algebraica X_σ .

En esta primera etapa, introduciremos la definición de cono y cono dual, con sus respectivas propiedades, la relación que guardan entre ellas y algunos ejemplos para dejar clara las ideas que posteriormente serán de utilidad en la construcción de una variedad tórica afín. Finalmente concluimos esta primera etapa con la definición de un monoide asociado a un cono y sus propiedades.

4.1 Conos

Definición 4.1.1 Sea $A = \{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto finito de vectores en \mathbf{R}^n , el conjunto:

$$\sigma = \{x \in \mathbf{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m, \lambda_i \in \mathbf{R}, \lambda_i \geq 0\}$$

se llama “cono poliédrico **convexo**”, el cual de ahora en adelante lo nombraremos solamente como cono. Los vectores $\{v_1, \dots, v_m\}$ son los generadores del cono y lo denotaremos por $\sigma = (v_1, \dots, v_m)$.

Observación 4.1.2 Si $A = \emptyset$, entonces $\sigma = \{0\}$ el cual se conoce como cono nulo.

La *dimensión* del cono se denotará por $\dim(\sigma)$, y es la dimensión del menor espacio vectorial que contiene a σ , dicho de otro modo, es la dimensión del sub espacio vectorial $\mathbf{R} \cdot \sigma = \sigma + (-\sigma)$.

Observación 4.1.3 Un cono poliédrico convexo σ es un cono porque si un punto x está en σ , entonces todo punto λx con λ real positivo está en σ . Además, un cono σ es un conjunto convexo porque para todo par de puntos x, y en σ , cualquier combinación convexa $\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]$ está en σ .

Ejemplo 4.1.4 Conos en \mathbb{R}^2 , donde $\{e_1, e_2\}$ denotará la base canónica usual:

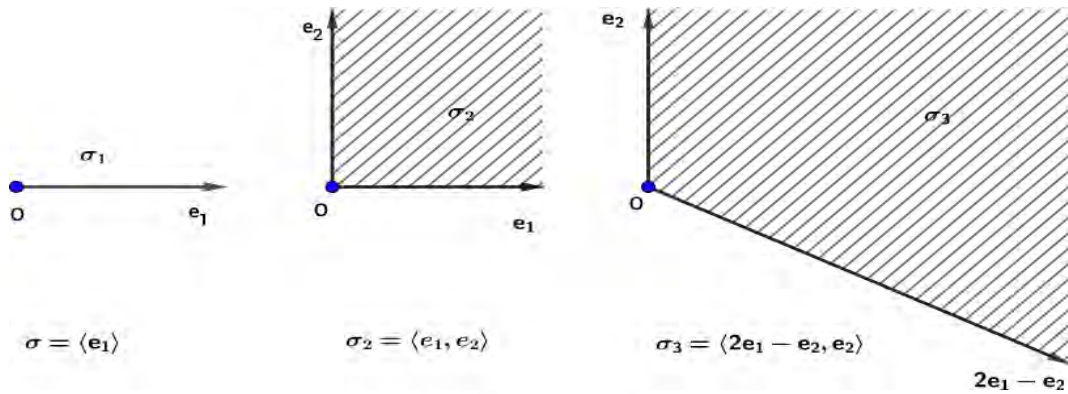


Figura 5: Conos bidimensionales

Observación 4.1.5 Del ejemplo 4.1.4, podemos notar que la $\dim(\sigma_1) = 1$ y $\dim(\sigma_2) = \dim(\sigma_3) = 2$.

Ejemplo 4.1.6 Veamos también un ejemplo de cono σ en \mathbb{R}^3 , generado por $\sigma = (e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3)$, donde también consideraremos $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica usual en \mathbb{R}^3 .

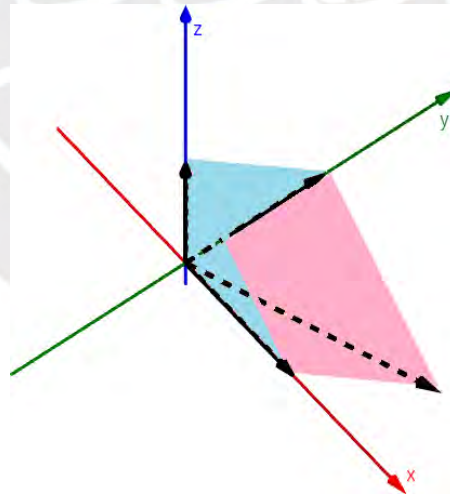


Figura 6: $\sigma = (e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3)$

Un **retículo** N en \mathbb{R}^n es un subgrupo de \mathbb{R}^n isomorfo a \mathbb{Z}^n , que genera el espacio vectorial

\mathbb{R}^n . De ahora en adelante, denotaremos por N a un lattice o retículo isomorfo a \mathbb{Z}^n . Note que el retículo en mención N , es el mismo retículo que se desarrolla en el capítulo 3.

Definición 4.1.7 *Un cono σ es un cono racional si todos los generadores de dicho cono pertenecen a N . Un cono σ es fuertemente convexo si no contiene ninguna recta que pase por el origen, es decir, $\sigma \cap (-\sigma) = 0$.*

Definición 4.1.8 *Sea $(\mathbb{R}^n)^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ el espacio dual de \mathbb{R}^n y $(,)$ la aplicación bilineal*

$$\begin{aligned} (,): (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow (u, v) = u(v) \end{aligned}$$

El dual de un cono $\check{\sigma}$ es definido como:

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, v) \geq 0, \forall v \in \sigma\}$$

Ejemplo 4.1.9 *Veamos cuales son los conos duales de los conos del ejemplo 4.1.4. y ejemplo 4.1.6. Denotemos por e_1^*, e_2^* la base dual de la base canónica de \mathbb{R}^2 .*

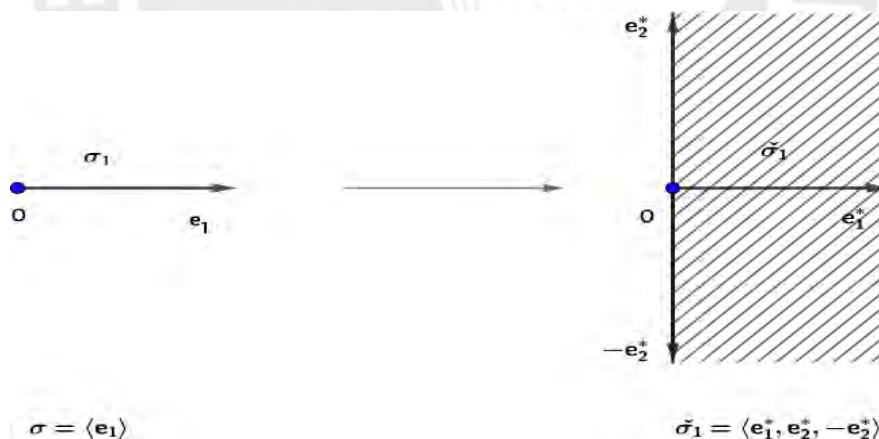


Figura 7: $\sigma_1 \longrightarrow \check{\sigma}_1$



Figura 8: $\sigma_2 \longrightarrow \check{\sigma}_2$

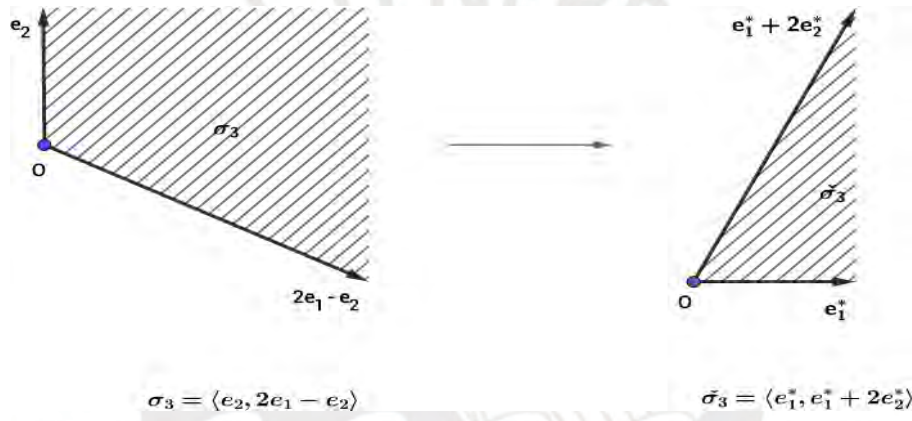


Figura 9: $\sigma_3 \longrightarrow \check{\sigma}_3$

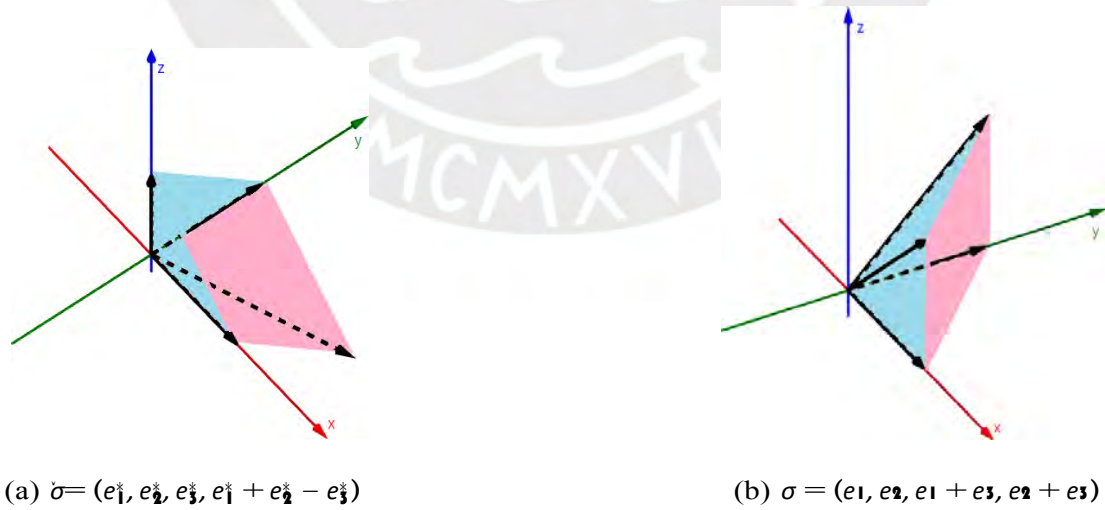


Figura 10: $\check{\sigma} \longleftarrow \sigma$

Definición 4.1.10 *Nombraremos como ortogonal al conjunto definido por:*

$$\sigma^\perp = \{u \in \mathfrak{R} : (u, v) = 0, \forall v \in \sigma\}$$

Observación 4.1.11 *Se cumple que $\sigma^\perp = \mathfrak{R} \cap (-\mathfrak{R})$.*

Demostración. Por definición podemos decir que

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} \cap (-\mathfrak{R}) &= \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, v) \geq 0, \forall v \in \sigma\} \cap \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, v) \leq 0, \forall v \in \sigma\} \\ &= \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, v) = 0\} = \sigma^\perp. \end{aligned} \quad \mathbf{Q}$$

Lema 4.1.12 *Todo cono σ se puede definir como una intersección de semiespacios.*

Cada elemento $u \in (\mathbb{R}^n)^$ define un semiespacio $H_u = \{v \in \mathbb{R}^n : (u, v) \geq 0\}$. De este modo, si $\{u_i\}_{i=1}^t$ es un conjunto de generadores de \mathfrak{R} , entonces*

$$\sigma = \bigcap_{i=1}^t H_{u_i} = \{v \in \mathbb{R}^n : (u_i, v) \geq 0, \forall u_i\}.$$

Demostración. Comprobamos la igualdad:

- \subseteq Sea $v \in \sigma$, entonces $(u_i, v) \geq 0$ para todo u_i , por definición de \mathfrak{R} . Entonces $v \in \bigcap_{i=1}^t H_{u_i}$.
- \supseteq Sea $v \in \mathbb{R}^n$ con $(u_i, v) \geq 0$ para $i = 1, \dots, t$. Tenemos que $(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_t u_t, v) \geq 0$ para todo $\lambda_i \geq 0$, luego $v \in \sigma$. \mathbf{Q}

Ahora veamos una propiedad no menos importante con respecto al dual del dual de σ .

Observación 4.1.13 *Recordemos que existe un isomorfismo canónico entre \mathbb{R}^n y $(\mathbb{R}^n)^{**}$ dado por:*

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^{**} & & \\ v & \longmapsto & \varphi(v) : (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \varphi(v)(u) = u(v) \end{array}$$

Proposición 4.1.14 *Dado un cono σ , entonces se tiene que $\sigma^\perp = \sigma$.*

Demostración. Veamos este resultado por doble inclusión, es decir, $\sigma \subseteq \sigma^\perp$ y $\sigma^\perp \subseteq \sigma$.

- A consecuencia de la observación 4.1.13, y el isomorfismo canónico existente entre \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^{**}$, podemos decir que

$$\check{\sigma} = \{v \in \mathbf{R}^n : (u, v) \geq 0, \forall u \in \check{\sigma}\}.$$

Luego, si $v \in \sigma$, entonces $(u, v) \geq 0$ para todo $u \in \check{\sigma}$ por definición de $\check{\sigma}$, por lo tanto $\sigma \subseteq \check{\sigma}$.

- Ahora, sea $v \in \check{\sigma}$. Veamos que si $v \notin \sigma$, entonces existe $u \in \check{\sigma}$ tal que $(u, v) < 0$. Por el Lema 4.1.12, tenemos que $\sigma = \bigcap_{i=1}^t H_{u_i}$ con $\check{\sigma} = (u_1, \dots, u_t)$. Si $v \notin \sigma$, entonces existe u_i tal que $v \notin H_{u_i}$, es decir, que $(u_i, v) < 0$ con lo cual acabamos de hallar un $u = u_i$ lo que justamente se buscaba. Entonces debido al isomorfismo canónico existente entre \mathbf{R}^n y $(\mathbf{R}^n)^{**}$, tenemos que $(u_i, v) < 0$ en consecuencia $v \notin \check{\sigma}$, finalmente $\check{\sigma} \subseteq \sigma$. Q

Dado un retículo $N \subset \mathbf{R}^n$, podemos definir su retículo dual $M = \text{Homo}(N, \mathbf{Z}) \cong (\mathbf{Z}^n)^* \subset (\mathbf{R}^n)^*$. Nuevamente hacemos hincapié que M es lo trabajado en el capítulo 3.

Teorema 4.1.15 *Si σ es un cono racional, entonces $\check{\sigma}$ es un cono racional (respecto al retículo M).*

Demostración. Veamos dos casos que pueden ocurrir.

- Primer caso. Veamos cuando, $\sigma = \{0\}$, entonces $\check{\sigma} = (\mathbf{R}^n)^*$ es un cono racional generado por la base canónica $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$.
- Segundo caso. Ahora veamos cuando, $\sigma \neq \{0\}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existen generadores de σ , v_i no nulos, tal que $v_i \in N$, $1 \leq i \leq r$ esto debido a que σ es un cono racional.

Por otro lado, sea H_i el hiperplano $\{(u \in (\mathbf{R}^n)^* : (u, v_i) \geq 0, \}$ y H_i^+ el semiespacio $\{(u \in (\mathbf{R}^n)^* : (u, v_i) \geq 0, \}$; entonces $\check{\sigma} = \bigcap_{1 \leq i \leq r} H_i^+$ por el Lema 4.1.12.

Entonces por lo expuesto, bastará mostrar que existe una familia finita $\{u_j : 1 \leq j \leq t\} \subset M$ tal que $\check{\sigma} = (u_1, \dots, u_t)$ por inducción sobre la dimensión n del espacio vectorial ambiente.

En efecto, para $n = 1$, consideramos tres casos:

- Primer caso: Cuando σ está generado por vectores de la forma $v_i \in N \cap \mathbf{R}_{>0}$. Entonces todos los generadores serán proporcionales respecto de un factor estricta-

mente positivo, sin pérdida de generalidad podemos elegir alguno de ellos como generador del cono, llamémoslo v_1 . De esta forma, $\check{\sigma} = \{u \in \mathbf{R}^* : (u, v_i) \geq 0\} = H_1^\dagger$, el cual es un cono racional generado por e_1^* .

- Segundo caso: Similarmente, si σ está generado por vectores de la forma $v_i \in N \cap \mathbf{R}_{<0}$, podemos deducir que $\check{\sigma}$ es cono racional generado por $-e_1^*$.
- Tercer caso: Ahora, si σ está generado por al menos un vector $v_1 \in N \cap \mathbf{R}_{>0}$ y al menos un vector $v_2 \in N \cap \mathbf{R}_{<0}$, entonces $\sigma = \mathbf{R}$, por lo tanto $\check{\sigma} = \{0\}$ es un cono racional, que es justamente lo que se buscaba.

Ahora veamos para el caso general n :

Supongamos que sea válido para el caso $n - 1$.

Entonces, sea $\tau_k = H_k \cap \bigcap_{j=1}^{s_k} H_j^+$, $1 \leq k \leq r$, tenemos que τ_k es un cono en el espacio vectorial de dimensión $n - j^k$. Entonces por la hipótesis de inductiva, existe una familia finita de elementos $\{u_j^k\}_{j=1}^{s_k} \subset M$ que generan τ_k .

Veamos ahora que $\check{\sigma}$ está generado por $\{u_j^k\}_{j,k}$, es decir,

$$\check{\sigma} = \left\{ \sum_{j,k} \mu_j^k u_j^k : \mu_j^k \geq 0 \right\} = \sum_{j,k} \mu_j^k \sum_{j,k}$$

Ahora, demostraremos esta igualdad por doble inclusión:

- \supseteq) Sea $u \in \check{\sigma}$, entonces $(u, v) \geq 0$ para todo $v \in \sigma$. Aquí distinguimos dos casos:

d Primer caso: Si existe $v \in \sigma$, $v \neq 0$, tal que $(u, v) = 0$, entonces existe un conjunto de índices $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ tal que $(u, v_i) = 0$, para todo $i \in I$ y $(u, v_j) > 0$ para $j \in \{1, \dots, r\} \setminus I$. Luego $u \in H_i$ para todo $i \in I$ y $u \in H_j$ para $j \in \{1, \dots, r\} \setminus I$. Por lo tanto, existe $k \in I$ tal que $u \in \tau_k$, es decir,

$$u = \mu_1^k u_1^k + \dots + \mu_{s_k}^k u_{s_k}^k \text{ con } \mu_i^k \geq 0. \text{ Así que, } u \in \sum_{j,k} \mu_j^k \sum_{j,k}$$

d Segundo caso: Si $(u, v) > 0$ para todo $v \in \sigma, v \neq 0$. Entonces existe, k tal que $(u, v_k) > 0$. Por lo tanto es posible escribir $u = u_1 + u_2$ donde:

$$\square (u_1, v_j) = (u, v_j) \text{ si } j \neq k$$

$$\square (u_1, v_k) = 0$$

$$\square (u_2, v_j) = 0 \quad \text{si } j \neq k$$

$$\square (u, v) = (u, v)$$

Entonces, $u_1 \in H_k, u_2 \in H_j$ para $j \neq k$ y $u_1, u_2 \in H_i$ para todo $i = 1, \dots, r$.

Luego $u_1 \in \tau_k$ y $u_2 \in \tau_j$ con $j \neq k$. Es decir, que u se puede expresar como combinación lineal convexa de los generadores de τ_k y τ_j para algún $j \neq k$.

$$\cdot \supseteq) \text{ Sea } u \in \sum_{j=1}^r \mu_j^k u_j^k, \text{ entonces } u = \sum_{j=1}^r \mu_j^k u_j^k \text{ con } \mu_j^k \geq 0. \text{ Luego, } (u, v) = \sum_{j=1}^r \mu_j^k (u_j^k, v) \geq 0 \text{ para todo } v \in \sigma \text{ (dado que } u_j^k \in \tau_k), \text{ así que } u \in \check{\sigma}. \quad \text{Q}$$

Observación 4.1.16 Sin embargo, no se cumple que dado un cono σ fuertemente convexo, su dual sea también fuertemente convexo. Por ejemplo, sea $\sigma = (e_1)$ en \mathbb{R}^2 , tenemos que $\check{\sigma} = (e_1^*, e_2^*, -e_2^*)$ y $\check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}) = (e_2^*, -e_2^*)$.

Lema 4.1.17. Sea σ un cono racional generado por los vectores $\{v_1, \dots, v_r\}$, entonces $\check{\sigma} = \bigcap_{i=1}^r \check{\tau}_i$ donde $\tau_i = \{\tau_i = \lambda v_i : \lambda \geq 0\}$ es la semirrecta generada por el vector v_i .

Demostración. Considerando la siguiente observación, mostraremos la igualdad por doble inclusión;

$$\begin{aligned} \check{\tau}_i &= \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, v) \geq 0, \forall v \in \tau_i\} \\ &= \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, \lambda v_i) \geq 0, \forall \lambda \geq 0\} \\ &= \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, v_i) \geq 0\}. \end{aligned}$$

En efecto,

$$\cdot \supseteq) \text{ Sea } u \in \bigcap_{i=1}^r \check{\tau}_i, \text{ esto es equivalente a que } (u, v_i) \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, r. \text{ Así que para toda combinación lineal con coeficientes positivos de los } v_i \text{ tenemos}$$

$$(u, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \geq 0 \text{ si } \lambda_i \geq 0. \text{ Por lo tanto, } u \in \check{\sigma}.$$

$$\cdot \subseteq) \text{ Sea } u \in \check{\sigma}, \text{ por definición tenemos que } (u, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \geq 0 \text{ para todo } \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in \sigma. \text{ En particular, tomando } \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_j = 0 \text{ para todo } j \neq i \text{ se tiene que } (u, v_i) \geq 0. \text{ Similarmente repitiendo el mismo proceso para cada } i, \text{ obtenemos lo buscado.}$$

Q

4.2 Caras

En esta sección introducimos la definición de cara de un cono y algunas de sus propiedades.

Definición 4.2.1. Sea σ un cono y $\lambda \in \check{\sigma}$, entonces

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : (\lambda, v) = 0\}$$

es una cara de σ y $\tau < \sigma$ identificara a una cara como parte de un cono.

A las caras de dimensión uno se denomina *aristas*. Por otro lado, podemos observar que

el propio cono es cara de si mismo, basta tomar $\lambda = 0 \in (\mathbb{R}^n)^*$. Igualmente, el vector 0 constituye una cara de cualquier cono ya que está generada por el elemento $\lambda = \sum_{i=1}^r u_i \in \check{\sigma}$ con $\check{\sigma} = (u_1, \dots, u_r)$. Una cara τ de σ se denomina *cara propia* del cono si, $\tau < \sigma$.

Ejemplo 4.2.2. Sea el cono $\sigma_2 = (e_1, e_2)$, podemos determinar sus caras $\tau_1 = (e_1) = \sigma_2 \cap (e_2^*)^\perp$, $\tau_2 = (e_2) = \sigma_2 \cap (e_1^*)^\perp$ y sus caras no propias σ_2 y 0.

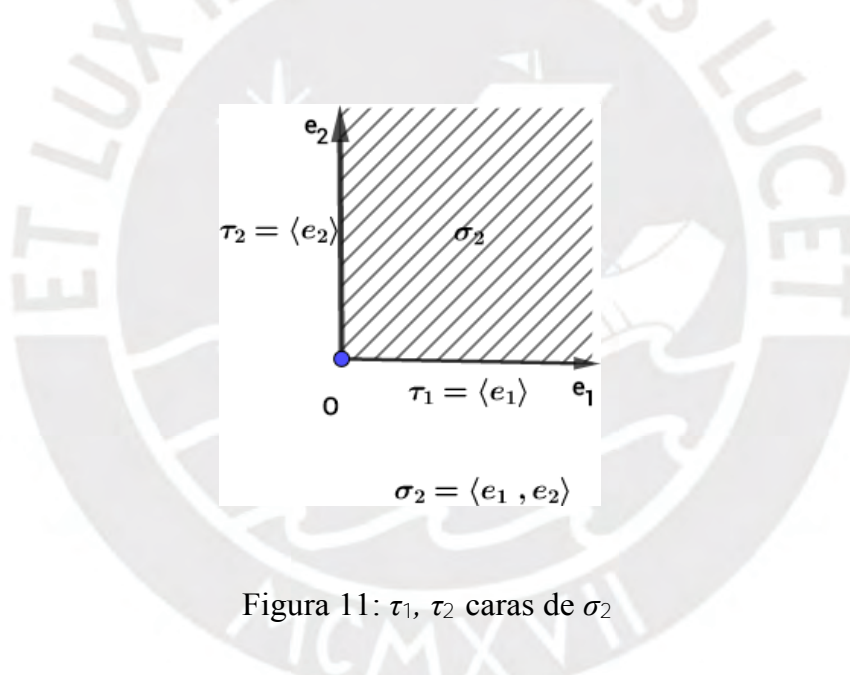


Figura 11: τ_1, τ_2 caras de σ_2

Veamos como determinar todas las caras del σ_2 , del ejemplo en mención. Recordemos que el dual del σ_2 es $\check{\sigma}_2 = (e_1^*, e_2^*)$, ahora consideremos $\lambda = \beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^* \in \check{\sigma}_2$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ y aplicando la definición obtenemos que

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_2 \cap \lambda^\perp = \{v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \sigma_2; (\lambda, v) = 0\} \\ &= \{v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \sigma_2; (\beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^*, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = 0\} \\ &= \{v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \sigma_2; \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = 0, \}, \text{ donde } \alpha_1, \alpha_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Veamos entonces todos los casos posibles:

- * Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ tenemos que $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \sigma_2 \cap \lambda^\perp = \sigma_2$, esto implica que σ_2 es una cara del σ_2 .
- * Si $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 \neq 0$, entonces $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \sigma_2 \cap (\beta_2 e_2^\dagger)^\perp$ esto será posible, si solamente si, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 \geq 0$, lo que implica que, $\tau_1 = (e_1) = \sigma \cap (\beta_2 e_2^\dagger)^\perp$ es una cara de σ_2 .
- * Si $\beta_1 \neq 0$ y $\beta_2 = 0$, entonces $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \sigma \cap (\beta_1 e_1^\dagger)^\perp$ esto será posible, si solamente si, $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 \geq 0$, lo que implica que, $\tau_2 = (e_2) = \sigma_2 \cap (\beta_1 e_1^\dagger)^\perp$ es una cara de σ_2 .
- * Si $\beta_1 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$, entonces $\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = 0$ esto será posible, si solamente si, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, lo que implica que, $0 = \sigma_2 \cap (\beta_1 e_1^\dagger + \beta_2 e_2^\dagger)^\perp$ es una cara de σ_2 .

Por lo tanto, acabamos de mostrar lo que en el ejemplo en mención se afirmó.

Veamos algunas propiedades de las caras de un cono:

Proposición 4.2.3. Sea σ un cono racional, entonces:

1. Toda cara de σ es un cono racional.
2. Toda intersección de caras de σ es una cara de σ .
3. Toda cara de una cara de σ es una cara de σ .

