PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL VALOR ABSOLUTO EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR:

SAHARA ZULEMA DORIA RODRÍGUEZ

ASESOR:

FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA

Abril, 2018

RESUMEN

Diversas investigaciones han reportado los errores que presentan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, los cuales son evidencia de obstáculos epistemológicos y didácticos. Considerar al valor absoluto de un número como el número sin signo es un obstáculo epistemológico y la interpretación del valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado de manera mecánica es un obstáculo didáctico. Estos obstáculos están asociados a la enseñanza del valor absoluto desde el contexto aritmético. En esta investigación analizamos la propuesta curricular peruana, la cual propone enseñar el valor absoluto desde este contexto, en vista de ello, nosotros proponemos diseñar un sistema para enseñar el valor absoluto como función, con la finalidad de evaluar el rendimiento de los estudiantes cuando resuelven ecuaciones e inecuaciones desde el contexto funcional. Esta investigación, toma como base teórica la teoría de situaciones didácticas y sigue principios de la ingeniería didáctica en la metodología. Además, incorpora el análisis cohesitivo para el diseño de la secuencia didáctica, así como para enriquecer las conclusiones. Primero, se realizó el análisis cohesitivo de las respuestas de los estudiantes, donde se identificaron los errores que presentan, y las implicancias que hay entre ellos, estos resultados en conjunto con los del análisis preliminar se usaron para el diseñó la situación problema. Después, se llevó a cabo la experimentación, la cual consistió en tres actividades aplicadas en dos sesiones con estudiantes de tercer grado de secundaria cuyas edades oscilan entre los 13 a 14 años de edad. Finalmente, se realizó el análisis a posteriori y el análisis cohesitivo de las respuestas de los estudiantes, concluyendo que los estudiantes mejoraron su desempeño cuando resolvieron ecuaciones del tipo $|x|=a$ y $|x+a|=b$, recurriendo a la solución gráfica y evitando los errores de origen epistemológico y didácticos mencionados.

Palabras clave: Valor absoluto, obstáculos epistemológicos y didácticos, situaciones didácticas, análisis cohesitivo.

ABSTRACT

Many investigations have reported the errors that the students present when they solve equations and inequalities with absolute value, which are evidence of epistemological and didactic obstacles. To consider the absolute value of a number as the number without sign is an epistemological obstacle and the interpretation of the absolute value of a number as a symbol that must be eliminated mechanically is a didactic obstacle. These obstacles are associated with the teaching of absolute value from the arithmetic context. In this research we analyze the Peruvian curriculum proposal, which proposes to teach the absolute value from this context, in view of it, we propose to design a system to teach the absolute value as a function, with the purpose of evaluating the students' performance when they solve equations and inequations from the functional context. This research, takes as a theoretical basis the theory of didactic situations and follows principles of didactic engineering in the methodology. In addition, it incorporates the cohesive analysis for the design of the didactic sequence, as well as to enrich the conclusions. First, a cohesive analysis of the students' answers was made, where the errors they presented were identified, and the implications between them. These results, together with those of the preliminary analysis, were used to design the problem situation. Then, the experimentation was carried out, which consisted of three activities applied in two sessions with third grade students of secondary school whose ages range from 13 to 14. Finally, the a posteriori analysis and the cohesive analysis of the students' answers were carried out, concluding that the students improved their performance when they solved equations of the type $| x | = a$ y $| x + a | = b$, resorting to the graphical solution and avoiding the mentioned errors of epistemological and didactic origin.

Keywords: Absolute value function, equations, inequalities, obstacules, didactic situation, cohesitive anlysis

DEDICATORIA

Dedicado con mucho cariño para:

Dios,

mi madre Nerida,

mi padre Julio

mis hermanos Julio, Melissa y Paola

y mis sobrinos Edu, Rafa y Mafer

AGRADECIMIENTOS

Al doctor Francisco Ugarte Guerra, mi asesor de tesis, por su apoyo, exigencia, ánimo y asesoría constante a lo largo de esta investigación.

A la doctora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, un agradecimiento especial por su asesoría en el manejo del software CHIC y en el análisis cohesitivo, muchas gracias por sus observaciones, que sin duda contribuyeron a la mejora de esta investigación.

A la Magister Cintya Gonzales por su acompañamiento y supervisión durante la estancia de investigación en Brasil y por sus oportunas observaciones.

A la doctora Cecilia Gaita por sus valiosos aportes y observaciones en este trabajo de investigación.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú, por la ayuda económica recibida a través del fondo de becas Maco Polo, para poder realizar la estancia de investigación en Brasil.

A la licenciada Norma Rodríguez Flores, sub-directora de la I.E. Telesforo de Catacora, por darnos todas las facilidades para poder realizar las sesiones de este trabajo de investigación con los estudiantes de tercer grado de secundaria.

A Mercedes Rojas, por su apoyo con la traducción del alemán al español del artículo *Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag*, muy importante para los antecedentes de esta investigación.

A mi madre por ser ejemplo de bondad y entrega, gracias por ayudarme y por animarme cada vez que me desanimaba, sin ti no lo pude haber logrado. A mi papá por su exigencia y apoyo. A Julio mi hermano y amigo, por su ánimo y apoyo para culminar esta tesis. A mis hermanas Paola y Melissa por su ánimo y ejemplo de esfuerzo y trabajo.

A mi abuelita Carmen, porque siempre sus oraciones me acompañan.

A mis amigas Phamela Escudero, Viví Andía y Mariela Quispe, fueron las mejores compañeras de clase, doy gracias a Dios por haberlas conocido.

Por sobre todo, gracias a Dios que me ayuda a lograr mis metas, por permitir encontrarme con personas que me han ayudado mucho y por siempre acompañarme en cada prueba y en cada logro. Gracias Padre.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CONSIDERACIONES INICIALES

En mi experiencia como profesora de nivel pre-universitario he observado que el valor absoluto es una de las nociones matemáticas de difícil comprensión para la mayoría de estudiantes, por lo que surge mi interés por diseñar una propuesta para la enseñanza del valor absoluto con la finalidad de que los estudiantes mejoren su rendimiento al desarrollar ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. En este trabajo de investigación se diseña y valida una secuencia didáctica para la enseñanza del valor absoluto realizada con estudiantes de tercer grado de secundaria en la I.E. Telesforo de Catacora.

En el capítulo I, se realiza el planteamiento del problema, donde se resumen investigaciones previas realizadas en referencia a los errores que se observan en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto y su relación con los obstáculos epistemológicos y didácticos asociados a esta noción. Además, se formula la pregunta de investigación y establecen los objetivos.

En el capítulo II, se presentan los aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) que son utilizados en esta investigación. También, se describe la metodología que seguirá esta investigación, dentro del cual se detalla aspectos de la Ingeniería Didáctica y del Análisis Estadístico Implicativo (ASI).

En el capítulo III, se muestran los resultados del análisis preliminar realizado en tres dimensiones epistemológico, cognitivo y didáctico y en el capítulo IV, se muestran los resultados del análisis estadístico implicativo con la finalidad de conocer las implicancias que hay entre los tipos errores que presentan los estudiantes y los conceptos que tienen acerca del valor absoluto de un número, antes realizar la secuencia de actividades. En base los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, en el capítulo V se realiza el diseño de la situación problema, se establecen las variables macro y micro-didácticas, y se muestran los resultados del análisis a priori, donde se describen los comportamientos esperados.

En el capítulo VI, se describe la puesta en marcha de las actividades y se reporta los comportamientos observados durante la experimentación de la secuencia didáctica. En el capítulo VII se muestran los resultados del análisis estadístico implicativo realizado luego de haber realizado la secuencia de actividades, con la finalidad de evaluar si hay cambios entre los tipos de errores o respuestas que presentan los estudiantes y los conceptos que tienen acerca del valor absoluto de un número. En el capítulo VIII, se muestran los resultados del análisis a posteriori, además de la validación de las hipótesis planteadas en la fase preliminar. Finalmente, en base a los resultados obtenidos en el capítulo VII y VIII, se presentan las conclusiones y consideraciones finales.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En ésta sección se presenta el planteamiento del problema, donde en primer lugar se detallan investigaciones previas en referencia a los errores que se observan en la resolución de problemas relacionados al valor absoluto, errores que en su mayoría están relacionados a obstáculos epistemológicos y didácticos. Además, se presenta un breve resumen del desarrollo histórico del valor absoluto y su relación con los obstáculos epistemológico y didáctico del valor absoluto. También, se muestra cómo las técnicas asociadas a los diferentes significados de la noción valor absoluto, condicionan las prácticas en la resolución de problemas, la necesidad de evitar el obstáculo didáctico asociado al valor absoluto y evaluar el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto cuando se realiza la enseñanza de ésta noción como función.

1.1 Antecedentes

Los trabajos que se han desarrollado en relación al valor absoluto, son muestra de que su enseñanza y aprendizaje han sido materia de investigación en la didáctica de la matemática.

Respecto a las investigaciones que hacen referencia a las dificultades que presentan los estudiantes en referencia al valor absoluto tenemos a Chiarugi, Fracazina y Furinghetti (1990), quienes realizaron un estudio longitudinal (en diferentes niveles educativos) con la finalidad de estudiar las dificultades que hay detrás de la noción valor absoluto. Para ello, aplicaron un cuestionario a estudiantes de primer año de secundaria, cuarto año de secundaria y primer año universitario. Los autores, señalan que las principales dificultades relacionadas a la noción de valor absoluto no se dan en el campo aritmético, sino en el campo algebraico, debido a la intervención de variables, que por lo general son difíciles de interpretar por los estudiantes.

Los resultados de la investigación, mostraron que las principales dificultades relacionadas a la noción de valor absoluto son en primer lugar, la falta de discriminación del dominio de la función valor absoluto y de su imagen correspondiente, que se observa en respuestas como $|x|<0$ si $x<0$, los autores sustentan que esto se debe a la falta de comprensión de los términos “o” y “si” dadas en la definición de valor absoluto ($|x|=x$ si $x\geq0$ o $|x|=-x$ si $x<0$). Usualmente, los estudiantes interpretan “o” como “y” y no toman importancia al término “si”. En segundo lugar, la imagen conceptual del valor absoluto de un número como el “número sin signo” es tan fuerte que los alumnos rechazan la idea de que $-x$ pueden ser el resultado de un valor absoluto, error relacionado también a la falta de comprensión y diferenciación entre variable y parámetro. Finalmente, los autores concluyen que las concepciones erróneas de los estudiantes persisten y no dependen de la cantidad de conocimiento en matemática que los estudiantes hayan adquirido.

La investigación de Chiarugi, Fracazina y Furinghetti (1990) muestra indicios de que los errores que presentan los estudiantes están relacionados a la definición misma de valor absoluto y también a cómo es enseñado.

Por otro lado, el trabajo de Gagatsis y Thomaidis (1995), muestra que la notación que hoy se utiliza para el valor absoluto, así como sus propiedades, involucraron cambios conceptuales importantes a lo largo de la historia, lo cual explica la complejidad que encierra esta noción. Los investigadores realizaron un estudio histórico del concepto de valor absoluto donde se distinguen 4 etapas: En la primera etapa, el valor absoluto es visto como un concepto implícito, surgió por la necesidad de realizar la sustracción entre dos cantidades no conocidas, como un modo de prevenir la realización de una operación imposible, ya que en ese tiempo no se trabajaba con los números negativos.

En la segunda etapa, el valor absoluto es visto como un objeto justificativo-explicativo, de la teoría algebraica y de la teoría de números, la frase “haciendo abstracción del signo”, es utilizada en vez de la noción valor absoluto. En la tercera etapa, durante el siglo XIX el valor absoluto es visto como un instrumento que permite la formalización del algebra, necesario para entender los números negativos y positivos. En esta etapa el valor absoluto es visto como “la distancia desde cero” o como un “número sin signo”. A finales de la tercera etapa el valor absoluto es visto como un objeto matemático necesario para las demostraciones de convergencia y continuidad. Durante esta etapa el valor absoluto carece de una notación única para representarlo, por lo que no se formalizan sus propiedades. Finalmente en la cuarta etapa, el valor absoluto es visto como un instrumento de desarrollo del análisis complejo. El símbolo actual de valor absoluto (| |), fue introducido por Weierstrass en 1841, en su trabajo de la desigualdad de Cauchy, con la finalidad de expresar el modulo de una variable compleja y ciertos conceptos topológicos, pero este simbolismo no fue aceptado en la comunidad matemática sino hasta finales del siglo XIX. La formalización de sus propiedades y su definición formal como “función por partes” desempeñó un rol importante en el siglo XX en estudios de distancia en espacios métricos y estimación en la teoría de los cuerpos.

Luego, desde el enfoque ontosemiótico en didáctica de las matemáticas (EOS),Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007), realizaron una investigación con el objetivo de valorar la eficacia didáctica de las técnicas asociadas a los significados de la noción valor absoluto. Los autores analizaron diversos textos matemáticos e identificaron las diferentes significados de la noción valor absoluto entre ellos: el aritmético, métrico, vectorial, función máximo, función por partes y función compuesta, concluyendo que, a pesar de ser matemáticamente equivalentes, no lo son desde el punto de vista epistémico, debido a que no involucran los mismos objetos matemáticos, por lo tanto, el uso de estas definiciones van a condicionar las practicas operatorias y discursivas en la resolución de problemas. Además, ante la complejidad ontosemiótica encontrada, los autores se vieron en la necesidad de definir el holosignificado de la noción valor absoluto, con la finalidad de estructurar las distintas definiciones provenientes de diferentes sub-sistemas de prácticas relacionadas a diferentes contextos de uso.

Además, los investigadores, compararon los modelos “aritmético” y “función por partes” del valor absoluto, mediante un análisis implicativo y jerárquico. El análisis implicativo, consistió en establecer una cadena de implicaciones 2 a 2, es decir, determinar con un nivel de aproximación estadístico la tarea que permite asegurar la realización de otra tarea, de manera que, con un nivel de implicación del 95% se pudo establecer que los alumnos que tuvieron un desempeño “bueno” operan en su mayoría simbólicamente el valor absoluto de manera que, al resolver $|\sqrt{2}-2|$ dan como respuesta $2-\sqrt{2}$ y además comprendieron analítica y gráficamente la función $f(x)=|x+1|$. El análisis jerárquico, busca relacionar si haber respondido correctamente a un conjunto de preguntas conlleva la respuesta correcta a otro conjunto de preguntas, de manera que, a través del análisis de los datos experimentales, se concluyó que alumnos que contribuyen a las clases más significativas son los que realizan la tarea simbólica y que son capaces de aplicar de forma sistemática el modelo funcional. Estos resultados mostraron que los estudiantes que utilizan únicamente el modelo aritmético tienen dificultades para la resolución de algunas tareas; sin embargo, los estudiantes que emplean el modelo funcional son capaces de utilizar simbólicamente el valor absoluto y sistematizar el uso del modelo aritmético.

Es así, que los investigadores concluyen, que las dificultades cognitivas asociadas a la noción valor absoluto, sumado a la ausencia de una forma pertinente para su enseñanza y desarrollo por parte de las instituciones escolares, ha provocado que la enseñanza del valor absoluto sea de una manera técnica (como regla de quitar el signo menos) centrada en el modelo aritmético, constituyendo un obstáculo didáctico para el desarrollo del valor absoluto, lo que a nivel macro-didáctico implica que se debe “retirar” de manera temporal la noción valor absoluto hasta que se confeccione una transposición didáctica pertinente o bien hasta que los estudiantes inicien el estudio de funciones. Las implicaciones a nivel micro-didáctico, establecen que el modelo preponderante en la introducción de la noción de valor absoluto debería ser la de “función por partes”, apoyándose en una representación gráfica de la función en el plano cartesiano y trabajando las prácticas discursivas características de la teoría de funciones, y facilitando sus interacción con otros modelos de manera que el valor absoluto sea entendido como un sistema. En nuestro trabajo, los resultados obtenidos en esta investigación, son considerados al realizar el diseño de la secuencia didáctica que se planteará en ésta investigación para la enseñanza del valor absoluto.

Por otro lado, Sierpinska, Bobos & Pruncut (2011), desde la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) y el modelo del pensamiento teórico en matemáticas, realizaron un experimento de enseñanza del valor absoluto en inecuaciones bajo tres enfoques: teórico, procedimental y visual, esto con la finalidad de analizar las características del enfoque que favoreciera más el pensamiento teórico en estudiantes de primeros ciclos de nivel universitario. Ellos formalizaron la noción de valor absoluto con la definición de función por partes, sustentaron su elección, debido a que está definición es útil para la enseñanza de la técnica de solución llamada razonamiento por casos o RBC por sus siglas en ingles "*reasoning by cases*", y ésta era la técnica de solución que los investigadores habían seleccionado para los problemas propuestos. El enfoque teórico se basó en derivar lógica y analíticamente la técnica de solución RBC a partir de la definición de valor absoluto, en cambio bajo el enfoque procedimental, se le daría la definición, pero la técnica de solución RBC es presentado como una secuencia de pasos a seguir, y no se hace la conexión entre la definición y la técnica de solución. El enfoque visual se diferencia del teórico, en que la técnica de solución no se deriva analíticamente sino gráficamente, y el análisis lógico es sólo usado para validar los resultados obtenidos de manera visual. Se encontró, que los estudiantes a los cuales se les enseñaron bajo el enfoque visual, eran más propensos a desarrollar un pensamiento más reflexivo y sistemático en comparación que los otros grupos de estudiantes. Esta investigación resalta la importancia de la visualización en la comprensión del valor absoluto, por lo cual, en nuestra propuesta didáctica enfatizará la representación gráfica del valor absoluto en la resolución de problemas.

En referencia a las dificultades asociadas a la noción de valor absoluto, además de la investigación de Chiarugi, Fracazina y Furinghetti realizada en 1990, se tiene el trabajo de García (2014), donde identificó los errores, dificultades y obstáculos de alumnos y profesores de primer ciclo de una facultad de ingeniería de sistemas, hay que aclarar que esta investigación considera los errores y dificultades desde la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS), es decir, un error es una práctica matemática no válida por parte de los alumnos y una dificultad en los casos donde hay un menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea determinada, la noción de obstáculo es la misma que define Brousseau, es decir, un obstáculo es un conocimiento que al ser utilizado en otro contexto genera respuestas incorrectas y además dificulta el aprendizaje de otros conocimientos. Bajo esta perspectiva, las dificultades encontradas, en estudiantes y profesores encuestados son las siguientes: consideraron como falsas las siguientes afirmaciones: Si $x<0$, entonces $|-x|= -x$; si $x\geq 0$, entonces $|-x|=x$, por otro lado la mayoría de los estudiantes consideró como verdadera la siguiente afirmación: Si $x<0$, entonces $|-x|=x$ además, muchos estudiantes consideraron que $-x$ es un número menor a cero. Esta última dificultad se asociada a un obstáculo didáctico ya que, de acuerdo al investigador, se les ha enseñado a los alumnos, como norma matemática que los números negativos llevan un signo "–" delante de éste y al no tenerlo x, asumen que es positivo. En vista de los resultados encontrados, el autor sustentó que la razón de las dificultades de los alumnos se debía a que los profesores presentaban las mismas dificultades, por lo que el autor propuso una secuencia de tareas didácticas para profesores usando las dimensiones; epistémico, cognitivo y mediacional de los criterios de idoneidad del EOS, que buscan tratar los diversos significados o usos del valor absoluto. En el cuestionario que se diseño en esta investigación se considera una pregunta con la finalidad de conocer los significados que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto, además se realizó preguntas similares con la finalidad de que los estudiantes expresaran el valor absoluto en términos de una variable conociendo el signo de la variable.

Tomando como referencia el trabajo realizado por Gagatsis y Thomaidis en 1995, Gagatsis y Panaoura (2014), realizaron una investigación en estudiantes de nivel secundaria con la finalidad de conocer las concepciones que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto y cómo se relacionan estas concepciones con su rendimiento al resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Como parte de los resultados de su investigación, identificaron el obstáculo epistemológico que consiste en interpretar la noción de valor absoluto de un número como "el número sin signo", esta idea es considerada un obstáculo para la adquisición de la definición funcional de valor absoluto, el error asociado a este obstáculo, es que cuando se les pide resolver $|x+3| =2$ algunos estudiantes responden que $x+3= 2$ ó $x-3= -2$. La noción de valor absoluto de un número como "el número sin signo" también se considera un obstáculo para la correcta representación simbólica del valor absoluto, el error asociado a este obstáculo es que algunos estudiantes consideraron que $|x|$ es igual a $\pm x$, también cuando resolvieron la siguiente inecuación $|x+2|<3$, algunos respondieron que $x-2< \pm 3$.

Los investigadores también identificaron el obstáculo didáctico, el cual consiste en la creencia de que el valor absoluto es sólo "un símbolo que se debe eliminado mecánicamente", debido a que en la enseñanza del valor absoluto, el símbolo es inicialmente introducido, pero subsecuentemente en el contexto de resolver ecuaciones o inecuaciones el símbolo es rápidamente eliminado con la finalidad de obtener ecuaciones e inecuaciones sin valor absoluto. Este error se presenta comúnmente en preguntas con "ecuaciones imposibles" como por ejemplo $||x-5|-12|=-5$, la mayoría de estudiantes resolvió mecánicamente la ecuación sin verificar la solución, también ante la pregunta de resolver $|x+2|+|x+6|=0$, la respuesta común fue $x= -2$ ó $x= -6$.

Finalmente, los investigadores concluyen que el obstáculo epistemológico asociado a la concepción del valor absoluto de un número como "el número sin signo" corresponde a la tercera etapa, del desarrollo histórico del valor absoluto, siendo un indicativo de que los estudiantes no han adquirido un entendimiento completo de esta noción. Además, concluyen que el obstáculo didáctico que consiste en la creencia de que el "valor absoluto es sólo un símbolo que debe ser eliminado", se ha convertido en una regla del contrato didáctico, lo que da como resultado, que los alumnos ante problemas de valor absoluto, actúan de manera mecánica.

En esta investigación se tomará como punto de partida el obstáculo didáctico identificado con la finalidad de evitar la presencia de este obstáculo en la secuencia que se diseñará y se evaluará los resultados considerando algunas preguntas que han trabajado estos autores y que han evidenciado la presencia de errores relacionados a los obstáculos identificados.

1.2 Justificación

Las investigaciones sobre el valor absoluto y los errores, dificultades y obstáculos relacionados a su enseñanza y aprendizaje, dan muestra de la importancia de la investigación en torno a esta noción. Entre ellas, se tiene a Chiarugi et al. (1990), quienes realizaron su investigación con estudiantes de secundaria y primer año de nivel universitario en Italia; García (2014), por su parte realizó su investigación con estudiantes universitarios en Perú y Gagatsis y Panaoura (2014) realizaron su investigación en alumnos de nivel secundaria de la República de Chipre. Los errores reportados en estas investigaciones coincidieron en muchos casos, a pesar de que se realizaron en diferentes países y en diferentes tiempos. Esto se explica, con lo reportado por Wilhelmi et al. (2007), quienes concluyeron que la instrucción fundamentada en el modelo aritmético, constituye un obstáculo didáctico para el desarrollo de la noción valor absoluto, debido a que éste modelo es el resultado de una transposición didáctica que hasta el momento no se ha podido superar, evidencia de ello, son los errores reportados por estas investigaciones.

Cabe aclarar, que Chiarugi et al. (1990) no hacen distinción entre error y dificultad, a diferencia de García (2014) que hace distinción entre error, dificultad de acuerdo a la definición del EOS y obstáculo de acuerdo a la definición dada por Brousseau. Para nuestra investigación es importante ésta distinción ya que se buscará evitar los obstáculos didácticos asociados al valor absoluto.

Gagatsis y Panaoura (2014), además, presentaron alguno de estos errores como evidencia de obstáculos epistemológicos (relacionados a la evolución histórica de la noción valor absoluto) y didácticos (relacionados con procesos de transposición didáctica). Los errores asociados al obstáculo epistemológico de la concepción de la noción de valor absoluto de un número como “un número sin signo”, y los errores asociados al obstáculo didáctico de creer que el valor absoluto es sólo un símbolo que debe ser eliminado fueron los que presentaron mayor ocurrencia.

Además, Chiarugi et al. (1990), señalan que la enseñanza del valor absoluto, en los alumnos de nivel secundaria en Italia se realiza en el contexto aritmético, donde esta noción es percibida por los estudiantes como un instrumento que elimina el signo antes del número dado, en ese mismo sentido Wilhelmi et al. (2007), realizaron su investigación en una institución donde la introducción del valor absoluto era de acuerdo al modelo aritmético y sostienen que, el modelo aritmético constituye un conocimiento resultante de una transposición didáctica que restringe al valor absoluto a un simple juego de símbolos, por lo que sugieren la expulsión “temporal” de esta noción de la estructura curricular actual, hasta que se confeccione una transposición didáctica pertinente. Es así, que en ambas investigaciones los autores, coinciden en la necesidad de diseñar un sistema adecuado para la introducción de la noción de valor absoluto, Adicionalmente, Wilhelmi et al. (2007), sostienen que, en este nuevo sistema el modelo preponderante debería ser el funcional.

Sobre la enseñanza del valor absoluto en la Educación Regular Básica del Perú, se tiene que, de acuerdo al Programa Curricular de Educación Secundaria (Ministerio de Educación, 2016b), el estudio por primera vez del valor absoluto está contemplado en el ciclo VI, segundo grado de secundaria, dentro de la competencia "Resuelve problemas de cantidad" donde se espera que el alumno logre el siguiente desempeño "Plantea y compara afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con números racionales" donde uno de los indicadores a evaluar es "Justifica que dos números racionales son simétricos cuando tienen el mismo valor absoluto". La propuesta curricular peruana, para la introducción del valor absoluto se realiza en el contexto métrico y aritmético, no hay una reflexión funcional y tampoco una visión gráfica en el plano que favorezca la manipulación algebraica del valor absoluto.

Las investigaciones anteriores muestran que la enseñanza del valor absoluto desde un contexto aritmético constituye un obstáculo didáctico, en ese sentido en esta investigaciones proponemos una situación didáctica para la enseñanza del valor absoluto en el contexto funcional, a manera de evitar el obstáculo didáctico que consiste en entender al valor absoluto como "un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente", y surge la necesidad de analizar los efectos de la situación didáctica en el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

1.3 Problema de Investigación

A partir de lo descrito y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en investigaciones pasadas, surge la necesidad de responder a la siguiente pregunta:

¿La enseñanza del valor absoluto como función, favorece el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto?

1.4 Objetivo General

Analizar los efectos de una situación didáctica, para la enseñanza del valor absoluto como función, en el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

1.5 Objetivos Específicos.

- Identificar las interacciones que se generan en la enseñanza del valor absoluto como función.
- Evaluar el efecto de la situación didáctica en el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

En el siguiente capítulo describiremos los aspectos teóricos y metodológicos que seguirá esta investigación.

CAPÍTULO II: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En esta sección, se presenta los fundamentos de la Teoría de la Situaciones Didácticas (TSD), así como los conceptos importantes que se maneja en la teoría y que guiarán esta investigación. También se describe las características que hacen que esta investigación sea de tipo mixta, se describe la ingeniería didáctica como el método de investigación que se empleará en la investigación justificando su elección.

2.1 Teoría de Situaciones Didácticas

En esta investigación se tomará como marco teórico de referencia a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), conocida como una de las teorías fundamentales de la didáctica de las matemáticas desarrollada por Guy Brousseau desde 1986.

2.1.1 Fundamentos de la TSD

Según Brousseau (2007), la enseñanza es el conjunto de interacciones que hay entre el sistema educativo y el alumno en referencia a la transmisión de un saber. En la Figura 1, se muestra la representación de la concepción de la enseñanza en la que el profesor organiza el saber a través de mensajes de manera que el alumno tome aquella información que debe ser adquirida como conocimiento.

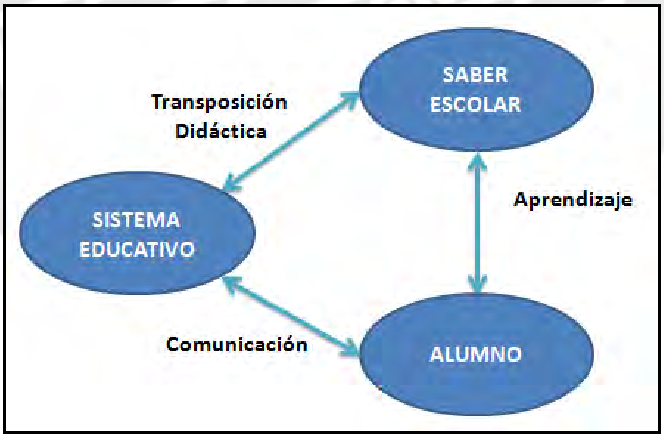


Figura 1. Concepción del aprendizaje en la TSD

Fuente: Brousseau (2007, p.13)

De acuerdo a Brousseau (1986), el aprendizaje bajo esta teoría sigue una perspectiva piagetana, es decir, el alumno aprende cuando se adapta a un medio de contradicciones, dificultades y desequilibrios. Esta teoría también sigue una perspectiva constructivista, es decir, hay situaciones que permiten al alumno construir por sí mismo un nuevo conocimiento, proceso llamado génesis artificial (Brousseau, 2007).

El supuesto principal de esta teoría definida por Brousseau (2007) es que todo conocimiento matemático tiene al menos una situación fundamental que permite abordarlo a través de un conjunto de variables didácticas.

> Suponemos que cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás. Por otra parte, conjeturamos que el conjunto de situaciones que caracterizan una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas *fundamentales*, a través de un juego de variantes, variables y cotas sobre estas variables. (Brousseau, 2007, p.32)

2.1.2 Aspectos Teóricos de la TSD

Interacciones

Involucra el conjunto de respuestas que puede manifestar un sujeto frente a un medio determinado. Respuestas en términos de decisiones, acciones y estrategias de solución. "Las interacciones de un sujeto -sea profesor o alumno- en los diferentes niveles de un medio son distintas: toma decisiones (según reglas, estrategias, conocimientos), actúa en función de las informaciones que recibe e interpreta, etc." (Brousseau, 2007, p.53).

La TSD caracteriza el proceso de aprendizaje a través de una serie de situaciones, fases o momentos, los cuales se detalla a continuación:

Situación Didáctica

Es el conjunto de interacciones que se dan entre los alumnos y el medio y entre los alumnos y el profesor, con la finalidad de que el alumno adquiera un saber determinado en una institución. El objetivo principal de la TSD es estudiar la situación didáctica, la cual se define como:

> El conjunto de interacciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos en un cierto medio (conteniendo eventualmente instrumentos u objetos) en un sistema educativo (o profesor) para que los alumnos adquieran un saber constituido o en constitución (Brousseau, 1978, citado por Almouloud, 2016 p.114, traducción propia).

La situación problema hace que el docente se involucre en el sistema de interacciones. "El problema elegido por el docente lo involucra a él mismo con el sistema de interacciones del alumno con su medio. Ese juego más amplio es la situación didáctica" (Brousseau, 2007, p.32).

En esta investigación el objetivo es analizar la situación didáctica, es decir las interacciones que surgirán cuando se realice la enseñanza del valor absoluto como función.

Devolución

La devolución es el proceso mediante el cual el profesor "devuelve" la responsabilidad de un problema al alumno, de manera que el alumno entre nuevamente a la fase adidáctica. "La devolución es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta el mismo las consecuencias de esta transferencia" (Brousseau, 2007, p.87). Este proceso antecede a las fases de acción, formulación y validación.

En la secuencia didáctica que se desarrollará en esta investigación debe estar presente este proceso, para lograr que el alumno logre construir el conocimiento por sí mismo, haciendo responsable de la resolución de las preguntas diseñadas en la secuencia cada vez que éste intente trasladar la responsabilidad al profesor, en el análisis preliminar, se preverá aquellas actividades o preguntas, que potencialmente hagan que el alumno recurra al profesor, y se definirá las acciones que debe tomar el profesor para realizar el proceso de devolución

Fase Adidáctica

Esta fase se caracteriza porque no se hace explícito el saber que se desea enseñar, es una situación planificada y construida por el profesor con la finalidad de crear las condiciones para la génesis de este saber. Brousseau (2007) define a la situación adidáctica de la siguiente manera:

> Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe que el problema fue elegido para hacer que adquiera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presentes razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, porque no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. (p.31, traducción propia)

Según, Almouloud (2016), una situación adidáctica debe tener las siguientes características:

- El problema matemático debe permitir que el alumno, hable, actúe y reflexione por iniciativa propia.
- El problema matemático debe permitir que el alumno adquiera nuevos conocimientos que puedan ser justificados dentro de la misma situación sin recurrir a razones didácticas.
- El profesor asume el rol de mediador y fomenta las condiciones para que el alumno sea responsable de la construcción de su propio conocimiento.

Almouloud (2016), señala que hay tres tipos de dialécticas en la fase adidáctica:

- **Dialéctica acción**

  Esta es la fase donde el alumno empieza a actuar frente a un problema o tarea, de manera que utiliza el conocimiento como una herramienta que le permite hacer conjeturas acerca de las estrategias para la solución de un problema sin necesidad de justificar sus acciones. Respecto a esta fase Almouloud (2007), afirma lo siguiente:

  > Una buena situación de acción no es solamente una situación de manipulación libre o una situación que exija una lista de instrucciones para su desarrollo. Debe permitir al estudiante juzgar el resultado de su acción y modificarlo si es necesario, sin la intervención del maestro, gracias a la retro alimentación del medio. (p.24, traducción propia)

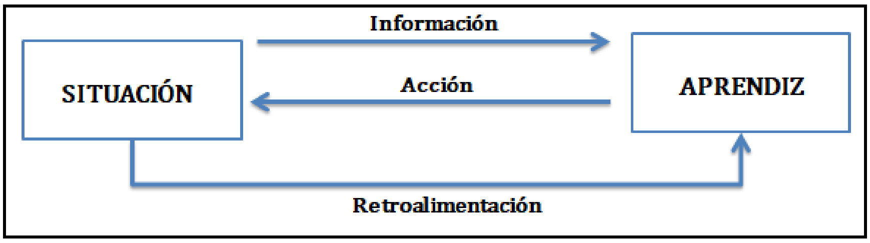


Figura 2. Esquema de una situación de acción
Fuente: Almouloud (2007, p.37, traducción propia)

- **Dialéctica de formulación**

Es la fase donde el alumno se ve en la necesidad de intercambiar información acerca de las estrategias de resolución con sus compañeros o profesor, sin necesidad de justificar sus afirmaciones o conjeturas. Almouloud (2007), menciona lo siguiente:

> En esta fase de una situación adidáctica, el alumno intercambia información con una o varias personas, que serán los emisores o receptores, intercambiando mensajes escritos u orales. Estos mensajes pueden estar dirigidos en lenguaje natural o matemático, según cada emisor. Como resultado esa dialéctica permite crear un modelo explícito que puede ser formulado con signos y reglas comunes, ya conocidas o nuevas. Es el momento en que el alumno o grupo de alumnos explicita, por escrito u oralmente, las herramientas que utiliza en la solución encontrada. (p.38, traducción propia)

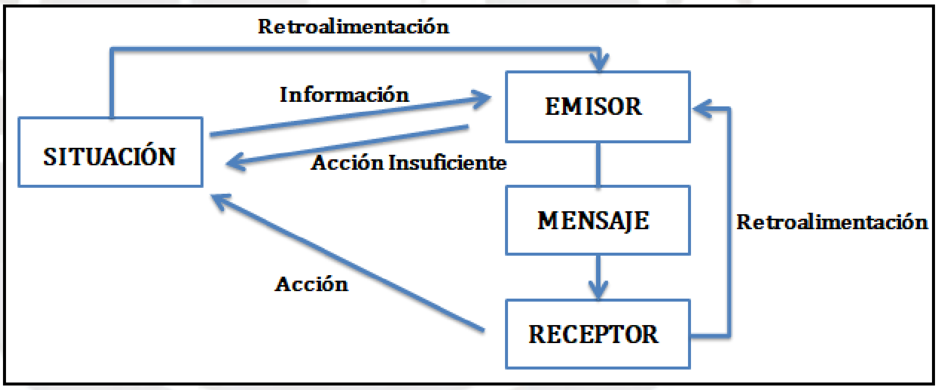


Figura 3. Esquema de una situación de formulación
Fuente: Almouloud (2007, p.38, traducción propia)

En esta investigación, durante la secuencia didáctica, se propondrá momentos para trabajo en parejas con la finalidad de que el alumno tenga la necesidad de intercambiar información respecto de estrategias de solución o respuestas a ciertas preguntas.

- **Dialéctica de validación**

En esta fase el alumno se ve obligado por el medio a argumentar, justificar y demostrar sus afirmaciones respecto de la solución de un problema. Al respecto, Almouloud (2007), señala lo siguiente:

> Es la etapa en la cual el estudiante debe mostrar la validez del modelo creado por él, sometiendo el mensaje matemático (modelo de situación) al juicio de un interlocutor. De un lado, el emisor debe justificar la exactitud y pertinencia de su modelo y fomentar si es posible,

una validación semántico o sintáctica. El receptor por su parte, puede pedir más explicaciones o rechazar los mensajes que no entiende o con los que desacuerda, justificando su rechazo. Así la teoría funciona en los debates científicos y en las discusiones entre los alumnos, como el medio para establecer o rechazar pruebas. (p.39, traducción propia)

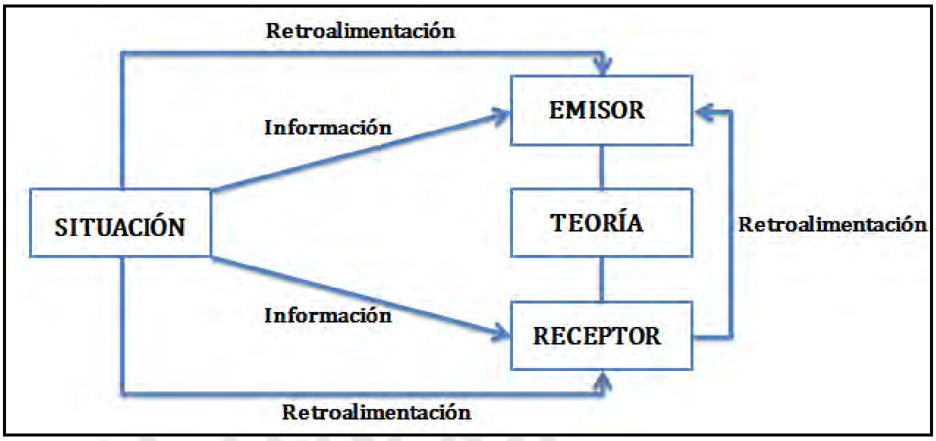


Figura 4. Esquema de una situación de validación
Fuente: Almouloud (2007, p.39, traducción propia)

En esta investigación, durante la secuencia didáctica, se propondrá preguntas en las que el alumno tendrá la necesidad de justificar y argumentar sus respuestas.

