

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES: UNA VISIÓN DESDE LA
MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS CON ESTUDIANTES DEL
CUARTO GRADO DE SECUNDARIA.**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas
Presentada por

GLADYS LEONOR JARAMILLO CAPITÁN

Dirigida por

VERÓNICA NEIRA FERNÁNDEZ

San Miguel, 2018

RESUMEN

La investigación tiene como objetivo general, el estudio del aprendizaje de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos variables por medio de la categorización de problemas contextualizados de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC).

La tesis es realizada con el marco teórico anterior, en su fase didáctica, que tiene su modelo didáctico denominado “Modelo Didáctico de la Matemática en Contexto” (MODIMACO) , utilizando uno de sus bloques: Estrategia Didáctica Matemática en Contexto.

La metodología que utilizamos es el Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING) en su etapa Central, ya que ella nos permite analizar el tópico matemático: Sistemas de Ecuaciones con dos Variables, verificar la profundidad del tema, identificar la notación con la que se describe y analizar sus aplicaciones.

Para el desarrollo de la Didáctica Matemática en Contexto, que tiene nueve etapas, se utiliza la etapa central de DIPCING, que está presente en todo medio de aprendizaje.

Se trabaja en grupos de tres estudiantes: El líder académico, el líder emocional y el líder de trabajo.

Luego diseñamos una actividad didáctica con problemas contextualizados de primera y segunda categoría, cuya función es evaluar el aprendizaje del tópico en investigación con los lineamientos del marco teórico.

Esta actividad se aplica a una muestra de 20 estudiantes del quinto de secundaria de la Institución Educativa “El Paraíso de Huachipa“, quienes en cuarto de secundaria desarrollaron este tópico. De esta población analizamos sus respuestas, tomamos una muestra de tres estudiantes cuyas actividades didácticas nos permiten realizar la descripción, explicación y análisis de los resultados.

Concluimos que el tópico en investigación se presenta con dificultades didácticas y origina que los estudiantes tengan dificultades cognitivas, y estas se incrementan al presentarles problemas de segunda categoría.

ABSTRACT

The research has as a general objective, the study of the Learning of the Systems of Linear Equations with two variables by means of the categorization of contextualized problems of the Mathematics in the Context of the Sciences (MCC).

The thesis is carried out with the previous theoretical framework, in its didactic phase, which has its didactic model called "Teaching Model of Mathematics in Context" (MODIMACO), using one of its blocks: Mathematical Teaching Strategy in Context.

The methodology that we use is the Design of Programs of study of the Basic Sciences in Engineering (DIPCING) in its Central stage, since it allows us to analyze the mathematical topic: Systems of Equations with two Variables, verify the depth of the topic, identify the notation with which your applications are described and analyzed.

For the development of Mathematical Didactics in Context, which has nine stages, the central stage of DIPCING is used, which is present in all learning environments.

We work in groups of three students: the academic leader, the emotional leader and the work leader.

Then we designed a didactic activity with contextualized problems of first and second category, whose function is to evaluate the learning of the topic in research with the guidelines of the theoretical framework.

This activity is applied to a sample of 20 students of the fifth year of high school of the Educational Institution "El Paraíso de Huachipa", who in the fourth year of secondary school developed this topic. From this population we analyze their answers, we take a sample of three students whose didactic activities allow us to perform the description, explanation and analysis of the results.

We conclude that the topic in research is presented with didactic difficulties and causes students to have cognitive difficulties, and these are increased by presenting problems of second category.

Keywords: Context; Didactic Model; Teaching Strategy; Mathematical model.

AGRADECIMIENTOS

Iniciaré por dar un gran agradecimiento a mi estimada asesora de tesis, la Magister Verónica Neira Fernández, por su valiosa orientación, apoyo moral y académico. Ella escuchó mis dudas y desalientos y, a pesar de ello, me animó a seguir adelante. Gracias por sus horas de dedicación, por compartir conmigo sus conocimientos y su experiencia en la elaboración de la presente tesis.

A la Doctora Patricia Camarena, quien siempre nos dio su apoyo incondicional en el desarrollo de este trabajo de investigación.

A la Doctora Jesús Flores, por ser guía, por compartir su sapiencia, así como su experiencia y por su perseverancia en el apoyo de la culminación de esta tesis.

A la Magister Nélica Medina, por brindarme su apoyo y estímulo.

A mis queridos estudiantes del colegio 1224 “Paraíso de Huachipa”, que colaboraron con su participación en el desarrollo y aplicación de la actividad didáctica en el cual se aplicó nuestra tesis.

A mis padres por hacer de mí una persona persistente en el estudio.

A mi esposo Martín del cual siempre tuve su apoyo incondicional en todo momento.

A mi querida hija Olga María, por su comprensión y apoyo en los recursos informáticos.

A mi pequeño hijo Augusto que me acompañó en mis horas de estudio.

A todos y cada uno de mis hermanos quienes siempre me dieron su apoyo, estímulo y comprensión cuando el cansancio me agobiaba.

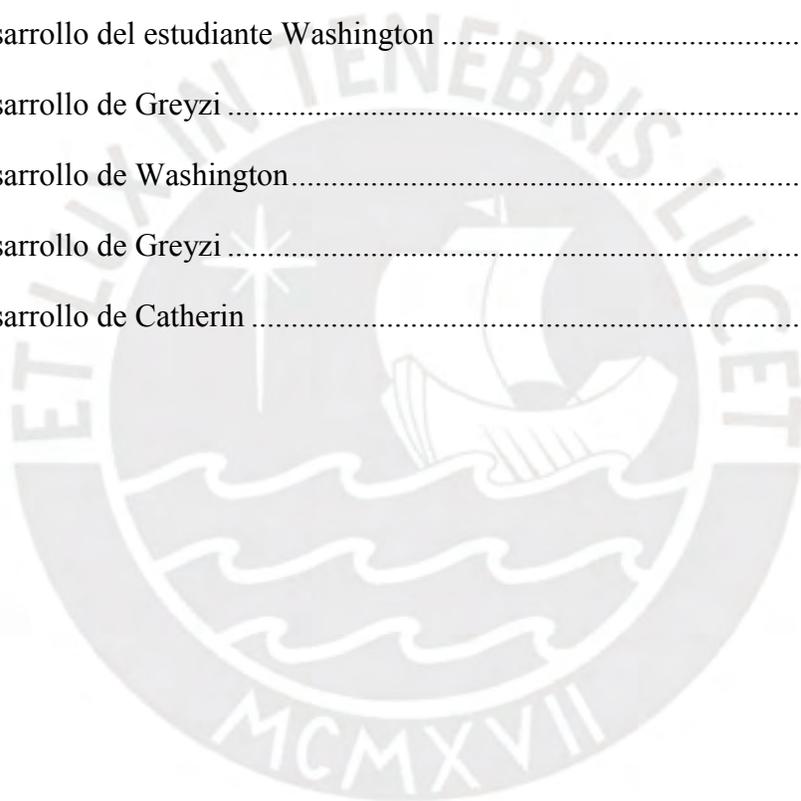
ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES.....	9
CAPÍTULO I: EL PROBLEMATICA	11
1.1. Investigaciones de referencia.....	11
1.2. Justificación	17
1.3 Pregunta y objetivos de la investigación.....	28
1.4 Objetivos de la investigación	28
CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO	30
2.1 Aspectos Matemáticos	30
2.2 Aspectos del tema a investigar en los libros didácticos.....	34
CAPÍTULO III: EL MARCO TEÓRICO Y METODOLOGICO.....	67
3.1 Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC).....	67
3.2 Metodología y procedimiento	75
CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANALISIS DE LA INVESTIGACIÓN	78
CONSIDERACIONES FINALES.....	101
REFERENCIAS.....	108
ANEXOS	110

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Preguntas de la Evaluacion Diagnostica Regional (2017), Ugel 06	24
Figura 2. Sistemas con dos Incógnitas: indeterminado, imposible y determinado respectivamente.....	30
Figura 3. El método de eliminación, visto geoméricamente.	33
Figura 4. Sección 3 Álgebra	34
Figura 5. Concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.....	36
Figura 6. COMO HACER	37
Figura 7. Naturaleza de las Soluciones.....	38
Figura 8. Método de igualación.....	39
Figura 9. Método de sustitución.....	40
Figura 10. Como Hacer, Método de Sustitución.....	42
Figura 11. Método de Sustitución.....	43
Figura 12. Método de reducción.....	45
Figura 13. Problema: Método de reducción.....	45
Figura 14. Cajas recicladas para quequitos, primera parte.....	47
Figura 15. Cajas recicladas para quequitos, segunda parte.....	49
Figura 16. Actividad: Cajas recicladas para quequitos, primera parte.....	50
Figura 17. Actividad: Cajas recicladas para quequitos, segunda parte.....	51
Figura 18. Actividad : De visita a la Fábrica de Cartones.....	54
Figura 19. Actividad. De Visita a la Fábrica de Cartones segunda parte.....	55
Figura 20. Actividad, De Visita a la Fábrica de Cartones.....	57
Figura 21. Actividad: De Visita a la Fábrica de Cartones, segunda parte.....	58
Figura 22. Actividad, Caños ahorradores.....	60

Figura 23. Actividad, Caños ahorradores	62
Figura 24. Actividad, Caños ahorradores, primera parte.....	63
Figura 25. Actividad, Caños ahorradores segunda parte	64
Figura 26. Problema 3. Uso de registros	84
Figura 27: Desarrollo del estudiante Washington	91
Figura 28. Desarrollo de la estudiante Greyzi	92
Figura 29. Desarrollo de la estudiante Catherin	93
Figura 30. Desarrollo del estudiante Washington	94
Figura 31. Desarrollo de Greyzi	95
Figura 32. Desarrollo de Washington.....	97
Figura 33. Desarrollo de Greyzi	98
Figura 34. Desarrollo de Catherin	100



LISTA DE TABLAS/CUADROS

Tabla 1. Resultados de la traducción del enunciado con evocación) (Problema 1)	110
Tabla 2. Resultados de la traducción del enunciado con evocación (Problema 2).....	111
Tabla 3. Resultados de la traducción del enunciado con evocación (Problema 3).....	112
Cuadro 1. Categorías de los problemas contextualizados	15
Cuadro 2. Matriz de campo tematico por ciclo segun el Mapa de Progreso	20
Cuadro 3. Competencia, Capacidades y Conocimientos del área de Matemáticas en cuarto de secundaria	21
Cuadro 4. Estándares (mapa de progreso)	23
Cuadro 5. Plan Anual, cuarto grado de Secundaria	25
Cuadro 6. Unidad Didáctica 3	27
Cuadro 7. Autoevaluación: Cajas recicladas para quequitos.....	52
Cuadro 8. Actividades adicionales: Cajas recicladas para quequitos	53
Cuadro 9. Heteroevaluación: De Visita a la Fábrica de Cartones	56
Cuadro 10. Actividades Adicionales	59
Cuadro 11. Coevaluación	65
Cuadro 12. Actividades Adicionales: Caños ahorradores	66
Cuadro 13. Etapas de la Metodología DIPCING	76

CONSIDERACIONES INICIALES

En esta investigación presentamos aspectos fundamentales en los cuales se sustenta este trabajo, teniendo como foco de estudio: El Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables. De este tópico, analizamos su importancia como contenido temático, este se propone en el Diseño Curricular Nacional (2009) hasta el presente año, en los Mapas de Progreso (2015) que corresponden a las Rutas de Aprendizaje (2015), Estándares de Aprendizaje (2015), en el Texto escolar: Matemática 4, Cuaderno de trabajo para los estudiantes y Manual para los docentes del cuarto de secundaria.

Este tópico es desarrollado en el VII ciclo, el tema es abordado desde los primeros ciclos en la Educación Básica, se va induciendo el contenido temático de las Ecuaciones Lineales con una Variable en sus diferentes casos y, posteriormente, se extiende como contenido temático de Sistema de Ecuaciones con dos Variables hasta niveles universitarios, como se demuestra con algunos antecedentes como por ejemplo el de Neira (2012). En el capítulo I, mencionamos las investigaciones de referencia con el objeto matemático Sistemas de Ecuaciones con dos Variables, antecedentes relacionados con el marco teórico de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), la justificación, además de una matriz de campo temático relacionada a los Mapas de Progreso, la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos de esta investigación.

En el capítulo II, desarrollaremos los contenidos matemáticos del tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables basados en Lages (2004). Aquí se desarrolla la etapa central de la metodología DIPCING, realizaremos un análisis de los contenidos implícitos y explícitos que estén relacionados con el tópico en investigación, se da una descripción y análisis de los aspectos didácticos del texto de los estudiantes, se presentan los contenidos temáticos y capacidades del área de Matemáticas de los alumnos del cuarto año de educación secundaria en el Diseño Curricular Nacional (2009). Presentaremos el concepto de Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Variables y los métodos para resolverlos. Además se mostramos un cuadro donde se clasifican los problemas del texto de los estudiantes, de acuerdo a la categorización de la MCC.

En el capítulo III, presentamos aspectos relacionados al marco teórico, la MCC, sus paradigmas, metodología de Diseño de Programas de Estudio de Matemáticas en Carreras de Ingeniería (DIPCING) y de la cual desarrollaremos su etapa central, que se aplica en la

fase didáctica que posee su Modelo Didáctico de la Matemática en Contexto (MODIMACO) y, de este modelo, tomaremos su fuente de contextualización en las situaciones que corresponden al bloque 1.

Además, estas fuentes de contextualización deben tomar en cuenta los niveles educativos de los estudiantes: Nivel bajo para primaria, nivel medio para la secundaria y el bachillerato y el nivel alto o nivel complejo para los universitarios. Para ello, presentaremos un cuadro de las etapas de la metodología de DIPCING.

En el capítulo IV, iniciamos con la descripción de la parte experimental, el análisis de la investigación así como la descripción de los participantes en la actividad didáctica, que son estudiantes cuyas edades están el rango de los 15 y 18 años de la localidad de Huachipa dedicados a actividades del sector construcción y agrícolas de la zona.

Presentamos los lineamientos que consideramos en la elaboración de los eventos o problemas contextualizados de primera y segunda categoría y un problema al cual se le denomina “Otro tipo de problema”. La actividad didáctica se diseñó para cumplir con una de las funciones de los eventos que corresponde a la función de evaluar el aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Variables, posteriormente realizaremos la descripción de la implementación de la actividad didáctica, esbozamos los resultados, verificando que se cumplan las etapas de la estrategia didáctica de la Matemática en contexto.

Las Consideraciones finales, están relacionadas con la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), con su metodología de Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING), ella nos permite realizar el análisis del capítulo donde se expone el tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Variables, así como también nos guía en el diseño de actividades didácticas con eventos contextualizados que evalúan el aprendizaje de este tema.

A continuación tenemos la presentación del capítulo I el cual contiene las investigaciones de referencia, la justificación de realizar esta trabajo así mismo tenemos la pregunta y objetivos de esta investigación.

CAPÍTULO I: EL PROBLEMATICA

La educación en la actualidad está pasando por una etapa de análisis de las metodologías de enseñanza y aprendizaje tradicionales en el área de Matemáticas, así también las últimas evaluaciones PISA en las que el Perú participó y en las que obtuvimos resultados desalentadores en cuanto al área de Matemática; del mismo modo, se está analizando si las metodologías y las actividades de aprendizaje que se desarrollan en la actualidad permiten un verdadero y duradero aprendizaje por parte de los estudiantes en relación a los diferentes tópicos propuestos en los documentos que brinda el Ministerio de Educación, como el Diseño Curricular Nacional (2009), Rutas de Aprendizaje (2015) y Mapas de Progreso, que son herramientas de trabajo de los docentes.

En ese sentido, presentaremos aportes de investigaciones en las cuales se estudia el tema: Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Variables.

En ella, se analiza el proceso de aprendizaje de este tópico por parte de los estudiantes y todo lo que implica la resolución de problemas que se modelan utilizando el tópico de esta investigación. Además, se realiza el análisis de cómo los estudiantes encuentran las soluciones de estos sistemas, así también tenemos los aspectos de la teoría educativa Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) y sus eventos contextualizados que pueden ser problemas de la vida diaria o relacionados con la ciencias, proyectos o estudios de casos con una categorización que nos permite diseñar actividades didácticas en los ambientes de aprendizaje.

A continuación presentamos las investigaciones de referencia que nos sirven de soporte en la investigación de nuestro foco de estudio, marco teórico y metodología en nuestra investigación.

1.1. Investigaciones de referencia

En cuanto a los antecedentes de nuestra investigación, ellos están presentados en el siguiente orden:

Primero mostramos investigaciones realizadas que tienen como foco de estudio a los Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Variables. Estas son desarrolladas en el nivel de educación superior y básica regular de secundaria.

En segundo lugar, presentamos investigaciones desarrolladas con nuestro marco teórico Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) y con la metodología Diseño de Programas de Estudio de Matemáticas en Carreras de Ingeniería (DIPCING). Ellas también fueron realizadas en diferentes niveles de educación.

Investigaciones relacionadas con el objeto matemático: Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables

Tenemos a Figueroa (2013) que desarrolló y analizó una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas, en la que nos describe el proceso de una secuencia didáctica que permite a los estudiantes del cuarto de secundaria resolver problemas contextualizados mediante Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Esta investigación se desarrolló bajo la metodología de la Ingeniería Didáctica y el diseño de la secuencia didáctica que se basó en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1999).

El propósito de la investigadora fue diseñar, aplicar y analizar situaciones didácticas que estimulen a los alumnos a crear problemas que involucren Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

En ese sentido, logró el cumplimiento de este objetivo ya que las variadas situaciones didácticas diseñadas contribuyeron a desarrollar en los estudiantes la habilidad de crear problemas relativos a Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Es importante resaltar que este trabajo, al tener como foco de estudio problemas que involucren con Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables que es nuestro tópico de investigación, esta es desarrollada y aplicada en el mismo nivel educativo; es decir, en el nivel secundaria, nos sirve de guía en el diseño de problemas contextualizados con la categorización de la teoría educativa Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), lo que nos va a permitir analizar y validar el aprendizaje de los estudiantes en relación a nuestro tópico en investigación. Por lo tanto, esta tesis se convierte en un gran apoyo en nuestra investigación.

Por otro lado, el artículo de Segura (2004) tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica de enseñanza como resultado de un análisis de éste, de tal manera que los

estudiantes al interactuar con esta secuencia podrían comprender el significado del Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Segura (2004, p.52) afirma que los estudiantes tienen tendencia a solo utilizar el registro algebraico y evaden los problemas literales que implican uso de diferentes registros. Se pretendía que los estudiantes logaran éxito en el aprendizaje del tópico Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables, luego representarían ecuaciones y realizarían los cambios de registros respectivos.

Esta investigación se realizó con la metodología Ingeniería didáctica. Al aplicar la secuencia propuesta se dieron las siguientes características:

- El docente, quien ejecuta esta secuencia didáctica, no tenía la formación adecuada, pero trató de aplicar la misma.
- La secuencia didáctica que se desarrolla es el primer acercamiento de los estudiantes al tema sistemas de Ecuaciones Lineales.
- Las herramientas que tienen los alumnos son sus conocimientos previos.

Los objetivos de la aplicación de la secuencia didáctica son:

- Facilitar a los estudiantes la comprensión del tópico Sistema de Ecuaciones Lineales, de una manera integrada y duradera.
- Los estudiantes deben interpretar el conjunto de soluciones del desarrollo de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables y deben efectuar, al mismo tiempo, cambios de registros en los cuales se representan estos Sistemas.

Después del análisis preliminar la investigadora llegó a las siguientes conclusiones:

- Los estudiantes tienen éxito en el desarrollo de las tareas, formulan las ecuaciones de rectas en forma simultáneas, continúan con su gráfica y al graficar estas rectas se observa que coinciden en un punto el cual viene a ser el conjunto solución del Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables. Los estudiantes son capaces de transitar del registro verbal al registro gráfico, del registro gráfico al registro algebraico y viceversa que, en términos de Duval (1999), indica que hubo aprendizaje.

Es importante resaltar que los antecedentes antes descritos muestran dificultades que se presentan en el aprendizaje del tópico Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables. Los mismos también nos muestran diversas alternativas que nos pueden ayudar a los docentes, con el objetivo de orientar a los estudiantes en favorecer un adecuado aprendizaje de este tema. Es así que estos antecedentes nos servirán de soporte académico en el desarrollo de nuestra tesis.

Además Ochoviet (2009), en su investigación que realizó en Uruguay con un grupo de 22 estudiantes de 14 y 15 años de edad de una Institución educativa privada, afirma que los estudiantes centran su atención en el aprendizaje de los métodos de resolución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables, luego se presenta a los alumnos problemas en el lenguaje verbal para que los representen en Sistemas.

Ochoviet (2009) utilizó una metodología a la cual denominó “Metodología interactiva”, en la cual la investigadora trabaja conjuntamente con otros docentes, en forma experimental, con diferentes grupos de alumnos. Se determinaron los siguientes objetivos:

- Diseñar una secuencia didáctica que permitiera conocer el concepto de solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables que elaboraban los estudiantes de 14 y 15 años.
- Estructurar una secuencia didáctica de actividades que permita a los estudiantes de 14 y 15 años el aprendizaje del concepto de solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Entre las conclusiones a las que la investigadora llegó con respecto a cada uno de los objetivos tenemos:

En relación al primer objetivo, la investigadora determinó que el concepto de Sistema de Ecuaciones y su solución está influenciado por el concepto de Sistemas de Ecuaciones de 2×2 y esto se transforma en obstáculos para visiones más amplias de Sistemas de Ecuaciones.

En relación al segundo objetivo, concluye que el nuevo diseño de la secuencia didáctica permite que los estudiantes estructuren mejor el concepto de solución de Sistemas de

Ecuaciones Lineales con dos Variables. Además esta mejora también depende del desarrollo del pensamiento por parte de los estudiantes.

La investigadora afirma que los estudiantes elaboran un determinado concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables a partir de la forma en la cual fue presentado el objeto matemático y, de ello, podemos inferir que la didáctica con la que se presentan los diferentes tópicos influye en su aprendizaje.

Las investigaciones presentadas exponen los diferentes problemas que padecen los estudiantes en su aprendizaje y cómo el diseño de nuevas secuencias didácticas diferentes a las tradicionales permite mejorar el aprendizaje del tema Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables y, además, se analiza el conjunto solución de estos sistemas.

Investigaciones relacionadas con el marco teórico: Teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”

Entre estas investigaciones tenemos:

Olazábal (2005), en su investigación, muestra las dificultades que tienen los alumnos para realizar la traducción de problemas contextualizados del lenguaje literal al lenguaje matemático.

Este trabajo se realizó con un grupo de estudiantes de primer semestre de licenciatura de la Facultad de Químico Farmacéutico Biólogo de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM), quienes recién terminaron el curso de Cálculo Diferencial e Integral y en el que se observó la dificultad que mostraban los estudiantes en la traducción, planteamiento y resolución de problemas matemáticos contextualizados.

Este trabajo de investigación tiene como aporte la categorización de los problemas de acuerdo a sus enunciados. Así tenemos el siguiente cuadro:

Cuadro 1. Categorías de los problemas contextualizados

<ul style="list-style-type: none">• La primera categoría
Son problemas cuyos enunciados expresan literalmente los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos para llegar al modelo matemático del problema. Para realizar la traducción, es necesario conocer las representaciones algebraicas de los términos que se nombran en el mismo enunciado.

Son problemas que con el tiempo se convierten en ejercicios para el alumno.
<ul style="list-style-type: none"> • La segunda categoría
Son problemas cuyos enunciados no son suficientes para definir el modelo matemático que permita su desarrollo a través de conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos que se expresan literalmente. Más bien son necesarios otros modelos que se evocan del mismo enunciado, mencionándolos, describiéndolos o refiriéndose a ellos en forma indirecta. El modelo recordado sirve de puente entre la información del enunciado y la traducción final al modelo representativo del problema.
<ul style="list-style-type: none"> • En la tercera categoría
Son problemas cuyos enunciados no son suficientes para establecer el modelo matemático ni a través de los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos que se expresan literalmente, ni de los conocimientos que se evocan, sino que se necesita que el individuo que está resolviendo el problema conozca un modelo que se adapte a las condiciones del mismo y lo sepa aplicar adecuadamente. Así, el modelo no surge ni literalmente, ni por evocación del enunciado, sino de la estructura cognoscitiva del individuo. En esta categoría, también hay evocación, pero con la diferencia de que es el individuo el que evoca y no es el problema.

Fuente: Adaptada de Irazábal (2005, p.36)

La investigación de Olazábal (2005) es un aporte para nuestra investigación, ya que nos permite realizar la identificación, clasificación y el análisis de los diferentes problemas contextualizados que se propone en el texto de los estudiantes del cuarto de secundaria. Todo este proceso permite a los estudiantes la construcción del concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

También tenemos la investigación de Neira (2012), quien analizó las dificultades que muestran los alumnos en el primer año de Ciencias administrativas de la Universidad de Ciencias Aplicadas cuando se realiza la traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático y viceversa para resolver problemas contextualizados haciendo uso del Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables. Esta investigación se centra en la fase didáctica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) y se trazan los siguientes objetivos generales:

Analizar las dificultades que los estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas presentan al traducir del lenguaje verbal al matemático problemas contextualizados presentes en el libro de texto cuando se estudian Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Diseñar una propuesta que permita facilitar la traducción de problemas contextualizados, del lenguaje verbal al matemático y viceversa al estudiar Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Esta investigación es relevante ya que fue desarrollada con la teoría Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) y con la metodología de Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING) propia de la MCC y además tiene como punto principal el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables que es nuestro foco de estudio.

Es un antecedente importante porque da una visión general para el desarrollo de nuestra investigación, guía en la identificación y categorización de los eventos contextualizados que son los insumos de análisis de la investigación, pues ello nos permitirá verificar si los estudiantes han aprendido a solucionar eventos contextualizados a través de problemas que se modelan con los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

1.2. Justificación

La presente investigación nace con el objetivo de realizar un estudio del aprendizaje de los estudiante en referencia al tópicu Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Además la misma tiene rigurosidad académica, tal como corresponde por tener importancia y responsabilidad directa, como investigadores inagotables de la educación en el área de Matemáticas en el proceso de buscar antecedentes relacionados con nuestra tesis, encontramos diversas investigaciones realizadas con nuestro foco de estudio los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Estas investigaciones han abordado este tópicu desde diferentes aspectos, bajo diferentes marcos teóricos y distintas metodologías de investigación, otras han estudiado el mismo objeto matemático y han utilizado la misma teoría la MCC y su metodología DIPCING, pero en el nivel de la educación superior.

Todas las investigaciones citadas en los antecedentes son una contribución en nuestra investigación en el área de Matemáticas, ya que analizaremos la fase de aprendizaje del objeto matemático por parte de los estudiantes. Ello implica un análisis de nuestra labor como docentes. Mostramos en la investigación herramientas que se utilizan en el proceso de enseñanza de las Matemáticas que están impulsando el desarrollo de competencias y capacidades tratando que su enseñanza esté centrada fundamentalmente en el enfoque de resolución de problemas de contexto, como lo indican en los diferentes manuales presentados por el Ministerio de Educación.