Demostración. Sea σ un cono racional:

1. Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ generadores de σ en \mathbb{N} , $\lambda \in \check{\sigma}$ y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : (\lambda, v)\} = 0$. Entonces dado $v \in \tau$, tenemos que $v = \mu_1 v_1, \dots, \mu_m v_m$ con $\mu_i \geq 0$, luego $(\lambda, v) = \mu_1 (\lambda, v_1) + \dots + \mu_m (\lambda, v_m) = 0$ y dado que $(\lambda, v_i) \geq 0$, se cumplirá que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ o bien $\mu_i = 0$, o bien $(\lambda, v_i) = 0$.

Es decir, existe $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tal que:

- $(\lambda, v_i) = 0, \mu_i \geq 0$ si $i \in I$
- $(\lambda, v_i) \neq 0, \mu_i = 0$ si $i \notin I$

Así, tenemos que si $v \in \tau$, entonces $v = \sum_{i \in I} \mu_i v_i$ con $\mu_i \geq 0$. Es decir, que τ está generado por $\{v_i : i \in I\}$, y por lo tanto, es un cono racional.

2. Para mostrar el segundo enunciado, bastará con demostrar la siguiente igualdad:

$$\sigma \cap \bigcap_{i=1}^k \lambda_i^\perp = \sigma \cap \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$$

En efecto veamos el doble contenido.

- \subseteq Sea $v \in \sigma \cap \bigcap_{i=1}^k \lambda_i^\perp$, tenemos que $v \in \sigma$ y $v \in \lambda_i^\perp$ para todo i , es decir, que $(\lambda_i, v) = 0$. Dado que la aplicación $(,)$ es bilineal, tenemos que $(\lambda_1 + \dots + \lambda_k, v) = 0$, luego $v \in \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$ como queríamos ver.
- \supseteq Sea $v \in \sigma \cap \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$, tenemos que $v \in \sigma$ y $v \in \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^\perp$, es decir, que $(\sum_{i=1}^k \lambda_i, v) = 0$ y nuevamente por la bilinealidad de la aplicación $(,)$, tenemos que $(\lambda_i, v) = 0$. Dado que $v \in \sigma$ y $\lambda_i \in \check{\sigma}$, tenemos que $(\lambda_i, v) \geq 0$ luego debe ser $(\lambda_i, v) = 0$ y así tenemos que $v \in \sigma$ y $v \in \lambda_i^\perp$ para todo i , es decir, que $v \in \sigma \cap \bigcap_{i=1}^k \lambda_i^\perp$.

3. Por último, sea $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ y $\gamma = \tau \cap \lambda^{\perp\perp}$ con $\lambda \in \check{\sigma}$ y $\lambda^j \in \check{\tau}$. Ejecutemos la demostración en dos etapas:

- Primera etapa: probemos que existe un número real positivo p suficientemente grande, tal que $\lambda^j + p\lambda \in \check{\sigma}$. En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que $\lambda^j + p\lambda \notin \check{\sigma}$ para todo $p \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces, $(\lambda^j + p\lambda, v) = (\lambda^j, v) + p(\lambda, v) < 0$ para algún $v \in \sigma$; entonces tenemos dos casos.
 - d Si $(\lambda, v) = 0$, entonces existe $p > 0$ tal que $p(\lambda, v) > (\lambda^j, v)$, esto implica que $(\lambda^j + p\lambda, v) \geq 0$, lo que va en contra de la hipótesis.
 - d Si $(\lambda, v) < 0$, tenemos que $(\lambda^j, v) < 0$ y que $v \in \sigma \cap \lambda^\perp = \tau$, es decir, $(\lambda^j, v) \geq 0$, que no es posible.
- Segunda etapa: bastará con mostrar que $\gamma = \sigma \cap (\lambda^j + p\lambda)^\perp$; en efecto, mostremos esta igualdad por doble inclusión.

$d \subseteq$ Sea $v \in \gamma$, por definición vemos que $\gamma = \tau \cap \lambda^{\perp} = \sigma \cap \lambda^{\perp} \cap \lambda^{\perp}$, luego $v \in \sigma$, $\lambda^{\perp}, v \geq 0 = 0$. Por tanto, $\lambda^{\perp}, v + p(\lambda, v) = \lambda^{\perp} + p\lambda, v \geq 0$ y concluimos que $v \in \sigma \cap \lambda^{\perp}$.

$d \subseteq$ Sean $\{v_1, \dots, v_m\}$ los generadores de σ ordenados de forma que los s primeros sean generadores de τ y los r primeros sean generadores de γ ($r \leq s$), tenemos que:

$$\begin{aligned} \square (\lambda, v_i) &= 0 \text{ si } \forall i \leq s \\ \square (\lambda, v_j) &> 0 \text{ si } \forall j > s \\ \square (\lambda, v_j) &= 0 \text{ si } \forall j \leq r \\ \square (\lambda, v_j) &> 0 \text{ si } \forall j > r \end{aligned}$$

Sea $v \in \sigma \cap \lambda^{\perp}$, tenemos que $v \in \sigma$, luego $v = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$ con $\mu_i \geq 0$.

Como $v \in \lambda^{\perp}$, vemos que $\lambda^{\perp}, v = 0$ y desarrollando esta desigualdad, $\lambda^{\perp}, v = \mu_1 \lambda^{\perp}, v_1 + \dots + \mu_m \lambda^{\perp}, v_m + p\mu_1 (\lambda, v_1) + \dots + p\mu_m (\lambda, v_m) = \mu_{r+1} \lambda^{\perp}, v_{r+1} + \dots + \mu_m \lambda^{\perp}, v_m + p\mu_{s+1} (\lambda, v_{s+1}) + \dots + \mu_m (\lambda, v_m) = 0$. Llegamos a que $\mu_i = 0$ para $i \in \{r+1, \dots, s, s+1, \dots, m\}$. Por tanto, $(\lambda, v) = 0$ y $\lambda^{\perp}, v = 0$, así que $v \in \lambda^{\perp}$ y $v \in \lambda^{\perp}$. Con esto ya podemos concluir que $v \in \sigma \cap \lambda^{\perp} \cap \lambda^{\perp} = \tau \cap \lambda^{\perp} = \gamma$.

Por lo expuesto se muestra que γ es una cara de σ . Q

Observación 4.2.4. Notemos que de la demostración del punto (1) de la Proposición 4.2.3, hemos deducido que dados los generadores $\{v_1, \dots, v_m\}$ de un cono σ , los generadores de cualquier cara $\tau = \sigma \cap \lambda^{\perp}$, $\lambda \in \check{\sigma}$ de σ serán aquellos v_i tales que $(\lambda, v_i) = 0$.

Proposición 4.2.5. Si $\tau < \sigma$, entonces $\check{\sigma} \subset \check{\tau}$.

Demostración. Considere $u \in \check{\sigma}$, por definición se tiene que $(u, v) \geq 0$ para todo $v \in \sigma$, luego $(u, w) \geq 0$ para todo $w \in \tau < \sigma$, entonces, $u \in \check{\tau}$. Q

Observación 4.2.6. Sin embargo, no siempre es cierto que si $\tau < \sigma$, entonces $\check{\sigma} < \check{\tau}$. Por ejemplo, si considera en \mathbb{R}^2 la cara $\tau = (e_1)$ del cono $\sigma = (e_1, e_2)$. Efectivamente, $\check{\sigma} = (e_1^*, e_2^*)$ está contenido en $\check{\tau} = (e_1^*, e_2^*, -e_2^*)$, pero $\check{\sigma}$ no es cara de $\check{\tau}$ porque no existe

$\lambda \in \check{\tau} = \tau$ tal que $\check{\sigma} = \lambda \cap \check{\tau}$.

Veamos algunos resultados de vital importancia para el final de esta sección.

Observación 4.2.7. Si $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, entonces $\check{\sigma} = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$.

Demostración. Considere $\{v_1, \dots, v_r\}$ y $\{w_1, \dots, w_s\}$ generadores de los conos σ_1 y σ_2 respectivamente. Entonces si, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, tenemos que $\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : (u, v) \geq 0, \forall v \in \sigma\}$. Por lo tanto sea $\check{\tau}_r = \{\lambda v_i : \lambda \geq 0\}$ y $\check{\gamma}_s = \{\lambda w_i : \lambda \geq 0\}$, y en virtud del Lema 4.1.17, tenemos que $\check{\sigma} = \bigcap_{i=1}^r \check{\tau}_i \cap \bigcap_{i=1}^s \check{\gamma}_i = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$.

Q

Observación 4.2.8. Si $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$, entonces $\check{\sigma} = \check{\sigma}_1 + \check{\sigma}_2$.

Veamos ahora el siguiente resultado sobre el cálculo de la dimensión de $\check{\sigma}$. Proposición 4.2.9.

Sea σ un cono en \mathbb{R}^n , entonces $\dim(\check{\sigma}) = \text{codim}(\sigma \cap (-\sigma))$.

Demostración. Tengamos presente que, por definición, $\dim(\check{\sigma}) = \dim(\check{\sigma} + (-\check{\sigma}))$; y gracias a la observación 4.2.8, $\check{\sigma} + (-\check{\sigma}) = (\sigma \cap (-\sigma))$. Por otro lado, tenemos que $(\sigma \cap (-\sigma))^\vee = (\sigma \cap (-\sigma))^\perp$ ya que $v \in \sigma \cap (-\sigma)$, es decir, que $-v \in \sigma \cap (-\sigma)$, luego cualquier elemento $u \in (\sigma \cap (-\sigma))^\vee$ cumple que $(u, v) \geq 0$ y $(u, -v) \geq 0$, es decir, $(u, v) = 0$, luego $u \in (\sigma \cap (-\sigma))^\perp$. Así, $\dim(\check{\sigma}) = \dim(\sigma \cap (-\sigma))^\perp = \text{codim}(\sigma \cap (-\sigma))$.

Q

Proposición 4.2.10. Si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$, con $\lambda \in \check{\sigma}$, es una cara de σ , entonces:

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

Demostración. Para esta ocasión solo bastará con demostrar que los duales de ambos lados coincidan. Ahora bien tenemos que, $\check{\tau} = \tau$ y por $(\check{\sigma} + (-\lambda))^\vee = \sigma \cap (-\lambda)^\vee = \sigma \cap \lambda^\perp = \tau$. Veamos que ocurre con la segunda igualdad y con ello concretaremos la demostración.

Sea $v \in \sigma \cap (-\lambda)^\vee$, entonces $(-\lambda, v) \geq 0$ pues $v \in (-\lambda)^\vee$ y, dado que $(\lambda, v) \geq 0$ porque $v \in \sigma$, se tiene que $(\lambda, v) = 0$. Ahora bien, si $v \in \sigma \cap \lambda^\perp$ entonces $(\lambda, v) = 0$, que también implica $(-\lambda, v) = 0$ entonces $v \in \sigma \cap (-\lambda)^\vee$.

Q

Ejemplo 4.2.11. Sea el cono $\sigma_2 = (e_1, e_2)$; cuyo cono dual es $\check{\sigma}_2 = (e_1^*, e_2^*)$. Considerando una cara $\tau = (e_2) = \sigma \cap (e_1^*)^\perp$ del cono σ_2 , tendremos, por la proposición anterior, que $\check{\tau} = \check{\sigma}_2 + (-e_1^*) = (e_1^*, -e_1^*, e_2^*)$.

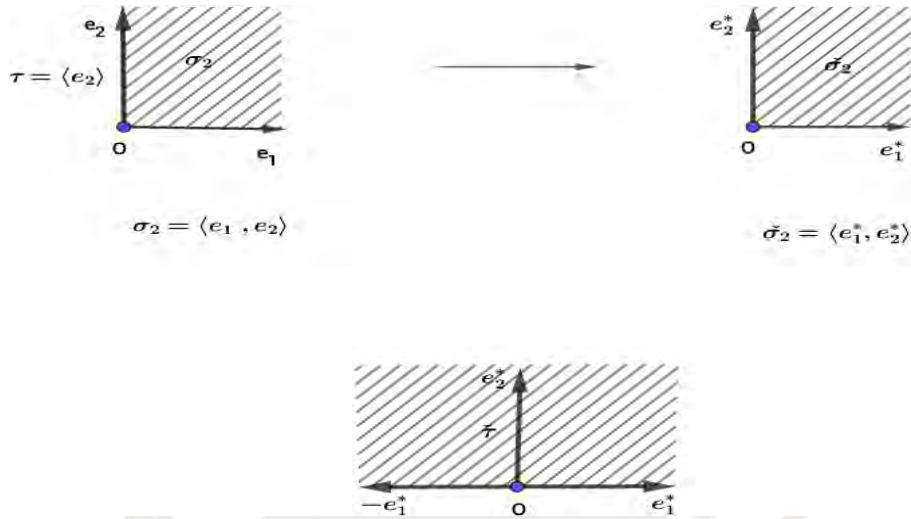


Figura 12: $\check{\tau}$ dual de una cara de σ_2 .

Ejemplo 4.2.12. Sea el cono $\sigma = (-e_1 - e_2, e_2)$; cuyo cono dual es $\check{\sigma} = (-e_1^*, -e_1^* + e_2^*)$. Considerando una cara $\tau = (e_2) = \sigma \cap (-e_1^*)^\perp$ del cono σ , tendremos por la proposición anterior que $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbf{R}_{\geq 0}(e_1) = (-e_1^*, -e_1^* + e_2^*, e_1^*) = (-e_1^*, e_1^*, e_2^*)$.

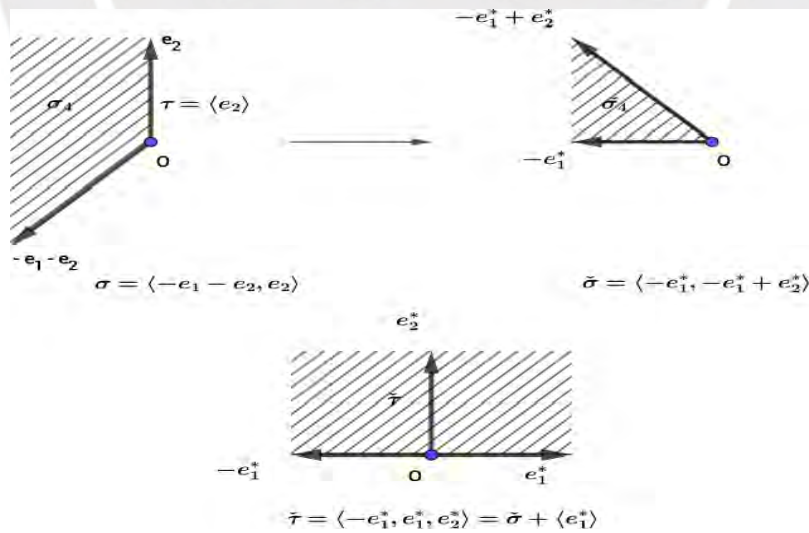


Figura 13: Dual de una de las caras de $\sigma = (-e_1 - e_2, e_2)$.

Definición 4.2.13. *El interior relativo $\dot{\sigma}$ de un cono σ es el conjunto de elementos de σ que no pertenecen a ninguna cara estricta de σ , es decir,*

$$\dot{\sigma} = \{v \in \sigma : (\lambda, v) > 0, \forall \lambda \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp\}.$$

Este conjunto es siempre no vacío. En particular, el cono $\{0\}$ es igual a su interior relativo.

Observación 4.2.14. *El interior relativo $\dot{\sigma}$ de un cono σ coincide con el interior topológico de σ para la topología usual del subespacio vectorial que lo genera.*

Definición 4.2.15. *La unión de las caras estrictas de σ , $\sigma \setminus \dot{\sigma}$, se denomina borde relativo de σ .*

Proposición 4.2.16. *Dado un cono σ , se tiene que un elemento $v \in \sigma$ está en su interior relativo $\dot{\sigma}$ si, y solo si, $\check{\sigma} \cap v^\perp = \sigma^\perp$.*

Demostración. Mostraremos este resultado por doble contenido, en efecto veamos la primera implicancia.

- Por otro lado, aquí también debemos mostrar otra doble inclusión. En efecto,
 - ⊆ • Sean $v \in \sigma$ y $u \in \check{\sigma}$, la igualdad $(u, v) = 0$ implica que $u \in \sigma^\perp$ si, y solo si, $v \in \dot{\sigma}$, ya que si $v \in \dot{\sigma}$, entonces $(u, v) > 0$ para todo $w \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp$, luego si $(u, v) = 0$, entonces $u \in \sigma^\perp$.
 - ⊇ • Para el otro contenido, si $u \in \sigma^\perp$, entonces $(u, x) = 0$ para todo $x \in \sigma$. Tenemos, por hipótesis, que $(u, v) = 0$ ya que $u \in \sigma^\perp$, luego $(w, v) > 0$ si $w \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp$, así que $v \in \dot{\sigma}$. Para culminar esta parte, veamos que dado $v \in \sigma$, se cumple que $v \in \dot{\sigma}$ si, y solo si, $\check{\sigma} \cap v^\perp = \sigma^\perp$.
 - Entonces nuevamente otra doble implicancia, en efecto;
 - Para la implicación directa, sabemos que para todo $v \in \sigma$ siempre se verifica que $\sigma^\perp \subseteq \check{\sigma} \cap v^\perp$.

- Para la implicación, Veamos que si $v \in \check{\sigma}$, entonces se tiene la otra contención. Si $u \in \check{\sigma} \cap v^\perp$, entonces $(u, v) = 0$, luego $u \in \sigma^\perp$ por la observación anterior.
- ← Para la implicación recíproca, consideramos $w \in \check{\sigma} \setminus \sigma^\perp$ y tenemos que $(w, v) > 0$ porque $w \notin v^\perp$, luego $v \in \check{\sigma}$.

Q

Observación 4.2.17. Recuerde que si, $f: X \rightarrow Y$ una aplicación suprayectiva y sean $g, h: Y \rightarrow Z$ tales que $g \circ f = h \circ f$. Entonces $g = h$.

Por último, mostremos la existencia de una biyección entre las caras de un cono y las caras de su cono dual.

Teorema 4.2.18. Si $\tau < \sigma$, entonces $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ es una cara de $\check{\sigma}$ con $\dim(\tau) + \dim \check{\sigma} \cap \tau^\perp = n$. Esto nos da una biyección, con inversión de orden, entre las caras de σ y las caras de $\check{\sigma}$.

Demostración. En efecto, la prueba de este teorema se desarrollara en dos partes:

- En primer lugar mostraremos que si $\tau < \sigma$, entonces $\check{\sigma} \cap \tau^\perp < \check{\sigma}$.

Recordemos antes que las caras de $\check{\sigma}$ son conos de la forma $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ con $v \in \check{\sigma} \cap N = \sigma \cap N$.

Ahora bien, sea v contenido en el interior relativo de τ , tenemos que:

$$\check{\sigma} \cap \tau^\perp = \check{\sigma} \cap \check{\tau} \cap v^\perp = \check{\sigma} \cap \tau^\perp.$$

Estas igualdades se deben al hecho de que $\tau < \sigma$, entonces $\check{\sigma} \subset \check{\tau}$ por la proposición 4.2.5; y como $v \in \tau$, se tiene que $\check{\tau} \cap v^\perp = \tau^\perp$ por la Proposición 4.2.16. Por lo tanto $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ es una cara de $\check{\sigma}$.

- En la segunda parte, demostraremos que se verifica la siguiente igualdad para las dimensiones, $\dim(\tau) + \dim \check{\sigma} \cap \tau^\perp = n$. Con ello concluimos la prueba, veamos.
 - * Consideramos la $\dim(\sigma) = p \leq n$ y $\dim(\tau) = q \leq p$.
 - * Por otro lado, tenemos que si, $\tau^\perp = \check{\tau} \cap (-\check{\tau})$, entonces $\check{\sigma} \cap \tau^\perp = \check{\sigma} \cap \check{\tau} \cap (-\check{\tau}) = \check{\tau} \cap (-\check{\tau})$.

- * Ahora bien, ya podemos hacer la siguiente sustitución
 $\dim \check{\sigma} \cap \tau^\perp \stackrel{\Sigma}{=} \dim(\check{\sigma} \cap (-\check{\tau})) = \dim(\sigma + (-\tau)) \stackrel{\Sigma}{=} \dim(\sigma + (-\tau))$ por la observación 4.2.7.
- * Por ultimo, en virtud de la Proposición 4.2.9,
 $\dim(\sigma + (-\tau)) \stackrel{\Sigma}{=} \text{codim}((\sigma + (-\tau)) \cap ((-\sigma) + \tau)) = \text{codim}(\tau + (-\tau)) = n - q.$ Q

Esta construcción nos da una biyección, con inversión de orden, entre las caras de σ y las caras de $\check{\sigma}$. Vamos a denotar por H a dicha biyección, de forma que H es la aplicación:

$$H : \{Caras\ de\ \sigma\} \longrightarrow \{Caras\ de\ \check{\sigma}\}$$

$$\tau \longmapsto \tau^* = \check{\sigma} \cap \tau^\perp$$



4.3 Monoides

Definición 4.3.1. *Un semigrupo, es decir, un conjunto no vacío S con una operación interna asociativa $+$, se llama monoide si es conmutativo, posee elemento neutro 0 y cumple la ley de simplificación:*

$$s + t = s^j + t \rightarrow s = s^j \text{ para } s, s^j, t, \in S$$

Lema 4.3.2. *Si σ es un cono, entonces $\sigma \cap N$ es un monoide.*

Demostración.

Dado que $(0, \dots, 0) \in \sigma \cap N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que $\sigma \cap N$ es un conjunto asociativo, conmutativo y posee elemento neutro y posee elemento neutro.

Ahora bien, en cuanto a la ley de simplificación, dados dos elementos (x_1, \dots, x_n) y (y_1, \dots, y_n) en $\sigma \cap N$, para cualquier elemento $(z_1, \dots, z_n) \in \sigma \cap N$ que cumpla $(x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n) = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$, tenemos que $x_i = y_i$ para $i = 1, \dots, n$. Luego, también se cumple la ley de simplificación.

Q

Definición 4.3.3. *Un monoide S es finitamente generado si existen elementos $a_1, \dots, a_k \in S$ tales que para todo $s \in S$ se tiene que $s = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ con $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Los elementos a_1, \dots, a_k se llaman generadores del monoide. Un sistema de generadores es mínimo si ninguno de sus elementos está generado por el resto de elementos del sistema.

Lema 4.3.4 (Lema de Gordon). *Si σ es un cono racional, entonces $\sigma \cap N$ es un monoide finitamente generado.*

Demostración. Sea $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de generadores de σ un cono racional, con $v_i \in \sigma \cap N$ y considere el conjunto $K = \sum_{i=1}^k t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1$ que es compacto, dado que N es discreto, tenemos que $K \cap N$ es finito.

Ahora bien, veamos que $K \cap N$ genera $\sigma \cap N$. Sea $v \in \sigma \cap N$, entonces $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = (n_1 + r_1) v_1 + \dots + (n_k + r_k) v_k = n_1 v_1 + \dots + n_k v_k + \sum_{i=1}^k r_i v_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $0 \leq r_i < 1$.

Entonces dado que $v_i \in K \cap N$ y que $\sum_{i=1}^k r_i v_i \in K \cap N$, se tiene justamente lo que se buscaba.

Q

Notación 4.3.5. *A partir de ahora, denotaremos $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$. Donde M denota el*

retículo dual de N .

A continuación presentamos una serie de ejemplos de monoides obtenidos a partir de los conos del ejemplo 4.1.4.

Ejemplo 4.3.6. En \mathbb{R}^2 consideramos el cono $\sigma_3 = (2e_1 - e_2, e_2)$ y hallamos S_{σ} . En este ejemplo S_{σ_3} , marcado con los puntos grandes, no está generado por los vectores que generan $\check{\sigma}_3 = ((e_1^*, e_1^* + 2e_2^*))$ sino que hay que añadir el vector $e_1^* + e_2^*$ al conjunto de generadores de S_{σ_3} . Sin embargo, el lema de Gordon garantiza que el conjunto de generadores es finito y, si seguimos la demostración del lema de Gordon, basta con elegirlos de entre los vectores contenidos en el conjunto K definido en la demostración.

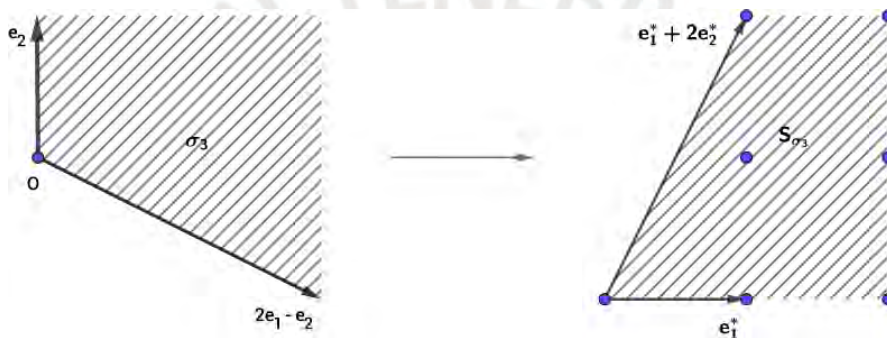


Figura 14: $S_{\sigma_3} = (e_1^*, e_1^* + 2e_2^*, e_1^* + e_2^*)$

Ejemplo 4.3.7. En \mathbb{R}^2 consideramos el cono $\sigma_2 = (e_1, e_2)$ y hallamos S_{σ} .

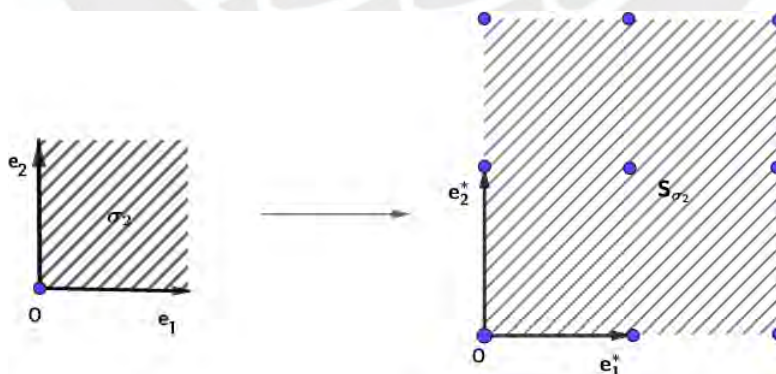


Figura 15: $S_{\sigma_2} = (e_1^*, e_2^*)$

Vemos en este caso que S_{σ_2} sí está generado por los vectores que generan $\check{\sigma}_2 = (e_1^*, e_2^*)$.

Ejemplo 4.3.8. En \mathbb{R}^2 consideramos el cono $\sigma_1 = (e_1)$ y hallamos S_{σ_1} . Entonces veremos también en este ejemplo que S_{σ_1} , está generado por los vectores que generan $\check{\sigma}_1 = (e_1^*, e_2^*, -e_2^*)$.