Fase de Institucionalización

Esta es la fase donde el profesor interviene, dando a conocer el conocimiento matemático que ha surgido durante la fase adidáctica, de esta manera se hace explícito el saber, así como sus características, de manera que el alumno pueda identificar a este conocimiento como un recurso, que en el futuro, le permitirá resolver otros problemas.

Brousseau (2007), define a esta fase de la siguiente manera:

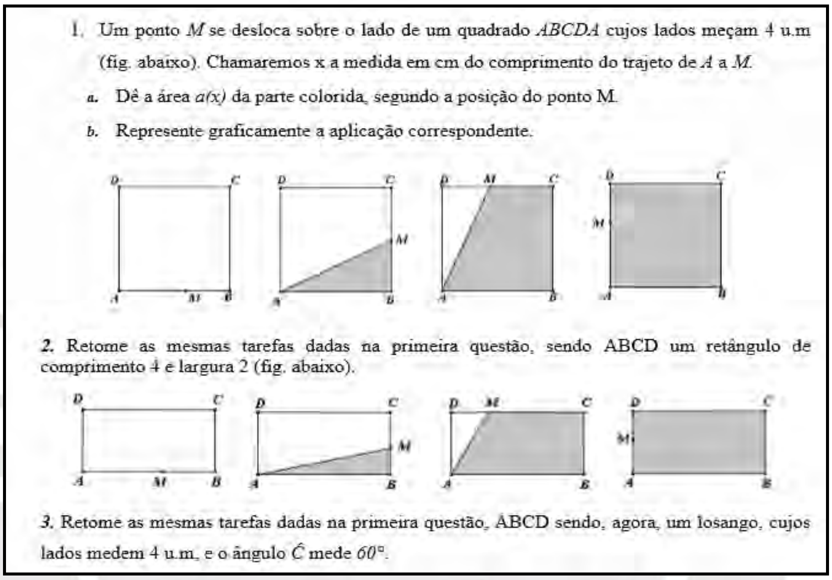
> Los docentes realmente estaban obligados “a hacer algo”: debían dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, brindarles un estado a los eventos de la clase en cuanto resultados de los alumnos y resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones (culturales o del programa), indicar cuales podían ser reutilizadas nuevamente. (p.28).

Situación problema

De acuerdo a Almouloud (2016), la situación problema es parte de la fase adidáctica y está compuesta por un conjunto de preguntas abiertas y/o cerradas formuladas en un contexto más o menos matemático, cuya finalidad es el empleo implícito y luego explícito de un nuevo objeto matemático. Es importante que los alumnos entiendan los datos del problema y que se puedan enfrentar a ellos con los conocimientos que poseen, de manera que en la situación diseñada este inmerso el objeto matemático que se quiere enseñar, y que el alumno se dé cuenta que sus conocimientos son insuficientes para la resolución inmediata del problema, pero que el conocimiento que está inmerso en la situación es el que permitirá resolver el problema.

La situación problema que utilizaremos en esta investigación se llevará a cabo dentro de un contexto matemático, sustentamos esta elección debido a que como se detalló en el capítulo de antecedentes, el valor absoluto no surgió como necesidad para resolver un problema extra-matemático, por el contrario surgió dentro de la matemática, como un necesidad de prevenir una operación imposible al expresar la diferencia entre dos cantidades no conocidas, ya que en el año 1591 no se habían definido aún los números negativos (Gagatsis y Panaoura, 1995).

En la siguiente figura, se muestra un ejemplo de una situación problema construida para la introducción del concepto función por partes a partir del contexto de la geometría plana. Como detalla Almouloud (2016), el contexto geométrico escogido fue el de área de figuras planas.



1. Um ponto M se desloca sobre o lado de um quadrado $ABCDA$ cujos lados meçam 4 u.m (fig. abaixo). Chamaremos x a medida em cm do comprimento do trajeto de A a M.
   a. Dê a área $a(x)$ da parte colorida, segundo a posição do ponto M.
   b. Represente graficamente a aplicação correspondente.

2. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, sendo ABCD um retângulo de comprimento 4 e largura 2 (fig. abaixo).

3. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, ABCD sendo, agora, um losango, cujos lados medem 4 u.m. e o ângulo $\hat{C}$ mede $60°$.

Figura 5. Situación problema en un contexto de la geometría plana

Fuente: Almouloud (2016, p.135)

El autor, también señala la importancia de que los alumnos tengan familiaridad con el contexto seleccionado. En esta investigación, la situación problema surgirá dentro del contexto geométrico, relacionado al cálculo de áreas de figuras planas, este contexto es familiar para los alumnos de tercer grado de secundaria ya que de acuerdo al Currículo Nacional de la Educación Básica del Ministerio de Educación (2016), una de las competencias que debe tener un alumno en el nivel VI correspondiente a primer y segundo grado de secundaria es seleccionar, combinar y adaptar variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar el área de formas compuestas, entre ellas áreas de rectángulos y triángulos. También, será necesario que el alumno esté familiarizado con las terminología de funciones, como es regla de correspondencia, dominio y rango, al respecto el Currículo Nacional de la Educación Básica del Ministerio de Educación (2016a), señala que en el nivel VI correspondiente a tercer, cuarto y quinto grado de secundaria, los alumnos deben desarrollar la capacidad de diferenciar entre la función lineal, cuadrática y exponencial, interpretando información usando lenguaje matemático y gráfico.

2.1.3 Conceptos de la TSD

Conocimiento y Saber

Desde la teoría de situaciones didácticas, se hace una diferencia entre lo que se entiende por conocimiento y saber. "La diferencia entre un saber y un conocimiento, se basa principalmente en el estado cultural de ambos: un saber es un conocimiento institucionalizado" (Brousseau, 1996, p.97). Los conocimientos, son las representaciones, los esquemas y el "modo de hacer" que utiliza un alumno ante una determinada exigencia social y no necesariamente son explícitos; por otro lado, el saber es el producto cultural de una institución, cuando un conocimiento se identifica, analiza y organiza, se convierte en un saber. "Los saberes son organizados en teorías, demostraciones y definiciones bien determinadas, son así la forma cultural más acabada" (Brousseau, 1996, p.97).

Medio

Es el sistema autónomo y contradictorio que forma parte del entorno del alumno. El medio no sólo es el conjunto material que rodea al alumno (problema, ficha de trabajo, etc.) sino también las reglas de interacción establecidas implícita o explícitamente.

> Son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que se necesita modelizar, pues, es el medio. Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas. ¿Qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimiento determinado? ¿Qué aventura -sucesión de juegos- puede llevarlo a concebirlo o a adoptarlo? Desde este enfoque, se describe al sujeto como si fuera un jugador de ajedrez que actúa teniendo en cuenta solo sus conocimientos y el estado del juego. ¿Qué información, que sanción pertinente debe recibir el sujeto por parte del medio para orientar sus elecciones y comprometer tal conocimiento en lugar de tal otro? Estas preguntas conducen, pues, a considerar el medio como un sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es de este del que conviene hacer un modelo, en cuanto especie de autómata. (Brousseau, 2007, p.15)

Variables didácticas

Son aquellas variables que pueden ser seleccionadas por el profesor con la finalidad de variar la situación didáctica, con la intención de lograr el aprendizaje de un conocimiento matemático. "Llamamos variable cognitiva a una variable de la situación tal que por la elección de valores diferentes puede provocar cambios en el conocimiento óptimo. Entre las variables cognitivas, las variables didácticas son las que puede fijar el docente" (Brousseau, 2007, p.32).

De esta manera la variable didáctica, de acuerdo a los valores que toma, modifica el procedimiento de solución o la respuesta a una pregunta en el alumno al resolver un problema.

> Una variable didáctica es una variable cognitiva que puede ser modificada por el profesor y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución (por el costo, validez, complejidad). Dicho de otra forma, una variable didáctica de un problema o situación es una variable cuyos valores pueden ser alterados por el profesor y cuyas modificaciones pueden provocar sensiblemente el comportamiento de los alumnos en términos de aprendizaje, así como provocar procedimientos o tipos de respuesta distintos. (Almouloud, 2016, p.121).

De acuerdo a Almouloud (2016), durante la construcción, análisis y experimentación de las situaciones-problema, se distinguen dos tipos de variables didácticas:

a) Macro Didácticas o Globales. Relacionadas a la organización global de la secuencia didáctica. Estas variables están relacionadas a la dimensión epistémica, cognitiva y didáctica. Ejemplo de estas variables son las siguientes:

- Marco teórico de referencia
- Ambiente de realización
- Organización de los alumnos
- Formato de entrega de las actividades de los alumnos

b) Micro Didácticas o Locales. Relacionadas a la organización local de la secuencia, es decir, la organización de una sesión o de una fase de la experimentación. En el siguiente cuadro, se muestra un ejemplo de las variables micro-didácticas que utilizó Almouloud (2016) para realizar la introducción del concepto función por partes.

Tabla 1. Variables didácticas para la introducción del concepto de función por partes (Figura 5)

Variable	Valor
Posición del punto M	AMB ABM ABCM ABCDM
Medida de los lados de los cuadriláteros	3 Unidades 4 Unidades
Forma del cuadrilátero ABCD	Cuadrado Rectángulo Rombo

Fuente: Almouloud (2016, p.136,137)

Contrato didáctico

Es la expectativa que tanto el alumno como el profesor tiene el uno del otro, con respecto a un saber matemático.

> Cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de 1o que el otro espera de él y de 1o que cada uno piensa de lo que el otro piensa y esta idea crea las posibilidades de intervención, de devolución de la parte adidáctica de las situaciones y de la institucionalización. (Brousseau, 2007, p.70)

Brousseau (2007) da un ejemplo de los efectos del contrato didáctico ante la famosa pregunta de la edad del capitán, en la que los alumnos dan una respuesta numérica a pesar de que no existen los datos suficientes que permiten dar respuesta adecuada, al entrevistar a los alumnos ellos dijeron que respondieron porque la maestra lo pedía. Es decir, los alumnos tienen la expectativa de que el profesor siempre quiere un valor numérico como respuesta a alguna pregunta.

Al respecto, conviene que se produzca la ruptura del contrato didáctico seguido de una adecuada devolución, para que se realice el aprendizaje del objeto matemático en cuestión. En esta investigación, se va a plantear un situación con la finalidad de romper esa expectativa que tienen los alumnos, proponiendo preguntas que no van a tener una respuesta numérica, aquellas operaciones con valor absoluto que no tienen solución porque no son matemáticamente posibles, esto en relación al obstáculo didáctico de creer que el valor absoluto es sólo un símbolo que se debe eliminar mecánicamente.

Obstáculos

Los obstáculos son conocimientos validos en un cierto ámbito de aplicación, sin embargo en otro contexto ese obstáculo resulta ser fuente de error y contradicción. De acuerdo a Brousseau (2007), un obstáculo es un conocimiento debido a que se ha utilizado de manera regular en un conjunto de situaciones, este conocimiento produce resultados correctos en determinados ámbitos, pero en un ámbito nuevo este conocimiento se muestra falso.

> Los obstáculos se manifiestan a través de errores, pero esos errores en un mismo sujeto están unidos entre sí por una fuente en común: una manera de conocer, una concepción característica coherente aunque no correcta con conocimiento anterior, que tuvo éxito en todo un dominio de acción. (Brousseau, 2007, p.45)

Brousseau (2007) señala, que el obstáculo no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento, por el contrario opone resistencia a su adquisición, subsiste en estado latente de forma imprevista, en especial en su ámbito anterior, cuando las circunstancias lo permiten.

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos de acuerdo a su origen de la siguiente manera:

a) Obstáculo ontogénico

Son aquellos que se originan por las limitaciones propias del sujeto en algún momento de su desarrollo, y que por lo general son de naturaleza neurofisiológica.

b) Obstáculo didáctico

Son los que se originan por las por la elección de enseñanza de un determinado conocimiento por parte de un proyecto o institución educativa.

c) Obstáculo epistemológico

Son los que se originan por el mismo conocimiento, y están relacionados a su desarrollo histórico.

2.2 Metodología

Nuestra investigación seguirá una metodología mixta debido a que tiene aspectos que son característicos de una investigación cualitativa y aspectos que son característicos de una investigación cuantitativa.

Decimos que nuestra investigación tiene aspectos de una metodología cualitativa, debido a que satisface conceptos fundamentales característicos de este tipo de investigación, descrito por Martínez (2006), entre ellos se menciona los siguientes:

- Los objetivos determinan el método a seguir aunque no de modo estricto. Los objetivos generales y específicos de esta investigación se centran en diseñar, aplicar y analizar una secuencia didáctica, y esto fue determinante para escoger aspectos del método de ingeniería didáctica en nuestra investigación.

- El investigador identifica un determinado fenómeno a través de la observación de interacciones de las variables que intervienes en dicho fenómeno. En esta investigación se diseñará y aplicará una secuencia didáctica, mediante la aplicación de variables didácticas que serán modificadas para provocar un cambio de estrategia con el fin de llegar al saber matemático deseado.

- Debe ser una investigación dialéctica y sistémica. Esta investigación es dialéctica porque se realizará una secuencia didáctica en base a la teoría de situaciones didácticas, es decir, se realizará el análisis en base a un marco teórico referencial con la finalidad de interpretar un fenómeno en estudio, y es sistémico porque analizará las interacciones del sujeto con el medio.

Decimos que nuestra investigación tiene aspectos de una metodología experimental, debido a que cumple algunos aspectos característicos de este tipo de investigación, tal como lo detalla Sierra (2011):

- En palabras de Bunge (1969) "Experimento es aquella clase de experiencia científica en la cual se provoca deliberadamente algún cambio y se observa e interpreta el resultado con alguna finalidad cognoscitiva". En nuestra investigación se aplicará un mismo cuestionario antes y después de aplicar la secuencia de actividades en un grupo de estudiantes, con la finalidad de comparar los resultados y observar si hay un efecto en las respuestas y/o tipos de errores que presentan los estudiantes debido a la secuencia de actividades.

- En análisis de los resultados indicará si existen diferencias y si estas diferencias son estadísticamente significativas. En esta investigación, para interpretar los resultados de los cuestionarios realizaremos un análisis estadístico implicativo utilizando el software CHIC. "éste método se utiliza en estudios de reglas de asociación con métrica probabilista, cuyos índices de asociación se determinan en base a sus respectivas probabilidades, calculadas según las distribuciones Binomial o Poisson, de acuerdo con el número de sujetos analizados" (Souza, 2016, p.29)

2.3 Método de Investigación: Ingeniería Didáctica

De acuerdo a Artigue, Douady & Moreno (1995), la ingeniería didáctica, es el método de investigación que se basa en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias didácticas en clase. El nivel micro-ingeniería permite evaluar un fenómeno de manera local, cuyo proceso de validación es interno, basado en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. El método de investigación que se empleará en esta investigación sigue principios de la ingeniería didáctica, debido a que permite desarrollar el diseño, aplicación, y análisis de las realizaciones didácticas en el aula y además porque permite la validación, es decir analizar lo que se esperaba del alumno en clase versus lo que realmente se produjo durante el desarrollo de la clase.

2.3.1 Fases de la Ingeniería Didáctica

Análisis Preliminar

Según Artigue et al. (1995), esta fase incluye: el análisis epistemológico de los contenidos, el análisis de las concepciones de los estudiantes acerca del objeto en estudio, así como las dificultades y obstáculos asociados, y el análisis de las restricciones de campo donde se realizará la situación didáctica. Este análisis, se realiza en tres dimensiones:

- Epistemológica. Hace referencia a las características del saber en cuestión, incluye su desarrollo histórico y los procesos de transposición didáctica.
- Cognitiva. Hace referencia a las características cognitivas de los estudiantes a los cuales se dirige la enseñanza, incluye el análisis de las concepciones de los estudiantes, así como de las dificultades y obstáculos que presentan en relación al objeto en estudio.
- Didáctica. Hace referencia a las características del sistema de enseñanza del objeto en estudio en las instituciones de enseñanza. Incluye análisis de libros y de las propuestas curriculares.

Concepción y Análisis a Priori

Considerando la información obtenida en la fase anterior, el investigador establece las variables didácticas que considera pertinentes con relación al problema en estudio. Artigue et al. (1995), establece dos tipos de variables:

- Variables Macro-didácticas o globales. Asociadas a la organización global de la ingeniería.
- Variables Micro-didácticas o locales. Asociadas a la organización de una secuencia

El objetivo de ésta fase es prever que las variables seleccionadas permitirán controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado, los cuales luego serán validados en la cuarta fase. De manera que el análisis a priori está compuesto de una parte descriptiva y otra predictiva, que incluyen las siguientes acciones:

- Describir las variables micro-didácticas y las características de la situación didáctica.
- Analizar qué podría están en juego, en términos de las posibilidades de acción, formulación y validación que el alumno tendrá durante la situación.
- Prever los posibles comportamientos de los estudiantes, en términos de respuestas y/o dificultades que presentará el estudiante durante la situación.

Experimentación

Artigue et al. (1995), menciona que durante esta fase se ejecuta la situación diseñada y se recogen los datos que darán cuenta de los fenómenos identificados en el análisis a priori.

Análisis a Posteriori y Validación

Artigue et al. (1995), señala que esta fase se caracteriza por la recolección de toda la información obtenida en la fase anterior, en términos de las observaciones realizadas de la secuencia de enseñanza y de las producciones de los estudiantes. Esta fase incluye también, la confrontación del análisis a priori y el posteriori.

2.4 Análisis Estadístico Implicativo (ASI)

El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) es un método de análisis que ha sido desarrollado por Regis Gras y sus colaboradores desde 1979. De acuerdo a Almouloud (2008), esta herramienta estadística fue creada con la finalidad de evidenciar la dinámica de los comportamientos de alumnos o profesores en situaciones de resolución de problemas. “El análisis implicativo, como todos los métodos de análisis estadístico de datos multidimensionales, permite visualizar, organizar, construir modelos y explicar fenómenos asociados a los datos” (Almouloud, 2008, p.304).

> Los resultados del cuestionario analizado a la luz del ASI, nos permite inferir una alternativa metodológica para abordar la educación financiera, identificando potenciales elementos conceptuales y procedimentales, permitiendo la concepción de situaciones problemas. Es decir, por medio del análisis realizado buscamos identificar elementos que permitan construir una secuencia didáctica de forma que los alumnos puedan desarrollar las habilidades y competencias necesarias para la educación financiera. (Coutinho, Almouloud & Souza, 2017, p.2).

CHIC (*Classificação Hierárquica, Implícativa e Coesitiva*)

El CHIC es un software desarrollado inicialmente por Regis Gras en1985, perfeccionado por Saddo Almouloud en 1992, y actualizado por Raphael Couturier desde el año 2008. Este software, es una herramienta estadística que permite la aplicación del método ASI. De acuerdo a Couturier (2009), la función principal de este software es extraer reglas de asociación entre variables a partir de un conjunto de datos.

> "ASI, es un método de análisis no simétrico de datos, el que permite, a partir de un conjunto de datos que interrelaciona una población de sujetos u objetos con un conjunto de variables, la extracción y estructuración del conocimiento en forma de normas y reglas generalizadas y, a partir de la contingencia de estas reglas, la explicación y en consecuencia una determinada previsión en distintas ramas del saber". (Zamora, Gregori & Orús, 2009, p. 77)

El CHIC, permite organizar las implicaciones en forma de un árbol jerárquico orientado (grafo implicativo), y también permite obtener un árbol de similaridad (no orientado) basado en la semejanza de las variables.

De acuerdo a Couturier (2009), luego que el software CHIC calcula el conjunto de todas las reglas en función de los parámetros elegidos, se puede construir un árbol a partir de esas reglas, a cada regla se denominará clase, e incorpora dos variables en su forma simple. En cada nivel de clasificación CHIC selecciona la clase que tiene mayor intensidad (de similaridad o cohesión).

> En cada nivel de la clasificación, CHIC elige la clase que posee la mayor intensidad (de similaridad o implicación). A continuación, en cada etapa, CHIC calcula un conjunto de nuevas clases a partir de las clases presentes en la jerarquía. Para crear una nueva clase, se une una clase existente, bien con una variable que no ha sido incorporada hasta el momento, bien con alguna otra clase de la jerarquía. Sin embargo, cada par de variables presentes en la agregación de dos clases debe tener una intensidad válida. Por ejemplo, la formación de la clase ((a, b), c) requiere que las clases (a, c) y (b, c) tengan un sentido según el método de cálculo elegido (similaridad o implicación). La clase ((a, b), c) representa la regla $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ en el análisis implicativo y, con el análisis de similaridades, representa el hecho de que a y b sean similares y que esta clase es similar a c (Couturier, 2009, p.69)

¿Porqué utilizar CHIC?

De acuerdo a Montes y Ursini (2013), el análisis estadístico implicativo tiene el propósito de responder la siguiente pregunta ¿Si un sujeto presenta cierta característica, tiene también alguna otra?, es decir, permite encontrar y resaltar algunas tendencias en las características de los sujetos que se estudia.

> La mayor riqueza de utilizar el análisis implicativo en el estudiante o un grupo de estudiantes, es que los argumentos para decir que la actitud que tiene un estudiante o un grupo de estudiantes hacia las matemáticas, no provienen de una interpretación subjetiva del que analiza, sino de una interpretación basada en un método estadístico implicativo (Montes y Ursini, 2013, p.247).

En ese sentido, la interpretación del análisis implicativo, complementará los resultados que se obtendrán mediante la aplicación de la ingeniería didáctica.

En nuestra investigación, aplicaremos este análisis estadístico en dos etapas. Primero, antes de aplicar la secuencia didáctica, con la finalidad de:

- Identificar el tipo de comportamiento que presentan los alumnos, en términos de errores e implicancias entre tipos de errores, cuando trabajan ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, desde el contexto aritmético.
- Extraer elementos necesarios que nos permitan diseñar la secuencia de actividades para enseñar el valor absoluto desde el contexto funcional.

Segundo, después de aplicar la secuencia, con la finalidad de:

- Identificar el tipo de comportamientos que presentan los alumnos, en términos de errores e implicancias entre tipos de errores, cuando trabajan ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, desde el contexto funcional.
- Complementar el análisis a posteriori.

En la siguiente figura se muestra una representación de la articulación entre el análisis estadístico implicativo y la ingeniería didáctica, métodos que se utilizarán en esta investigación:

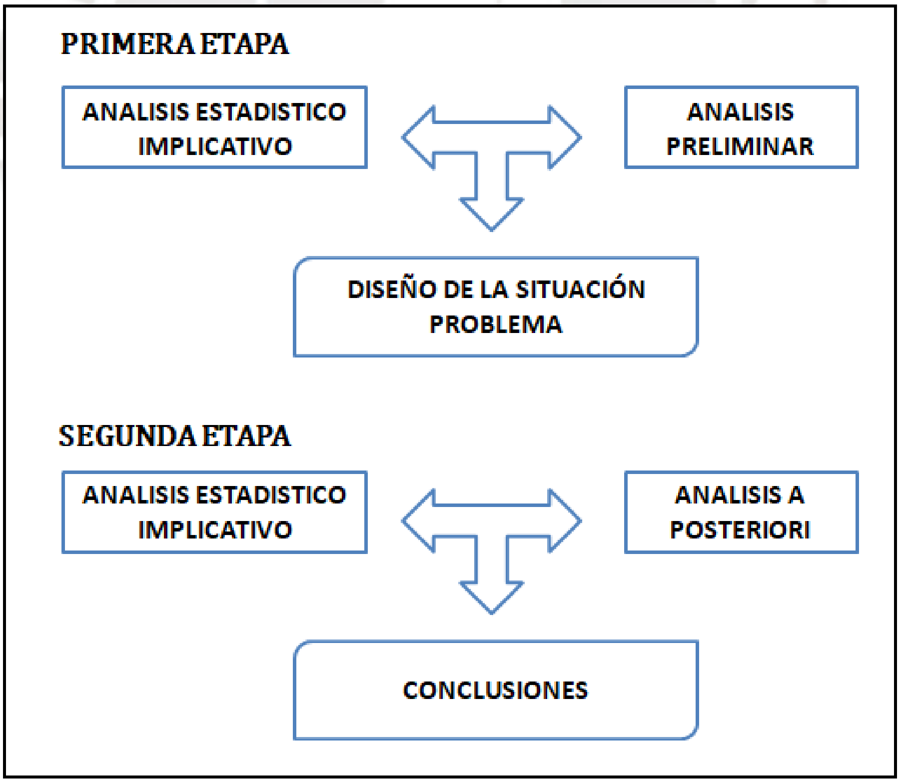


Figura 6. Esquema de la metodología de trabajo

Fuente: Propia

2.5 Procedimientos Metodológicos

2.5.1 Ingeniería Didáctica

Los pasos que está investigación realizará estarán relacionados a las 4 fases de la ingeniería didáctica:

Análisis Preliminar

- Se realizó la búsqueda de investigaciones pasadas realizadas en torno al valor absoluto, información referente a su desarrollo histórico, dificultades epistemológicas y didácticas asociadas a esta noción.
- Se realizó la revisión de la propuesta curricular peruana en torno a la enseñanza del valor absoluto, con la finalidad de conocer el nivel donde se trabaja con esta noción y las capacidades que se evalúan al respecto.
- Se realizó la revisión de los libros que propone el Ministerio de Educación, para evaluar la forma en la que es enseñado el valor absoluto, y los tipos de ecuaciones e inecuaciones que resuelven los estudiantes.
- Se realizó la revisión del programa curricular de la I. E. "Telesforo de Catacora", para verificar que la enseñanza del valor absoluto se realiza de acuerdo a Curriculo Nacional, en los niveles respectivos.

Concepción y Análisis a Priori

- Determinación de las variables micro-didácticas
- Determinación de la situación problema.
- Diseño de las actividades para la secuencia didáctica
- Estimación de tiempo para el desarrollo de las actividades
- Selección del grupo de estudiantes para la experimentación
- Análisis de los comportamientos esperados, en términos de posibles respuestas y dificultades que enfrente el estudiante.
- Establecimiento del cronograma de actividades

Experimentación

- Prueba del diseño de secuencia de actividades, con la finalidad de realizar ajustes y/o modificaciones
- Ajustes de la secuencia de actividades

- Puesta en marcha de la secuencia de actividades
- Observación y recogida de datos durante la puesta en marcha de acuerdo a las dialéctica de la TSD

Análisis a Posteriori y Validación

- Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados en la experimentación

2.5.2 Análisis Estadístico Cohesitivo

Los pasos que se deben seguir para realizar este tipo de análisis es el siguiente: "Las fases fundamentales de una análisis de datos multidimensionales: i) diseñar el instrumento de recolección de datos ii) organización y exploración, iii) tratamiento de los instrumentos y iv) interpretación de los datos de acuerdo a los objetivos de la investigación" (Gras & Almouloud, 2002, p.70).

i) Diseñar el instrumento de recolección de datos

Nuestro instrumento de recolección de datos es un cuestionario (Ver Anexo 1), el cual se ha diseñado incluyendo preguntas de concepción de valor absoluto (Pregunta 1), cálculo de valor absoluto de números reales (preguntas 2 y 3), cálculo de valor absoluto de variables reales (preguntas 4, 5 y 6), ecuaciones con valor absoluto (preguntas 7, 8, 9 y 10), inecuaciones con valor absoluto (preguntas 11, 12, 13 y 14).

Las preguntas que se han diseñado en este cuestionario son abiertas, donde se ha previsto las posibles respuestas, ya sean estas respuestas correctas o posibles errores, en base a los errores que han reportado investigaciones previas , esto con la finalidad de evaluar las relaciones de implicancia entre tipos de errores.

ii) Organización y exploración

En esta etapa se realizó la codificación de las variables (Ver Anexo 2) y se realiza la aplicación del cuestionario. Cada pregunta y su posible respuesta es considerada una variable. Así por ejemplo, para la pregunta ¿Qué es el valor absoluto de un número?, el código q1r1, corresponde al valor absoluto de un número es la distancia del número a cero.

iii) Tratamiento de los instrumentos

En esta etapa se registra los resultados y se realiza el tratamiento de los datos. Para ello se considera lo siguiente:

> "Para que CHIC pueda efectuar los cálculos necesarios para la construcción de los agrupamientos y la representación de los datos, es preciso elaborar una hoja Excel® (Office para Macintosh) de Microsoft, cuya extensión sea CVS" (delimitado por comas, con la finalidad de que los datos se puedan adecuar al banco de datos para el procesamiento y para el análisis, pues solamente de esa forma el archivo podrá ser abierto por el software CHIC. El archivo que contenga los datos debe,

obligatoriamente, presentar en cada columna un tipo de variable y en cada línea, un único individuo". (Souza, 2016, p.201)

En esta investigación los valores de las variables serán 0 y 1, los cuales indican ausencia y presencia de la variable respectivamente, antes de trabajar con CHIC se realizará la limpieza de los datos de la hoja de Excel® obtenida, donde se eliminó aquellas variables no discriminantes, como aquellas con suma igual a cero. Por ejemplo, en la tabla siguiente, se eliminó las variables q1r4 y q2r4.

Tabla 2. Registro de resultados de las preguntas 1 y 2 del cuestionario en hoja Excel®

	q1r1	q1r2	q1r3	q1r4	q1r5	q2r1	q2r2	q2r3	q2r4
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	1	0	0
7	0	0	1	0	0	0	1	0	0
8	0	0	1	0	0	0	1	0	0
9	0	0	1	0	0	0	1	0	0
10	0	1	0	0	0	0	0	1	0
11	0	0	1	0	0	0	1	0	0
12	0	0	1	0	0	1	0	0	0
13	0	0	1	0	0	0	0	1	0
14	0	0	1	0	0	0	1	0	0
15	0	0	1	0	0	0	1	0	0
16	0	1	0	0	0	1	0	0	0
17	1	0	0	0	0	1	0	0	0
18	0	0	1	0	0	0	1	0	0
19	1	0	0	0	0	0	1	0	0
20	1	0	0	0	0	1	0	0	0
21	0	1	0	0	0	0	1	0	0
22	0	0	1	0	0	1	0	0	0
23	0	0	1	0	0	1	0	0	0
24	0	0	0	1	0	0	1	0	0
25	0	1	0	0	0	0	1	0	0
26	0	0	1	0	0	0	1	0	0
27	0	1	0	0	0	0	1	0	0
28	1	0	0	0	0	0	1	0	0
29	0	0	1	0	0	0	0	1	0
30	0	0	1	0	0	0	1	0	0
	5	6	17	2	0	7	19	4	0

Fuente: Propia

Luego de realizada la limpieza de los datos, se guarda la hoja Excel® seleccionando tipo de archivo CSV (delimitado por comas). Después, se procede a abrir el software CHIC, se selecciona nuevo tratamiento, se selecciona la hoja Excel® que tiene los datos a analizar y se escoge como tratamiento la opción árbol cohesitivo. Al seleccionar este tratamiento, se obtiene tres ventanas, la primera muestra el árbol cohesitivo, la segunda muestra la media, desviación estándar, frecuencia por pares de variables, coeficiente de correlación, índices de cohesión, clasificación por nivel indicando el índice de cohesión de todas las relaciones de las variables, clases y subclases y los nodos significativos. La tercera ventana, ofrece casi los mismos tipos de datos que la segunda ventana de forma tabular.

iv) Interpretación de los datos

Para realizar la interpretación del árbol cohesitivo, primero debemos definir el significado de nodo significativo.

> Los nodos significativos son los niveles correspondientes a una clasificación compatible lo mejor posible con los valores y la calidad del agrupamiento obtenido (Zamora et al., 2009, p.77)

De acuerdo a Almouloud (2008) los nodos significativos son criterios estadísticos que ayudan en la parte interpretativa del árbol de cohesión.

> Las nociones de nivel y de nodos significativos, marcados con una flecha roja, muestra para el usuario las clases en las que debe enfocar su atención, por el hecho de que estarán en mejor conformidad con los indicios de implicancia iniciales. (Almouloud, 2008, p.311)

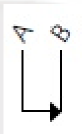


Figura 7. Ejemplo de regla A⇒B en árbol cohesitivo

Fuente: Propia

En el análisis cohesitivo cada regla identificada, será interpretada como sigue: “Si A entonces probablemente B” con índice de cohesión igual a $\varkappa$. Eso significa que la presencia de la variable A puede implicar la presencia de la variable B con una probabilidad igual a $\varkappa$.

A continuación, el capítulo III donde se describe el análisis preliminar realizado en esta investigación.

CAPÍTULO III: ANÁLISIS PRELIMINAR

En esta sección se muestra el estudio del valor absoluto en tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. En la dimensión epistémica, se analiza el desarrollo evolutivo del valor absoluto. En la dimensión cognitiva se identifica los obstáculos asociados al valor absoluto y finalmente en la dimensión didáctica se analiza la propuesta para la enseñanza del valor absoluto en la educación regular básica peruana, la cual se centra su definición en el contexto aritmético, constituyendo un obstáculo didáctico.

3.1 Breve Estudio Histórico del Valor Absoluto

Gagatsis y Thomaidis (1995), realizaron un estudio histórico del concepto de valor absoluto donde se distinguen 4 etapas:

3.1.1 El Valor Absoluto un Concepto Implícito

En esta primera etapa, el valor absoluto es visto como un concepto implícito. François Viète en 1591 en su obra *In Arten Analyticem Isagoge* (Introducción al arte del análisis), muestra el inicio de los usos sistemáticos de símbolos en el álgebra, e introduce una notación especial denominada "*unsichere minus*" (Incierto menos) con el símbolo = para representar la substracción de dos magnitudes no conocidas, al no saber qué magnitud era más grande, la diferencia de las magnitudes no conocidas "A^2" y "B", se expresaba como, $A^2=B$ o $B=A^2$, con la finalidad de prevenir la realización de una operación imposible, ya que en ese tiempo no se trabajaba con los números negativos.

Los números negativos aparecen a inicios del siglo XVII como una ampliación de los números positivos, conocidos en ese tiempo como objetos nuevos "imaginarios", los cuales se diferencian de los antiguos números por la agregación de signos.

Wallis, en 1673 es uno de los primeros que intenta dar una interpretación geométrica a los números negativos, tomando como ejemplo a una persona que se mueve a lo largo de una recta, de manera que +3 significa tres yardas adelante y -3 significa 3 yardas para atrás, todo esto en la misma línea, es decir para Wallis, el "número sin signo" funciona como distancia del origen (el punto observado como el inicio del movimiento), la importancia de esta interpretación se explica a continuación.

3.1.2 El Valor Absoluto Instrumento en el Algebra de las Inecuaciones.

La interpretación del valor absoluto como "el número sin signo" o como la "distancia de cero" predominó hasta inicios del siglo XIX. Sin embargo, a inicios del siglo XVIII, Leibniz hizo una distinción del término valor absoluto con la palabra "mol", Leibniz en su artículo define tal término al estudiar el simbolismo algebraico para la sustracción como lo hizo Vieté en 1591:

> "Pero $a - b$ representa la diferencia entre a y b, cuando a es mayor, y $b - a$, cuando b es mayor"; y a este mol se le puede denominar $a - b$, cuando se parte de la base que el valor absoluto de por ejemplo +2 y -2 es lo mismo, o sea +2. Aplicado análogamente: si se describe a - b como c, entonces el mol c o el valor absoluto de c es +2, lo que presenta un valor determinado, independientemente de si c es positivo o negativo; es decir, c es igual a +2 o -2. Dos cantidades diferentes con el mismo valor absoluto tienen siempre el mismo cuadrado". (Cajori, 1928-1929, tomo. 1, p. 223 – 224 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.8).

En esta cita se tiene una referencia más clara del término valor absoluto donde se utiliza la palabra "moles", que fue traducido por Cajori como valor absoluto.

En la segunda mitad del siglo XVIII, se empieza a hacer referencia al uso sistemático de este término en relación a los problemas que exigían un tratamiento de las inecuaciones. Una de estas referencias se encuentra en una conferencia de Lagrange sobre la solución de la ecuación diofántica $A = u^2 - Bt^2$, donde establece que si esta ecuación es resoluble, entonces el coeficiente A es un divisor de un número de la forma $a^2 - B$, donde a es un número natural menor a $A/2$. Con respecto a esta demostración, Lagrange menciona lo siguiente:

> "Por lo demás, hay que resaltar, para evitar todo error, que cuando decimos que a debe ser menor a $A/2$, entendemos que a y A son tomados positivamente aunque puedan ser por cierto positivos o negativos; de modo que solo se debe tomar en cuenta, en esta comparación de los números a y A, su valor absoluto." (Lagrange, 1768, p. 390 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.8)

Las frases "número tomado positivamente" o "haciendo abstracción del signo", fueron expresiones comúnmente usadas durante la segunda mitad del siglo XVIII. El desarrollo de la noción valor absoluto está muy relacionado al estudio de los números negativos, la teoría general de los números positivos y negativos se encuentra en el libro Algebra de Euler (1770)

> "Para Euler, quien interpreta el número negativo $-a$ como "culpable", en la extensión de la multiplicación, interpreta al absoluto del triple de culpa ($-3a$) como tres veces mayor que la del absoluto de la culpa original ($-a$), y describe a los números positivos y negativos como dos conjuntos, donde la secuencia que empieza con 0 y continua hacia atrás a través de los números negativos continuará progresivamente: 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, y así sucesivamente (Euler, 1840, p. 5-7 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.8).