Así tenemos el Diseño Curricular Nacional (2009), Rutas de aprendizaje (2015) y Mapas de Progreso (2015) en el cual vemos que el tópico Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables es un tema que se debe desarrollar en el VII ciclo.

Del mismo modo, en nuestra labor docente, percibimos las dificultades que tienen nuestros estudiantes en la elaboración del concepto y análisis de las soluciones de los Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

En el nivel de la Educación Básica Regular, donde se realizará esta investigación, es necesario un cambio de estructuras didácticas en la enseñanza que permitan a los estudiantes construir sus conocimientos matemáticos partiendo de la resolución de problemas cuando se desarrolle el tópico de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Esto implica una dinámica de reflexión, por parte de nosotros los investigadores de la educación matemática; es decir, debemos cambiar nuestros viejos modelos de enseñanza, basados en el memorismo, para dar paso a propuestas nuevas que permitan el aprendizaje significativo (Ausubel,1970) del objeto matemático, Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

En nuestra actividad pedagógica, evidenciamos la problemática del proceso de enseñanza en la cual los docentes, al centrar nuestra enseñanza en ejercicios algorítmicos, originamos que los estudiantes no puedan construir el significado del objeto matemático Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables, ni evaluar sus resultados

Además de lo expuesto, todos los estudiantes de educación secundaria están siendo evaluado con mayor regularidad. Estos exámenes que son diseñados con problemas, los

cuales deben ser modelados en lenguaje algebraico o gráfico para después obtener sus soluciones, pero los resultados de las mismas, de acuerdo a los informes de las unidades de medición de la calidad educativa de Lima, ubican a los alumnos de secundaria de la siguiente manera: 70% en el nivel de inicio, 27% en el nivel de proceso y sólo 2% en el nivel logrado, de una población escolar de 350 alumnos de educación secundaria de la institución educativa 1224 el Paraíso de Huachipa, institución en la cual desarrollamos la investigación.

Estos resultados no han sido alentadores. Es por ello que consideramos pertinente este trabajo de investigación sobre la construcción del significado del objeto matemático Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables, porque ayudará a los alumnos a comprender el significado e interpretar sus resultados así como también a enfrentar este tipo de evaluaciones.

Además, como permanentes investigadores en educación, nos cuestionamos si los objetos matemáticos que desarrollamos con nuestros estudiantes les serán útiles para la vida o si estos tópicos matemáticos les servirán para resolver estas situaciones problema y luego les permita dar respuesta a otros diferentes comunes y no comunes de su contexto.

La respuesta que muchas veces escuchamos es negativa. Por ello, es urgente cambiar alguna de las fases del proceso de enseñanza para que los alumnos logren enfrentar estas situaciones de manera adecuada, que aprendan para la vida y que logren desarrollar saberes significativos.

Los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables, según nuestro Diseño Curricular Nacional, se deben enseñar a los alumnos del cuarto de secundaria. Es por eso que hemos elegido este grado para realizar nuestra investigación, pero la aplicación de la actividad didáctica la realizaremos con los alumnos del quinto de secundaria a quienes el año anterior se les enseñó el tema de investigación.

Tengamos presente que el aprendizaje del tema de investigación Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables (SEL) se centra en los métodos memorísticos, lo que provoca que los alumnos no logran un aprendizaje óptimo del concepto de este tópico, no verifican sus resultados, tampoco logran el tránsito por diferentes registros, no elaboran el concepto

apropiado y no comprenden el significado de resolver Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables. Por lo expuesto anteriormente, iniciaremos esta investigación.

Estas afirmaciones están basadas en los resultados de las evaluaciones de entrada y de proceso que realiza la Unidad de Gestión Educativa local 06 de Vitarte.

A continuación, presentamos una herramienta importante para los docentes, la cual en el año 2017 está siendo ejecutada. Esta es la Matriz del Campo Temático o Mapa de Progreso que es una herramienta de las Rutas del Aprendizaje.

En esta matriz, se presenta el tema de nuestra investigación, para ser desarrollado con los estudiantes del VII ciclo de educación básica regular de las instituciones educativas públicas.

Cuadro 2. Matriz de campo temático por ciclo según el Mapa de Progreso

Ciclo VII	Relacionado a situaciones de cantidad	Relacionado a situaciones de regularidad, equivalencia y cambio	Relacionado a situaciones de forma, movimiento y localización.	Relacionado a situaciones de gestión de datos e incertidumbre.
	<ul style="list-style-type: none"> -Números racionales, propiedades, e irracionales. -Modelos financieros(tasa de interés simple y compuesta) -Problemas multiplicativos de proporcionalidad (mezcla, aleación, magnitudes derivadas) -Notación exponencial y científica. 	<ul style="list-style-type: none"> -Sucesiones -Progresión geométrica. -Operaciones algebraicas. -Ecuaciones Lineales. -Sistema de ecuaciones lineales. -Ecuaciones cuadráticas. -Funciones cuadráticas -Funciones trigonométricas (seno y coseno). 	<ul style="list-style-type: none"> -Prisma, cuerpos de revolución, poliedros regulares y compuestos, Propiedades. -Círculo y circunferencia. -Triángulos, congruencia semejanza lineal y puntos notables. -Razones trigonométricas -Teorema de Pitágoras, relaciones métricas. -Mapa y planos a escala. -Transformaciones geométricas considerando la homotecia. -Modelos analíticos recta, circunferencia y elipse. 	<ul style="list-style-type: none"> -Variables estadísticas -Muestra. -Gráficos estadísticos -Medidas de tendencia central. -Medidas de dispersión. -Medidas de vocalización. -Espacio muestra. -Probabilidad condicional. -Probabilidad de eventos independientes. -Probabilidad de frecuencias.

Fuente: Programación Curricular en Matemática secundaria, Perú (2014, p.20).

En el cuadro 3, se presenta la matriz de campo temático por ciclo, según el mapa de progreso 2014, que es una herramienta pedagógica a ser utilizada por los docentes. Aquí podemos observar los temas siguientes: Operaciones algebraicas, Inecuaciones Lineales que, en su desarrollo, forma bases en procedimientos algebraicos para después tener conocimientos previos que deben favorecer el aprendizaje del tópico Sistema de ecuaciones Lineales con dos Variables.

Con esta información nos hacemos preguntas y nos trazamos objetivos relativos al aprendizaje del tópico en investigación.

En el siguiente cuadro, se muestra las Competencias, Capacidades y Conocimientos del área de Matemáticas del cuarto año de educación secundaria que se propone en el Diseño Curricular Nacional 2009 y Rutas de Aprendizaje 2015, con vigencia hasta el 2018. Aquí encontramos el tema de nuestra investigación, específicamente en el área de Álgebra.

Cuadro 3. *Competencia, Capacidades y Conocimientos del área de Matemáticas en cuarto de secundaria*

ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO	
CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
❖ MATEMATIZA SITUACIONES	<ul style="list-style-type: none"> • Organiza datos a partir de fuentes de información, en situaciones de equivalencia al expresar modelos referidos a Sistemas de Ecuaciones Lineales. • Reconoce la pertinencia de modelos referidos a Sistemas de Ecuaciones Lineales en determinados problemas.
❖ COMUNICA Y REPRESENTA IDEAS MATEMÁTICAS	<ul style="list-style-type: none"> • Describe la naturaleza de las soluciones (no tiene solución; una solución; infinitas soluciones) en un Sistemas de Ecuaciones Lineales.

	<ul style="list-style-type: none"> • Relaciona representaciones gráficas simbólicas y el conjunto solución de un mismo Sistemas de Ecuaciones Lineales.
❖ ELABORA Y USA ESTRATEGIAS	<ul style="list-style-type: none"> • Plantea un problema que se expresa a partir de unas soluciones o de un Sistemas de Ecuaciones Lineales dado. • Aplica los diferentes métodos de resolución de un Sistemas de Ecuaciones Lineales.
❖ RAZONA Y ARGUMENTA GENERANDO IDEAS MATEMÁTICAS	<ul style="list-style-type: none"> • Prueba sus conjeturas sobre los posibles conjuntos soluciones de un Sistemas de Ecuaciones Lineales. • Justifica conexiones entre la representación gráfica y la representación simbólica de un Sistemas de Ecuaciones Lineales.
ACTITUDES <ul style="list-style-type: none"> • Muestra seguridad y perseverancia al resolver problemas y comunicar resultados matemáticos. • Muestra rigurosidad para representar relaciones, plantear argumentos y comunicar resultados. • Toma la iniciativa para formular preguntas, buscar conjeturas y plantear problemas. • Actúa con honestidad en la evaluación de sus aprendizajes y en el uso de datos estadísticos. <p>Valora aprendizajes desarrollados en el área como parte de su proceso formativo.</p>	

Fuente: Adaptado Perú (2015) Rutas de Aprendizaje.

En el cuadro cuatro, donde se muestran las Competencias, descripción de las actitudes y capacidades, cada una de ellas corresponden a los conocimientos del área de Matemáticas del cuarto año de educación secundaria que se propone en el Diseño Curricular Nacional año 2009 y Rutas de Aprendizaje 2015, con vigencia hasta el 2018, encontramos aquí el tema de nuestra investigación, específicamente en el área de Álgebra.

A continuación, presentamos una herramienta importante para los docentes, el cual desde el año 2015 está siendo ejecutado. Este es el cuadro de los Estándares de Aprendizaje o Mapa de Progreso, que es una herramienta de las Rutas del Aprendizaje.

En esta matriz, se presenta nuestra investigación para ser desarrollada con los estudiantes del VII ciclo de Educación Básica Regular, según el Curriculum Nacional.

Cuadro 4. *Estándares (mapa de progreso)*

ESTANDARES (Mapa de progreso)	
VII	NIVEL DESTACADO
	Relaciona datos provenientes de diferentes fuentes de información, referidas a diversas situaciones de regularidades y relaciones de variación y las expresa en modelos: Sucesiones con números racionales e irracionales, ecuaciones cuadráticas, Sistemas de Ecuaciones Lineales , inecuaciones lineales con una y dos incógnitas, funciones cuadráticas o trigonométricas.
	Analiza los alcances y limitaciones del modelo usado, si los datos y condiciones que estableció ayudaron a resolver la situación. Expresa usando terminología, reglas y convenciones matemáticas las relaciones entre propiedades y conceptos referidos a: Sucesiones, ecuaciones, funciones cuadráticas o trigonométricas, inecuaciones lineales y Sistemas de Ecuaciones Lineales.
	Elabora y relaciona representaciones de la misma idea matemática usando símbolos, tablas y gráficos
	Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos para generalizar la regla de formación de progresiones aritméticas y geométricas, hallar la suma de sus términos, simplificar expresiones usando identidades algebraicas y establecer equivalencias entre magnitudes derivadas con apoyo de diversos recursos. Juzgar la efectividad de la ejecución o modificación o del plan.
Formula conjeturas sobre generalizaciones y relaciones matemáticas; justifica sus conjeturas o refútelas basándose en argumentaciones que expliquen puntos de vista opuestos e incluyan conceptos, relaciones y propiedades de los Sistemas de Ecuaciones y funciones trabajadas.	

Fuente: Adaptado Perú (2015) de Rutas de Aprendizaje.

En los estándares de aprendizaje, se describen las capacidades que los estudiantes deben adquirir al término de un ciclo y, en este caso, analizaremos el nivel destacado del ciclo VII que corresponde al cuarto y quinto de secundaria, que es un nivel de expectativa para poder lograr los procesos pedagógicos de enseñanza más pertinentes.

Presentamos a continuación dos de los problemas planteados en la Evaluación Diagnóstica Regional del cuarto de secundaria de la Educación Básica Regular organizada por el área de gestión pedagógica de la Unidad de Gestión Educativa número 06 de Vitarte.

Estos problemas los presentamos ya que deben ser modelados con Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

**EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA REGIONAL
DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
MATEMÁTICA**



4. Amalia tiene un terreno en forma de forma rectangular de 9600 m² de área. Si para cercarlo totalmente utilizó 400m de cerco, ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones representa la información proporcionada?

<p>a) $\begin{cases} x + y = 400 \\ x \cdot y = 9600 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x \cdot 2y = 9600 \end{cases}$</p>	<p>c) $\begin{cases} 2x + 2y = 400 \\ \frac{x \cdot y}{2} = 9600 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} x + y = 200 \\ x \cdot y = 9600 \end{cases}$</p>
---	---

14. El perímetro del campo deportivo de una institución educativa de forma rectangular es de 22 m, y sabemos que su largo mide 5 m más que su ancho. Expresa el modelo referido al sistema de ecuaciones y determina el área de dicho campo.

<p>a) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ -x + y = 5 \end{cases}; 36 \text{ m}^2$</p> <p>b) $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + y = 5 \end{cases}; 24 \text{ m}^2$</p>	<p>c) $\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 5 \end{cases}; 24 \text{ m}^2$</p> <p>d) $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + y = 5 \end{cases}; 28 \text{ m}^2$</p>
--	--

Figura 1. Preguntas de la Evaluación Diagnóstica Regional (2017), Ugel 06
Fuente: Evaluación Diagnóstica Regional (2017, p.4, 14)

Al analizar la pregunta número cuatro de la evaluación diagnóstica, vemos que la pregunta es un problema de segunda categoría, ya que permite evocar el área de geometría y se dirige a la obtención del modelo matemático de un Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

En el caso de la pregunta número 14, vemos que es un problema de segunda categoría que también permite evocar el área de Geometría, pero este problema tiene las mismas características del problema cuatro y se tiene el riesgo que si el estudiante no puede resolver el problema anterior, tampoco puede resolver la pregunta número catorce.

A continuación, presentamos una herramienta utilizada por los docentes, el cual se diseña cada año y actualmente estas herramientas están siendo propuestas por el MINEDU.

Cuadro 5. *Plan Anual, cuarto grado de Secundaria*

PROGRAMACIÓN ANUAL Grado: 4to Secundaria Área: MATEMÁTICA
DESCRIPCIÓN GENERAL
<p>Los adolescentes que cursan el 4to grado de secundaria, se encuentran en una etapa del desarrollo marcada por cambios físicos, cognitivos, emocionales y sociales; este proceso favorece el desarrollo de su potencial académico, pero también los expone a asumir conductas riesgosas como: Consumir cigarrillos, bebidas alcohólicas y drogas ilícitas, dejar de comer sufrir de bulimia o anorexia o también apresurar el inicio de las primeras relaciones sexuales.</p> <p>Asimismo, otra problemática observada es que casi 17% de estudiantes peruanos, entre 14 a 18 años, no culmina la educación secundaria, así como el 20% de estudiantes que culminan la educación secundaria siguen estudios superiores y el 40% se dedican a trabajar.</p> <p>De acuerdo a este contexto, surge la necesidad de abordar dichas problemáticas mediante el desarrollo de competencias matemáticas, tomando como punto de partida el abordaje de situaciones significativas que le permitan comprender, con criterios matemáticos, las causas y consecuencias de asumir conductas de riesgo, así como también analizar cómo se reducen sus posibilidades de mejorar su calidad de vida si dejan de estudiar.</p> <p>El reto de hoy es que nuestros estudiantes consoliden, durante la educación secundaria, su capacidad para procesar, manejar datos y producir información que le permita comprender el mundo que los rodea, resolver problemas y tomar decisiones en contexto de incertidumbre.</p> <p>Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio: Relaciona datos provenientes de diferentes fuentes de información referidas a diversas situaciones de regularidades, equivalencias y relaciones de variación y las expresa en modelos de: Sucesiones con números racionales, ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales, inecuaciones lineales con una incógnita y la función cuadrática. Analiza los alcances y limitaciones del modelo usado; evalúa si los datos y condiciones que estableció ayudaron a resolver la situación.</p> <p>Expresa usando terminología, reglas y convenciones matemáticas las relaciones entre propiedades y conceptos referidos a: Sucesiones, ecuaciones y funciones cuadráticas, inecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Elabora y relaciona representaciones de una misma idea matemática usando símbolos, tablas y gráficos.</p> <p>Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos para generalizar la regla de formación de progresiones aritméticas y geométricas, hallar la suma de sus términos, simplificar expresiones usando identidades algebraicas y establecer equivalencias entre magnitudes derivadas con apoyo de diversos recursos.</p>

Juzga la efectividad de la ejecución o modificación del plan. Formula conjeturas sobre generalizaciones y relaciones matemáticas; justifica sus conjeturas o refuta basándose en argumentaciones que expresen puntos de vista opuestos e incluyan conceptos, relaciones y propiedades de los sistemas de ecuaciones y funciones trabajadas.

Los campos temáticos (conocimientos) que se desarrollan, en el presente grado, para lograr las metas de aprendizaje previstas se agrupan en torno a cuatro situaciones:

Regularidad, equivalencia y cambio:

- Progresión aritmética y geométrica, simplificación de expresiones con operaciones y algunas identidades algebraicas, inecuaciones lineales, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas; relación con la recta y la función cuadrática.

Unidad 3

Título: Aprendemos a manejar presupuestos y ahorros.

La planificación de los ingresos familiares es de suma importancia para que las familias puedan organizar los ingresos y egresos, para que el dinero que disponen alcance para los servicios básicos y puedan programar gastos mayores en función al saldo que destinan mensualmente a los ahorros. El no contar con este hábito de presupuestar y ahorrar trae por consecuencia que dichas familias se endeuden y asuman créditos que luego no les es posible pagar.

¿Cuánta costumbre de ahorrar tiene las familias? ¿Qué consecuencias genera no tener un de ahorro mensual? ¿Qué tipos de cuentas de ahorro ofrecen las entidades financieras? ¿Cuál de ellas produce más intereses?

Duración	Campo Temático	Producto
5 semanas 9 sesiones	<ul style="list-style-type: none"> • Descuentos • Interés simple y compuesto • Operaciones con racionales • Progresión geométrica • Funciones cuadráticas y Ecuaciones • Áreas, perímetros y volúmenes de formas bidimensional y tridimensional compuestas. 	Guía familiar para manejar presupuestos y ahorros

Fuente: Adaptado Perú (2015) de Rutas de Aprendizaje.

En el plan anual se describe la visión general de las Matemáticas, resaltando el reto de éstas de lograr, en este ciclo, que los estudiantes desarrollen durante la educación secundaria su

capacidad para procesar, manejar y analizar información que le permita comprender el mundo que los rodea, utilizando para ello la resolución de problemas contextualizados, lo cual coincide con nuestra teoría Matemática en el Contexto de las Ciencias.

A continuación, mostramos el cuadro seis, denominado Unidad Didáctica N°3, propuesta por el MINEDU a los docentes.

En esta Unidad didáctica se desarrolla el tópico de nuestra investigación con los estudiantes del cuarto de secundaria en el año 2016. La misma tiene correspondencia con el Plan anual del área de Matemáticas, propuesto también por el MINEDU.

Cuadro 6. Unidad Didáctica 3

Unidad 3		
Título: Aprendemos a manejar presupuestos y ahorros.		
SITUACIÓN SIGNIFICATIVA		
<p>La planificación de los ingresos familiares es de suma importancia para que las familias puedan organizar los ingresos y egresos, para que el dinero que disponen alcance para los servicios básicos, y puedan programar gastos mayores en función al saldo que destinan mensualmente a los ahorros. El no contar con este hábito de presupuestar y ahorrar trae por consecuencia que dichas familias se endeuden y asuman créditos que luego no les es posible pagar.</p> <p>¿Cuánta costumbre de ahorrar tiene las familias? ¿Qué consecuencias genera no tener un de ahorro mensual?</p> <p>¿Qué tipos de cuentas de ahorro ofrecen las entidades financieras? ¿Cuál de ellas produce más intereses?</p>		
COMPETENCIAS	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO	Elabora y usa estrategias	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Halla el valor de un término de una sucesión creciente usando recursos gráficos y otros. ❖ Aplica los diferentes métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Campo temático
<ul style="list-style-type: none">• Sucesiones- Progresión geométrica• Interés Simple y Compuesto• Sistema de ecuaciones Lineales• Áreas y Volúmenes de formas geométricas.

Fuente: Adaptado Perú (2015) de Rutas de Aprendizaje

La organización de la Unidad didáctica que se ha presentado es una parte de las herramientas de uso cotidiano de los docentes, donde se puede ver los conocimientos, capacidades, actividades, estrategias, recursos y actitudes que se desarrollan en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Esta unidad tiene la siguiente estructura, capacidad, conocimientos, actividades o estrategias, recursos que utilizan los docentes y el tiempo en el cual se deben organizar estos procesos.

Seguidamente, presentaremos la pregunta y objetivos a ser logrados en el desarrollo de nuestra investigación.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

En base a nuestros antecedentes, nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Cómo la categorización de problemas contextualizados de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) permite evaluar el aprendizaje de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables en los estudiantes del cuarto grado de secundaria?

1.4 Objetivos de la investigación

El objetivo general de la investigación es:

Analizar el aprendizaje en relación al tópico Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables por medio de la categorización de problemas contextualizados según la MCC.

Los objetivos específicos son:

- Identificar el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables en el Ttexto escolar Matemáticas 4, en el Cuaderno de trabajo que utilizan estudiantes(2016),

en el documento oficial DCN (2009) y en el Manual para Docentes (2016), otorgado por el MINEDU a los maestros.

- Describir los eventos contextualizados, categorizados según la Matemática en el Contexto de las ciencias, presentes en el texto escolar Matemática del cuarto año de educación, en el Cuaderno de Trabajo que utilizan estudiantes y en la Guía para Docentes otorgado por el MINEDU.
- Proponer eventos contextualizados, según la categorización de la MCC.
- Identificar las etapas de resolución del evento contextualizado, las cuales están presentes en la didáctica de la Matemática en Contexto.
- Describir los resultados obtenidos por los estudiantes en el desarrollo de la aplicación de la actividad didáctica.

Seguidamente, presentamos el capítulo II el cual contiene los aspectos Matemáticos y epistemológicos del tema en investigación así como el análisis del texto escolar que utilizan los estudiantes, el cuaderno de trabajo en el cual los estudiantes deben desarrollar actividades de aprendizaje durante la sesiones de clase y otras de ellas quedaran como tareas domiciliarias y el texto guía de los docentes donde están desarrolladas las actividades de aprendizaje propuestas a los estudiantes y que corresponden el tópico Sistema de Ecuaciones con dos variables.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

2.1 Aspectos Matemáticos

El presente capítulo será abordado en base a Lima (2004) en el que presentamos el tópico en investigación: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables, así tenemos:

Al escribir una ecuación $ax + by = c$, estaremos admitiendo tácitamente que:

$a^2 + b^2 \neq 0$, esto es que los coeficientes a y b no se anulan simultáneamente. Una ecuación del sistema lineal.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (*)$$

Es un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas x , y satisfacen ambas ecuaciones.

El sistema se dice indeterminado, imposible o determinado cuando admite más de una solución, ninguna solución o una única solución respectivamente. Como sabemos, cada ecuación (*) tiene como soluciones las coordenadas (x, y) de los puntos de una recta, de modo que el sistema es indeterminado, imposible o determinado, conforme las rectas r_1 y r_2 representadas por las dos ecuaciones, coincidan, sean paralelas o sean concurrentes respectivamente.

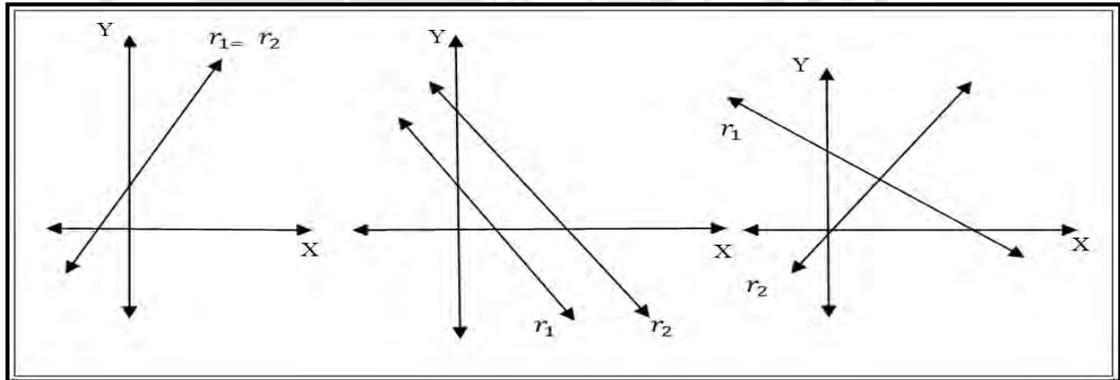


Figura 2. Sistemas con dos Incógnitas: indeterminado, imposible y determinado respectivamente.

Fuente: Lima (2004, p.182)

Para decidir en cuál de esas tres alternativas se encuadra el sistema (*), Sistema de Ecuaciones

con dos Incógnitas, debemos examinar los cuadrados de los coeficientes Lima (2004, p.182)

Sea “ m ” cuadrada y “ M ” la matriz aumentada tenemos, así tenemos

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz de cuadrada}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz aumentada}$$

Ellos son ejemplos de matrices: \mathbf{m} es una matriz cuadrada, con dos filas y dos columnas, es decir, una matriz de 2×2 , dos filas son los vectores $l_1 = (a_1, b_1)$ y $l_2 = (a_2, b_2)$, sus columnas son los vectores $v = (a_1, a_2)$, $w = (b_1, b_2)$, todos en \mathfrak{R}^2 . En cambio \mathbf{M} tiene dos filas y tres columnas; es una matriz de 2×3 . Sus filas son los vectores $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$ en \mathfrak{R}^3 , en cuanto sus columnas son los vectores, $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$, pertenecientes a \mathfrak{R}^2 . Se dice que \mathbf{m} es la matriz del sistema y \mathbf{M} es la matriz aumentada del sistema (*).

Dos rectas que poseen más de un punto en común deben coincidir. Luego el sistema (*) es indeterminado si sus ecuaciones definen la recta.

Sabemos que esto ocurre si, existe un número $k \neq 0$ tal que $a_2 = k a_1, b_2 = k b_1$ y $c_2 = k c_1$, esto es, los vectores-filas $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$ de la matriz \mathbf{M} son colineales (múltiplos uno del otro). Una forma de expresar esta condición sin referencia al número consiste en decir que:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0)$$

El sistema (*) es imposible cuando las rectas $a_1 x + b_1 y = c_1$ y $a_2 x + b_2 y = c_2$ son paralelas. Para que esto suceda, como sabemos, es necesario y suficiente que exista $k \neq 0$ tal que $a_2 = k a_1, b_2 = k b_1$ y $c_2 = k c_1$. Equivalentemente, el sistema (*) es imposible si, y solamente si, $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$, pero por lo menos uno de los números $a_1 c_2 - a_2 c_1; b_1 c_2 - b_2 c_1$ es diferente de cero.