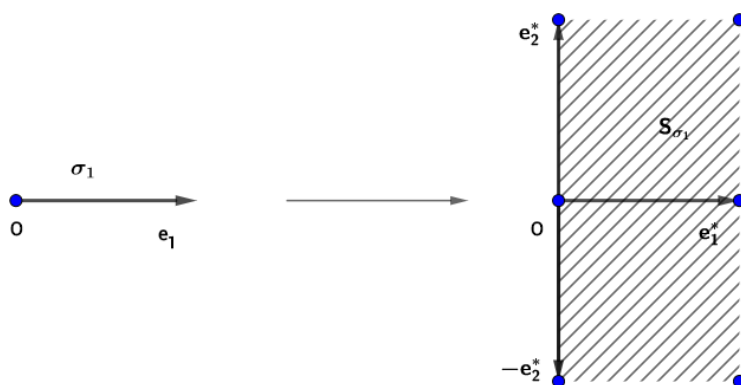


Figura 16: $S_{\sigma_1} = (e_1^*, e_2^*, -e_2^*)$

Proposición 4.3.9. Sea σ un cono racional y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ una cara de σ , con $\lambda \in S_\sigma$, entonces:

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$$

Demostración. La prueba es directa, ya que, intersecando ambos miembros de la igualdad de la Proposición 4.2.10 con $M = (\mathbb{Z}^n)^*$; se obtiene el resultado deseado.

Observación 4.3.10. Q Tenga presente que si, σ es un cono fuertemente convexo, entonces el monoide $\sigma \cap N$ tiene un único sistema mínimo de generadores. Esta observación será de utilidad en secciones posteriores.

4.4 Variedades tóricas afines

A lo largo de las secciones anteriores hemos determinado herramientas necesarias para la construcción de una variedad tórica afín, en esta parte vamos a construir a partir de los monoides ya definidos anteriormente, álgebras sobre el cuerpo de los números complejos; y por último de estas álgebras mediante uso de las herramientas desarrolladas en el capítulo 1, 2 y 3; llegaremos a la definición de una variedad tórica afín generada desde un cono.

4.4.1 Polinomios de Laurent

Denotemos por $\mathbf{C}[z, z^{-1}] = \mathbf{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ el *anillo de polinomios de Laurent*. Escribiremos un *monomio de Laurent* de la forma $\lambda z^\alpha = \lambda z^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ con $\lambda \in \mathbf{C}^*$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$. El siguiente paso para definir variedades tóricas está basado en el siguiente isomorfismo entre el grupo aditivo \mathbf{Z}^n y el grupo multiplicativo de monomios mónicos de Laurent:

$$\begin{aligned} \theta : \mathbf{Z}^n &\rightarrow \theta(\mathbf{Z}^n) \subseteq \mathbf{C}[z, z^{-1}] \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Veamos que θ es un isomorfismo de \mathbf{Z}^n en $\theta(\mathbf{Z}^n)$.

- θ es homomorfismo de grupos. Sean $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{Z}^n$, tenemos que: $\theta(\alpha + \beta) = \theta(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) = z_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots z_n^{\alpha_n + \beta_n} = z^\alpha \cdot z^\beta$
- θ es inyectiva. Directamente, si $\theta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} = z_1^{\beta_1} \dots z_n^{\beta_n} = \theta(\beta_1, \dots, \beta_n)$ entonces $\alpha_i = \beta_i, i \in \{1, \dots, n\}$
- θ es suprayectiva porque el recorrido de la aplicación es la imagen del dominio por θ .

Definición 4.4.1.1 *El soporte de un polinomio de Laurent* $f = \sum_{f \text{ finita}} \lambda_a z^a$ se define por:

$$\text{supp}(f) = \{a \in \mathbf{Z}^n : \lambda_a \neq 0\}.$$

Observación 4.4.1.2 *Note que dados $f, g \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, tenemos que $\text{supp}(f \pm g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$ y $\text{supp}(f \cdot g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$. Además, dado $\lambda \in \mathbb{C}^*$, se tiene que, $\text{supp}(1) = \{(0, \dots, 0)\}$ y $\text{supp}(\lambda \cdot f) = \text{supp}(f)$*

Proposición 4.4.1.3 *Para un cono racional σ , el anillo*

$$R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : \text{supp}(f) \subset S_\sigma\}$$

es un álgebra monomial finitamente generada, es decir, es una \mathbb{C} -álgebra generada por monomios de Laurent.

Demostración. Por la observación anterior se tiene que R_σ es cerrada con respecto a la suma, producto de polinomios de Laurent y con respecto al producto por un escalar en \mathbb{C} .

Por lo tanto R_σ es un \mathbb{C} -álgebra.

Ahora solo bastara con mostrar que R_σ es finitamente generado. Sabemos que existen $v_1, \dots, v_n \in S_\sigma$ que generán S_σ , por el lema de Gordan. Dada la biyección θ entre \mathbb{Z}^n y $\theta(\mathbb{Z}^n)$, tenemos que dado $x \in S_\sigma$, $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces $\theta(x) = (z^{v_1})^{\lambda_1} \dots (z^{v_n})^{\lambda_n}$. Es decir, que cualquier monomio $z^x \in R_\sigma$ está generado por z^{v_1}, \dots, z^{v_n} .

Q

Observación 4.4.1.4 *En la siguiente sección denotaremos $\mathbb{C}[\xi] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$ como el anillo de polinomios en k variables sobre \mathbb{C} . En base a la teoría y resultados de geometría algebraica, podemos definir la topología de Zariski sobre el conjunto de ideales maximales de R (R un anillo conmutativo), $\text{Spec}(R)$, tomando como conjuntos abiertos los complementarios de los conjuntos algebraicos $V(a)$ donde a es un ideal de R ; en consecuencia tenemos el homeomorfismo:*

$$V \cong \text{Spec}(R_V),$$

es decir, que cada \mathbb{C} -álgebra finitamente generada determina una variedad compleja afín $\text{Spec}(R)$. Si elegimos generadores de R , la \mathbb{C} -álgebra se puede escribir como $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I$ donde I es un ideal. Entonces $\text{Spec}(R)$ se puede identificar con la subvariedad $V(I)$ de \mathbb{C}^k .

A continuación describimos cómo se construye la variedad tórica afín asociada a un cono racional.

4.4.2 Variedad tórica afín

Definición 4.4.2.1 *La variedad tórica afín correspondiente al cono racional σ es $X_\sigma = \text{Spec}(R_\sigma)$.*

Dado que la definición de variedad tórica es demasiado abstracta para poder manejarla, nos interesa buscar una representación de la misma en un espacio afín \mathbb{C}^k adecuado. Estas representaciones geométricas se obtienen introduciendo coordenadas, que se corresponden con una elección de generadores de S_σ . El homeomorfismo $V \cong \text{Spec}(R_V)$ muestra cómo podemos representar R_σ como un anillo coordinado de varias maneras, según cómo elijamos los generadores de S_σ . Diferentes elecciones dan diferentes representaciones de la variedad afín tórica $\text{Spec}(R_\sigma)$ en distintos espacios complejos \mathbb{C}^k . En adelante, denotaremos X_σ a alguna de esas representaciones, ya que todas son homeomorfas. Vamos a ver como se construyen dichas variedades a través de un ejemplo, para luego dar el caso general. Por último, veremos cómo dar la representación que hemos esbozado.

Ejemplo 4.4.2.2 *Tomamos el cono $\sigma_3 = (e_2, 2e_1 - e_2)$. Sea $a_1 = e_1^*$, $a_2 = e_1^* + e_2^*$ y $a_3 = e_1^* + 2e_2^*$ el sistema de generadores de S_{σ_3} . Por el isomorfismo θ , tienen una correspondencia con los monomios de Laurent $u_1 = z_1$, $u_2 = z_1 z_2$ y $u_3 = z_1 z_2^2$. La \mathbb{C} -álgebra R_σ se puede representar por:*

$$R_{\sigma_3} = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3] / I_\sigma$$

donde la relación $a_1 + a_3 = 2a_2$ nos proporciona la relación entre coordenadas $u_1 u_3 = u_2^2$. El ideal I_{σ_3} estará generado por la relación $\xi_1 \xi_3 = \xi_2^2$ y la variedad tórica correspondiente al cono σ_3 está representada en \mathbb{C}^3 por el cono cuadrático:

$$X_{\sigma_3} = V(I_{\sigma_3}) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 x_3 = x_2^2\}.$$

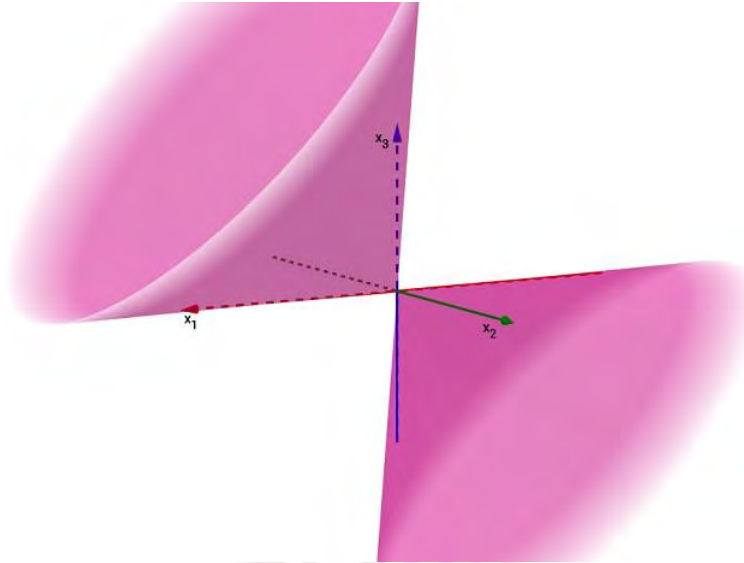


Figura 17: $X_\sigma = V(I_\sigma) = (x_1x_3 - x_2^2)$

Observación 4.4.2.3 *En el caso general, el procedimiento es similar. Sean $\{a_1, \dots, a_k\}$ un sistema de generadores de S_σ cada uno de ellos escritos de la forma $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n) \in S_\sigma$. Por el isomorfismo θ , obtenemos los monomios de Laurent $u_i = z_1^{a_i^1} \dots z_n^{a_i^n}$ representar por:*

$$R_\sigma = \mathbb{C} [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_k] / I_\sigma$$

para un ideal I_σ que determinamos de la siguiente forma. Expresamos las relaciones entre los generadores de S_σ de la forma:

$$\prod_{j=1}^k v_j a_j = \prod_{j=1}^k \mu_j a_j, \text{ con } \mu_j, v_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

de donde obtenemos, gracias al isomorfismo θ , las relaciones monomiales:

$$(z^{a_1})^{v_1} \dots (z^{a_k})^{v_k} = (z^{a_1})^{\mu_1} \dots (z^{a_k})^{\mu_k}$$

con $z^{a_i} = z_1^{a_i^1} \dots z_n^{a_i^n}$, es decir, las relaciones:

$$u_1^{v_1} \dots u_k^{v_k} = u_1^{\mu_1} \dots u_k^{\mu_k}$$

entre las coordenadas y finalmente las relaciones binomiales:

$$\zeta_1^{v_1} \dots \zeta_k^{v_k} = \zeta_1^{\mu_1} \dots \zeta_k^{\mu_k} \tag{4.9}$$

que generan I_σ .

Ahora podemos construir representaciones de variedades tóricas como sigue:

Teorema 4.4.2.4 *Sea σ un cono racional en \mathbf{R}^n y $A = (a_1, \dots, a_k)$ un sistema de generadores de S_σ , la correspondiente variedad tórica X_σ está representada por la variedad afín $V(I_\sigma) \subset \mathbf{C}^k$ donde I_σ es un ideal de $\mathbf{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_k]$ generado por un número finito de relaciones binomiales de la forma (4.9) correspondientes a las relaciones entre los generadores de S_σ .*

Demostración. Ver [1, pag.12]. Q

Veamos ahora que dadas dos representaciones de una variedad tórica, existe un cambio de coordenadas entre ellas que nos permite manejar cualquiera de ellas sin que cambien las propiedades de la variedad.

Ejemplo 4.4.2.5 *Consideremos el cono $\sigma = \{0\}$, el cono dual será $\check{\sigma} = (\mathbf{R}^n)^*$. Podemos elegir diferentes sistemas de generadores de S_σ , por ejemplo:*

$$\{e_1^*, \dots, e_n^*, -e_1^*, \dots, -e_n^*\}$$

tendremos que R_σ será la \mathbf{C} -álgebra:

$$R_\sigma = \mathbf{C}^{\sum} z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1} = \mathbf{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}] / I_\sigma$$

donde

$$I_\sigma = \mathbf{C}[\zeta] (\zeta_1 \zeta_{n+1} - 1) + \dots + \mathbf{C}[\zeta] (\zeta_n \zeta_{2n} - 1)$$

luego, $X_\sigma = V(\zeta_1 \zeta_{n+1} - 1, \dots, \zeta_n \zeta_{2n} - 1)$. Para $n = 1$, la variedad obtenida es una hipérbola compleja con asíntotas en los ejes $\zeta_1 = 0$ y $\zeta_2 = 0$. Se puede proyectar de forma biyectiva sobre el eje $\zeta_2 = 0$ obteniendo \mathbf{C}^* . Del mismo modo, para el caso general, tenemos que X_σ es homeomorfa a

$$T = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n : z_i \neq 0, i = 1, \dots, n\} = (\mathbf{C}^*)^n$$

usando la proyección $\mathbf{C}^{2n} \rightarrow \mathbf{C}^n$ en las primeras n coordenadas.

Observación 4.4.2.6 Recordemos que el conjunto $T = (\mathbb{C}^*)^n$ se llama n -toro algebraico complejo.

Observación 4.4.2.7 Tenemos que el n -toro algebraico complejo cumple las siguientes propiedades:

1. T incluye al toro real ya que $T \cong (S^1)^n \times (\mathbb{R}_{>0})^n$.
2. T es cerrado como subconjunto de \mathbb{C}^{2n} , pero no lo es como subconjunto de \mathbb{C}^n .

Observación 4.4.2.8. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías definidas sobre X tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces para cualquier $A \subset X$ se cumple que $\overline{A^{\tau_2}} \subseteq \overline{A^{\tau_1}}$.

Proposición 4.4.2.9. Sea σ un cono racional en \mathbb{R}^n , la variedad tórica afín X_σ contiene al toro $T = (\mathbb{C}^*)^n$ como un subconjunto abierto de Zariski denso.

Demostración. Considere $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ el conjunto de generadores del monoide S_σ y sea $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^k$ una representación de X_σ . Sea también $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n) \in \mathbb{Z}^n$ y $t \in T$ con $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Además que, el embebimiento $h : T \hookrightarrow X_\sigma$ está definido de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} h : T = (\mathbb{C}^*)^n &\longrightarrow X_\sigma \subset \mathbb{C}^k \\ t = (t_1, \dots, t_n) &\longrightarrow (t^{a_1}, \dots, t^{a_k}), \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $t_i^{a_j} = t_1^{a_j^1} \dots t_n^{a_j^n} \in (\mathbb{C}^*)^n$. Entonces vamos a mostrar que h es una biyección de $(\mathbb{C}^*)^n$ en $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$.

- Está bien definida. Sea $t = (t_1, \dots, t_n) \in T$, tenemos que $t_i \neq 0$ para todo i , luego $t_i^{a_j} \neq 0$ para todo i, j . De aquí, $t_1^{a_j^1} \dots t_n^{a_j^n} \neq 0$, luego $t_1^{a_j^1} \dots t_n^{a_j^n} \in \mathbb{C}^*$, así que $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in (\mathbb{C}^*)^k$ y, dado que a_1, \dots, a_k generan S_σ , finalmente obtenemos que $R_\sigma = \mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_k}] = \mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_k]/I_\sigma$, por consiguiente, $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in V(I_\sigma)$.
- Es inyectiva. Bastará comprobar que podemos construir la aplicación inversa. Sea $a \in S_\sigma$ tal que $a + e_i^* \in S_\sigma$, con e_1^*, \dots, e_n^* base de $(\mathbb{R}^n)^*$. Los monomios de Laurent $z^a = g_0(u)$, $z^{a+e_i^*} = g_i(u)$ están en $R_\sigma = \mathbb{C}[u] \subset \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Sea $t = (t_1, \dots, t_n) \in$

T con $h(t) = x \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$, entonces $g_i(h(t)) = t_i t^a = t_i g_0(h(t))$, luego $t_i = g_i(h(t))/g_0(h(t)) = g_i(x)/g_0(x)$ (observemos que $g_0(h(t)) \neq 0$ pues $t \in T$).

- Es subyectiva. Sea $x \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$, existe $(g_1(x)/g_0(x), \dots, g_n(x)/g_0(x)) : h(g_1(x)/g_0(x), \dots, g_n(x)/g_0(x)) = x$ (tenemos que $g_0(x) \neq 0, g_i(x) \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$, porque $x \in (\mathbb{C}^*)^k$).

Las condiciones de continuidad para que h sea un homeomorfismo se cumplen porque la aplicación h está definida por monomios. Así, que para probar que $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ es abierto, basta ver que $(\mathbb{C}^*)^n$ es abierto en \mathbb{C}^n , lo cual es cierto porque $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_1, \dots, x_n = 0\} = \mathbb{C}^n \setminus V(x_1 \dots x_n)$.

Además, tenemos que en la topología usual de \mathbb{C}^k , la adherencia $\overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{usual} = X_\sigma$ y, dado que la topología usual de \mathbb{C}^k es más fina que la topología de Zariski en \mathbb{C}^k , por la Observación 4.4.2.8 tendremos que $\overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{usual} \subseteq \overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{Zariski}$, luego $\overline{X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k}^{Zariski} = X_\sigma$ así que $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ es denso en X_σ .

Q

Observación 4.4.2.10. *Esta última proposición explica por qué damos el nombre “tórica” a las variedades tóricas. Gracias a este último resultado, podemos demostrar que las variedades tóricas son irreducibles, lo que nos permitirá afirmar que las variedades tóricas son variedades afines en \mathbb{C}^n .*

Proposición 4.4.2.11. *Las variedades tóricas son irreducibles.*

Demostración. La demostración de esta proposición será en dos partes; veamos,

- Primera parte: para esta parte iniciaremos la prueba, haciendo notar que dada una variedad tórica X_σ , entonces $(\mathbb{C}^*)^n \cap X_\sigma$ es irreducible en X_σ . En efecto, por la Proposición 1.1.13, demostrar que $(\mathbb{C}^*)^n \cap X_\sigma$ sea irreducible en X_σ es equivalente a demostrar que $(\mathbb{C}^*)^n$ sea irreducible en \mathbb{C}^n . Ahora bien, debido a la Proposición 1.1.13 y en base al Ejemplo 4.4.2.5, mostrar que $(\mathbb{C}^*)^n$ sea irreducible en \mathbb{C}^n es equivalente a probar que $V(\xi_1 \xi_{n+1}, \dots, \xi_n \xi_{2n} - 1)$ sea irreducible en \mathbb{C}^{2n} . Debido a lo observado en el Ejemplo 4.4.2.5, para el ideal $I_\sigma = (\xi_1 \xi_{n+1} - 1, \dots, \xi_n \xi_{2n} - 1) \subset$

$\mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}]$ tenemos que el anillo coordinado $R_\sigma = \mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}]/I_\sigma$ es de la forma $R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ que es un anillo conmutativo y dominio de integridad, por lo tanto por la Proposición 1.1.11, tenemos que I_σ es un ideal primo, y por la Proposición 1.1.12, tenemos que $V(\zeta_1\zeta_{n+1} - 1, \dots, \zeta_n\zeta_{2n} - 1)$ es irreducible en \mathbb{C}^{2n} .

- Segunda parte: ahora mostraremos que dado cualquier conjunto Y irreducible, entonces su adherencia \bar{Y} también es irreducible. Por reducción al absurdo suponga lo contrario, es decir \bar{Y} no es irreducible. Entonces $\bar{Y} = Y_1 \cup Y_2$ con Y_1, Y_2 subconjuntos propios de \bar{Y} cerrados en \bar{Y} . Por lo tanto tenemos que $Y \subseteq \bar{Y} = Y_1 \cup Y_2$, luego $Y \subseteq Y_1$ o $Y \subseteq Y_2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Y \subseteq Y_1$. En consecuencia tendremos que $Y \subseteq Y_1 \subseteq \bar{Y}$, pero aplicando adherencias, obtenemos que $\bar{Y} \subseteq \bar{Y}_1 \subseteq \bar{Y}$, es decir, que $Y_1 = \bar{Y}_1 = \bar{Y}$, lo cual contradice que Y_1 sea subconjunto propio, así que Y debe ser irreducible.

Por último, dado que $(\mathbb{C}^*)^n \cap X_\sigma$ es irreducible y su adherencia es X_σ , tenemos que X_σ es irreducible.

Q

Ejemplo 4.4.2.12. Para los conos bidimensionales del Ejemplo 4.1.9, veamos cuales son los embebimientos o incrustaciones correspondientes según la Proposición 4.4.2.9.

- Para el cono σ_1 tenemos que S_{σ_1} está generado por los vectores $\{e_1^*, e_2^*, -e_2^*\}$, luego el embebimiento o incrustación del toro en X_{σ_1} está dado por $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2, t_2^{-1})$.
- Para el cono σ_2 tenemos que S_{σ_2} está generado por los vectores $\{e_1, e_2\}$, luego el embebimiento del toro en X_{σ_2} está dado por $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2)$.
- Para el cono σ_3 tenemos que S_{σ_3} está generado por los vectores $\{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$, luego el embebimiento del toro en X_{σ_3} está dado por $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2)$.

Definición 4.4.2.13. Dado un anillo R , definimos la dimensión (de Krull) de R (denotada por $\dim R$) como el supremo de todos los enteros n tal que existe una cadena $p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n$ de ideales primos distintos de R . Esto implica decir que para R_V , la $\dim R_V = \dim V$.

Corolario 4.4.2.14. Si σ es un cono racional en \mathbf{R}^n , entonces $\dim X_\sigma = n$.

Demostración. A consecuencia de la Proposición 4.4.2.9, tenemos que $(\mathbf{C}^*)^n$ es abierto denso en \mathbf{C}^n . Luego la dimensión de $(\mathbf{C}^*)^n$ es n debido a la Proposición 2.3.4. Similarmente, dado un cono $\sigma \in \mathbf{R}^n$, tenemos que $(\mathbf{C}^*)^n \cap X_\sigma$ es abierto denso en X_σ , luego la dimensión de X_σ es n . Q

Ejemplo 4.4.2.15. Sea $\sigma_2 \subset \mathbf{R}^2$ el cono del Ejemplo 4.1.4, entonces S_{σ_2} está generado por $\{e_1^*, e_2^*\}$, luego $R_{\sigma_2} = \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2]$. Por lo tanto, $I_{\sigma_2} = \{0\}$ y $X_{\sigma_2} = \mathbf{C}^2$.

Ejemplo 4.4.2.16. Sea $\sigma_1 \subset \mathbf{R}^2$ el cono $\sigma_1 = (e_1)$, entonces S_{σ_1} está generado por $\{e_1^*, e_2^*, -e_2^*\}$, luego $R_{\sigma_1} = \mathbf{C}[u_1, u_2, u_3]$ con $u_2 = u_3^{-1}$, es decir, $R_{\sigma_1} = \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]/(\zeta_2\zeta_3 - 1)$. Por lo tanto, $I_{\sigma_1} = (\zeta_2\zeta_3 - 1)$ y $X_{\sigma_1} = \mathbf{C}_{\zeta_1} \times \mathbf{C}_{\zeta_2}^*$.

Ejemplo 4.4.2.17. Los ejemplos anteriores se puede generalizar de la manera siguiente.

Sea $\sigma \subset \mathbf{R}^n$ el cono generado por los vectores $\{e_1, \dots, e_p\}$ con $p \leq n$. Entonces S_σ está generado por $\{e_1^*, \dots, e_p^*, e_{p+1}^*, \dots, e_n^*, -e_{p+1}^*, \dots, -e_n^*\}$, luego $R = \mathbf{C}[z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, z_{p+1}^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]$ y $X_\sigma = \mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^*)^{n-p}$.

Ejemplo 4.4.2.18. Sea un cono $\sigma \subset \mathbf{R}^3$ generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_3 - e_2\}$, tendremos que $S_\sigma = (e_1^*, e_2^*, e_1^* + e_2^*, e_3^* + e_2^*)$, luego $R_\sigma = \mathbf{C}[u_1, u_2, u_3, u_4]$ con $u_1u_4 = u_2u_3$, es decir, $R_\sigma = \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4]/(\zeta_1\zeta_4 - \zeta_2\zeta_3)$. Por lo que obtenemos una variedad tórica afín $X_\sigma = V(\zeta_1\zeta_4 - \zeta_2\zeta_3)$, que por la Proposición 4.4.2.9, contiene al toro $(\mathbf{C}^*)^3$ como un abierto de Zariski denso.

Ejemplo 4.4.2.19. Ahora veamos un ejemplo donde no siempre es necesario partir de un cono σ para construir una variedad tórica. Por ejemplo, sea $S = (2, 3) \subset \mathbf{Z}$ el monoide generado por los elementos 2 y 3, tenemos que la \mathbf{C} -álgebra que obtenemos a partir de dicho monoide es $R = \mathbf{C}[u_1, u_2]$ con $u_1^3 = u_2^2$, es decir, $R = \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2]/(\zeta_1^3 - \zeta_2^2)$. De aquí, obtenemos la variedad tórica afín $X = V(\zeta_1^3 - \zeta_2^2)$, que por la Proposición

(4.4.2.9), contiene al toro \mathbb{C}^* como abierto Zariski denso.

Por último, antes de finalizar este capítulo, vamos a definir el concepto de morfismo entre variedades tóricas que usaremos más adelante.

Definición 4.4.2.20. Sea $\phi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^m$ una aplicación monomial (es decir, toda componente no nula de ϕ es un monomio con coordenadas en \mathbb{C}^k), y sean $X_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^k$ y $X_{\sigma'} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ variedades afines tóricas. Si $\phi(X_\sigma) \subset X_{\sigma'}$, entonces la aplicación $\phi = \phi|_{X_\sigma}$ es un morfismo llamado morfismo tórico afín de X_σ en $X_{\sigma'}$. Si ϕ es biyectivo y su aplicación inversa $\phi^{-1} : X_{\sigma'} \rightarrow X_\sigma$ es también un morfismo tórico, entonces llamamos a ϕ un isomorfismo tórico y decimos que X_σ y $X_{\sigma'}$ son isomorfos, escrito $X_\sigma \cong X_{\sigma'}$. Si $\sigma = \sigma'$, llamaremos a ϕ un cambio de coordenadas.

Lema 4.4.2.21 Si $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$ y $R_{\sigma'} = \mathbb{C}[v_1, \dots, v_l]$ son dos representaciones de R_σ , entonces existe un cambio de coordenadas entre (u_1, \dots, u_k) y (v_1, \dots, v_l) .

Demostración. Sea $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ los sistemas de generadores del monoide S_σ tales que $u_i = z^{a_i}$ y $v_j = z^{b_j}$. Dados A y B , se puede expresar los elementos de un sistema generador como combinaciones lineales de los elementos del otro. De esta manera, $b_j = \sum_{i=1}^k \lambda_{ij} a_i$ con $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Esto conduce, mediante el isomorfismo θ , a que $v_j = z^{b_j} = z^{\sum_{i=1}^k \lambda_{ij} a_i} = z^{\lambda_{j1} a_1} \dots z^{\lambda_{jk} a_k} = u_1^{\lambda_{j1}} \dots u_k^{\lambda_{jk}}$, es decir, al cambio de coordenadas que buscábamos. Q

El desarrollo de este capítulo es gran parte gracias al aporte encontrado en [15]. Sin embargo también destacamos [2] y [11], por sus aportes significativos.