El uso de la frase "abstracción de signos" por Lagrange, revela la influencia de la concepción tradicional de los números como unidad de medida, y su intento de evitar usar la interpretación de los números negativos dada por Euler, que aún no tenía un consenso dentro de la comunidad matemática de ese tiempo.

> "Lagrange en sus representaciones evita la expresión "cantidad negativa mayor que -1" para hacer referencia a números como -1/2, e intenta relacionar la concepción tradicional con el nuevo concepto de orden, escribiendo la frase "abstracción de signos" como aclaración." (Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.9).

Es así, que durante esta etapa la frase "haciendo abstracción del signo" hace referencia a la noción de valor absoluto, y se convierte en una herramienta importante en el desarrollo la teoría de números y en la solución de inecuaciones.

3.1.3 El Valor Absoluto Instrumento para la Formalización del Álgebra

Gagatsis y Thomaidis (1995), describen que durante esta etapa ya se tenía una idea acerca del valor absoluto, puesto que ya se había hecho referencia a él en el tratamiento de las inecuaciones, el término "módulo" de un número complejo y su relación con la noción valor absoluto empezó a inicios del siglo XIX donde Argand en su obra "Ensayo sobre una manera de representar las cantidades imaginarias en las construcciones geométricas (1806)", atribuye dos significados diferentes a los números negativos: uno imaginario y uno real, de manera que aquellos números negativos que se dejan reinterpretar en términos de objetos materiales, serán llamados "reales", y aquellos en los que esto no es posible serán llamados "imaginarios". Argand elige esta interpretación de los números negativos como punto de partida para la presentación geométrica de los números imaginarios. Hace constar que una cantidad negativa, que es imaginaria bajo un determinado tipo de presentación numérica, podrá ser real cuando se relaciona con una magnitud absoluta. No es posible lograr el mismo éxito con relación a la raíz cuadrada de -1; en este caso se trata de una cantidad imaginaria porque es imposible asignarla un lugar en la recta numérica. Argand utiliza una línea direccional para introducir el término de valor absoluto en la geometría:

> "…porque ella debe ser el tema de la siguiente reflexión, se sugerirá un nombre especial. Se le llamará líneas con direcciones o simplemente línea direccional. Entonces que se les diferencien de las líneas absolutas, las que son contempladas solo en cuanto a su longitud sin considerar su dirección." (Lefort, 1990, p. 93-95 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.12)

Argand, en 1814 usa en el término "módulo" para nombrar al número $\sqrt{n^2 + m^2}$ que él consideraba como "magnitud absoluta" del segmento recto dirigido $n + m\sqrt{-1}$, lo que hoy corresponde a la expresión binómica de un número complejo $a + bi$.

El valor absoluto, aparece por primera vez como una noción independiente en el año 1821 en el trabajo de Cauchy denominado "*Curs d' analyse*". Cauchy define al valor absoluto como el valor numérico de una cantidad, de la siguiente manera:

> "…llamaremos valor numérico de una cantidad al número base, que hace que cantidades iguales que tienen el mismo signo tengan el mismo valor numérico y que cantidades opuestas que están afectados con signos contrarios, tengan el mismo valor numérico." (Cauchy, 1821, p. 18 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.13).

Este término de valor absoluto, que es definido para una cantidad real, será utilizado por Cauchy más adelante en el área de números complejos. Cauchy demuestra que $\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}}{\sqrt{n}}$ es la expresión del valor medio para los valores numéricos de *n* cantidades *a*, *a'*, *a''*

Sobre el denominador de la fracción, escribe lo siguiente:

> "Esta expresión que sobrepasa el mayor de los valores numéricos se le puede llamar el módulo del sistema de cantidades *a, a', a''*,…El módulo del sistema de dos cantidades *a* y *b* será el módulo de la expresión imaginaria $a + b\sqrt{-1}$, sea como fuere, las expresiones reales de la forma $\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}$ tienen propiedades notables (Cauchy, 1821, citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.13).

En relación a estos problemas y para lograr una representación de la relación de inecuación, Cauchy utilizó por primera vez una abreviación para el término de los valores numéricos, en el cual él escribe:

$$val.num.(a + a' + a'' + \cdots) < \sqrt{n}\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}$$

Además de $\sqrt{a^2}$, Cauchy usa una variedad de expresiones para hacer referencia al valor absoluto de una cantidad a lo largo del documento "*Curs d' analyse*", a veces incluso el tradicional "haciendo abstracción de signos". En el capítulo III con el título "sobre la resolución numérica de ecuaciones" se utiliza sistemáticamente el término de los valores numéricos de una cantidad y la abreviación "val.num" en todas las inecuaciones que tengan que ver con los valores de raíces y la solución aproximada de ecuaciones polinómicas. Sin embargo, la novedad fundamental que Cauchy introdujo con relación al valor absoluto, está en el uso de éste término en definiciones y teoremas de convergencia y continuidad.

Un ejemplo, es la prueba de fracciones sobre la convergencia absoluta de una recta numérica donde Cauchy utiliza implícitamente la desigualdad triangular.

$$|u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}| < |u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n-1}|$$

Cauchy aplica en las sumas parciales un tipo de prueba de comparación, para mostrar que la serie converge cuando la serie de términos absolutos converge. Cabe destacar que la desigualdad triangular aparece aquí como una característica de los números reales, aunque más tarde Cauchy hace la demostración para el caso de los números complejos. El siguiente párrafo hace referencia a la relación entre los valores numéricos y módulos como también a la prueba usada:

> "En lo anterior, hemos considerado otras series dobles, convergentes o divergentes, en las que los términos son cantidades reales. Pero lo que se ha dicho con respecto a esas series puede igualmente aplicarse en caso de que sus términos se vuelvan imaginarios, aunque se escribe en todas partes expresión imaginaria en lugar de cantidad, y módulo en lugar de valor numérico. Si estas modificaciones son admitidas entonces los teoremas I y II aun subsistirán. Esto es lo que se demostrará sin esfuerzo, apoyándose en el siguiente principio: el módulo de la suma de muchas expresiones imaginarias es siempre inferior a la suma de sus módulos".(Cauchy, 1821, citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.13).

En la posterior obra "Memorias sobre las funciones continuas" de Cauchy (1844) aparece el valor absoluto como función. Aunque no se nombra explícitamente el término valor absoluto, se deduce que Cauchy usa al valor absoluto como un recurso matemático que hace posible transformaciones analíticas. En la siguiente figura, se observa las diferentes expresiones que Cauchy usa para hacer referencia al valor absoluto:

$$\text{val.num.}(x) = \sqrt{x^2} \quad \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Figura 8. Expresiones del valor absoluto en el trabajo de Cauchy

Fuente: Gagatsis y Thomaidis (1995, p.15)

Durante esta etapa el valor absoluto carece de una notación única para representarlo, por lo que no se formalizan sus propiedades (no negatividad, definición positiva, desigualdad triangular, multiplicativa y simetría)

3.1.4 El Valor Absoluto Instrumento en el Desarrollo del Análisis Complejo

La necesidad de una notación única para el valor absoluto y la formalización de sus propiedades fue evidente sobre todo junto con la teoría de las funciones complejas. Esta teoría de desarrolló desde 1840, a través de las aportaciones de Cauchy y Weierstrass.

El símbolo actual de valor absoluto, es decir, las dos líneas verticales que hoy en día utilizamos aparecieron por primera vez en la obra "Teoría de la serie de potencias" de Weierstrass en 1841. En éste artículo Weierstrass demuestra lo que en el análisis complejo se conoce como "Desigualdad de Cauchy":

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

> "Sea $F(x)$ una serie de potencia de las variables complejas x con coeficientes dados. Si r es alguna magnitud positiva dentro del área de convergencia de la progresión, entonces el valor absoluto de $F(x)$ tiene un límite superior, cuando se adjunta a la variable x todos aquellos valores, para el cual es válido $|x|=\zeta$, que es descrito como g. El teorema $|A\mu|\leq g\zeta\text{-}\mu$ es válido para cada valor contable de μ" (Weierstrass 1841, p. 67 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.17).

El nuevo símbolo, es utilizado dentro del mismo artículo en la prueba de desigualdad de Cauchy y también en la generalización de las funciones de variables complejas. El uso del valor absoluto por Weierstrass en este artículo tiene un carácter topológico, por ejemplo se muestra en el texto la definición del término "entorno":

> El entorno de posición ($a_1,a_2,\ldots a_p$) en el domino de p de variables x_1, x_2, $\ldots x_p$, es un área que tiene la siguiente naturaleza: Cuando(x_1, x_2, $\ldots x_p$) es parte del domino, también será parte del dominio ($x''_1, x''_2, \ldots x''_p$) cuando cumpla las siguientes condiciones $|x''_1-a_1|\leq|x'_1-a_1|$, $|x''_2-a_2|\leq|x'_2-a_2|$, …, $|x''_p-a_p|\leq|x'_p-a_p|$ (Weierstrass 1841, p. 70 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.17).

La introducción de Weierstrass de las dos líneas verticales para la notación del valor absoluto no fue aceptada en la comunidad matemática de su tiempo. Por el contrario, el estudio de un número significativo de trabajos matemáticos de la segunda mitad del siglo XIX muestra una variedad de símbolos especiales, abreviaciones y términos para hacer referencia al valor absoluto como se observa en la siguiente figura.

$\lvert x \rvert$	(CANTOR 1874; KRONECKER 1887; HILBERT 1893)
mod.x	(TCHEBYCHEF 1844; LIOUVILLE 1851; HERMITE 1880; GORDAN 1893)
x.num.	(GRASSMANN 1862)
M(x)	(DEDEKIND 1878)
abs(x)	(LINDEMANN 1882)
val.abs(x)	(LAURENT 1894)

Figura 9. Términos usados para el valor absoluto en el siglo XIX

Fuente: Gagatsis y Thomaidis (1995, p.18)

Grassmann en su obra "Teoría de la extensión" en 1862 generaliza el término valor absoluto en la noción de "cantidades extensivas", y da una nueva definición del valor absoluto de los números reales y complejos:

> "El valor numérico de una magnitud *A* es la raíz cuadrada positiva del cuadrado de esa magnitud. Para los números reales o imaginarios, se usa esta designación de la misma manera, tomando, primeramente el valor numérico de un número positivo o de un número negativo al que en ambos casos la raíz cuadrada de su cuadrado es positiva. En caso de tener un número imaginario el valor numérico de *a+bi*, según la definición es igual a $\sqrt{a^2+b^2}$ lo que se interpreta también como el valor numérico de la magnitud imaginaria *a+bi"* (Grassmann 1862, p. 112 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.19)

Esta definición de "valores numéricos" de una magnitud *A* en la forma de $\sqrt{A^2}$, será más tarde generalizado para cada magnitud $P = \sqrt{a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots}$ en forma de una norma $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}$

Finalmente, se observa que el símbolo propuesto por Weierstrass para denotar al valor absoluto de un número fue aceptado dentro de la comunidad matemática a finales del siglo XIX, al ser utilizado sistemáticamente por matemáticos como Kronecker y Hilbert y por otros matemáticos de la época, en trabajos publicados en la "*Encyclopedia of Mathematical Science*" obra de gran prestigio en ese tiempo. La formalización de las propiedades del valor absoluto y su definición como función fue importante para lograr definir conceptos matemáticos como espacios métricos y desigualdad triangular, conceptos que permitieron el desarrollo de la teoría de los espacios abstractos.

Es así, que la investigación de Gagatsis y Thomaidis (1995) muestra la relevancia matemática del valor absoluto, que en sus inicios fue importante para la compresión de los números negativos y que finalmente fue instrumento para el desarrollo del análisis complejo.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de la evolución del significado del valor absoluto a lo largo de estas 4 etapas.

Tabla 3. Evolución del significado del valor absoluto

Etapa	**Denominación**	**Símbolo**	**Significado**
El valor absoluto como concepto implícito	Vieté (1591) “Incierto menos”	=	Hace referencia a la resta entre dos cantidades no conocidas
	Wallis (1673) “Número sin signo”	Ninguno	Distancia al origen
El valor absoluto como instrumento en el algebra de las inecuaciones	Leibniz (1710) “mol”	mol	El número sin signo
	Lagrange (1768) “Número tomado positiviamente” “Haciendo abstracción de signos”	Ninguno	
El valor absoluto como instrumento para la formalización del algebra	Argand (1814) “Modulo” “Magnitud absoluta”	mod	Distancia de un segmento recto dirigido
	Cauchy (1827) “Valor numérico”	Val.num(x)	El número sin signo
El valor absoluto como instrumento en el desarrollo del análisis complejo	Weirstrass (1841) $\lvert x \rvert$	$\lvert x \rvert$	La raíz cuadrada del cuadrado de x
	Grassmann (1862) “Valor numérico”	x.num	
	Hilbert (1893) “$\lvert x \rvert$”	$\lvert x \rvert$	Es entendido como una función y se definen sus propiedades

Fuente: Propia

3.2 Análisis Cognitivo del Valor Absoluto

Gagatsis y Panaoura (2014), a través del análisis multidimensional de un cuestionario aplicado a estudiantes de 17 años de edad, identificaron cuatro obstáculos asociados a la noción de valor absoluto, los cuales listamos a continuación:

Obstáculos epistemológicos

Un primer obstáculo epistemológico identificado es la concepción de número como un medio para medir cantidades, esta concepción es un obstáculo para entender el concepto general de variable, el error asociado a este obstáculo es el siguiente, ante la pregunta determinar el signo de $-x$, una respuesta común es que $-x$ es un número negativo, la concepción mencionada, también es un obstáculo para entender la noción de valor absoluto, lo cual se evidencia cuando los estudiantes responden que $|a|$ es a o también $|-a|$ es a, errores reportado por Wilhelmi et al.(2007). El segundo obstáculo epistemológico, mencionado por Gagatsis y Panaoura (2011), consiste en interpretar la noción de valor absoluto de un número como "el número sin signo", esta concepción es un obstáculo para la adquisición de la definición de valor absoluto, el error asociado es que cuando se les pide resolver $|x+3| =2$ algunos estudiantes responden que $x+3= 2$ ó $x-3= -2$, otro error reportado por Chiarugi et al. (1990) es que $|x+1|=x+1$

Obstáculos didácticos

Un primer obstáculo didáctico identificado, es la tendencia de los alumnos a mantener la forma en la cual el valor absoluto les fue enseñado, por ejemplo $|x|=x$ si $x>0$, actúa como un obstáculo para resolver ecuaciones como $|x+3|=2$, en el que algunas respuestas son $|x+3|=x+3$ si $x>0$ o $|x+3|=-x+3$ si $x<0$. El segundo obstáculo didáctico, está relacionado a la creencia de que el valor absoluto es sólo "un símbolo que se debe eliminado mecánicamente", debido a que en la enseñanza del valor absoluto, el símbolo es inicialmente introducido, pero subsecuentemente en el contexto de resolver ecuaciones o inecuaciones el símbolo es rápidamente eliminado con la finalidad de obtener ecuaciones e inecuaciones sin valor absoluto. Este error se presenta comúnmente en preguntas con "ecuaciones imposibles" como por ejemplo $||x-5|-12|=-5$, la mayoría de estudiantes resuelve mecánicamente la ecuación sin verificar la solución, también ante la pregunta de resolver $|x+2|+|x+6|=0$, la respuesta común fue $x= -2$ ó $x= -6$.

Finalmente, los investigadores concluyen que el obstáculo epistemológico asociado a la concepción del valor absoluto de un número como "el número sin signo" corresponde a la tercera etapa, del desarrollo histórico del valor absoluto, siendo un indicativo de que los estudiantes no han adquirido un entendimiento completo de esta noción. Además, concluyen que el obstáculo didáctico que consiste en la creencia de que el "valor absoluto es sólo un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente", se ha convertido en una regla del contrato didáctico, lo que da como resultado, que los alumnos ante problemas de valor absoluto, actúen de manera mecánica.

Este análisis se complemento con los resultados de Wilhelmi et al.(2007), Chiarugi et al. (1990) y García (2014) investigadores citados en el capítulo de antecedentes.

3.3 Análisis Didáctico del Valor Absoluto.

En esta parte se ha realizado la revisión de la propuesta curricular del ministerio de educación para la enseñanza del valor absoluto en la educación secundaria, incluyendo una revisión de los libros de trabajo que utilizan los estudiantes de educación secundaria en instituciones educativas del estado, con la finalidad de identificar los conceptos de valor absoluto y los tipos de preguntas que resuelven los estudiantes en relación a esta noción. Además, se revisa el programa de la Institución Educativa donde se aplicará la secuencia de actividades.

3.3.1 Valor Absoluto en los Libros de Texto de Educación Secundaria

De acuerdo al Currículo Nacional los estándares de aprendizaje en la competencia Resuelve Problema de Cantidad VI que corresponde al primer y segundo grado de secundaria, detalla las siguientes capacidades:

> …Expresa su comprensión de los números racionales e irracionales, de sus operaciones y propiedades. Plantea y compara afirmaciones sobre números racionales y sus propiedades, formula enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones numéricas; justifica, comprueba, o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades matemáticas. (Ministerio de Educación, 2016a, p.77).

El libro Cuaderno de Trabajo Matemática 2, correspondiente al segundo grado de secundaria, detalla los aprendizajes esperados respecto del valor absoluto, como se muestra en la siguiente tabla:

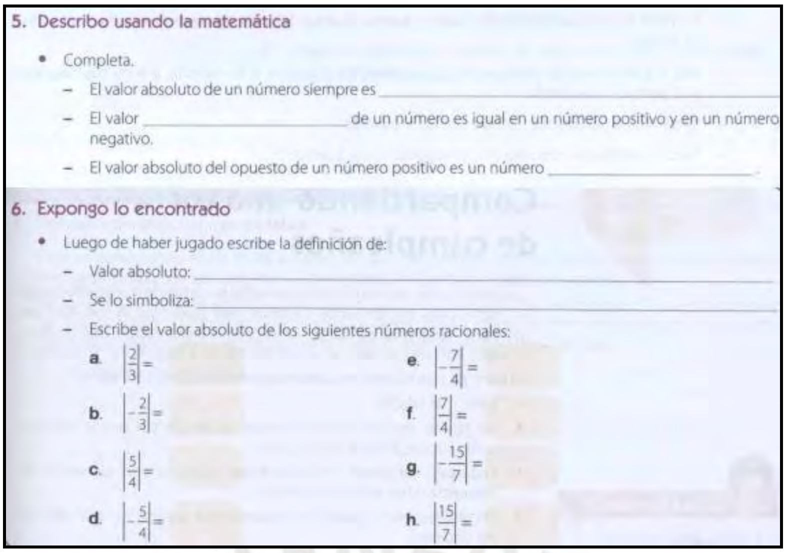
Tabla 4. Aprendizajes esperados en segundo grado de secundaria

Competencia	Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad
Capacidad	Razona y argumenta generando ideas matemáticas
Indicador	Justifica que dos números racionales son simétricos cuando tienen el mismo valor absoluto

Fuente: Ministerio de Educación (2016e, p.11)

Respecto a la forma en la que es enseñado el valor absoluto, se observa que en el Texto Escolar Matemática 2, correspondiente al segundo grado de secundaria el valor absoluto se introduce dentro del capítulo de números racionales y se define de la siguiente manera: “El valor absoluto de un número racional es la distancia a cero de este número. Si el número racional es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él” (Ministerio de Educación, 2016c, p.20). La primera parte de esta definición introduce al valor absoluto en el contexto métrico, la segunda parte de esta define al valor absoluto desde el contexto aritmético.

Debido a que se introduce esta noción dentro del capítulo de los números racionales, los ejercicios que deben resolver consisten en hallar el valor absoluto de números racionales. Los ejercicios propuestos también son dentro de un contexto aritmético, tal como se muestra en la Figura 10. Tal como se observa los ejercicios propuestos están asociados a la noción de que el valor absoluto de un número es el número sin signo.


5. Describo usando la matemática

- Completa.
  - El valor absoluto de un número siempre es ____________
  - El valor ____________ de un número es igual en un número positivo y en un número negativo.
  - El valor absoluto del opuesto de un número positivo es un número ____________.

6. Expongo lo encontrado

- Luego de haber jugado escribe la definición de:
  - Valor absoluto: ____________
  - Se lo simboliza: ____________
  - Escribe el valor absoluto de los siguientes números racionales:

a. $\left|\frac{2}{3}\right| =$ e. $\left|-\frac{7}{4}\right| =$

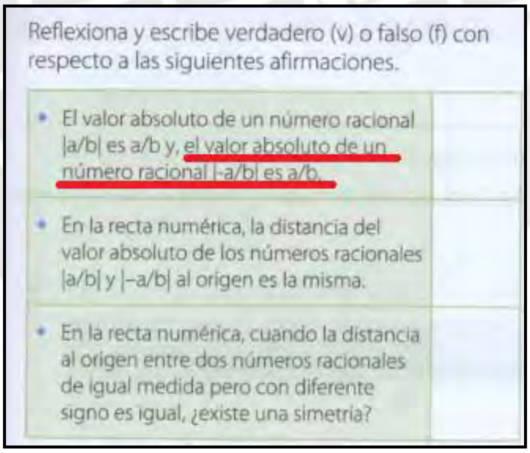
b. $\left|-\frac{2}{3}\right| =$ f. $\left|\frac{7}{4}\right| =$

c. $\left|\frac{5}{4}\right| =$ g. $\left|-\frac{15}{7}\right| =$

d. $\left|-\frac{5}{4}\right| =$ h. $\left|\frac{15}{7}\right| =$

Figura 10. Preguntas de reforzamiento del valor absoluto en Cuaderno de Trabajo Matemática 2
Fuente: Ministerio de Educación (2016e, p.18)

También, se realiza una actividad para que el alumno reflexione acerca de algunas propiedades acerca del valor absoluto como se observa en la Figura 11, sin embargo los ejercicios de la pregunta 6 que se muestran en la Figura 10 inducen al estudiante a responder verdadero a la primera afirmación que se muestra en la Figura 11, induciendo a los estudiantes a cometer error del tipo epistemológico reportado por Gagatsis y Panaoura (2014), los estudiantes por tanto entenderán que |-*a*/*b*| es *a/b,* atribuyendo el signo negativo como el signo de la variable.

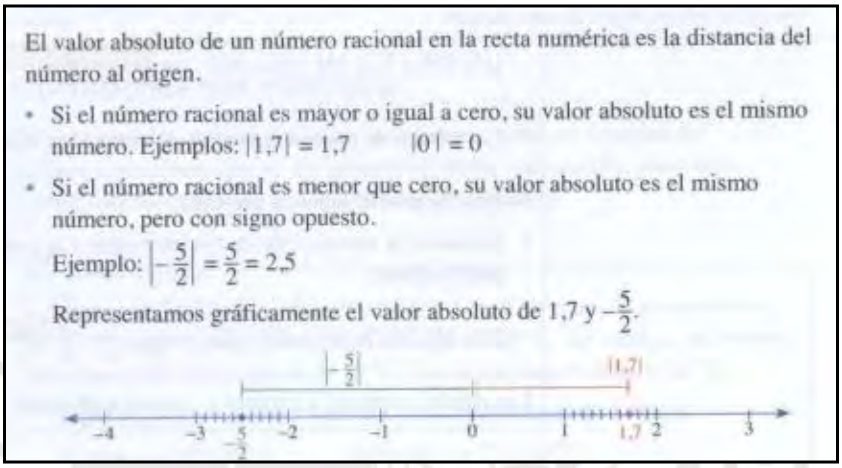

Reflexiona y escribe verdadero (v) o falso (f) con respecto a las siguientes afirmaciones.

• El valor absoluto de un número racional |a/b| es a/b y, el valor absoluto de un número racional |-a/b| es a/b.	
• En la recta numérica, la distancia del valor absoluto de los números racionales |a/b| y |–a/b| al origen es la misma.	
• En la recta numérica, cuando la distancia al origen entre dos números racionales de igual medida pero con diferente signo es igual, ¿existe una simetría?	

Figura 11. Preguntas de reforzamiento del valor absoluto en el Cuaderno de Trabajo Matemática 2.
Fuente: Ministerio de Educación (2016e, p.19)

Luego en el libro Texto Escolar Matemática 3 (Ministerio de Educación, 2016f), que corresponde a tercer grado de secundaria, se vuelve a trabajar con valor absoluto, dentro del capítulo de números racionales y se define de la siguiente manera "El valor absoluto de un número racional en la recta numérica es la distancia del número al origen", la definición que se maneja en este nivel está dada en un contexto únicamente métrico, sin embargo luego adicionan "Si el número racional es mayor o igual a cero, su valor absoluto es el mismo número, si el número racional es menor que cero, su valor absoluto es el mismo número, pero con signo opuesto" (Ministerio de Educación, 2016f, p.20). Con esta adición, se define al valor absoluto desde el contexto aritmético.

Las preguntas que se muestran en la Figura 11 y en la Figura 12, a pesar de ser de diferentes grados, muestran que el valor absoluto, se enseña desde el contexto métrico y está asociado a la concepción del valor absoluto de un número como el número sin signo. Además, en la Figura 12, se adicionan ejemplos y una representación en la recta numérica, con la finalidad de que los estudiantes sustenten que dos números racionales diferentes son simétricos si tienen el mismo valor absoluto.


El valor absoluto de un número racional en la recta numérica es la distancia del número al origen.

- Si el número racional es mayor o igual a cero, su valor absoluto es el mismo número. Ejemplos: $|1{,}7| = 1{,}7$ $\quad |0| = 0$
- Si el número racional es menor que cero, su valor absoluto es el mismo número, pero con signo opuesto.

Ejemplo: $\left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Representamos gráficamente el valor absoluto de 1,7 y $-\frac{5}{2}$.

Figura 12. Presentación del valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3

Fuente: Ministerio de Educación (2016f, p.18, 19)

Además, en el libro Texto Escolar Matemática 3, se presentan las propiedades del valor absoluto. Sin embargo, no se observa actividades en la que los alumnos reflexionen acerca del porqué de estas propiedades o ejemplos que expliquen cómo se deducen. Además, no se explica el significado de los operadores "$\vee$" e "$\wedge$" en el uso de las propiedades. Chiarugi, Fracazina y Furinghetti (1990), señalaron que una de las dificultades en la comprensión del valor absoluto, es la falta de interpretación de los operadores lógicos $\vee$ e $\wedge$, que por lo general pasa desapercibido para los estudiantes, y eso conlleva a los estudiantes a errores en la resolución de problemas con valor absoluto.

Propiedades del valor absoluto

- $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$
- $|a| = |-a|$
- Si $|a| = b$, entonces: $\begin{cases} b \geq 0 \wedge \\ (a = b \vee a = -b) \end{cases}$
- Si $|a| = |b|$, entonces: $a = b \vee a = -b$
- Si $|a| \leq b$, entonces: $b \geq 0 \wedge -b \leq a \leq b$
- Si $|a| \geq b$, entonces: $a \geq b \vee a \leq -b$

Figura 13. Propiedades del valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3

Fuente: Ministerio de Educación (2016f, p.22)

Los ejercicios que se muestran como ejemplos, consisten en ecuaciones del tipo $|x+a|=b$ e inecuaciones del tipo $|x+a|\leq b$, las soluciones que se proponen son en base a la aplicación de algunas propiedades del valor absoluto. En la siguiente figura, se ve un ejemplo de valor absoluto en ecuaciones.

CÓMO HACER

Calcula el valor de x si $|x + 3| = 6$.

- Aplicamos la propiedad: $|a| = b \rightarrow b \geq 0 \wedge a = b \vee a = -b$

  $|x + 3| = 6 \rightarrow x + 3 = 6 \vee x + 3 = -6 \rightarrow x = 3 \vee x = -9$

C.S. = $\{-9; 3\}$

Figura 14. Ecuación con valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3

Fuente: Ministerio de Educación (2016f, p.22)

Además, en el libro de Texto Escolar Matemática 3, se observa que hay ejercicios que están contextualizados. Sin embargo, esta contextualización es un poco forzada, debido a que el enunciado del problema presenta la inecuación. En la siguiente figura, se ve un ejemplo.

CÓMO HACER

EN CONTEXTO

Los habitantes de una ciudad han decidido usar convenientemente el agua potable. Para ello, han calculado la necesidad diaria de agua mediante la expresión $|g - 3\,725\,000| \leq 100\,000$, donde g representa el número de galones de agua que se utiliza por día. Calcula la menor y mayor necesidad diaria de agua.

- Aplicamos la propiedad: $|a| \leq b \rightarrow b \geq 0 \wedge -b \leq a \leq b$
- Dada la inecuación $|g - 3\,725\,000| \leq 100\,000$,
  se puede afirmar que: $-100\,000 \leq g - 3\,725\,000 \leq 100\,000$

$$3\,625\,000 \leq g \leq 3\,825\,000$$

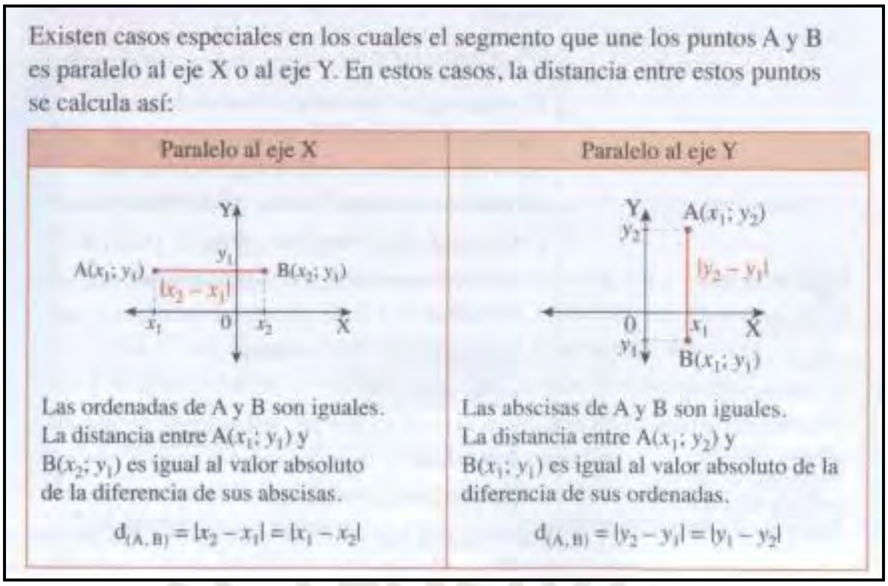
C.S. = [3 625 000; 3 825 000]

La menor y mayor necesidad diaria de agua es de 3 625 000 y 3 825 000 galones por día, respectivamente.

Figura 15. Inecuaciones con valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3
Fuente: Ministerio de Educación (2016f, p.23)

Se debe mencionar, que en el Cuaderno de Trabajo Matemática 3 del Ministerio de Educación (2016g), no se presentan otros ejercicios donde los alumnos refuercen la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Notamos que, por lo general todos los problemas que se presentan en el Cuaderno de Trabajo Matemática 3 son problemas contextualizados, esta la razón por la cual no se observa más ejercicios con valor absoluto, debido a que no hay contextos extra matemáticos que obliguen al alumno a hacer uso de esta noción para resolver un problema, ya que como se ha explicado en el análisis epistemológico el valor absoluto surge como necesidad dentro de la misma matemática con la finalidad de prevenir resultados negativos.

En el libro Texto Escolar Matemática 4 y Cuaderno de Trabajo Matemática 4, no se observa ninguna referencia acerca del valor absoluto. Finalmente, en el Texto Escolar Matemática 5 (Ministerio de Educación, 2016h), que corresponde al quinto grado de educación secundaria, en el capítulo de Geometría en Mapas y Planos a Escala se hace una breve referencia al valor absoluto, cuando se define la distancia de segmentos paralelos a algunos de los ejes x o y, nuevamente abordando al valor absoluto desde un contexto métrico, tal como se observa en la Figura 15. Además, de esta breve referencia, no se observa mayor trabajo con valor absoluto, en ecuaciones ni en inecuaciones.



Existen casos especiales en los cuales el segmento que une los puntos A y B es paralelo al eje X o al eje Y. En estos casos, la distancia entre estos puntos se calcula así:

Paralelo al eje X	Paralelo al eje Y
Las ordenadas de A y B son iguales. La distancia entre $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_1)$ es igual al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas. $d_{(A,B)} = \lvert x_2 - x_1 \rvert = \lvert x_1 - x_2 \rvert$	Las abscisas de A y B son iguales. La distancia entre $A(x_1; y_2)$ y $B(x_1; y_1)$ es igual al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas. $d_{(A,B)} = \lvert y_2 - y_1 \rvert = \lvert y_1 - y_2 \rvert$

Figura 16. Presentación del valor absoluto en contexto geométrico en el libro Texto de Trabajo Matemática 5

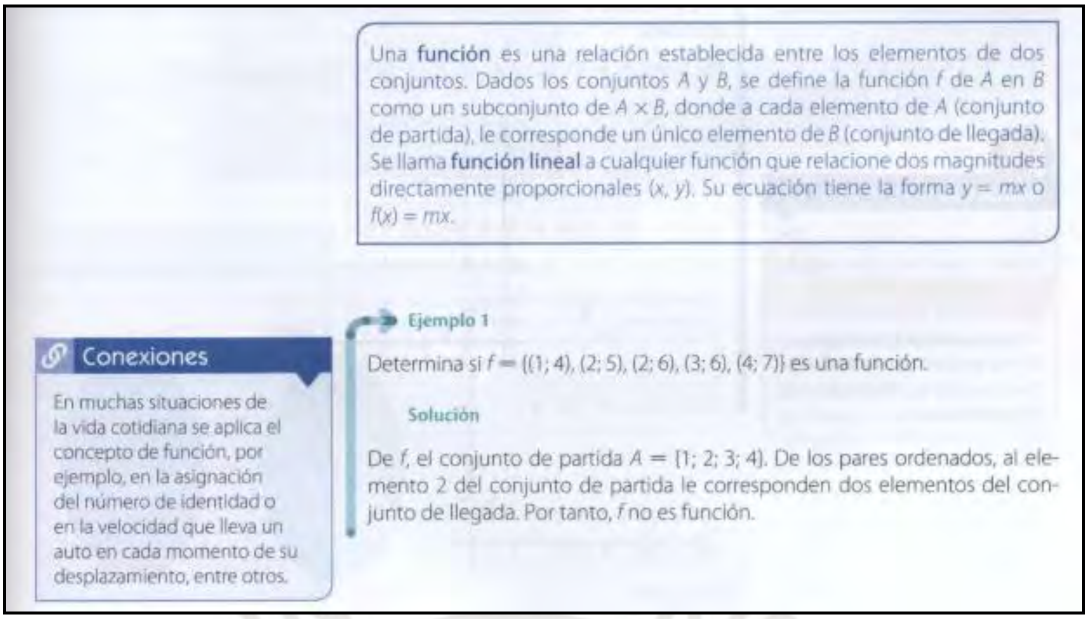
Fuente: Ministerio de Educación (2016h, p.130)

En ninguno de los niveles VI (primer y segundo grado de secundaria) o VII (tercer, cuarto y quinto grado de secundaria) se hace referencia al valor absoluto como función, como se ha detallado se introduce siempre desde el contexto métrico y aritmético. Al respecto, Wilhelmi et al. (2006), sustenta que en la práctica el modelo geométrico es entendido como una simple regla de "quitar el signo menos" centrado en el modelo aritmético constituyendo un obstáculo didáctico para la comprensión del valor absoluto, obstáculo que se evidencia a través de los errores que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas con valor absoluto. Por lo tanto, podemos decir, que la propuesta del ministerio de educación para la enseñanza del valor absoluto, de acuerdo a esta investigación constituiría en un obstáculo didáctico. Esto se verificará mediante la aplicación de un cuestionario, cuyos resultados se muestran en el capítulo IV.

3.3.2 Conocimiento Previos

Esta investigación se realizará con alumnos de tercer grado de secundaria, y propone la enseñanza del valor absoluto como función, por lo que es importante conocer qué conocimientos previos tienen los estudiantes respecto de funciones.

Los estudiantes trabajan con la función lineal y afín desde primer grado de secundaria. Por ejemplo, en el libro Texto Escolar Matemática 1, se observa la definición de función y función lineal como se observa en la Figura 17.



Una **función** es una relación establecida entre los elementos de dos conjuntos. Dados los conjuntos A y B, se define la función f de A en B como un subconjunto de $A \times B$, donde a cada elemento de A (conjunto de partida), le corresponde un único elemento de B (conjunto de llegada). Se llama **función lineal** a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x, y). Su ecuación tiene la forma $y = mx$ o $f(x) = mx$.

Conexiones

En muchas situaciones de la vida cotidiana se aplica el concepto de función, por ejemplo, en la asignación del número de identidad o en la velocidad que lleva un auto en cada momento de su desplazamiento, entre otros.

Ejemplo 1

Determina si $f = \{(1; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 6), (4; 7)\}$ es una función.