El número $a_1 b_2 - b_1 a_2$ se llama el determinante de la matriz del sistema

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el sistema (*) es determinado cuando no es indeterminado ni imposible. Esto sucede cuando las rectas $a_1 x + b_1 y = c_1$ y $a_2 x + b_2 y = c_2$ son

concurrentes, o sea, cuándo el determinante $a_1b_2 - b_1a_2$ es diferente de cero.

Dicho de otro modo: Cuando los vectores- fila $l_1 = (a_1, b_1)$ y $l_2 = (a_2, b_2)$, de la matriz \mathbf{m} no son múltiplos uno del otro.

Se dice que un vector w es combinación lineal de los vectores u y v cuando existen números x, y tales que $w = xu + yv$. Este contenido es desarrollado por (Lages, 2004, p.184).

El sistema (*), que fue analizado en la página 34 desde el punto de vista de sus filas, puede también ser mirado en términos de las columnas $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2), w = (c_1, c_2)$ de su matriz aumentada \mathbf{M} . Sobre este ángulo, afirma que (x, y) es una solución del sistema equivale a decir: $w = xu + yv$; por tanto, el sistema posee solución si y solamente si, w es combinación lineal de los vectores u y v .

Resulta entonces de la discusión arriba que si esos vectores $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2)$

son tales que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entonces cualquier vector $w = (c_1, c_2)$ en \mathfrak{R}^2 se expresa (de modo único) como combinación lineal de ellos. En este caso (esto es, cuando u y v no son múltiplos uno del otro) se dice que los vectores u y v son linealmente independientes.

Dos sistemas se dicen equivalentes cuando admiten las mismas soluciones. Cuando se substituye una de las ecuaciones del sistema por la suma de esta ecuación con un múltiplo de la otra, se obtiene un sistema equivalente. En otras palabras, para todo $k \in \mathfrak{R}$, los dos sistemas abajo poseen las mismas soluciones:

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y = c_2 + kc_1 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Para resolver el sistema por el método de la eliminación, se escoge el número k de modo que uno de los coeficientes $a_2 + ka_1$ o $b_2 + kb_1$ sea cero. Esta da inmediatamente el valor de una de las incógnitas, el cual es substituido en la primera ecuación para encontrar el otro valor.

Bajo el punto de vista geométrico, cuando las rectas $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$ se corta en un cierto punto (x_0, y_0) Para cualquier número k , siendo $a_3 = ka_2$, $b_3 = kb_2$ y $c_3 = c_1 + kc_2$ la recta $a_3x + b_3y = c_3$ también pasa por el punto (x_0, y_0) escogiendo k de modo que se anule uno de los coeficientes a_3 o b_3 equivale a

obtener la recta $a_3 x + b_3 y = c_3$ horizontal o vertical, la cual permite determinar inmediatamente una de las coordenadas (x_0, y_0) . (Lages, 2004, p.184)

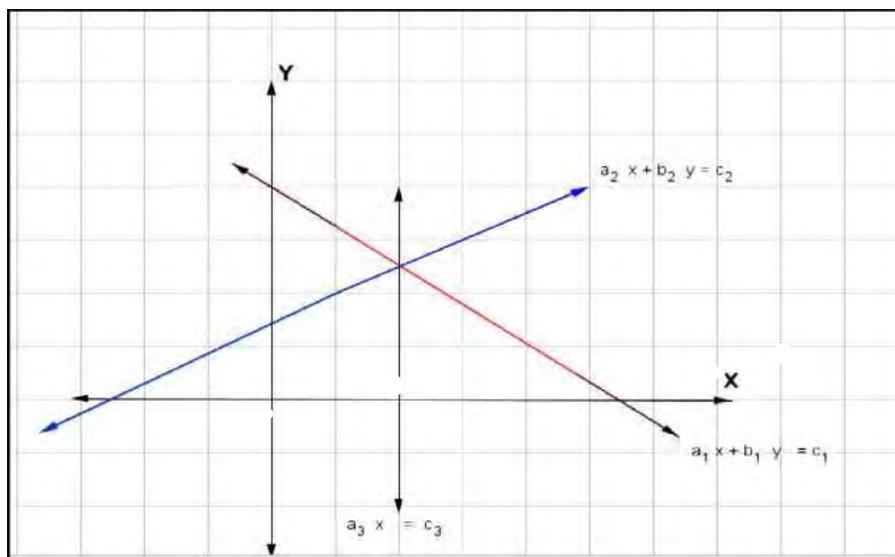


Figura 3. El método de eliminación, visto geoméricamente.

Fuente: Lima (2004, p.185)

La presentación del contenido matemático Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables, basado en Lima(2004), tiene como objetivo mostrar que los docentes del área de Matemáticas debemos tener en nuestra práctica docente los conocimientos de la materia requeridos y basados en precisiones y rigurosidades de ésta en nivel superior, pues cuando desarrollamos la etapa 9 de la Estrategia Didáctica de Matemática en Contexto, que corresponde a la descontextualización, nuestros conceptos y definiciones deben tener un referente que justifique dichos conocimientos.

En el desarrollo de este contenido temático tenemos el concepto de Ecuaciones Lineales con dos Variables como se ha mostrado, clases de sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables como: Indeterminado, Imposible y Determinado, además nos dio la definición de sistemas equivalentes y también nos presentó la representación gráfica del método de eliminación que es utilizado en el desarrollo de un Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

A continuación, presentamos el capítulo IV donde realizamos el análisis del texto “Matemáticas 4” utilizado por los estudiantes del cuarto de secundaria de Educación Básica

Regular, texto que es brindado en forma gratuita a todos los estudiantes por el Ministerio de Educación de Perú.

2.2 Aspectos del tema a investigar en los libros didácticos.

Presentamos los aspectos didácticos del tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables el cual está considerado en el Diseño Curricular Nacional del año 2009. Éste rige hasta el presente año 2017 y Rutas de Aprendizaje 2015.

Analizamos aspectos didácticos en el texto escolar Matemática 4 de secundaria (Editorial Santillana, Lima, 2016), Cuaderno de trabajo Matemática 4 para estudiantes de secundaria (Editorial Santillana, Lima, 2016) y en el Manual del docente (Editorial Santillana, Lima, 2016). Todas estas herramientas las brinda el Ministerio de Educación (MINEDU) a los estudiantes y docentes del cuarto de secundaria.

Del mismo modo, examinamos cómo es abordado este tema desde la visión de la teoría Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC) que nos permitirá categorizar los problemas que se proponen en el texto escolar y en el cuaderno de trabajo, según lo que propone MINEDU.

A continuación pasamos a describir el texto escolar que utilizan los estudiantes del cuarto año de educación secundaria. Dicho material es distribuido por el Estado, el cual consta de 12 secciones y luego describimos los contenidos temáticos de la sección central, que corresponde a la sección inicial 4, que contiene el tema de investigación.

4 Sistemas de ecuaciones. Inecuaciones lineales	Operaciones algebraicas	62	Estrategia heurística	
	Fracciones algebraicas	64	Plantear una ecuación	77
	Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables	66	Sintetizamos	78
	Naturaleza de las soluciones. Transformaciones algebraicas de equivalencias	67	Lecturas especializadas	
	Método de igualación	68	• El agua es vida	79
	Método de sustitución	70	• Un buen abono da buenos frutos	79
	Método de reducción	72		
	Método de Cramer	74		
	Inecuaciones lineales con una incógnita	76		

Figura 4. Sección 3 Álgebra

Fuente: MINEDU texto escolar Matematica4 (2016, p.6)

Según lo presentado en la Figura 4, observamos los contenidos temáticos que anteceden a nuestro tópico en investigación Sistemas de Ecuaciones con dos Variables. Así tenemos las Operaciones Algebraicas y Fracciones Algebraicas.

Estos tópicos previos sólo aportan aspectos operativos en el área del Álgebra, más no se presenta el contenido temático Ecuaciones Fraccionarias ni Operaciones Algebraicas basado en problemas contextualizados, los cuales son conocimientos previos que aportarán en el aprendizaje del tema en investigación que son los Sistemas de Ecuaciones con dos Variables.

La noción del tema en investigación se construye poco a poco mediante actividades que faciliten el aprendizaje del tópico Sistemas de Ecuaciones con dos Variables, haciendo hincapié que los conocimientos se den en espiral, según Camarena (2000):

El conocimiento se construye paulatinamente, como si fuera corriendo por un espiral, y cada vez éste se encuentra en la intersección de la espiral con la línea de tangencia de actividades de aprendizaje en el ámbito de acción del estudiante y se contribuye a la construcción del conocimiento.(p.19)

Es importante que los docentes tomen con especial cuidado la pertinencia de una adecuada secuencialidad de temas en el texto que utilizan los alumnos. Ello permite a los docentes la búsqueda de analogías que servirán para que después se establezcan conexiones entre las estructuras cognitivas de los estudiantes.

Asimismo, Camarena (2000) mencionó que la identificación de los conocimientos previos en los estudiantes y que los mismos estén presentados en el libro que ellos utilizan, permite a los docentes estructurar adecuadamente las actividades didácticas con el sentido de enriquecer y ampliar los conocimientos de los estudiantes, después éstos serán evocados y utilizados en el desarrollo de problemas contextualizados que se modelen con el tópico en investigación.

En la Figura 5, se muestra el concepto de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es la agrupación de dos ecuaciones lineales, donde la solución puede o no existir y, si existe, es un conjunto de pares ordenados (x, y) que satisface simultáneamente ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a_1, a_2, b_1 \text{ y } b_2 \text{ son números reales llamados} \\ \text{coeficientes: } x \text{ e } y \text{ son las incógnitas, y } k_1 \text{ y } k_2 \\ \text{son los términos independientes.} \end{array}$$

Figura 5. Concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables
Fuente: MINEDU texto escolar Matematica4 (2016, p.66)

Al analizarlo, se puede observar que se presenta el concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables. En este análisis, tenemos las siguientes observaciones:

Los valores de a_1 , a_2 , b_1 y b_2 son considerados números reales coeficientes, k_1 y k_2 , son determinadas como constantes, las expresiones x e y se les determina como incógnitas o variables, se incluye el concepto explícito de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables se define el conjunto solución como un par ordenado $(x; y)$ que cumpla con las condiciones de ambas ecuaciones, pero no se le pide a los estudiantes la verificación de los resultados obtenidos para los valores obtenidos $(x; y)$ en el modelo matemático que se determine.

Tampoco se incluyó el análisis de los resultados para determinado conjunto solución $(x; y)$, no se indica qué se debe incluir la representación geométrica de cada una de las ecuaciones de las situaciones matemáticas que se presente a los estudiantes, pues ello permite el transitar por diferentes registros de representación lo cual afianza el aprendizaje del tópico en investigación.

En general, la presentación de este concepto no está completo, ya que no cumple algunas de las etapas de la metodología de la Matemática en Contexto.

Mostramos uno de los problemas en contexto el cual se representa en el área denominada: CÓMO HACER.

EN CONTEXTO

✓ CÓMO HACER

Jaime piensa construir una cisterna para agua de forma rectangular utilizando 32 m de pared. Si el largo de la cisterna debe medir el triple que su ancho, ¿cuáles serán las medidas del largo y ancho de la cisterna?

- Determinamos las variables y representamos algebraicamente las relaciones entre ellas a través de ecuaciones:
 Largo: x Ancho: y El largo es el triple del ancho: $x = 3y$ ①
 Como las paredes de la cisterna tienen una longitud de 32 m y representan al perímetro, tenemos que: $P = 2x + 2y = 32$ ②
- Utilizamos una tabla y hallamos los valores de x e y por separado:

x	6	9	12	15
y	2	3	4	5

x	8	10	12	14
y	8	6	4	2

- El par de valores que satisface ambas ecuaciones es $x = 12$ e $y = 4$. Es decir, el par ordenado (12; 4) es la solución del problema.
 La cisterna medirá 12 m de largo y 4 m de ancho.

Figura 6. COMO HACER
 Fuente: MINEDU texto escolar Matemática 4 (2016, p.66)

Este problema que se muestra en el texto, está representado por dos ecuaciones que forman parte de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables. Si analizamos el problema, está categorizado como de segunda categoría, según la categorización de Olazabal, pues su enunciado permite evocar diferentes áreas de la Matemática, como el Álgebra y la Geometría, pero de traducción simple.

Se observó también que en la proposición: “Jaime piensa construir una cisterna para agua de forma rectangular utilizando 32 m de pared” no está adecuadamente contextualizada, ya que una cisterna es una estructura tridimensional más no de forma rectangular.

Si se determinan variables y constantes de la situación, se incluye un tema de Geometría al relacionar la situación con el concepto matemático de perímetro; sin embargo, después de realizar el tránsito del lenguaje literal al matemático de cada proposición, están separadas como dos ecuaciones que no están relacionadas.

Luego, estas no se presentan como la estructura que se muestra en el concepto de Sistema de Ecuaciones con dos Variables, lo cual no refuerza el concepto que se quiere enseñar, ya que se utilizan dos tablas y se hallan valores, pero no se indican cómo los han determinado.

En la representación gráfica que se presenta en la llamada Conexión, no están gráficamente las ecuaciones del problema desarrollado, lo cual tampoco permite relacionar los diferentes registros de representación. Ello no permite afianzar el aprendizaje del tema en investigación.

En conclusión, este problema no cumple con la Modelación Matemática. Se da el conjunto solución, pero no se cumple con la interpretación de la solución en términos de lo que solicita el evento, por ello, no cumple con el proceso de la Metodológico de la Matemática en contexto.

Presentamos la Figura 7 donde se muestra la representación gráfica de la Naturaleza de las soluciones de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

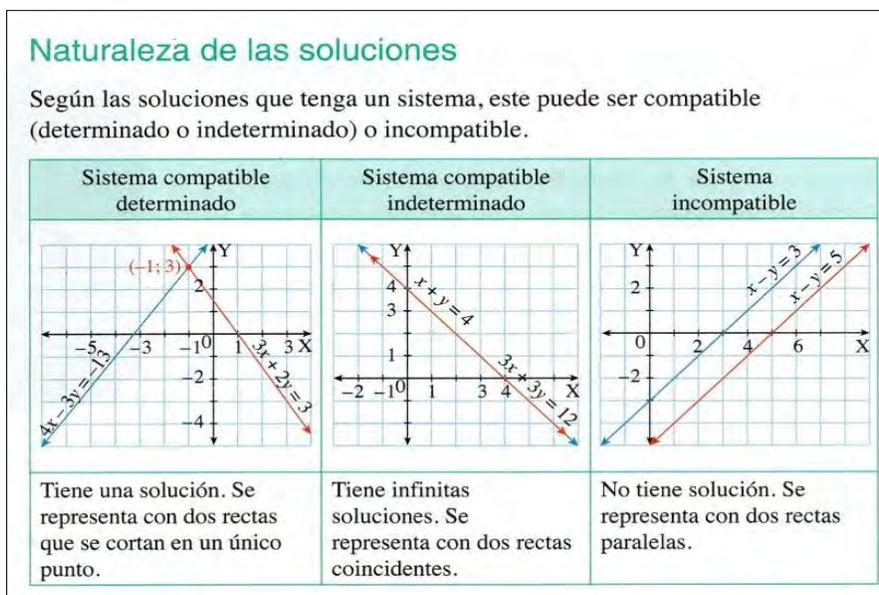


Figura 7. Naturaleza de las Soluciones
Fuente: MINEDU texto escolar Matemática 4 (2016, p.67)

Al analizar las proposiciones matemáticas siguientes: “Según las soluciones que tenga el sistema, este puede ser Compatible(determinado o indeterminado) o incompatible”, afirmamos que no necesariamente esta expresión es la única, pues para determinar cuál es la naturaleza de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables también se puede partir del análisis de los coeficientes de las ecuaciones o de la representación gráfica de las ecuaciones que forman el mismo.

A los estudiantes se les debe dar toda información de las diversas formas de analizar la naturaleza de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables, ya que además no se proponen problemas que permitan determinar sus soluciones.

A continuación, mostramos el Método de igualación presentado en el texto escolar, que es uno de los métodos para desarrollar un Sistema de Ecuaciones Lineales, en la que se

describen los pasos a seguir para utilizar este método y se presenta un problema contextualizado a ser desarrollado.

Método de igualación

Para resolver situaciones relacionadas con sistemas de ecuaciones, existen diversos procedimientos. Conocerlos te será útil, por ejemplo, para calcular el contenido de depósitos de aguas y sus costos, así como el ahorro logrado por un grupo de personas, entre otros.



CONEXIÓN

Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones

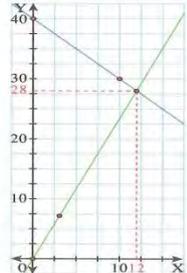
Consiste en representar gráficamente las rectas que corresponden a las ecuaciones que forman el sistema. El punto de corte entre las dos rectas es la solución del sistema.

$7x - 3y = 0 \rightarrow y = \frac{7x}{3}$

x	0	3
y	0	7

$x + y = 40$

x	0	10
y	40	30



El punto de intersección de ambas rectas es (12; 28).
C.S. = {(12; 28)}

Método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de igualación, se deben seguir estos pasos:

- 1.º Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- 2.º Igualamos las expresiones y resolvemos la ecuación que resulta.
- 3.º Hallamos el valor de la otra incógnita reemplazando el valor hallado en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema inicial.

EN CONTEXTO

CÓMO HACER

Una cisterna vació agua en 40 depósitos de dos diferentes capacidades: A y B. El vendedor calcula que recibirá lo mismo si por el llenado de los depósitos tipo A cobra S/ 7 y por el llenado de los depósitos tipo B, S/ 3. ¿En cuántos depósitos de cada tipo se vació agua?

Sea x el total de depósitos de capacidad A, e y , el total de depósitos de capacidad B. Planteamos:

$$\begin{cases} x + y = 40 & \text{①} \\ 7x = 3y & \text{②} \end{cases}$$

- Despejamos x en las dos ecuaciones:
En ①: $x = 40 - y$ En ②: $x = \frac{3}{7}y$
- Igualamos ambas expresiones:
 $\frac{3}{7}y = 40 - y \rightarrow \frac{10}{7}y = 40 \rightarrow y = 28$
- Sustituimos el valor de y en ② para calcular el valor de x :
 $7x - 3y = 0 \rightarrow 7x - 3(28) = 0 \rightarrow 7x = 84 \rightarrow x = 12$
- Verificamos los resultados en ambas ecuaciones:
 $x + y = 40 \rightarrow 12 + 28 = 40 \rightarrow 40 = 40$

El conjunto solución es $\{(12; 28)\}$. Se vació agua en 12 depósitos tipo A y 28 depósitos tipo B.

Si se trata de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, despejamos una misma incógnita en las tres ecuaciones y, luego, igualamos sus valores dos a dos. Así obtenemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Figura 8. Método de igualación
Fuente: MINEDU libro (2016, p.68)

Al evaluar el problema que se presenta en el texto para aplicar el Método de igualación, está categorizado un problema de primera categoría según la categorización de Olazabal, pues su enunciado es literal.

Vemos que en la proposición: “Una cisterna vació agua en 40 depósitos de dos diferentes capacidades”, no está adecuadamente redactado y puede corregirse al presentarse de la siguiente manera: “De una cisterna se vació agua en 40 depósitos de dos diferentes capacidades”, si se determinan variables y constantes de la situación.

Después de realizar el transito del lenguaje literal al matemático de cada proposición, el conjunto de ecuaciones sí se presentan como la estructura de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables, como se muestra en el concepto, lo cual sí refuerza el concepto que se quiere enseñar, se siguen los pasos del Método de igualación, se verifican los resultados obtenidos y se da respuesta a la pregunta de la situación planteada.

Este problema muestra la representación gráfica del sistema de ecuaciones, llamada Conexión, ubicado al lado izquierdo de la página, disminuyendo su importancia. Podemos observar que en problema dado, transitan por diferentes registros de representación, pero por ser un problema de traducción literal, en un futuro se convertirá en un ejercicio rutinario lo cual sólo afianza el aprendizaje mecánico del tópico en investigación. En conclusión, podemos decir que este problema cumple con las etapas de la metodología de la Matemática en contexto.

Mostramos un ejercicio que se presenta en el texto y muestra el Método de sustitución, otro de los métodos para desarrollar un Sistema de Ecuaciones Lineales.

Método de sustitución

Este método de resolución consiste en transformar elementos de las ecuaciones despejando una de las incógnitas y sustituyendo su valor en las demás ecuaciones.

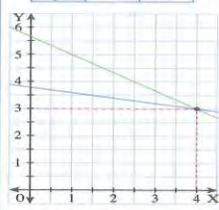
Comprobamos

$2x + 3y = 17 \rightarrow y = \frac{17 - 2x}{3}$

x	1	7
y	5	1

$x + 5y = 19 \rightarrow y = \frac{19 - x}{5}$

x	-1	9
y	4	2



El punto de intersección de ambas rectas es (4; 3).
C.S. = {(4; 3)}

Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución, se deben seguir estos pasos:

- 1.º Despejamos una incógnita en la ecuación que más lo facilite.
- 2.º Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación y resolvemos.
- 3.º Calculamos la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

CÓMO HACER

Resuelve el sistema formado por

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{2} = \frac{8}{3} \\ \frac{x+2y}{3} - \frac{x+y+2}{4} = \frac{13}{12} \end{cases}$$

- Expresamos en ecuaciones equivalentes de igual denominador y reducimos ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2(x+1) + 3(y-1) = 16 \\ 4(x+2y) - 3(x+y+2) = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 17 & \text{①} \\ x + 5y = 19 & \text{②} \end{cases}$$
- Despejamos x en la ecuación ②: $x = 19 - 5y$
- Sustituimos x en la ecuación ①. Luego, resolvemos:

$$2(19 - 5y) + 3y = 17 \rightarrow 38 - 10y + 3y = 17 \rightarrow -7y = -21 \rightarrow y = 3$$
- Reemplazamos y en ② para calcular x : $x = 19 - 5(3) \rightarrow x = 4$

C.S. = {(4; 3)}

Figura 9. Método de sustitución
Fuente: MINEDU libro (2016, p.70)

Al realizar el análisis, se describe el proceso del Método de sustitución y se da un ejemplo que está presentado como ejercicio de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

No es un evento contextualizado, sino un ejercicio algebraico en el cual a las expresiones x e y se les determina como variables, se incluye una representación geométrica del ejemplo en la cual se muestra el punto de intersección de las rectas que representan a cada una de las ecuaciones.

Este punto representa el conjunto solución de dicho Sistema y en el ejercicio está determinado así:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ x + 5y = 19 \end{cases}$$

se presenta el conjunto solución $\{ (4; 3) \}$

En relación a las observaciones de la estrategia de la Matemática en Contexto tenemos:

Este ejemplo no permite el tránsito entre registros de representación semiótica, no da el tránsito del lenguaje natural al registro algebraico o formal y viceversa, tampoco desarrollan habilidad heurísticas ni metacognitiva, pero sí se desarrollan habilidades operativas.

El citado ejemplo no corresponde a ninguna de las clasificaciones, según la categorización de Olazabal, ya que no tiene enunciado que nos permita la determinación de un modelo matemático. Tampoco tiene enunciado evocador, ya que el modelo matemático está determinado algebraicamente.

Si tomamos como referencia una de las observaciones de la estrategia Matemática en Contexto, la cual está referida a la planeación didáctica específica, según Camarena (2002), en la cual se deben cumplir elementos al analizar, en este ejemplo, no se cumple con las características de la Modelación Matemática.

La representación gráfica que se encuentra al lado izquierdo del ejemplo es la resolución del Sistema de Ecuaciones con dos Variables. Esta representación tiene un tamaño más pequeño que la solución algebraica que puede pasar desapercibido por los estudiantes.

En consecuencia, en este texto escolar, no se le da la importancia necesaria, a la forma de encontrar el conjunto solución, tampoco explica cómo se realiza esta representación, no se indica por qué se dan determinados valores para las variables y menos se especifica que para dar solución a este ejemplo se puede comenzar también por el registro geométrico.

Acontinuación tenemos la presentación de un problema denominado “Cómo hacer”

COMO HACER

Un grupo de 17 personas compró pasajes para visitar la ciudad de Huaraz. El pasaje de adulto costó 300 soles, y el pasaje de niño, 160 soles. Si en total se pagaron 4260 soles, ¿cuántos adultos y cuántos niños hay en el grupo?

- Sea x el número de adultos, e y , el número de niños.
- Planteamos el sistema y despejamos y en la ecuación ①:
$$\begin{cases} x + y = 17 & \text{①} \\ 300x + 160y = 4260 & \text{②} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 17 - x & \text{①} \\ 300x + 160y = 4260 & \text{②} \end{cases}$$
- Sustituimos y en la ecuación ②. Luego, resolvemos:
 $300x + 160(17 - x) = 4260 \rightarrow 140x = 1540 \rightarrow x = 11$
- Reemplazamos x en ① para calcular y : $y = 17 - 11 \rightarrow y = 6$
- C.S. = $\{(11; 6)\}$

Hay 11 adultos y 6 niños.

SITIO WEB
Accede a <https://www.desmos.com/calculator>
Haz clic en (1) y escribe $x + y = 17$. Luego, haz clic en (2) y escribe $300x + 160y = 4260$. Verifica gráficamente la solución.

Figura 10. Como Hacer, Método de Sustitución
Fuente: MINEDU Texto Matemática 4 (2016, p.70)

En el análisis del problema que se presenta en el texto para aplicar el Método de sustitución, este está categorizado como un problema de primera categoría, según la categorización de Olazabal, pues su enunciado es literal.

En la proposición: “Un grupo de 17 personas compró pasajes para visitar la ciudad de Huaraz” es de traducción literal al igual que la frase “El pasaje de adulto costó 300 soles, y el pasaje de niños, 160 soles”.

Si se determinan variables y constantes de la situación, después de realizar el transito del lenguaje literal al matemático de cada proposición, el conjunto de ecuaciones si se presentan como la estructura de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables, como se muestra en el concepto, con lo cual sí refuerza el concepto que se quiere enseñar, se siguen los pasos del Método de sustitución, se verifican los resultados obtenidos y se da respuesta a la pregunta de la situación planteada.

En este problema, no indica ir al sitio Web para verificar su representación gráfica, pero no todos los estudiantes tienen acceso a herramientas informáticas; sin embargo, sí permite transitar por dos diferentes registros de representación, del verbal al algebraico, pero por ser un problema de traducción literal, en un futuro se convertirá en un ejercicio rutinario lo cual solo afianza el aprendizaje mecánico del tópico en investigación.

Por otro lado, el problema puede ser resuelto con un método operativo que es más operativo, valga la redundancia, y más fácil para resolver y es probable que los estudiantes lo ejecuten en lugar de utilizar un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

En conclusión, podemos decir que este problema cumple con la Modelación Matemática y cumple con las etapas de la metodología de la Matemática en contexto.

Asimismo, presentamos un problema contextualizado en el área del “Cómo hacer”,. Este debe ser desarrollado con un Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

El mentor de matemáticas (págs. 273 y 274).