Capítulo 5

5 Variedades tóricas

Al igual que las variedades algebraicas proyectivas se pueden recubrir mediante variedades algebraicas afines, también podemos construir variedades tóricas proyectivas que tendrán un recubrimiento abierto por variedades tóricas afines.

En este capítulo a partir de un cono construiremos variedades algebraicas proyectivas, las cuales son variedades algebraicas más generales que la variedad tóricas afines.

5.1 Variedades algebraicas proyectivas

Antes de empezar con el proceso de construcción de *variedades tóricas proyectivas*, vamos a recordar algunos resultados sobre variedades algebraicas proyectivas.

Empecemos recordando que el n -espacio proyectivo sobre \mathbb{C} es el conjunto de clases de equivalencia de elementos $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ bajo una relación de equivalencia, es decir, $(a_0, \dots, a_n) \approx (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. El cual denotaremos por $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ o simplemente \mathbb{P}^n .

Ahora, los elementos de \mathbb{P}^n se llaman puntos, y dado un punto $P \in \mathbb{P}^n$, llamaremos a cualquier $(n + 1)$ -tupla (a_0, \dots, a_n) dentro de la clase de equivalencia P conjunto de coordenadas homogéneas de P y denotaremos $P = [a_0 : \dots : a_n]$.

Por otro lado, para el caso proyectivo, no es posible conseguir una definición similar al de un conjunto algebraico afín; sin embargo, dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[\zeta_0, \dots, \zeta_n] = \mathbb{C}[\zeta]$, para que defina una función sobre \mathbb{P} , necesitamos que $f(a_0, \dots, a_n) = f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Gracias a esta observación podemos dar la siguiente definición:

Definición 5.1.1. Sea $f \in \mathbb{C}[\zeta]$, decimos que $f = \sum_{\text{finita}} a_{\zeta_0^{d_0} \dots \zeta_n^{d_n}} \zeta_0^{d_0} \dots \zeta_n^{d_n}$ es un polinomio homogéneo de grado d si para cada monomio $a_{\zeta_0^{d_0} \dots \zeta_n^{d_n}} \zeta_0^{d_0} \dots \zeta_n^{d_n}$ se cumple que $d_0 \dots d_n = d$.

De esta forma, dado un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[\zeta]$, tenemos que $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$ y así, la propiedad de que f se anule depende sólo de la clase de equivalen-

cia de (a_0, \dots, a_n) . Así, f puede definir una función de \mathbf{P}^n en $\{0, 1\}$ de forma que para cada punto $P \in \mathbf{P}^n$, con coordenadas homogéneas (a_0, \dots, a_n) , $f(P) = 0$ si $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ y $f(P) = 1$ si $f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$. Esto ya nos permite definir el concepto de *conjunto algebraico proyectivo*:

Definición 5.1.2. *Sea T un subconjunto de polinomios homogéneos de $\mathbf{C}[\xi]$, el conjunto*

$$V(T) = \{P \in \mathbf{P}^n : f(P) = 0, \forall f \in T\}$$

se llama el conjunto algebraico proyectivo definido por T .

Un subconjunto X de \mathbf{P}^n se dice que es un conjunto algebraico proyectivo si existe un subconjunto S de polinomios homogéneos de $\mathbf{C}[\xi]$ tal que $X = V(S)$.

Busquemos definir una topología similar al caso afín, ello será posible ya que los conjuntos algebraicos proyectivos cumplen lo siguiente.

Observación 5.1.3. *La unión de dos conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo. La intersección de una familia finita de conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo. El conjunto vacío y el conjunto \mathbf{P}^n son conjuntos algebraicos proyectivos. La prueba de esta observación es similar a la que se da para el caso afín.*

Definición 5.1.4. *Definimos la topología de Zariski sobre \mathbf{P}^n tomando como conjuntos abiertos los complementarios de los conjuntos algebraicos en \mathbf{P}^n .*

Definida una topología sobre conjuntos algebraicos proyectivos, podemos aplicar las definiciones de conjunto irreducible y dimensión de un espacio topológico.

Definición 5.1.5. *Una variedad algebraica proyectiva es un subconjunto cerrado irreducible en \mathbf{P}^n respecto de la topología de Zariski. Un subconjunto abierto de una variedad proyectiva es una variedad cuasi-proyectiva. La dimensión de una variedad proyectiva o cuasi-proyectiva es su dimensión como espacio topológico.*

Ahora, veremos cómo podemos dar un recubrimiento abierto de variedades algebraicas proyectivas \mathbb{P}^n mediante variedades algebraicas afines. Sea el abierto Zariski $U_i = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n : a_i \neq 0\}$, tenemos que \mathbb{P}^n está recubierto por los U_i con $i = 0, \dots, n$. Ahora, definimos $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\varphi_i([a_0 : \dots : a_n])$ es el punto $(a_0/a_i, \dots, a_n/a_i) \in \mathbb{C}^n$. Notemos que la aplicación φ está bien definida porque $a_i \neq 0$ y $(\lambda a_j) / (\lambda a_i) = a_j/a_i$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Proposición 5.1.6. *La aplicación φ es un homeomorfismo de U_i con su topología inducida en \mathbb{C}^n con la topología de Zariski.*

Demostración. Ver [8, pag. 10].

Q

Ahora, para cualquier variedad proyectiva en \mathbb{P}^n , podemos dar un recubrimiento abierto mediante variedades afines de la manera siguiente:

Corolario 5.1.7. *Sea Y una variedad proyectiva en \mathbb{P}^n , entonces Y está recubierto por los conjuntos abiertos Zariski $Y \cap U_i$ con $i = 0, \dots, n$, que son homeomorfos a variedades algebraicas afines vía la aplicación φ_i que hemos definido antes. Ver [8].*

Demostración. Ver [8, pag.11].

Q

Los resultados de esta sección se podrá encontrar en mas detalle en [8, pag. 8-11].

5.2 Abanicos

A continuación veamos el proceso de construir variedades proyectivas a partir del pegado de variedades tóricas afines mediante cambios de coordenadas adecuadas. En consecuencia empezaremos con la definición de abanico.

Definición 5.2.1. *Un abanico Σ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n es una unión finita de conos tales que:*

- Todo cono de Σ es fuertemente convexo, poliédrico y racional.
- Toda cara de un cono de Σ es cono de Σ .

• Si σ y σ^j son conos de Σ , entonces $\sigma \cap \sigma^j$ es una cara común de σ y σ^j .

Cabe señalar que un abanico dual es el conjunto de conos duales de un abanico Σ y lo denotaremos Σ^\vee . Todos los conos que se consideren en la tesis, serán fuertemente convexos, poliédricos y racionales, salvo que se diga lo contrario.

Ejemplo 5.2.2. Veamos algunos ejemplos de abanicos en \mathbb{R}^2 , donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica.

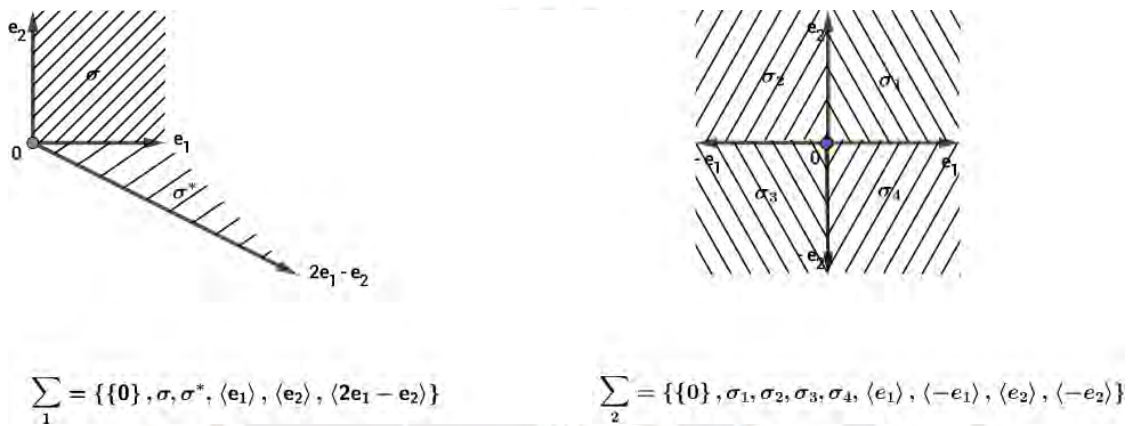


Figura 18: Abanicos : Σ_1, Σ_2

Antes de describir el proceso de pegado de variedades tóricas afines, vamos a destacar un isomorfismo natural existente entre la variedad tórica X_τ y un subconjunto abierto de X_σ , siendo τ cara de σ , que nos permitirá describir la aplicación de pegado. Sea τ una cara de un cono σ , entonces $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$ donde $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$ y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$. Es decir, que el monoide S_τ se obtiene a partir del monoide S_σ añadiendo el generador $-\lambda$. Como λ puede ser elegido como un elemento de un conjunto de generadores $\{a_1, \dots, a_k\}$ de S_σ , podemos asumir que $\lambda = a_k$ y denotamos $a_{k+1} = -\lambda$. Para obtener las relaciones entre los generadores de S_τ basta considerar las relaciones entre los generadores de S_σ añadiendo la relación $a_k + a_{k+1} = 0$.

Esta última relación se corresponde con la relación multiplicativa $u_k u_{k+1} = 1$ en R_τ . Como los generadores u_i de R_σ y R_τ son precisamente las funciones coordenadas de las variedades tóricas X_σ y X_τ , tenemos que la proyección

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

identifica X_τ con el subconjunto abierto de X_σ definido por $u_k \neq 0$. Este resultado se puede escribir como:

Lema 5.2.3. *Existe una identificación natural $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$.*

Demostración. Ver [11, pag.51]. Q

Ahora podemos construir la aplicación de pegado entre variedades tóricas afines. Supongamos que τ es la cara común a dos conos σ y σ^j contenidos en el abanico Σ . El Lema 5.2.3 nos permite pegar X_σ y X_{σ^j} a lo largo de su parte común X_τ de la siguiente forma: Sean (u_1, \dots, u_k) y (v_1, \dots, v_l) las coordenadas sobre X_σ y X_{σ^j} respectivamente. Por el Lema 5.2.3, podemos dar la siguiente cadena de homeomorfismos:

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma, \sigma^j} : X_\sigma \setminus \{u_k = 0\} &\longrightarrow X_\tau &\longrightarrow X_\tau &\longrightarrow X_{\sigma^j} \setminus \{v_l = 0\} \\ (u_1, \dots, u_k) &\longmapsto (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) &\longmapsto (v_1, \dots, v_l, v_{l+1}) &\longmapsto (v_1, \dots, v_l) \end{aligned}$$

Tenemos en cuenta que dentro de X_τ es posible hacer el cambio de coordenadas $z^{b_j} = v_j = u_1^{\lambda_1^j} \dots u_k^{\lambda_k^j} = z^{\lambda_1^j a_1} \dots z^{\lambda_k^j a_k}$ con $j = 1, \dots, l$. Finalmente, ya podemos dar la definición de variedad tórica proyectiva.

Definición 5.2.4. Sea Σ un abanico en \mathbb{R}^n . Consideramos la unión disjunta $\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ donde dos puntos $x \in X_\sigma$ y $x^j \in X_{\sigma^j}$ son identificados si $\phi_{\sigma, \sigma^j}(x) = x^j$. El espacio resultante X^Σ se llama variedad tórica proyectiva.

Observación 5.2.5. El espacio X^Σ de la Definición 5.2.4 es un espacio topológico dotado de un recubrimiento abierto formado por las variedades tóricas afines X_σ con $\sigma \in \Sigma$. Esto se debe a que cada variedad tórica afín X_σ con $\sigma \in \Sigma$ está contenida en $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{P}^k \cap U_i$. Luego, dado que $X^\Sigma \subseteq \mathbb{P}^K$, tendremos que $X^\Sigma \cap U_i = X_\sigma$ será abierto en X_σ . Por esta razón podemos afirmar también que X^Σ es una variedad algebraica proyectiva.

5.3 Ejemplos de variedades tóricas

Vamos a ver algunos ejemplos de variedades tóricas.

Ejemplo 5.3.1. Denotaremos por $[t_0 : t_1 : t_2]$ las coordenadas homogéneas del espacio proyectivo \mathbb{P}^2 . Podemos dar un recubrimiento de dicho espacio por las siguientes cartas:

- $U_0 = \{[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^2 : t_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2 = \left(\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0} = (z_1, z_2) : t_0 f = 0 \right) = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$
- $U_1 = \{[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^2 : t_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2 = \left(\frac{t_0}{t_1}, \frac{t_2}{t_1} = (z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2) : t_1 f = 0 \right) = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$
- $U_2 = \{[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^2 : t_2 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2 = \left(\frac{t_0}{t_2}, \frac{t_1}{t_2} = (z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}) : t_2 f = 0 \right) = \mathbb{C}_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$

Ahora vamos a considerar en \mathbb{R}^2 el abanico Σ siguiente:

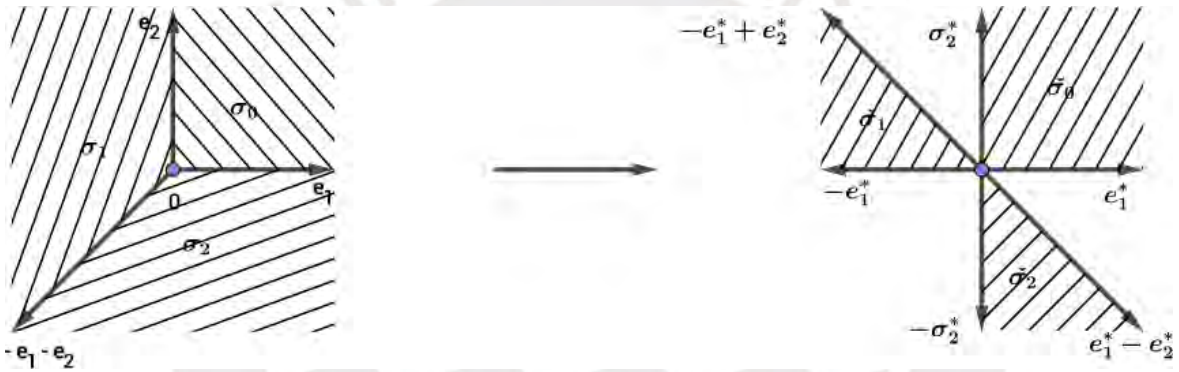


Figura 19: $\Sigma = \{\{0\}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, (e_1), (e_2), (-e_1 - e_2)\}$

Para cada cono $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ del abanico, podemos construir las siguientes variedades tóricas afines:

- S_{σ_0} está generado por $\{e_1^*, e_2^*\}$, luego $R_{\sigma_0} = \mathbb{C}[z_1, z_2]$ y $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$.
- S_{σ_1} está generado por $\{e_1^*, -e_1^* + e_2^*\}$, luego $R_{\sigma_1} = \mathbb{C} \left[\frac{z_1}{z_2}, z_1 z_2^{-1} \right]$ y $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$.
- S_{σ_2} está generado por $\{-e_2^*, e_1^* - e_2^*\}$, luego $R_{\sigma_2} = \mathbb{C} \left[\frac{z_1}{z_2}, z_1 z_2^{-1} \right]$ y $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})}^2$.

Veamos cómo pegamos X_{σ_0} con X_{σ_1} . Consideramos la cara común a σ_0 y σ_1 , $\tau = \sigma_0 \cap \sigma_1 = (e_2)$. Con τ considerada como cara de σ_0 $\tau = \sigma_0 \cap (e_1^*)^\perp$, tenemos

$$\begin{array}{ccc}
S_{\sigma_1} = (-e_1^*, e_2^*) & \longleftrightarrow & S_{\sigma_0} = (e_1^*, e_2^*) \\
\ddagger & & \ddagger \\
S_{\sigma_2} = (-e_1^*, -e_2^*) & \longleftrightarrow & S_{\sigma_3} = (e_1^*, -e_2^*)
\end{array}$$

las consecuentes \mathbb{C} -álgebras:

$$\begin{array}{ccc}
R_{\sigma_1} = \mathbb{C}^{\sum_{z_1^{-1}, z_2}} & \longleftrightarrow & R_{\sigma_0} = \mathbb{C}[z_1, z_2] \\
\ddagger & & \ddagger \\
R_{\sigma_2} = \mathbb{C}^{\sum_{z_1^{-1}, z_2^{-1}}} & \longleftrightarrow & R_{\sigma_3} = \mathbb{C}^{\sum_{z_1, z_2^{-1}}}
\end{array}$$

y, por último, las variedades tóricas afines siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2)}^2 & \longleftrightarrow & X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2 \\
\ddagger & & \ddagger \\
X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(\bar{z}_1^{-1}, \bar{z}_2)}^2 & \longleftrightarrow & X_{\sigma_3} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2^{-1})}^2
\end{array}$$

El pegado de X_{σ_0} y X_{σ_1} da como resultado $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ con coordenadas $([t_0 : t_1], z_2)$ donde $z_1 = t_0/t_1$. El pegado de X_{σ_2} y X_{σ_3} da como resultado $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ con coordenadas $([t_0 : t_1], z_2^{-1})$ donde $z_1 = t_0/t_1$. Pegando los dos $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ obtenidos, construimos $X^{\Sigma} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con coordenadas $([t_0 : t_1], [s_0 : s_1])$ donde $z_2 = s_0/s_1$.

Ejemplo 5.3.4. $X^{\Sigma} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ se puede generalizar a $\mathbb{P}^1 \times \binom{n}{!!} \times \mathbb{P}^1$, con n entero positivo, considerando, en \mathbb{R}^n , el abanico generado por los vectores $\{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\}$, es decir, cada $\sigma_i \in \sum$ es de la forma $\sigma_i = ((-1)^{u_1} e_1, \dots, (-1)^{u_n} e_n)$ recorriendo cada $(u_1, \dots, u_n) \in \{0, 1\}^n$. Tenemos que las variedades tóricas afines X_{σ_i} son conjuntos de la forma $\mathbb{C} \times \binom{i-1}{!} \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \times \binom{n-i}{!} \times \mathbb{C}$ y pegados juntos permiten obtener $X^{\Sigma} = \mathbb{P}^1 \times \binom{n}{!!} \times \mathbb{P}^1$.

El desarrollo de este capítulo es gran parte gracias al aporte encontrado en [1]. Sin embargo también destacamos [2] y [11], por sus aportes significativos.

Capítulo 6

6 La Acción tórica y sus órbitas

En este capítulo, definiremos la *acción del toro* $(\mathbf{C}^*)^n$ en X^Σ ; y verificaremos como es que la acción del toro proporciona mucha información sobre la estructura de X^Σ . Por otro lado también estudiaremos cómo las órbitas de la X^Σ están incrustadas en el toro, y que además existe una correspondencia 1-1 entre órbitas y conos del abanico.

En capítulos posteriores usaremos las órbitas para describir la resolución de las singularidades en X^Σ .

Como una nota histórica, fue la teoría de los grupos algebraicos (variedades que actúan en ellos mismos como un grupo) que dio lugar al estudio de variedades tóricas en la década de 1970. En algunos aspectos, el toro incrustado y su acción asociada en X^Σ es la definición característica de variedades tóricas.

6.1 La acción tórica

El toro $T = (\mathbf{C}^*)^n$ es un grupo con la operación de multiplicación componente a componente. La acción del toro sobre cualquier variedad tórica X_σ se describe de la siguiente forma.

Definición 6.1.1. Sea $\{a_1, \dots, a_k\}$ un sistema de generadores del monoide S_σ en \mathbf{R}^n . Escribimos para cada a_i con coordenadas $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ con $a_i^j \in \mathbf{Z}$ y cada $t \in T$ con coordenadas $t = (t_1, \dots, t_n)$ con $t_j \in \mathbf{C}$. Un punto $x \in X_\sigma$ tendrá coordenadas $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{C}^k$. La aplicación dada por:

$$\begin{aligned} T \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longrightarrow tx = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) \end{aligned}$$

donde $t_i^a = a_i^1 t_1^{a_i^1} \dots a_i^n t_n^{a_i^n} \in \mathbf{C}^*$ es una acción de grupo llamada la acción tórica (natural) sobre X_σ .

Observación 6.1.2. La acción está bien definida.

Demostración. En efecto, será suficiente mostrar que dados $(x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma$ y (t_1, \dots, t_n)

$\in T$, entonces $(t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k) \in X_\sigma$, es decir, que cumpla las relaciones binomiales de I_σ .

Sea entonces $\zeta^v - \zeta^u \in I_\sigma$, donde $\zeta^v = \zeta_1^{v_1} \dots \zeta_k^{v_k}$ y $\zeta^u = \zeta_1^{u_1} \dots \zeta_k^{u_k}$ queremos ver que

$$(x_1 t^{a_1})^{v_1} \dots (x_k t^{a_k})^{v_k} = (x_1 t^{a_1})^{u_1} \dots (x_k t^{a_k})^{u_k},$$

es decir, que

$$(t^{a_1 v_1} \dots t^{a_k v_k}) \begin{pmatrix} x_1^{v_1} \\ \vdots \\ x_k^{v_k} \end{pmatrix} = (t^{a_1 u_1} \dots t^{a_k u_k}) \begin{pmatrix} x_1^{u_1} \\ \vdots \\ x_k^{u_k} \end{pmatrix}.$$

Esta última igualdad es cierta, ya que $(x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma$ lo cual implica que $x_1^{v_1} \dots x_k^{v_k} = x_1^{u_1} \dots x_k^{u_k}$ y que por la Proposición 4.4.2.9, se tiene que $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$, luego $(t^{a_1 v_1}, \dots, t^{a_k v_k}) = (t^{a_1 u_1}, \dots, t^{a_k u_k})$. Q

Teorema 6.1.3. *La acción tórica es compatible con la aplicación de cambio de coordenadas entre diferentes representaciones de una variedad tórica.*

Demostración. Sea σ un cono en \mathbb{R}^n , elegimos dos sistemas de generadores a_1, \dots, a_k y b_1, \dots, b_l de S_σ . Por el Lema 4.4.2.21, existe un cambio de coordenadas entre las representaciones $V(I_\sigma) \subseteq \mathbb{C}^k$ y $V(I_\sigma^j) \subseteq \mathbb{C}^l$ de la variedad tórica X_σ . Es decir,

$$\varphi : X_{\sigma^j} \rightarrow X_{\sigma^{jj}},$$

donde X_{σ^j} es una representación de la variedad tórica afín X_σ con relación al sistema de generadores a_1, \dots, a_k y $X_{\sigma^{jj}}$ es la representación con relación al sistema de generadores b_1, \dots, b_l . Recordemos que el cambio de coordenadas φ venía dado de la siguiente forma.

Sea $b_j = \lambda_1^j a_1 + \dots + \lambda_k^j a_k$ con $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\varphi(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_l)$, entonces $y_j = x_1^{\lambda_1^j} \dots x_k^{\lambda_k^j}$.

Observamos también que $\varphi(t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k) = (t^{b_1}y_1, \dots, t^{b_l}y_l)$, es decir, que la acción tórica es compatible con el cambio de coordenadas. En efecto, ya que para cada $j = 1, \dots, l$, tenemos que $t^j y_j = t^{b_j} x_1^{\lambda_1^j} \dots x_k^{\lambda_k^j} = t^{a_1 \lambda_1^j + \dots + a_k \lambda_k^j} x_1^{\lambda_1^j} \dots x_k^{\lambda_k^j} = t^{a_1 \lambda_1^j} \dots t^{a_k \lambda_k^j} x_1^{\lambda_1^j} \dots x_k^{\lambda_k^j}$. Q

Observación 6.1.4. *El toro embebido o incrustado $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ en la variedad X_σ es una órbita de la acción natural del toro llamada la gran órbita. Se puede comprobar fácilmente que se corresponde con la órbita del punto $(1, \dots, 1) \in X_\sigma$.*

Ahora, dado un abanico Σ , queremos ver que las acciones tóricas naturales sobre cada

X_σ con $\sigma \in \Sigma$ se pueden extender a una acción tórica natural sobre X^Σ .

Ejemplo 6.1.5 De acuerdo al Ejemplo 4.3.8 y 4.4.2.16, el cono $\sigma_1 = (e_1) \subset \mathbb{R}^2$, su dual $\check{\sigma}_1 = (e^*, e^*, -e^2)_*$ y su correspondiente monoide S_{σ_1} generado por $\{e^*, e^*, -e^2\}$ tiene como anillo de coordenadas $R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] = \mathbb{C}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]/I_{\sigma_1}$, donde $u_1 = z^{e^*}$, $u_2 = z^{e^2}$, $u_3 = z^{-e^2}$ del cual obtenemos la relación siguiente $u_3 = u_2^{-1}$; esto es que $I = (\zeta_2\zeta_3 - 1)$. Luego la correspondiente variedad tórica afín es $V(I_{\sigma_1}) = X_{\sigma_1}$. Ahora, por la proposición 4.4.2.10, la variedad contiene una copia 2-toro algebraico como un abierto de Zariski denso, correspondiente a la imagen de la aplicación siguiente

$$\begin{aligned} h : (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow X_\sigma \subset \mathbb{C}^k \\ t = (t_1, t_2) &\longrightarrow (t^{e^*}, t^{e^2}, t^{-e^2}) = (t_1, t_2, t_2^{-1}) \end{aligned}$$

Por otro lado, también es posible observar otra manera de representar la variedad tórica afín X_{σ_1} , lo cual es mediante homeomorfismos $V(I_{\sigma_1}) = X_{\sigma_1} \approx \mathbb{C}_{\zeta_1}^* \times \mathbb{C}_{\zeta_2}^* \supset \mathbb{C}_{\zeta_1}^* \times \mathbb{C}_{\zeta_2}^* = T$, donde T es claramente un 2-toro algebraico. Por último, $T_{(1,1)} = \mathbb{C}_{\zeta_1}^* \times \mathbb{C}_{\zeta_2}^*$ es la gran órbita de X_{σ_1} . Además, de esa órbita, X_{σ_1} posee una T -órbita $T_{(0,1)} = \{0\} \times \mathbb{C}_{\zeta_2}^*$.