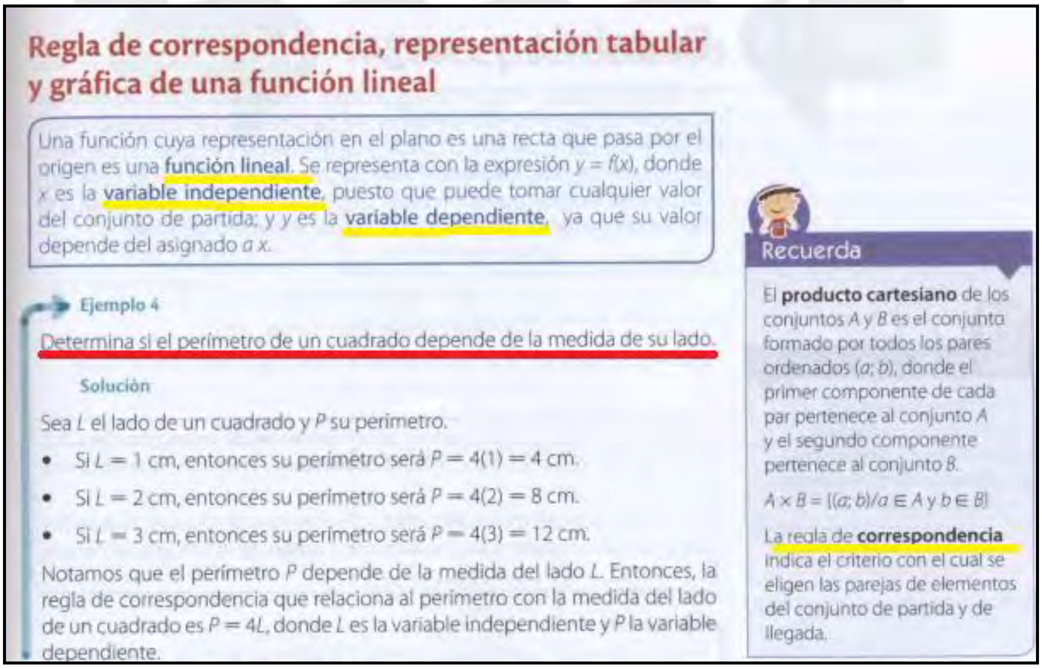
Solución

De f, el conjunto de partida $A = \{1; 2; 3; 4\}$. De los pares ordenados, al elemento 2 del conjunto de partida le corresponden dos elementos del conjunto de llegada. Por tanto, f no es función.

Figura 17. Presentación de función y función lineal en el libro Texto de Trabajo Matemática 1

Fuente: Ministerio de Educación (2016c, p.137)

Se explica el significado de variable independiente, variable dependiente, y regla de correspondencia de una función tal como se muestra en la Figura 18. Además, se muestra una pregunta donde los estudiantes determinan si el perímetro de un cuadrado depende de la medida de su lado. Tenemos esto en cuenta en el diseño de la secuencia didáctica, donde los estudiantes deben responden una pregunta similar, tal como se detalla en el capítulo V.



Regla de correspondencia, representación tabular y gráfica de una función lineal

Una función cuya representación en el plano es una recta que pasa por el origen es una **función lineal**. Se representa con la expresión $y = f(x)$, donde x es la **variable independiente**, puesto que puede tomar cualquier valor del conjunto de partida; y y es la **variable dependiente**, ya que su valor depende del asignado a x.

Ejemplo 4

Determina si el perímetro de un cuadrado depende de la medida de su lado.

Solución

Sea L el lado de un cuadrado y P su perímetro.

- Si $L = 1$ cm, entonces su perímetro será $P = 4(1) = 4$ cm.
- Si $L = 2$ cm, entonces su perímetro será $P = 4(2) = 8$ cm.
- Si $L = 3$ cm, entonces su perímetro será $P = 4(3) = 12$ cm.

Notamos que el perímetro P depende de la medida del lado L. Entonces, la regla de correspondencia que relaciona al perímetro con la medida del lado de un cuadrado es $P = 4L$, donde L es la variable independiente y P la variable dependiente.

Recuerda

El **producto cartesiano** de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los pares ordenados $(a; b)$, donde el primer componente de cada par pertenece al conjunto A y el segundo componente pertenece al conjunto B.

$A \times B = \{(a; b)/a \in A \text{ y } b \in B\}$

La regla de **correspondencia** indica el criterio con el cual se eligen las parejas de elementos del conjunto de partida y de llegada.

Figura 18. Definición de regla correspondencia de una función en el libro Texto de Trabajo Matemática 1

Fuente: Ministerio de Educación (2016c, p.139)

También se define el dominio y rango de una función, como se muestra en la siguiente Figura 19, y además se observa ejercicios donde los estudiantes tienen determinar el dominio y rango de funciones.

El conjunto que agrupa los primeros componentes de los pares ordenados de la función o elementos x, se llama **dominio** de la función. Se denota con *Dom (f)*.

El conjunto que agrupa los segundos componentes de los pares ordenados de la función o elementos y, se denomina **rango** de la función. Se denota con *Ran (f)*.

Ejemplo 1

Indica el dominio y rango de la función $f = \{(0; 0), (1; 4), (2; 8), (3; 12)\}$.

Solución

Los elementos de la función *f* son pares ordenados $(x; y)$ y tienen dos componentes. El primer componente es *x*, y el segundo componente es *y*.

- Si agrupamos los primeros componentes de los pares ordenados y formamos un conjunto, este se denomina **dominio** de la función $Dom(f) = \{0; 1; 2; 3\}$
- Si agrupamos los segundos componentes de los pares ordenados, entonces el conjunto se denomina **rango** de la función $Ran(f) = \{0; 4; 8; 12\}$

Dominio y rango también se pueden identificar en representaciones gráficas de funciones.

Figura 19. Definición de regla correspondencia de una función en el libro Texto de Trabajo Matemática 1

Fuente: Ministerio de Educación (2016c, p.140)

Luego, en segundo grado de secundaria, también se observa un capítulo donde se desarrolla la función lineal y se adiciona dentro de este capítulo el desarrollo de la función afín. En la Figura 20, se muestra un ejemplo, del tipo de ejercicios que resuelven los estudiantes, nuevamente se observa un ejercicio donde deben expresar el volumen en términos de una variable. Además, están familiarizados con preguntas donde se les pide que representen gráficamente una función

Función lineal afín

Un recipiente de 50 L de capacidad, que contiene 4 L de agua, se ubica debajo de una llave que surte 2 L de agua por minuto.

a. Hallemos la ecuación de la función *V* que expresa el volumen total de agua en el recipiente después de *x* minutos.

b. ¿Cuántos litros de agua tiene el recipiente después de 12 minutos?

c. ¿Cuántos minutos se requieren para llenar el recipiente?

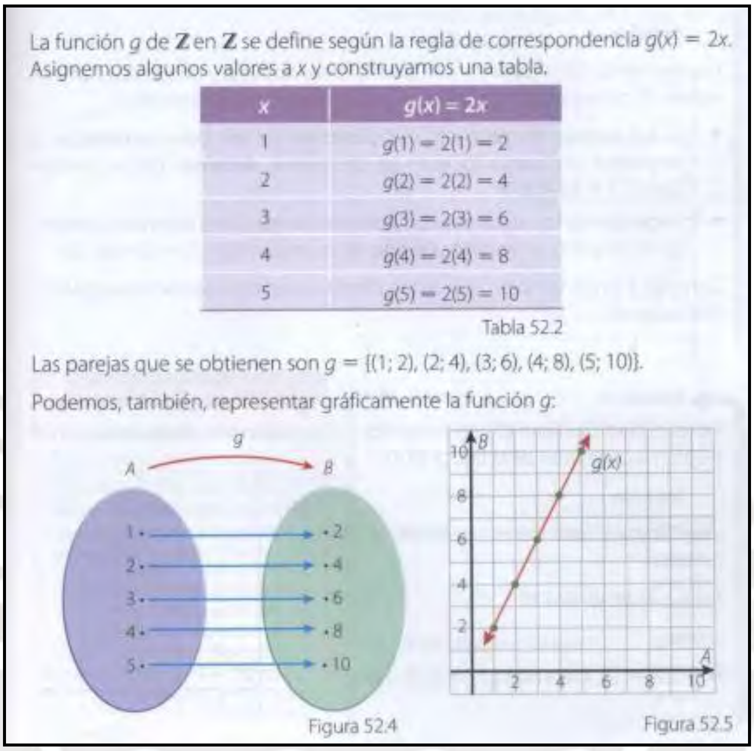
d. Hallemos el dominio y el rango.

e. Representamos gráficamente la función.

Figura 20. Ejercicio de aplicación de función afín en el libro Texto de Trabajo Matemática 2

Fuente: Ministerio de Educación (2016c, p.139)

Es importante mencionar que los estudiantes están familiarizados con los términos, regla de correspondencia, dominio y rango de una función debido a que en la situación didáctica, hemos incluido preguntas que involucran el conocimiento de estos términos. Además, asumimos que los estudiantes están familiarizados con actividades que involucran la construcción de una tabla, y el traslado de los datos de la tabla como pares ordenados para la construcción de la gráfica de una función, en base a las preguntas observadas en los libros, como ejemplo mostramos la Figura 21.



La función g de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$ se define según la regla de correspondencia $g(x) = 2x$. Asignemos algunos valores a x y construyamos una tabla.

x	$g(x) = 2x$
1	$g(1) = 2(1) = 2$
2	$g(2) = 2(2) = 4$
3	$g(3) = 2(3) = 6$
4	$g(4) = 2(4) = 8$
5	$g(5) = 2(5) = 10$

Tabla 52.2

Las parejas que se obtienen son $g = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8), (5; 10)\}$.

Podemos, también, representar gráficamente la función g:

Figura 52.4

Figura 52.5

Figura 21. Ejercicio de aplicación de función lineal en el libro Texto de Trabajo Matemática 1

Fuente: Ministerio de Educación (2016c, p.139)

Wilhelmi et al. (2006), señala que debido a que la enseñanza del valor absoluto se centra en el modelo aritmético y éste constituye un obstáculo didáctico, se tiene dos opciones: la primera consiste en retirar de manera temporal el estudio del valor absoluto hasta que las instituciones escolares logren una transposición didáctica pertinente de esta noción y la segunda opción consiste en posponer la enseñanza del valor absoluto hasta que los estudiantes inicien el estudio de funciones, centrando el estudio del valor absoluto como función, donde la representación gráfica debe ser una herramienta central. En base a este último criterio, es que se decidió trabajar con alumnos de tercer grado de secundaria, debido a que ellos ya tienen conocimiento de función lineal y afín, y podemos aprovechar ese conocimiento previo como un recurso para la enseñanza del valor absoluto como función.

3.3.3 Programa Curricular de la Institución Educativa Telesforo de Catacora.

Esta investigación se realizará en la Institución Educativa Telesforo de Catacora ubicada en el distrito de Ate en Lima. Por lo cual, es importante conocer el programa curricular que tiene planificada dicha institución para los alumnos de tercer grado de secundaria.

De acuerdo al programa curricular de dicha institución el estudio del valor absoluto está contemplado en la Unidad 1, correspondiente al primer bimestre, dentro del capítulo de Números Racionales. La programación anual, establece que el estudio del valor absoluto está contemplado dentro de la competencia resuelve problemas de cantidad, por lo que se verifica que el énfasis es aritmético tal como se observaba en el libro Texto Escolar Matemática 3 correspondiente al tercer grado de secundaria. Además, esta unidad incluye también el trabajo de ecuaciones e inecuaciones, dentro de la competencia resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio, tal como se observa en la siguiente figura.

PROGRAMACIÓN ANUAL- 2017

IV. NOMBRE DE LA UNIDAD	DURACIÓN	CAMPOS TEMÁTICOS	PRODUCTOS
Unidad I **"Realizamos lecturas matemáticas para mejorar nuestra comprensión lectora"** En la Institución Educativa Mixta "Teléforo Catacora" de Santa Clara se aprecia que la mayoría de los estudiantes y padres de familia tiene problemas para la comprensión de texto debido al poco hábito de la lectura. Esto trae como consecuencia inadecuados logros de niveles de aprendizaje como muestra los resultado de las diferentes evaluaciones aplicada por la UGEL y el MINEDU, por tal motivo los estudiantes en el área de matemática se ha propuesto desarrollar el proyecto "construyamos con la matemática y el lenguaje, las bases de nuestro aprendizaje" ¿Qué textos matemáticos te gustaría leer? ¿Cómo y en donde realizarías la lectura? ¿Cómo podemos saber cuántos tenemos una buena comprensión de textos en nuestra comunidad educativa	6	**Números racionales e irracionales, inecuaciones** **Cantidad:** Números racionales, Operaciones. Números Irracionales en la recta numérica. Intervalos. Valor absoluto. **Regularidad, equivalencia y cambio:** Inecuaciones lineales. Aplicaciones.	Informe a la comunidad educativa sobre la importancia del hábito de lectura.

Figura 22. Campos matemáticos de la unidad 1 en la programación anual de la IE. Telesforo Catacora
Fuente: Institución Educativa Telesforo Catacora (2017, p.8)

De acuerdo a la programación anual el estudio de la unidad 1, tiene una duración de 6 semanas, con 36 horas pedagógicas. El primer bimestre se tiene programado inicie en el 13 de marzo y termine el 9 de Junio del 2017. Por lo que al momento de aplicar tanto el cuestionario como la secuencia de actividades, los estudiantes ya habrán realizado el estudio del valor absoluto.

En el siguiente capítulo, mostramos los resultados del análisis implicativo del cuestionario aplicado a los estudiantes antes de realizar la secuencia de actividades.

.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO –PRIMERA PARTE

En ésta sección se presenta los resultados del análisis cohesitivo que se realizó al aplicar el cuestionario a los estudiantes antes de aplicar la secuencia de actividades. Donde se muestra que las implicancias que hay entre los tipos de errores y la concepciones que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto.

4.1 Análisis Cohesitivo

En la siguiente figura se observa el árbol cohesitivo completo que se ha obtenido con los resultados del cuestionario aplicado a los estudiantes antes de aplicar la secuencia de actividades. La gráfica muestra 34 reglas o clases, de los cuales 8 son nodos significativos. Para facilitar la interpretación, se ha clasificado las reglas en 11 clases de reglas, tal como se observa en la siguiente figura.

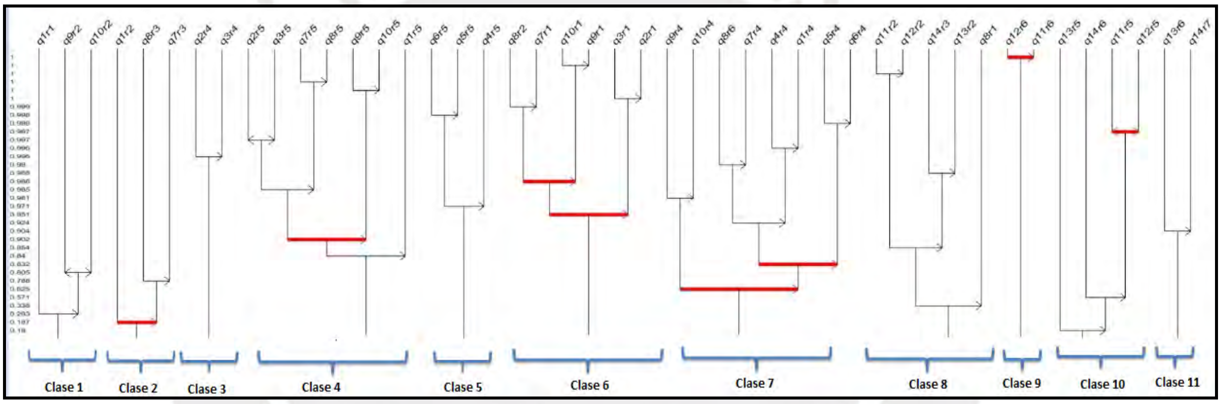


Figura 23. Árbol cohesitivo antes de la situación didáctica

Fuente: Propio

El nivel de cohesión de todas las reglas obtenidas en el árbol cohesitivo de la Figura 23 se muestran en el Anexo 3. Con fines interpretativos se analizará sólo aquellas clases que poseen un nivel de cohesión mayor o igual a 0.5, esto en base a la siguiente afirmación: "La transitividad, que dirige la interpretación en términos de caminos, es aceptada para un valor de confianza mayor o igual a 0.5" (Almouloud, p.309, 2008). Por lo tanto, no se interpretará clases como la clase 2 (q1r2→(q8r3→q7r3)), la cual muestra que los alumnos cuya concepción del valor absoluto de un número es la del número sin signo, presentan errores del tipo regla mecánica al resolver ecuaciones del tipo $|x|=a$, debido a que la implicancia de esta regla tiene un nivel de cohesión igual a 0.187, lo cual muestra que esta situación es poco probable que ocurra.

Empezaremos analizando las clases 6 y 7 debido a que poseen cada una dos nodos significativos.

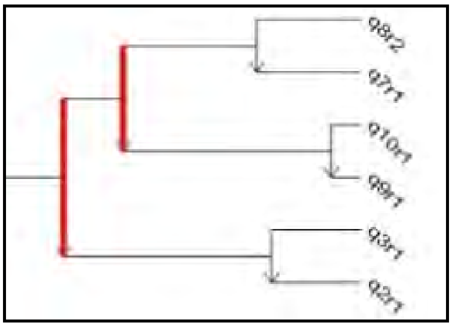


Figura 24. Clase 6 del árbol cohesitivo de la figura 23

Fuente: Propio

Clase 6 [(q8r2→q7r1)→(q10r1→q9r1)]→(q3r1→q2r1)- nivel de cohesión 0.951

La regla (q8r2→q7r1) indica que aquellos alumnos que cometieron un error de interpretación de la definición del valor absoluto al responder la pregunta $|x|=-6$, probablemente también cometieron el mismo tipo de error al responder la pregunta $|x|=5$. La regla (q10r1→q9r1) indica que los alumnos que cometieron un error de interpretación al resolver la ecuación $|x+2|=-3$ como si fuera una ecuación sin valor absoluto $x+2= -3$, probablemente también cometieron un error de interpretación al resolver la ecuación $|x+2|=3$ como si fuera la ecuación $x+2=3$ sin valor absoluto

Por la tanto la regla (q8r2→q7r1)→(q10r1→q9r1) indica que aquellos alumnos que presentaron el comportamiento del primer grupo, es decir los estudiantes que cometieron un error de interpretación al resolver ecuaciones del tipo $|x|=b$, probablemente también cometieron un error de interpretación al resolver ecuaciones del tipo $|x+a|=b$.

La regla (q3r1→q2r1) indica que aquellos alumnos que no cometieron error al resolver |-3| probablemente tampoco cometieron error al resolver |2|. Finalmente la clase [(q8r2→q7r1)→(q10r1→q9r1)]→(q3r1→q2r1) muestra que aquellos alumnos que muestran el comportamiento descrito para la regla(q8r2→q7r1)→(q10r1→q9r1), probablemente no presenten errores al resolver |2| y |-3|, esta implicación tiene un nivel de cohesión de 0.951. Es decir, aquellos estudiantes que tienen errores de interpretación al resolver ecuaciones del tipo $|x|=b$ y del tipo $|x+a|=b$, probablemente no tengan errores cuando resuelvan el valor absoluto de valores números conocidos.

Esto se debe a que en estas dos preguntas se trabaja con valores numéricos, por lo tanto la introducción de variables hace que este tipo de error se evidencie. Al respecto Chiarugi, Fracazina & Furinguetti (1990), señalan que las dificultades surgen cuando se realiza el cambio del campo aritmético al campo algebraico, es en este proceso donde los alumnos tienen dificultad para interpretar la noción de valor absoluto. La definición con la que han trabajado estos alumnos es la siguiente “Si un número es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él” (Ministerio de educación, 2016d). De acuerdo a Chiarugi, Fracazina & Furinguetti (1990), los alumnos no se percatan de la palabra condicional “si” dada en la definición de valor absoluto. En este caso, pueden interiorizar sólo la segunda parte de la definición y dejar de lado la primera.

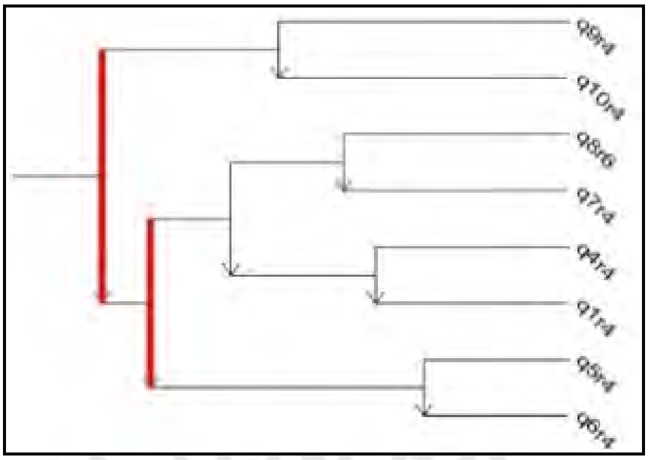


Figura 25. Clase 7 del árbol cohesitivo de la figura 23

Fuente: Propio

Clase 7 (q9r4→q10r4)→{[(q8r6→q7r4)→(q4r4→q1r4)]→(q5r4→q6r4)}-nivel de cohesión 0.625

La regla ((q8r6→q7r4)), indica que aquellos alumnos que no resolvieron la ecuación $|x|= -6$, probablemente tampoco resolvieron la ecuación $|x|=5$. La regla (q4r4→q1r4) muestra que aquellos estudiantes que no resolvieron las ecuaciones donde tenían que expresar el valor absoluto de una variable conociendo el signo de la variable, probablemente tampoco respondieron qué es el valor absoluto. Por lo tanto, la regla (q8r6→q7r4)→(q4r4→q1r4) muestra que si un alumno no resolvió las ecuaciones del tipo $|x|=b$, probablemente no respondió la pregunta qué es el valor absoluto.

La regla (q5r4→q6r4) muestra que los alumnos que no expresaron $|x|$ en términos de x sabiendo que x es negativo, probablemente tampoco expresaron el $|x|$ en términos de x sabiendo que x es positivo. Entonces, la regla [(q8r6→q7r4)→(q4r4→q1r4)]→(q5r4→q6r4), muestra que aquellos alumnos que mostraron el comportamiento descrito para la regla (q8r6→q7r4)→(q4r4→q1r4), probablemente tampoco resolvieron las preguntas que involucraban hallar valores absolutos de variables en términos de la variable sabiendo el signo de la variable, esto con un nivel de cohesión de 0.832. Se entrevistó a algunos alumnos que mostraron este comportamiento, muchos no respondieron porque no recordaban o no sabían que era el valor absoluto de un número, a pesar de haber visto este tema en este año, durante el primer bimestre del año escolar.

La regla (q9r4→q10r4) muestra que aquellos alumnos que no respondieron a la pregunta $|x+2|=3$, probablemente tampoco respondieron a la pregunta $|x-3|=-2$. Ambas ecuaciones son del tipo $|x+a|=b$.

Como conclusión, la clase (q9r4→q10r4)→{[(q8r6→q7r4)→(q4r4→q1r4)]→(q5r4→q6r4)}, muestra que los alumnos que no responden a ecuaciones del tipo $|x+a|=b$, probablemente mostraran el comportamiento descrito para la regla [(q8r6→q7r4)→(q4r4→q1r4)]→(q5r4→q6r4), es decir si un alumno no resolvió la ecuación del tipo $|x+a|=b$, probablemente tampoco resolvió las preguntas donde tenían que expresar el valor absoluto en términos de una variable conociendo el signo de la variable y esto se debe a que no tiene una noción acerca del valor absoluto.

A continuación, realizaremos la interpretación de las clases que presentaron un nodo de significancia, empezando por aquellas clases cuyo nodo de significancia presentó un nivel de cohesión más alto.

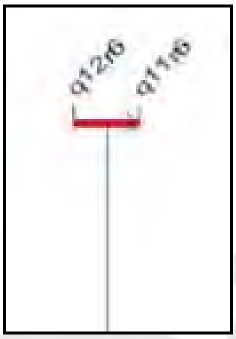


Figura 26. Clase 9 del árbol cohesitivo de la figura 23
Fuente: Propio

Clase 9 (q12r6→q11r6)-nivel de cohesión 1

Aquellos alumnos que presentaron otros tipos de errores no esperados en la inecuación $|x|\geq 2$, probablemente también presentaron otro tipo de errores no esperados en la inecuación $|x|\leq 4$. Esto con un nivel de cohesión 1. Estos errores no necesariamente están asociados a alguna concepción de valor absoluto, pueden estar asociados más a la dificultad propia del trabajo con inecuaciones. Como ejemplo, se puede citar al alumno a quién hemos codificado como A8, el cual respondió que el conjunto solución de $|x|\geq 2$ es $]-\infty,2]$ y al costado de su respuesta escribieron que el símbolo ">" significa menor, por lo que respondieron ante la inecuación $|x|\geq 2$, entendieron que x son todos los valores menores o iguales a 2. Esta respuesta, debe a un error de interpretación de los símbolos de desigualdad en la inecuación dada, antes de un error de interpretación de la noción de valor absoluto.

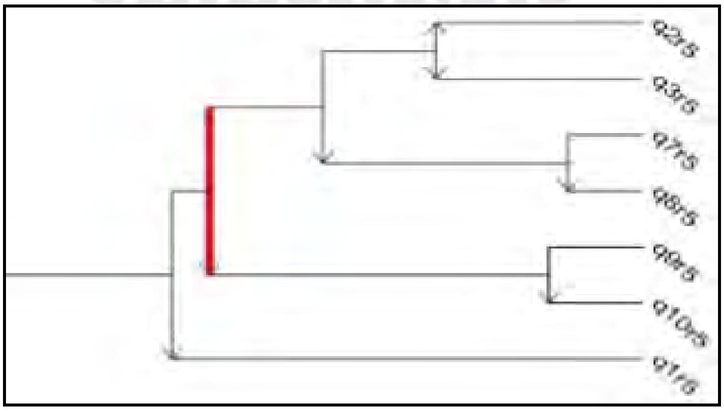


Figura 27. Clase 4 del árbol cohesitivo de la figura 23
Fuente: Propio

Clase 4{[(q2r5↔q3r5)→(q7r5→q8r5)]→(q9r5→q10r5)}→q1r5)-nivel de cohesión 0.902

La regla (q2r5↔q3r5)→(q7r5→q8r5) indica que aquellos alumnos que dieron respuestas no esperadas a las preguntas del cálculo del valor absoluto de un número conocido, probablemente también dieron respuestas no esperadas en ecuaciones del tipo $|x|=b$.

La regla (q2r5↔q3r5)→(q7r5→q8r5)]→(q9r5→q10r5) muestra si un alumno presenta el comportamiento descrito para la regla (q2r5↔q3r5)→(q7r5→q8r5), probablemente también dieron respuestas no esperadas las ecuaciones del tipo $|x+a|=b$.

Finalmente la clase {[(q2r5↔q3r5)→(q7r5→q8r5)]→(q9r5→q10r5)}→q1r5) muestra que si un alumno muestra el comportamiento en el párrafo anterior, probablemente dieron respuestas no esperadas respecto a qué entienden por el valor absoluto de un número. Todo esto con un nivel de cohesión de 0.84. Como ejemplo, se puede citar al alumno a quién hemos codificado como A12, cuya respuesta de valor absoluto fue la siguiente: "el valor absoluto de un número es la parte entera de un decimal o fracción", esta es una respuesta incorrecta no esperada, y se entiende que debido a la ausencia de la noción correcta de valor absoluto, el estudiante presente errores no esperados al resolver ecuaciones con valor absoluto, por ejemplo el mismo estudiante en la pregunta 10, cuya ecuación es $|x+2|=3$, dio como respuesta C.S=[1,2,3,…+∞[

Muchos estudiantes del grupo presentaron este comportamiento, es decir, no tenían una noción correcta del valor absoluto de un número. Es decir, la mayor parte de los errores que presentaron los estudiantes, no se debió a una concepción correcta en particular del valor absoluto, sino a la ausencia de una noción en sí.

A continuación, también se presentarán, la interpretación de las otras clases, que a pesar de no presentar un nodo de significancia, presentan nivel de cohesión alto.

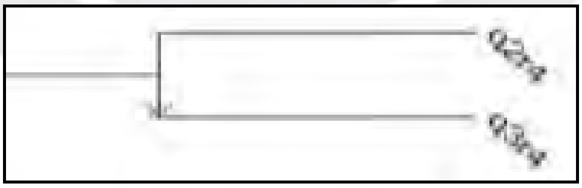


Figura 28. Clase 3 del árbol cohesitivo de la figura 23

Fuente: Propio

Clase 3 (q2r4→q3r4)-nivel de cohesión 0.996

Aquellos alumnos que no dieron resolvieron |2|, probablemente tampoco dieron respuesta a la pregunta |-3|, esto con un nivel de cohesión de 0.996. Esta respuesta no necesariamente estuvo asociada a alguna concepción en particular de valor absoluto

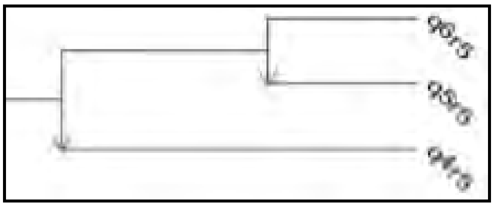


Figura 29. Clase 5 del árbol cohesitivo de la figura 23

Fuente: Propio

Clase 5 (q6r5→q5r5)→q4r5-nivel de cohesión 0.971

La regla (q6r5→q5r5) indica que aquellos alumnos que dieron respuestas no esperadas cuando tenían que expresar el $|x|$ en términos de x sabiendo que x puede ser cualquier número real, probablemente también dieron respuestas no esperadas cuando tenían que expresar el $|x|$ en términos de x sabiendo que x es negativo.

Por lo tanto, la clase (q6r5→q5r5)→q4r5 muestra que si un alumno presenta las características descritas para la regla (q6r5→q5r5), probablemente también tenga respuestas no esperadas cuando tengan que expresar el $|x|$ en términos de x sabiendo que x es un número positivo, todo esto con un nivel de cohesión de 0.971.

Las preguntas 4, 5 y 6 del cuestionario (Anexo 1) tienen algo en común, todas estas preguntas buscan que el estudiante exprese el valor absoluto de una variable en términos de la variable conociendo el signo de la variable. Esto indica que muchos estudiantes, no están familiarizados con preguntas donde tienen que expresar el resultado en términos de una variable.

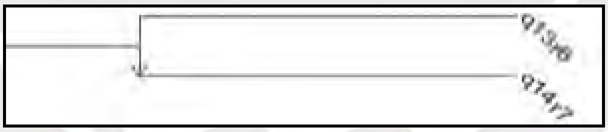


Figura 30. Clase 11 del árbol cohesitivo de la figura 23

Fuente: Propio

Clase 11 (q13r6→q14r7)-nivel de cohesión 0.904

Aquellos estudiantes que presentaron otro tipo de errores no esperados al resolver la inecuación $|x+1|\geq 3$, probablemente también presentaron otro tipo de errores no esperados al resolver la inecuación $|x-1|<3$. Esto con un nivel de cohesión de 0.904. Estos tipos de errores no necesariamente están asociados a alguna concepción en particular de valor absoluto, como ejemplo citamos al alumno con código A16, cuya respuesta a la inecuación $|x+1|\geq 3$ fue que el conjunto solución fue $[2,-\infty[$, posiblemente, éste relacionado a problemas de expresión de intervalos o dificultades porpias de la resolución de inecuaciones.

Al cuantificar las respuestas de los estudiantes, acerca de la noción que tienen acerca del valor absoluto de un número, tenemos lo siguiente:

Tabla 5. Noción de valor absoluto antes de aplicar la secuencia de actividades

Noción de Valor Absoluto	Cantidad	Porcentaje
Noción equivocada	14	0.39
Sin respuesta	14	0.39
Noción desde el contexto aritmético	6	0.17
Noción desde el contexto geométrico	2	0.05
Noción desde el contexto funcional	0	-
Total	36	1

Finalmente, podemos decir que el análisis cohesitivo, ha mostrado las implicancias que hay entre la noción que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto y los tipos de errores que presentan, de la siguiente manera:

- Las nociones equivocadas del valor absoluto de un número, implica errores no esperados en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.
- La ausencia de una noción acerca del valor absoluto de un número, implica errores no esperados o ausencia de respuesta al resolver inecuaciones y ecuaciones con valor absoluto.
- La noción de valor absoluto desde el contexto aritmético, implica errores del tipo regla mecánica en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Este análisis también ha mostrado comportamientos que están relacionados a obstáculos didácticos, en términos de tipos de errores que presentan los estudiantes:

- Se observó implicación entre el tipo de error mecánico entre ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Este análisis también ha mostrado comportamientos que están relacionados a obstáculos epistemológicos, en términos de tipos de errores que presentan los estudiantes:

- Se observó implicación entre tipo de error epistemológico entre ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

A continuación, el capítulo V donde se describe la concepción y el análisis a priori realizado en esta investigación.

CAPITULO V: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

En ésta sección se presenta la situación problema, las variables macro y micro-didácticas que se trabajarán en la situación didáctica propuesta, así como las tres actividades que se trabajaran y el propósito de cada uno de ellas. Además, se muestra el análisis a priori, donde se describen los tipos de interacción y comportamientos esperados.

5.1 Situación Problema

Partimos de una situación problema ubicada dentro de un contexto geométrico, no se resolverá problemas en contextos extra-matemáticos, debido a que el análisis epistemológico realizado por Gagatsis y Thomaidis (1995) muestra que, el valor absoluto surgió dentro de la misma matemática como una necesidad de evitar operaciones imposibles, relacionadas al trabajo con los números negativos.

Se decidió introducir la noción de valor absoluto como función, esto debido a lo reportado por Wilhelmi et al. (2007) quienes recomiendan que la introducción del valor absoluto debería darse desde el contexto funcional, además, el análisis cohesitivo evidenció que aquellos estudiantes que manejaban la definición aritmética del valor absoluto, probablemente presentaban errores del tipo regla mecánica al resolver ciertas ecuaciones e inecuaciones.

La situación problema está diseñada, para que los alumnos hallen indirectamente la regla de correspondencia de la función por partes del valor absoluto, al intentar hallar el área del triángulo ABC que se muestra en la siguiente figura, en función del valor que tome la abscisa de los vértices B y C representado por *x*, al ser el área una unidad de medida, siempre tomará valores positivos.

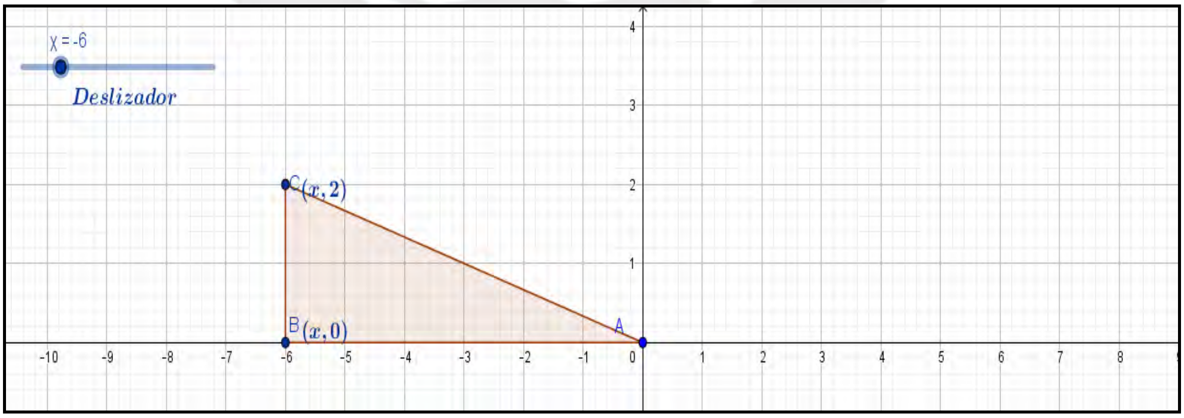


Figura 31. Situación problema en contexto geométrico

Fuente: Propio

Como se observa en la figura 31, se hará uso de un deslizador, esto con la finalidad de que los alumnos trabajen con la noción de variable, de manera que finalmente puedan expresar el área del triángulo en términos de *x*. El detalle del trabajo con el deslizador se explica más adelante en el item 5.4.2. Se dicidió trabajar con deslizadores debido a que el análisis cohesitivo evidenció que la ausencia de una concepción correcta de valor absoluto implicó que muchas de las preguntas donde los estudiantes tenían que expresar el valor absoluto de una variable en términos de la variable quedaran sin respuesta. Además, buscamos que los alumnos se familiaricen con el tipo de preguntas donde deben expresar sus resultados en términos de una variable.

Esta situación problema, requiere que el estudiante movilice algunos conocimientos previos. De acuerdo al Currículo Nacional de la Educación Básica (Ministerio de Educación, 2016a), en el nivel VI correspondiente al primer y segundo grado de secundaria, se espera que los alumnos utilicen estrategias, procedimientos y recursos para determinar áreas de formas geométricas convencionales. Conjuntamente, al análisis didáctico que realizamos en el capítulo III, mostró que los alumnos están familiarizados con los términos regla de correspondencia, dominio y rango correspondiente al tema de funciones.

Por otro lado, el análisis cohesitivo, mostró que los estudiantes presentaban errores del tipo regla mecánica, errores asociado al obstáculo didáctico de creer que el valor absoluto es sólo un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente por lo que a partir de estos resultados se decidió trabajar con GeoGebra en las actividades donde los estudiantes empiecen a resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, mediante el uso de deslizadores que permitan ver la gráfica de la función, a manera de evitar la presencia de este tipo de errores durante el desarrollo de nuestra secuencia, además en base a lo expuesto en los antecedentes por Sierpinska, Bobos & Pruncut (2011) la visualización, desempeña un papel importante en el trabajo con valor absoluto.

5.2 Variables Macro-didácticas

En el siguiente cuadro se muestran las variables macro-didácticas que se han considerado en esta investigación para la fase experimental:

Tabla 6. Variables macro-didácticas

Variable Macro-didáctica	Descripción
Organización de alumnos	Los alumnos trabajarán en parejas y de forma individual
Ambiente de realización	Ambiente de GeoGebra (Actividad I) Ambiente de papel y lápiz (Actividad I, II, III)
Formato de material para las actividades	Formato digital (Actividad I) Formato impreso (Actividad I, II y III)

5.3 Variables Micro-didácticas

En el siguiente cuadro se muestran las variables micro-didácticas, variables que se han escogido con la finalidad de modificar el comportamiento de los estudiantes.