▶ OTRA FORMA DE RESOLVER

- Datos:
El largo es 25% más que el ancho
Ancho: x
Largo: $x + 0,25x = 1,25x$
- Planteamos una ecuación con una variable:
Perímetro:
 $2(x + 1,25x) = 72$
 $2,25x = 36$
 $x = 16$
- Reemplazamos:
Ancho: 16 m
Largo: $1,25(16) = 20$ m
Área = $16 \cdot 20 = 320 \text{ m}^2$

✓ CÓMO HACER

El perímetro de un terreno rectangular es 72 m. Si el largo es 25% más que el ancho, ¿cuál es el área del terreno?

x



- Sean x el largo del terreno, e y , el ancho. Planteamos:
El perímetro del terreno es 72 m. $\rightarrow 2x + 2y = 72$
El largo es 25% más que el ancho. $\rightarrow x = 1,25y$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 36 \\ x = 1,25y \end{array} \right.$$

- Resolvemos el sistema por el método de sustitución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 36 \quad \textcircled{1} \\ x = 1,25y \quad \textcircled{2} \end{array} \right.$$

◀ Reemplazamos la ecuación ② en la ecuación ①.

En ① sustituimos x , luego resolvemos la ecuación para hallar y .

$$x + y = 36 \rightarrow 1,25y + y = 36$$

$$2,25y = 36 \rightarrow y = 16 \rightarrow \text{Ancho} = 16 \text{ m}$$
- Reemplazamos $y = 16$ en la ecuación ② para hallar x :
 $x = 1,25y \rightarrow x = 1,25(16) \rightarrow x = 20 \rightarrow \text{Largo} = 20 \text{ m}$ - Comprobamos: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 36 \rightarrow 20 + 16 = 36 \rightarrow 36 = 36 \\ x = 1,25y \rightarrow 20 = 1,25(16) \rightarrow 20 = 20 \end{array} \right.$ - Calculamos el área: Área = $20(16) = 320$
El área del terreno es 320 m^2 .

Figura 11. Método de Sustitución
Fuente: MINEDU texto Matemática 4 (2012, p.71)

En el análisis del ejemplo del “Cómo hacer”, verificamos que es un problema de nivel medio, que pertenece a la segunda categoría según la categorización de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), por tener un enunciado evocador relacionado con diferentes áreas de la Matemática como el Álgebra y la Geometría, pero no se realiza la representación geométrica del problema.

43

Así tenemos: “*El perímetro de un terreno rectangular es de 72 m.....y ¿Cuál es el área del terreno?*”. Estas proposiciones permiten evocar conceptos matemáticos de perímetro y área de un rectángulo y en el caso de la frase “*Si el largo es 25% más que el ancho*” permite evocar conceptos matemáticos del Aritmética (porcentaje). Presentamos las siguientes observaciones en relación a la modelación matemática:

- No se identifican las variables, sí se determinan las medidas solicitadas en el evento.

x = Representa la medida del largo.

y = Representa la medida del ancho.

El problema planteado permite el tránsito del lenguaje natural al matemático, se da la posibilidad de transitar por diferentes registros de representación, tal como lo describió Duval (1999), se identifican variables y constantes del evento, se determina el modelo matemático, se da solución a dicho evento, se establece relaciones entre las variables y constantes de los conceptos involucrados, se valida el modelo matemático y se desarrollan habilidades del pensamiento(Camarena, 2005). Entre estas habilidades tenemos:

- Habilidad para idealizar el evento, porque el estudiante debe hacer relaciones con representaciones graficas como el rectángulo y la definición de perímetro de un cuadrilátero.
- Se determina la solución requerida por el evento cuando se determina el valor de $x = 20$, y el valor de $y = 16$.
- Se valida el modelo matemático del evento, ya que regresa al mismo y se verifica si los valores obtenidos corresponden o no a los datos del evento.

Al extremo derecho del problema se presenta otra forma de desarrollar éste utilizando una sola ecuación, lo cual demuestra que existe un método más fácil, menos operativo y tal vez el estudiante pueda optar por este desarrollo más fácil, lo cual no retroalimenta el aprendizaje de métodos propios de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

continuación, mostramos el Método de reducción presentado en el texto que utilizan los estudiantes. Este es utilizado para desarrollar un Sistema de Ecuaciones Lineales.

Método de reducción

Resolver un sistema lineal por el método de reducción consiste en buscar un sistema equivalente donde los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales y de signos opuestos. Este conocimiento te permitirá resolver situaciones que se puedan modelar mediante un sistema de ecuaciones, como la compra de productos.



Método de reducción

- 1.º Buscamos otro sistema equivalente de modo que una de las incógnitas tenga coeficientes opuestos.
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones obtenidas y resolvemos la ecuación que resulta.
- 3.º Hallamos el valor de la otra incógnita reemplazando el valor hallado en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema inicial.

TEN EN CUENTA
Al resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción,

Figura 12. Método de reducción
Fuente: MINEDU texto escolar Matemática 4 (2016, p.72)

A continuación, tenemos la evaluación de un problema contextualizado, en el área del CÓMO HACER. Este debe ser desarrollado con un Sistema de Ecuaciones con dos Variables, utilizando el método de reducción.

CÓMO HACER

Una comunidad de la región Áncash produce leche semidescremada mezclando dos tipos de leche: una con 20 % de grasa y otra con 70 % de grasa. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche necesitan para producir 200 L de leche con 40 % de grasa? Verifica gráficamente.

- Sean x : N.º de litros con 20 % de grasa y : N.º de litros con 70 % de grasa.
Se deben producir 200 L de leche: $x + y = 200$
- La grasa de la mezcla es igual a: $20\%x + 70\%y = 40\%(200) \rightarrow 2x + 7y = 800$
- Resolvemos el sistema obtenido por el método de reducción:

$$\begin{cases} x + y = 200 & \textcircled{1} \\ 2x + 7y = 800 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Multiplicamos $\textcircled{1}$ por -2 para eliminar x .

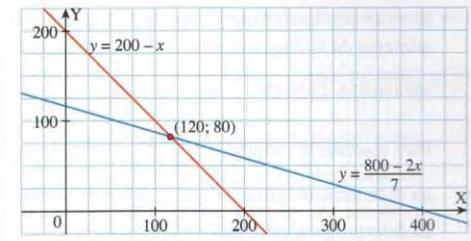
$$\begin{cases} x + y = 200 & \textcircled{1} \\ -2x - 2y = -400 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ -2x - 2y = -400 \\ \hline 5y = 400 \rightarrow y = 80 \end{cases}$$

Reemplazamos en $\textcircled{1}$: $x + y = 200 \rightarrow x + 80 = 200 \rightarrow x = 120$
- Despejamos y en $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ para verificar el resultado de manera gráfica:

Necesitan 120 L de leche con 20 % de grasa y 80 L con 70 % de grasa.



El punto de intersección de las rectas (120; 80) permite verificar el conjunto solución.

Comprobamos
Reemplazamos los valores $x = 120$ e $y = 80$ en el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x + 7y = 800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 120 + 80 = 200 \\ 2(120) + 7(80) = 800 \end{cases}$$

SITIO WEB
Accede a <https://es.khanacademy.org/>
Haz clic en "Temas".
Luego, escribe sistema

Figura 13. Problema: Método de reducción
Fuente: MINEDU texto escolar Matemática 4. (2016, p.73)

Tenemos la presentación y evaluación de este problema en el área denominada “*Cómo hacer*” y se verificó que tiene un nivel medio, que pertenece a la segunda categoría según la categorización de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) por tener un enunciado evocador, relacionado con el área de la Aritmética, en el tópico de porcentajes, si se realiza la representación geométrica del problema.

Así tenemos: “*Dos tipos de leche de estas una con 20% de grasa y otra con 70% de grasa*”. Estas proposiciones permiten evocar conceptos matemáticos y de Aritmética (porcentaje).

Presentamos las siguientes observaciones en relación a la planeación didáctica y a la modelación matemática:

Si determina las variables, éstas son:

x = Representa los litros de leche con 20% de grasa.

y = Representa los litros de leche con 70% de grasa.

El problema presentado muestra el tránsito del lenguaje natural al matemático, se da la posibilidad de transitar por diferentes registros de representación, tal como lo describe Duval (1999), da solución a dicho evento, establece relaciones entre las variables y constantes de los conceptos involucrados si se valida el modelo matemático y se desarrollan habilidades del pensamiento (Camarena, 2005).

Entre estas habilidades tenemos:

Habilidad para idealizar el evento porque el estudiante debe hacer relaciones con representaciones gráficas.

- Se determina la solución requerida por el evento cuando se encuentra el valor de

$$x = 120.$$

$$y = 80.$$

- Si se valida el modelo matemático del evento, se regresa al mismo y se verifica los valores obtenidos.

En el extremo derecho destaca un cuadro que indica la verificación de la solución del Sistema utilizando un Software de Geometría, conocido como Geogebra; sin embargo, no

Al analizar la situación de aprendizaje “*Cajas recicladas para quequitos*”, vemos que es un problema contextualizado de segunda categoría, en un medio cercano a los estudiantes, según la categorización de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), por tener un enunciado evocador relacionado con el área de Geometría en los temas de área y perímetro.

En las primeras preguntas se induce al análisis y la comprensión del problema. Así tenemos:

- La pregunta uno “*¿De qué trata la situación?*”.
- En la pregunta dos “*¿Qué debes hallar?*” que se está representando con las variables a,b.
- En la pregunta tres “*¿Qué pasos debes seguir para resolver la situación?*” que es la planificación de la representación de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.
- En la pregunta cinco se indica: “*¿Representa en un Sistema de Ecuaciones los lados del cartón?*” que es la determinación del modelo matemático, pero no se solicita definir las variables, ni pide realizar la representación geométrica del problema, pero si permiten evocar conceptos matemáticos de la Aritmética (las Proporciones), como indica la pregunta siete.
- En la pregunta seis se indica: “*Definir la estrategia para resolver la situación*“, lo cual refuerza el aprendizaje del tema desarrollado pues se debe determinar el Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables.
- En la pregunta ocho resalta: “*Dibujar el cartón y los cortes de las esquinas. Luego, expresa algebraicamente el perímetro de la base de la caja*”. Es decir, se da la posibilidad de transitar por diferentes registros de representación, tal como lo describe Duval (1999), y da solución a dicho evento.

Presentamos de la segunda parte de las preguntas de la actividad “*Cajas recicladas para quequitos*”.

9. Expresa algebraicamente el área de la base de la caja.

10. Responde las preguntas del problema.

Reemplaza los valores obtenidos y comprueba tu respuesta.

COMPRUEBA

11. ¿Cómo compruebas numéricamente que las expresiones resultantes corresponden al perímetro y área de la base de la caja?

CONCLUYE Y APLICA

12. ¿Qué estrategias fueron útiles para resolver el problema?

13. Supón que el cuadrado que se corta en las esquinas mide 4 cm de lado. ¿Cuál es el área lateral de la caja?

SITIO WEB
Accede a <http://goo.gl/sq17Da> para ampliar tus conocimientos sobre

Figura 15. Cajas recicladas para quequitos, segunda parte
Fuente: MINEDU Cuaderno de trabajo Matemática 4 (2016, p.157)

Pasaremos al análisis de la segunda parte de las preguntas de la actividad “Cajas recicladas para quequitos”.

- Por el enunciado de la pregunta nueve sólo refuerza el aprendizaje del tópico de expresiones algebraicas, más no el tema Sistema de Ecuaciones con dos Variables.
- Se solicita en la pregunta 11: “¿Cómo compruebas numéricamente que las expresiones resultantes correspondan al perímetro a área de la base de la caja?”, reforzando nuevamente el aprendizaje del tópico de expresiones algebraicas, más no el tema principal de Sistema de Ecuaciones con dos Variables.
- En este problema se desarrolla habilidades del pensamiento (Camarena, 2005). Entre estas tenemos:
 - Habilidad para idealizar el evento, porque el estudiante debe hacer relaciones con representaciones gráficas y algebraicas.
 - Determinar la solución requerida por el evento.
 - Validar el modelo matemático del evento, pues si se regresa al modelo y se verifica si los valores obtenidos.

En conclusión, esta actividad no cumple una de las etapas del proceso de la metodología de la Matemática en Contexto.

Pasamos a evaluar el desarrollo de la actividad propuesta a los estudiantes en su cuaderno de trabajo y que se encuentra desarrollada en el manual para el docente.

COMPRENDE

- ¿De qué se trata la situación? De la elaboración de cajas para la venta de quequitos.
- ¿Qué debes hallar? Las medidas del cartón y las expresiones de perímetro y área de la caja.
- ¿Qué datos proporciona la situación? Las relaciones entre las dimensiones de cajas.

PLANIFICA

- ¿Qué pasos seguirás para resolver la situación? Representar las relaciones entre los lados del cartón en un sistema de ecuaciones. Luego, expresar algebraicamente el perímetro y el área de la base de la caja.
- Representa en un sistema de ecuaciones los lados del cartón?

$a/b = 2/3 \rightarrow 3a - 2b = 0$	(1)	
$b = a + 10 \rightarrow a - b = -10$	(2)	

- ¿Qué estrategia complementa la estrategia sugerida? Planteo de ecuación

EJECUTA

- ¿Calcula las medidas de la caja de cartón?

$3a - 2b = 0$	$-2a + 2b = 20$	$a = 20, b = 30, \text{ el largo mide } 30 \text{ cm y el ancho mide } 20 \text{ cm.}$
---------------	-----------------	--

- Dibuja el cartón y los cortes de las esquinas. Luego expresa algebraicamente el perímetro de la base de la caja.



Si el largo es $30 - 2x$ cm y el ancho es $20 - 2x$.
Perímetro: $2(30 - 2x) + 2(20 - 2x) = 60 - 4x + 40 - 4x = 100 - 8x$

Figura 16. Actividad: Cajas recicladas para quequitos, primera parte
Fuente: MINEDU, Manual para el docente, Matemática 4. (2016, p.157)

Análisis del desarrollo de la situación de aprendizaje: “Cajas recicladas para quequitos”.

En su primera parte, tenemos las siguientes observaciones en relación al cumplimiento de las etapas de la metodología didáctica y a la modelación matemática:

- En relación a la parte denominada “Comprende”, las preguntas uno, dos y tres propuestas, sí inducen a la comprensión del problema.
- En relación a la parte denominada “Planifica”, en la pregunta cinco no se solicita la determinación de variables para poder determinar el sistema. Sólo se utilizan letras como a y b sin definir que representa a ni b .

- En la pregunta siete se dan los valores para obtenidos para a y b , pero no se muestra los diferentes métodos que se pueden utilizar para desarrollar el Sistema determinado.
- En la pregunta ocho se escribe la variable x , pero tampoco se ha solicitado definir esta variable; sin embargo, sí se realiza el cambio de registros del verbal al algebraico cuando se indica: “*Expresa algebraicamente el perímetro de la base de la caja*”. Es decir, se da la posibilidad de transitar por diferentes registros de representación, tal como lo describe Duval (1999), pero no se refuerza nuevamente un Sistema de Ecuaciones con dos Variables, que es el tópico matemático en desarrollo.

Análisis de la segunda parte de las preguntas.

9. Expresa algebraicamente el área de la base de la caja.

Área = $(30 - 2x)(20 - 2x) = 600 - 60x + 4x^2 = 4x^2 - 100x + 600$

10. Responde las preguntas del problema.

Las expresiones algebraicas del perímetro y el área son $(100 - 8x)$ cm y $(600 - 100x + 4x^2)$ cm², respectivamente.

COMPRUEBA

11. ¿Cómo compruebas numéricamente que las expresiones resultantes corresponden al perímetro y área de la base de la caja?

R.M. Verificado con algún valor de x y reemplazándolo en las medidas de las dimensiones de la caja. Luego, reemplazando el valor numérico en cada expresión.

Si el lado del cuadrado mide 5cm, entonces los lados de la base son $30 - 2.5 = 20$ cm y $20 - 2.5 = 10$ cm

Su perímetro es $2(20 + 10) = 60$ m. Verificamos: $100 - 8.5 = 60$ cm

Su área es $20 \cdot 10 = 200$ cm². Verificamos: $600 - 100.5 + 4.5^2 = 200$ cm²

CONCLUYE APLICA

12. ¿Qué estrategias fueron útiles para resolver el problema?

Plantear un sistema de ecuaciones de ecuaciones y hacer un gráfico.

13. Supón que el cuadrado que se corta en las esquinas mide 4 cm de lado. ¿Cuál es el área lateral de la caja?

Las dimensiones de la base de la caja serán $30 - 2.4 = 22$ cm y $20 - 2.4 = 12$ cm. Además, la altura de la caja será de 4 cm.

El área lateral de la caja es $A_L = (2 \cdot 22 + 2 \cdot 12) \cdot 4 = 272$ cm²

Figura 17. Actividad: Cajas recicladas para quequitos, segunda parte

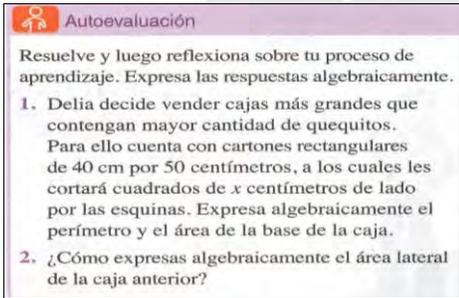
Fuente: MINEDU, Manual para el docente, Matemática 4. (2016, p.157)

- Se da solución a dicho evento, establece relaciones entre las variables y constantes de los conceptos involucrados, a pesar que no tiene determinación de las variables utilizadas, si se valida el modelo matemático cuando se asume que la medida del lado del cuadrado que se recorta es de 5cm, pero no se explica por qué se asigna este valor.
- En la pregunta 11: “¿Cómo compruebas numéricamente que las expresiones resultantes correspondan al perímetro a área de la base de la caja?” se aplican los procedimientos aritméticos respectivos y se da la verificación los valores en las

ecuaciones lineales que representan al área y perímetro, más no en un modelo matemático de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables que es el objetivo de aprendizaje para los estudiantes.

- En la pregunta 12, sólo se menciona la estrategia, que es plantear un Sistema de Ecuaciones con dos Variables y la realización de un gráfico.
- En la pregunta 13, sólo se realizan operaciones aritméticas para responder cuál es el área y perímetro de la caja, más no se redondea la actividad con un modelo matemático del Sistema de Ecuaciones con dos Variables.
- En consecuencia, no se cumple con las etapas que permitan la resolución del evento contextualizado.
- Presentamos ahora la autoevaluación que los estudiantes deben desarrollar en relación a la situación de aprendizaje propuesta en su cuaderno de trabajo.

Cuadro 7. Autoevaluación: Cajas recicladas para quequitos

Actividades	Análisis y clasificación según la MCC
 <p>Respuesta: 1 $(-8x + 180)$ y $(4x^2 - 180x + 2000)$ Respuesta: 2 $(-8x + 100x)$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Este problema, por su enunciado, corresponde a la segunda categoría pues tiene un enunciado que permite evocar conceptos de la Geometría. • Está propuesto en un contexto cercano a los estudiantes. • No refuerza el tópico de elaborar un modelo matemático que represente un Sistema de Ecuaciones con dos Variables. • Más bien sirve de forzamiento de las representaciones algebraicas cuando se pide la obtención del área y perímetro de un cuadrilátero.

Fuente: MINEDU, cuaderno de trabajo, Matemática 4 (2016, p.157)

En conclusión, el problema propuesto en la autoevaluación no es pertinente para la enseñanza del tópico Sistema de Ecuaciones con dos Variables, pues no favorecen la obtención del modelo matemático que represente este sistema. Luego presentamos las actividades adicionales que los estudiantes deben desarrollar en el cuaderno de trabajo y guía de los maestros, luego analizamos los problemas que se proponen.

Cuadro 8. Actividades adicionales: Cajas recicladas para quequitos

Problemas	Análisis y categorización según la MCC
<p style="text-align: center;">Actividades adicionales</p> <p>1. Una piscina es 15 m más larga que ancha. Además, alrededor de ella hay un camino de 3 m de ancho. Calcula el área de la piscina y del camino.</p> <p>Respuesta:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <p>1. Piscina = $(x^2 + 15x) \text{ m}^2$, camino = $(12x + 126) \text{ m}^2$.</p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> • El problema número uno está redactado en un contexto conocido por los estudiantes. • Pertenece a la segunda categoría, pues hace evocar temas del área de la Geometría. • No refuerza la obtención de un modelo matemático que represente el tópico de estudio Sistema de Ecuaciones con dos Variables, más bien refuerza el aprendizaje de las representaciones algebraicas.
<p>2. Al hacer una zanja de 2 m de ancho por 1,5 m de profundidad alrededor de un edificio cuadrado, hicieron falta camiones de 12 m^3 para retirar la tierra que se sacó. ¿Cuántos camiones se necesitaron para retirar la tierra?</p> <p>Respuesta:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <p>2. $(x + 2)$ camiones.</p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> • Está en un contexto comprensible para los estudiantes. • Pertenece a la segunda categoría, hace evocar temas del área de la Geometría. • No favorece la enseñanza del Sistema de Ecuaciones con dos Variables. • No facilita la elaboración un modelo matemático que represente el tópico de estudio Sistema de Ecuaciones con dos Variables. • Pero sirve de reforzamiento en el uso de representaciones algebraicas como se demuestra en las respuestas que se presentan.
<p>3. Una cancha de básquet tiene forma de rectángulo y mide 12 m más de largo que de ancho. Alrededor de ella, se colocarán 20 filas de asientos. Además, se sabe que cada fila ocupa 1,5 m. Encuentra el área total que se necesita para la construcción de la zona de asientos. Si se colocaran solo 6 filas, ¿cuál sería el área de construcción de la zona de asientos?</p> <p>Respuesta:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <p>3. $(90x + 3960) \text{ m}^2$, $(6x + 180) \text{ m}^2$.</p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> • Se presenta en un contexto cotidiano a los estudiantes. • Pertenece a la segunda categoría, pues su enunciado hace evocar temas del área de la Geometría como conceptos de área y perímetro. • Pero no induce a la obtención de un modelo matemático que represente el tópico de estudio Sistema de Ecuaciones con dos Variables. • Refuerza y corresponde al uso de representaciones algebraicas, como se demuestra en las respuestas.

Fuente: MINEDU, Manual para el docente, Matemática 4 (2016, p.157)

En conclusión, los 3 problema propuestos en la actividad adicional no son los más adecuados para este tema de enseñanza, no tienen variedad entre ellos, los 3 tienen la segunda categoría, contextos cercanos, no propician la obtención del modelo matemático del tópico Sistemas de Ecuaciones con dos Variables, más bien todos estos problemas están más orientados al uso de Expresiones Algebraicas.

También tenemos otra situación de aprendizaje denominada “*De Visita a la Fábrica de Cartones*”, presente en el cuaderno de trabajo de los estudiantes del cuarto de secundaria.

De visita a la fábrica de cartones

Los estudiantes de cuarto grado de Secundaria ganaron el concurso “Reciclar es mejorar nuestro planeta”. Por ello, obtuvieron como premio una visita a una fábrica de cartones. Allí recibieron una charla sobre el proceso de reciclaje. A la mitad de la charla, se retiraron 10 mujeres y se observó que el número de varones era el doble que el de mujeres. Luego, casi al final de la charla, se retiraron 45 varones y se observó que el número de mujeres era el doble que el de varones. ¿Cuántos estudiantes asistieron a la charla?



Organizamos la información

¿Cómo representarías el número de mujeres y varones que asistieron a la charla? ¿Cuántos estudiantes se retiraron en cada uno de los dos momentos? ¿Cómo expresarías estas variaciones utilizando un modelo algebraico?

PRESENTACION DE LA SITUACION

1. ¿De qué trata la situación?

¿Qué tienes que averiguar?

ANALISIS DE LA INFORMACION

2. Sea m el número de mujeres, y v , el número de varones. ¿Cómo representa la cantidad de mujeres y varones luego de cada uno de los retiros? Hazlo mediante un modelo algebraico.

Figura 18. Actividad : De visita a la Fábrica de Cartones
Fuente: MINEDU, Manual para el docente, Matemática 4. (2016, p.159)

En el análisis de la situación de aprendizaje “*De Visita a la Fábrica de Cartones*”, este problema está contextualizado en un medio cercano a los estudiantes y está relacionado con el reciclaje, que es un tema de importancia global. También tiene una ilustración que favorece la representación de este problema y que es de primera categoría, según la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), por tener un enunciado literal. Presentamos las siguientes observaciones en relación al proceso metodológico de la MCC.

- Con el tipo de preguntas de la presentación, se induce la comprensión de la actividad.
- En la pregunta dos se determinan las variables y las constantes de la situación.

- No se incluyen temas relacionados a otras áreas de las ciencias.
- Sí se solicita determinar el modelo matemático de la situación.

A continuación presentamos la segunda parte de la actividad “*De Visita a la Fábrica de Cartones*”

• Resuelve el sistema de ecuaciones y explica.

• ¿Qué cantidad de mujeres y varones asistieron a la charla? ¿Y en total?

• ¿Son los únicos valores que satisfacen a ambas ecuaciones del sistema? ¿Cómo lo podrías sustentar? Haz el desarrollo en tu cuaderno.

DEMOSTRACIÓN DE LA VALIDEZ

3. ¿Cómo verificas tu solución? ¿Podrás obtener el mismo conjunto solución a través de otro procedimiento?

CONCLUSIONES

4. ¿A qué conclusiones llegaste?

Figura 19. Actividad. De Visita a la Fábrica de Cartones segunda parte
Fuente: MINEDU cuaderno de trabajo, cuaderno de trabajo (2016, p.159)

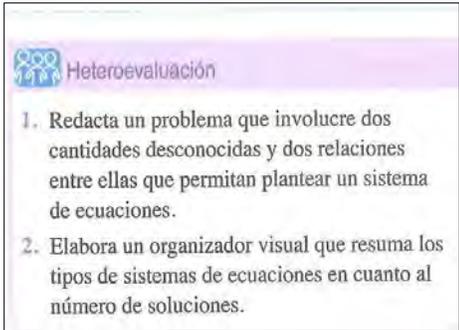
Continuando con el análisis de la actividad, tenemos la segunda parte de la pregunta número dos.

- En esta pregunta se indica resolver el Sistema de Ecuaciones que se ha determinado, interpretar la situación problema y también se pide que se explique la solución requerida por el evento.
- Asimismo en esta pregunta se solicita interpretar la solución en términos del evento.
- El problema permite el tránsito de lenguaje literal o natural al matemático en las pregunta dos y tres.
- En esta situación se cumple una de las funciones de los eventos contextualizados, que es motivar a los estudiantes en la construcción del modelo matemático Sistema de Ecuaciones con dos Variables, que refuerza el conocimiento en investigación.

Siguiendo con la presentación y el análisis de situación de aprendizaje denominada “*De Visita a la Fábrica de Cartones*” y de su heteroevaluación desarrollada en el cuaderno de

trabajo guía de los maestros. También pasamos a evaluar cada pregunta del problema contextualizado y las respuestas que se presentan en este cuaderno de trabajo guía.