Ejemplo 6.1.6 De acuerdo al Ejemplo 4.1.9 y 4.4.2.15 obtenemos el siguiente esquema,

$$\sigma_2 = (e_1, e_2) \succ \check{\sigma}_2 = (e^*, e^*) \succ S_{\sigma_2} = (e^*, e^*) \succ R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[\zeta_1, \zeta_2] \succ X_{\sigma_2} = \mathbb{C}^2$$

y sus respectivas T -órbitas están dadas por:

$$T_{(0,0)} = (0, 0), \quad T_{(1,0)} = \mathbb{C}_{\zeta_1}^* \times \{0\}, \quad T_{(0,1)} = \{0\} \times \mathbb{C}_{\zeta_2}^* \quad \text{y} \quad T_{(1,1)} = \mathbb{C}_{\zeta_1}^* \times \mathbb{C}_{\zeta_2}^*.$$

Ejemplo 6.1.7 De acuerdo al Ejemplo 4.4.2.2 obtenemos el siguiente esquema,

$$\begin{aligned} \sigma_3 = (e_2, 2e_1 - e_2) \succ \check{\sigma}_3 = (e^*, e^* + 2e^2) \succ S_{\sigma_3} = (e^*, e^* + e^2, e^* + 2e^2) \succ R_{\sigma_3} = \\ \mathbb{C}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]/(\zeta_1\zeta_3 - \zeta_2^2) \succ X_{\sigma_3} = V(I_{\sigma_3}) \end{aligned}$$

donde $I_{\sigma_3} = (\zeta_1\zeta_3 - \zeta_2^2)$ y sus respectivas T -órbitas están dadas por:

- Una gran órbita dada por $T_{(1,1,1)} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3; x_1x_3 = x_2^2 \text{ y } x_1x_2x_3 \neq 0\}$
- $T_{(0,0,1)} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3; x_1 = x_2 = 0 \text{ y } x_3 \neq 0\}$

- $T_{(1,0,0)} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3; x_2 = x_3 = 0 \text{ y } x_1 \neq 0\}$
- $T_{(0,0,0)} = \{(0, 0, 0)\}$.

Teorema 6.1.8. Sea \sum un abanico en \mathbf{R}^n , dado un cono $\sigma \in \sum$ y una cara $\tau < \sigma$, la identificación $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$ del Lema 5.2.3 es compatible con la acción tórica natural sobre dichas variedades tóricas.

Demostración. Consideremos a_1, \dots, a_k un sistema de generadores de S_σ con σ un cono del abanico en \mathbf{R}^n . De donde obtenemos las funciones coordenadas (u_1, \dots, u_k) de la variedad torica X_σ .

Si τ es una cara de σ , recuerde también que podemos construir la variedad tórica X_τ con funciones coordenadas (u_1, \dots, u_{k+1}) tal que las relaciones entre las funciones coordenadas de X_τ son las mismas que las de X_σ añadiendo la relación $u_k u_{k+1} = 1$. Además, tenga en

cuenta que por el Lema 5.2.3, existe un morfismo natural ϕ entre $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$.

Ahora bien, dado $t \in \mathbf{C}^{k+1}$ y $x = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in X_\tau$, al aplicar la acción tórica sobre X_τ obtenemos el punto $tx = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_{k+1}} x_{k+1}) \in X_\tau$ con $t^{a_k} x_k t^{a_{k+1}} x_{k+1} = 1$, donde a_1, \dots, a_k es un sistema de generadores de S_σ como indicamos al inicio de la prueba y a_1, \dots, a_{k+1} es un sistema de generadores de S_τ , tal que $u_i = z^{a_i}$. Ahora gracias al morfismo natural ϕ , tenemos que $\phi(tx) = \phi(t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k, t^{a_{k+1}} x_{k+1}) = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) = tx^j \in X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$, donde $x^j = (x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma$. Esto implica decir que la acción tórica es compatible con ambas variedades tóricas afines. Q

Este teorema implica que la acción tórica sobre cada cono de un abanico es compatible con la aplicación de pegado de variedades tóricas afines.

Finalmente, podemos afirmar que:

Corolario 6.1.9. Dado un abanico \sum en \mathbf{R}^n , la acción tórica natural sobre las variedades tóricas afines X_σ para cada $\sigma \in \sum$, inducen una acción natural tórica sobre la variedad tórica X^\sum .

Demostración. Sea $\sigma_1, \sigma_2 \in \sum$ y $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \sum$, considerando la aplicación entre X_{σ_1} y X_{σ_2} dado por $\phi_{\sigma_1, \sigma_2} = \phi_2 \circ f \circ \phi_1$, donde f es la aplicación de cambio de coordenadas

en X_τ , donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 : X_{\sigma_1} \setminus \{u_k = 0\} &\longrightarrow X_\tau \\ (u_1, \dots, u_k) &\longrightarrow (u_1, \dots, u_k, u_k^{-1})^\Sigma \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_2 : X_\tau &\longrightarrow X_{\sigma_2} \setminus \{v_l = 0\} \\ (v_1, \dots, v_l, v_l^{-1})^\Sigma &\longrightarrow (v_1, \dots, v_l), \end{aligned}$$

ahora bien, por el Teorema 6.1.3 y el Teorema 6.1.8 se tiene que dados $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_{\sigma_1} \setminus \{u_k = 0\}$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbf{C}^*)^n$ e $y = (y_1, \dots, y_l) \in X_{\sigma_2} \setminus \{v_l = 0\}$. Entonces, $\phi_{\sigma_1, \sigma_2}(tx) = \varphi_2(f(\varphi_1(tx))) = \varphi_2(f(tx^j))^\Sigma = \varphi_2(f(ty^j))^\Sigma = ty$; donde $x^j = (x_1, \dots, x_k, x_k^{-1})^\Sigma$ y $y^j = (y_1, \dots, y_l, y_l^{-1})^\Sigma$. Por lo tanto, la aplicación considerada al inicio entre variedades tóricas afines es compatible con la acción tórica, induciendo una acción natural sobre una variedad tórica X^Σ . Q

Dado que la acción tórica sobre cualquier variedad tórica está descrita por monomios, podemos afirmar directamente el siguiente resultado.

Teorema 6.1.10. Respecto a la topología usual y la topología de Zariski en \mathbf{C}^k , la acción tórica sobre cualquier variedad tórica X^Σ es continua. La gran órbita es un subconjunto abierto denso, luego cualquier otra órbita está contenida en su clausura.

Demostración. Ver[15]. Q

Dado $\sigma \subset \mathbf{R}^n$ y $\tau < \check{\sigma}$ una cara de $\check{\sigma}$. Sean $a_1, \dots, a_k \in \check{\sigma}$ tal que $\tau = (a_1, \dots, a_k)$, ahora extendemos este sistema a un sistema de generadores a_1, \dots, a_l de S_σ de tal manera que $X_\tau \cong X_\sigma \cap \{u_{k+1} = \dots = u_l = 0\}$, donde $u_i = z^{a_i}$. Ahora, dado $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbf{C}^*)^n$ y $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in X_\sigma \cap \{u_{k+1} = \dots = u_l = 0\} \cong X_\tau$, de donde tenemos que $tx = (t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k, 0, \dots, 0) \in X_\tau \cong X_\sigma \cap \{u_{k+1} = \dots = u_l = 0\}$, es justamente lo que acabamos de indicar que nos lleva al siguiente resultado donde se justifica el adjetivo invariante en las subvariedades tóricas invariantes.

Lema 6.1.11. Toda subvariedad afín tórica X_τ de una variedad tórica afín X_σ es invariante bajo la acción natural del toro sobre X_σ .

Ahora vamos a dar un par de resultados necesarios para poder demostrar que cualquier

variedad tórica se puede expresar como unión disjunta de sus órbitas por la acción tórica natural.

Teorema 6.1.12. *La acción natural del toro sobre una subvariedad tórica invariante X_τ de X_σ está dada por la acción inducida de un subtoro T^j en T .*

Demostración. Sea $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base del retículo N , tal que v_1, \dots, v_r sea una base del espacio vectorial $\mathbf{R}\cdot\tau$ y $\tau \subset \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma}) + (v_1, \dots, v_r)$. En consecuencia, tenemos un sistema de generadores $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_k$ del monoide $\check{\sigma} \cap M$ con $\tau = (a_1, \dots, a_m)$ y $a_i \notin \tau$ para $i \geq m+1$ y las correspondientes coordenadas (u_1, \dots, u_m) y $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_k)$ de las variedades X_τ y X_σ respectivamente. Así, la acción natural del toro de $(\mathbf{C}^*)^r$ sobre X_τ está dada por $s(x_1, \dots, x_m) = (s^{a_1}x_1, \dots, s^{a_m}x_m)$ para $s = (s_1, \dots, s_r) \in (\mathbf{C}^*)^r$. En consecuencia podemos observar que esta acción es claramente compatible con la acción inducida por el subtoro $T^j = \{t \in T : t_{r+1} = \dots = t_n = 1\}$ de T sobre la subvariedad tórica invariante $X_\tau \cong X_\sigma \cap \{u_{m+1} = \dots = u_k = 0\}$. Q

Lema 6.1.13. *Toda subvariedad tórica invariante afín X_τ de X_σ contiene una única órbita O_τ que es relativamente densa en X_τ , es decir, X_τ es la clausura de una órbita. Del mismo modo, toda clausura de una órbita en X_σ es una subvariedad tórica invariante afín X_τ para una única cara τ de $\check{\sigma}$.*

Demostración. Según el texto del lema, mostraremos dos afirmaciones, en efecto.

Veamos la primera afirmación (ie. *Toda subvariedad tórica invariante afín \dots , X_τ es la clausura de una órbita*), sabemos que por el Teorema 6.1.12, la acción natural del toro sobre una subvariedad tórica invariante X_τ de X_σ está dada por la acción inducida de un subtoro T^j de T . Ahora bien, por el Teorema 6.1.10, la gran órbita de la acción inducida por el toro T^j es una órbita abierta densa en X_τ , que será única respecto de estas condiciones, porque cualquier otra órbita no será densa en X_τ dado que estará contenida en el complemento de la gran órbita, que es un cerrado.

Ahora veamos para la segunda afirmación (ie. *Toda clausura de una órbita en X_σ es una subvariedad tórica invariante afín X_τ* ...), pasemos a descomponer el cono $\check{\sigma}$ de la siguiente forma.

Es posible encontrar una base $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ del retículo \mathbf{Z}^n tal que $\{v_1, \dots, v_p\}$ es

una base de $\gamma \cap \mathbb{Z}^n$ con $\gamma = \check{\sigma} \cap (-\check{\sigma})$. Ahora, consideramos el subespacio lineal U^j generado por $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$. Con esto, consideramos $V = \check{\sigma} \cap U^j$ que es un cono racional cumpliendo $\check{\sigma} = \gamma + V$. Si es necesario, modificamos la base $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ de $U^j \cap \mathbb{Z}^n$ de forma que podamos asumir que $V \subset (v_{p+1}, \dots, v_n)$. Toda cara de $\check{\sigma}$ se puede escribir de forma única como $\tau = \gamma + \tau_0$ con $\tau_0 = \tau \cap V$ una cara de V . Sea $A(V) = \{a_{p+2}, \dots, a_k\}$ el único sistema mínimo de generadores de $V \cap \mathbb{Z}^n$ (ver Lema 4.3.10), entonces $A(\tau_0) = A(V) \cap \tau$ es el sistema mínimo de generadores de $\tau_0 \cap \mathbb{Z}^n$.

Ahora consideremos un punto $x \in X_\sigma$ que no esté en la clausura de una órbita. Así, respecto del sistema coordenado $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_k)$ correspondiente al sistema mínimo de generadores $A(\check{\sigma}) = \{a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_k\}$ con $a_i = v_i$ para $i \geq p+2$ y $a_{p+1} = -(a_1 + \dots + a_p)$, hay coordenadas $x_i \neq 0$ para algún $i \geq p+2$ (dado que u_i es inversible para $i \leq p+1$), luego $A(x) = \{a_i \in A(\check{\sigma}) : x_i \neq 0, i \geq p+2\}$ es no vacío. Entonces, $\tau_0 = V \cap V$ (con V el espacio vectorial generado por $A(x)$) es la cara más pequeña de V conteniendo $A(x)$. Tenemos que $A(x) = A(\tau_0)$. Finalmente, $\tau = \gamma + \tau_0$ tiene la propiedad de que el punto x está en la órbita abierta densa de X_τ , luego X_τ es la clausura de la órbita Tx . Q

Observación 6.1.14 Si fijamos un cono σ de un abanico Σ , podemos considerar la subvariedad tórica invariante X^Σ / σ de X^Σ . Entonces el lema 6.1.13 nos indica que para el caso afín, una subvariedad tórica invariante es la clausura de una órbita. Mientras que el teorema 6.1.12 nos dice que la acción tórica natural sobre dicha subvariedad está inducida por la acción tórica natural sobre la variedad ambiente restringida a un sub toro adecuado. Veamos que para el caso general también se conserva lo indicado.

Teorema 6.1.15. Dado un abanico Σ en \mathbb{R}^n :

1. Toda órbita de la acción tórica sobre la variedad tórica X^Σ es el embebimiento T_k de un toro de dimensión k con $0 \leq k \leq n$.
2. X^Σ es la unión disjunta de todas sus órbitas. Su número es finito.

Demostración.

1. El primer enunciado es consecuencia directa del Lema 6.1.13.

2. Decir que X^Σ sea unión disjunta de sus órbitas se debe a la definición de órbita (un punto no puede estar en dos órbitas distintas).

Para la segunda parte del enunciado lo desarrollaremos de manera inductiva. Esto se debe a que cualquier subvariedad tórica X^Σ/σ contiene a un toro T_k de dimensión k como un subconjunto denso y abierto y $X^\Sigma/\sigma \setminus T_k$ es subvariedad tórica de X^Σ/σ , luego podemos recubrirlo con embebimientos de toros de menor dimensión. Q

Definición 6.1.16. *Llamamos a cada uno de los T_k del teorema anterior toro embebido. En particular, $T_n = T$ se llama la gran órbita de X^Σ .*

6.2 Las orbitas de una acción tórica

En la sección anterior mencionamos cómo actúa el toro en una variedad tórica, y también verificamos que cuando trabajamos con una acción de grupo, podemos ver la variedad como una unión de sus órbitas. Ahora veamos un pequeño resumen de lo hecho hasta el momento utilizando los capítulos 1 y 2; para luego definir que significa un punto distinguido y seguidamente como determinar su órbita.

Veamos entonces, que si consideramos el caso $\Sigma = \{0\}$, entonces $X^\Sigma = (\mathbb{C}^*)^n$ este es el toro del cual estuvimos hablando en secciones anteriores. Ahora observamos que existe una sola órbita que es el espacio total X^Σ y es la órbita del punto cuyas coordenadas son $(1, \dots, 1) \in (\mathbb{C}^*)^n$.

En el caso general, el cono $\sigma = \{0\}$ de un Σ proporciona una órbita abierta densa que es la incrustación de $T = (\mathbb{C}^*)^n$ según la Proposición 4.4.2.9.

Por otro lado según el Corolario 1.2.13, existe una correspondencia

$$\mathbb{C}^k \leftrightarrow \{M \subset \mathbb{C}[\xi] : M \text{ ideal maximal}\} \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C})$$

de tal manera que con esta correspondencia, los puntos $x = (x_1, \dots, x_k)$ se corresponde con el ideal maximal $M_x = \mathbb{C}[\xi](\xi_1 - x_1) + \dots + \mathbb{C}[\xi](\xi_k - x_k)$ y los homomorfismos $\varphi : \mathbb{C}[\xi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\text{Ker}\varphi = M_x$, es decir, $\varphi(f) = f(x)$.

Si I es un ideal en $\mathbb{C}[\xi]$, entonces $V = V(I) = \{x \in \mathbb{C}^k : I \subset M_x \text{ y } I_V = I(V(I))\}$. Donde el conjunto V es un conjunto algebraico cuyo anillo de coordenadas es $R_V = \mathbb{C}[\xi]/I_V$ y lo cual nos proporciona la siguiente correspondencia

$$V \longleftrightarrow \{M \subset R_V : M \text{ ideal maximal}\} \longleftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(R_V, \mathbb{C}).$$

En términos de semigrupo, el retículo dual M es generado por $\pm e_i^*$, $i = 1, \dots, n$ y el anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{C}[M]$ está generado por z_i, z_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$; de tal manera que podemos identificarlo como

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \cong \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^n$$

donde $N \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ y $\text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$ son grupos de homomorfismos.

Todos los semigrupos $S_\sigma = \sigma \cap M$ son semigrupos del retículo M y $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es un subálgebra de $\mathbb{C}[M]$. Los subálgebras son generados por monomios cuyas variables son u_i . Si S_σ es generado por (a_1, \dots, a_k) los elementos $u_i = z^{a_i}$, $i = 1, \dots, k$, son generadores de los \mathbb{C} - subálgebra $\mathbb{C}[S_\sigma]$, que se escribe como $\mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$. Para $a \in S_\sigma$ podremos escribir z^a como el correspondiente elemento de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ cuya multiplicación $z^a \cdot z^j = z^{a+j}$ y $z^0 = 1$.

Observación 6.2.1 *Los puntos del $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ se corresponden con los homomorfismos de semi grupos de S_σ en \mathbb{C} , donde $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ es un semigrupo abeliano via la multiplicación:*

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = X_\sigma \cong \text{Hom}(S_\sigma, \mathbb{C})$$

(semigrupo de homomorfismos). Si $\varphi \in \text{Hom}(S_\sigma, \mathbb{C})$, los puntos x se corresponden con φ satisfaciendo $\varphi(a) = z^a(x)$ (evaluación en x), para todo $a \in S_\sigma$. Esto significa que $\varphi(a_i)$ es la i -th coordenada de x , es decir $x = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)) \in \mathbb{C}^k$.

La acción de T en X_σ podría ser interpretada de la manera siguiente:

- $t \in T$ identificamos con el grupo de homomorfismos $M \xrightarrow{t} \mathbb{C}^*$,
- $x \in X_\sigma$ identificamos con los semigrupo de homomorfismos $S_\sigma \xrightarrow{x} \mathbb{C}$, entonces
- $tx \in X_\sigma$ identificamos con los semigrupo de homomorfismos $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto t(u)x(u)$.

Definición 6.2.2 (*Puntos distinguidos*) Sea σ un cono y X_σ su correspondiente variedad tórica afín asociada. Nosotros asociaremos cada cara τ del cono σ con un punto distinguido x_τ correspondiente al semigrupo de homomorfismos definida en los generadores a de S_σ , por

$$\varphi_\tau(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \tau^\perp \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.3 Considerando el ejemplo 4.4.2.2, los generadores del monoide S_{σ_3} son $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (1, 1)$ y $a_3 = (1, 2)$. Si τ_1 es la cara generada por $2e_1 - e_2$, entonces solo $a_3 \in \tau_1^\perp$. Entonces $\varphi_{\tau_1}(a_1) = \varphi_{\tau_1}(a_2) = 0$ y $\varphi_{\tau_1}(a_3) = 1$. Los puntos x_{τ_1} tienen coordenadas $z^{a_1}(x_{\tau_1}) = z^{a_2}(x_{\tau_1}) = 0$ y $z^{a_3}(x_{\tau_1}) = 1$, es decir, $x_{\tau_1} = (0, 0, 1)$.

Similarmente tenemos que si τ_2 es una cara generada por e_2 entonces τ_2^\perp es la recta generada por e_1 . Nosotros obtenemos $\varphi_{\tau_2}(a_1) = 1$ y $\varphi_{\tau_2}(a_2) = \varphi_{\tau_2}(a_3) = 0$; entonces $x_{\tau_2} = (1, 0, 0)$.

Ahora, si consideramos σ_3 como una cara de σ_3 , entonces $\sigma_3^\perp = \{0\}$ de donde podemos deducir inmediatamente que no existe un a_i en σ_3^\perp y $x_{\sigma_3} = (0, 0, 0)$.

Finalmente, si consideramos a $\{0\}$ como una cara de σ_3 , entonces $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^2$ lo cual contiene todos los a_i , entonces $x_0 = (1, 1, 1)$.

Definición 6.2.4 Sea σ un cono en \mathbb{R}^n y τ una cara de σ . La órbita de T en X_σ correspondiente a la cara τ es la órbita del punto distinguido x_τ , lo cual lo denotaremos por O_τ .

Ejemplo 6.2.5 Del ejemplo anterior podemos deducir que

$$O_{\sigma_3} = \{(0, 0, 0)\} \text{ es la órbita del punto distinguido } x_{\sigma_3} = (0, 0, 0)$$

$$O_{\tau_1} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}_{\xi_3}^* \text{ es la órbita del punto distinguido } x_{\tau_1} = (0, 0, 1)$$

$$O_{\tau_2} = \mathbb{C}_{\xi_3}^* \times \{0\} \times \{0\} \text{ es la órbita del punto distinguido } x_{\tau_2} = (1, 0, 0)$$

$$O_0 = (\mathbb{C}^*)^2, \text{ es la órbita del punto distinguido } x_0 = (1, 1, 1)$$

6.3 La correspondencia de órbita-cono

En esta sección, tenga presente que para la variedad tórica de un abanico, resulta que cada cono σ en el abanico determina una órbita $O(\sigma)$. Entonces nuestro objetivo es mostrar cómo podemos obtener la estructura orbital de una variedad tórica desde su cono, a esto se llama correspondencia de la órbita-cono. La conexión proviene, en última instancia, de mirar el límite de puntos de los subgrupos de un solo parámetro de T definidos en el capítulo 3. Empecemos nuestro estudio con un ejemplo previo.

Ejemplo 6.3.1. Considere $\mathbf{P}^2 \cong X^{\Sigma}$ para el abanico normal $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$; $\sigma_0 = (e_1, e_2)$, $\sigma_1 = (-e_1 - e_2, e_2)$ y $\sigma_2 = (e_1, -e_1 - e_2)$ conos bidimensionales, junto con los tres rayos $\tau_{i,j} = \sigma_i \cap \sigma_j$ para $i \neq j$, y el origen. La variedad tórica X^{Σ} está cubierto por los abiertos afines

$$\begin{aligned} U_{\sigma_0} &= \text{Spec}(\mathbf{C}[S_{\sigma_0}]) \approx \text{Spec}(\mathbf{C}[x, y]) \\ U_{\sigma_1} &= \text{Spec}(\mathbf{C}[S_{\sigma_1}]) \approx \text{Spec}(\mathbf{C}[x^{-1}, x^{-1}y]) \\ U_{\sigma_2} &= \text{Spec}(\mathbf{C}[S_{\sigma_2}]) \approx \text{Spec}(\mathbf{C}[xy^{-1}, y^{-1}]). \end{aligned}$$

Podemos verificar que si usamos las coordenadas homogéneas usuales (x_0, x_1, x_2) en \mathbf{P}^2 , entonces $x \rightarrow \frac{x_1}{x_0}$ y $y \rightarrow \frac{x_2}{x_0}$ de tal manera que identificamos los abiertos afines $U_i \subseteq \mathbf{P}^2$ con $U_{\sigma_i} \subseteq X^{\Sigma}$. Por lo tanto, hemos cubierto \mathbf{P}^2 como la variedad tórica X_{σ} .

Considerando a $T = (\mathbf{C}^*)^2 \subseteq \mathbf{P}^2$, y sus puntos cuyas coordenadas homogéneas son $(1, s, t)$, $s, t \neq 0$ y para cada $u = (a, b) \in N = \mathbf{Z}^2$, obtenemos la curva correspondiente en \mathbf{P}^2 : $\lambda^u(t) = (1, t^a, t^b)$. Desde que \mathbf{P}^2 es compacto el límite $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ existe en \mathbf{P}^2 . Ahora comenzamos analizar dicho límite, observando que el punto límite en \mathbf{P}^2 depende en $u = (a, b)$. Entonces obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1, t^a, t^b) = \begin{cases} (1, 0, 0) & a, b > 0 \\ (1, 0, 1) & a > 0, b = 0 \\ (1, 1, 0) & a = 0, b > 0 \\ (1, 1, 1) & a = b = 0 \\ (0, 0, 1) & a > b, b < 0 \\ (0, 1, 0) & a < 0, a < b \\ (0, 1, 1) & a < 0, a = b. \end{cases}$$

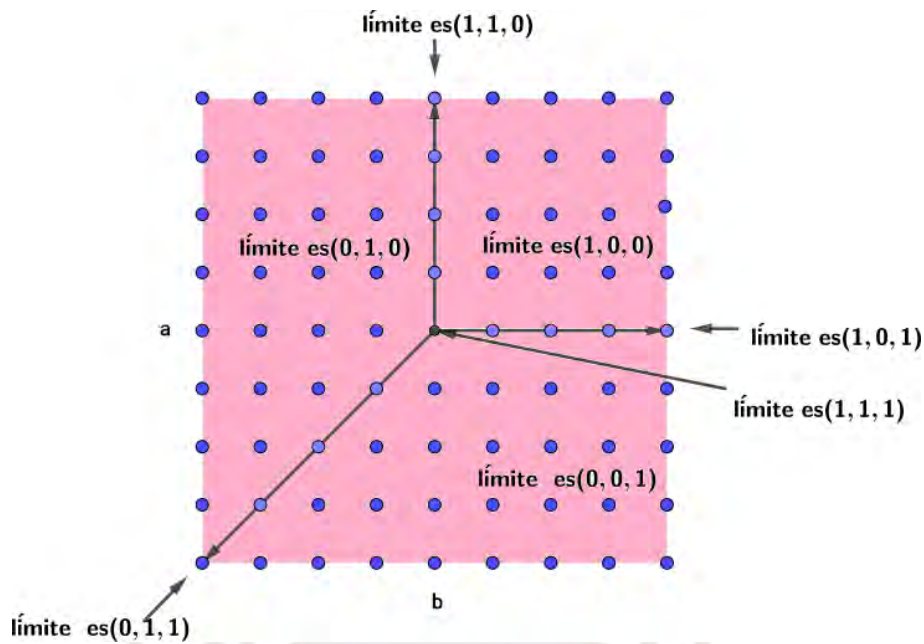


Figura 21: $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ para $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$

Los primeros cuatro casos son fáciles de verificar, supongamos que $a, b > 0 \in \mathbb{Z}$. Estos puntos se encuentran en el primer cuadrante. Aquí, es obvio que $\lim_{t \rightarrow 0} (1, t^a, t^b) = (1, 0, 0)$.

Luego, supongamos que $a = b < 0 \in \mathbb{Z}$, correspondiente a puntos en la diagonal en el tercer cuadrante. Note que

$$(1, t^a, t^b) = (1, t^a, t^a) \approx (t^{-a}, 1, 1),$$

desde que estamos usando coordenadas homogéneas en \mathbb{P}^2 , entonces $-a > 0$ implica que $\lim_{t \rightarrow 0} (t^{-a}, 1, 1) = (0, 1, 1)$. Los otros casos son similares. Ahora, para el quinto caso debe notar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1, t^a, t^b) = \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-b}, t^{a-b}, 1)$$

y nuevamente usando el hecho de que estos son coordenadas homogéneas. Entonces para $a > b$ y $b < 0$ implica que el límite es $(0, 0, 1)$. En los otros dos casos es similar.

Podemos observar además en la figura que hay siete regiones distintas que descomponen al plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$:

- Los conjuntos abiertos $a, b > 0$; $a < 0, a < b$; y $a > b, b < 0$
- Los rayos abiertos $a > 0, b = 0$; $a = 0, b > 0$; y $a < 0, a = b$
- El punto $a = b = 0$

Las regiones de \mathbb{N} descritas en la figura 21 corresponden a conos del abanico Σ . En cada caso, el conjunto de u da uno de los puntos límite que es igual a $N \cap \sigma$.