Tabla 7. Variables micro-didácticas

Variables	Valores	Código	Ejemplo
Argumento de la función	Número entero	V1.a	$\lvert -15\rvert$, $\lvert 18\rvert$
	Expresión algebraica	V1.b	$\lvert x\rvert$, $\lvert x-4\rvert$
	Expresión algebraica sin ayuda gráfica	V1.c	$\lvert x+30\rvert$
Valor de la función	Número real positivo	V2.a	$\lvert x\rvert=17$, $\lvert x-4\rvert=3$
	Número real negativo	V2.b	$\lvert x\rvert= -2$, $\lvert x-4\rvert= -2$
Tipo de relación	Igualdad	V3.a	$\lvert x\rvert=17$, $\lvert x-4\rvert=3$
	Desigualdad	V3.b	$\lvert x\rvert\leq 3$, $\lvert x+3\rvert>2$
	Desigualdad sin ayuda gráfica	V3.c	$\lvert x+10\rvert>5$

Se espera que estas variables didácticas produzcan un cambio en el comportamiento de los estudiantes en términos de estrategias de solución o tipos de respuestas.

5.4 Diseño de la Secuencia Didáctica

5.4.1 Panorama General

La secuencia de actividades consiste en 3 actividades relacionadas, usando las variables micro-didácticas descritas.

Tabla 8. Objetivos de las actividades y variables didácticas involucradas

ACTIVIDAD	TIEMPO ESTIMADO	OBJETIVOS	VARIABLES DIDÁCTICAS
I	90 minutos	Los alumno hallen la regla de correspondencia de la función por partes del valor absoluto, identificando su dominio y rango	V1.a V1.b V2.a V2.b V3.a
		Los alumnos reconozcan que al evaluar la función valor absoluto, el resultado siempre será positivo	
II	45 minutos	Los alumnos representen gráficamente las funciones del tipo $f(x)=\lvert x+a\rvert$	V1.b V1.c V2.a V2.b V3.a
		Los alumnos resuelvan ecuaciones del tipo $\lvert x+a\rvert=b$	
		Los alumnos reconozcan que al evaluar la función valor absoluto, el resultado siempre será positivo	
III	45 minutos	Los alumnos resuelvan las inecuaciones del tipo: $\lvert x\rvert\leq b$, $\lvert x\rvert\geq b$, $\lvert x+a\rvert\leq b$, $\lvert x+a\rvert\geq b$	V3.b V3.c

5.4.2 Actividades Diseñadas

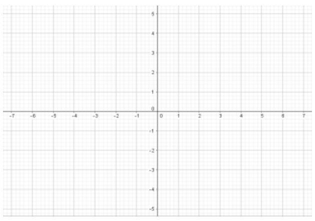
A continuación se detalla la secuencia de actividades la justificación de cada ítem en las actividades.

Actividad I

El material de trabajo para la actividad 1 consiste en la Ficha de Trabajo N°1 (Anexo 5) y un archivo en GeoGebra al que hemos nombrado GeoGebra 1. Este archivo contiene un triángulo ABC, ubicado en el plano coordenado, y el deslizador cuyos valores varían desde -10 hasta 10 unidades, este deslizador está representado por la letra *x* y representa la abscisa del punto B, en el triángulo ABC. (Ver Figura 30). La actividad I, está compuesta de dos partes, una donde el trabajo se realizará de forma individual y otra parte donde los alumnos trabajarán de forma grupal. La parte individual, consta de 5 preguntas, cuya finalidad es que los alumnos se familiaricen con la gráfica, la manipulación del deslizador y que recuerden saberes previos respecto al cálculo de área de triángulos.

En la siguiente tabla, se muestran las preguntas de la parte individual de la Ficha de trabajo N°1, y además se explica el objetivo de cada pregunta.

Tabla 9. Secciones a, b, c, d, y e de la ficha de trabajo N°1.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>
a. ¿Qué representa x en la figura? ¿La forma del triángulo cambia cuando x varía?
b. En la siguiente tabla, complete el área del triángulo para cada valor que tome x.
<table>
<tr><th>x</th><th>Área del triángulo ABC</th></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td></td></tr>
<tr><td>-3</td><td></td></tr>
</table>
Luego responde ¿El valor del área del triángulo depende del valor que toma x?
</td><td>Esta actividad se realiza con la finalidad de que los alumnos, entren en la fase de acción, empiecen a manipular el deslizador y reconozcan que el área del triángulo ABC dependencia de los valores que toma x</td></tr>
<tr><td>
c. En el plano cartesiano, ubica los puntos correspondientes a los pares ordenados obtenidos en la tabla anterior.

d. Traza la gráfica de la función área del triángulo ABC
</td><td>Esta actividad busca que los alumnos puedan representar indirectamente la gráfica de la función valor absoluto.</td></tr>
</table>

e. Luego, completa i. Si x=-6, entonces el área del triángulo ABC es___ ii. Si x=7, entonces el área del triángulo ABC es___ iii. Si x=-21, entonces el área del triángulo ABC es___ iv. Si x=47, entonces el área del triángulo ABC es___ v. Si x=-125, entonces el área del triángulo ABC es___ vi. Si x=230, entonces el área del triángulo ABC es___	Esta actividad tiene por finalidad que los alumnos deduzcan las respuestas a partir de la representación gráfica que han obtenido en el ítem anterior y que reconozcan que el valor de la función siempre es positivo.

La parte grupal, consta de 4 preguntas, cuya finalidad es que los alumnos obtengan indirectamente la regla de correspondencia de la función valor absoluto, al hallar indirectamente la regla de correspondencia del área del triángulo ABC en función de *x*. En la siguiente tabla, se muestran las preguntas de la parte grupal de la Ficha de Trabajo N°1, y además se explica el objetivo de cada pregunta.

Tabla 10. Secciones f, g, h, i y j de la ficha de trabajo N°1.

Descripción	Justificación
De acuerdo a la gráfica de la función área de triángulo ABC, responde: f. ¿Cuál es el dominio y rango de la función? g. Completar: i. Si x=10, el área del triángulo ABC es____ ii. Si x=-15, el área del triángulo ABC es____ iii. Si $x=a$, donde a representa un valor positivo, el área del triángulo ABC en función de a es _________ iv. Si $x=b$, donde b representa un valor negativo, el área del triángulo ABC en función de b es _________ h. ¿Cuál es la regla de correspondencia $A(x)$ que expresa el área del triángulo ABC en función de x?	La sección f busque que los alumnos identifiquen el dominio y rango de la función, de manera que esto les sirva como recurso justificación para su respuesta en ítem j. La sección g, busca que los estudiantes expresen el área del triángulo ABC, en términos de variables, para que finalmente en la pregunta h determinen la regla de correspondencia de la función valor absoluto.
i. De acuerdo a la regla de correspondencia $A(x)$, que expresa el área del triángulo ABC en función de x, evalúa cada caso: i. $A(-5)$= ii. $A(5)$= iii. $A(14)$= iv. $A(-14)$= j. Para las siguientes igualdades señale si existe al menos un valor para x que la satisfaga. Si no lo hay, explique. i. Si $A(x)$= 4 ii. Si $A(x)$= 17 iii. Si $A(x)$= -2	La finalidad de esta pregunta es que los alumnos reconozcan que el resultado de la función valor absoluto con regla de correspondencia $f(x)=x$ siempre es positivo.

Actividad II.

La finalidad de la actividad II es que los alumnos puedan representar gráficamente las funciones $f(x)=|x+a|$, y que puedan resolver ecuaciones del tipo $|x+a|=b$. Al inicio de esta actividad se da unas indicaciones al alumno para que ingresen al archivo GeoGebra 2, y para que manipule el deslizador, con la finalidad de que el estudiante pueda observar los cambios en la representación gráfica de la función, tal como se muestra en la siguiente figura.

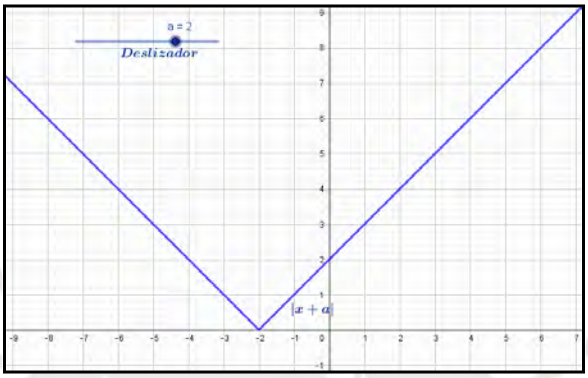


Figura 32. Imagen del archivo GeoGebra 2
Fuente: Propio

A continuación, detallamos la justificación de cada pregunta de Ficha de Trabajo N°2 correspondiente a la actividad II.

Tabla 11. Preguntas de la ficha de trabajo N°2.

Descripción	Justificación
1. Responde las siguientes preguntas: a. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a toma valores positivos? b. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a toma valores negativos? c. ¿Qué pasó con la gráfica de $\|x-4\|$comparada con la gráfica de $\|x\|$? d. Determina el conjunto solución de $\|x-4\|=3$ e. Determina el conjunto solución de $\|x-4\|=-2$? ¿Si existe cuáles son? f. Existe alguna diferencia entre el conjunto solución de la pregunta d y el conjunto solución de la pregunta e. Explique su respuesta.	Los ítems a y b, tienen la finalidad de que los alumnos observen los cambios que ocurren con la gráfica cuando a toma valores positivos y negativos. La finalidad del ítem c es que el alumno identifique la cantidad de unidades que se traslada la gráfica. La finalidad del ítem d es que los alumnos resuelvan la igualdad gráficamente. La pregunta en el ítem e, es una que en investigaciones pasadas ha reportado errores relacionados al obstáculo didáctico de creer el valor absoluto es sólo un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente, de modo que la finalidad de esta pregunta reforzar la noción de que la función con regla de correspondencia $f(x)=\|x+a\|$ nunca puede tomar valores negativos.

2. Grafica la siguientes funciones en el plano cartesiano dado a. $f(x)=\|x+8\|$ b. $f(x)=\|x-8\|$ c. Determine el conjunto solución de $\|x+8\|=10$ d. Determine el conjunto solución de $\|x-8\|=10$	La finalidad de la pregunta 2 es que los alumnos puedan realizar la gráfica de las funciones, sin ayuda del deslizador, el cual tiene un rango de valores que va desde -5 hasta 5, por lo cual se verán en la necesidad de graficar manualmente, los casos a y b La finalidad de los ítems c y d es que los alumnos puedan resolver las ecuaciones, apoyándose en la gráfica que han realizado en la sección a y b
3. Resolver: a. Determine el conjunto solución de $\|x+10\|=6$ b. Determine el conjunto solución de $\|x-2\|=10$?	La finalidad de esta pregunta es que los estudiantes puedan resolver las ecuaciones, esta vez sin ayuda gráfica.

Actividad III

La finalidad de la actividad III, es que los alumnos puedan resolver inecuaciones de la forma $|x+a|\geq b$, $|x+a|\leq b$, al inicio de esta actividad se da indicaciones al alumno para que pueda acceder al archivo GeoGebra 3, y que al manipular los deslizadores *a* y *b* observen los cambios en la figura. Los valores que toma *a* en el deslizador van desde -5 hasta 5 y los valores que toma *b* en el deslizador van desde 0 hasta 10.

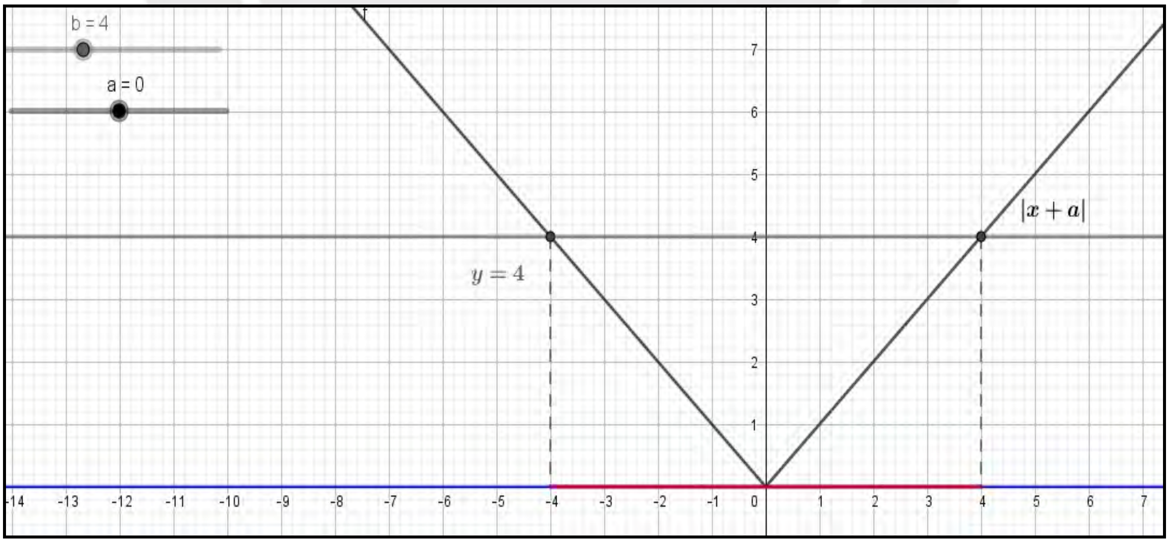


Figura 33. Situación problema en contexto geométrico

Fuente: Propio

A continuación, detallamos la justificación de la pregunta 1, 2 y 3 de la Ficha de Trabajo N°3, correspondiente a la actividad III, donde los alumnos trabajarán en parejas.

Tabla 12. Preguntas de la ficha de trabajo N°3

Descripción	Justificación
1. Completar cada oración con una de las palabras (mayores o menores) según corresponda a. Los valores de la función en la parte superior son ___________a *b*? b. Los valores de la función en la parte inferior son ___________ a *b*?	La pregunta 1 tiene por finalidad que los alumnos puedan reconocer la parte de la función cuyos valores son mayores a *b*, y la parte de la función cuyos valores son menores a *b*
2. Con ayuda de la gráfica, responde las siguientes preguntas : a. ¿Si a=0 y b=3, que representa la franja roja? b. ¿Si a=0 y b=3, que representa la franja azul? c. Determina el conjunto solución de $\|x\|\leq 5$ d. Determina el conjunto solución de $\|x\|>4$ e. Determina el conjunto solución de $\|x-2\|\leq 3$ f. Determina el conjunto solución de $\|x+3\|>4$	La finalidad de los ítems a y b, es que los alumnos identifiquen que la franja roja en el archivo GeoGebra 3, que se observa en la Figura 32 representa los valores donde la función toma valores menores a *b*, y la franja azul representa los valores donde la función toma valores mayores a *b*. Los ítems c, d, e y f tiene por finalidad que los alumnos resuelvan las inecuaciones observando las franjas rojas y azules en el eje *x*.
3. Responde las siguientes preguntas a. Determina el conjunto solución de $\|x\|\geq 12$ b. Determina el conjunto solución de $\|x\|<15$ c. Determina el conjunto solución de $\|x+10\|>5$ d. Determina el conjunto solución de $\|x-10\|\leq 6$	La finalidad de esta pregunta es que los alumnos puedan resolver las inecuaciones, esta vez sin ayuda de los deslizadores, apoyándose en una representación gráfica

5.4.3 Comportamientos Esperados

En la siguiente tabla se muestra los comportamientos esperados en cada uno de los ítems de las actividades I, II y III.

Tabla 13. Comportamientos esperados en la parte individual de la ficha de trabajo N°1

Ítem	Comportamientos esperados
I.a	Se espera que los alumnos inicien la actividad manipulando el deslizador para poder responder las preguntas. Se espera que identifiquen que *x* es la abscisa de las coordenadas del vértice B y C, y que reconozcan que la forma del triángulo cambia cuando *x* cambia
I.b	Se espera que los alumnos puedan utilizar la fórmula (*longitud de la base* x *longitud de la altura*/2) para calcular el área del triángulo, con finalidad de completar la tabla, se espera que cuando *x* tome valores negativos, los alumnos reconozcan que la longitud tanto la base como de la altura deben tomar valores positivos para realizar el cálculo del área debido a que porque son unidades de medida. Se espera que hagan los cálculos para los primeros

	valores de la tabla, pero que luego puedan completar los valores finales, sin necesidad de hacer el cálculo. Se espera que los alumnos reconozcan una relación funcional entre *x* y el área del triángulo, de manera que declaren que el área del triángulo sí depende de los valores que tome *x*
	Puede ser que algunos alumnos no recuerden la fórmula del cálculo del área del triángulo, de ser el caso se preguntará a la clase, cómo se calcula el área de un triángulo, con la finalidad de que la respuesta salga de los propios alumnos
I.c	Se espera que los alumnos ubiquen los puntos correspondientes a los pares ordenados obtenidos en la tabla.
I.d	Se espera que los alumnos puedan graficar la función *A* que representa el área del triángulo ABC en función de *x*, logrando que de manera indirecta grafiquen la función valor absoluto.
I.e	Se espera que los alumnos puedan dar el valor de la función para cada uno de los casos i y ii observando la gráfica, y para los casos iii, iv, v y vi, puedan inferir la respuesta, por la forma de la gráfica.

A continuación se muestra los comportamientos esperados en la parte grupal de la actividad I.

Tabla 14. Comportamientos esperados en la parte grupal de la ficha de trabajo N°1

Ítem	Comportamientos esperados
I. f	Se espera que expresen que: Dom (A)=]-∞, +∞[y Rang (A)=[0,+∞[. Esto debido a que están familiarizados con los términos dominio y rango, así como con el de intervalos, abiertos, semi-abiertos e ilimitados. De manera que reconozcan que los valores que toma la función siempre es mayor o igual a cero.
I.g	Se espera que los alumnos puedan generalizar lo observado con los valores numéricos a variables y que expresen que si *a* toma valores positivos el área del triángulo será *a*, pero si *b* toma valores negativos el área del triángulo será *b*
	Puede ser que algunos alumnos tengan dificultades para interpretar la siguiente frase “el área del triángulo en función de *a* es”, de presentarse esa situación se explicará un ejemplo en el contexto de función lineal, donde los alumnos deban expresar el resultado en función de una variable.
	Puede ser que esta actividad genere dudas, sobre todo cuando expresen que el área del triángulo es $–b$, pero al hacer esta actividad en grupo, se espera que entre los compañeros intercambien información, y que si hay diferencias cada uno justifique su respuesta, reemplazando valores para la variable *b* verificando su respuesta.
I.h	Se espera que expresen la regla de correspondencia del área del triángulo es $A(x)= x$ si $x≥0$, o $A(x)=-x$ si $x<0$. No necesariamente utilizaran la mismas palabras, sin embargo se espera que reconozcan que el valor de la función depende del signo de *x*.

I.i	Se espera que los alumnos evalúen la función sin ninguna dificultad
I.j	Se espera que los alumnos resuelvan los ítems i y ii, sin dificultad, y que respondan que si *A(x)*=4, entonces x es 4 o -4, y si *A(x)* es 17 entonces *x* es -17 o 17. Sin embargo, se espera que el ítem iii, cause dificultades porque es una variable didáctica, ya que no encontrará un valor de *x* que cumpla la igualdad.
	Se espera que al no encontrar un valor para *x*, tenga la necesidad de explicar la razón, puede justificar su respuesta basada en la gráfica, en el dominio de la función o basado en que el área de un triángulo no puede ser negativo debido a que expresa una unidad de medida.

En la siguiente tabla se muestra los comportamientos esperados en cada uno de los ítems de la actividad II.

Tabla 15. Comportamientos esperados en las preguntas 1, 2.a y 2.b de la ficha de trabajo N° 2

Ítem	Comportamientos esperados
1.a 1.b	Se espera que los alumnos entren en la fase acción, manipulando el deslizador concluyan que si el valor de *a* es positivo la gráfica de la función se desplaza a la izquierda y si el valor de *a* es negativo la gráfica de la función se desplaza a la derecha.
1.c	Se espera que los alumnos, concluyan que la gráfica se desplazó 4 puntos a la derecha, de manera que el valor numérico de *a* representa la cantidad de unidades que la gráfica se desplaza.
1.d	Se espera que la solución de esta pregunta no sea inmediata, debido a que suponemos que el argumento de la función es una variable didáctica, que en este caso al tomar el valor de expresión algebraica del tipo $x+a$, hará que el alumno vuelva a la gráfica y analice los valores que puede tomar *x*, concluyendo gráficamente, que los valores que toma *x* son 7 y 1
1.e	Se espera que los alumnos no respondan rápidamente esta pregunta, ya que el valor que toma la función es una variable didáctica, y los alumnos no encontrarán gráficamente un valor para *x* que satisfaga la ecuación, por lo que expresarán que el conjunto solución es vacío.
1.f	Se espera que los alumnos expresen que sí hay diferencias en el conjunto solución, debido a que en la pregunta d, *x* puede tomar dos valores, pero en la pregunta e, *x* no puede tomar ningún valor, se espera que expliquen que no existe un valor que pueda tomar *x* porque la función valor absoluto siempre toma valores positivos, pueden sustentar eso por la regla de correspondencia o por la gráfica indicando el dominio de la función.
2.a 2.b	Se espera que los alumnos realicen la gráfica de las funciones de manera correcta y que las puedan inferir en base a lo que han observado en los ítems 1.a, b y c, concluyendo que en el primer caso la función valor absoluto se traslada 8 unidades a la izquierda y que en el caso b, la gráfica se traslada 8 unidades a la derecha

En la siguiente tabla se muestra los comportamientos esperados en las preguntas 2.c, 2.d y 3 de la actividad II.

Tabla 16. Comportamientos esperados en las preguntas 2.c, 2,d y 3 de la ficha de trabajo N°2

Ítem	Comportamientos esperados
2.c 2.d	Se espera que los alumnos no respondan directamente esta pregunta, porque la variable didáctica argumento de la función está cambiando y ahora es una expresión algebraica, se espera que puedan responder la pregunta apoyándose en la gráfica que han realizado en el ítem anterior. En la pregunta 2.c se espera que hallen que *x* puede ser -18 o 2 y en la pregunta 2.d se espera que hallen que *x* puede ser -2 o 18
3.a 3.b	Se espera que los alumnos tengan cierta dificultad al resolver las ecuaciones, debido a que no se le proporciona el plano cartesiano en el ítem 3 y tampoco se le solicita que grafique las funciones respectivas, como se hizo en la pregunta anterior, se espera que los estudiantes construyan un plano cartesiano en una hoja aparte o que utilicen el mismo plano cartesiano de la pregunta 2 y que resuelvan gráficamente las ecuaciones.
	Se espera que los estudiantes utilicen la definición funcional del valor absoluto para justificar su respuesta, es decir, que expresen que para que el valor de la función sea 6 entonces el argumento debe ser 6 o -6, de manera que se pregunten qué valor más 10 es 6, concluyendo que *x* puede ser -4, y también qué valor más 10 es -6, concluyendo que *x* puede ser -16. De la misma forma, se espera que deduzcan que para que el valor de la función valor absoluto sea 10, entonces el argumento de la función debe ser 10 o -10, de manera que se pregunten qué valor menos 12 es 10, concluyendo que *x* puede ser -2 y también qué valor menos 12 es -10, concluyendo que *x* puede ser 22.

En la siguiente tabla, se muestra los comportamientos esperados en las preguntas 1, 2, 3.a y 3.b de la ficha de trabajo N°3 correspondiente a la actividad III.

Tabla 17. Comportamientos esperados en las preguntas 1, 2, 3.a y 3.b de la ficha de trabajo N°3

Ítem	Comportamientos esperados
1.a 1.b	Se espera que los estudiantes reconozcan que la recta $y=b$, divide la gráfica de la función valor absoluto en dos partes, de manera que concluyan que los valores de la función por encima de la recta son mayores a b, y los valores de la función por debajo de la recta son menores a b
2.a 2.b	Se espera que los alumnos al manipular los deslizadores a y b, vean cómo cambian los valores que toma el segmento rojo y azul, y que interpreten que el color rojo representa el intervalo de valores donde la función es menor a 3 y que el color azul representa el intervalo de valores donde la función es mayor a 3

2.c 2.d	Se espera que los alumnos recurran a la gráfica, y manipulando los deslizadores respondan que el intervalo de valores que puede toma x en la pregunta 2.c es [-5,5], y que el intervalo de valores que puede tomar x en la pregunta 2.d es $]-\infty,-4[\ \cup\ ]4,+\infty[$
2.e 2.f	Se espera que los alumnos recurran a la gráfica, sólo que ahora tendrán que manipular ambos deslizadores. Se espera, que los alumnos respondan que el intervalo de valores que puede toma x en la pregunta 2.e es [-1,5] y que el intervalo de valores que puede tomar x en la pregunta 2.f es $]-\infty,-7[\ \cup\ ]1,+\infty[$
3.a	Se espera que los alumnos tengan dificultades para resolver estas preguntas, debido a que ahora ya no podrán utilizar los deslizadores para dar sus respuestas, por lo que tendrán dos opciones: • Se espera que la mayoría de estudiantes dibujen el plano cartesiano, grafiquen la función valor absoluto y la recta y=12, de manera que resuelvan la inecuación gráficamente, concluyendo que el conjunto solución es $]-\infty,-12]\ \cup\ [12,+\infty[$. • Se espera que algunos estudiantes, deduzcan que si $\|x\|\geq b$, entonces el intervalo de solución es $]-\infty,-b]\ \cup\ [b,+\infty[$, esto en base a lo observado en la pregunta 2c, por lo cual concluirán que intervalo para la pregunta 3.a es $]-\infty,-12]\ \cup\ [12,+\infty[$.
	Se espera que los estudiantes utilicen la definición funcional del valor absoluto para justificar su respuesta, es decir, si el valor absoluto de un número es mayor o igual a 12, entonces el argumento de la función puede ser positivo o negativo, si el argumento de la función es positivo, entonces debe tomar valores mayores o iguales a 12 y si el argumento de la función es negativo, entonces toma valores menores o iguales a -12.
3.b	Se espera que los alumnos tengan dificultades para resolver esta pregunta, debido a que ahora ya no podrán utilizar el deslizador b para dar sus respuestas, por lo que tendrán dos opciones: • Se espera que la mayoría de estudiantes dibujen el plano cartesiano, grafiquen la función valor absoluto y la recta y=15, de manera que resuelvan la inecuación gráficamente, concluyendo que el conjunto solución para la inecuación $\|x\|<15$ es]-15,15[• Se espera que algunos estudiantes deduzcan que si $\|x\|<b$, entonces el intervalo de solución es $-b<x<b$, verificaran su conjetura con los valores que sí pueden trabajar en el deslizador, en base a la pregunta 2.d, concluyendo que el conjunto solución para la inecuación $\|x\|<15$ es]-15,15[.
	Se espera que los estudiantes utilicen la definición funcional del valor absoluto para justificar su respuesta, es decir, si el valor absoluto de un número es menor a 15, entonces el argumento de la función puede ser positivo o negativo, si el argumento de la función es positivo, entonces debe tomar valores menores a 15 y si el argumento de la función es negativo, entonces debe tomar valores mayores a -15.

En la siguiente tabla, se muestra los comportamientos esperados en la pregunta 3.c y 3.d de la ficha de trabajo N°3 correspondiente a la actividad III

Tabla 18. Comportamientos esperados en las preguntas 3.c y 3.d de la ficha de trabajo N°3

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Comportamientos esperados</th></tr>
<tr><td>3.c</td><td>Se espera que los alumnos tengan dificultades para resolver éstas preguntas, debido a que ahora ya no podrán utilizar el deslizador a para dar sus respuestas, por lo que tendrán dos opciones:

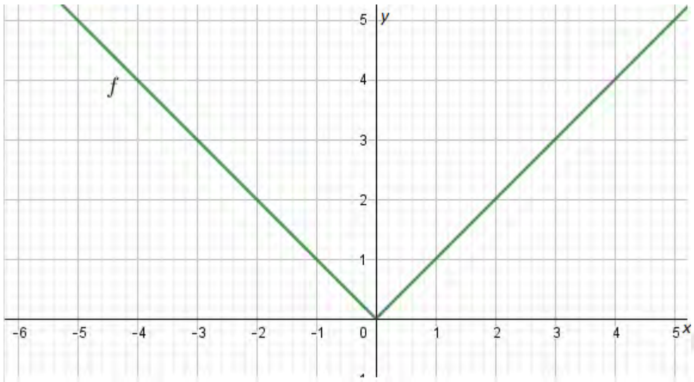
Se espera que la mayoría de estudiantes dibujen el plano cartesiano, grafiquen la función con regla de correspondencia $f(x)=|x+10|$ y la recta $y=5$, de manera que resuelvan la inecuación gráficamente, concluyendo que el conjunto solución para la inecuación $|x+10|>5$ es $]-\infty,-15[\cup]-5,+\infty[$
Se espera que algunos estudiantes que hayan resuelto la pregunta anterior, siguiendo el razonamiento que establece que si $|x|\geq b$, entonces el intervalo de solución es $]-\infty,-b] \cup [b,+\infty[$, deduzcan que para la inecuación $|x+10|>5$, significa que x+10 debe estar en el intervalo de $]-\infty,-5] \cup [5,+\infty[$, es decir $x+10<-5$ o $x+10>5$, por lo tanto el conjunto solución para la inecuación $|x+10|>5$ es $]-\infty,-15[\cup]-5,+\infty[$
</td></tr>
<tr><td></td><td>Se espera que los estudiantes utilicen la definición funcional del valor absoluto para justificar su respuesta, es decir, si el valor absoluto de un número es mayor a 5, entonces el argumento de la función puede ser positivo o negativo, si el argumento de la función es positivo, entonces debe tomar valores mayores o iguales a 5, es decir $x+10$ debe ser mayor a 5, por lo tanto x debe ser mayor a -5 y si el argumento de la función es negativo, entonces debe tomar valores menores a -5, es decir $x+10$ debe ser menor a -5, por lo tanto debe tomar valores menores a -15.</td></tr>
<tr><td>3.d</td><td>Se espera que los alumnos tengan dificultades para resolver éstas preguntas, debido a que ahora ya no podrán utilizar el deslizador a para dar sus respuesta, por lo que tendrán dos opciones:

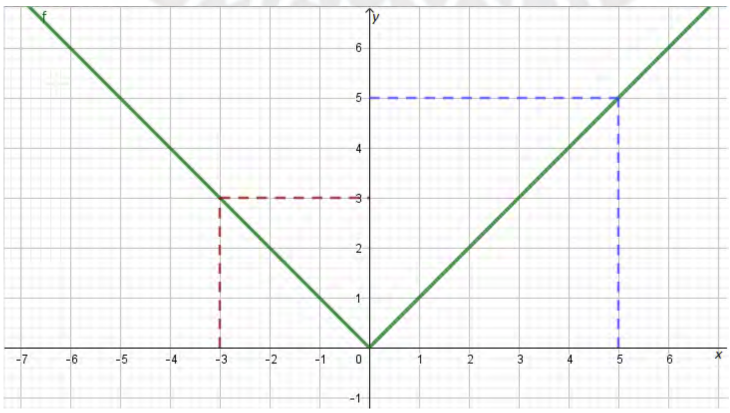
Se espera que la mayoría de estudiantes dibujen el plano cartesiano, grafiquen la función con regla de correspondencia $f(x)=|x-10|$ y la recta $y=6$, de manera que resuelvan la inecuación gráficamente, concluyendo que el conjunto solución para la inecuación $|x-10|\leq 6$ es [4, 16]
Se espera que algunos estudiantes que hayan resuelto la pregunta anterior, siguiendo el razonamiento que establece que si $|x|\leq b$, entonces el intervalo de solución es $[-b,b]$, de manera que deduzcan que para la inecuación $|x-10|\leq 6$, significa que $x-10$ debe estar en el intervalo de [-6,6], es decir $-6\leq x-10\leq 6$, por lo tanto el conjunto solución para la inecuación $|x-10|\leq 6$ es [4, 16]
</td></tr>
<tr><td></td><td>Se espera que los estudiantes utilicen la definición funcional del valor absoluto para justificar su respuesta, es decir, si el valor absoluto de un número es menor o igual a 6, entonces el argumento de la función puede ser positivo o negativo, si el argumento de la función es positivo, entonces debe tomar valores menores a 6, es decir $x-10$ debe ser menor o igual a 6, por lo tanto x debe ser menor o igual a 16 y si el argumento de la función es negativo, entonces debe tomar valores mayores a -6, es decir $x-10$ debe ser mayor o igual a -6, por lo tanto debe tomar valores mayores o igual a 4.</td></tr>
</table>

5.4.4 Conocimientos a Institucionalizar

En la siguiente tabla se muestra los conocimientos a institucionalizar al finalizar cada actividad

Tabla 19. Conocimientos a institucionalizar

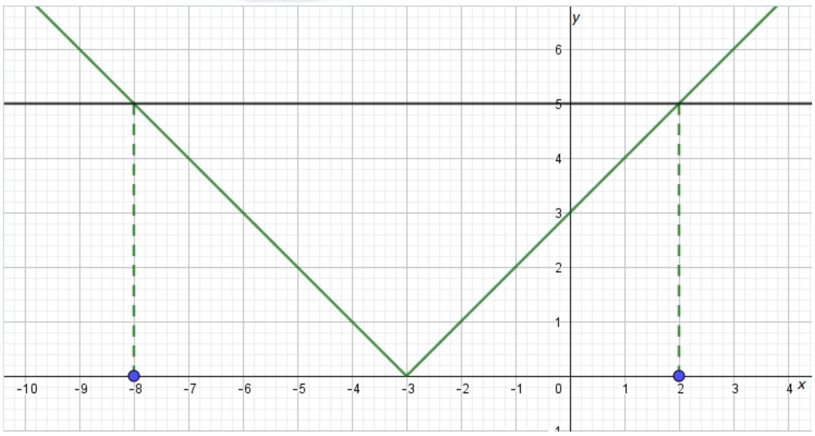
<table>
<tr><th>Momentos</th><th>Conocimientos a institucionalizar</th></tr>
<tr><td>Al finalizar la actividad I</td><td>
La función cuya representación gráfica es la siguiente:


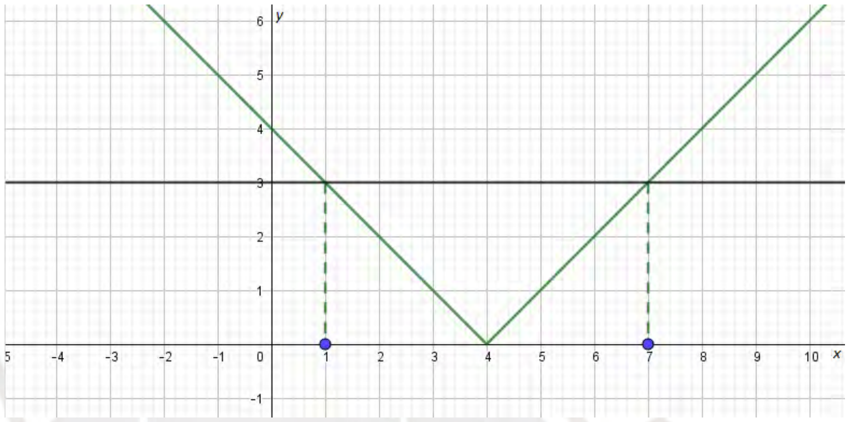
Es la función valor absoluto, cuya regla de correspondencia es:
$f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$
De manera que: el valor absoluto de un número positivo es el mismo número, y el valor absoluto de un número negativo es su opuesto aditivo.
Por ejemplo: Observemos en la gráfica de la función valor absoluto:
|5| es igual a 5
|-3| es igual a 3


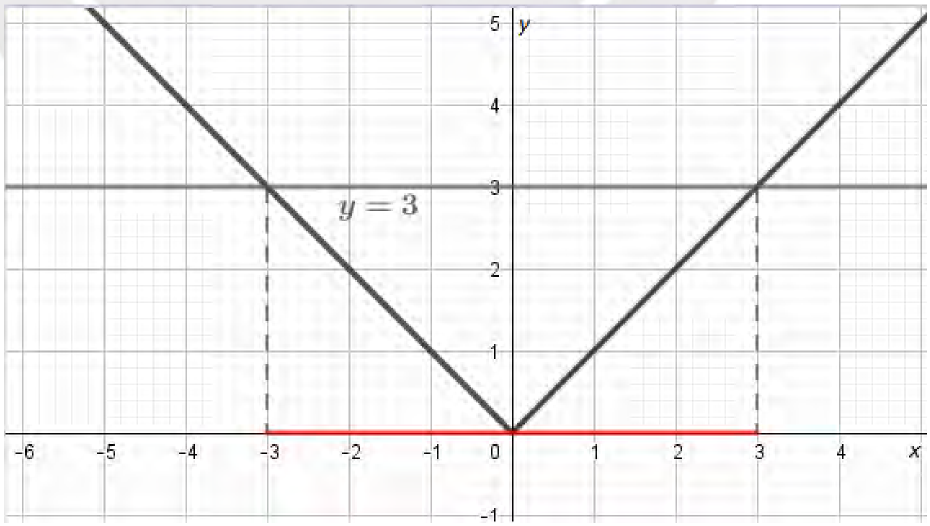
El Dominio de la función f, denotado por Dom (f) = $]-\infty , +\infty[$
El Rango de la función f, denotado por Ran (f) = $[0 , +\infty[$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Al finalizar la actividad II</td>
<td>
La gráfica de las funciones del tipo f(x) =|x+a|, sufre una traslación en el eje horizontal de a unidades respecto de la gráfica de la función f(x)=|x|, donde:
• Si a es positivo, se traslada a unidades a la izquierda;
• Si a es negativo, se traslada a unidades a la derecha.
Por ejemplo: La grafica de la función f con regla de correspondencia f(x)=|x+3| se traslada 3 unidades a la izquierda


La gráfica de la función g con regla de correspondencia f(x)=|x-4| se traslada 4 unidades a la derecha

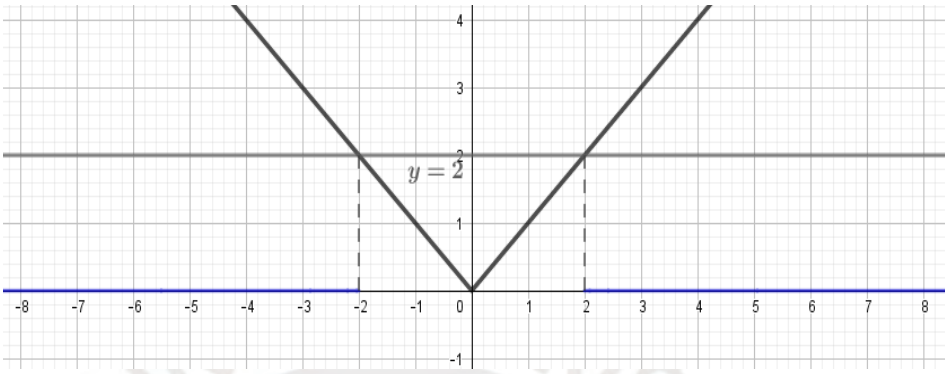

¿Cómo resolvemos ecuaciones con valor absoluto gráficamente?
Si queremos determinar el conjunto solución de la ecuación |x+3|=5, graficamos la función con regla de correspondencia f(x)=|x+3|, y observamos qué valores de x hacen que el valor de la función sea igual a 5 como se muestra en la siguiente figura, de manera que el C.S={-8,2}.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Se obtiene el mismo resultado si se trabaja algebraicamente, sí $|x+3|=5$, entonces eso quiere decir que $x+3$ debe ser 5 o -5, por lo tanto $x+3=5$ o $x+3=-5$, de manera que el C.S = {-8,2}.
Ahora, si queremos determinar el conjunto solución de la ecuación $|x-4|=3$, graficamos la función con regla de correspondencia $f(x)=|x-4|$, tal como se observa en la siguiente figura, y observamos qué valores de x hacen que el valor de la función sea igual a 3, de manera que el C.S={1,7}.