Cuadro 9. *Heteroevaluación: De Visita a la Fábrica de Cartones*

Actividades	Análisis y categorización según la MCC
 <p>1. Redacta un problema que involucre dos cantidades desconocidas y dos relaciones entre ellas que permitan plantear un sistema de ecuaciones.</p> <p>2. Elabora un organizador visual que resuma los tipos de sistemas de ecuaciones en cuanto al número de soluciones.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La indicación número uno es general ya que no se especifica las características que debe tener el problema solicitado. • En los ejercicios y problemas presentados como ejemplos no se ha practicado que los estudiantes redacten problemas que después deban ser resueltos algebraicamente, lo cual no permite asegurar que los estudiantes realicen una adecuada creación de un problema. • No se indica que una vez creado el problema se tenga que desarrollar, graficar y después determinar el conjunto solución. • En relación al enunciado 2, acerca de elaborar un organizador visual, sólo refuerza aspectos teóricos y mecánicos de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

Fuente: MINEDU, Manual para el docente, Matemática 4 (2016, p.157)

Analizando la actividad de Heteroevaluación concluimos que la pregunta uno sí se orienta hacia el modelado de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables, pero en el caso de la pregunta dos sólo se refiere al reforzamiento del aspecto teórico del número de soluciones de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

A continuación, tenemos el desarrollo de la situación de aprendizaje denominada: “De Visita a la Fábrica de Cartones” en el manual del docente.

PRESENTACION DE LA SITUACION

1.- ¿De qué trata la situación?
Un grupo de estudiantes asiste a una charla y, en dos momentos de esta, se retiran de ellos.

¿Qué tienes que averiguar?
El número de mujeres y varones que asistieron a la charla.

ANALISIS DE LA INFORMACION

2.- Sea m el número de mujeres y v el número de varones ¿Cómo representarías la cantidad La cantidad de mujeres y varones luego de cada uno de los retiros? Hazlo mediante un Modelo algebraico.

Se retiran 10 mujeres y el número de varones es el doble que el de mujeres
$V=2(m-10)$
Se retiran 45 varones y el número de mujeres es el doble que el de varones
$m-10=2(v-45)$
Formamos un sistema de ecuaciones con dos variables.

Figura 20. Actividad, De Visita a la Fábrica de Cartones
 Fuente: MINEDU cuaderno de trabajo, cuaderno de trabajo (2016, p.158)

Al realizar el análisis del desarrollo de la situación de aprendizaje “De Visita a la Fábrica de Cartones” encontramos las siguientes observaciones en relación al cumplimiento de las nueve etapas del proceso metodológico de la Matemática, según la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC):

- Sí se determinan variables y constantes para desarrollar la pregunta dos. También se utilizan letras como : m , para representar el número de mujeres y v para representar el número de varones.
- Se indica con claridad lo que se quiere determinar que, en este caso, es el número de mujeres y varones, como se indica en la pregunta uno.
- Se da la posibilidad de transitar por diferentes registros de representación: Del verbal al Algebraico, tal como lo describe Duval (1999).

Presentamos el análisis de la actividad “De Visita a la Fábrica de Cartones” en su segunda parte.

• Resuelve el sistema de ecuaciones y explica.

Resolvemos el sistema por sustitución	$v = 2(m - 10), v = 2m - 20$ (1)	
	$m - 10 = 2(v - 15)$ (2)	

Reemplazamos $v = 2(m - 10)$ en la ecuación (2)

$$m - 10 = 2v - 30 \rightarrow m - 10 = 2(2m - 20) - 30 \rightarrow m = 40$$

Reemplazamos $m = 40$ en la ecuación (1) para hallar v :

$$v = 2(m - 10) \rightarrow v = 2 \cdot 30 \rightarrow v = 60$$

• ¿Qué cantidad de mujeres y varones asistieron a la charla? ¿Y en total?
A la charla asistieron 40 mujeres y 60 varones. En total 100 estudiantes.

• ¿Son los únicos valores que satisfacen a ambas ecuaciones del sistema? ¿Cómo lo podrían sustentar? Haz el desarrollo en tu cuaderno.
Los valores obtenidos son los únicos que satisfacen al sistema. Esto lo podemos sustentar haciendo una gráfica y reemplazando las incógnitas v y m por x e y . Luego de realizar una tabulación y graficar ambas ecuaciones, se obtendrá un solo punto de intersección de ambas rectas. Esto confirma la solución única.

DEMOSTRACIÓN DE LA VALIDEZ

3. ¿Cómo verificas tu solución? ¿Podrías obtener el mismo conjunto solución a través de otro procedimiento?

Despejamos el sistema de ecuaciones y lo desarrollamos por otro de los métodos de resolución.		
$v = 2(m - 10)$ (1)		$v - 2m = -20$ (1)
$m - 10 = 2(v - 15)$ (2)		$-2v + m = -80$ (2)
$v - 2m = -20$ (1)		
$-4v + 2m = -160$ (2)		$-3v = -180 \rightarrow v = 60; m = 40$

Figura 21. Actividad: De Visita a la Fábrica de Cartones, segunda parte
Fuente: MINEDU cuaderno de trabajo, (2016, p.159)

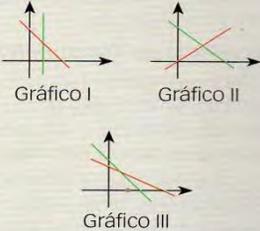
Al realizar la evaluación de la actividad “De Visita a la Fábrica de Cartones”, segunda parte, tenemos:

Aplicando uno de los métodos resolución de solución de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables se determinan los valores solicitados.

- Se da solución a dicho evento, establece relaciones entre las variables y constantes de los conceptos involucrados y se valida el modelo matemático.
- En la pregunta tres se aplica otro de los métodos de solución de un Sistema de Ecuaciones con dos Variables, pero no se verifica en este modelo matemático los resultados obtenidos.
- En ninguna de la preguntas se solicita la representación geométrica del problema.
- En conclusión, no se cumple con las etapas de resolución del evento contextualizado.

Presentamos a continuación las Actividades adicionales de la situación de aprendizaje propuestas en el cuaderno de trabajo que utilizan los estudiantes del cuarto de secundaria.

Cuadro 10. *Actividades Adicionales*

Actividades adicionales	Análisis
<p data-bbox="397 611 768 1207"> Actividades adicionales 1. Daniel tiene una granja. Cuando le preguntan cuántas aves tiene, él responde: "Si al triple de la cantidad de pollos le sumamos el doble de la cantidad de patos, obtenemos 21. Además, si al doble del número de pollos le restamos la cantidad de patos, obtenemos cero". ¿Cuál de los gráficos representa el sistema de ecuaciones que se forma a partir de los datos?  </p> <p data-bbox="224 1228 332 1255">Respuesta</p> <div data-bbox="397 1312 701 1388" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Respuestas: 1. Gráfico II.</p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> • Este problema está propuesto en un contexto de la vida cotidiana. • Permite el tránsito entre dos registros del lenguaje verbal al matemático. • Pertenece a la segunda categoría pues hace evocar temas del área de la Aritmética y Geometría, implícitamente permite la obtención de un modelo matemático que represente el tópico de estudio Sistema de Ecuaciones con dos Variables. • Para que el estudiante identifique el gráfico previamente debe determinar el modelo matemático. • Sus alternativas son representaciones gráficas. • Permite el reforzamiento del tópico en investigación.
<div data-bbox="349 1535 753 1803" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>2. Por los S/ 79 que tenía José, le dieron € 5 y \$ 20, mientras que a María por sus S/ 65, le dieron € 10 y \$ 10. ¿En cuántos soles han cotizado el euro y el dólar? ¿Qué clase de sistema es? ¿Por qué?</p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> • El problema está propuesto en un contexto cotidiano para los estudiantes. • Permite el tránsito entre dos registros del lenguaje verbal al matemático. • Pertenece a la primera categoría ya que su traducción es literal, implícitamente. • Permite la obtención de un modelo

<p>Respuesta</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p>2. Euro = 3,40 soles; dólar = 3,10 soles; es un sistema compatible porque tiene una solución única, ya que las dos rectas son secantes.</p> </div>	<p>matemático que represente el tópic de estudio Sistema de Ecuaciones con dos Variables.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Para que el estudiante identifique la clase de sistema que se define previamente debe determinar el modelo matemático, luego graficando las ecuaciones determinadas o analizando los coeficientes en cada ecuación que forme este sistema se puede dar la respuesta solicitada. • Esta forma permite el reforzamiento del tópic en investigación.
--	--

Fuente: Cuaderno de trabajo (2016, p.159)

Siguiendo con la presentación y el análisis de tenemos otra situación de aprendizaje titulada “Caños ahorradores” y el conjunto de preguntas que se proponen para ser desarrolladas por los estudiantes del cuarto de secundaria en su cuaderno de trabajo.

Caños ahorradores

Una tienda dedicada a la comercialización de sanitarios y grifería ha puesto a la venta un caño ahorrador que reduce en 30% el consumo de agua. Este mes la tienda ha recaudado S/ 1000 por la venta de 15 caños entre ahorradores y no ahorradores. Además, se sabe que cada caño ahorrador se vendió a S/ 80, y cada caño no ahorrador, a S/ 40. ¿Cuántos caños ahorradores se vendieron en la tienda? ¿Y cuántos no ahorradores?

Reconocemos un problema muy vinculado a la realidad
¿Por qué es importante el uso de caños ahorradores? ¿En tu casa o escuela utilizan caños ahorradores? ¿Qué estrategia te permitirá resolver la situación?

CONCRETAR UNA FINALIDAD PROBLEMÁTICA Y RECONOCER CÓMO RESOLVERLA

1. ¿Qué datos se conocen?
2. ¿Qué quieres averiguar?
3. ¿Qué harás primero?
4. ¿Qué estrategia usarás para determinar el número de caños ahorradores y no ahorradores vendidos en la tienda?

HACER SUPOSICIONES O EXPERIMENTAR

Resuelve y comenta con un(a) compañero(a) cómo lo hiciste.

5. Si se vendieron 15 caños entre ahorradores y no ahorradores, ¿cómo lo expresarías algebraicamente?

--	--

6. ¿Las siguientes ecuaciones son equivalentes a la ecuación anterior? Justifica tu respuesta.

$8x + 6y = 120$ ①

$30x + 30y = 450$ ②





El empleo de los sistemas de ecuaciones en determinadas situaciones permite generalizar la relación que existe entre las cantidades propuestas.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA
Precálculo, de James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (págs. 634-635).

Figura 22. Actividad, Caños ahorradores
Fuente: MINEDU cuaderno de trabajo, (2016, p.159)

En la evaluación y el análisis de la situación de aprendizaje titulada “*Caños ahorradores*”, determinamos que esta situación está contextualizada en un medio cotidiano para los estudiantes es de primera categorización de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), por tener un enunciado literal.

Presentamos las siguientes observaciones en relación al proceso metodológico de la MCC.

Esta actividad cumple con la siguiente función:

- Motivar a los estudiantes en la construcción, reforzamiento o evaluación del aprendizaje de conocimientos. Nuestra investigación está enmarcada en esta función.
- Da la posibilidad de desarrollar competencias (conocimientos, habilidades, actitudes y valores, entre otros) (Camarena, 2002).

En cuanto a la “Modelación matemática”, consta de tres momentos:

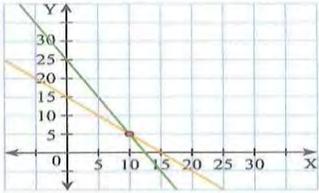
- Identificar variables y constantes del evento, como se presenta en la pregunta cinco.
- Establecer relaciones entre las variables y constantes, de acuerdo a los enunciados de la situación de aprendizaje y de los elementos involucrados en el evento contextualizado que se presenta.
- Se realiza una validación parcial del modelo matemático del evento pues sólo se da en la gráfica.

Continuamos con la evaluación de la segunda parte de la actividad propuesta para estudiantes del cuarto de secundaria.

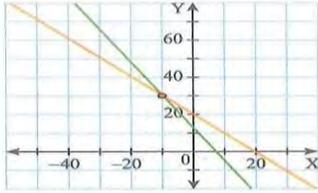
REALIZAR LA FORMULACIÓN MATEMÁTICA

7. Si x representa el número de caños ahorradores, e y , el número de caños no ahorradores, expresa mediante un sistema la situación inicial.

8. Identifica la gráfica que corresponde al sistema planteado. Justifica tu respuesta.



Gráfica 1



Gráfica 2

9. Marca la expresión que representa el conjunto solución del sistema de ecuaciones.
 a) C.S. = $\{(5; 10)\}$ b) C.S. = $\{(15; 25)\}$ c) C.S. = $\{(10; 5)\}$

10. ¿Cuántos caños ahorradores se vendieron en la tienda? ¿Y cuántos caños no ahorradores?

VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN

11. ¿Cómo compruebas la respuesta obtenida gráficamente?

Figura 23. Actividad, Caños ahorradores

Fuente: MINEDU cuaderno de trabajo, (2016, p.159)

- En la pregunta siete se determinan las variables y las constantes de la situación.
- No se incluyen temas relacionados a otras áreas.
- Sí se solicita determinar el modelo matemático de la situación en la pregunta siete.
- Permite el tránsito del lenguaje natural al algebraico y geométrico como se presenta en la pregunta ocho.
- En la pregunta nueve y diez, se pide indirectamente resolver el sistema de Ecuaciones determinado al interpretar la situación problema para luego marcar el conjunto solución y dar respuesta a las preguntas de la situación.

En esta situación, no se cumple una de las funciones de los eventos contextualizados que es motivar a los estudiantes en la construcción del modelo matemático Sistema de Ecuaciones con dos Variables, pues esta situación de aprendizaje, por ser literal, con el tiempo se transformará en una actividad rutinaria y en un ejercicio algebraico, lo cual no refuerza el aprendizaje del Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

Seguindo con la evaluación de cada una de las preguntas de la situación de aprendizaje denominada “Caños ahorradores”, pasamos al análisis, de la propuesta desarrollada que nos brinda el MINEDU.

CONCRETAR UNA FINALIDAD PROBLEMÁTICA Y RECONOCER COMO RESOLVERLA

1. ¿Qué datos se conocen?
La cantidad de dinero recaudado (S/ 1000) por la venta de 15 caños entre ahorradores y no ahorradores. El precio de cada caño ahorrador (S/ 80) y de cada caño no ahorrador (S/ 40).
2. ¿Qué quieres averiguar?
El número de caños ahorradores y no ahorradores que ha vendida la tienda en un mes.
3. ¿Qué harás primero?
Expresa en forma algebraica los datos presentados en el problema.
4. ¿Qué estrategia usarás para determinar el número de caños ahorradores y no ahorradores vendidos en la tienda?
Plantear un sistema de ecuaciones y resolverlo a través del método gráfico.

HACER SUPOSICIONES O EXPERIMENTAR

5. ¿Si se vendieron 15 caños entre ahorradores y no ahorradores?, ¿cómo lo expresarías algebraicamente?

El número de caños ahorradores: X	}	$x+y = 15$
El número no ahorradores: Y		

6. ¿Las siguientes ecuaciones son equivalentes a la ecuación anterior? Justifica tu respuesta

$$8x + 6y = 120 \quad (1)$$

$$30x + 30y = 450 \quad (2)$$

Solo la ecuación (2) es equivalente, porque si dividimos la ecuación entre 30 obtenemos la ecuación de la actividad 6. En cambio (1) no hay números que le haga posible.

Figura 24. Actividad, Caños ahorradores, primera parte

Fuente: MINEDU Manual del docente (2016, p.159)

Tenemos las siguientes observaciones: En la pregunta uno y dos se da las respuestas directas a las interrogantes. A partir de la pregunta se observa la inducción al tema de Sistemas de Ecuaciones con dos Variables.

En la pregunta cuatro se determina la estrategia de elaborar un Sistema de Ecuaciones con dos Variables para resolver este problema y se puede utilizar cualquiera de los métodos operativos para el desarrollar el sistema; sin embargo, también se puede obtener la solución de este evento con otro método operativo llamado Método del rombo, ya que para muchos estudiantes es más fácil de operar, lo cual convierte a este evento en rutinario y con el tiempo será un ejercicio. En la pregunta seis, sólo se realiza una división sencilla en la segunda ecuación.

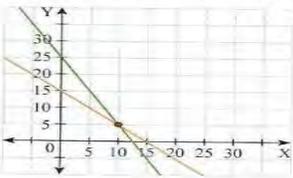
Presentamos el análisis de la segunda parte del desarrollo de la actividad “Caños ahorradores”

REALIZAR LA FORMULACIÓN MATEMÁTICA

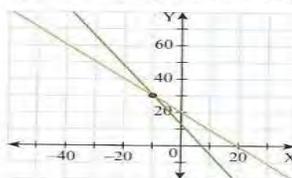
7. Si x representa el número de caños ahorradores, e y , el número de caños no ahorradores, expresa mediante un sistema la situación inicial.

$$\begin{cases} 80x + 40y = 1000 & \rightarrow & 2x + y = 25 & \textcircled{1} \\ x + y = 15 & & x + y = 15 & \textcircled{2} \end{cases}$$

8. Identifica la gráfica que corresponde al sistema planteado. Justifica tu respuesta.



Gráfica 1



Gráfica 2

La gráfica 1, porque al reemplazar $x = 0$ e $y = 0$ se verifican las ecuaciones.

9. Marca la expresión que representa el conjunto solución del sistema de ecuaciones.

a) C.S. = $\{(5; 10)\}$ b) C.S. = $\{(15; 25)\}$ c) C.S. = $\{(10; 5)\}$

10. ¿Cuántos caños ahorradores se vendieron en la tienda? ¿Y cuántos caños no ahorradores?

Se vendieron 10 caños ahorradores y 5 caños no ahorradores.

VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN

11. ¿Cómo comprobas la respuesta obtenida gráficamente?

R. M. Reemplazando los valores de x e y en ambas ecuaciones o utilizando otro método para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables.

Figura 25. Actividad, Caños ahorradores segunda parte

Fuente: MINEDU Manual para el docente (2016, p.159)

En la pregunta siete, sí se determina el modelo Matemático solicitado.

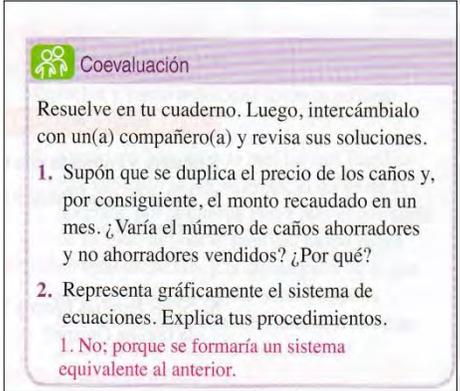
En la pregunta ocho se solicita la identificación de las gráficas de las ecuaciones, pero no se menciona que el docente debe guiar a los estudiantes en la elaboración de la tablas para las gráficas de las ecuaciones y, en el caso de la gráfica dos, no puede ser la respuesta porque los valores de x tienden a ser negativos y es necesario realizar estas precisiones a los estudiantes.

- En ninguna de las preguntas se solicita la construcción geométrica del problema. Sólo se dan dos gráficas para que el estudiante discrimine cuál de ellos representa el Sistema de Ecuaciones de la situación planteada.
- En relación a la pregunta 11, de cómo comprobar los resultados, es necesario precisar el reemplazo de los valores obtenidos en cada una de las ecuaciones.
- No se da la interpretación de los resultados obtenidos.

- En conclusión, no se cumple con algunas de las etapas de resolución del evento contextualizado. De esta forma, los estudiantes no pueden desarrollar el evento en su totalidad.

Presentamos a continuación la coevaluación de la situación de aprendizaje denominada “Caños ahorradores”, propuestas en el cuaderno de trabajo manual para los docentes del cuarto de secundaria.

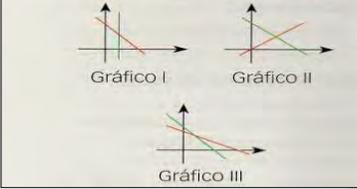
Cuadro 11. *Coevaluación*

Actividades	Análisis
 <p>Resuelve en tu cuaderno. Luego, intercámbialo con un(a) compañero(a) y revisa sus soluciones.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Supón que se duplica el precio de los caños y, por consiguiente, el monto recaudado en un mes. ¿Varía el número de caños ahorradores y no ahorradores vendidos? ¿Por qué? 2. Representa gráficamente el sistema de ecuaciones. Explica tus procedimientos. <ol style="list-style-type: none"> 1. No; porque se formaría un sistema equivalente al anterior. 	<ul style="list-style-type: none"> • Problema propuesto en el mismo contexto de la situación de aprendizaje, permite el tránsito entre dos registros del lenguaje verbal al matemático. • Pertenece a la primera categoría pues su traducción es litera. • Implícitamente se pide la determinación de un modelo matemático, el cual tendrá una variación en los coeficientes porque la variación es del precio más no de la cantidad de los caños. • Se obtendrá un modelo matemático equivalente al anterior con el mismo conjunto solución para el número de caños; sin embargo, • Ees un problema rutinario. • El ejercicio 2 permite el transito del lenguaje natural al gráfico, pero no se muestra la gráfica, el cual se debe tomar como referencia.

Fuente: MINEDU, Manual para el docente, Matemática 4 (2016, p.161)

A continuación presentamos el cuadro de actividades adicionales que se sugiere para que trabajen los estudiantes como tareas y que pueden ser desarrolladas en sus casas.

Cuadro 12. Actividades Adicionales: Caños ahorradores

Actividades adicionales	Análisis
<p>Actividades adicionales</p> <p>1. Un grupo de amigos va de paseo a una casa de campo donde hay conejos y patos. Al preguntarle al dueño cuántos animales tiene, él responde: "Hay 22 cabezas y 70 patas". ¿Cuál de los gráficos representa el sistema de ecuaciones que se forma a partir de los datos?</p>  <p>Respuestas:</p> <p>1. Gráfico III.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Este problema está propuesto en un contexto de la vida cotidiana. • Permite el tránsito entre dos registros del lenguaje verbal al matemático. • Pertenece a la segunda categoría pues hace evocar temas del área de la Aritmética y Geometría, implícitamente permite la obtención de un modelo matemático que represente el tópico de estudio Sistema de Ecuaciones con dos Variables. • Para que el estudiante identifique el gráfico previamente debe determinar el modelo matemático. • Sus alternativas son representaciones gráficas. • Permite el reforzamiento del tópico en investigación..
<p>2. Pedro fue de visita al taller donde trabaja su papá y observó que si al número de motos que hay se le resta el doble del número de autos, el resultado es 3. Además, si al triple del número de motos se le resta el séxtuple del número de autos, el resultado es 1. ¿Cuántas motos y autos hay? ¿Cómo se llama el sistema formado por las ecuaciones? ¿Cómo son las rectas?</p> <p>Respuesta</p> <p>2. No tiene solución porque el sistema es incompatible; son rectas paralelas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Problema propuesto en un contexto cotidiano para los estudiantes. • Permite el tránsito entre dos registros del lenguaje verbal al matemático. • Pertenece a la primera categoría pues su traducción es literal. • Implícitamente permite la obtención de un modelo matemático que represente el tópico de estudio Sistema de Ecuaciones con dos Variables pues. • Para que el estudiante identifique la naturaleza del sistema que se define previamente, se debe determinar el modelo matemático. • Graficando las ecuaciones determinadas o analizando los coeficientes en cada ecuación que forme este sistema se puede dar la respuesta solicitada. Esta forma permite que se optimice el reforzamiento del tópico en investigación. • Problema rutinario y puede ser resuelto con métodos operativos, mecánicos sin la necesidad de utilizar Sistema de Ecuaciones Lineales.

Fuente: MINEDU, Manual para el docente, Matemática 4 (2016, p.161)

Seguidamente, presentamos capítulo III que contiene el marco teórico y la metodología seguida en el desarrollo de nuestra investigación.

CAPÍTULO III: EL MARCO TEÓRICO Y METODOLOGICO

En este capítulo presentaremos algunos aspectos de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) de Camarena (1999) que se utilizan en la presente investigación.

3.1 Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC)

Nuestra investigación basa su marco teórico la teoría educativa Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) desarrollada por Camarena (1999).

En el año de su publicación en 1982, esta teoría se desarrolló en cinco fases. El presente trabajo se desarrolla en una de ellas denominada “Fase Didáctica”, la cual se apoya en la metodología de la fase curricular, llamada Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING) que a su vez tiene tres etapas.

Explicaremos su etapa central y analizaremos el proceso de aprendizaje del tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables por parte de los estudiantes, utilizando la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) como marco teórico.

También tomaremos como referencia la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (2006).

Para comprender esta teoría, presentaremos la definición de algunos términos según la teoría de la MCC:

1. Categorización de problemas: Es la clasificación de problemas en relación a sus enunciados en lenguaje natural (registro verbal ya existente con significado en la estructura cognitiva del estudiante) y el lenguaje matemático.
2. Lenguaje verbal: Denominado “Registro verbal” o “Lenguaje natural”, es aquel en el cual está formulado el problema dentro de la disciplina de que se trate de problemas relacionados con actividades de la vida cotidiana o problemas relacionados con las ciencias.
3. Lenguaje matemático: Llamamos así a los registros algebraico y gráfico, presentes en nuestra investigación.

4. **Matemática contextualizada:** Son los conocimientos matemáticos vinculados a las áreas de estudio del estudiante o problemáticas de la vida cotidiana.

6. **Transposición contextualizada:** Modifica un saber a enseñar a uno de aplicación.

7. **Modelación matemática:** Es el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar al diseño del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto.

8. **Evaluación:** Es el proceso de verificación del cumplimiento de las nueve etapas de la estrategia de la MCC.

9. **Modelo matemático:** Es la representación de un evento real basada en relaciones matemáticas.

10. **Planeación didáctica:** Proceso en la cual los docentes diseñan actividades didácticas guiadas por lineamientos propios de la MCC.

A continuación presentamos aspectos importantes de la teoría educativa Matemática en el Contexto de Las Ciencias (MCC) en su fase didáctica, en la que desarrollaremos la tesis y detallamos la metodología del Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING) centrándonos en su etapa central. La teoría educativa Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), desarrollada hace más de 30 años, reflexiona acerca de los vínculos que deben existir entre las Matemáticas y las Ciencias, así como con la resolución de problemas contextualizados que son categorizados de acuerdo a las características que cumplen sus enunciados según su categorización..

Presentamos los principios más importantes de esta Teoría Educativa.

Camarena (1982), en su teoría de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, hace una reflexión de la relación entre las competencias laborales y profesionales con las ciencias matemáticas y manifiesta la necesidad de realizar una Matemática para la vida.

Esta teoría tiene los siguientes paradigmas:

- La Matemática es una herramienta de apoyo y disciplina formativa.
- La Matemática tiene una función específica en el nivel universitario.
- Los conocimientos nacen integrados.