Ahora, relacionemos lo conseguido con las T-órbitas en \mathbb{P}^2 . Al considerar la descripción $\mathbb{P}^2 \cong (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathcal{C}^*$, veremos que hay exactamente siete T-órbitas en \mathbb{P}^2 .

$$O_1 = \{(x_0, x_1, x_2) ; x_i \neq 0 \text{ para todo } i\} \simeq (1, 1, 1)$$

$$O_2 = \{(x_0, x_1, x_2) ; x_2 = 0, y x_0, x_1 \neq 0\} \simeq (1, 1, 0)$$

$$O_3 = \{(x_0, x_1, x_2) ; x_1 = 0, y x_0, x_2 \neq 0\} \simeq (1, 0, 1)$$

$$O_4 = \{(x_0, x_1, x_2) ; x_0 = 0, y x_1, x_2 \neq 0\} \simeq (0, 1, 1)$$

$$O_5 = \{(x_0, x_1, x_2) ; x_1 = x_2 = 0, y x_0 \neq 0\} = \{(1, 0, 0)\}$$

$$O_6 = \{(x_0, x_1, x_2) ; x_0 = x_2 = 0, y x_1 \neq 0\} = \{(0, 1, 0)\}$$

$$O_7 = \{(x_0, x_1, x_2) ; x_0 = x_1 = 0, y x_2 \neq 0\} = \{(0, 0, 1)\}$$

Esta lista muestra que cada órbita contiene un único punto límite. Por lo tanto, obtenemos una correspondencia entre conos σ y órbitas O de la manera siguiente:

$$\sigma \text{ se corresponde con } O \iff \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) \in O \text{ para todo } u \in \sigma.$$

Ahora, veamos algunos resultados, los cuales generalizan lo mencionado a todas las variedades tóricas.

Denotamos el punto γ_σ como el punto distinguido correspondiente a σ .

- El punto γ_σ se fija bajo la acción de T si y solo si $\dim \sigma = \dim N$.
- Si $\tau < \sigma$ es una cara, entonces $\gamma_\sigma \in X_\tau$. Esto sigue del hecho de que $\sigma^\perp \subseteq \tau^\perp$.

Antes de proseguir hagamos un hincapié en la notación, ya que de ahora en adelante cada que nos encontremos con $N_{\mathbb{R}}$ significa que es el espacio vectorial $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ el cual es construido a partir del retículo N .

Proposición 6.3.2 Sea $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico racional fuertemente convexo y $u \in N$. Entonces

$$u \in \sigma \iff \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) \text{ existe en } X_{\sigma}.$$

Además, si $u \in \check{\sigma}$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) = \gamma_{\sigma}$.

Demostración. Dado un $u \in N$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) \text{ existe en } X_{\sigma} &\iff \lim_{t \rightarrow 0} \chi^m(\lambda^u(t)) \text{ existe en } \mathbb{C} \text{ para todo } m \in S_{\sigma} \\ &\iff \lim_{t \rightarrow 0} t^{(m,u)} \text{ existe en } \mathbb{C} \text{ para todo } m \in S_{\sigma} \\ &\iff (m, u) \geq 0 \text{ para todo } m \in \check{\sigma} \cap M \\ &\iff u \in \check{\sigma} = \sigma, \end{aligned}$$

estas equivalencias son claras y gracias a ello podemos mostrar la primera afirmación de la proposición.

Por otro lado se puede mostrar fácilmente que cuando $u \in \sigma \cap N$, $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ es el punto correspondiente al homomorfismo de semigrupo de $S_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$m \in \check{\sigma} \cap M \longrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t^{(m,u)}.$$

Por lo tanto, si $u \in \check{\sigma}$ entonces, $(m, u) > 0$; para todo $m \in S_{\sigma} \setminus \sigma^{\perp}$, y $(m, u) = 0$, si $m \in S_{\sigma} \cap \sigma^{\perp}$. Entonces, podemos decir que el punto límite es precisamente el punto distinguido γ_{σ} . Q

Las órbitas de T . Ahora, vamos a tratar con las T-órbitas en X^{Σ} . Como ya observamos anteriormente cada cono $\sigma \in \Sigma$ tiene un punto distinguido $\gamma_{\sigma} \in X_{\sigma} \subseteq X$. Esto nos da la órbita del toro denotada de la manera siguiente

$$O(\sigma) = T \cdot \gamma_{\sigma} \subseteq X^{\Sigma}.$$

Nuestro próximo teorema es el resultado principal de todo lo expuesto en esta sección. Recuerde que la relación de la cara $\tau < \sigma$ se cumple cuando τ es una cara de σ .

Teorema 6.3.3 (*Correspondencia cono-órbita*). Sea X^Σ la variedad tórica del abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces:

a) Existe una correspondencia biyectiva

$$\begin{aligned} \text{conos } \sigma \text{ en } \Sigma &\longleftrightarrow T\text{-órbitas en } X^\Sigma \\ \sigma &\longleftrightarrow O(\sigma) \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \end{aligned}$$

b) Sea $n = \dim N_{\mathbb{R}}$. Para cada cono $\sigma \in \Sigma$, $\dim O(\sigma) = n - \dim \sigma$.

c) El subconjunto afín abierto X_σ es la unión de órbitas;

$$X_\sigma = \bigsqcup_{\tau < \sigma} O(\tau).$$

d) $\tau < \sigma$ si y solo si $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$, y

$$\overline{O(\tau)} = \bigsqcup_{\tau < \sigma} O(\sigma)$$

donde $\overline{O(\tau)}$ denota la clausura en la topología clásica y Zariski.

Demostración. Ver [2, pag.120].

Q

Observación 6.3.4. El ejemplo 6.3.1 nos dice que para \mathbb{P}^2 , hay tres tipos de conos y T -órbitas:

- El cono trivial $\sigma = \{(0, 0)\}$ corresponde a la órbita $O(\sigma) = T \subseteq \mathbb{P}^2$, que satisface $\dim O(\sigma) = 2 = 2 - \dim \sigma$. Esta es una cara de todos los otros conos en Σ , y por lo tanto todas las otras órbitas están contenidas en su cerradura. Además, tenga en cuenta también que $x_\sigma = O(\sigma) \approx (\mathbb{C}^*)^2$, ya que no hay conos propiamente contenidos en σ .

- Los tres conos 1-dimensionales τ dan las T -órbitas de dimensión 1. Cada uno es isomorfo a \mathbb{C}^* . La cerradura de estas órbitas son los ejes de coordenadas $V(x_i)$ en \mathbb{P}^2 , cada uno es una copia de \mathbb{P}^1 . Tenga en cuenta que cada τ está contenido en dos conos máximos.
- Los tres conos máximos σ_i en el abanico Σ corresponden a los tres puntos fijos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ de la acción del toro en \mathbb{P}^2 . Hay dos de estos en la clausura de cada una de las T -órbitas unidimensionales.

Ejemplo 6.3.5. Consideremos el cono $\sigma_2 = (e_1, e_2)$ del Ejemplo 4.1.4, cuya variedad tórica $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}^2$; el cual contiene a $(\mathbb{C}^*)^2$ como toro. Por otro lado, la acción del toro simplemente viene dada por $(t_1, t_2) \cdot (x_1, x_2) = (t_1 x_1, t_2 x_2)$. Entonces podemos verificar que hay cuatro órbitas, generadas por los elementos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Ahora, relacionemos estas 4 órbitas con los 4 conos y observamos entonces que $(0, 0)$ es un punto fijo y que es el punto distinguido de σ_2 . Del mismo modo, relacionamos las órbitas de $(0, 1)$ y $(1, 0)$ con los rayos $\tau_1 = (e_1)$ y $\tau_2 = (e_2)$. Finalmente relacionamos en $(\mathbb{C}^*)^2$, la órbita de $(1, 1)$, con el origen.

Capítulo 7

7 Singularidades en variedades tóricas

En este capítulo, veremos como todo lo expuesto va tomando forma para nuestro argumento principal; el cual es resolver singularidades en una superficie tórica.

Empezamos nuestro estudio acerca de cómo reconocer cuando un cono es regular o no para más adelante reconocer una variedad no singular. Además, en una sección posterior también desarrollaremos cuando se dice que una variedad tórica es normal, condición necesaria para poder resolver singularidades. Por último desarrollaremos un algoritmo que será de gran utilidad para el capítulo siguiente.

7.1 Conos singulares

En esta sección determinamos las condiciones necesarias y suficientes para que X_σ sea no singular. Este será nuestro primer paso hacia la resolución tórica de singularidades .

Veamos antes ciertos detalles importantes acerca de conos fuertemente convexos.

Definición 7.1.1. Sea $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico racional fuertemente convexo.

- a) Un cono σ es suave o regular si sus generadores mínimos forman parte de una \mathbb{Z} -base de N ,
- b) Un cono σ es simplicial si sus generadores mínimos son linealmente independientes sobre \mathbb{R} .

Como ejemplo podemos mencionar que, el cono σ_2 es regular. Tenga en cuenta también que el dual de un cono regular (resp. Simplicial) de dimensión máxima es también regular (resp. simplicial).

Cuando $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ tiene una dimensión máxima, el semigrupo $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ tiene un conjunto único mínimo de generadores construido de la manera siguiente. Antes de ello, diremos que un elemento $m \neq 0$ de S_σ es irreducible si $m = m^j + m^{jj}$ para $m^j, m^{jj} \in S_\sigma$

implica que $m^j = 0$ ó $m^{jj} = 0$.

Proposición 7.1.2. Sea $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico racional fuertemente convexo de dimensión máxima y sea $S_{\sigma} = \check{\sigma} \cap M$. Entonces

$$H = \{m \in S_{\sigma}; m \text{ es irreducible}\}$$

tiene las siguientes propiedades:

a) H es finito y genera S_{σ} .

b) H contiene los rayos generadores de los bordes de $\check{\sigma}$.

c) H es el conjunto generador mínimo de S_{σ} con respecto a la inclusión.

Demostración.

Veamos la parte a). Teniendo en cuenta que $\check{\sigma}$ es fuertemente convexo, podemos encontrar un elemento $u \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ tal que $(m, u) \in \mathbb{N}$, para todo $m \in S_{\sigma}$ y $(m, u) = 0$ si y solo si $m = 0$.

Ahora, supongamos que $m \in S_{\sigma}$ no es irreducible. Entonces $m = m^j + m^{jj}$ donde m^j y m^{jj} son elementos distintos de cero del S_{σ} . Observamos que

$$(m, u) = \cdot m^j, u^{\Sigma} + \cdot m^{jj}, u^{\Sigma}$$

con $\cdot m^j, u^{\Sigma}, \cdot m^{jj}, u^{\Sigma} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de tal manera que

$$\cdot m^j, u^{\Sigma} < (m, u) \quad \text{y} \quad \cdot m^{jj}, u^{\Sigma} < (m, u).$$

Ahora, usando inducción en (m, u) , podemos concluir que cada elemento de S_{σ} es una suma de elementos irreducible, de modo que H genera S_{σ} . Además, usando un conjunto generador finito de S_{σ} , podemos observar fácilmente que H es finito.

El restante de las partes de la prueba no son difíciles de tratar; para la parte b, basta con mostrar que los rayos generadores de los borde de $\check{\sigma}$ son irreducibles. Para ello considere un borde ρ de $\check{\sigma}$, de tal manera que se pueda elegir un $u \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ tal que $\rho = H_u \cap \check{\sigma}$. Para la parte c, recuerde que los semigrupos $S_{\sigma} = \check{\sigma} \cap M$ tiene un único conjunto generador minimal. Q

El conjunto $H \subseteq S_\sigma$ se llama *base de Hilbert* de S_σ y sus elementos son generadores mínimos de S_σ . En términos más generales, la Proposición 7.1.2 es válida para cualquier semigrupo afín S que satisface $S \cap (-S) = \{0\}$.

A continuación, estudiamos la cuestión de cuándo una variedad tórica afín X_σ es normal. Necesitamos una definición antes de establecer nuestro criterio de normalidad.

Definición 7.1.3. Un semigrupo afín $S \subseteq M$ es saturado si para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $m \in M$, $km \in S$ implica $m \in S$.

Por ejemplo, si $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo, entonces $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ se ve fácilmente que es saturado.

Teorema 7.1.4. Sea X_σ una variedad tórica afín con el toro T . Entonces lo siguientes enunciados son equivalentes:

- a) X_σ es normal.
- b) $X_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$, donde $S \subseteq M$ es un semigrupo afín saturado.
- c) $X_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = X_\sigma$, donde $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ y $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ es cono poliédrico racional-fuertemente convexo.

Demostración

Tengamos en cuenta que $X_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ para un semigrupo S afín contenido en un retículo, y el toro de X_σ tiene el carácter reticular $M = \mathbb{Z}S$. Además, consideremos $n = \dim X_\sigma$, de tal manera que $M \cong \mathbb{Z}^n$.

(a) \Rightarrow (b): Si X_σ es normal, entonces $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[X_\sigma]$ es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones $\mathbb{C}(X_\sigma)$. Supongamos que $km \in S$ para algún $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $m \in M$. Entonces χ^m es una función polinómica en T y por lo tanto una función racional en X_σ ya que $T \subseteq X_\sigma$ es un abierto de Zariski. También tenemos $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$, desde que $km \in S$. Además, se deduce que χ^m es una raíz del polinomio mónico $X^k - \chi^{km}$ con coeficientes en $\mathbb{C}[S]$. Por la definición de normal, obtenemos $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$, es decir, $m \in S$. Así, S está saturado.

(b) \Rightarrow (c): Sea $A \subseteq S$ un conjunto generador finito de S . Entonces S se encuentra en el cono poliédrico racional $Cono(A) \subseteq M$, y $RanZA = n$ lo cual implica que la dim $Cono(A) = n$. Por otro lado, podemos deducir que $\sigma = Cono(\check{A}) \subseteq N$ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo tal que $S \subseteq \check{\sigma} \cap M$. Por lo tanto, la igualdad se cumple cuando S es saturado. De allí $S = S_\sigma$.

(c) \Rightarrow (a): Para esta parte, necesitamos mostrar que $C[S_\sigma] = C[\check{\sigma} \cap M]$ sea normal, cuando $\sigma \subseteq N$ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo.

En efecto, sean ρ_1, \dots, ρ_r los rayos de σ . Entonces desde que σ es generado por sus rayos, tenemos que

$$\check{\sigma} = \sum_{i=1}^r \check{\rho}_i.$$

Ahora, intersectando con M ambas igualdades obtenemos $S_\sigma = \bigcap_{i=1}^r S_{\rho_i}$, lo cual implica que

$$C[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^r C[S_{\rho_i}].$$

Ahora bien, $C[S_\sigma]$ es normal si cada $C[S_{\rho_i}]$ es normal, entonces bastará probar que $C[S_\rho]$ sea normal cuando ρ es un rayo racional en N . En efecto, sea $u_\rho \in \rho \cap N$ el rayo generador de ρ . Ahora, como u es primitivo, es decir, $\frac{1}{k} u_\rho \notin N$ para todo $k > 1$, entonces es posible encontrar una base e_1, \dots, e_n de N con $u_\rho = e_1$. Esto nos permite suponer que $\rho = (e_1)$, de modo que

$$C[S_\rho] = C \sum x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}.$$

Pero como $C[x_1, \dots, x_n]$ es normal, entonces localizando tenemos que

$$C[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \dots x_n} = C \sum x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$$

lo cual implica que también es normal, con ello completamos la prueba. Q

Ejemplo 7.1.5 Sea $\sigma_4 = (e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subseteq N_{\mathbb{R}}$ con $N = \mathbb{Z}^3$.

$$\begin{aligned} \sigma_4 = (e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) &\mapsto \check{\sigma}_4 = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_1^* + e_2^* - e_3^*) \mapsto S_{\sigma_4} = \\ (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_1^* + e_2^* - e_3^*) &\mapsto R_{\sigma_4} = C[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] / (\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_3, \zeta_4) \mapsto X_{\sigma_4} = V(I_{\sigma_4}) \end{aligned}$$

donde $I_{\sigma_4} = (\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4)$. Entonces por el teorema 7.1.4 X_{σ_4} es normal.

Ahora, nuestro próximo objetivo es caracterizar cuando una variedad tórica afín es regular. Como las variedades afines regulares son normales, y considerando que las variedades tóricas afines X_{σ} provienen de conos poliédricos fuertemente convexos $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$; primero estudiaremos X_{σ} cuando σ tiene dimensión máxima. Entonces $\check{\sigma}$ es fuertemente convexo de modo que $S_{\sigma} = \check{\sigma} \cap M$ tiene una base de Hilbert \mathbf{H} . Además, la acción del toro en X_{σ} tiene un único punto fijo, indicado aquí por $p_{\sigma} \in X_{\sigma}$. Ver [2, Corolario 1.3.3].

El punto p_{σ} y la base \mathbf{H} de Hilbert se relacionan de la siguiente manera.

Lema 7.1.6. Sea $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico racional fuertemente convexo de máxima dimensión y $T_{p_{\sigma}}(X_{\sigma})$ el espacio tangente de Zariski para la variedad tórica afín X_{σ} en el punto interior p_{σ} . Entonces $\dim T_{p_{\sigma}}(X_{\sigma}) = |\mathbf{H}|$.

Demostración. Ver [2, pag.40].

Q

Ahora llegamos a nuestro resultado principal sobre la no singularidad o regularidad. Recuerde de la Definición 7.1.1 que un cono poliédrico racional es regular si puede ser generado por un subconjunto de una base del retículo.

Teorema 7.1.7. Sea $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico racional fuertemente convexo. Entonces X_{σ} es regular si y solo si σ es regular. Además, toda variedad tórica afín regular es de esta forma.

Demostración

Si una variedad tórica afín es regular, entonces es normal y por lo tanto es de la forma X_{σ} . Además, si σ es un cono regular, entonces X_{σ} es regular como una variedad. Para esta última parte ver [2], ejemplo 1.2.21.

Ahora, queda por demostrar lo contrario. Así que fijemos un $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ tal que X_{σ} es regular.

Sea $n = \dim X_{\sigma} = \dim N_{\mathbb{R}}$. Primero suponga que σ tiene dimensión n y sea $p_{\sigma} \in X_{\sigma}$. Como p_{σ} es regular en X_{σ} , el espacio tangente Zariski $T_{p_{\sigma}}(X_{\sigma})$ tiene dimensión n por definición. Por otro lado, el Lema 7.1.6. implica que $\dim T_{p_{\sigma}}(X_{\sigma})$ es la cardinalidad de la base de Hilbert \mathbf{H} de $S_{\sigma} = \check{\sigma} \cap M$. Así,

$$n = |\mathbf{H}| \geq |\{\text{bordes } \rho \subseteq \check{\sigma}\}| \geq n,$$

donde la primera desigualdad se cumple por la Teorema 7.1.4. (cada borde $\rho \subseteq \check{\sigma}$ contribuye un elemento de \mathbf{H}) y el segundo se mantiene desde que la $\dim(\check{\sigma}) = n$. Entonces σ tiene n bordes y \mathbf{H} consiste de los generadores de los rayos de estos bordes. Ahora, ya que $M = \mathbf{Z}S_\sigma$, los n generadores del borde de $\check{\sigma}$ generan el retículo $M \approx \mathbf{Z}^n$ y por lo tanto, forma una base de M . Así, $\check{\sigma}$ es regular, y luego $\sigma = \check{\sigma}$ es regular desde que la dualidad preserva la regularidad.

Ahora, supongamos que la $\dim(\sigma) = r < n$. Reducimos al caso anterior de la siguiente manera. Sea $N_1 \subseteq N$ el sub retículo saturado más pequeño que contiene los generadores de σ . Entonces N/N_1 es de torsión libre, lo cual implica la existencia de un sub retículo $N_2 \subseteq N$ con $N = N_1 \oplus N_2$. Tenga en cuenta que $\text{rank}N_1 = r$ y $\text{rank}N_2 = n - r$.

El cono σ se encuentra en ambos $(N_1)_{\mathbf{R}}$ y $N_{\mathbf{R}}$. Esto proporciona variedades tóricas afines X_{σ, N_1} y $X_{\sigma, N}$, de dimensiones r y n , respectivamente. Además, $N = N_1 \oplus N_2$ induce $M = M_1 \oplus M_2$, de modo que $\sigma \subseteq (N_1)_{\mathbf{R}}$ y $\sigma \subseteq N_{\mathbf{R}}$ dando los semigrupos afines $S_{\sigma, N_1} \subseteq M_1$ y $S_{\sigma, N} \subseteq M$ respectivamente. Es sencillo mostrar que

$$S_{\sigma, N} = S_{\sigma, N_1} \oplus M_2,$$

que en términos de álgebras de semigrupo se puede escribir

$$\mathbf{C}[S_{\sigma, N}] \approx \mathbf{C}[S_{\sigma, N_1}] \oplus \mathbf{C}[M_2].$$

El lado derecho es el anillo de coordenadas de $X_{\sigma, N_1} \times T_{N_2}$. Así,

$$X_{\sigma, N} \approx X_{\sigma, N_1} \times T_{N_2},$$

que a su vez implica que

$$X_{\sigma, N} \approx X_{\sigma, N} \times (\mathbf{C}^*)^{n-r} \subseteq X_{\sigma, N} \times_1 (\mathbf{C})^{n-r}.$$

Dado que asumimos que $X_{\sigma, N}$ es regular, se deduce que $X_{\sigma, N_1} \times (\mathbf{C})^{n-r}$ es regular en cualquier punto (p, q) en $X_{\sigma, N_1} \times (\mathbf{C})^{n-r}$. Por otro lado, es fácil mostrar que

$$X_{\sigma, N_1} \times (\mathbf{C})^{n-r} \text{ es regular en } (p, q) \rightarrow X_{\sigma, N_1} \times (\mathbf{C})^{n-r} \text{ es regular en } p.$$

Sea $p = p_\sigma \in X_{\sigma, N_1}$, el caso anterior implica que σ es regular en N_1 ya que $\dim \sigma = \dim (N_1)_{\mathbb{R}}$. Por lo tanto, σ es claramente regular en $N = N_1 \oplus N_2$.

Ahora, podemos concluir que una variedad tórica es no singular observando los conos que lo generan.

Ejemplo 7.1.8. *El cono del Ejemplo 4.4.2.2, $\sigma_3 = (2e_1 - e_2, e_2)$ es singular, por que sus vectores generadores $\{2e_1 - e_2, e_2\}$ no forman una base para el retículo N . Por lo tanto, podemos decir también que $X_\sigma = V(xz - y^2)$ es una superficie que tiene una singularidad en $(0, 0, 0)$.*

Veamos ahora un resultado no menos importante de una variedad tórica abstracta proyectiva asociado a un abanico.

Para el siguiente teorema, tenga en cuenta que una variedad X es separable si la imagen de la función diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times X$ es un cerrado de Zariski en $X \times X$.

Teorema 7.1.9. *Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. La variedad tórica proyectiva X^Σ , es una variedad normal separable.*

Demostración

Desde que cada cono en Σ es fuertemente convexo, $\{0\} \subseteq N$ es una cara de todo $\sigma \in \Sigma$. Por lo tanto, tenemos $T = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \approx (\mathbb{C}^*)^n \subseteq X_\sigma$ para todo σ . Todos estos toros son identificados por el pegado, entonces tenemos $T \subseteq \bar{X}^\Sigma$. Sabemos que cada X_σ tiene una acción de T . El pegado de los isomorfismos se reduce a la función identidad en $\mathbb{C}[S_{\sigma_1 \cap \sigma_2}]$. Por lo tanto, las acciones son compatibles en las intersecciones de cada par de conjuntos, en los cubrimientos abiertos afines para dar una acción algebraica de T en X^Σ . La variedad X^Σ es irreducible porque todos los X_σ son variedades tóricas afines irreducibles que contienen al toro T . Además, X_σ es una variedad afín normal de ahí que la variedad X^Σ es normal.

Ahora, para mostrar que X^Σ es separable, basta con mostrar que para cada par de conos σ_1, σ_2 en Σ , la imagen de la función diagonal

$$\Delta : X_\tau \rightarrow X_{\sigma_1} \times X_{\sigma_2}, \quad \tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$$

sea un cerrado de Zariski. Pero Δ proviene del homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$\Delta^* : \mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \oplus \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] \longrightarrow \mathbb{C}[S_\tau],$$

definido por $\chi^m \otimes \chi^n \longrightarrow \chi^{m+n}$. Podemos verificar que Δ^* es sobreyectivo, por lo que

$$\mathbb{C}[S_\tau] \approx (\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma_2}]) / \ker(\Delta^*).$$

Entonces la imagen de Δ es un subconjunto cerrado de Zariski de $X_{\sigma_1} \times X_{\sigma_2}$.

Muchas de las variedades tóricas encontradas en los capítulos anteriores provienen de los abanicos. Por ejemplo, el teorema 7.1.4 implica que una variedad tórica afín normal proviene de un abanico que consiste en un solo cono σ junto con todas sus caras.

En general, cada variedad tórica normal separable proviene de un abanico. Esto es un consecuencia del teorema de Sumihiro.

Teorema 7.1.10 (Sumihiro). *Sea el toro T que actúe sobre una variedad normal separable X . Entonces, cada punto $p \in X$ tiene una vecindad abierta afín T -invariante.*

Demostración. Ver [2, pag.109]. Q

Observación 7.1.11. *Tengamos en cuenta que es posible que si X es una variedad tórica separable normal con el toro T , entonces existe un abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$ tal que $X \approx X^{\Sigma}$.*

Definición 7.1.12. *Sea $\Sigma \in N$ un abanico. Diremos que Σ es suave (o regular) si cada cono σ en Σ es suave (o regular).*

Teorema 7.1.13. *Sea X^{Σ} una variedad tórica definida por un abanico $\Sigma \in N$. Entonces, X^{Σ} es una variedad regular si y solo si el abanico es regular.*

Demostración. Este resultado se desprende de los conceptos correspondiente para variedades toricas afines, y del Teorema 7.1.7, ya que por definición la regularidad es una propiedad local. Q

Definición 7.1.14. *Sean N_1, N_2 dos retículos con Σ_1 un abanico en $(N_1)_{\mathbb{R}}$ y $(\Sigma_2)_{\mathbb{R}}$ un abanico en N_2 . Una \mathbb{Z} -función lineal $\phi: N_1 \rightarrow N_2$ es compatible con los abanicos Σ_1 y Σ_2 si para cada cono $\sigma_1 \in \Sigma_1$, existe un cono $\sigma_2 \in \Sigma_2$ tal que $\phi(\bar{\sigma}_1) \subseteq \sigma_2$.*

Definición 7.1.15. Sea $X^{\Sigma_1}, X^{\Sigma_2}$ variedades tóricas normales, con σ_1 un abanico en $(N_1)_{\mathbb{R}}$ y σ_2 un abanico en $(N_2)_{\mathbb{R}}$. Un morfismo $\phi : X^{\Sigma_1} \rightarrow X^{\Sigma_2}$ es tórico si ϕ mapea el toro $T_{N_1} \subseteq X^{\Sigma_1}$ dentro de $T_{N_2} \subseteq X^{\Sigma_2}$ y $\phi|_{T_{N_1}}$ es un homomorfismo de grupos.