Se obtiene el mismo resultado si se trabaja algebraicamente, sí $|x-4|=3$, entonces eso quiere decir que $x-4$ debe ser 3 o -3, por lo tanto $x-4=3$ o $x-4=-3$, de manera que el C.S={1,7}.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Al finalizar la actividad III</td>
<td>
Para resolver gráficamente las inecuaciones del tipo $|x|\leq b$, debemos graficar la función valor absoluto y observar para qué valores de x la función toma valores menores a b. Por ejemplo, para determinar el conjunto solución de $|x|\leq 3$, seleccionamos el intervalo de valores para los cuales la función toma valores menores o iguales a 3, como se observa en la grafica el C.S=[-3,3]


Como se observa se cumple la siguiente propiedad de valor absoluto
Si $|x|\leq b$, entonces $-b\leq x\leq b$, en el ejemplo si $|x|\leq 3$, entonces $-3\leq x\leq 3$
</td>
</tr>
</table>

Para resolver gráficamente las inecuaciones del tipo $|x|\geq b$, graficamos la función valor absoluto y observamos para que valores de x, la función toma valores menores a b. Por ejemplo, para determinar el conjunto solución de $|x|\geq 2$, seleccionamos el intervalo de valores para los cuales la función toma valores mayores o iguales a 2, como se observa en la gráfica el C.S=$]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$



Como se observa se cumple la siguiente propiedad de valor absoluto

Si $|x|\geq b$, entonces $x\leq -b \cup x\geq b$, en el ejemplo si $|x|\geq 2$, entonces $x\leq -2 \vee x\geq 2$

CAPITULO VI: EXPERIMENTACIÓN

En este capítulo, se describe los detalles de la puesta en marcha de las actividades diseñadas, también se describe el desarrollo de las sesiones 1 y 2, y se reporta los comportamientos observados en los alumnos, durante el desarrollo de las actividades.

6.1 Puesta en Marcha de las Actividades

En la siguiente tabla se muestra el detalle de las actividades realizadas con los alumnos de la sección de tercer grado de secundaria, sección A en la I.E. Mixta Telesforo de Catacora. La cual está compuesta por 38 estudiantes de 13 a 14 años de edad. Se realizaron dos sesiones de 90 min cada una.

Tabla 20. Detalle de puesta en marcha

Sesión	Fecha	Hora	Actividades	Tiempo
N° 1	9 de noviembre del 2017	7:30 am -9:00 am	• Preguntas de reforzamiento • Indicaciones iniciales • Actividad I-Individual • Actividad I-Grupal • Institucionalización	5 minutos 5 minutos 25 minutos 30 minutos 25 minutos
N°2	16 de noviembre del 2017	7:30 am-9:00 am	• Recapitulación de la sesión anterior • Actividad II. • Institucionalización • Actividad III. • Institucionalización	10 minutos 30 minutos 10 minutos 30 minutos 10 minutos

Se contó con dos observadoras, la profesora de matemática de la I.E. Winnetka Melissa Salazar y Miriam Rodríguez profesora de la I.E. Telesforo de Catacora. Ambas profesoras de matemática estuvieron presenten durante el desarrollo de las dos sesiones, y en cada sesión las profesoras completaron las Ficha de Observación (Ver Anexo 4)

6.2 Comportamientos Observados Durante la Sesión 1

En base a la información recogida, se describe los comportamientos observados durante la sesión 1.

Preguntas de reforzamiento.

Durante las sesiones de prueba de las actividades que se realizaron con los estudiantes de tercer grado de secundaria sección B, se observó que de los 38 estudiantes, 20 no ubicaron correctamente los pares ordenados (-1,1), (-2,2) y (-3,3), al ser una cantidad mayoritaria, y un conocimiento importante para construcción de la gráfica de la función valor absoluto, se decidió iniciar la sesión 1 con los alumnos de tercer grado de secundaria de la sección A, con unas preguntas de ubicación de los siguientes puntos (-3,5), (-3,-5), (3,-5), (3, 5) en el plano cartesiano.

Indicaciones Iniciales

Se dio las indicaciones para la realización de la actividad I-parte Individual, de manera que todos los alumnos puedan acceder al archivo GeoGebra 1, se les indicó que las profesores Melissa y Mirian están en calidad de observadoras, y si durante el desarrollo tienen alguna duda o consulta, preguntar al profesor a cargo de la actividad.

Actividad I. Pregunta a. ¿La forma del triángulo cambia cuando *x* cambia? ¿Qué representa *x* en la figura?

Todos los estudiantes respondieron sí a la primera pregunta, para la segunda pregunta, se tiene las siguientes respuestas respecto de lo que representa *x* en la figura que observan:

- La abscisa del punto C y B (20 estudiantes)
- Representa la base del triángulo (2 estudiantes)
- Las coordenadas del punto B y C (15 estudiantes)
- Representa la longitud de la base del triángulo (1 estudiante)

Actividad I. Pregunta b. Completa el área del triángulo ABC para cada valor x. Luego responde ¿El valor del área del triángulo depende del valor que tome *x*?

En esta pregunta, algunos alumnos tuvieron una dificultad, no se acordaba la fórmula de área de triángulo, se registra la siguiente conversación:

Jeferson: Profesora ¿Cuál era la fórmula de área de triángulo?

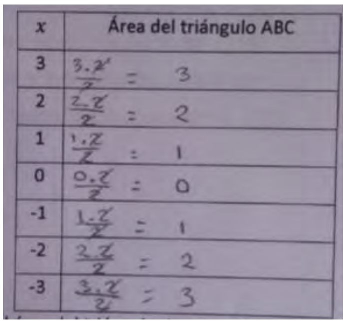
Profesora: ¿Te acuerdas cómo calcular el área de un rectángulo?

Jeferson: Sí, es base por altura

Profesora: Bien, sí trazas la diagonal de un rectángulo, ¿Qué obtienes?

Jeferson: Dos triángulos…ah ya es la mitad, es base x altura entre dos ya me acordé

Se presentaron dos tipos de respuestas, 35 estudiantes completaron de forma correcta la tabla, como se muestra en la siguiente figura.

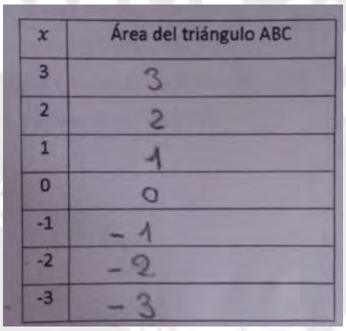


x	Área del triángulo ABC
3	$\frac{3.2}{2} = 3$
2	$\frac{2.2}{2} = 2$
1	$\frac{1.2}{2} = 1$
0	$\frac{0.2}{2} = 0$
-1	$\frac{1.2}{2} = 1$
-2	$\frac{2.2}{2} = 2$
-3	$\frac{3.2}{2} = 3$

Figura 34. Tabla de la pregunta b correctamente completada

Fuente: Propio

Hubo 3 estudiantes que no completaron de forma correcta la tabla, cuando los valores de *x* tomaban valores negativos, como se muestra en la siguiente figura:



x	Área del triángulo ABC
3	3
2	2
1	1
0	0
-1	-1
-2	-2
-3	-3

Figura 35. Tabla de la pregunta b incorrectamente completada

Fuente: Propio

Estos tres alumnos, son los que identificaron a *x* como la base del triángulo o como la longitud de la base, por ello al aplicar la fórmula, lo hicieron de manera mecánica, obteniendo resultados negativos.

Respecto a la segunda parte de la pregunta, ¿El valor del área del triángulo depende del valor que tome *x*?, Se observó que todos los estudiantes respondieron que sí, a continuación se describen alguna de sus razones:

- *Sí, porque cuando x cambia el área cambia*
- *Sí, porque cuando x cambia la longitud de la base cambia*
- *Sí, porque cambia la base del triángulo*

Actividad I. Pregunta c. En el plano cartesiano, ubica los puntos correspondientes a los pares ordenados obtenidos en la tabla anterior, donde la coordenada en y es el área del triángulo ABC.

Todos los estudiantes ubicaron correctamente los puntos de acuerdo a la tabla que habían obtenido, incluso los 3 estudiantes que habían obtenido el área negativa, la razón de esto es que la organización del aula de computo, es de tres estudiantes en cada carpeta, los estudiantes que obtuvieron área negativas no eran de una misma carpeta, por lo que al ver que sus compañeros de carpeta graficaban sus puntos de manera diferente, corrigieron su gráfica, aunque sin corregir los valores de la tabla.

Actividad I. Pregunta d. Traza la gráfica de la función área del triángulo ABC

En esta pregunta 30 estudiantes, trazaron la gráfica, sólo hasta los puntos que habían marcado como se muestra en la Figura 36. Es decir, sólo unieron los puntos que habían marcado en la gráfica, sin considerar que *x* podía asumir infinitos valores.

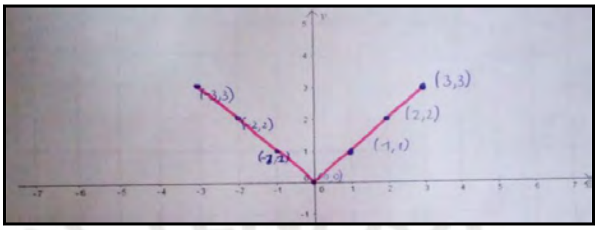


Figura 36. Trazo que une los puntos en la pregunta d

Fuente: Propio

Sin embargo, los otros estudiantes, prolongaron su trazo, como se muestra en la Figura 37, reconociendo que x podía asumir infinitos valores, es decir de manera indirecta reconocieron que el dominio de la función correspondía a todos los reales.

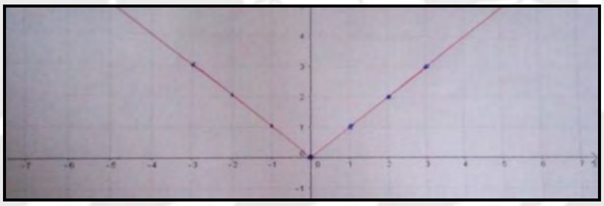
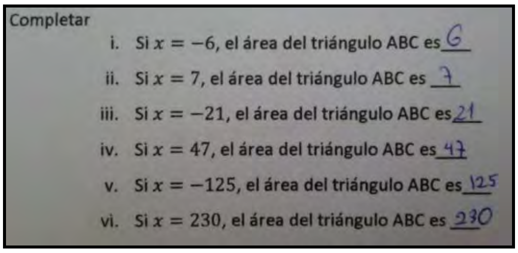


Figura 37. Trazo de la gráfica de la función valor absoluto.

Fuente: Propio

Actividad I. Pregunta e.

En esta sección los estudiantes tenían que completar el área del triángulo, en cada caso, se observó que a pesar de que algunos valores ya no son observables en la gráfica que trazaron en la ficha de trabajo, completaron correctamente, reconociendo que a pesar de que *x* tome valores muy negativos, el área resultaba siempre positivo.



Completar

i. Si $x = -6$, el área del triángulo ABC es 6

ii. Si $x = 7$, el área del triángulo ABC es 7

iii. Si $x = -21$, el área del triángulo ABC es 21

iv. Si $x = 47$, el área del triángulo ABC es 47

v. Si $x = -125$, el área del triángulo ABC es 125

vi. Si $x = 230$, el área del triángulo ABC es 230

Figura 38. Respuestas de la pregunta e de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Las siguientes preguntas fueron desarrolladas en parejas.

Actividad I. Pregunta f. ¿Cuál es el dominio y rango de la función?

En esta sección, muchos estudiantes no recordaban qué era el dominio y qué era el rango de una función. A continuación se muestra cómo se hizo la devolución ante la pregunta de un estudiante:

Arturo: ¿Profesora, qué es el dominio y rango?

Profesora (Pregunta a la clase): ¿Cuál es la diferencia entre dominio y rango?

Angela: El dominio son todos los valores que toma x y el rango son todos los valores que toma y en la función

Profesora: Bien, miremos el ejemplo de esta función lineal ¿Qué valores toma x en esta función?

Josciney: Desde el menos infinito hasta el más infinito

Profesora: Ok, ahora ¿Qué valores toma y en la función?

José: Igual desde el menos infinito hasta el más infinito

Profesora: Eso es, ahora deben escribir cuál es el dominio y rango para la función que están trabajando

A pesar de esta interacción, sólo 10 estudiantes respondieron de forma correcta.

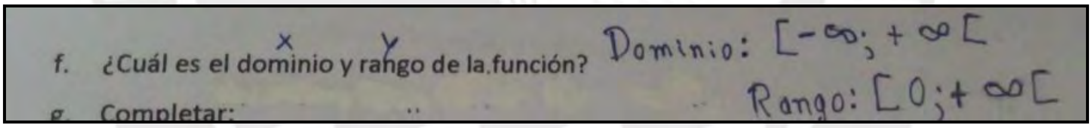


Figura 39. Respuesta correcta a la pregunta f de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Los otros estudiantes dieron respuestas incorrectas. Muchas de estas respuestas, se deben a una mala interpretación de la interacción que hubo entre los estudiantes y el profesor. Por ejemplo, en la siguiente figura, se observa que algunos estudiantes, copiaron parte de la respuesta de uno de los estudiantes.

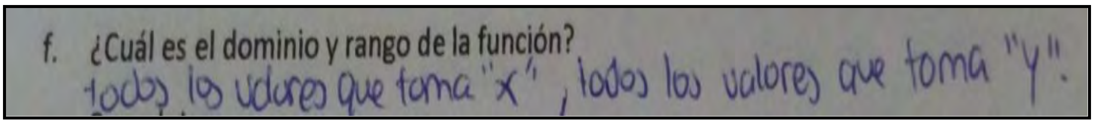


Figura 40. Primer tipo de respuesta incorrecta en la pregunta f de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

En la siguiente figura se observa, que algunos estudiantes dieron como respuesta la misma que la del ejemplo que se hizo con la función lineal.

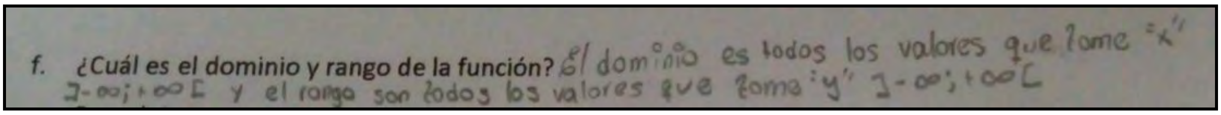
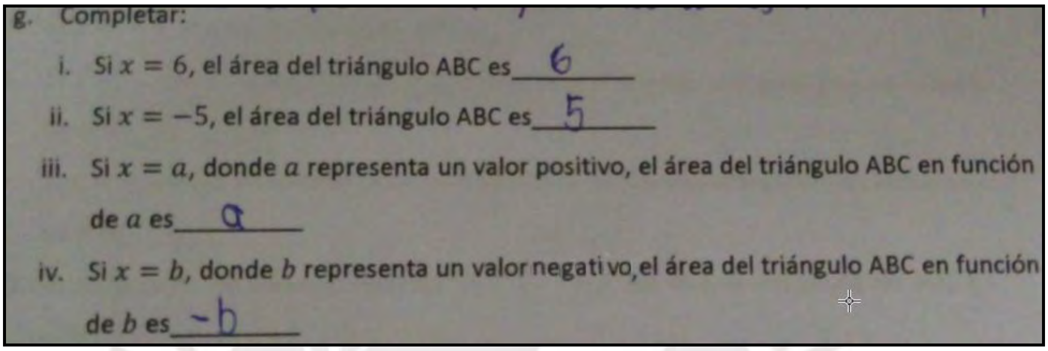

f. ¿Cuál es el dominio y rango de la función? El dominio es todos los valores que tome "x" $]-\infty;+\infty[$ y el rango son todos los valores que tome "y" $]-\infty;+\infty[$

Figura 41. Segundo tipo de respuesta incorrecta en la pregunta f de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Actividad I. Pregunta g. Completar

Todos los estudiantes, respondieron correctamente a la parte i y ii, sin embargo en la parte iii y iv, sólo 4 estudiantes respondieron de forma correcta como se muestra en la siguiente figura


g. Completar:

i. Si $x = 6$, el área del triángulo ABC es 6

ii. Si $x = -5$, el área del triángulo ABC es 5

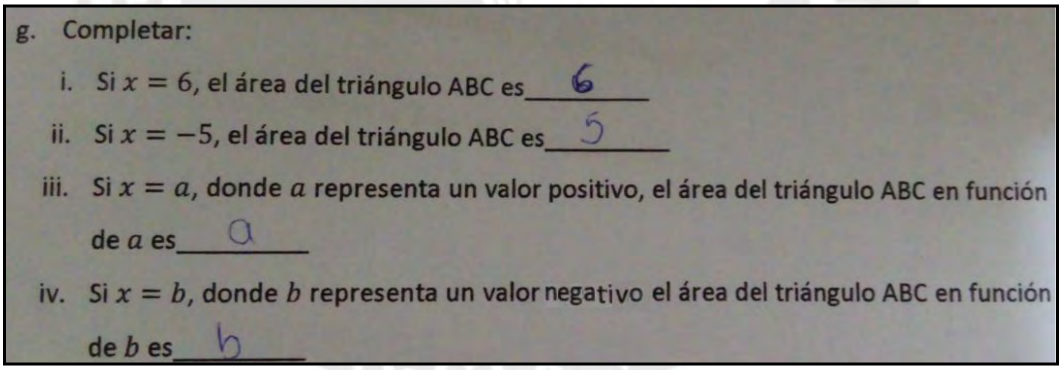
iii. Si $x = a$, donde a representa un valor positivo, el área del triángulo ABC en función de a es a

iv. Si $x = b$, donde b representa un valor negativo, el área del triángulo ABC en función de b es $-b$

Figura 42. Respuesta correcta en la pregunta g de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

30 estudiantes respondieron como se muestra en la siguiente figura.


g. Completar:

i. Si $x = 6$, el área del triángulo ABC es 6

ii. Si $x = -5$, el área del triángulo ABC es 5

iii. Si $x = a$, donde a representa un valor positivo, el área del triángulo ABC en función de a es a

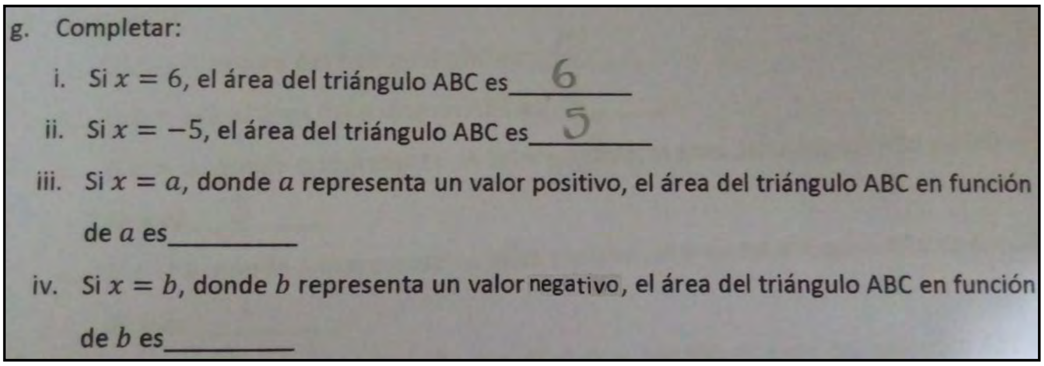
iv. Si $x = b$, donde b representa un valor negativo el área del triángulo ABC en función de b es b

Figura 43. Respuesta incorrecta en la sección iii y vi de la pregunta g de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Cuando se le preguntó a un estudiante, acerca de su respuesta en la parte iv, el alumno explicó: *si b es negativo el área es b, pero positivo*. Es decir, los estudiantes entienden que al escribir *b* sin signo, el valor es positivo, para ellos sólo sería negativo si se coloca el signo menos delante de la variable *b*.

También hubieron otros alumnos que no respondieron la parte iii y iv en la pregunta g, al preguntarles la razón de su respuesta dijeron que no entendieron el enunciado, porque no hay números. Esto indica que los estudiantes, no están familiarizados con actividades donde deben expresar el resultado en términos de variables.



g. Completar:

i. Si $x = 6$, el área del triángulo ABC es 6

ii. Si $x = -5$, el área del triángulo ABC es 5

iii. Si $x = a$, donde a representa un valor positivo, el área del triángulo ABC en función de a es__________

iv. Si $x = b$, donde b representa un valor negativo, el área del triángulo ABC en función de b es__________

Figura 44. Ausencia de respuesta en la sección iii y vi de la pregunta g de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Actividad I. Pregunta h. ¿Cuál es la regla de correspondencia *A(x)* que expresa el área del triángulo ABC en función a *x*?

La dificultad que tuvieron los estudiantes para responder esta pregunta fue que no recordaban el significado de regla de correspondencia, tampoco comprendían la expresión *A(x)*, a continuación se muestra el detalle de cómo se realizó la devolución en esta parte:

Estudiantes: ¿Qué significa regla de correspondencia?

Profesora: Vamos a hacer un ejemplo, supongamos que el precio de una botella de gaseosa es 2 soles, ¿Cuánto será el costo por la compra de dos gaseosas?

Estudiantes; 4 soles

Profesora: ¿Cuánto será el costo por la compra de tres gaseosas?

Estudiantes: 6 soles

Profesora: ¿Cuánto será el costo por la compra de diez gaseosas?

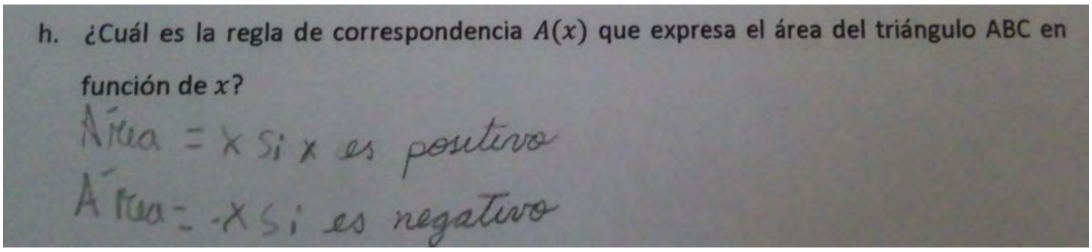
Estudiantes: 20 soles

Profesora: ¿Cuánto será el costo por la compra de x gaseosas?

Estudiantes: El doble de x, dos veces x

Profesora: (escribiendo en la pizarra) entonces la regla de correspondencia del costo en función de la cantidad de botellas es C(x)=2x, donde x es la cantidad de botellas. Ahora ¿Cuál es la regla de correspondencia del triángulo ABC en función de la abscisa x del punto C?

A pesar de esta intervención, ninguno de los estudiantes expresó de forma correcta la regla de correspondencia, ninguno utilizó la notación *A(x)*, para expresar el área en términos de *x*. Sin embargo, aquellos estudiantes que respondieron correctamente a la pregunta anterior, evidenciaron en sus respuestas la noción de que el área del triángulo ABC depende del signo de *x*. Su respuesta fue la siguiente:


h. ¿Cuál es la regla de correspondencia $A(x)$ que expresa el área del triángulo ABC en función de x?

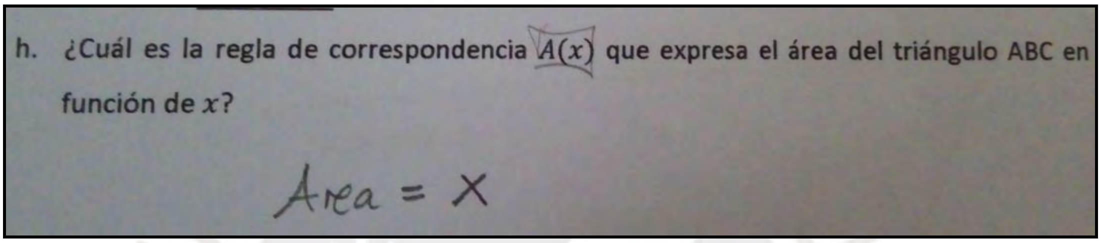
Área = x si x es positivo

Área = -x si es negativo

Figura 45. Respuesta que considera el signo de x en la pregunta h de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

La mayoría de los estudiantes, no reconocieron que el área dependía del signo de *x*, tampoco utilizaron la notación correcta *A(x)* en sus repuestas


h. ¿Cuál es la regla de correspondencia $A(x)$ que expresa el área del triángulo ABC en función de x?

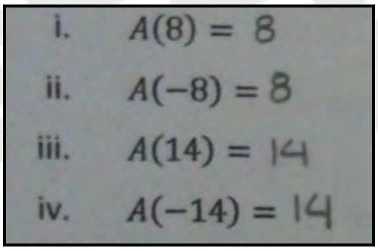
Area = X

Figura 46. Respuesta que no considera el signo de x en la pregunta h de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Actividad I. Pregunta i. De acuerdo a la regla de correspondencia *A(x)* que expresa el área del triángulo en función de *x*, evalúa cada caso:

Algunos estudiantes no entendieron el término "evaluar", se explicó evaluar significaba hallar el área del triángulo para cada valor que tome *x* en cada caso, luego de esta intervención todos los estudiantes respondieron de forma correcta esta pregunta, tal como se muestra en la siguiente figura.


i. $A(8) =$ 8

ii. $A(-8) =$ 8

iii. $A(14) =$ 14

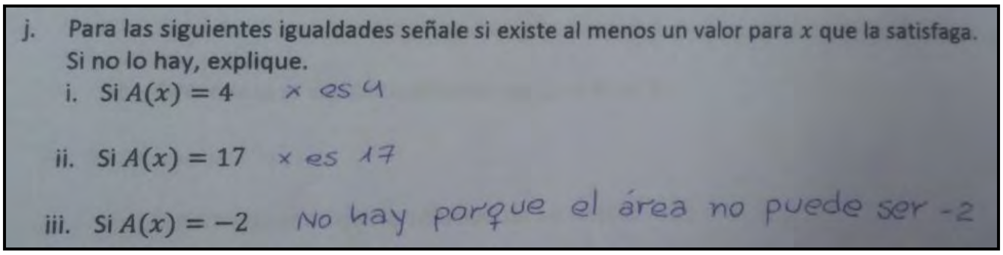
iv. $A(-14) =$ 14

Figura 47. Respuesta correcta a la pregunta i de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Actividad I. Pregunta j.

En esta pregunta la mayoría de los estudiantes, respondió de forma correcta a la pregunta. Por ejemplo, algunos respondieron sólo un valor que puede tomar *x*, en la sección i y ii y en la sección iii no dieron un valor, sustentando que el área no puede ser negativa.



j. Para las siguientes igualdades señale si existe al menos un valor para x que la satisfaga. Si no lo hay, explique.

i. Si $A(x) = 4$ x es 4

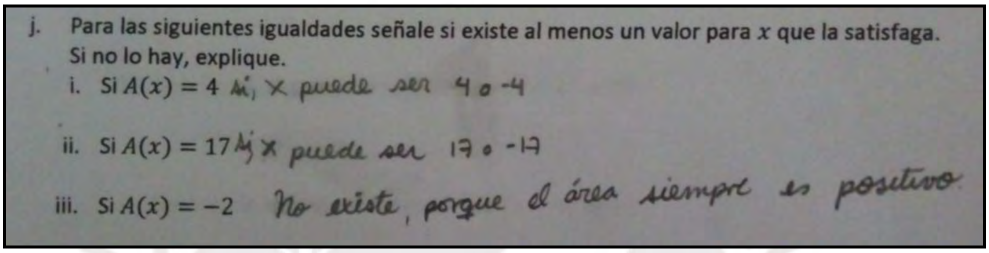
ii. Si $A(x) = 17$ x es 17

iii. Si $A(x) = -2$ No hay porque el área no puede ser -2

Figura 48. Respuesta correcta a la pregunta j de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Otros, dieron todos los valores que puede tomar x en las secciones i y ii,y respondieron correctamente que no existe un valor, y su sustento fue el mismo que el área no puede ser negativo.



j. Para las siguientes igualdades señale si existe al menos un valor para x que la satisfaga. Si no lo hay, explique.

i. Si $A(x) = 4$ si, x puede ser 4 o -4

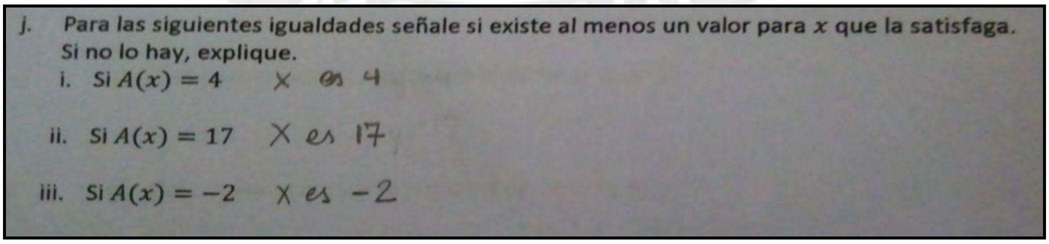
ii. Si $A(x) = 17$ si x puede ser 17 o -17

iii. Si $A(x) = -2$ No existe, porque el área siempre es positivo.

Figura 49. Respuesta correcta a la pregunta j de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Sin embargo, diez estudiantes expresaron el mismo valor que aparece en la igualdad de cada expresión, estos estudiantes no notaron que el área no puede ser negativa. Tal como se observa en la siguiente figura. Dentro de este grupo están todos los estudiantes que en la pregunta b, dieron como resultado valores negativos para el área; sin embargo, 7 estudiantes que en la pregunta b, no habían presentado error, también estaban dentro de este grupo, esto debido a que los estudiantes no conciben preguntas en matemática donde la respuesta no sea un valor numérico, por lo que hicieron lo mismo que había funcionado para el ítem i y ii.



j. Para las siguientes igualdades señale si existe al menos un valor para x que la satisfaga. Si no lo hay, explique.

i. Si $A(x) = 4$ X es 4

ii. Si $A(x) = 17$ X es 17

iii. Si $A(x) = -2$ X es -2

Figura 50. Respuesta incorrecta en la sección iii de la pregunta j de la ficha de trabajo N°1

Fuente: Propio

Institucionalización.

Cuando se dio el nombre de la función valor absoluto muchos estudiantes expresaron asombro, alguno de ellos expresaron lo siguiente:

- *Ya vimos esto antes, pero de otra manera, sin gráfico.*
- *El valor absoluto también es una función*
- *Ya entendí, si es positivo es igual, si es negativo cambia a positivo.*

6.3 Comportamientos Observados Durante la Sesión 2

En la sesión 2 de trabajo la actividad II y III. Estuvieron presentes 36 estudiantes a diferencia de la sesión anterior donde estuvieron presentes 38 estudiantes.

Recapitalización de la sesión anterior.

La recapitalización de lo que se había visto en la sesión anterior se hizo en base a preguntas, a continuación se muestra el dialogo de la profesor con la clase.

Profesora: ¿Se acuerdan qué aprendimos la clase sesión pasada?

Estudiantes: El valor absoluto

Profesora: ¿Qué es el valor absoluto?

Estudiantes: es una función

Estudiantes: su gráfica es una uve

Profesora: Ok el valor absoluto es una función, su representación gráfica es la siguiente (se hizo la gráfica en el plano cartesiano) tiene la forma de una uve, ¿Cuál es la regla de correspondencia?

Estudiantes: mmmm….

Profesora: La regla de correspondencia establece la forma en que se relación la variable dependiente con la variable independiente. Por ejemplo si x es 4, ¿Cuál es su valor absoluto?

Estudiantes: 4

Profesora: Entonces si x es valor positivo ¿Cómo es su valor absoluto?

Estudiantes: Igual

Profesora: Si x es un valor negativo ¿Cómo es su valor absoluto?

Estudiantes: Es positivo, se cambia de signo

Profesora: Muy bien entonces la regla de correspondencia de la función valor absoluto es la siguiente: $f(x)=x$ *si* $x \geq 0$, *o* $f(x)=-x$ *si* $x<0$

Indicaciones Iniciales

Se dio las indicaciones para la realización de la actividad II, de manera que todos los alumnos puedan acceder al archivo GeoGebra 2 como se muestra en la Figura 32.

Actividad II. Pregunta 1.a. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a toma valores positivos?

Las respuestas de los estudiantes fueron las siguientes:

- *La gráfica se mueve hacia la izquierda*
- *Se traslada hacia la izquierda*
- *Se mueve hacia el eje negativo*

Actividad II. Pregunta 1.b. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a toma valores negativos?

Las respuestas de los estudiantes fueron las siguientes:

- *La gráfica se mueve hacia la derecha*
- *Se traslada hacia la derecha*
- *Se mueve hacia el eje positivo*

Actividad II. Pregunta 1.c ¿Qué pasó con la gráfica de |*x*-4| comparada con la gráfica de |*x*|?

Todos los estudiantes excepto un estudiante respondieron lo siguiente

- *Se ha trasladado 4 unidades hacia la derecha*

Sólo un estudiante no cuantificó el traslado que observó, su respuesta fue la siguiente:

- *Se ha trasladado hacia la derecha*

Actividad II. Pregunta 1.d. Determina el conjunto solución de |*x*-4|=3

Casi todos los estudiantes respondieron de forma correcta C.S={1,7}. Sólo dos estudiantes recurrieron a resolver la ecuación de forma algebraica, aunque sin éxito. Se observa en la siguiente figura que en la solución de la pregunta d, el estudiante cometió un error del tipo epistemológico. Es importante aclarar que en esta investigación hemos llamado error del tipo epistemológico a aquel error cuya causa se debe a un obstáculo epistemológico, tal como se detalla en el anexo 2.

También se observó un error del tipo regla mecánica en la solución de la pregunta e, esto a pesar de que las indicaciones fueron que se respondía observando la grafica y manipulando los deslizadores.

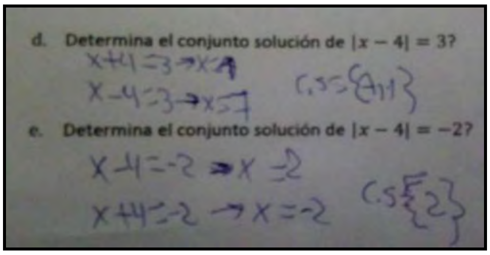


Figura 51. Errores observados en la pregunta 1.d y 1.e de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

Actividad II. Pregunta 1.e. Determina el conjunto solución de |*x*-4|=-2

Esta pregunta causó ciertas dudas en los estudiantes, mucho de los estudiantes decían las siguientes frases:

- No hay solución
- No existe
- No se puede
- Profesora, esta incorrecta la pregunta, no hay respuesta

Ante la pregunta de algunos estudiantes, respecto a si la pregunta estaba incorrecta, se respondió que la pregunta estaba correcta, a continuación se muestra el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Por qué dices que esta incorrecto?

Marycielo: Porque no hay ningún valor que de un resultado -2, siempre es positivo el resultado

Profesora: Tienes razón, es correcto lo que dices, entonces, ¿Cuál es el conjunto solución?

Marycielo: No existe

Profesora: Si no existe un valor que cumpla, entonces ¿Cómo expresamos el conjunto solución?

Kimberly: Conjunto vacío

Profesora: Exacto

Marycielo: Ah…

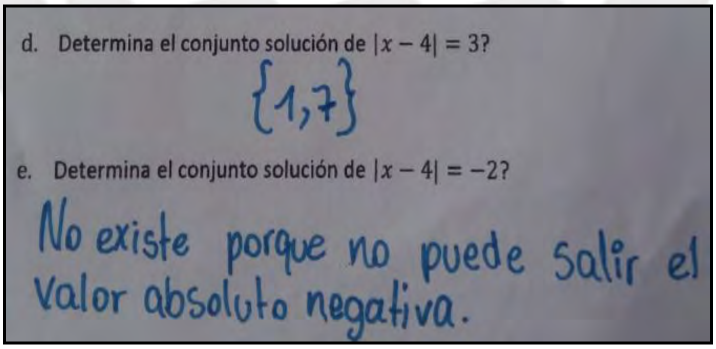
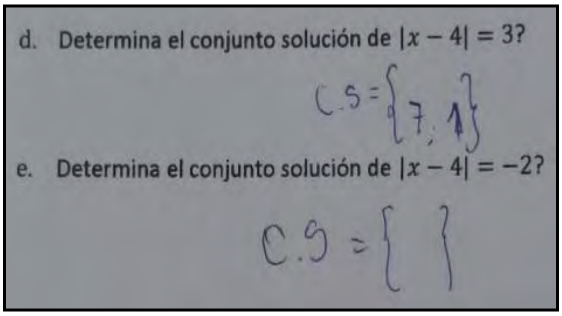


Figura 52. Respuesta observada en la pregunta 1.d y 1.e de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

Las respuestas que se obtuvieron fueron las que se observan en la Figura 54 y 55



d. Determina el conjunto solución de $|x-4|=3$?