Esta teoría parte del supuesto filosófico en el cual los estudiantes deben poder realizar el traslado del conocimiento matemático hacia el área en la que más lo necesiten y define la enseñanza integral de los estudiantes con la articulación de las siguientes fases:

- Curricular, desarrollada desde 1984.
- Didáctica, iniciada desde 1987.
- Epistemología, abordada en 1988.
- Cognitiva, estudiada desde 1992.
- Docencia definida 1990.

LA FASE CURRICULAR

Tiene su metodología denominada como Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING), la cual consta de tres etapas: La central, precedente y consecuente.

En esta fase curricular realizamos el análisis de la secuencialidad que se establece entre todos los temas que corresponden al currículo de los estudiantes.

En la investigación, utilizamos esta fase en la etapa central de la metodología mencionada cuando realizamos el análisis de los contenidos matemáticos de la sección de Álgebra, mostrados en el texto escolar que utilizan los estudiantes del cuarto de secundaria.

FASE EPISTEMOLÓGICA

Se analiza la génesis de conceptos matemáticos y se contextualizan los contenidos matemáticos para que estos sean aprendidos por los estudiantes.

En esta parte de la investigación, percibimos cuándo el docente contextualiza y descontextualiza los conocimientos matemáticos. Ello se da en el ambiente de aprendizaje y se realiza para que los conocimientos sean adquiridos por los estudiantes de la forma más apropiada y se evite la formación de obstáculos epistemológicos, como han sido definidos por Brousseau(1983).

FASE COGNITIVA

En esta fase la Matemática en Contexto ayuda a los estudiantes a construir sus propios conocimientos (Camarena, 2004).

En el trabajo realizado se evidencia cuando se analiza cada uno de los problemas que se les propone a los estudiantes y se evalúa si ellos pueden transitar por diferentes registros de representación. Además, esta fase interviene en la actividad didáctica cuando los estudiantes deben transitar por diferentes registros para desarrollar los eventos propuestos a los estudiantes.

FASE DOCENTE

En esta fase, la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) incide en que los docentes deben tener conocimiento de los contenidos a enseñar y aprender. Tanto en el uso de tecnología electrónica, como mediadora del aprendizaje de los estudiantes, y conocimientos acerca del proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de las Matemáticas.

Esta se evidencia en los docentes cuando conocen la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto y diseñan la actividad didáctica para que desarrollen los estudiantes del cuarto de secundaria.

En nuestra investigación nos centraremos en la fase didáctica que pasamos a detallar:

FASE DIDÁCTICA.

Según la teoría educativa Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC), esta fase didáctica se contempla el Modelo Didáctico de la Matemática en Contexto (MODIMACO) que promueve una Matemática formativa e interdisciplinaria que orienta a los alumnos a la construcción de determinados conocimientos, da a estos una formación integral y desarrolla las competencias profesionales.

Este proceso de transferencia de conocimientos se da en tres bloques, según Camarena (2007), que son las siguientes:

I.-Presentar la estrategia didáctica llamada Matemática en Contexto.

II.-Implantar cursos extracurriculares.

III.- Implantar un taller integral e interdisciplinario.

Nuestra investigación está desarrollada en el primer bloque de la siguiente forma:

I.- La estrategia didáctica Matemática en Contexto (Camarena, 1995) es importante ya que en ella se sienta las bases para la formación integral de los estudiantes en el ambiente...

En la Matemática en Contexto, se presenta una matemática contextualizada que está relacionada con conocimientos de las áreas de ciencias que los estudiantes estén desarrollando.

Esta Matemática puede relacionarse con situaciones de la vida cotidiana y en actividades diarias o labores que desempeñen los estudiantes y se presenta a través de eventos contextualizados, que pueden ser problemas o proyectos, que propicien conflictos cognitivos en los estudiantes.

La Matemática contextualizada se da en un ambiente de aprendizaje en equipos de tres estudiantes: El líder académico, el líder emocional y el líder de trabajo

(Camarena, 1987); sus fuentes de contextualización se dan en tres niveles, de acuerdo a su complejidad y al nivel cognitivo de los estudiantes. Estas fuentes pueden ser:

- Área de conocimientos
- Situaciones de la vida cotidiana
- Actividades profesionales

Estas fuentes de contextualización deben ser abordadas teniendo en cuenta los siguientes niveles cognitivos de los estudiantes, de acuerdo al nivel educativo donde se encuentren:

Nivel bajo: Son situaciones de la vida diaria que pueden llegar a un nivel alto. Estas son propias para el nivel educativo de primaria.

Nivel medio: Está ubicado en los cursos de ciencias que desarrollan los estudiantes para el nivel de secundaria y bachillerato y en el cual realizamos nuestra investigación.

Nivel alto o Complejo; es propio para el nivel universitario, que en esta investigación no desarrollaremos.

Los eventos contextualizados que hemos mencionado cumplen diversas funciones y dependen de estas para diseñarlos. Estas funciones pueden ser para:

- Motivar a los estudiantes en la construcción, reforzamiento o evaluación del aprendizaje de conocimientos. La investigación fue enmarcada en esta función.
- Introducir un nuevo tema en un curso.
- Identificar conocimientos previos.

- Identificar obstáculos en los estudiantes (didácticos, cognitivos, ontogénicos, epistemológicos, contextuales)
- Desarrollar competencias (conocimientos, habilidades, actitudes y valores) entre otros más (Camarena, 2002).

El proceso metodológico de la Matemática en Contexto tiene nueve etapas que se dan en el ambiente de aprendizaje:

- 1.-Identificar situaciones contextualizadas.
- 2.-Plantear las situaciones contextualizadas.
- 3.-Determinar las variables y constantes de la situación.
- 4.-Incluir los temas y conceptos matemáticos que son necesarios en el desarrollo del modelo matemático y solución del evento.
- 5.-Se determina el modelo matemático.
- 6.-Dar solución matemática del modelo matemático.
- 7.-Determinar la solución requerida por el evento.
- 8.-Interpretar la solución de términos del evento y disciplina del contexto.
- 9.-Presentar una matemática descontextualizada.

Se debe tener en cuenta que las etapas 1,2,4 y 9 son realizadas por los docentes, que es otro de los conceptos a definir y tomar en cuenta en los resultados esperados.

“La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que realizar para llegar a la construcción del modelo matemático”. (Camarena, 2000, p.24)

La modelación matemática consta de tres momentos:

1. Identificar variables y constantes del evento.
2. Establecer relaciones entre las variables y constantes a través de conceptos involucrados en el evento contextualizado que se presenta.
3. Validar el modelo matemático del evento verificando los resultados cuando se han dado las soluciones de los problemas planteados.

Un elemento importante que debemos tener en cuenta es que el modelo matemático no es único, ya que existen diversas representaciones que pueden representar el mismo evento; por ello, puede ser resuelto de diferentes formas, con lo que solo es necesario verificar la consistencia de los resultados.

II.-Implantar cursos extracurriculares en donde se lleven a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento, habilidades meta-cognitivas y para aplicar heurística al resolver problemas, así como para bloquear creencias negativas y desarrollar actitudes positivas para facilitar la resolución de eventos o problemas contextualizados, además promover el trabajo grupal. Pasaremos a describir esta etapa.

Aplicar heurística.

Consiste en emplear las estrategias para resolver un problema desde diferentes partes del proceso de resolución. Así tenemos una de las actividades que corresponde.

Esta función es el planteamiento de eventos simples en los cuales se utilizan las estrategias heurísticas.

Otras de las actividades es proponer a los estudiantes que resuelvan una situación problema, al menos de tres maneras diferentes. Así desarrollarán su creatividad, que después tendrán que resolver problemas contextualizados con mayor facilidad.

Desarrollar la meta-cognición.

Es desarrollar la parte interna de las personas que les hace ser conscientes de sus propios conocimientos. Está presente en el proceso de verificación de los resultados, si satisfacen o no lo solicitado en un determinado problema propuesto.

Desarrollar habilidades del pensamiento.

Estas ayudarán al conocimiento de las ciencias y viceversa. Aquí entran en juego en el proceso de la resolución de eventos contextualizados de Nickerson (1994), citado por Camarena(2000).

Las habilidades del pensamiento se dividen en básicas y de orden superior.

Entre las habilidades básicas tenemos: Observación, identificación, comparación, entre otros.

Entre las habilidades de orden superior destacan: La creatividad, el razonamiento lógico, analítico, entre otros.

Bloqueo de creencias negativas.

En algunos casos pueden tener efectos positivos o negativos en los alumnos.

Estas se dan cuando los maestros proponen a los alumnos una serie de problemas y los estudiantes ni siquiera terminan de leer y mencionan la frase “No entiendo”.

En este bloqueo de creencias negativas, se debe realizar una coordinación interdisciplinaria con los maestros de diferentes áreas, incluyendo las psicológicas, porque se necesita que los alumnos estén motivados y se logre un mejor aprovechamiento.

III.- Implementar un taller integral e interdisciplinario para resolver problemas.

Es la culminación del proceso didáctico donde se verán las aplicaciones de los conocimientos adquiridos.

La puesta en práctica de estos talleres requirió de un grupo de maestros comprometidos con el proyecto.

Tengamos en cuenta que, para obtener resultados favorables, se necesita presentar a los estudiantes problemas de diferentes contextos tanto de su entorno cotidiano, de la ciencia matemática que desarrollan los alumnos y actividades de su contexto laboral. Así los estudiantes relacionarán sus conocimientos interdisciplinarios, tal como lo propone el Modelo Didáctico de la Matemática en Contexto (MODIMACO).

En la teoría de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC) se dan los siguientes aportes:

Los estudiantes son más autónomos en su propio aprendizaje.

- Aprende el trabajo en equipo.
- Se termina con el modelo tradicional que tienen al maestro como centro de la actividad educativa y se pone énfasis al modelo centrado en el alumno como constructor de su propio aprendizaje.
- En esta teoría se toma en cuenta las diversas variables que intervienen en el proceso de enseñanzas y aprendizaje.

- Esta investigación nos orienta en la necesidad de diseñar secuencias didácticas que permitan mejorar la enseñanza del tema en estudio.
- Nuestra investigación se desarrollara en la etapa central de la metodología del Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING).

3.2 Metodología y procedimiento

En 1982, preocupados por los cuestionamientos de los estudiantes y el interés del profesor de que el alumno construya el conocimiento matemático y que éste sea significativo para los estudiantes, identificaron la necesidad de abordar de manera objetiva y científica las interrogantes que yacían en los profesores; con lo cual, desarrollaron una metodología para diseñar programas de estudio de Matemáticas en general y ciencias básicas.

Esta metodología recibe el nombre de Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING) (Camarena 1984, 2002b).

Aplicando esta metodología, comenzaron a comprender el uso, dónde usarla y cómo usar las Matemáticas. Así tenemos que uno de los más importantes aportes de la teoría educativa de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC) es la metodología DIPCING, que es la única en el mundo.

Utilizando la mencionada metodología, se seleccionaron los contenidos matemáticos y luego estos deben ser incorporados al currículo de estudio de los estudiantes, pero apareció la pregunta de ¿Cómo se enseñarán estos contenidos? y dando respuesta a esta pregunta se formuló la estrategia didáctica de las MCC (Camarena 1987,1993).

Las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC), como teoría, en cada fase incluye una metodología con fundamento teórico acorde con los paradigmas. Nos enfocaremos en la Fase Didáctica de la MCC, su etapa central, en la cual se identifican eventos contextualizados y, para ello, describiremos y desarrollaremos la tercera etapa de la metodología del Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING).

- Identificar los problemas contextualizados relacionados con Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Variables presentes en el libro texto que brinda el MINEDU a los estudiantes del cuarto de secundaria, usando la etapa central de la metodología DIPCING. En nuestra investigación, adaptó al nivel de educación básica.
- Diseñar una propuesta didáctica a partir de la Fase I del modelo Didáctico; es decir, la Estrategia Didáctica de la Matemática en Contexto.
- Analizar el proceso de resolución de los problemas contextualizados por los estudiantes.
- Obtener las conclusiones de nuestra investigación.
- Plantear la incorporación en el plan de trabajo de los maestros con nuevas actividades didácticas.
- En la estrategia Matemática en el Contexto necesitamos eventos contextualizados, para lo cual aplicaremos una de etapas de la DIPCING para identificar estos hechos en el texto que utilizan los estudiantes del cuarto de secundaria.

Utilizaremos el siguiente cuadro, especificando que la investigación se realizó en la etapa central.

Cuadro 13. *Etapas de la Metodología DIPCING*

Etapas	Contenidos
Central	Hacer un análisis de los contenidos matemáticos, tanto implícitos como explícitos, que estén relacionados con el tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.
	En nuestra investigación, el análisis del tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables se hizo en base al texto escolar, Cuaderno de trabajo para los estudiantes y Cuaderno de trabajo guía de los docentes que utilizan los estudiantes y docentes de las

	<p>escuelas públicas.</p> <p>Este texto fue distribuido por el Estado a cada uno de los estudiantes y el análisis se centra en categorizar los problemas contextualizados que en este texto se proponen a los estudiantes.</p>
Precedente	<p>En la etapa precedente se detecta el nivel de conocimientos matemáticos que tienen los estudiantes.</p>
	<p>El trabajo se desarrollará en la etapa precedente de la metodología del Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCING).</p> <p>En esta etapa, se aplicamos un examen para validar el aprendizaje de los estudiantes del quinto de secundaria, además de recoger los conocimientos previos del alumnado sobre el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables., pues ellos desarrollaron este tópico en el cuarto año de su educación básica.</p>
Consecuente	<p>En esta etapa se identifican las competencias requeridas por la ambientes laborales como la industria.</p>
	<p>En este punto en particular, no se desarrolló ya que el nivel en el cual se realizó esta tesis fue con escolares de Educación Básica Regular y esta etapa consecuente se desarrolla para verificar desempeño Laboral.</p>

Fuente: Adaptado de Camarena (1984, p.24, 25)

Continuaremos con el capítulo IV donde se presenta la actividad didáctica que fue puesta en práctica y fue desarrollada por los estudiantes del quinto de secundaria.

CAPÍTULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANALISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En esta parte de la investigación presentamos al grupo de estudiantes del quinto año de secundaria con el cual se ha desarrollado nuestro trabajo.

Describimos los lineamientos que nos sirvieron de base para el diseño y puesta en práctica de la actividad didáctica que se les presenta, exponemos el cuadro de categorización de los problemas contextualizados que permitió diseñar dichas actividades con problemas que corresponden a las dos primeras categorías que están al nivel educativo de secundaria.

Presentaremos la actividad didáctica completa, así como su implementación, y finalmente realizamos el análisis de los resultados obtenidos después de la puesta en práctica.

Es importante destacar el papel que cumplió la docente investigadora, quien a su vez es docente de los estudiantes del quinto de secundaria que fungieron como foco del desarrollo de la actividad didáctica propuesta.

Descripción los participantes en la actividad didáctica

Los participantes en nuestra investigación son 20 estudiantes del quinto de secundaria de la Institución Educativa Publica 1224 "El Paraíso de Huachipa".

De este grupo, se seleccionó sólo a tres de los estudiantes cuyo desarrollo de sus actividades aportaron información que nos permitió realizar un análisis desde la visión de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC).

Los estudiantes son aquellos quienes el año anterior desarrollaron el tópico Sistemas de Ecuaciones con dos Variables y sus edades se encuentran en el rango de 15 a 18 años.

La realidad socioeconómica de estos corresponde a una zona de menor desarrollo de la localidad de Huachipa, distrito de Lurigancho, Chosica y varios de ellos trabajan en actividades propias del lugar como la labranza en las ladrilleras, sembrío de grass o como ayudantes de cocina. A pesar de estas circunstancias, se esfuerzan por salir adelante.

A continuación presentaremos la descripción de la actividad didáctica, diseñada de acuerdo a los lineamientos de la fase didáctica de la MCC, así como su implementación y

mostraremos los resultados de la puesta a prueba y el análisis respectivo de cada una de las actividades.

Descripción del diseño de la propuesta

Se diseñaron eventos contextualizados de primera y segunda categoría presentados como problemas que corresponden a situaciones de la vida cotidiana y del contexto de las ciencias. No son ejercicios rutinarios ya que en la resolución de estos eventos se promueve que los estudiantes logren estructurar un modelo matemático, posteriormente resolverlo y finalmente validarlo.

Los eventos contextualizados poseen varias funciones como la de motivar a los estudiantes a recuperar conocimientos previos, construir, reforzar y evaluar estos, entre otros.

Es así que diseñamos nuestra actividad con el objetivo de cumplir con la función de estudiar el aprendizajes del tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.

En el diseño de los problemas, nuestra actividad didáctica, a través de eventos contextualizados, hemos considerado los niveles de contextualización, de acuerdo con Camarena (2000).

En estos eventos se consideraron los niveles educativos de los estudiantes, quienes van a desarrollar esta actividad, así tenemos:

Nivel bajo: Corresponde a los eventos contextualizados que se presentan en problemas de la vida diaria. Estos pueden llegar a un nivel alto y son propios para el nivel educativo de primaria.

Nivel medio: Están ubicados en los cursos de ciencias que desarrollan los estudiantes y que es propio para el nivel de secundaria y bachillerato. Este fue el apropiado para nuestra investigación.

En el diseño de los eventos contextualizados, hemos utilizando la fase didáctica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), la aplicación de su Modelo Didáctico de la Matemática en Contexto (MODIMACO) en su primer bloque que implica la estrategia didáctica de la Matemática en contexto y sus dos ejes rectores, que son la contextualización y la descontextualización, precisando que esta estrategia es guiada por la

primera de estas, sin dejar de considerar que en el proceso aprendizaje se presentan espacios de descontextualización cuando los docentes fijan conocimientos.

Asimismo, en la estrategia didáctica presentamos sus nueve etapas (Camarena,1984, 1987,2000) las cuales posteriormente sirvieron de criterios para evaluar el desarrollo de las actividades didácticas realizadas por los tres estudiantes seleccionados, tomados del capítulo II de la fase didáctica y las etapas de la estrategia de la didáctica de la Matemática en Contexto.

Puntualizamos que el trabajo que se realizó con la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto, las etapas cuatro y nueve requirieron del diseño de actividades didácticas. Para ello, el diseño de las actividades se deben a los lineamientos de la fase didáctica la teoría de la MCC (Camarena, 2004a).

Lineamientos para el diseño de actividades didácticas.

- Tránsito entre los diferentes registros de representación.

Es la conversión que se realiza entre los diferentes registros en la que destacan el registro natural, algebraico o formal y gráfico. Ellos están relacionados según la representación semiótica necesaria en cada evento contextualizado.

- Tránsito del lenguaje natural al matemático y viceversa.

Para ello, contamos con una categorización de eventos matemáticos contextualizados en relación a la traducción del lenguaje natural al matemático: Eventos con enunciado literal y evocador (Olazabal, 2003).

- Enfoque de los temas y conceptos matemáticos.

Los docentes deben tomar en cuenta los diferentes enfoque de los conceptos para ayudar a los estudiantes en la construcción de los mismos

- Habilidades heurísticas.

Ayudan a los estudiantes a enfrentar eventos contextualizados

- Habilidades metacognitivas.

Es la reflexión interna de los estudiantes de saber si van o no por un buen camino.

- Búsqueda de Analogías.

El docente las utiliza en clase para relacionar estructuras cognitivas.

- Identificación de nociones previas.

Es la evocación de saberes anteriormente adquiridos por los estudiantes.

- Identificación de obstáculos.

Brousseau (1983), citado por Camarena (2000), clasifica a los obstáculos en epistemológicos y didácticos a aquellos que son provocados por los docentes, cognitivos a los que se refieren a las deficiencias de conocimientos previos de los estudiantes, ontogenéticos propios de las deficiencias físicas de los estudiantes, contextuales a aquellos que se muestran en los conocimientos deficientes de los áreas del contexto de los eventos contextualizados.

- Conocimientos en espiral.

El conocimiento se construye poco a poco, obligando a los estudiantes a capacitarse permanentemente.

- Uso de la tecnología informática.

Permite a los estudiantes vayan a sus propios ritmos de aprendizaje. En la actualidad no podemos estar fuera de los avances tecnológicos que faciliten los aprendizajes.

A continuación, mostramos la tabla de contextualización de los problemas propuestos en la actividad didáctica y el concepto de cada categoría según la categorización de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), tomado del cuadro 1.

<ul style="list-style-type: none"> • La primera categoría
<p>Son problemas cuyo enunciado expresa literalmente a los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos para llegar al modelo matemático del problema.</p> <p>Para realizar la traducción es necesario conocer las representaciones algebraicas de los términos que se nombran en el mismo enunciado.</p> <p>Son problemas que con el tiempo se convierten en ejercicios para el alumno.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • La segunda categoría
<p>Son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático que permite resolverlo a través de las situaciones, objetos y/o fenómenos y las relaciones entre ellos que expresa literalmente, sino que son necesarios otros modelos que evoca el mismo enunciado, nombrándolos, describiéndolos o refiriéndose a ellos en forma indirecta. El modelo evocado sirve de puente entre la información del enunciado</p>

y la traducción final al modelo representativo del problema.

- En la tercera categoría

Son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático ni a través de los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos que expresa literalmente, ni de los que evoca, sino que necesita que el individuo que está resolviendo el problema conozca un modelo que se adapte a las condiciones del mismo y lo sepa aplicar adecuadamente. Así, el modelo no surge ni literalmente ni por evocación del enunciado, sino que surge de la estructura cognoscitiva del individuo. En esta categoría también hay evocación, pero con la diferencia de que es el individuo el que evoca y no es el problema.

Presentamos y analizamos la categoría de cada uno los problemas diseñados en nuestra actividad.

Problema 1(Primera Categoría)

El problema de ENUNCIADO LITERAL se elaboró tomando en cuenta que su traducción corresponda a relaciones algebraicas entre los conceptos y los elementos que se mencionan en el enunciado, así tenemos el siguiente problema:

En la fiesta de la Virgen del Carmen de Huachipa asistió un grupo musical en el cual, si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas y además se sabe que la diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas. Determine la diferencia entre el número de varones y el número de mujeres.

Problema 2 (Segunda categoría)

Los problemas de ENUNCIADO EVOCADOR se eligieron tomando en cuenta que estos problemas deben propiciar el cambio de registros de su enunciado y la relación de datos de éste con modelos matemáticos de otras áreas que permitirán resolver un evento propuesto. Estos modelos que son evocados pueden estar relacionados al enunciado del evento contextualizado, ya sea mencionándolo, describiéndolo o refiriéndose a él en forma indirecta.

El modelo evocado ayudará en la solución final del problema contextualizado que se ha planteado, así tenemos el siguiente problema:

Una lancha navega por un río y recorre 18km en $\frac{3}{2}$ horas yendo a favor de la corriente y 12 kilómetros en dos horas contra la corriente. Determina la velocidad de la lancha y la velocidad del río.

Problema 3 (Representación gráfica)

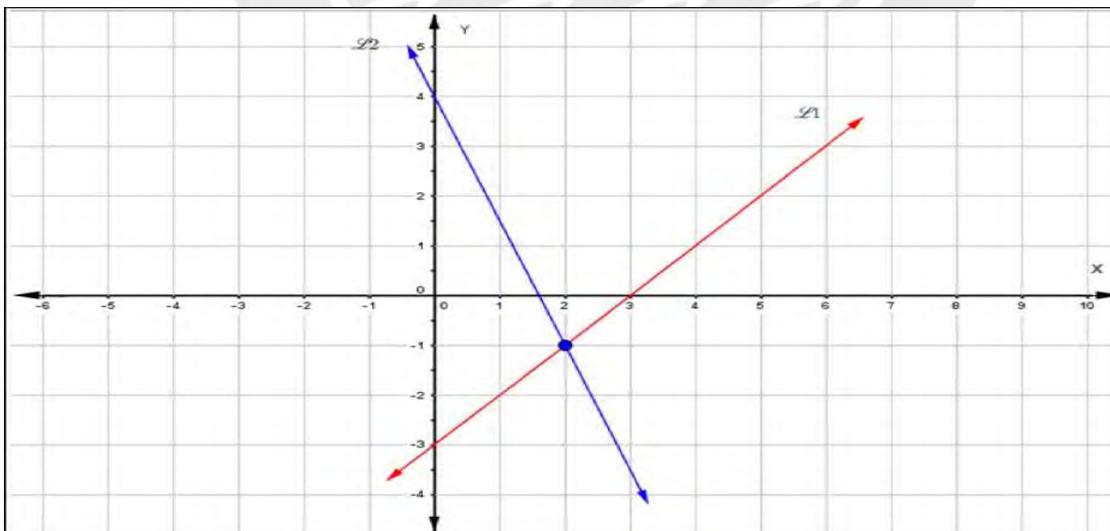
Al problema tres se le ha denominado “Representación gráfica”. Con este problema se pretendió desarrollar habilidades del pensamiento en los estudiantes (Camarena, 2005), pues se debe inducir la capacidad de transitar por los diferentes registros de representación semiótica, según Duval(1999). Estos registros pueden ser de: Lenguaje natural, algebraicos y gráfico.

En este problema analizamos el paso del registro gráfico al algebraico y viceversa. De esta manera se verificó el aprendizaje.

Mencionamos la importancia de transitar por diferentes registros de representación semiótica, ya que es necesario favorecer el desarrollo del aprendizaje de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Además, todo ello se logra cuando les presentamos una serie de problemas contextualizados que les induzca el desarrollo del pensamiento matemático, lo cual aportará a un mejor aprendizaje.

Si las rectas L_1 y L_2 representan las ecuaciones de un sistema, representa algebraicamente este sistema.

Problema tres: Representación gráfica



Fuente: Propia

Mostramos la actividad didáctica desarrollada por los estudiantes del quinto de secundaria.

ACTIVIDAD DIDÁCTICA

Problema de Primera Categoría

Problemas 1:

En la fiesta de la Virgen del Carmen de Huachipa asistió un grupo musical en el cual, si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas y además se sabe que la diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas. Determine la diferencia entre el número de varones y el número de mujeres.

Problema de Segunda Categoría

Problemas 2:

Una lancha navega por un río y recorre 18km en $\frac{3}{2}$ horas yendo a favor de la corriente y 12 kilómetros en dos horas contra la corriente. Determina la velocidad de la lancha y la velocidad del río.

Problemas 3: Representación gráfica

Si las rectas L_1 y L_2 representan las ecuaciones de un sistema, representa algebraicamente este sistema.