Teorema 7.1.16. Sea N_1 y N_2 retículos y sea σ_i un abanico en $(N_i)_{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$.

a) Si $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$ es un mapa \mathbb{Z} -lineal que es compatible con σ_1 y σ_2 , entonces existe un morfismo tórico $\phi : X^{\Sigma_1} \rightarrow X^{\Sigma_2}$ tal que $\phi|_{T_{N_1}}$ es la función

$$\bar{\phi} \otimes 1 : N_1 \otimes \mathbb{C}^* \rightarrow N_2 \otimes \mathbb{C}^*.$$

b) Por el contrario, si $\phi : X^{\Sigma_1} \rightarrow X^{\Sigma_2}$ es un morfismo tórico, entonces ϕ induce una función \mathbb{Z} -lineal $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$ que es compatible con los abanicos σ_1 y σ_2 .

Demostración.

Parte (a), sea σ_1 un cono en Σ_1 . Como ϕ es compatible con σ_1 y σ_2 , hay un cono $\sigma_1 \in \Sigma_2$ con $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subseteq \sigma_2$. Entonces se muestra que ϕ induce un morfismo tórico $\phi_{\sigma_1} : U_{\sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_2}$, ver [2], Proposición 1.3.15. De manera general si consideramos a X una variedad con un cubrimiento abierta afín U_i y una segunda variedad Y ; tal que $\phi_i : U_i \rightarrow Y$ sea una colección de morfismos. Podemos decir que si el morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ se obtiene a partir del pegado de ϕ_i donde $\phi|_{U_i} = \phi_i$, para todo i . Entonces existe $\phi : X \rightarrow Y$ morfismo, si y solo si, por cada par i, j ,

$$\phi_i|_{U_i \cap U_j} = \phi_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Esto implica que el pegado de los morfismos tóricos $\phi_{\sigma_1} : U_{\sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_2}$ mencionado anteriormente, forman un morfismo $\phi : X^{\Sigma_1} \rightarrow X^{\Sigma_2}$. Además, ϕ es tórico porque al tomar $\sigma_1 = \{0\}$ nos proporciona $\phi_{\{0\}} : T_{N_1} \rightarrow T_{N_2}$, lo cual es el grupo homomorfismo inducido por la función \mathbb{Z} -lineal $\bar{\phi} : N_1 \rightarrow N_2$.

Para la parte (b), primero mostraremos que el morfismo tórico ϕ induce un función \mathbb{Z} -lineal. Esto es consecuencia de que $\phi|_{T_{N_1}}$ es un grupo de homomorfismo. Por lo tanto, dado $u \in N_1$, el subgrupo de un solo parámetro $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow T_{N_1}$ se puede componer con $\phi|_{T_{N_1}}$ lo cual nos da el subgrupo de un parámetro $\phi|_{T_{N_1}} \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow T_{N_2}$. Esto define un

elemento $\bar{\phi}(u) \in N_2$, por lo tanto se puede ver que $\bar{\phi}: N_1 \rightarrow N_2$ es una función \mathbb{Z} -lineal. Ahora, queda por demostrar que $\bar{\phi}$ es compatible con \sum_1 y \sum_2 . Para ello, consideremos $\sigma_1 \in \sum_1$. Por la Correspondencia con σ -Órbita (Teorema 6.3.3), esto implica que T_{N_1} -órbita $O_1 = O(\sigma_1) \subseteq X^{\sum_1}$. Ahora, debido a que el morfismo $\phi: X^{\sum_1} \rightarrow X^{\sum_2}$ es una función equivariante, existe un T_{N_2} -órbita $O_2 \subseteq X^{\sum_2}$ con $\phi(O_1) \subseteq O_2$. De manera análoga obtenemos $O_2 = O(\sigma_2)$ para algún cono $\sigma_2 \in \sum_2$. Por lo tanto $\phi(O(\sigma_1)) \subseteq O(\sigma_2)$. Además, si $\tau_1 \prec \sigma_1$ es una cara, siguiendo un razonamiento similar al anterior, existe algún cono $\tau_2 \in \sum_2$ tales que $\phi(O(\tau_1)) \subseteq O(\tau_2)$.

Afirmamos que en esta situación τ_2 debe ser una cara de σ_2 . Esto proviene desde que $O(\sigma_1) \subseteq \overline{O(\tau_1)}$ y por la parte (d) del Teorema 6.3.3. Además, como ϕ es continuo en la topología de Zariski, entonces $\phi(\overline{O(\tau_1)}) \subseteq \overline{O(\tau_2)}$. Pero como las únicas órbitas contenidas en la clausura de $O(\tau_2)$ son las órbitas correspondientes a los conos que tienen τ_2 como cara; entonces τ_2 es una cara de σ_2 . Y de la parte (c) del Teorema 6.3.3 se deduce que ϕ también mapea el subconjunto abierto afín $U_{\sigma_1} \subseteq X^{\sum_1}$ en $U_{\sigma_2} \subseteq X^{\sum_2}$, es decir, $\phi(U_{\sigma_1}) \subseteq U_{\sigma_2}$. Por lo tanto, ϕ induce un morfismo tórico $U_{\sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_2}$, lo cual implica que $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subseteq \sigma_2$, (ver [2], Proposición 1.3.15). Por lo tanto, ϕ es compatible con los abanicos \sum_1 y \sum_2 . Q

Definición 7.1.17. Una función continua $f: X \rightarrow Y$ es propia si la imagen inversa $f^{-1}(T)$ es compacto en X para todo subconjunto compacto $T \subseteq Y$.

Teorema 7.1.18. Sea $\phi: X^{\sum} \rightarrow X^{\sum_j}$ el morfismo tórico correspondiente a un homomorfismo $\bar{\phi}: N \rightarrow N^j$ que es compatible con los abanicos \sum en $N_{\mathbb{R}}$ y \sum_j en N^j . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

a) $\phi: X^{\sum} \rightarrow X^{\sum_j}$ es propia en la topología clásica.

b) $\phi: X^{\sum} \rightarrow X^{\sum_j}$ es un morfismo propio.

c) Si $u \in N$ y $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^{\phi(u)}(t)$ existe en X^{\sum_j} , entonces $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ existe en X^{\sum} .

d) $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}^{-1}(\sum_j) = \sum$, donde $|\sum| = \mathbf{S}_{\sigma \in \sum} \sigma = N_{\mathbb{R}}$.

7.2 Superficies tóricas

En esta sección, aplicaremos la teoría desarrollada hasta ahora para estudiar la estructura de variedades tóricas normales bidimensionales (superficies tóricas). Describiremos sus singularidades, introduciremos su resolución de singularidades, y clasificación de superficies tóricas completas regulares.

Ahora, supondremos que todos los conos son racionales, poliédricos, fuertemente convexos bidimensionales en $N_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$, estos conos tendrán la siguiente *forma normal* la cual facilitará nuestro estudio de las singularidades de las superficies tóricas.

Proposición 7.2.1 *Sea un $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$ como fuertemente convexo bidimensional. Entonces existe una base $\{e_1, e_2\}$, para N tal que*

$$\sigma = (e_2, de_1 - ke_2),$$

donde $d > 0$ y, $0 \leq k < d$, y $\text{mcd}(d, k) = 1$.

Demostración

Para la prueba haremos uso del algoritmo de la división modificada:

Dado los enteros l y $d > 0$, existen enteros únicos s y k tal que $l = sd - k$ y $0 \leq k < d$.

Sea $\sigma = \text{Cono}(u_1, u_2)$, donde u_i son los vectores originales. Como u_1 es uno de los vectores originales, podemos tomarlo como parte de una base para N , y dejamos que $e_2 = u_1$. Como σ es fuertemente convexo, para cualquier base e_1^j, e_2 de N , tendremos que

$$u_2 = de_1^j + le_2$$

para algún $d \neq 0$. Al reemplazar e_1^j por $-e_1^j$ si fuese necesario, podemos suponer $d > 0$.

Además, hay enteros s, k tales que $l = sd - k$, donde $0 \leq k < d$. Usando dichos enteros s , tenemos que $e_1 = e_1^j + se_2$. Entonces e_1, e_2 también son base para N y

$$u_2 = de_1 + (l - sd)e_2 = de_1 - ke_2.$$

Por lo tanto, $\sigma = \text{Cono}(e_2, de_1 - ke_2)$ como se requería, y el $\text{mcd}(d, k) = 1$ esto es porque u_2 es primitivo. Q

Nombraremos a los enteros d, k de la proposición anterior como los parámetros del cono y $\{e_1, e_2\}$ es la base normalizada para N relativa al σ . La unicidad de d, k se estudiará en la proposición siguiente.

Utilizando la forma normal, a continuación describimos la estructura local del punto p_σ en la variedad tórica afín X_σ . Tenga en cuenta que $N^j \subset N$ es el sub retículo generado por los generadores de rayos del σ , entonces $X_\sigma \subset \mathbb{C}^2/G$ donde $G = N/N^j$ (Ver [2], pag.46). Y en nuestra situación, $N = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, y

$$N^j = \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}(de_1 - ke_2) = d\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2,$$

entonces podemos decir que

$$* G = N/N^j \subset \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

En particular, para las singularidades de superficies tóricas, el grupo finito G es siempre cíclico.

La acción de G sobre \mathbb{C}^2 es determinada por los enteros d, k de la siguiente manera. Escribiremos

$$\mu_d = \{ \zeta \in \mathbb{C} : \zeta^d = 1 \}$$

como el grupo de las d -ésima raíces de unidad en \mathbb{C} . La elección de una raíz de la unidad primitiva define un isomorfismo de grupos $\mu_d \subset \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Proposición 7.2.2. Sea M^j el retículo dual de N^j y sea $m_1, m_2 \in M^j$ el dual de $u_1, u_2 \in N^j$. Usando las coordenadas $x = X^{m_1}, y = X^{m_2}$ de \mathbb{C}^2 , la acción de $\zeta \in \mu_d \subset N/N^j$ en \mathbb{C}^2 está dada por

$$\zeta.(x, y) = (\zeta x, \zeta^k y).$$

Además, $X_\sigma \subset \mathbb{C}^2/\mu_d$ con respecto a la acción.

Demostración

Se muestra que el cociente $N/N^j \approx \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ actúa en el anillo de coordenadas de \mathbb{C}^2 a través de

$$\tau_{u + N^j} \chi^{m^j} = e^{2\pi i m^j \cdot u} \chi^{m^j},$$

donde $m^j \in \check{\sigma} \cap M^j$ y $u = je_1$ para $0 \leq j \leq d - 1$ (Ver [2, pag. 43 - 46]).

Ahora, con un cálculo fácil se muestra que $(m_1, e_1) = 1/d$ y $(m_2, e_1) = k/d$. Por lo tanto, si configuramos el isomorfismo $\mu_d \approx N/N^j$ mapeando $e^{2\pi i j/d} \rightarrow je_1 + N^j$, luego para todos $\zeta = e^{2\pi i j/d} \in \mu_d$, tenemos que

$$\zeta \cdot (x, y) = (e^{2\pi i j/d} x, e^{2\pi i j k/d} y) = (\zeta x, \zeta^k y),$$

justamente lo que queríamos mostrar. Q

A continuación, describimos la ambigüedad leve pero manejable en la forma normal para conos bidimensionales. Dos conos son reticularmente equivalentes si existe una \mathbb{Z} -función lineal biyectiva $\phi : N \rightarrow N$ que lleva un cono al otro. Después de elegir una base para N , tal que las funciones se pueden definir mediante matrices en $GL(2, \mathbb{Z})$.

Proposición 7.2.3. Sea $\sigma = (e_2, de_1 - ke_2)$ y $\tilde{\sigma} = (e_2, \tilde{d}e_1 - \tilde{k}e_2)$ conos en la forma normal, reticularmente equivalentes. Entonces $d = \tilde{d}$ y $\tilde{k} = k$ ó $k\tilde{k} \equiv 1 \pmod{d}$.

Demostración.

Dado que los conos son reticularmente equivalentes, podemos escribir N^j y \tilde{N}^j subretículos de N , y tomando en cuenta la igualdad siguiente $G = N/N^j \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, podemos decir que existe una función \mathbb{Z} -lineal biyectiva $\phi : N \rightarrow N$ tal que $\phi(N^j) = \tilde{N}^j$. Por lo tanto $N/\tilde{N}^j \approx N/N^j$, entonces $\tilde{d} = d$. Para la otra igualdad consideremos una elección adecuada en el proceso de normalización y tomando en cuenta que $\text{mcd}(d, k) = 1$, podemos decir que existe enteros \tilde{d}, \tilde{k} tal que $d\tilde{d} + k\tilde{k} = 1$, por lo tanto, de esta última igualdad podemos decir que $\tilde{k} = k$ ó $k\tilde{k} \equiv 1 \pmod{d}$. Q

Ejemplo 7.2.4. Consideremos el siguiente cono

$$\sigma = (e_2, de_1 - e_2)$$

cuyo parámetro $d > 1$ (este cono no es regular) y $k=1$. Cuya correspondiente superficie tórica X_σ es cono normal racional $\hat{C}_d \subseteq \mathbb{C}^{d+1}$, cuyo cociente $\hat{C}_d / \mathbb{C}^2 / \mu_d$ fue estudiada en un ejemplo anterior. Donde $\zeta \in \mu_d$ actúa en $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vía $\zeta \cdot (x, y) = (\zeta x, \zeta y)$ y el anillo de invariantes es

$$\mathbb{C}[x, y]^{\mu_d} = \mathbb{C} \langle x^d, x^{d+1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d \rangle,$$

entonces

$$X_\sigma \subset \mathbb{C}^2 / \mu_d \subset \text{Spec} \langle \mathbb{C} \langle x^d, x^{d+1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d \rangle \rangle$$

Por otro lado, tenemos la siguiente descripción del anillo de coordenadas para la superficie tórica

$$X_\sigma \subset \text{Spec} \langle \mathbb{C} \langle s, st, st^2, \dots, st^d \rangle \rangle.$$

Ejemplo 7.2.5. Ahora consideremos un cono cuyos parámetros d y $k = d - 1$, entonces $d = k + 1$. Por la proposición 7.2.2, la acción de $G = N/N^j$ en \mathbb{C}^2 está dada por

$$\zeta \cdot (x, y) = (\zeta x, \zeta^{-1}y)$$

Y su anillo de invariantes es

$$\mathbb{C}[x, y]^{\mu_{k+1}} = \mathbb{C} \langle x^{k+1}, y^{k+1}y, \dots, xy \rangle.$$

Además, tenemos el anillo de isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{C}[X, Y, Z] / \langle Z^{k+1} - XY \rangle & \subset & \mathbb{C} \langle x^{k+1}, y^{k+1}, xy \rangle \\ X & \mapsto & x^{k+1} \\ Y & \mapsto & y^{k+1} \\ Z & \mapsto & xy, \end{array}$$

el cual identifica la superficie tórica con a variedad $V \langle Z^{k+1} - XY \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$.

Observación 7.2.6. Observamos que el origen es el único punto singular de la variedad afín del ejemplo 7.2.5 y se denomina punto doble racional (o singularidad Du Val) del tipo A_k . Se llaman puntos dobles porque el término no nulo de grado más bajo en la

ecuación que define tiene grado dos “es decir la multiplicidad de la singularidad es dos”. Los puntos dobles racionales son las singularidades más simples desde cierto punto de vista. Todos los puntos dobles racionales aparecen como singularidades de las superficies del cociente \mathbb{C}^2/G , donde G es un subgrupo finito de $SU(2, \mathbb{C})$. Existe una clasificación completa de dichos puntos en términos de los diagramas de Dynkin de los tipos A_k, D_k, E_6, E_7 y E_8 . Los grupos que corresponden a los diagramas D_k, E_6, E_7, E_8 son no abelianos, por lo tanto, dichos puntos no aparecen en superficies tóricas.

Aquí, hay otro aspecto interesante del ejemplo 7.2.5, recuerde que una variedad normal X es Gorenstein si su divisor canónico es cartier. (Ver [2], Def. 8.2.14)

Proposición 7.2.7. *Para un cono $\sigma = (e_2, de_1 - ke_2)$ en su forma normal, la superficie tórica afín X_σ es Gorenstein si y solo si $k = d - 1$.*

Demostración. Ver [2, pag. 462].

Q

7.2.1 Fracciones continuas y superficies tóricas

Para relacionar las fracciones continuas con las superficies tóricas, comenzamos con la superficie tórica afín X_σ de un cono $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$ en su forma normal con los parámetros d, k . Siempre podemos suponer que $d > k > 0$, de modo que X_σ tiene un único punto singular.

Fracciones continuas de Hirzebruch-Jung.

Cuando construimos una resolución de singularidades de X_σ , el primer paso es refinar el cono $\sigma = \text{Cono}(e_2, de_1 - ke_2)$ de un abanico que contiene los conos bidimensionales

$$\sigma^j = \text{cono}(e_1, e_2) \quad \text{y} \quad \sigma^{jj} = \text{cono}(e_1, de_1 - ke_2).$$

El primero cono σ^j es regular, pero el segundo cono σ^{jj} puede no serlo. Sin embargo, observamos que el cono σ^{jj} tiene parámetros k, k_1 que satisfacen

$$d = b_1 k - k_1,$$

donde $b_1 \geq 2, 0 \leq k_1 < k$. Usando la base normalizada para N relativo a σ^{jj} , insertamos un nuevo rayo y obtenemos un nuevo cono regular y un segundo cono posiblemente no compacto con los parámetros k_1, k_2 , donde

$$k = b_2 k_1 - k_2$$

Hacer esto repetidamente produce un algoritmo euclidiano modificado

$$\begin{aligned} d &= b_1 k - k_1 \\ k &= b_2 k_1 - k_2 \\ &: \\ k_{r-3} &= b_{r-1} k_{r-2} - k_{r-1} \\ k_{r-2} &= b_r k_{r-1} \end{aligned} \tag{7.11}$$

que calcula los parámetros de los nuevos conos producidos a medida que subdividimos sucesivamente para producir el abanico dando la resolución de singularidades. El proceso termina con $k_r = 0$ para algún r como se muestra, ya que como en el algoritmo euclidiano habitual, los k_i son una secuencia estrictamente decreciente de números no negativos. Tenemos que los $b_i \geq 2$ para todo i .

Por lo tanto las ecuaciones (7.11) se pueden reorganizar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} d/k &= b_1 - k_1/k \\ k/k_1 &= b_2 - k_2/k_1 \\ &: \\ k_{r-3}/k_{r-2} &= b_{r-1} - k_{r-1}/k_{r-2} \\ k_{r-2}/k_{r-1} &= b_r \end{aligned} \tag{7.12}$$

consiguiendo un tipo de expansión de fracción continua para el número racional d/k , con signos negativos:

$$d/k = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_r}}} \tag{7.13}$$

Esta es la expansión de fracción continua de Hirzebruch-Jung de d/k . Utilizaremos la siguiente notación para representar mejor la expresión anterior debido a su complejidad en la escritura.

$$d/k = [[b_1, b_2, \dots, b_r]].$$

Los enteros b_i son los cocientes parciales de la fracción continua de Hirzebruch-Jung, y las fracciones truncado continuo de Hirzebruch-Jung

$$[[b_1, b_2, \dots, b_i]], 1 \leq i \leq r,$$

son convergentes.

Ejemplo 7.2.1.1 Consideremos el número racional $17/11$. La expansión fraccional de Hirzebruch-Jung continuo es

$$7/11 = [[2, 3, 2, 2, 2, 2]].$$

Proposición 7.2.1.2 Sea $d > k > 0$ enteros con $\text{mcd}(d, k) = 1$ y sea $d/k = [[b_1, b_2, \dots, b_r]]$. Defina las secuencias P_i y Q_i recursivamente de la siguiente manera,

$$P_0 = 1, \quad Q_0 = 0 \tag{7.14}$$

$$P_1 = b_1, \quad Q_1 = 1$$

para todo $2 \leq i \leq r$, sea

$$P_i = b_i P_{i-1} - P_{i-2} \tag{7.15}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} - Q_{i-2}.$$

Entonces los P_i, Q_i satisfacen:

- a) Los P_i y Q_i son sucesiones enteras crecientes.
- b) $[[b_1, \dots, b_i]] = P_i/Q_i$ para todo $1 \leq i \leq r$.
- c) $P_{i-1}Q_i - P_iQ_{i-1} = 1$ para todo $1 \leq i \leq r$.
- d) La sucesión convergente dada por P_i y Q_i forman una secuencia estrictamente decreciente:

$$\frac{d}{k} = \frac{P_r}{Q_r} < \frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}} < \dots < \frac{P_1}{Q_1}.$$

Demostración

La parte (a) Mostrar esta primera parte, no es otra cosa que usar adecuadamente las igualdades dadas por (7.14) y (7.15).

La parte (b) Para esta segunda parte, primero observe que la expresión en el lado derecho de (7.13.) tiene sentido cuando los b_j son cualquier número racional (no solo enteros) de modo que todos los denominadores en (7.13) son distintos de cero. Ahora mostraremos que las secuencias definidas por (7.15) satisfacen

$$[[b_1, \dots, b_s]] = P_s/Q_s$$

para todas los b_1, \dots, b_s . Para la prueba usaremos inducción sobre la longitud s con referencia en los b_i .

Cuando $s = 1$, tenemos $[[b_1]] = b_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ por (7.14). Ahora supongamos que el resultado es válido para todas las listas de longitud t y consideremos la expresión

$$[[b_1, \dots, b_{t+1}]] = \frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t b_i b_j}{b_{t+1} - \frac{1}{b_{t+1}}},$$

donde el lado derecho proviene a consecuencia de los b_i de longitud t . Por la hipótesis inductiva, esto igual

$$\frac{\frac{b_{t-1} - \frac{1}{b_{t+1}}}{b_{t+1}} \sum_{i=1}^{t-1} P_{t-1} - P_{t-2}}{b_{t+1} - \frac{1}{b_{t+1}} \sum_{i=1}^t Q_t - Q_{t-1}}.$$

Por las recurrencias (7.15), esto es igual

$$\frac{P_{t-1} - \frac{1}{b_{t+1}} P_{t-1}}{Q_t - \frac{1}{b_{t+1}} Q_{t-1}} = \frac{P_{t-1} - P_{t-1}}{b_{t+1} Q_t - Q_{t-1}} = \frac{P_{t+1}}{Q_{t+1}},$$

que es justamente lo que queríamos mostrar.

La parte (c) nuevamente usando inducción sobre i . Cuando $i = 1$ se obtiene directamente (7.14).

Ahora, supongamos que el resultado sea válido para $i \leq s$, y considere $i = s + 1$. Usando las recurrencias (7.15), tenemos

$$\begin{aligned} P_s Q_{s+1} - P_{s+1} Q_s &= P_s (b_s Q_s - Q_{s-1}) - (b_s P_s - P_{s-1}) Q_s \\ &= P_{s-1} Q_s - P_s Q_{s-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

por la hipótesis inductiva.

La parte (d) Por la parte (b), para cada $1 \leq i \leq r - 1$, tenemos

$$\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} = \frac{P_i}{Q_i} + \frac{1}{Q_{i-1}Q_i}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{P_i}{Q_i} < \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}$$

pues $Q_{i-1}Q_i > 0$ por la parte (a), con lo que concluye la prueba. Q

Veamos ahora la relación entre las fracciones continuas de Hirzebruch-Jung y la resolución de singularidades. Cuando σ es un cono con parámetros $d > k > 0$, el proceso de cálculo de fracciones continuas de Hirzebruch-Jung de d/k , produce un método conveniente para encontrar un refinamiento de σ , de tal manera que $\phi : \bar{X} \rightarrow X_\sigma$ es una resolución tórica de singularidades.

Teorema 7.2.1.3. *Sea $\sigma = (e_2, de_1 - ke_2)$ en su forma normal. Sea $u_0 = e_2$ y considere los enteros P_i y Q_i , de la Proposición 7.2.1.2, para construir los vectores*

$$u_i = P_{i-1}e_1 - Q_{i-1}e_2, \quad 1 \leq i \leq r + 1.$$

Entonces los conos se determina de la manera siguiente

$$\sigma_i = \text{Cono}(u_{i-1}, u_i), \quad 1 \leq i \leq r + 1,$$

los cuales cumplen las siguientes propiedades:

- a) *Cada σ_i es un cono regular y u_{i-1}, u_i son los generadores de los rayos.*
- b) *Para cada i , $\sigma_{i+1} \cap \sigma_i = \text{Cono}(u_i)$.*
- c) *$\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{r+1} = \sigma$, entonces el abanico \sum consiste de los σ_i y sus caras determinando un refinamiento regular de σ .*
- d) *El morfismo tórico $\phi : X^\Sigma \rightarrow X_\sigma$ es una resolución de singularidades.*

Demostración.

La parte (a) El primer enunciado, se desprenden fácilmente de la parte (c) de la Proposición 7.2.1.2.

La parte (b) Para la segunda parte, observamos que la relación $-Q_{i-1}/P_{i-1}$ representa la pendiente de la línea a través de u_i en el sistema de coordenadas relativo a la base normalizada e_1, e_2 para σ . Por parte (d) de la Proposición 7.2.12, estas pendientes forman una secuencia estrictamente decreciente para $i \geq 0$, lo que implica justamente lo que buscamos.

La parte (c) Este penúltimo enunciado, se consigue gracias a la parte (b) al señalar que $u_0 = e_2$ y $P_r/Q_r = d/k$, por lo que $u_{r+1} = de_1 - ke_2$. Por lo tanto, los conos σ_i completan σ .

La parte (d) Para mostrar esta última parte se sigue el razonamiento utilizado en el ejemplo 7.2.5. Q

7.3 Resolución de singularidades

Sea X una superficie tórica normal, y denotemos por X_{sing} el conjunto finito de puntos singulares de X (posiblemente vacío).

Definición 7.3.1. *Un morfismo propio $\phi : Y \rightarrow X$ es una resolución de singularidades de X si Y es una superficie regular y ϕ induce un isomorfismo de variedades*

$$Y \setminus \phi^{-1}(X_{sing}) \xrightarrow{\cong} X \setminus X_{sing}. \quad (7.16)$$

Tal función modifica X para producir una variedad regular cambiando la regularidad local $X \mathbf{z} X_{sing}$. Uno de los aspectos más atractivos de las variedades tóricas es la forma en que muchas preguntas que son difíciles para las variedades generales, en el caso tórico admiten soluciones simples y concretas. El problema de encontrar resoluciones de singularidades es un ejemplo perfecto. Nosotros ilustraremos esto construyendo resoluciones explícitas de singularidades de las superficies tóricas a partir de ejemplos anteriores.

En el capítulo siguiente presentaremos ejemplos, donde construimos la resolución tórica

de superficie tórica afín con solo un punto singular, sin embargo las mismas técnicas que se usaran pueden ser aplicadas a cualquier superficie tórica normal X^Σ .

Teorema 7.3.2. *Sea X^Σ una superficie tórica normal. Entonces existe un abanico regular Σ_j refinamiento de Σ , tal que el morfismo tórico $\phi : X^{\Sigma_j} \rightarrow X^\Sigma$ asociado es una resolución de singularidades.*

Demostración. Para la prueba del teorema, basta con mostrar la existencia de un abanico regular Σ_j el cual sea el refinamiento de Σ . Ya que, al considerar la función identidad sobre el retículo N , el cual es compatible con los abanicos Σ_j y Σ como en la Definición 7.1.14 y por el teorema 7.1.16 se obtiene el morfismo tórico

$$\phi : X^{\Sigma_j} \rightarrow X^\Sigma.$$

Ahora, mostraremos el resultado por inducción en un entero invariante de abanicos que mide la complejidad de las singularidades en las superficies correspondientes. Sea $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ conos bidimensionales en un abanico Σ . Para cada i , escribiremos N_i como un sub retículo de N generado por los rayos generadores de σ_i . Entonces definimos

$$s(\Sigma) = \sum_{i=1}^l (mult(\sigma_i) - 1),$$

donde $mult(\sigma_i) = [N : N_i]$.