C.S = {7; 1}

e. Determina el conjunto solución de $|x-4|=-2$?

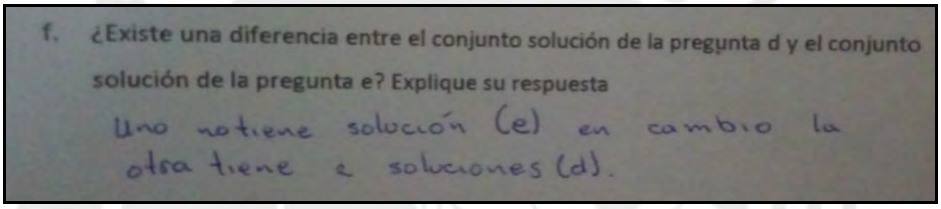
C.S = { }

Figura 53. Respuesta observada en la pregunta 1.d y 1.e de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

Actividad II. Pregunta 1.f. ¿Existe una diferencia entre el conjunto solución de la pregunta d y el conjunto solución de la pregunta e? Explique su respuesta.

La mayoría de los estudiantes reportaron que sí había diferencia en el conjunto solución, la respuesta mayoritaria fue la siguiente:



f. ¿Existe una diferencia entre el conjunto solución de la pregunta d y el conjunto solución de la pregunta e? Explique su respuesta

Uno notiene solución (e) en cambio la otra tiene 2 soluciones (d).

Figura 54. Respuesta de la pregunta 1.f de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

Otras respuestas fueron:

- Sí, en d el conjunto solución tiene dos elementos, en e no hay elementos
- Sí en d hay solución y en e no hay solución

Los dos estudiantes que no respondieron de forma correcta la pregunta d y e, no reportaron diferencias en el conjunto solución.

Actividad II. Pregunta 2.a y 2.b Grafica la función valor absoluto en el plano cartesiano, para cada caso

En esta actividad todos los estudiantes graficaron de forma correcta la función valor absoluto para los dos casos propuestos.

Actividad II. Pregunta 2.c y 2.d. Determina el conjunto solución de $|x+8|=10$ y de $|x-8|=10$

Aquí se observó dos tipos de comportamientos, el primer tipo de comportamiento fue el que se observó en la mayoría de los estudiantes, este grupo recurrió a la gráfica anterior, para poder responder a la pregunta, es decir resolvieron las ecuaciones gráficamente, como se observa en la siguiente figura

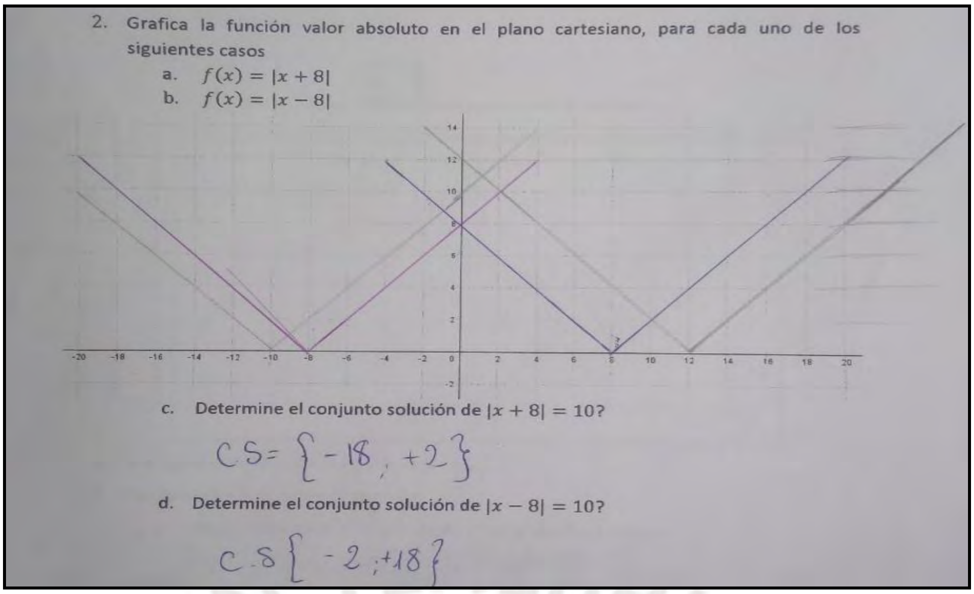


Figura 55. Respuesta con solución gráfica de la pregunta 2c y 2d de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

El otro tipo de comportamiento, que se observó sólo en diez estudiantes, fue que primero resolvieron de forma algebraica, y utilizaron la gráfica sólo para verificar sus respuestas, esto se puede ver como una forma de validación que utilizaron los estudiantes. En algunos casos se observa que hubieron correcciones en la parte algebraica, posiblemente, hicieron correcciones al ver que sus resultados no cumplían. En la siguiente figura, se observa el segundo tipo de comportamiento que se observó en esta pregunta

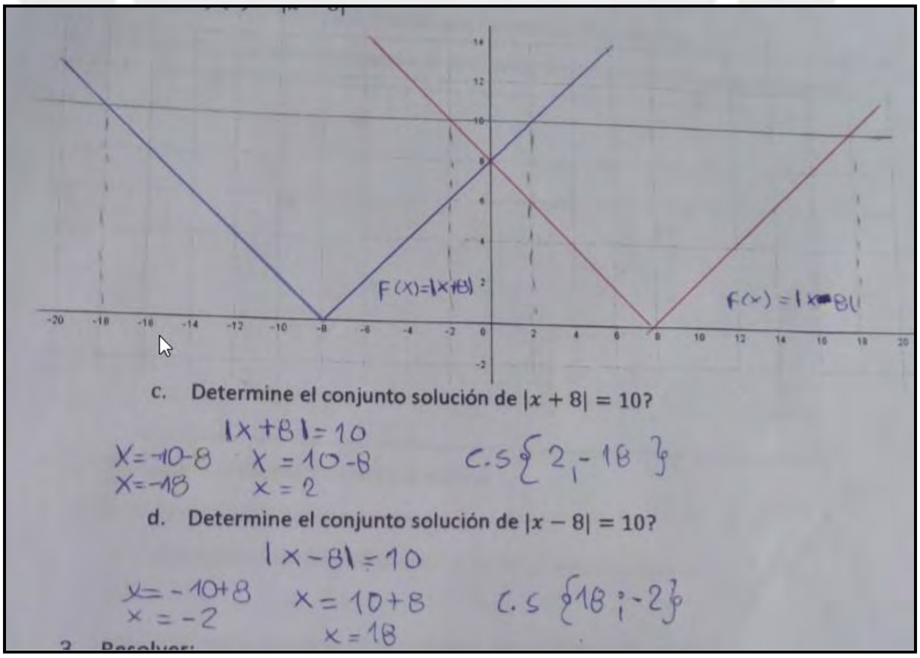


Figura 56. Respuesta con solución algebraica y gráfica en las preguntas2c y 2d de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

Actividad II. 3.a y 3.b Determine el conjunto solución de |*x*+10|=6 y |*x*-12|=10

Aquí también se observaron dos tipos de comportamientos, los que resolvieron la pregunta gráficamente y los que resolvieron algebraicamente. Como se aprecia en la siguiente figura, los estudiantes utilizaron el plano cartesiano de la figura anterior, para poder determinar el conjunto solución

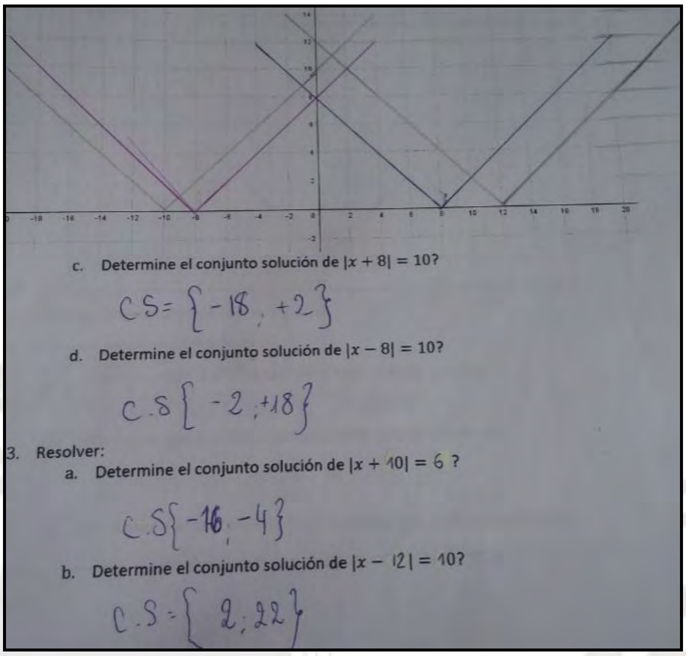


Figura 57. Respuesta con solución gráfica en las preguntas 3a y 3b de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

Sin embargo, hubo otro grupo de estudiantes minoritarios que resolvió algebraicamente, esta vez sin recurrir a una verificación gráfica.

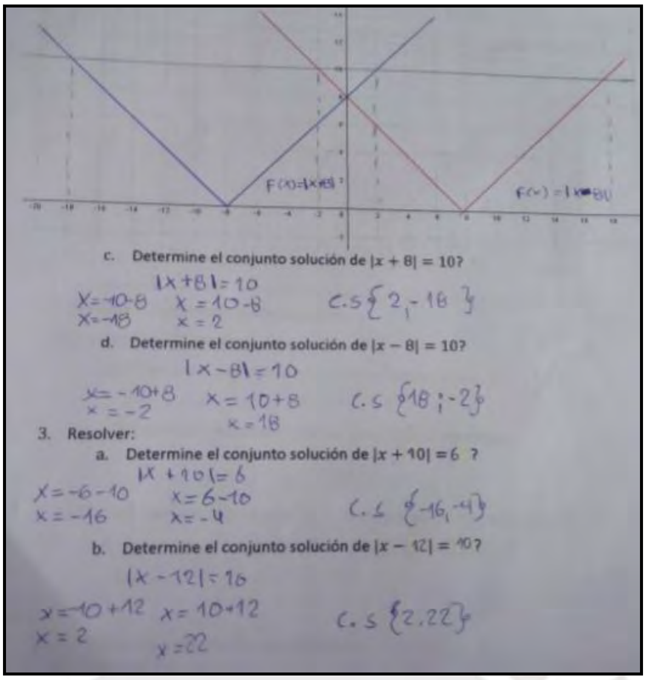


Figura 58. Respuesta con solución algebraica en las preguntas 3a y 3b de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

De este grupo de estudiante que recurrió a la solución algebraica, dos estudiantes cometieron errores al trabajar las ecuaciones con valor absoluto, los errores fueron del tipo epistemológico, como se muestra en la siguiente figura

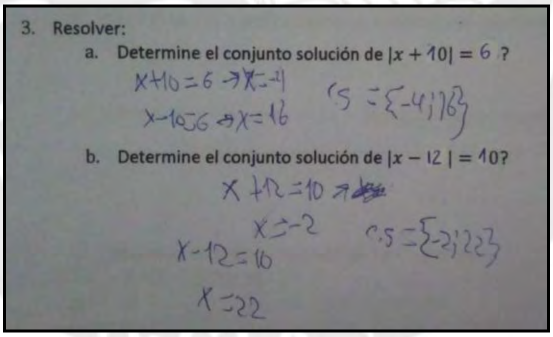


Figura 59. Respuestas incorrectas en las preguntas 3a y 3b de la ficha de trabajo N°2

Fuente: Propio

Cuando se preguntó a algunos estudiantes porqué que no recurrieron a la solución grafica o porque no verificaron sus resultados gráficamente, como hicieron algunos en la pregunta anterior, dijeron que porque no lo pedían o porque el plano cartesiano que se mostraba en la ficha de trabajo era de la pregunta 2 y no de la pregunta 3.

Institucionalización

Cuando se explicó que una ecuación de la forma $|x+a|=b$, se puede resolver gráficamente, los estudiantes expresaron lo siguiente:

- *Se puede hacer de cualquiera de las dos formas*
- *Ah…no sabíamos que se podía resolver gráficamente*
- *La gráfica nos puede ayudar a ver si el resultado es correcto.*

Indicaciones Iniciales

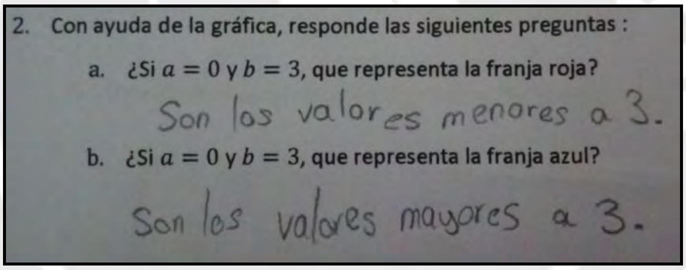
Se dio las indicaciones para la realización de la actividad III, de manera que todos los alumnos puedan acceder al archivo GeoGebra 3 como se muestra en la Figura 33.

Actividad III. Pregunta 1. Completar cada oración con una de las palabras (mayores o menores) según corresponda

Los estudiantes respondieron de forma correcta esta pregunta, tiene la noción de que los valores que están por encima de la recta $y=b$ son mayores que los valores por debajo de la recta $y=b$ son menores.

Actividad III. Pregunta 2a y 2b. Con ayuda de la gráfica, responde las siguientes preguntas:

En esta pregunta, la mayoría de estudiantes no respondió como se esperaba, no identificaron a las franjas como intervalos de valores donde la función tomaba valores mayores o menores 3, la mayoría presentó la siguiente respuesta


2. Con ayuda de la gráfica, responde las siguientes preguntas :

a. ¿Si $a = 0$ y $b = 3$, que representa la franja roja?

Son los valores menores a 3.

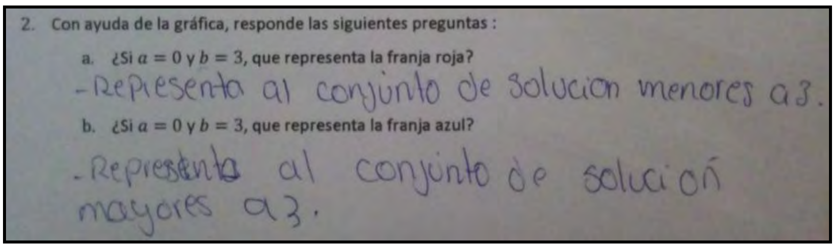
b. ¿Si $a = 0$ y $b = 3$, que representa la franja azul?

Son los valores mayores a 3.

Figura 60. Respuestas incorrectas en las preguntas 2 de la ficha de trabajo N°3

Fuente: Propio

Sólo 6 estudiantes, identificaron las franjas como parte de un conjunto solución, aunque no expresaron correctamente su respuesta, se entiende que tenían una noción de que dentro ese conjunto solución el valor absoluto tomaba valores mayores o menores a 3


2. Con ayuda de la gráfica, responde las siguientes preguntas :

a. ¿Si $a = 0$ y $b = 3$, que representa la franja roja?

-Representa al conjunto de solucion menores a 3.

b. ¿Si $a = 0$ y $b = 3$, que representa la franja azul?

-Representa al conjunto de solución mayores a 3.

Figura 61. Respuesta con noción correcta en las preguntas 2a y 2b de la ficha de trabajo N°3

Fuente: Propio

Frente a esta realidad, se tuvo que hacer preguntas a los estudiantes, se partió de que algunos estudiantes habían identificado la franja roja como el conjunto solución, entonces se preguntó a uno de ellos:

Profesora: Martín, ¿Cuál fue tu respuesta en la pregunta 2b?

Martin: La franja azul representa el conjunto solución mayor a 3

Profesora: A ver, ¿La franja azul que valores toma?

Martin: De menos infinito hasta -3 y desde 3 hasta el más infinito

Profesora: Dentro de ese conjunto de valores esta 4, pero 4 no es mayor a 3

Martin: mmm…no el conjunto solución no es mayor a 3, la gráfica, la uve, toma valores mayores a 3

Profesora: Entonces, la franja azul no representa el conjunto solución mayor a 3

Martin: No, es el conjunto solución donde el valor absoluto es mayor a 3

Profesora: Bien, entonces (dirigiéndose a toda la clase) la franja roja qué representa. A ver otro que no sea Martin

Mery: Es el conjunto solución donde el valor absoluto es menor a 3

Actividad III. Preguntas 2c, 2d, 2e y 2f. Determina el conjunto solución:

Todos estos problemas se resolvían manipulando los deslizadores en el archivo GeoGebra 3, la mayoría de estudiantes manipularon correctamente los deslizadores, y lograron determinar el conjunto solución de forma correcta para cada inecuación, como se muestra en la siguiente figura.

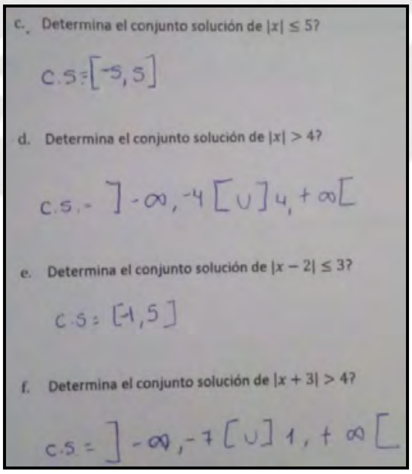


Figura 62. Respuesta correcta a las preguntas 2c, 2d, 2e y 2f de la ficha de trabajo N°3

Fuente: Propio

Actividad III. Pregunta 3a, 3b, 3c y 3d. Responde las siguientes preguntas:

En todas estas preguntas los estudiantes ya no podían determinar el conjunto solución con ayuda de los deslizadores, tampoco tenían un plano cartesiano. Pocos estudiantes contestaron de forma correcta, para determinar el conjunto solución un grupo de estudiantes utilizó una hoja cuadriculada y obtuvo el conjunto solución de cada inecuación gráficamente, como se observa en la siguiente figura:

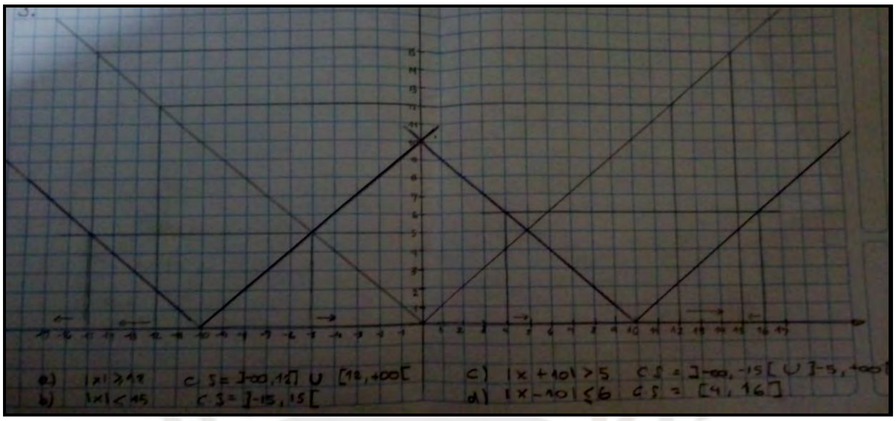


Figura 63. Respuestas gráfica para las preguntas 3a, 3b, 3c y 3d de la ficha de trabajo N°3

Fuente: Propio

Otro grupo de estudiantes logró inferir la solución por las soluciones de la pregunta 2c y 2d, para la pregunta 3a y 3b, indirectamente aplicaron la propiedades de valor absoluto, sin embargo no hicieron lo mismo para la pregunta 3c y 3d, en estas dos últimas preguntas algunos trataron de resolver las inecuaciones sin éxito como se muestra en la siguiente figura

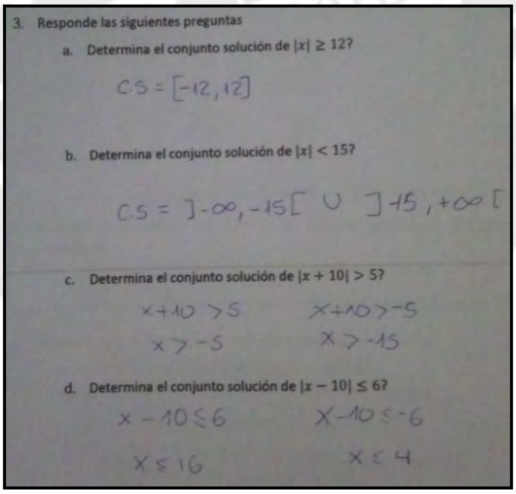
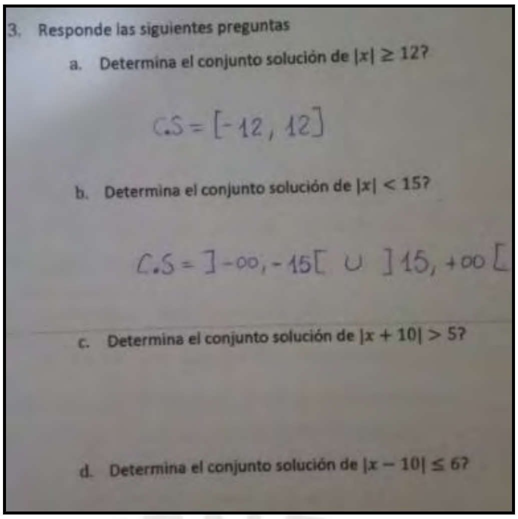


Figura 64. Respuestas incorrectas en las preguntas 3c y 3d de la ficha de trabajo N°3

Fuente: Propio

Otro grupo de estudiantes dejó sin responder estas dos últimas preguntas.



3. Responde las siguientes preguntas

a. Determina el conjunto solución de $|x| \geq 12$?

$C.S = [-12, 12]$

b. Determina el conjunto solución de $|x| < 15$?

$C.S =]-\infty, -15[\cup]15, +\infty[$

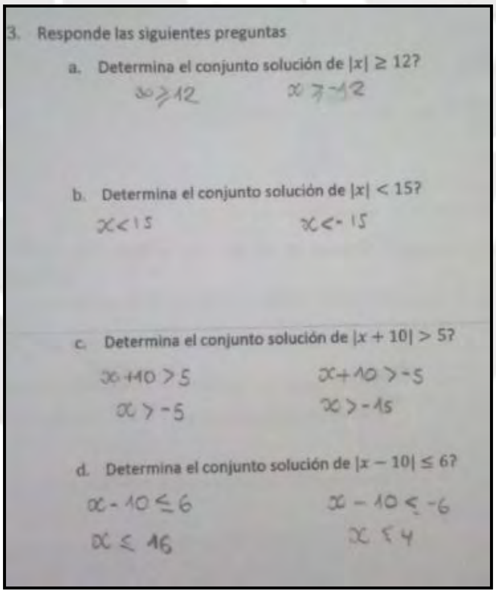
c. Determina el conjunto solución de $|x + 10| > 5$?

d. Determina el conjunto solución de $|x - 10| \leq 6$?

Figura 65. Preguntas 3c y 3d ficha de trabajo N°3sin respuesta

Fuente: Propio

20 estudiantes respondieron de forma incorrecta, tratando de resolver las inecuaciones de forma incorrecta y 10 estudiantes dejaron en blanco esta parte de la ficha de trabajo. Los tipos de errores que se evidenciaron en las respuestas, fueron del tipo regla mecánica, tal como se observa en la siguiente figura.



3. Responde las siguientes preguntas

a. Determina el conjunto solución de $|x| \geq 12$?

$x \geq 12$ $\quad$ $x \geq -12$

b. Determina el conjunto solución de $|x| < 15$?

$x < 15$ $\quad$ $x < -15$

c. Determina el conjunto solución de $|x + 10| > 5$?

$x + 10 > 5$ $\quad$ $x + 10 > -5$

$x > -5$ $\quad$ $x > -15$

d. Determina el conjunto solución de $|x - 10| \leq 6$?

$x - 10 \leq 6$ $\quad$ $x - 10 \leq -6$

$x \leq 16$ $\quad$ $x \leq 4$

Figura 66. Respuestas incorrectas en las preguntas 3ª, 3b, 3c y 3d de la ficha de trabajo N°3

Fuente: Propio

Institucionalización

Cuando se explicó que una inecuación de la forma $|x+a| \geq b$, o $|x+a| \leq b$ también se puede resolver gráficamente, y además que está relacionado a propiedades de valor absoluto que ellos ya han estudiado, se escucharon las siguientes frases

- *No me acordaba de las propiedades*
- *Si no se puede hacer la gráfica, se puede usar las propiedades*
- *Es más difícil si no se tiene espacio para la gráfica*

Observamos que para los estudiantes, usar las propiedades no es tan sencillo en comparación de resolver gráficamente, pero se dan cuenta que a veces realizar la solución gráfica va a demandar más tiempo, pues no siempre se tiene el plano coordenado dibujado como han experimentado en las preguntas 3a, 3b, 3c y 3d de la actividad III.

En el siguiente capítulo, mostramos los resultados del análisis implicativo del cuestionario aplicado a los estudiantes después de realizar la secuencia de actividades.

CAPÍTULO VII. ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO-SEGUNDA PARTE

En ésta sección se presenta los resultados del análisis cohesitivo de las respuestas del cuestionario que se realizó a los estudiantes después de aplicar la secuencia de actividades. Donde se muestra las implicancias que hay entre las concepciones que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto y las respuestas que presentan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

7.1 Análisis Cohesitivo

En la siguiente figura se observa el árbol cohesitivo completo que se ha obtenido con los resultados del cuestionario aplicado a los estudiantes después de aplicar la sesión 1 y 2. La gráfica muestra 35 reglas o clases, de los cuales 13 son significativos.

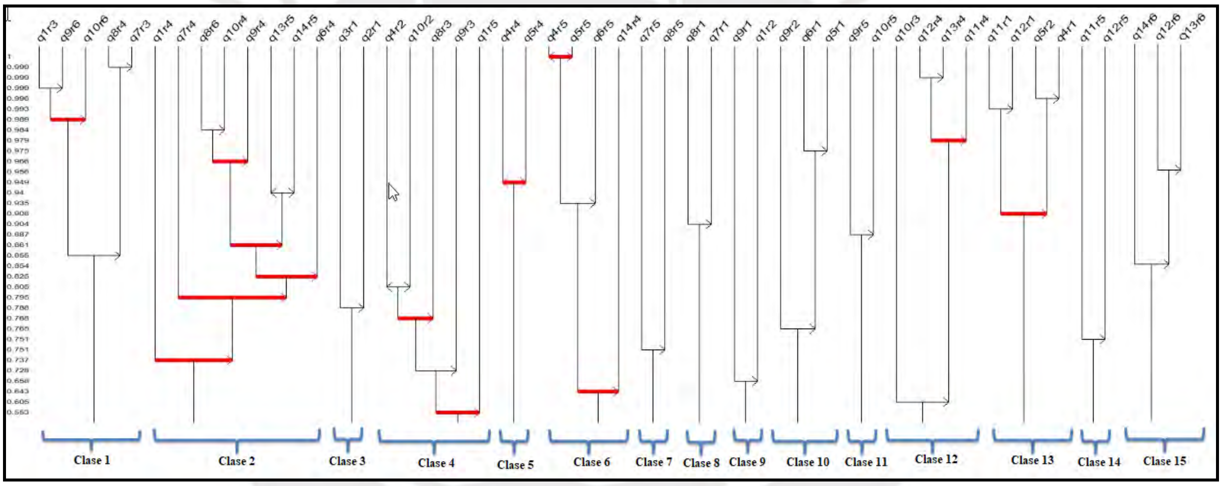


Figura 67. Árbol cohesitivo después de la situación didáctica

Fuente: Propio

En el anexo 6, se muestran los niveles de cohesión de las reglas que se muestran en el árbol cohesitivo de la Figura 67. Tal como se hizo en el capítulo IV, se realizará el análisis de aquellas clases con nivel de cohesión mayor a 0.5. Empezaremos analizando las clases 2 y 4, debido a que son las que poseen mayor cantidad de nodos significativos.

Clase 2 q1r4→{(q7r4→[(((q8r6→q10r4)→q9r4)→(q13r5↔q14r5))→q6r4]}-nivel de cohesión 0.795

(q8r6→q10r4)→q9r4 Aquellos estudiantes que no respondieron a la ecuación $|x|=-6$, probablemente tampoco respondieron a la ecuación $|x-3|=-2$. Aquellos alumnos que presentaron estas características probablemente tampoco respondieron a la ecuación $|x+2|=3$. Esto con un nivel de cohesión de 0.966.

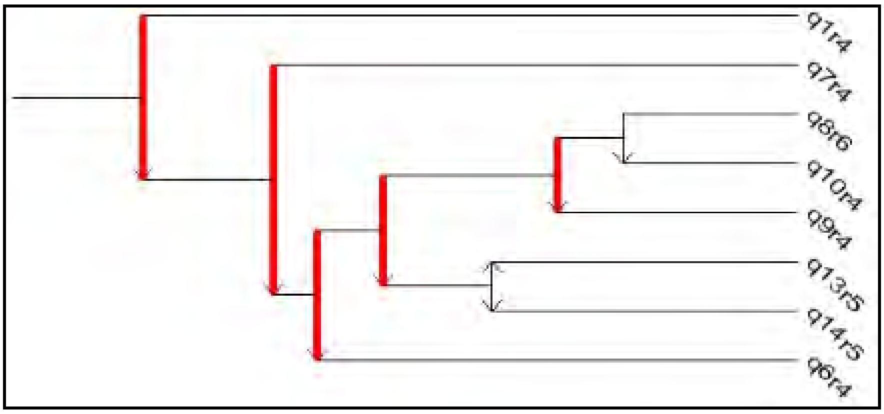


Figura 68. Clase 2 del árbol cohesitivo de la figura 67

Fuente: Propio

La regla ((q8r6→q10r4)→q9r4)→(q13r5↔q14r5) muestra que aquellos estudiantes que mostraron las características del grupo descrito en el párrafo anterior, probablemente tampoco respondieron a las inecuaciones $|x+1|\geq 3$ y $|x-1|< 3$.

La regla (((q8r6→q10r4)→q9r4)→(q13r5↔q14r5))→q6r4 muestra que aquellos estudiantes que presentaron el comportamiento descrito en la regla anterior, probablemente tampoco respondieron a la pregunta si $x \in\ ]-\infty,+\infty[$, entonces cuál es el $|x|$. Esto con un nivel de cohesión de 0.825

La regla q7r4→[(((q8r6→q10r4)→q9r4)→(q13r5↔q14r5))→q6r4] muestra que aquellos alumnos que no respondieron a la ecuación $|x|=5$, probablemente también mostraron las características del grupo descrito en el párrafo anterior

Finalmente, la clase q1r4→{(q7r4→[(((q8r6→q10r4)→q9r4)→(q13r5↔q14r5))→q6r4]}, muestra que aquellos estudiantes que no respondieron acerca de lo que entendían por valor absoluto, probablemente tampoco resolvieron ecuaciones del tipo $|x+a|=b$, $|x|=b$ e inecuaciones del tipo $|x+a|<b$. Esto quiere decir, que luego de haber aplicado la secuencia didáctica hay un grupo de estudiantes que no ha interiorizado la concepción del valor absoluto. Este comportamiento también se observó en el análisis cohesitivo realizado en el capítulo IV, sin embargo no se puede asegurar que los alumnos que evidenciaron ese comportamiento sean los mismos que evidenciaron ese comportamiento ahora.

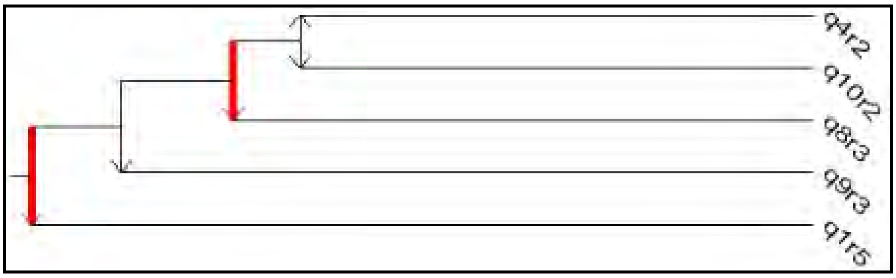


Figura 69. Clase 4 del árbol cohesitivo de la figura 67

Fuente: Propio

Clase 4 (((q4r2↔q10r2)→q8r3)→q9r3)→q1r5)-nivel de cohesión 0.553

La regla q4r2↔q10r2 muestra que aquellos estudiantes que tuvieron un error de interpretación de definición cuando se les pide expresar el |*x*| en términos de *x*, sabiendo que *x* es positivo, probablemente también cometieron un error del tipo regla mecánica al resolver la ecuación |*x*-3|= -2. Esta implicación también se da en sentido contrario.

La regla (q4r2↔q10r2)→q8r3 indica que aquellos estudiantes que presentan el comportamiento descrito en la regla anterior, probablemente también presenten un error del tipo regla mecánica cuando resuelven la ecuación |*x*|= -6.

La regla ((q4r2↔q10r2)→q8r3)→q9r3 muestra que los estudiantes que muestran el comportamiento descrito en el párrafo anterior, probablemente no presentan error al resolver la ecuación |*x*+2|=3, esto se entiende, ya que la regla mecánica para resolver el valor absoluto en esta última ecuación no genera respuestas incorrectas.

Finalmente, la clase (((q4r2↔q10r2)→q8r3)→q9r3)→q1r5 señala que los estudiantes que presentaron el comportamiento descrito en la regla anterior, probablemente también muestren una concepción equivocada del valor absoluto de un número. Todo esto con un nivel de cohesión de 0.728. Esto muestra que después de la secuencia didáctica, hay un grupo de estudiantes que resolvieron de manera mecánica las ecuaciones con valor absoluto. Como hemos descrito en el anexo 2, el error de tipo regla mecánica está asociado al obstáculo didáctico de creer que el valor absoluto es sólo un símbolo que debe ser eliminado de manera mecánica, y por ser obstáculo una de sus características es que es resistente.

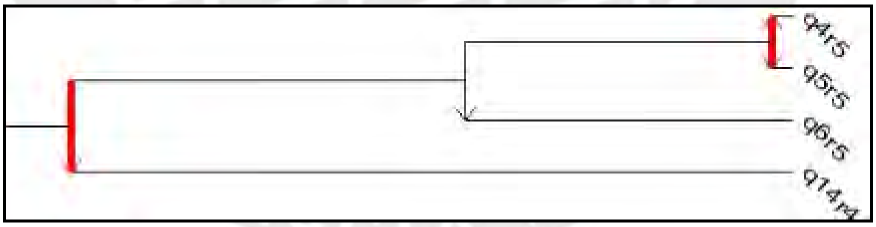


Figura 70. Clase 6 del árbol cohesitivo de la figura 67

Fuente: Propio

Clase 6 ((q4r5↔q5r5)→q6r5)→q14r4-nivel de cohesión 0.643

La regla q4r5↔q5r5 muestra una implicancia en doble sentido, es decir aquellos estudiantes que tuvieron un error de interpretación cuando se les pregunta el |*x*| si *x* es positivo, probablemente también tengan el mismo tipo de error al resolver |*x*| si *x* es negativo. Aquellos estudiantes que muestran este comportamiento, probablemente también presenten el mismo tipo de error al resolver |*x*| si *x*є]-∞,+∞[.

Finalmente la clase 6 ((q4r5↔q5r5)→q6r5)→q14r4 muestra que aquellos estudiantes que muestran la características del grupo descrito en el párrafo anterior, probablemente resuelvan correctamente las inecuación $|x-1|<3$. Esto con un nivel de cohesión 0.935. Esto quiere decir que aquellos estudiantes que no interpretan las preguntas donde se requiere que expresen los resultados en términos de una variable, no tienen dificultades al resolver inecuaciones con valores numéricos definidos.

Un comportamiento similar se observó en las respuestas de los estudiantes en el primer cuestionario, la clase 5 del primer árbol cohesitivo muestra la misma implicancia que la clase 6 del segundo árbol cohesitivo, salvo por la última implicancia que muestra esta última clase con las inecuaciones. Es decir, aún después de la aplicación de la situación didáctica, hay un grupo de estudiantes que no resuelve correctamente ecuaciones con valor absoluto en términos de variables, aunque no necesariamente se trate de los mismos alumnos que mostraron el comportamiento en el primer cuestionario.

Ahora, analizaremos aquellas clases que han presentando un nodo de significancia.

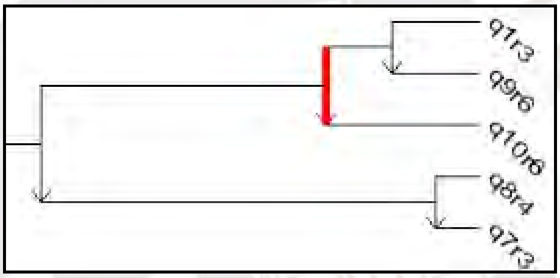


Figura 71. Clase 1 del árbol cohesitivo de la figura 67

Fuente: Propio

Clase 1 ((q1r3→q9r6)→q10r6)→(q8r4→q7r3)-nivel de cohesión 0.855

Es importante notar que en esta clase aparece la variable q1r3, la cual estuvo ausente en el primer árbol cohesitivo (Figura 22), está variable está asociada a la concepción funcional del valor absoluto. Podemos decir, que esta es la diferencia principal entre los resultados del cuestionario antes y después de aplicar la situación didáctica.