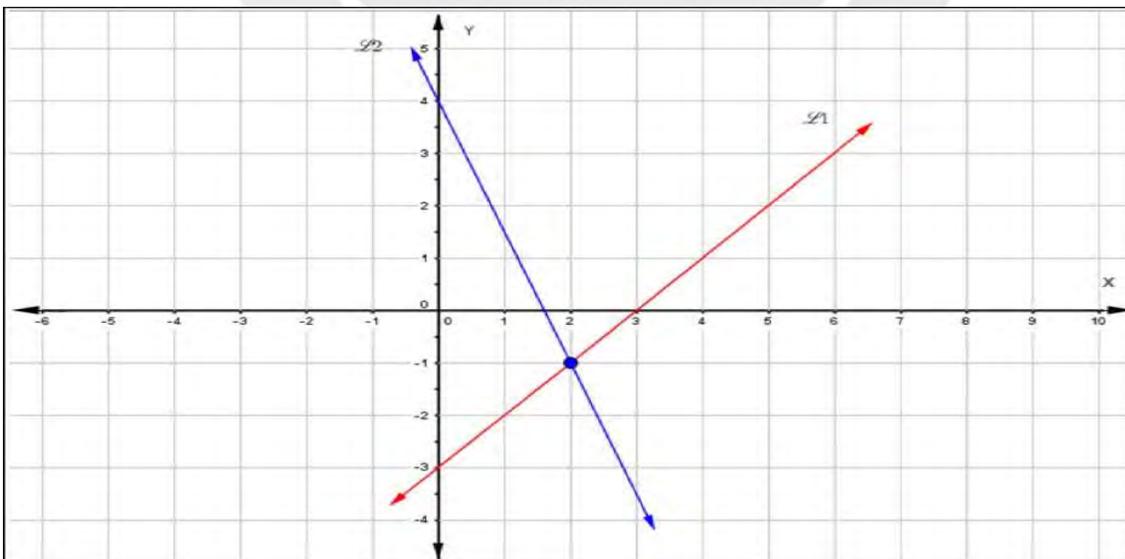


Figura 26. Problema 3. Representación gráfica

Fuente: Propia

Descripción de la implementación de la actividad didáctica con la Matemática en Contexto.

Esta actividad didáctica se aplicó a un grupo de 20 estudiantes del quinto de secundaria, quienes en el año anterior se les enseñó el tópico en investigación.

De estos estudiantes que desarrollaron la actividad, utilizamos las etapas de la estrategia didáctica Matemática en Contexto y los momentos de la modelación para seleccionar las actividades de tres estudiantes que fueron seleccionados por sorteo. Esto nos permitió realizar un análisis basado en la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) y nos permitió lograr nuestro objetivo general que es : Estudiar el aprendizaje en relación al tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos variables, por medio de la categorización de problemas contextualizados, según la MCC.

Esta actividad didáctica fue diseñada con problemas de primera y segunda categoría y nos permitió estudiar y verificar si el nivel de aprendizaje de los estudiantes corresponde solamente al de procedimientos algebraicos o si corresponde a procesos de evocación de diferentes tópicos matemáticos, lo que demostraría que estos realizan relaciones de conceptos y procedimientos matemáticos y que a su vez se traduce en un mejor nivel de aprendizaje en relación al foco en investigación.

Los estudiantes desarrollaron la actividad didáctica en forma individual, en la que a cada uno se le entregó una actividad que desarrollaron en la tercera hora pedagógica con una duración de dos horas pedagógicas de 45 minutos. Una vez culminado el tiempo indicado, se recogieron las hojas con los respectivos desarrollos y después se procedió a seleccionar, por sorteo, tres de estas actividades para el análisis de sus resultados.

Resultados esperados de la puesta a prueba de la Actividad didáctica

Los resultados esperados en los eventos contextualizados propuestos en la actividad didáctica, tienen el objetivo de verificar el aprendizaje de los estudiantes en relación al tópico en investigación y el cumplimiento de los lineamientos que sirvieron de guía para la propuesta de la actividad y diseño de actividades didácticas, así como comprobar si se realiza el tránsito entre los diferentes registros de representación como el registro

numérico, algebraico y gráfico correspondientes a cada uno de los enunciados, de acuerdo a la categorización de la MCC, y evaluar si se logran las tres etapas de la modelación matemática.

Se plantearon eventos contextualizados de primera y segunda categoría correspondientes al nivel medio, el cual corresponde al nivel de secundaria. Además se verificó el cumplimiento de las nueve etapas de la estrategia didáctica Matemática en Contexto que se dan en el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Presentamos los problemas contextualizados y sus resultados esperados:

Problema 1: (de Primera Categoría)

En la fiesta de la Virgen del Carmen de Huachipa asistió un grupo musical en el cual, si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas y además se sabe que la diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas. Determine la diferencia entre el número de varones y el número de mujeres.

Resultados esperados.

Este problema 1 pertenece a un ENUNCIADO LITERAL que se elabora tomando en cuenta que su traducción corresponda a relaciones algebraicas entre los conceptos y los elementos que se mencionan en el enunciado.

El problema permite el tránsito entre el lenguaje natural al matemático, se plantea en un contexto conocido por los estudiantes, como lo es la fiesta de la Virgen del Carmen de Huachipa. Además se puede determinar el modelo matemático directamente de la traducción del enunciado con las frases “la cantidad de varones y mujeres que lo conforman resultan 51 personas” y “el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas”.

De acuerdo a las nueve etapas de la estrategia didáctica Matemática en Contexto se espera que se realicen lo siguiente:

- Determinación de variables:

X: Representa el número de varones.

Y: Representa el número de mujeres.

- Tránsito entre registros de representación:

“....Sumamos la cantidad de varones y de mujeres que lo conforman este grupo resultan 51 personas”..... ($x+y = 51$)

“...la diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas”..... ($x-2y = 9$)

- Determinación del modelo matemático esperado:

$$\begin{cases} x+y = 51 \\ x-2y = 9 \end{cases}$$

- Solución matemática esperada:

$$x = 37$$

$$y = 14$$

- Interpretación en términos del evento:

Asistieron al evento 37 varones y 14 mujeres.

Problemas 2: de Segunda Categoría.

Una lancha navega por un río y recorre 18km en $\frac{3}{2}$ horas yendo a favor de la corriente y 12 kilómetros en dos horas contra la corriente. Determina la velocidad de la lancha y la velocidad del río.

Resultados esperados:

Este problema 2 corresponde a la segunda Categoría de ENUNCIADO EVOCADOR que se diseña tomando en cuenta que se debe propiciar el cambio de registros de representación semiótica.

Los estudiantes deben transitar del lenguaje natural al registro algebraico, ya que su enunciado establece relaciones de datos con conceptos de velocidad, como el cociente entre la longitud y el tiempo, para la determinación del modelo matemático. También se

necesita evocar conceptos matemáticos de otras áreas del conocimiento que permitan resolver el evento propuesto. En este caso, se relaciona con conceptos de la física, así tenemos:

“Una lancha navega por un río y recorre 18km en 3/2 horas...”

- Evocamos la definición de velocidad: La velocidad se define:

$$V_i = \frac{18km}{3/2h}$$

- 12 kilómetros en 2 horas.... la velocidad se define: $V_f = \frac{12km}{2h}$

Estos modelos que son evocados pueden estar relacionados al enunciado del evento contextualizado, ya sea mencionándolo, describiéndolo, o refiriéndose a él en forma indirecta. El modelo evocado ayudará en la solución final del problema contextualizado que se ha planteado.

Se espera:

- Determinación de variables:

x : Velocidad del río

y: Velocidad de la lancha.

- Tránsito entre registros de representación:

“... Lancha navega y recorre 18km en 3/2 horas yendo a favor de la corriente” (x +y = 12km/h)

“12 kilómetros en dos horas contra la corriente. ” (x -y = 6km/h)

- Determinación del modelo matemático esperado:

$$\begin{cases} x+y=12km/h \\ x-y=6 km/h \end{cases}$$

- Solución matemática esperada:

$$x=9 km/h$$

$$y=3 \text{ km/h}$$

- Interpretación en términos del evento:
 Velocidad de la lancha es de 3 km/h
 Velocidad del río es de 9 km/h

Problema 3: En este problema de ENUNCIADO EVOCADOR la traducción esperada es:

- Identificación de puntos de paso de las rectas:
 Puntos de paso de la recta l_1 : (0;4), (2;-1)
 Puntos de paso de la recta l_2 : (2; -1), (0; 3)
- Determinación de pendientes de las rectas L_1 y L_2
- Pendiente de l_1 :

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots x_1 \neq x_2 \quad \text{Con los puntos: } (0; 4), (2;-1)$$

- Pendiente de l_2 :

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots \text{Con los puntos: } (2; -1), (0; 3)$$

- Ecuaciones de la recta:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \dots\dots\dots l_1$$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \dots\dots\dots l_2$$

- Modelo esperado:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

A continuación presentamos el análisis general e individual del desarrollo de las actividades didácticas seleccionadas.

Análisis de las actividades

En el análisis de los problemas propuestos en la actividad didáctica que corresponden a la primera y segunda categoría, hemos tomado en cuenta los lineamientos que guían la fase didáctica, según la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) (Camarena, 2004), y los describimos a continuación:

- 1.-Identificar situaciones contextualizadas.
- 2.-Plantear las situaciones contextualizadas.
- 3.-Determinar las variables y constantes de la situación.
- 4.-Incluir los temas y conceptos matemáticos que son necesarios en el desarrollo del modelo matemático y solución del evento.
- 5.-Se determina el modelo matemático.
- 6.-Dar solución matemática del modelo matemático.
- 7.-Determinar la solución requerida por el evento.
- 8.-Interpretar la solución de términos del evento y disciplina del contexto.
- 9.-Presentar una matemática descontextualizada.

Tomando en cuenta que las etapas 1, 2, 4 y 9 las realizan los docentes y corresponden a la planeación didáctica, verificamos si los estudiantes en su desarrollo cumplieron con la observación relacionada a modelación matemática que tiene las siguientes etapas:

1. Identificar variables y constantes del evento.
2. Establecer relaciones entre las variables y constantes a través de conceptos involucrados en el evento contextualizado que se presenta.
3. Validar el modelo matemático del evento verificando los resultados cuando se han dado las soluciones de los problemas planteados.

A continuación, el análisis de las actividades didácticas desarrolladas por los estudiantes seleccionados.

-Las tres actividades didácticas seleccionadas brindaron información y dio la posibilidad de realizar el análisis desde la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC).

-Los tres estudiantes realizaron procedimientos algebraicos y aritméticos, en relación al problema 1 de primera categoría, sin llegar a cumplir con las nueve etapas de la estrategia de la matemática en contexto.

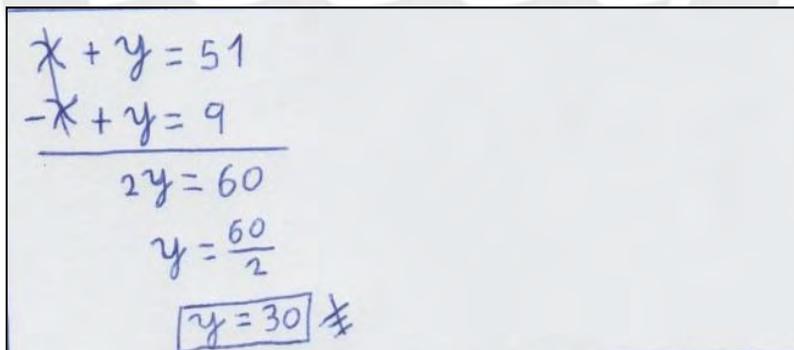
- Uno de los tres estudiantes realizó los procedimientos algebraicos y otro logró la evocación del área de física en el desarrollo del problema 2. Ambos no llegaron a cumplir con las nueve etapas de la estrategia de la matemática en contexto ni las etapas de la modelación matemática.

-En relación al problema 3, si bien es cierto que los tres estudiantes seleccionados efectuaron procesos de evocación con el modelo matemático de la ecuación de la pendiente de una recta, tópico que corresponde a la Geometría analítica, no lograron cumplir con las nueve etapas de la estrategia de la matemática en contexto ni las etapas de la modelación matemática.

Presentamos cada uno de los problemas propuestos en la actividad didáctica y el análisis respectivo de ellos.

Problema 1 de Primera Categoría.

- Desarrollo del estudiante Washington



The image shows a student's handwritten work for solving a system of linear equations. The equations are $x + y = 51$ and $-x + y = 9$. The student subtracts the second equation from the first, resulting in $2y = 60$. They then divide both sides by 2 to get $y = \frac{60}{2}$. Finally, they box the result $y = 30$ and mark it with a checkmark.

Figura 27: Desarrollo del estudiante Washington

Fuente: Propia

Análisis del desarrollo de Washington (alumno de quinto año)

El estudiante logró determinar constantes y variables en el problema, pero no las definió en relación al enunciado; es decir, no indica qué representa la variable X, ni la variable Y y determinó parcialmente el diseño matemático, como se muestra en la primera proposición.

Así reflejó el enunciado “Si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas” representándolo de la siguiente forma:

$$x+y =$$

Luego, en la traducción de la segunda proposición “la diferencia entre el número de varones y el doble del número de mujeres”, no consideró la expresión “doble” mostrando un obstáculo cognitivo, pero sí identifica la cifra constante de la diferencia. Así tenemos:

$$-x + y = 9$$

Efectuó un procedimiento algorítmico correspondiente al Método de reducción y obtuvo el valor numérico de Y, pero al no haber definido esta variable, no determina el modelo matemático y se identificó deficiencias operativas, ya que no valida el modelo matemático.

En conclusión, el estudiante no pudo resolver el evento contextualizado al no cumplir con la etapa tres, ni logró resolver el problema, por consiguiente, no cumple con las etapas de resolución del evento contextualizado.

Desarrollo de la estudiante Greyzi

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. On the left side, the student sets up a system of equations: $b + m = 51p$ (labeled with (-2)) and $2b - 9m = 51p$. They then perform elimination by multiplying the first equation by -2 to get $-2b - 2m = -102p$, and adding it to the second equation to get $-11m = -51p$. Solving for m , they get $m = \frac{-51p}{-11} = 4,6 \Rightarrow m = 4,6$. On the right side, they use substitution, starting with $b + m = 51p$ and substituting $m = 4,6$ to get $b + (4,6) = 51p$. Solving for b , they get $b = \frac{51}{4,6} = 11,08$.

Figura 28. Desarrollo de la estudiante Greyzi
Fuente: Propia

Análisis del desarrollo de la estudiante Greyzi

En el desarrollo efectuado por Greyzi, no determino ni logro definir las variables y constantes. Cuando realizó el tránsito del lenguaje natural al matemático, utilizó letras que asumimos que son las variables del evento. Así tenemos la letra b, que parece representar el número de varones, y M que, al parecer, representa el número de mujeres, identificó una de

las constantes (51), lo que le permitió transitar entre dos registros, pero solo lo realizó para primera proposición como lo mostramos:

“Si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas”

$$b + m = 51$$

Pero al realizar el tránsito del registro de la segunda proposición: “La diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas”

$$2b - 9m = 51$$

Todo ello nos permitió identificar deficiencias operativas, donde la alumna no identificó la constante “nueve”, que debió ser utilizada en la segunda proposición. No determinó el modelo matemático, no estableció relaciones entre las variables y constantes, ya que lo mostró cuando no utiliza la contante “nueve”.

Posteriormente, realizó un procedimiento algorítmico en el cual utiliza el Método de reducción. Este es uno de los métodos para desarrollar un Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

La estudiante logro determinar los valores para m y b, pero no interpretó los resultados obtenidos puesto que ellos son expresiones racionales, lo que es un error porque en la pregunta del problema se trata de establecer la diferencia entre el número de personas, ello implica que la respuesta debe ser un número natural.

En consecuencia, no validó el modelo matemático del evento y en conclusión no logró desarrollar las etapas de resolución del evento contextualizados. Por ello, no resolvió el evento.

- Desarrollo de la estudiante Catherin

Figura 29. Desarrollo de la estudiante Catherin

Fuente: Propia

Análisis del desarrollo de la estudiante Catherin.

En el caso de Catherin, sí determinó las variables y constantes en forma explícita, pero lo realizó al final de su desarrollo, logró un cambio de registro adecuado del lenguaje natural al algebraico de las dos proposiciones, incluyó el tema de representar un Sistema de Ecuaciones con dos Variables; es decir, determinó el modelo matemático solicitado en el evento y encontró una respuesta parcial que es el número de varones lo muestra cuando representa:

“Si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas”...

$$2b - 9m = 51$$

“La diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas”...

$$x - 2y = 9$$

La estudiante logró determinar el modelo matemático y establecer relaciones entre las variables y constantes; sin embargo, se identificó deficiencias operativas en la sustracción, que lleva a otro error en el resultado de la variable del número de varones al no verificar ni interpretar las soluciones parciales de cada variable que corresponden al evento. Esto trae como consecuencia otro error en el resultado final del evento y no logra determinar la solución requerida por el evento.

Pasaremos al análisis del desarrollo de cada uno de los siguientes estudiantes: Washington Ruiz Fernández, Greysi Areche Soto, Catherin Yupanqui Quispe.

Problema 2 de Segunda Categoría.

- Desarrollo del estudiante Washington

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. On the left side, there is a system of two linear equations in two variables:

$$\begin{array}{r} x + 18y = 3/2 \\ x + 12y = 2 \\ \hline 2x - 5y = 4 \end{array}$$

The result of the subtraction is marked with a double slash (//), indicating it is incorrect. On the right side, there are handwritten notes and calculations:

2/4 a favor del río
- 5/4 contra la corriente

$$\begin{array}{l} 2x = 4 \\ \boxed{x = 2} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} -5y = 4 \\ y = \frac{4}{-5} \\ \boxed{y = 0.8} \end{array}$$

The final result for y is also marked with a double slash (//), indicating it is incorrect.

Figura 30. Desarrollo del estudiante Washington

Fuente: Propia

Washington no logró determinar las variables ni las constantes. Eso se muestra cuando realizó igualdades sin tomar en cuenta las unidades a las que se hacen alusión en el evento, como se demuestra a continuación:

Una lancha navega por un río y recorre 18km en 3/2 horas

.....yendo a favor de la corriente $x + 18 y = 3/2$

..... 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente $x - 12 y = 2$

El estudiante no logró realizar el proceso de evocación de conceptos matemáticos que son necesarios en el desarrollo del modelo matemático relacionado con la física, pues la información que se dio en el problema relaciona distancia y tiempo, donde debió relacionar con la definición de velocidad.

Se pudo identificar obstáculos cognitivos que tiene el estudiante, ya que no determina el modelo matemático y cuando efectúa los procedimientos matemáticos evidencian dificultades, como lo muestra en las siguientes expresiones:

$2x - 5y = 4$ y luego realiza dos igualdades: $2x = 4$ y $-5y = 4$, lo cual es un error.

Tampoco evocó nociones previas, cumplió con la etapa 5 que consiste en determinar el modelo matemático, no realizó la interpretación ni la validación del modelo matemático que determinó.

- Desarrollo de Greyzi

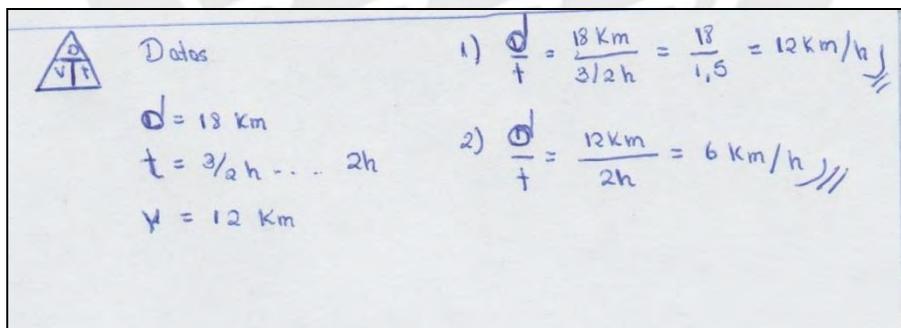


Figura 31. Desarrollo de Greyzi

Fuente: Propia

Análisis del desarrollo de Greyzi

Greyzi no logró determinar las variables ni las constantes del problema. Esto se reflejó cuando ella identificó sólo los datos de longitud y tiempo referidos a velocidad, pero no logró reconocer las variables del problema.

También observamos que sí incluyó temas y conceptos de otras áreas, como la física, que son necesarios para desarrollar el evento, ya que muestra una Nemotecnia para relacionar

distancia, tiempo y velocidad: $V = \frac{d}{t}$

Con ello, encontró las velocidades resultantes, pero no reconoció los datos hallados y asumió que son las velocidades pedidas en el evento. Por lo tanto, Greyzi no logró la traducción con evocación que requiere el evento para su solución y no dio la solución matemática del evento. Por ello, no pudo interpretar la solución y no logró realizar todo el proceso de resolución del evento.

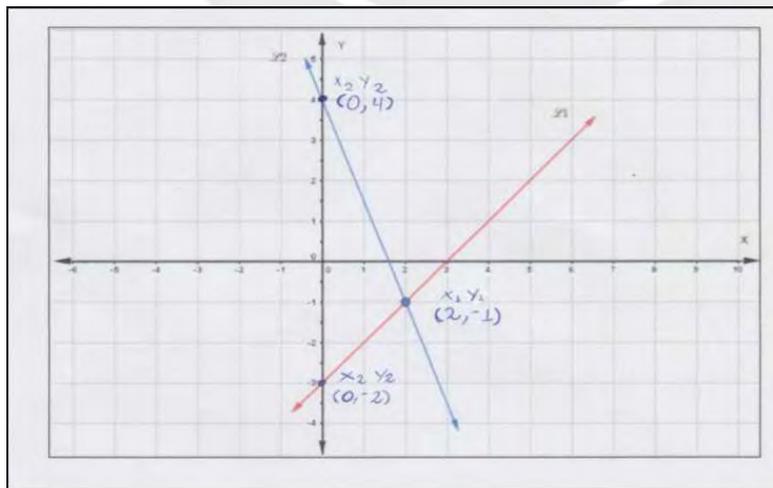
A continuación analizaremos el desarrollo del problema 3

Este problema, al cual denominamos “Problema gráfico”, ha sido diseñado con el objetivo de estimular en los estudiantes sus habilidades del pensamiento, sobre todo las habilidades de orden superior donde se encuentra la observación, identificación, inducción y deducción, transmitiendo el modelaje matemático en el desarrollo de problemas.

En este problema los estudiantes deben realizar un tránsito de registros del gráfico hacia el algebraico, lo cual genera un aprendizaje más duradero.

El ejercicio está considerado en la clasificación de problema de segunda categoría, ya que induce a evocar conceptos de un punto como la identificación de las coordenadas de un punto y el concepto de pendiente de una recta.

- Desarrollo de Washington



Continuación del desarrollo de Washington

$$l_2 \cdot m l_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 2}{0 - 1} = 5$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad l_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{0 - (+2) - 2} = \frac{3}{-4} = -1.5$$

$$y - (-2) = 5(x - (-1)) \quad y - x_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (x - x_1)$$

$$\boxed{5x - y = -1}$$

$$y - (-1) = -1.5(x - 2)$$

$$y + 1 = -1.5x - 2$$

$$\boxed{-1.5x - y = 3}$$

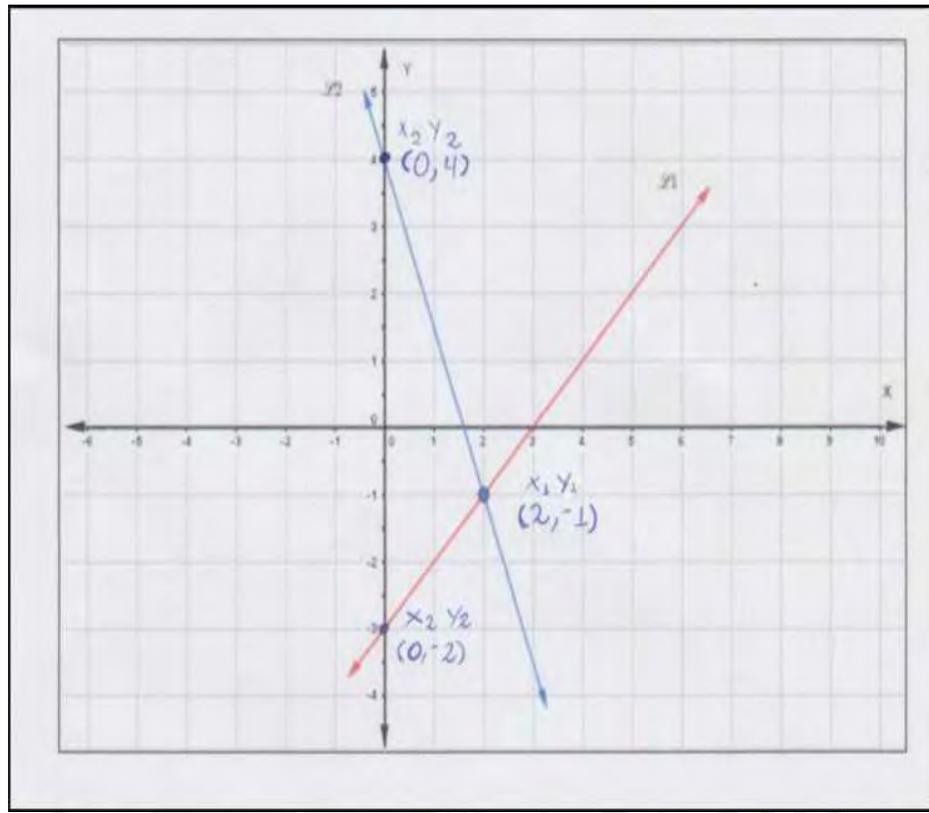
Figura 32. Desarrollo de Washington
Fuente: Propia

Análisis del desarrollo de Washington en el problema 3

El estudiante sí mostró la identificación de los puntos por donde pasan la rectas. Esto se verificó en la misma gráfica, realizó la traducción parcial del registro gráfico al algebraico cuando logró evocar conceptos matemáticos del modelo matemático de la Geometría analítica.

En el momento de relacionar los conceptos de pendiente y ecuación de la recta, estableció la relación de interdisciplinariedad que se presenta con el área de la Geometría, pero no logró integrar la totalidad de estos conceptos con el evento planteado, pues se identificó un obstáculo cognitivo que se presentan en la aplicación de las expresiones que determinan las ecuaciones de las rectas. Así tenemos el signo incorrecto del -1 como abscisa de punto (1; -2). Otro obstáculo cognitivo fue la doble igualdad que utilizó el estudiante, ya que no logró determinar el modelo matemático solicitado. Sólo logró el desarrollo parcial del evento, pero no dio la solución solicitada en el evento y no se verificó el proceso de conversión de registros que favorece el aprendizaje del tema en investigación por parte de los estudiantes.