Etapa base, si $s(\Sigma) = 0$, entonces $l = 0$ ó $mult(\sigma_i) = 1$ para todo i . Entonces, cualquiera sea el cono σ_i será regular por lo tanto Σ es un abanico regular y X^Σ es regular.

Para la etapa inductiva, asumiremos la existencia de un refinamiento regular que está bien definido para todo Σ tal que $s(\Sigma) < s$ y un abanico Σ_j tal que $s(\Sigma_j) = s$.

Ahora, si $s \geq 1$, entonces existe al menos un cono no regular σ_i en Σ y por el Proposición 7.2.1, existe una base e_1, e_2 para N tal que $\sigma_i = (e_2, de_1 - ke_2)$ con parámetros $d > 0$, $0 \leq k < d$, y $mcd(d, k) = 1$. Ahora, considerando el refinamiento Σ_j de Σ obtenido por la subdivisión del cono σ_i en dos nuevos conos

$$\begin{aligned} \sigma_i^j &= (e_2, e_1) \\ \sigma_i^{jj} &= (e_1, de_1 - ke_2) \end{aligned}$$

junto con un nuevo cono de dimensión 1, $\rho = (e_1)$, debemos mostrar que $s(\sum_j) < s(\sum)$ y gracias a la hipótesis inductiva concluir la prueba.

En efecto, en $s(\sum)$, los términos correspondientes para σ_j donde $j \neq i$ no se modifican. Por otro lado, el cono σ^j es regular desde que e_1, e_2 es la base normalizada de N con respecto a σ_i , esto implica que contribuye un término cero en $s(\sum_j)$. Ahora consideremos el cono σ_i^{jj} ; de tal manera que primero calcularemos su contribución sobre $s(\sum_j)$, para luego determinar los parámetros de σ_i^{jj} .

En términos de la base e_1, e_2 para N , la función \mathbb{Z} -lineal está definido por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(que es una “rotación de 90 grados”) tomada σ_i^{jj} sobre $(e_2, ke_1 + de_2)$. Desde que $A \in GL(2, \mathbb{Z})$, esto define un automorfismo de N , y por lo tanto σ_i^{jj} tendrá los mismos parámetros que $(e_2, de_1 - ke_2)$. Ahora, aplicando el algoritmo de Euclides modificado como en la Proposición 7.2.1 podemos escribir

$$d = sk - l \tag{7.17}$$

donde $0 \leq l < k$. Además, $\text{mcd}(d, k) = 1$, entonces tendremos que $\text{mcd}(k, l) = 1$. Por lo tanto, el cono σ_i^{jj} tiene los parámetros k y l obtenidos apartir de (7.17). Ahora, desde que $k < d$, N_i^{jj} es el sub retículo generado por los rayos generadore de σ_i^{jj} , entonces por la relación, $* G = N/N^j \subset \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, se tiene que

$$[N : N_i^{jj}] = k < [N : N_i] = d.$$

Por lo tanto $s(\sum_j) < s(\sum)$, lo cual concluye la prueba inductiva. Q

Veremos en la siguiente sección que en el caso afín, el refinamiento que da la resolución de singularidades de X_σ tiene una descripción muy hermosa. En los ejemplos del siguiente capítulo veremos como el refinamiento del cono produce una subdivisión a lo largo de los rayos a través de la base de Hilbert (los elementos irreducibles) del semigrupo $\sigma \cap N$. Se puede construir una resolución de una singularidad de superficie tórica no normal saturando primero el semigrupo asociado, y luego aplicar los resultados de esta sección.

También existen resoluciones tóricas de singularidades para variedades tóricas de dimensión tres y más grandes. Sin embargo, solo propondremos el caso bidimensional.



Capítulo 8

8 Ejemplos de resolución tórica de singularidades

En este capítulo veremos ejemplos aplicativos de todo lo desarrollado anteriormente, para ello debemos tener en cuenta que el problema de la resolución de singularidades de superficies tóricas se reduce a refinar conos no regulares. Refinar un cono bidimensional σ significa introducir rayos τ . Por lo tanto, para resolver las singularidades en X_σ debemos insertar los rayos τ de tal manera que al subdividir σ logremos obtener conos regulares. Entonces nuestro problema a resolver será el siguiente:

Problema 1. Sea σ un cono en $N_{\mathbb{R}}$ con generadores u, v . Necesitamos encontrar una secuencia $u = u_1, \dots, u_n = v$ de vectores primitivos en σ tal que los pares subsecuentes forman una base para el retículo. Esto da un buen refinamiento de σ . La idea podemos ilustrar en la siguiente gráfica: Ahora empezaremos recordando que si $\sigma = (e_1, e_2)$ nos

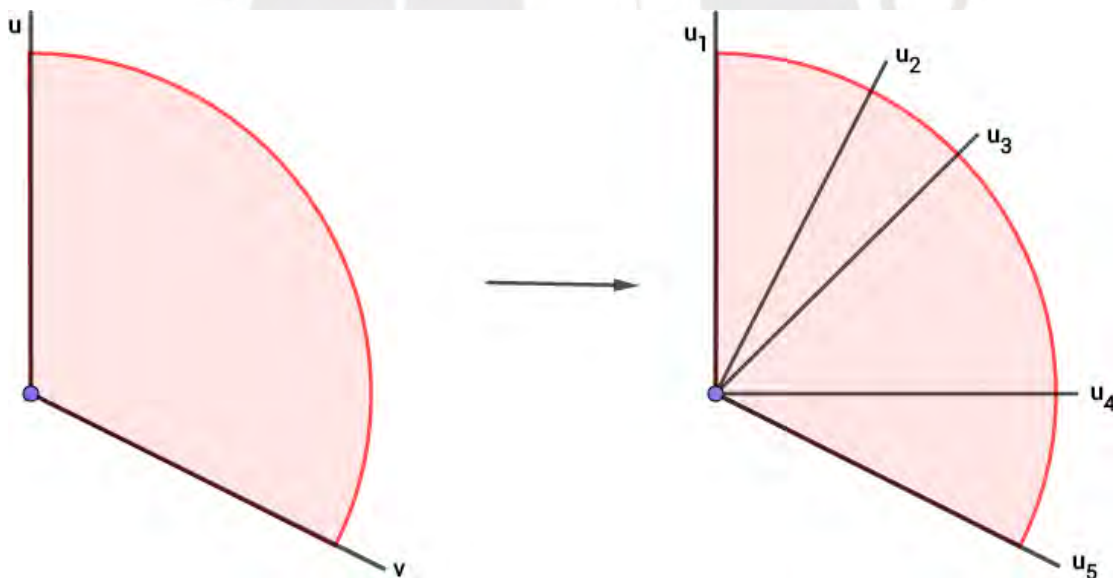


Figura 22: Refinamiento de un cono

proporciona una superficie tórica afín $X_\sigma = \mathbb{C}^2$ y además que los generadores de σ se corresponden con un punto fijo $x_0 = \{0\}$ en \mathbb{C}^2 . Nuestro primer ejemplo muestra la

explosión en dicho punto fijo $x = x_\sigma$ de la acción tórica. Esto se obtiene adicionando la suma de dos vectores adyacentes generadores de σ , este ejemplo es un modelo para resolver singularidades.

Ejemplo 8.1.1 Consideremos el siguiente abanico $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$

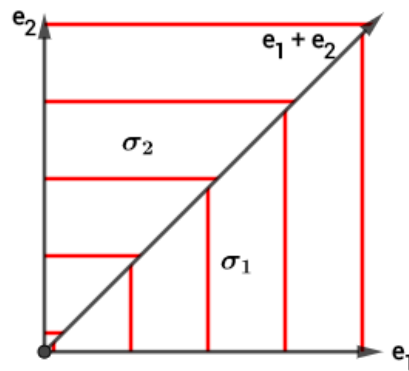


Figura 23: Refinamiento de $\sigma = (e_1, e_2)$

Ahora, veamos en el caso general para un cono racional normal.

Ejemplo 8.1.2. Considere el cono racional normal de grado d , la superficie tórica afín X_σ generada por el $\sigma = (e_2, de_1 - e_2)$ bidimensional estudiada en el Ejemplo 7.2.4. Sea el abanico de la figura el cual se obtiene insertando $\tau = (e_1)$ subdividiendo al cono σ en dos conos bidimensionales:

$$\sigma_1 = (e_2, e_1)$$

$$\sigma_2 = (e_1, de_1 - e_2)$$

Ahora, usamos algunos resultados de capítulos anteriores. Iniciamos con la función identidad en el retículo N el cual es compatible con los abanicos Σ y σ como en la definición 7.1.14, además por el teorema 7.1.16, tenemos un morfismo de expansión tórica

$$\phi : X^\Sigma \dashrightarrow X_\sigma \tag{8.18}$$

Observamos que tanto σ_1 como σ_2 (así como todas sus caras) son conos regulares. Luego por teorema 7.1.13 podemos concluir que X_σ es una superficie regular. Además, el mor-

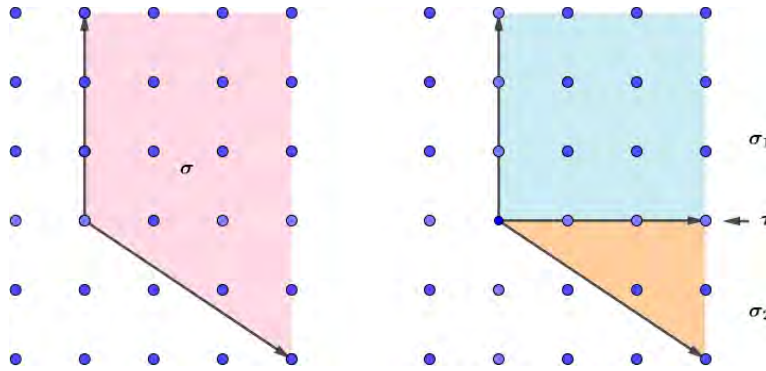


Figura 24: Refinamiento de σ

fismo tórico ϕ es propio según el Teorema 7.1.18 ya que Σ es un refinamiento de σ . Finalmente, podemos afirmar que ϕ satisface (7.16). Esto proviene de la correspondencia Cono-Órbita en las dos superficies: si p_σ es el punto distinguido correspondiente al cono bidimensional σ (el punto singular de X_σ en el origen), entonces ϕ se restringe a un isomorfismo.

$$X^\Sigma \setminus \phi^{-1}(p_\sigma) \approx X_\sigma \setminus \{p_\sigma\} = (X_\sigma)_{\text{regular}}.$$

La imagen inversa $E = \phi^{-1}(p_\sigma)$ es la curva en X^Σ dada por la cerradura de la T -órbita $O(\tau)$ correspondiente al rayo τ . Es decir, el punto singular “explota” a $E \approx \mathbb{P}^1$ en la superficie regular. Por lo expuesto podemos concluir que a partir de \bar{X} y el morfismo (8.18) obtenemos una resolución tórica de singularidades del cono normal racional. E denota al divisor excepcional en la superficie regular.

Ejemplo 8.1.3 Ahora observemos un ejemplo concreto considerando el ejemplo anterior pero para el caso $d = 4$,

$$\sigma = (e_2, 4e_1 - 3e_2)$$

para el cual la superficie X_σ tiene un punto doble racional del tipo A_3 . En este caso no será difícil encontrar las subdivisiones el cual genera un conjunto de conos regulares. Similar al caso anterior vamos a insertar tres rayos nuevos $\sigma_1 = (e_1)$, $\sigma_2 = (2e_1 - e_2)$, $\sigma_3 = (3e_1 - 2e_2)$ para obtener un abanico que consiste en cuatro conos bidimensionales y

sus caras.

El abanico producido por esta subdivisión es algo más fácil de visualizar si dibujamos los conos relativos a una base diferente, digamos u_1, u_2 para N . Para $u_1 = e_2$ y $u_2 = e_1 - e_2$, el cono $\sigma = (u_1, u_1 + 4u_2)$ y el abanico con conos de dimensión máxima

$$\sigma_1 = (u_1, u_1 + u_2)$$

$$\sigma_2 = (u_1 + u_2, u_1 + 2u_2)$$

$$\sigma_3 = (u_1 + 2u_2, u_1 + 3u_2)$$

$$\sigma_4 = (u_1 + 3u_2, u_1 + 4u_2)$$

Podemos observar que los conos mencionados son regulares por lo tanto X^Σ es una

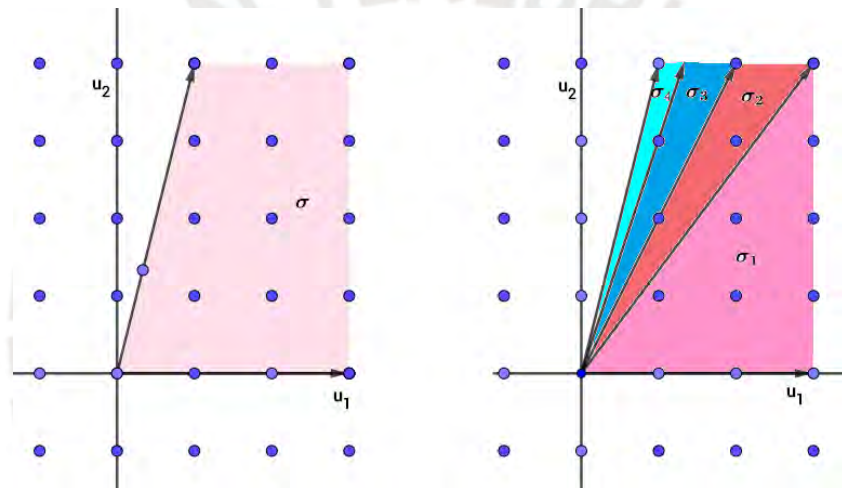


Figura 25: σ y el refinamiento Σ

superficie regular. Ya que Σ es un refinamiento de σ , tenemos un morfismo tórico propio

$$\phi : X^\Sigma \dashrightarrow X_\sigma$$

como en el ejemplo anterior, ϕ restringido nos da un isomorfismo de $X^\Sigma \setminus \phi^{-1}(p_\sigma)$ en $X_\sigma \setminus \{p_\sigma\}$. En este caso, el divisor excepcional $E = \phi^{-1}(p_\sigma)$ es la unión

$$E = V(\tau_1) \cup V(\tau_2) \cup V(\tau_3)$$

en X^Σ . Las curvas $V(\tau_i)$ son isomorfos a \mathbb{P}^1 . Los primeros dos se cruzan transversalmente en el punto fijo de la acción T en X^Σ correspondiente a σ_2 , mientras los segundo se cruzan transversalmente en el punto fijo correspondiente a σ_3 .

En estos ejemplos, construimos resoluciones tóricas de superficies tóricas afines con un solo punto singular. Sin embargo la misma técnica se puede aplicar a cualquier superficie tórica normal X^Σ . Veamos dos ejemplos similares a los anteriores para fortalecer lo desarrollado hasta el momento.

Ejemplo 8.1.4 Si consideramos el caso para $d = 2$, obtenemos $\sigma_3 = (e_2, 2e_1 - e_2)$; correspondiente a la variedad tórica afín $X_{\sigma_3} = V(XZ - Y^2) \subset \mathbb{C}^3$, el cual es singular en 0 .

Refinar σ_3 es simplemente insertar el rayo e_1 , con lo cual σ_3 se subdivide en los conos regulares $\sigma_1 = (e_2, e_1)$ y $\sigma_2 = (e_1, 2e_1 - 2)$.

Observamos en este ejemplo que fue algo obvio el poder insertar un rayo. Ahora en el siguiente ejemplo veamos un cono en el cual la subdivisión no será tan obvia.

Ejemplo 8.1.5 Consideremos el cono $\sigma = (5e_1 + 3e_2, e_1 + e_2)$. En este caso no es inmediato tener que insertar un rayo; sin embargo, si realizamos un cambio de base $u_1 = 3e_1 + 2e_2$ y $u_2 = 5e_1 + 3e_2$; lo cual convierte al cono original en un cono $\sigma = (u_2, 2u_2 - u_1)$ en su forma normal; y resulta que a través de este cambio de base conseguimos un cono en el que es obvio insertar un rayo. Este cambio de base es el ingrediente principal para resolver singularidades una superficie.

Observación 8.1.6

- El cambio de base al cual nos referimos es equivalente a obtener un cono en su forma normal como en la proposición 7.2.1.
- En los ejemplos anteriores insertamos rayos de tal manera que subdividimos al cono σ obteniendo un Σ . ¿Cómo obtenemos dichos rayos, para poder obtener el

conjunto de conos regulares?; la respuesta está en usar Fracciones continuas de Hirzebruch-Jung, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.1.7 Retomando el ejemplo 8.1.3 vamos a determinar el refinamiento de σ para obtener los conos regulares, usando las fracciones continuas de Hirzebruch-Jung. Veamos, en primer lugar tenemos σ en su forma normal

$$\sigma = (e_2, 4e_1 - 3e_2)$$

Sea entonces el número racional a considerar $4/3$, y usando el algoritmo modificado Euclideo obtenemos lo siguiente:

$$4 = 2 \cdot 3 - 2$$

$$3 = 2 \cdot 2 - 1$$

$$2 = 2 \cdot 1$$

Entonces $b_1 = b_2 = b_3 = 2$, y

$$4/3 = [2, 2, 2]$$

Ahora considerando la proposición 7.2.1.2, obtenemos

$$P_0 = 1, \quad Q_0 = 0$$

$$P_1 = 2, \quad Q_1 = 1$$

$$P_2 = b_2 P_1 - P_0 = 3, \quad Q_2 = b_2 Q_1 - Q_0 = 2$$

$$P_3 = b_3 P_2 - P_1 = 4, \quad Q_3 = b_3 Q_2 - Q_1 = 3$$

por el teorema 7.2.1.3, obtenemos

$$u_0 = e_2, \quad u_1 = e_1, \quad u_2 = 2e_1 - e_2, \quad u_3 = 3e_1 - 2e_2, \quad u_4 = 4e_1 - 3e_2$$

y los conos

$$\sigma_1 = (e_2, e_1)$$

$$\sigma_2 = (e_1, 2e_1 - e_2)$$

$$\sigma_3 = (2e_1 - e_2, 3e_1 - 2e_2)$$

$$\sigma_4 = (3e_1 - 2e_2, 4e_1 - 3e_2).$$

Veamos en la gráfica como los σ_i son un refinamiento de σ .

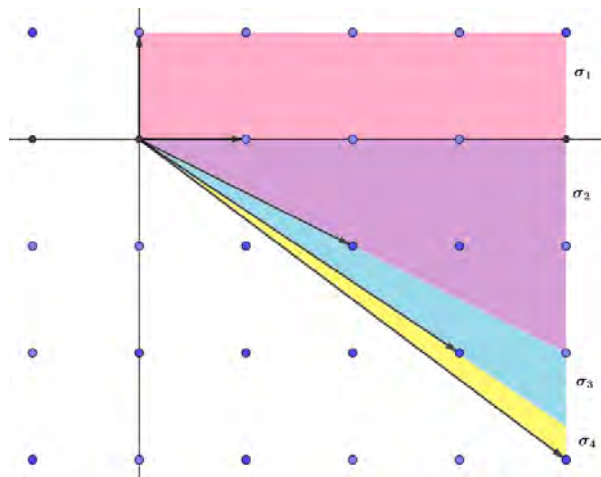


Figura 26: σ y el refinamiento Σ

Para culminar este capítulo, veamos el proceso de una resolución tórica de singularidades de una superficie que es generada por σ

Proceso de una resolución tórica de una superficie generada por σ

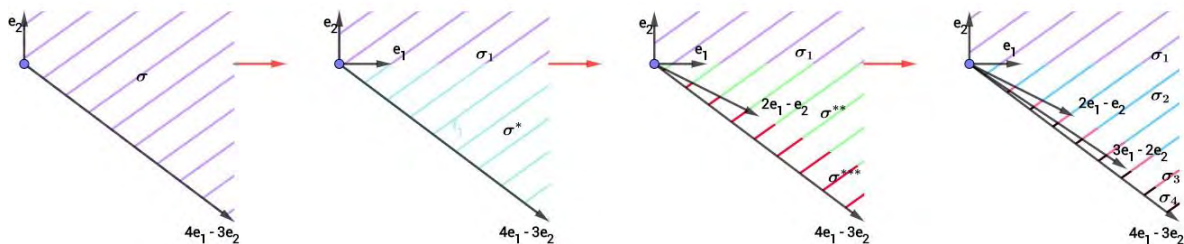


Figura 27: $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$

Vamos a recopilar todo lo realizado anteriormente siguiendo el proceso de resolución tórica como se muestra en la imagen anterior, empezaremos con introducir el primer rayo $\tau_1 = (e_1)$ como se observa en la segunda imagen; entonces se genera dos conos de los cuales σ_1 es regular, por lo tanto la superficie que genere dicho cono será regular $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}^2$; ahora bien el otro cono σ^* no es regular entonces genera una superficie no regular

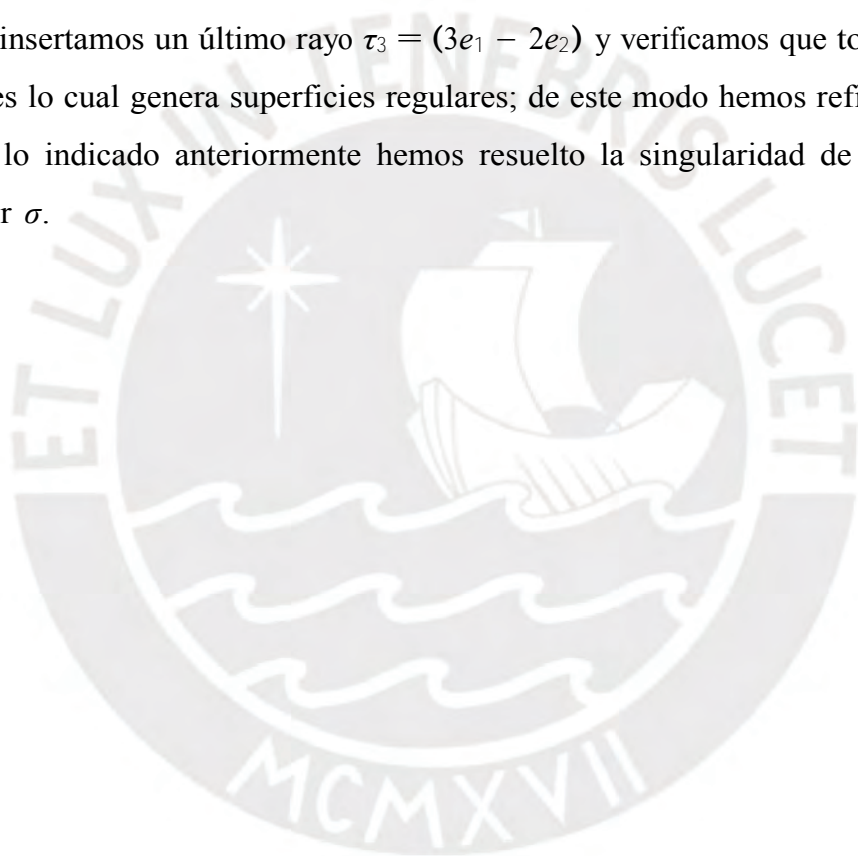
$$\sigma^* = (e_1, 4e_1 - 3e_2) \mapsto \check{\sigma}^* = (-e_2^*, 3e_1^* - 4e_2^*) \mapsto S_{\sigma^*} = (-e_2^*, 3e_1^* - 4e_2^*, e_1 - 2e_2) \mapsto$$

$$R_{\sigma_*} = \mathbb{C} [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] / (\zeta^3 - \zeta_2 \zeta^2) \mapsto X_{\sigma_*} = V(z^3 - x^2 y).$$

Paso siguiente, introducimos otro rayo $\tau_2 = (2e_1 - e_2)$ y nuevamente observamos que se genera ahora tres conos como en la tercera imagen del proceso, y entonces verificamos que σ_1, σ^{**} son regulares pero aún queda un cono σ^{***} que no es regular el cual genera otra superficie no regular

$$\begin{aligned} \sigma^{***} = (2e_1 - e_2, 4e_1 - 3e_2) \mapsto \check{\sigma}^{***} = (-e_1^* - 2e_2^*, -3e_1^* + 4e_2^*, -2e_1^* - 3e_2^*) \mapsto S_{\sigma^{***}} = \\ (-e_1^* - 2e_2^*, -3e_1^* + 4e_2^*, -2e_1^* - 3e_2^*) \mapsto R_{\sigma^{***}} = \mathbb{C} [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] / (\zeta_3^2 - \zeta_1 \zeta_2) \mapsto X_{\sigma^{***}} = \\ V(z^2 - xy). \end{aligned}$$

Finalmente insertamos un último rayo $\tau_3 = (3e_1 - 2e_2)$ y verificamos que todos los conos son regulares lo cual genera superficies regulares; de este modo hemos refinado el cono y por todo lo indicado anteriormente hemos resuelto la singularidad de la superficie generada por σ .



Bibliografía

- [1] [Bras]Jean-Paul Brasselet : Introduction to Toric Varieties, Marseille, 2006.
- [2] [Cox]David Cox, John Little, Hal Schenck : Toric Varieties, American Mathematical Society, 2011.
- [3] [Cox2]David Cox, John Little, Donal O'Shea : Using Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Nueva York, 1998.
- [4] [Cox3]David Cox : Lectures on Toric Varieties, CIMPA School on Commutative Algebra, Hanoi, 2005.
- [5] [Dem]Michel Demazure : Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)3,(1970), 507-588.
- [6] [Ewa]Günter Ewald : Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- [7] [Ful]William Fulton : Introduction to Toric Varieties, Princeton University Press, New Jersey, 1993.
- [8] [Hart]Robin Hartshorne : Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Nueva York, 1977.
[Hung]Thomas W. Hungerford : Algebra, Springer-Verlag, Nueva York, 1974.
- [9] [HI] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. Ann. of Math. (1964), p.109– 203; ibid. 205–326.
- [10] [Koop]Tjalling C. Koopmans : Activity Analysis of Production and Allocation, John Wiley Sons, Nueva York, 1951.
- [11] [Mac]James MacLaurin : The Resolution of Toric Singularities, University of South Wales, 2006.
- [12] [Mil]Ezra Miller : What is a Toric Variety, Notices of the AMS (55)5, (2008), 586-587.

- [13] [Oda]Tadao Oda : Convex Bodies and Algebraic Geometry: An Introduction to the Theory of Toric Varieties, Springer-Verlag, Alemania, 1988.
- [14] [Reid]M. Reid : Undergraduate Commutative Algebra, C.U.P., Cambridge, 1995.
- [15] [Rui] Diego Ruiz : Geometría Tórica, Universidad de Cantabria, España, 2013.
- [16] [Ver]Helena Verrill, David Joyner : Notes on toric varieties, 2002.