- Desarrollo de Greyzi



Continuacion del desarrollo de Greyzi

$$m_{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{6 - 4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$m_{l_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$m_{l_1} = 1$$

$$m_{l_2} = -2$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} (x - x_1)$$

$$y - 1 = 1(x - 4)$$

$$y - 1 = x - 4$$

$$y - x = 1 - 4$$

$$-x = -3$$

$$y - 1 = -2(x - 4)$$

$$y - 1 = -2x + 8$$

$$y + 2x = 1 + 8$$

$$y + 2x = 9$$

$$x + y = \frac{9}{3} \Rightarrow x + y = 3$$

Figura 33. Desarrollo de Greyzi
Fuente: Propia

Analisis del desarrollo de Greyzi en el problema 3

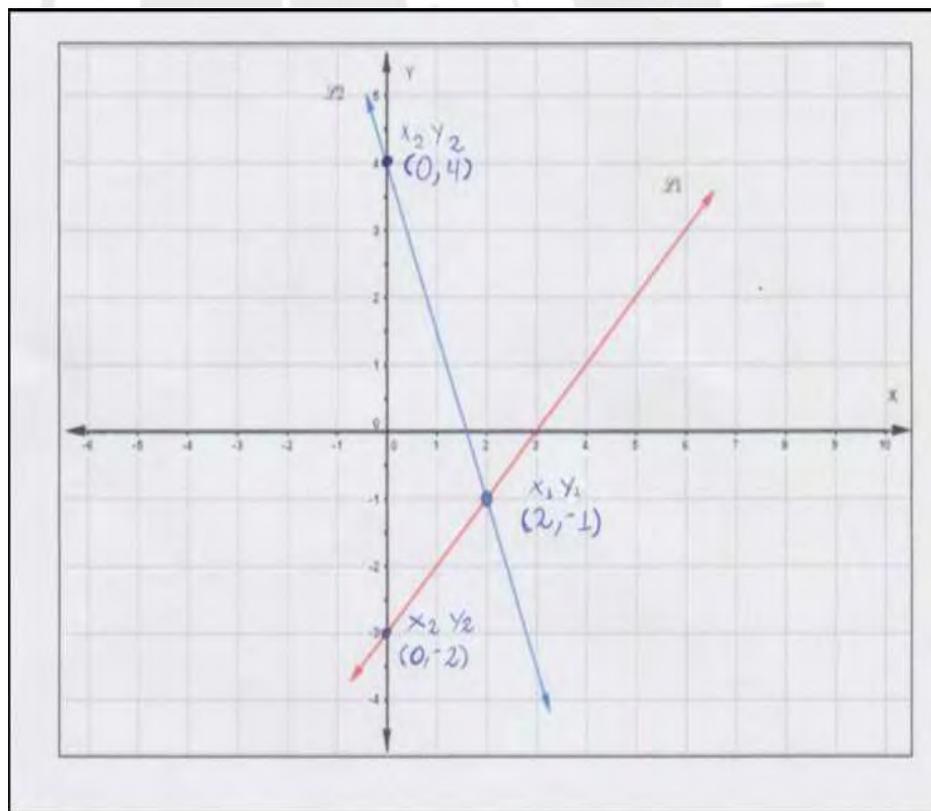
La estudiante identificó los puntos por los que pasan las rectas, según el gráfico propuesto en el evento. No logró realizar la traducción registro gráfico al algebraico, ni realizó la modelación del evento pues sus respuestas parciales no las conectó con lo solicitado en el evento que es la modelación del sistema de ecuaciones.

Sí evocó un modelo matemático que representa la definición de pendiente y la ecuación de las rectas que ayudan en la solución del evento planteado, estableció la relación de interdisciplinariedad que se presenta con el área de Geometría analítica, pero aquí no logró integrar estos conceptos con la totalidad de los datos que se dieron en la gráfica.

Aquí se identificó obstáculos cognitivos de la estudiante en el proceso algorítmico al operar con las ecuaciones parciales de las ecuaciones de las rectas, no logró determinar el modelo matemático Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables y en conclusión la estudiante no pudo dar respuesta al evento.

Desarrollo de la estudiante Catherin

Problema 3: Representación Gráfica



Continuación del desarrollo de Catherin

$x_1 \quad y_1$
 $\cdot (0, 4)$
 $\cdot (2, -1)$
 $x_2 \quad y_2$

$$m_{1,1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 4}{2 - 0} = \frac{-5}{2} = 2,5$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 4 = 2,5 (x - 0)$$

$$y - 4 = 2,5 - x$$

$$y + x = 6,5$$

Sistema

$x_1 \quad y_1$
 $\cdot (2, -3)$
 $\cdot (2, -1)$
 $x_2 \quad y_2$

$$m_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - (-3)}{2 - 2} = \frac{2}{0} = 2$$

$$m_{2,2} = y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - (-3) = 2 (x - 2)$$

$$y + 3 = 2x - 4$$

$$y - 2x = -7$$

Sistema

$$\begin{cases} y + x = 6,5 \\ y - 2x = -7 \end{cases}$$

Figura 34. Desarrollo de Catherin
Fuente: Actividad didáctica

Analisis del desarrollo de Catherin en el problema 3

La estudiante identificó los puntos por los cuales pasan las rectas del evento presentado como se muestra en la grafica, logró realizar la traducción parcial del registro gráfico algebraico, realizó también un proceso de evocación con un modelo geométrico en el cual incluyó el tema de pendiente de una recta y definió términos matemáticos.

Estas definiciones son necesarios en el desarrollo del modelo matemático Sistema de ecuaciones y solución del evento, pero se identificó obstáculos cognitivos en la división entre el elemento cero.

Esto mostró la deficiencia en los conocimientos previos que no le permitieron desarrollar el evento planteado, no logró determinar el modelo matemático solicitado, tampoco presentó la solución matemática del evento contextualizado ni verificó la validez de los resultados que obtuvo, no realizó la interpretación de la solución de términos del evento y, en consecuencia, no resolvió el evento planteado.

En este capítulo hemos realizado el análisis de cada uno de los desarrollo realizados por los estudiantes cuyas actividades fueron seleccionadas por sorteo.

CONSIDERACIONES FINALES

En el desarrollo de nuestra investigación, acerca del aprendizaje del tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables, encontramos evidencias de las dificultades que tienen los estudiantes al aprender este tópico.

Al analizar los resultados de la puesta en práctica de la actividad didáctica se detectó que los estudiantes presentan dificultades para llevar a cabo la traducción de los problemas contextualizados a los diferentes registros de representación y viceversa, sobre todo cuando los problemas tienen enunciado evocador y modelos de segunda categoría.

Esto quiere decir que los docentes debemos preparar a los estudiantes para que enfrenten favorablemente el desarrollo de estos eventos.

De los 18 problemas propuestos del tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con tres Variables presentados en el texto escolar Matemática 4 que utilizan los estudiantes, sólo seis de estos eventos corresponden a la segunda categoría, según categorización de la Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC), que representan solamente la tercera parte del total de problemas propuestos para este tópico.

Debemos mencionar que los eventos de segunda categoría corresponden a los problemas en los cuales los estudiantes tienen mayores dificultades en el momento su desarrollo y, además, se evidencian las deficiencias en transitar entre los diferentes registros de representación.

Las consideraciones finales fueron relacionadas a los siguientes aspectos:

La teoría educativa MCC en su Fase Didáctica, que es la fuente teórica que nos permitió desarrollar esta investigación, nos dio un panorama amplio de etapas, lineamientos y observaciones que se cumplen en el desarrollo de todo el proceso de investigación.

Un aspecto fundamental de esta Fase didáctica fue la Estrategia de la Matemática en Contexto que aportó los lineamientos que se deben cumplir para realizar el diseño de la actividad didáctica que se propuso en esta investigación.

Asimismo, las etapas de la Estrategia de la Matemática en Contexto tuvieron a su vez dos observaciones: Una de ellas relacionada a la planeación didáctica y la otra relativa a la

modelación, las cuales deben ser tomadas en cuenta para el diseño y evaluación de las actividades didácticas respectivamente.

También se realizó el análisis de los recursos didácticos, que son el texto escolar, el cuaderno de trabajo que utilizan los estudiantes y el manual para el docente. Este fue realizado en la sección del Álgebra. Es aquí donde podemos mejorar y proponer nuevos diseños de eventos y realizar su aplicación en actividades didácticas con eventos contextualizados. En este caso, problemas contextualizados de segunda categoría, teniendo como objetivos la motivación a los estudiantes, incorporación de nuevos temas, desterrar creencias negativas cuando se les presenta conocimientos nuevos, identificar conocimientos previos y las diversas dificultades que tienen en el aprendizaje de este tópico y prevenir la formación de estos obstáculos que limitan sus nuevos aprendizajes, desarrollar el proceso heurístico y un currículo por competencias, que actualmente se pide en los diferentes niveles de nuestra educación.

Se identificó que las categorías de traducción del lenguaje natural al matemático (problemas con enunciado literal y evocador), así como los modelos de primera y segunda categoría, son aplicables a los problemas que se les proponga a los estudiantes de secundaria en diferentes tópicos, constituyéndose en otro aporte de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC).

Además, en esta investigación, se constató lo que establece la teoría de la MCC: El conocimiento del contexto y el uso de las etapas de la estrategia didáctica de la Matemática en contexto juegan un papel primordial para el éxito de la resolución de eventos contextualizados.

En conclusión, esta teoría fue pertinente porque su estructura, a pesar de iniciarse en la carrera de Ingeniería, ayudó a evaluar los aspectos didácticos cuando se desarrollan contenidos matemáticos en la Educación Básica del nivel secundaria, siendo esta teoría un aporte de nuestra investigación.

La metodología del Diseño de Programas de estudio de las Ciencias básicas en Ingeniería (DIPCIING) permitió realizar un adecuado análisis del contenido temático Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables, ya que dio los criterios para mejorar las estrategias metodológicas y lograr un idóneo aprendizaje de estos contenidos a partir de un diseño

conveniente de las actividades didácticas y una apropiada selección de problemas contextualizados y categorizados, siguiendo los lineamientos y las nueve etapas de la estrategia de la Matemática en Contexto.

Con todos estos insumos se logrará un mejor aprendizaje de diferentes tópicos por parte de los estudiantes.

En relación a la pregunta de investigación “¿Cómo la categorización de problemas contextualizados de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) permite evaluar el aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos variables en los estudiantes del cuarto grado de secundaria?”, se llegó a la conclusión que una adecuada categorización de los eventos contextualizados o problemas sí permiten una adecuada evaluación de los aprendizajes en relación al tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos variables. De lo contrario, continuando con las sesiones de clase tradicionales, los alumnos no establecerán la relación de las matemáticas y la resolución de problemas de diferentes aspectos, ya sean cotidianos, científicos y, posteriormente, problemas de relacionados a sus profesiones laborales.

Los problemas contextualizados inducen a los estudiantes al tránsito por diferentes de los registros, como del verbal al matemático luego al gráfico y viceversa, asegurando de esta forma el aprendizaje.

Así hemos dado respuesta a esta interrogante: Cuando se realiza una adecuada categorización de los problemas contextualizados, sí se puede evaluar el aprendizaje y corregir las deficiencias que se presentan.

En cuanto a los objetivos específicos, éstos fueron logrados:

Se logró identificar el tema en el texto escolar Matemáticas 4 y en el documento oficial Diseño Curricular Nacional (2009), otorgado por el Ministerio de Educación a los docentes.

Se mostró un documento donde está la diversificación curricular del área de Matemáticas de la institución educativa donde se realizó nuestra investigación y se presentó la unidad didáctica 03, desarrollada por el docente y a su vez responsable de la investigación.

En relación al objetivo:

- Describir los eventos contextualizados, categorizados según la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), presentes en la sección tres relativa al área de Álgebra del texto escolar Matemática del cuarto año de educación, texto proporcionado por el MINEDU.
- Sí se logró describir los eventos contextualizados al realizar el análisis del tópico Sistemas de Ecuaciones lineales en la sección de Álgebra y de cada uno de estos problemas que están presentados en esta sección. Estos problemas están categorizados según la MCC.

En cuanto al objetivo:

- Proponer eventos contextualizados, según la categorización de problemas contextualizados de la MCC.

Se diseñaron y se propusieron eventos contextualizados, según la categorización de la MCC. Esto se plasmó en la actividad didáctica desarrollada por los estudiantes del quinto de secundaria.

En relación al objetivo:

- Identificar las etapas de resolución del evento contextualizado, las cuales están presentes en la didáctica de la Matemática en Contexto.

Al realizar el análisis de cada uno de los eventos contextualizados que se presentan en el texto que utilizan los estudiantes, se logró identificar y analizar las etapas de resolución de la fase didáctica de la MCC.

En algunos de estos problemas se logró identificar algunas de las etapas, pero en otros no se logra dicha identificación, por ellos no los pueden resolver.

Analizando el objetivo de:

- Describir los resultados obtenidos por los estudiantes en el desarrollo de la aplicación de la actividad didáctica.

Se realizó la descripción de cada uno de los resultados obtenidos por los estudiantes, para ello se tuvo de base los lineamientos, las etapas y las observaciones que nos aportó la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC).

Todo este análisis nos sirvió para nuestras perspectivas futuras en el sentido de abordar con bases teóricas el diseño de los diferentes problemas contextualizados, mejorar la etapa de contextualización y descontextualización, que corresponden a ser desarrolladas por los docentes en los diferentes contenidos temáticos que desarrollemos con los estudiantes. Esto permitirá que los estudiantes logren un adecuado aprendizaje del tema en investigación.

Por lo tanto, se logró el objetivo general que era analizar el aprendizaje del tópico Sistema de Ecuaciones con dos Variables utilizando la categorización de problemas de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), ya que se diseñó una actividad didáctica en base a la categorización de éste, tomando problemas contextualizados presentes en el libro texto de los estudiantes referentes al Sistema de Ecuaciones con dos Variables.

Esta actividad propuesta fue evaluada y nos permitió detectar las dificultades que los estudiantes presentaron para transitar en los diferentes registros de representación cuando desarrollan problemas contextualizados.

En cuanto al análisis del contenido temático Sistema de Ecuaciones con dos Variables presentado en el libro de los estudiantes, los contenidos que se presentan son superficiales, ya que no están acompañados de un tránsito por diferentes registros de representación y no propicia en los estudiantes una visión amplia de este tópico matemático. A su vez, el priorizar los ejercicios algebraicos no desarrolla la habilidad para resolver con éxito problemas contextualizados.

Se sugiere que la presentación del tópico Sistema de Ecuaciones con dos Variables debería ser precedido por una secuencia de temas, como Ecuaciones con una Variable, utilizando problemas contextualizados que den a los estudiantes las bases de conocimientos matemáticos necesarios, para posteriormente iniciar el aprendizaje del tema Sistemas de Ecuaciones con dos Variables de una forma más adecuada y duradera.

En relación a la propuesta de la actividad didáctica elaborada, se tomó en cuenta la categorización de traducción de la MCC, utilizándose la primera y segunda categoría, ya que estaba dirigida a estudiantes del quinto año de educación secundaria.

Ellos en el año anterior, desarrollaron el tema en investigación y para ello se seleccionaron problemas contextualizados que se encontraban en su libro texto Matemática 4. Esta

actividad didáctica propuesta, basada en problemas contextualizados, tuvo como objetivo que los estudiantes logaran transitar por los diferentes registros de representación.

Los resultados de esta actividad, con eventos presentados como problemas contextualizados, no fueron los más óptimos y esta situación se agudiza mucho más si se tratan de problemas contextualizados con enunciado evocador.

También se pudo observar, en este análisis, que los alumnos no validaron sus resultados, no realizaron las representaciones gráficas de sus modelos matemáticos obtenidos, no modelaron los problemas propuestos y no verificaron ni interpretan los resultados obtenidos al desarrollar los problemas propuestos.

PERSPECTIVAS FUTURAS

- Sugerimos que esta investigación sea ampliada a los niveles educativos de inicial y primaria, donde se enseñan los primeros procesos de aprendizaje de las nociones matemáticas, tomando en cuenta el diseño de problemas contextualizados con un grado de dificultad de acuerdo al nivel de estudios de los estudiantes.
- Esta investigación permitirá reflexionar sobre nuestras prácticas docentes, tomando en cuenta todos los lineamientos que nos provee la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC), los cuales nos permiten optimizar el aprendizaje de nuestros estudiantes en relación al tópico Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables.
- Este trabajo pretende promover el análisis de lo importante que es el aprendizaje óptimo del tópico en investigación como base para el aprendizaje de nuevos contenidos como Programación lineal, que es un tópico a ser desarrollado en el quinto de secundaria.
- Sugerimos realizar un trabajo de investigación en relación a la formación académica de los docentes del área de Matemáticas de los diferentes niveles de la Educación Básica Regular, con el sentido de orientarlos hacia la profundización del conocimiento que deben tener de los diferentes contenidos matemáticos, pues la etapa de descontextualización está a cargo de ellos, lo cual implica una gran responsabilidad ya que está relacionada directamente a la precisión de los conocimientos en Matemáticas que brindan los docentes a sus estudiantes. Estos

conocimientos deben tener como referencia los conocimientos de fuentes bibliográficas de nivel superior que tengan la rigurosidad pertinente, como se presentó en el texto de Lages (2004, p. 184.185).

- Es pertinente sugerir el análisis de los recursos didácticos que se les proporciona a los estudiantes de todos los niveles de la Educación Básica de nuestro país y determinar si realmente son apoyo en el aprendizaje de los diferentes tópicos de estudio.



REFERENCIAS

- Camarena, P. (1999). *La Matemática en el Contexto de las Ciencias Modelo: Modelo didáctico* Documento de trabajo de la Red Internacional de investigación, MACOCIENCIAS (2000). Capítulo: La fase Didáctica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias .
- Camarena, P. (2000). *La Matemática en el Contexto de las Ciencias y los Modelos Matemáticos del 3º Congreso internacional de Ingeniería electromecánica y de México.*
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Bogotá, Colombia: Universidad del Valle.
- Figuroa, R. (2013). *Resolución de problemas con Sistemas de Ecuaciones lineales con dos Variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de Situaciones Didácticas* (tesis de maestría).Escuela de posgrado Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Lages, E. (2004). *Geometría Analítica y Álgebra Lineal.*
- Martinez, M. (2006). *La Investigación Cualitativa (Síntesis Conceptual).*Revista IIPSI. Facultad de Psicología. U N M S M, ISSN 1560- 909, Vo 19- N° 1- 2006, pp. 123-146.
- MINEDU (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular.* Lima, Perú.
- MINEDU (2015).*Manual, Rutas de aprendizaje.* Lima, Perú.
- MINEDU (2016). *Texto escolar matemática 4.* Lima, Perú.
- MINEDU (2016). *Cuaderno de trabajo, matemática 4.* Lima, Perú.
- MINEDU (2016). *Manual para el docente, matemática 4.* Lima, Perú.
- Neira, V. (2012). *Estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: Traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al Lenguaje*

Matemático de problemas con estudiante de Ciencias Administrativas (tesis de Maestría) Escuela de Posgrado Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos Incógnitas*. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología avanzada. Unidad Legaría, Uruguay.

Olazábal, A. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la Matemática en contexto* (tesis de maestría en el área de educación matemática). Instituto Politécnico Nacional, México.

Segura (2004). En su artículo *Sistema de ecuaciones lineales: Una secuencia Didáctica*, Revista Latino Americana de investigación en Matemática Educativa, 7(1) ,49-78.



ANEXOS

Las tablas que se presentan a continuación muestran los resultados tabulados y valorados con los siguientes criterios: Logrado =1 No logrado = 0

Tabla 1. Resultados de la traducción del enunciado con evocación) (Problema 1)

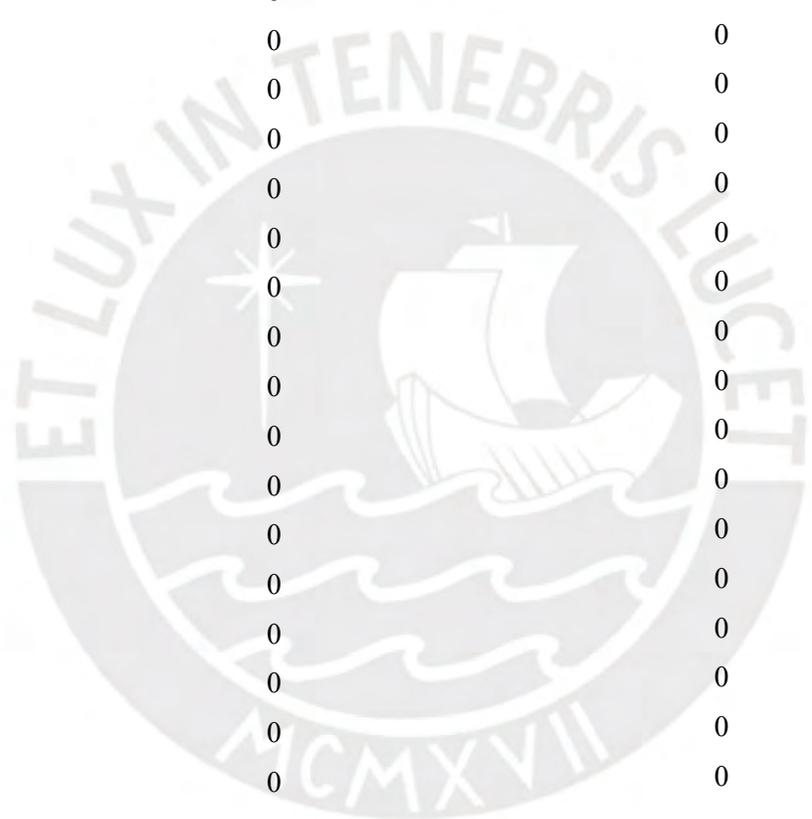
Estudiantes	“Si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas”...	“La diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas”
	$x + y = 51$	$x - 2y = 9$
Washington	1	0
Greyzi	1	0
Catherin	1	1
Yeison	1	0
David	1	0
Jhimi	1	0
Jaime	1	0
Keevin	1	0
Cristian	1	0
Andrea	1	0
Cynthia	1	0
Jose	1	0
Ronald	1	0
Tania	1	0
Deysi	1	0
Yeny	1	0
Jhosh	1	0
Lucy	1	0
Angin	1	0
Luis	1	0

Tabla 2. Resultados de la traducción del enunciado con evocación (Problema 2)

Estudiantes	“Una lancha navega y recorre 18km en 3/2 horas yendo a favor de la corriente” $x+y = 12\text{km/h}$	“12 kilómetros en 2 horas contra la corriente.” $x-y = 6\text{km/h}$
Washington	0	0
Greyzi	0	0
Catherin	0	0
Yeison	0	0
David	0	0
Jhimi	0	0
Jaime	0	0
Kevin	0	0
Cristian	0	0
Andrea	0	0
Cynthia	0	0
José	0	0
Ronald	0	0
Tania	0	0
Deysi	0	0
Yeny	0	0
Jhosh	0	0
Lucy	0	0
Angin	0	0
Luis	0	0

Tabla 3. Resultados de la traducción del enunciado con evocación (Problema 3)

Estudiantes	$5X+2 Y = 8$	$X - Y = 3$
Washington	0	0
Greyzi	0	0
Catherin	0	0
Yeison	0	0
David	0	0
Jhimi	0	0
Jaime	0	0
Kevin	0	0
Cristian	0	0
Andrea	0	0
Cynthia	0	0
José	0	0
Ronald	0	0
Tania	0	0
Deysi	0	0
Yeny	0	0
Jhosh	0	0
Lucy	0	0
Angin	0	0
Luis	0	0



Analizando los resultados que se muestran en la tabla 3, en relación al del problema 3, se verificó que solo una estudiante (Greyzi) logra transitar del registro grafico al algebraico en sólo una de las rectas, mientras que los demás estudiantes no lograron transitar entre estos registros.

ACTIVIDAD DIDÁCTICA

Problema 1

En la fiesta de la Virgen del Carmen de Huachipa asistió un grupo musical en el cual, si sumamos la cantidad de varones y mujeres que lo conforman, resultan 51 personas y además se sabe que la diferencia entre la cantidad de varones y el doble de la cantidad de mujeres es nueve personas.

Desarrollo

Determine la diferencia entre el número de varones y el número de mujeres.

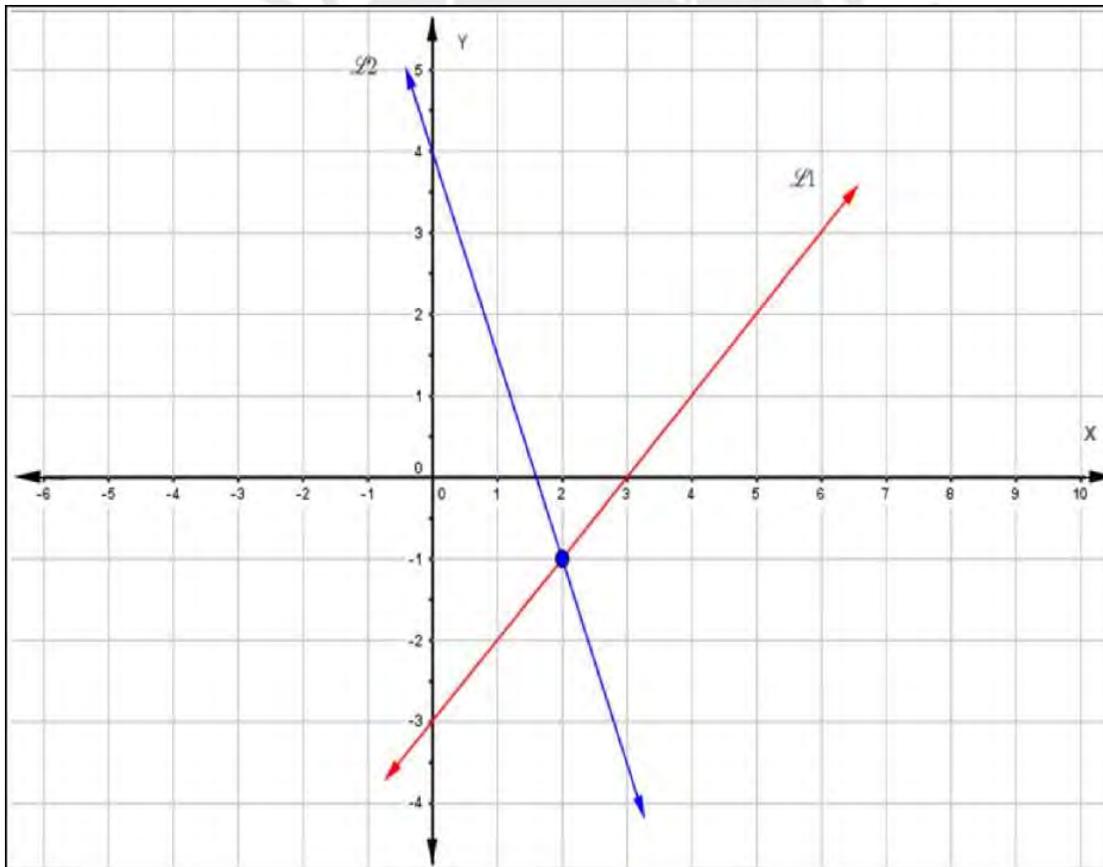
Problema 2

Una lancha navega por un río y recorre 18km en $\frac{3}{2}$ horas yendo a favor de la corriente y 12 kilómetros en dos horas contra la corriente. Determina la velocidad de la lancha y la velocidad del río.

Desarrollo

Problemas 3: Representación Gráfica

Si las rectas L_1 y L_2 representan las ecuaciones de un sistema, representa algebraicamente este sistema.



Fuente: Propia