La regla (q1r3→q9r6)→q10r6 muestra que aquellos estudiantes que tienen una concepción funcional del valor absoluto, probablemente también resolvieron gráficamente la ecuación $|x+2|=3$, obteniendo resultados correctos. Aquellos estudiantes que mostraron este comportamiento, probablemente también respondieron correctamente a la ecuación $|x-3|= -2$, debido a que al resolver gráficamente la ecuación no encontraron solución, y expresaron correctamente que el conjunto solución era el vacío.

La regla q8r4→q7r3, muestra que aquellos estudiantes que resolvieron de forma correcta la ecuación $|x|= -6$, probablemente también respondieron de forma correcta a la ecuación $|x|=5$, esto debido a que los estudiantes han recurrido a la solución gráfica de las ecuaciones.

Finalmente la clase ((q1r3→q9r6)→q10r6)→(q8r4→q7r3) muestra que aquellos alumnos que tiene una concepción funcional de valor absoluto, probablemente resuelvan correctamente las ecuaciones $|x|=b$ y $|x+a|=b$. Esto con un nivel de cohesión de 0.885. Esto debido a que la concepción funcional, permite que se apoyen en una representación gráfica, para poder determinar la solución. Es importante señalar que, ninguno de los estudiantes respondieron correctamente a las ecuaciones $|x|= -6$ y $|x-3|= -2$.

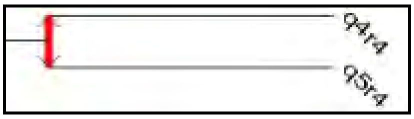


Figura 72. Clase 5 del árbol cohesitivo de la figura 67

Fuente: Propio

Clase 5 (q4r4→q5r4)-nivel de cohesión 0.949

Aquellos alumnos que no respondieron la pregunta cuál es el $|x|$ si x es positivo, probablemente tampoco respondieron a la pregunta cuál es el $|x|$ si x es negativo. El nivel de cohesión es 0.949.

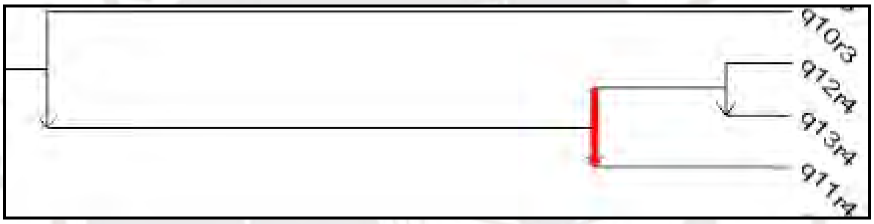


Figura 73. Clase 12 del árbol cohesitivo de la figura 67

Fuente: Propio

Clase 12 (q10r3→((q12r4→q13r4)→q11r4))-nivel de cohesión 0.605

La regla ((q12r4→q13r4)→q11r4) muestra que aquellos estudiantes que resolvieron correctamente la inecuación $|x|\geq 2$, probablemente también resolvieron la inecuación $|x+1|\geq 13$. Aquellos estudiantes que mostraron este comportamiento, probablemente también resolvieron la inecuación $|x|\leq 4$.

Finalmente, la clase (q10r3→((q12r4→q13r4)→q11r4)) muestra que aquellos estudiantes que resolvieron correctamente la ecuación $|x-3|=-2$, probablemente también resolvieron correctamente las inecuaciones con valor absoluto.

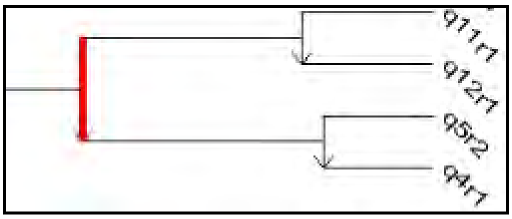


Figura 74. Clase 13 del árbol cohesitivo de la figura 67

Fuente: Propio

Clase 13 (q11r1→q12r1)→(q5r2→q4r1)-nivel de cohesión 0.908

La regla q11r1→q12r1 muestra que aquellos estudiantes que presentaron error del tipo “regla mecánica” al resolver la inecuación $|x|\leq 4$, probablemente también presente el mismo tipo de error al resolver la inecuación $|x|\geq 2$. La regla q5r2→q4r1 muestra que los estudiantes que no presentaron error al resolver $|x|$ si x es negativo, probablemente no presenten error al resolver $|x|$ si x es positivo. Finalmente la clase (q11r1→q12r1)→(q5r2→q4r1) muestra que los estudiantes que presenta tipo de error regla mecánica al resolver inecuaciones de la forma $|x|\leq$b o $|x|\geq$b, probablemente no presentan error al trabajar con variables.

A continuación, se muestra el resultado del análisis a posteriori y validación de la secuencia didáctica.

CAPÍTULO VIII. ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

En este capítulo se muestra la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Además se validan las hipótesis planteadas en la fase preliminar.

8.1 Análisis A Posteriori

A continuación se muestra la contrastación entre el análisis a priori y a posteriori para la actividad I

Tabla 21. Contrastación entre los comportamientos esperados vs los observados en la actividad I.(a hasta f)

Ítem	Logros /Dificultades
I.a	Se observó el comportamiento esperado
I.b	En la primera parte de la pregunta, algunos estudiantes no mostraron el comportamiento esperado, puesto que dieron como resultado áreas negativas, estos estudiantes no tenían claro que una unidad de medida como el área no puede tomar valores negativos. Por lo que para un grupo de alumnos la situación problema no dio el resultado esperado. Para los estudiantes que tenían la noción de que la unidad de medida como el área de triángulo siempre toma valores positivos, se observó el comportamiento esperado. En la segunda parte de la pregunta, se observó el comportamiento esperado, los alumnos reconocieron una relación funcional entre x y el área del triángulo.
	Como se esperaba, algunos estudiantes no se acordaban la fórmula de área de triángulo, a pesar de ser una noción que han visto en primer y segundo grado de secundaria, por lo cual se hizo el proceso de devolución con la finalidad de que los estudiantes recuerden la fórmula, partiendo del área de un rectángulo.
I.c	Se observó el comportamiento esperado.
I.d	Se observó el comportamiento esperado.
I.e	Se observó el comportamiento esperado
I.f	La mayoría de los estudiantes no mostraron el comportamiento deseado, no tenían clara la noción de dominio y rango de una función. No se esperaba recurrir al proceso de devolución en esta parte porque de acuerdo al análisis preliminar los estudiantes estaban familiarizados con estos términos; sin embargo, durante la aplicación de la secuencia se tuvo que realizar el proceso de devolución, identificando el dominio y rango de la función lineal, sin embargo, esta proceso no logró el resultado esperado, muchos estudiantes copiaron el mismo dominio y rango de la función lineal, para su respuesta del dominio y rango de la función valor absoluto.

Tabla 22. Contrastación entre los comportamientos esperados vs los observados en la actividad I(g hasta j)

Ítem	Logros /Dificultades
I.g	En los ítems i y ii se observó el comportamiento esperado, para los ítems iii y iii sólo 4 estudiantes mostraron el comportamiento esperado, es decir sólo este grupo logró generalizar lo observado con los valores numéricos a variables y expresaron que si *a* toma valores positivos el área del triángulo será *a*, pero si *b* toma valores negativos el área del triángulo será *–b.* Sin embargo, la mayoría de estudiantes expresó en el ítem iii que si *b* es negativo el área es *b*, y expresaron que b es positivo, para ellos *b* es positivo porque no tiene un signo menos delante. Este problema esta asociado a la noción que tienen los estudiantes acerca de variables. Al respecto Gagatsis y Panaoura (2014), señalaron que algunos errores que evidencian los estudiantes al trabajar con valor absoluto están relacionados a la concepción que tiene los estudiantes de variable, cuando se les pide a los estudiantes determinar el signo de *–x*, una respuesta común es que *–x* es un número negativo. Sólo 4 estudiantes, tuvieron dificultades con la frase "el área del triángulo en función de *a* es", la mayoría entendió que la respuesta debe expresarse en función de la variable.
I.h	No se observó el comportamiento esperado, ninguno llegó a expresar correctamente la regla de correspondencia. La primera dificultad es que no recordaban el término "regla de correspondencia". Luego de realizar la devolución sólo un grupo de estudiantes reconoció que el área depende del signo de *x*, sin embargo la gran mayoría expresó que el área del triángulo ABC era igual a *x*, esto quiere decir que la segunda dificultad que presentaron los estudiantes está relacionado a la concepción que tienen los estudiantes acerca de variable, para la mayoría de los estudiantes *x* representa un valor positivo.
I.i	Se observó el comportamiento esperado
I.j	Todos los estudiantes mostraron el comportamiento esperado en la parte i y ii, es decir respondieron que si *A(x)*=4, entonces x es 4 o -4, y si *A(x)* es 17 entonces *x* es -17 o 17. La parte iii para la mayoría de los estudiantes causó dificultades, al ser esta una variable didáctica, la respuesta de los estudiantes cambiaron, y dijeron que no se podía o que no había un valor que puede tomar *x*, y justificaron su respuesta con el hecho de que el área no puede tomar valores negativos. Esta pregunta logró que para algunos estudiantes sí se rompiera el contrato didáctico, debido a que se observaron respuestas poco comunes en actividades matemáticas, como : no se puede o no hay. Sin embargo, para 10 estudiantes, no se observó el comportamiento esperado, la razón fue que algunos de ellos no tienen claro la concepción de que el área es una unidad de medida y que por lo tanto no puede tomar valores negativos, por otro lado para algunos estudiantes no es posible que la respuesta de una pregunta: sea que no se puede o que no existe.

A continuación se muestra la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori en la actividad II.

Tabla 23. Contrastación entre los comportamientos esperados vs los observados en la actividad II

Ítem	Logros /Dificultades
1.a 1.b	Se observó el comportamiento esperado
1.c	35 estudiantes de 36 mostraron el comportamiento esperado.
1.d	Se observó el comportamiento esperado, el argumento de la función en esta pregunta esperábamos que sea una variable didáctica, y que al tomar el valor de $x+a$, suponíamos produciría cambios en el comportamiento de los estudiantes, en términos de tipo de solución, y fue así debido a que la mayoría de los estudiantes, manipulo los deslizadores para obtener la gráfica de la función $f(x)=\|x-4\|$ y determinaron gráficamente el conjunto solución de la ecuación $\|x-4\|=3$. Sólo dos estudiantes no recurrieron al archivo GeoGebra y resolvieron algebraicamente, cometiendo errores a los que hemos llamado errores del tipo epistemológico (Anexo 2).
1.e	En la mayoría de estudiantes se observó el comportamiento esperado, en este caso se esperaba que el valor que toma la función sea una variable didáctica y que al tomar valores negativos, produzca un cambio en las respuesta de los estudiantes, aunque no todos expresaron que el conjunto solución era vació, se observaron respuestas como no existe, no hay o no se puede, evidencian la noción de que el valor absoluto de un número no puede ser negativo
1.f	Se observó en la mayoría de estudiantes el comportamiento esperado, los estudiantes expresaron que el conjunto solución era diferente, porque en la pregunta 1.e no hay un valor que puede tomar x debido a que la función valor absoluto nunca puede ser negativo, esa noción queda claro por la representación gráfica de la función valor absoluto, la mayoría explicaba su solución la gráfica de la función. Sólo dos estudiantes no mostraron el comportamiento esperado debido a que resolvieron algebraicamente de forma incorrecta, al cometer errores del tipo epistemológico.
2.a 2.b	Se observó el comportamiento esperado
2.c 2.d	Se observó el comportamiento esperado en un grupo de estudiantes, el argumento de la función es una variable didáctica, debido a que la mayoría de los estudiantes no recurrieron a trabajar algebraicamente, sino que resolvieron la ecuación gráficamente, algo que los estudiantes no hacían antes ante una ecuación con valor absoluto (como se observó en los resultados del cuestionario antes de aplicar la secuencia didáctica). Se observó otro comportamiento no esperado, otro grupo de diez estudiantes, resolvió algebraicamente primero, pero luego verificaron sus resultados gráficamente, algunos utilizaron la solución gráfica para corregir su operación algebraica. Esto es característico de la fase de validación.

3.a 3.b	Se observó cierta dificultad, en este caso la pregunta no proporcionaba un plano cartesiano, la mayoría de los estudiantes para resolver la pregunta, utilizó el plano cartesiano de la pregunta 2, hizo la gráfica de las funciones para cada caso a y b y resolvió gráficamente, obteniendo las respuestas correctas. Otro grupo de estudiantes resolvió algebraicamente, es decir, al no aparecer el plano cartesiano, no recurren a la solución gráfica sino que empiezan a operar, dos de ellos presentaron errores del tipo epistemológico.

A continuación se muestra la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori en la actividad III.

Tabla 24. Contrastación entre los comportamientos esperados vs los observados en la actividad III

Ítem	Logros /Dificultades
1.a y 1.b	Se observó el comportamiento esperado
2.a y 2.b	No se observó el comportamiento esperado en la mayoría de estudiantes.
2.c, 2.d, 2.e y 2.f	Se observó el comportamiento esperado.
3.a y 3.b	No se observó el comportamiento esperado en la mayoría de estudiantes, se esperaba que esta pregunta fuera una variable didáctica al no poder trabajar con los deslizadores, y no tener un plano cartesiano, es decir, se esperaba que los estudiantes deduzcan las propiedades a partir de lo que habían resuelto en las preguntas anteriores, sin embargo muchos optaron por resolver las inecuaciones, y cometieron errores del tipo regla mecánica, pocos estudiantes lograron inferir la el conjunto solución correcto. Un grupo minoritario resolvió de forma correcta de manera gráfica, utilizando una hoja cuadriculada.
3.c y 3.d	No se observó el comportamiento esperado, se esperaba que esta pregunta fuera una variable didáctica al no poder trabajar con los deslizadores, y no tener un plano cartesiano, es decir, se esperaba que los estudiantes deduzcan las propiedades a partir de lo que habían resuelto en las preguntas anteriores, sin embargo muchos optaron por resolver las inecuaciones, y cometieron errores del tipo regla mecánica, y otro grupo de estudiantes no respondió a la pregunta. Un grupo minoritario resolvió de forma correcta de manera gráfica, utilizando una hoja cuadriculada.

8.2 Validación de las Hipótesis

Para realizar la validación de las hipótesis que se tenía en este trabajo, en términos de suponer qué variables lograrían modificar el comportamiento de los estudiantes, hemos hecho uso de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, pero también hemos utilizado como recurso el análisis cohesitivo, esto está sustentado en base a la siguiente afirmación:

> “El análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Además, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (Artigue, 1996, p.193)

A continuación hacemos la validación de las hipótesis que se había propuesto durante el análisis a priori:

- La situación problema permitió que el estudiante construyera la gráfica de la función valor absoluto, pero no logró que el estudiante obtenga la regla de correspondencia de la función valor absoluto. Las razones principales fueron: la falta de familiaridad con el término “reglas de correspondencia de funciones” y en segundo lugar la ausencia de la noción de variable.
- El argumento de la función al cambiar de valores entre números enteros a variables no actuó como variable didáctica, no se logró modificar el comportamiento de los estudiantes, los cuales expresaron que si b representa un número negativo el $|b|$ es b, esto también se observó en el análisis cohesitivo en la clase 5 del árbol cohesitivo de la Figura 67, la razón es principalmente la concepción incorrecta que tienen los estudiantes acerca de variable, tal como reporta Gagatsis y Panaoura (2014).
- El argumento de la función al cambiar de valores entre variables a una expresión algebraica del tipo $x+a$, sí actuó como variable didáctica, porque modificó el comportamiento de los estudiantes, que inicialmente resolvían las ecuaciones de forma algebraica con tipo de error de regla mecánica, y que luego cambian a resolución gráfica llegando a las respuesta correctas. Esto es reforzado por los resultados del análisis cohesitivo, donde en la clase 1 del árbol cohesitivo de la Figura 67, muestra que aquellos estudiantes que tienen la concepción funcional de valor absoluto, probablemente resolvieron de forma correcta las ecuaciones del tipo $|x+a|=b$.
- El valor de la función valor absoluto al cambiar de número entero positivo a un número entero negativo actuó como una variable didáctica durante la secuencia didáctica, debido a que se logró cambios en las respuestas de los estudiantes, y este mismo comportamiento se evidenció al realizar el análisis cohesitivo, en la clase 1 del árbol cohesitivo de la Figura 67, se observa la implicancia que hay entre la concepción funcional del valor absoluto y la respuestas correctas ante ecuaciones con valor absoluto que no tienen solución, en el primer cuestionario

ningún estudiante respondió correctamente este tipo de pregunta, esta variable se reconoció luego de la secuencia didáctica.

- El tipo de relación sí funcionó como variable didáctica, de modo que cambió la forma de respuesta de los estudiantes, donde ahora presentan sus repuestas como intervalo de valores.
- El tipo de relación igualdad sin ayuda gráfica funcionó como variable didáctica, logrado que algunos estudiantes resuelvan las ecuaciones algebraicamente, pero verificando sus resultados gráficamente, mientras que otros estudiantes, recurriendo a la solución gráfica, comportamientos que al aplicar el primer cuestionario no se había observado.
- El tipo de relación sin ayuda gráfica no funcionó como variable didáctica, debido que al ser una inecuación se esperaba que resolvieran deduciendo las propiedades de valor absoluto, pero muchos de ellos volvieron a la técnica que habían aprendido antes, resolviendo inecuaciones con valor absoluto, presentando errores del tipo regla mecánica. Eso también se observa en los resultados del segundo análisis cohesitivo, donde en la clase 13 del árbol cohesitivo de la Figura 67, se observa las implicancia que hay entre tipo de error regla mecánica en la resolución de inecuaciones con valor absoluto.

CONSIDERACIONES FINALES

Las investigaciones realizadas respecto al valor absoluto confirman que es una noción de difícil comprensión para la mayoría de los estudiantes, por lo que hay un interés, de la comunidad científica, por contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de esta noción.

Nuestra investigación parte por analizar la propuesta curricular peruana, respecto a la enseñanza de este objeto matemático, la cual propone la enseñanza del valor absoluto desde el contexto aritmético. Sin embargo, los antecedentes reportan que la enseñanza desde éste contexto constituye un obstáculo didáctico, en cambio sugieren que el contexto funcional sería el adecuado. En vista de ello, y a la luz de las investigaciones ya realizadas, esta investigación realiza el diseño, implementación y análisis de una situación didáctica que plantea la enseñanza del valor absoluto desde un contexto funcional y además incorpora el uso del análisis cohesitivo en el diseño de su propuesta.

La teoría de situaciones didácticas ha sido nuestro marco teórico de referencia. Es importante mencionar que para el diseño de la situación problema, utilizamos no sólo los principios de la ingeniería didáctica, sino también los resultados obtenidos en el análisis cohesitivo, lo que nos permite afirmar que el uso de este análisis en útil y recomendable para el diseño de una situación didáctica. Además, el análisis cohesitivo reforzó las conclusiones de esta investigación, debido a evidenció comportamientos de los alumnos en términos de estrategias de solución cuando resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

Dicho esto, a continuación presentamos las conclusiones en relación a los objetivos propuestos en esta investigación:

En relación al primero objetivo: Identificar las interacciones que se generan en la enseñanza del valor absoluto como función, nuestras conclusiones son las siguientes:

- La interacción en términos de estrategia de solución que se han identificado al enseñar el valor absoluto desde el contexto funcional es la solución gráfica. Por lo que, podemos establecer que un grupo de estudiantes determinaron correctamente el conjunto solución de ecuaciones del tipo $|x+a|=b$, utilizando la solución gráfica como estrategia de solución. Esto debido a que partían desde una concepción funcional.
- Otra interacción observada al enseñar el valor absoluto desde el contexto funcional, fue que un grupo de estudiantes expresó que aquellas ecuaciones con valor absoluto que tomaban valores negativos no tenían solución. Esto quiere decir, que mucho de los estudiantes no cometieron el error de tipo regla mecánica al resolver ecuaciones sin solución, percatándose de la imposibilidad de que el valor absoluto de un número tome valores negativos. Esto último

también, nos permite concluir que la enseñanza desde el contexto funcional, evita el obstáculo didáctico que consiste en considerar al valor absoluto como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente.

En relación al segundo objetivo: Evaluar el efecto de la situación didáctica en el desempeño de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, nuestras conclusiones son las siguientes:

- De acuerdo al análisis cohesitivo hay una implicancia directa entre el concepto funcional del valor absoluto y las respuestas correctas de los estudiantes al resolver ecuaciones del tipo $|x|=b$ y ecuaciones del tipo $|x+a|=b$, es decir la enseñanza desde el contexto funcional evita la presencia de errores característicos de los obstáculos epistemológicos y didácticos asociados a la enseñanza del valor absoluto desde el contexto aritmético.
- Por otro lado, la enseñanza del valor absoluto como función en este trabajo de investigación no mejoró el desempeño de los estudiantes cuando debían expresar el resultado de un valor absoluto en términos de una variable, es decir si el estudiante tiene errores conceptuales del signo de una variable, esos errores no se evitan durante la secuencia didáctica propuesta en este trabajo. Esto debido a que los alumnos identifican el signo de una variable como el signo que acompaña a la variable, relacionándose a otro tipo de obstáculos que no son propios del valor absoluto sino de la noción que tiene de variable.
- La enseñanza del valor absoluto como función en este trabajo de investigación no mejoró el desempeño de los estudiantes al resolver inecuaciones del tipo $|x+a|\geq b$, $|x+a|\leq b$, esto debido a obstáculos propios del trabajo con inecuaciones, como fueron: la confusión entre los símbolos de mayor o menor que en la interpretación del conjunto solución

Finalmente, en base a los resultados en esta investigación, podemos concluir que la enseñanza del valor absoluto como función favorece el desempeño de los estudiantes al resolver ecuaciones con valor absoluto, debido a que se evitan errores del tipo epistemológico y didáctico asociados a la enseñanza del valor absoluto desde un contexto aritmético.

RECOMENDACIONES

Con la finalidad de que esta situación didáctica pueda ser reproducida con éxito en el aula, se debe tener en cuenta lo siguiente: Los conocimientos previos fundamentales para que la situación problema propuesta en esta investigación tenga éxito son los siguientes: función, regla de correspondencia de una función, ubicación de pares ordenados (x,y) en el plano cartesiano, área de triángulo. Además, deben tener la noción clara de que una unidad de medida como el área, no puede tomar valores negativos. Consideramos que estas nociones son fundamentales y previas a la solución de la situación problema propuesta en esta investigación.

Para continuar esta investigación, el siguiente paso es el mejorar la situación problema propuesta con los resultados obtenidos y realizar el análisis de la situación problema según la estructuración de *milieu*, es decir, analizar los diferentes procesos de aprendizaje del alumno a lo largo de situación didáctica.

Otras investigaciones pueden diseñar y analizar situaciones problemas que permitan que los estudiantes deduzcan e identifiquen las propiedades del valor absoluto en inecuaciones ($|x|\leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$ y $|x| \geq b \Leftrightarrow x \leq -b \vee x \geq b$) con la finalidad de que los estudiantes no usen estas propiedades de manera mecánica y por memoria.

Esta investigación mostró la importancia del manejo de variables, por lo que es importante que se puedan diseñar situaciones problemas, que tengan como objetivo mejorar el proceso de aprendizaje de la noción de variable por parte de los estudiantes, de manera que los alumnos puedan enfrentarse a situaciones donde expresen sus respuestas en función de una variable o donde identifiquen el signo de una variable.

Como ha evidenciado esta investigación, muchos de los errores que presentaron los estudiantes en la resolución de inecuaciones con valor absoluto, se debían a obstáculos y dificultades asociadas al trabajo con inecuaciones, por ejemplo un obstáculo es el creer que el proceso de resolución de una inecuación es igual al proceso de resolución de una ecuación, una dificultad que tiene los estudiantes es la interpretación de las relaciones “mayor que” o “menor que” a partir de los símbolos “>” o “<”, dados en una expresión algebraica, los cuales los llevan a error cuando deben expresar el conjunto solución de una inecuación. Futuras investigaciones deben enfocar su estudio en proponer situaciones que aborden dichos obstáculos y dificultades.

REFERENCIAS

Almouloud, S. (2008). Análise e mapeamiento estatístico de fenómenos didácticos con CHIC. En: Okada, A., Santos, E, & Okada, S. (Ed.), *Cartografía Cognitiva. Mapas do Conhecimento para pesquisa, aprendizagem e formcâo docente* (pp.303-324).Cuiabá: KCM.

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba. Editora UFPR.

Almouloud, S. (2016). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. *11*(2). 109-141

Artigue, M.(1996). Ingeniería Didáctica. En: Brun, J. (Ed.), *Didática das Matemáticas* (pp.35-111). Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

Artigue, M.; Douady R. & Moreno, L. (1995). Ingeniería Didáctica en Investigación Matemática. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Brousseau, G.(1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Recherches en Didactique des mathématiques, *7*(2). 165-198. Traducción de Hernandez y Villalva.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas. Buenos Aires. Libros del Zorzal. Traducción de Dilma Fregona.

Brousseau, G.(1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. En: Brun, J. (Ed.), *Didática das Matemáticas* (pp.35-111). Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

Chevallard, Y.; Bosh, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Recuperado de: https://curriculares.files.wordpress.com/2011/09/el_eslabon_perdido.pdf

Chiarugi, I.; Fracazina, G. & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behing the notion of absolute value. *Proceeding Fourtheen PME Conference*, *3*(28), 231-238. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411137.pdf

Couturier, R. (2009). Teoría y Aplicaciones del Análisis Implicativo. Primera Aproximación en Lengua Hispana. Pilar Orús, Larisa Zamora, Pablo Gregori (editores). Recuperado de: http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/125568/asi4esp_v18_libro.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Coutinho, C.; Almouloud, S. & Souza, R. (2017). Mapeamento de Conhecimentos de Estudantes sobre a Educacao Financeira. En: Régnier, J., Almouloud, S, & Gras, R. (Ed.), *ASI 9* (1-20). Belfor. France.

Gagatsis, A. & Panaoruma, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Matematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 159-173. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.790510

Gagatsis, A. & Thomaidis J. (1995). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag [A study of a historical design, development and didactic transposition of the term "absolute value"]. *Journal fur Mathematik-Didaktik 16*(1-2), 3-46.

García, C. (2014). *Criterios de idoneidad didáctica como guía para la enseñanza y aprendizaje del valor absoluto en el primer ciclo del nivel universitario*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Lima, Perú.

Gras, R. & Almouloud, S. (2002). A implicação estatística usada como ferramenta em um exemplo de análise de dados multidimensionais. *Revista Electronica de Educación Matemática*. *4*(2), 75-88. Disponible en: http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_03_saddo_gras.pdf.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (Síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología. 9*(1), 123-146.

Montes, M. & Ursini, S. (2013). CHIC en el análisis de las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de secundaria. En: Régnier, J., Almouloud, S, & Gras, R. (Ed.), *ASI 7* (pp.240-261). São Paulo. Brasil.

Perú, Ministerio de Educación (2016a). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima

Perú, Ministerio de Educación (2016b). *Programa Curricular de Educación Secundaria. Área Curricular: Matemática*. Lima

Perú, Ministerio de Educación (2016c). Matemática 1. Secundaria. Texto Escolar. Lima. Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016d). Matemática 2. Secundaria. Texto Escolar. Lima. Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016e). Matemática 2 Secundaria. Cuaderno de Trabajo. Lima. Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016f). Matemática 3 Secundaria. Texto Escolar. Lima. Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016g). Matemática 3 Secundaria. Cuaderno de Trabajo. Lima. Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2016h). Matemática 5 Secundaria. Texto Escolar. Lima. Editorial Norma.

Sierra, V. (2011). Investigación en educación matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y diffusion. *Eduactio Siglo XXI*, *29*(2), 173-198.

Sierpinska, A., Bobos, G. & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Education Study in Mathematics*. *78*(3). 275-305, doi: 10.1007/s10649-011-9325-2

Souza, F. (2016). *Política nacional de formação de professores: análise da implementação do PIBID de matemática pela universidade federal fluminense no período de 2009 – 2013*. (Tesis doctoral).Universidad Federal Fluminense. Niterói, Brasil.

Wilhelmi, M., Godino, J. & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value. *Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 73-90. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/didactic_effectiveness.pdf

Zamora, L.; Gregori, P. & Orús, P. (2009). Conceptos Fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC. En: Zamora, L.; Gregori, P. & Orús, P. (Ed.), *Teoría y Aplicaciones del Análsis Estadístico Implicativo. Primera Aproximación en Lengua Hispana* (77-110). España.

ANEXOS

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MIXTA "TELESFORO CATACORA"

TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

ANEXO 1. CUESTIONARIO

NOMBRES Y APELLIDOS:____SECCIÓN: ___

Responde cada una de las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es el valor absoluto de un número?

2. Halle $|2|=$

3. Halle $|-3| =$

4. Si $x > 0$, complete la igualdad en términos de x,

   $|x| =$

5. Si $x < 0$, complete la igual en términos de x,

   $|x| =$

6. Si $x \in]-\infty, +\infty[$, complete la igualdad en términos de x,

   $|x| =$

7. Determina el conjunto solución, si $|x| = 5$

8. Determina el conjunto solución si $|x| = -6$

9. Determina el conjunto solución, si $|x + 2| = 3$

10. Determina el conjunto solución, si $|x - 3| = -2$

11. Determina el conjunto solución de $|x| \leq 4$

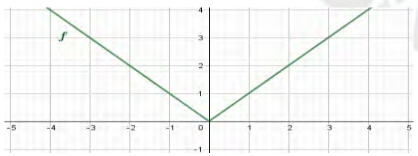
12. Determina el conjunto solución de $|x| \geq 2$,

13. Determina el conjunto solución de $|x + 1| \geq 3$

14. Determina el conjunto solución de $|x - 1| < 3$

ANEXO 2. CODIFICACIÓN DE LAS VARIABLES DEL CUESTIONARIO

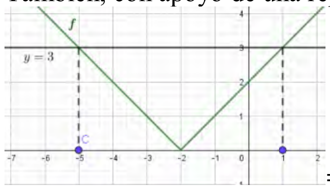
C_1={Q1} Concepción del valor absoluto
C_2={Q_2, Q_3} Valores absolutos de números reales
C_3={Q_4, Q_5,Q_6} Valores absolutos de una variable real
C4={Q7} Valor absoluto de ecuación del tipo $|x|=b$
C5={Q8} Valor absoluto de ecuación del tipo $|x|=b$ sin solución
C6={Q9} Valor absoluto de ecuación del tipo $|x+a|=b$ con solución
C7={Q10} Valor absoluto de ecuación del tipo $|x+a|=b$ sin solución
C8={Q11, Q12 } Valor absoluto de inecuación del tipo $|x|<b$, $|x|>b$
C9={Q13, Q14} Valor absoluto de ecuaciones del tipo $|x+a|>b$, $|x+a|<b$

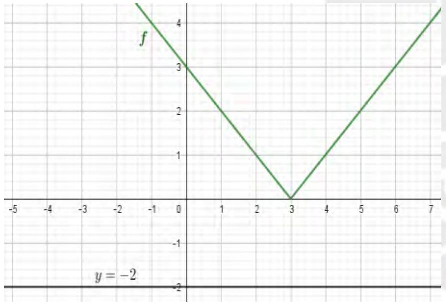
N°	Variable	Posibles Respuestas	Código de las variables	Descripción
1	¿Qué es el valor absoluto de un número?	Es la distancia del número a cero.	q1r1	Noción del valor absoluto desde el contexto geométrico
		Es el número sin el signo Es el mismo número si es positivo, pero si el número es negativo es su opuesto aditivo	q1r2	Noción del valor absoluto desde el contexto aritmético
		El valor absoluto es una función de manera que $f(x)=x$, $x\geq 0$ o $-x$, $x<0$, cuya representación gráfica es la siguiente: 	q1r3	Noción del valor absoluto desde el contexto funcional
			q1r4	Sin respuesta
		Otras respuestas no esperadas	q1r5	Noción equivocada de valor absoluto

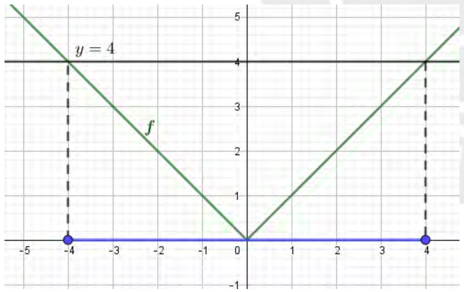
N°	Pregunta	Posibles Respuestas	Código de variables	Descripción
2	Resuelve $\|2\|=$	2	q2r1	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
		-2	q2r2	**Error de interpretación de definición**. Creemos que este error se puede presentar cuando los estudiantes interpretan de manera equivocada, parte de la siguiente definición "Si un número es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él" (Ministerio de educación, 2016). De acuerdo a Chiaguri, Fracazina & Furinguetti (1990), los alumnos no se percatan de la palabra condicional "si" dada en la definición de valor absoluto. En este caso, pueden no percatarse de que el número debe ser negativo para que el valor absoluto sea el opuesto aditivo del número.
		2 0 -2	q2r3	**Error "regla mecánica"**. Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011).Esta concepción se trabaja en ecuaciones de la siguiente forma $\|x\|=2$ entonces $x=2$ *o* -2, en este tipo de preguntas, no genera error, sin embargo, en otro tipo de preguntas sí puede llevar a error
			q2r4	**Sin respuesta**
		Respuestas incorrectas no esperadas	q2r5	**Otro tipo de error.**
3	Resuelve $\|-3\|=$	3	q3r1	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
		-3	q3r2	**Error de interpretación de definición**. Creemos que este error se puede presentar cuando los estudiantes interpretan de manera equivocada, parte de la siguiente definición "Si un número es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él" (Ministerio de educación, 2016). De acuerdo a Chiaguri, Fracazina & Furinguetti (1990), los alumnos no se percatan de la palabra condicional si dada en la definición de valor absoluto. En este caso, pueden no percatarse de que el número debe ser positivo para que el valor absoluto sea el mismo número.
		3 o -3	q3r3	**Error "regla mecánica"**. Las razones son las mismas que se han dado para este tipo de error en la pregunta 2
			q3r4	**Sin respuesta**
		Respuestas incorrectas no esperadas	q3r5	**Otro tipo de error.**

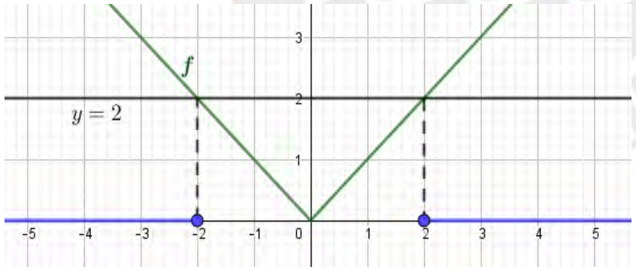
N°	Pregunta	Posibles Respuestas	Código de variables	Descripción
4	Si $x > 0$, complete la igualdad en términos de x, $\|x\| =$	*X*	q4r1	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
		-*x*	q4r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
		x o –x	q4r3	**Error "regla mecánica"**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
			q4r4	**Sin respuesta**
		Valores numéricos como 1, 2, 3,…,+∞	q4r5	**Error de interpretación de la pregunta.** Problemas de interpretación de la frase "en términos de *x*"
5	Si $x < 0$, complete la igualdad en términos de x, $\|x\| =$	*X*	q5r1	**Error epistemológico**. Este error está asociado a la concepción de que el valor absoluto de un número es el número sin signo. De acuerdo a Chiaguri, Fracazina y Furinguetti (1990), la imagen conceptual del valor absoluto de un número como el "número sin signo" es tan fuerte que los alumnos rechazan la idea de que *–x* pueden ser el resultado de un valor absoluto
		-*x*	q5r2	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
		x o –x	q5r3	**Error "regla mecánica"**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
			q5r4	**Sin respuesta**
		Valores numéricos como -1, -2, -3,…,-∞	q5r5	**Error de interpretación de la pregunta y de concepción de valor absoluto.** Problemas de interpretación de la frase "en términos de *x*" y además de concepción de valor absoluto
6	Si $x \in]-\infty, +\infty[$,complete la igualdad en términos de x, $\|x\| =$	*X*	q6r1	**Error epistemológico**. Las razones son las mismas que las dadas en la pregunta 5 en este mismo tipo de error.
		-*x*	q6r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que se dieron en este mismo tipo de error en la pregunta 2
		x o –x	q6r3	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
			q6r4	**Sin respuesta**
		Valores numéricos como -∞,…,-2,-1, 0,1, 2, ,…,+∞	q6r5	**Error de interpretación de la pregunta y de concepción de valor absoluto.** Problemas de interpretación de la frase "en términos de *x*" y además de concepción de valor absoluto

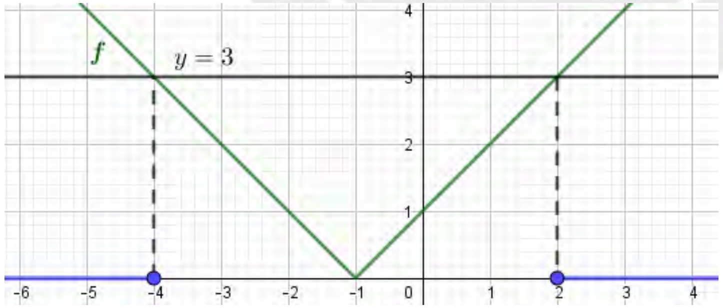
N°	Pregunta	Posible Respuesta	Código de variables	Descripción
7	Determine el conjunto solución de $\lvert x \rvert = 5$	C.S.={5}	q7r1	**Error de interpretación de definición**. Creemos que este error se puede presentar cuando los estudiantes interpretan sólo una parte de la siguiente definición "Si un número es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él" (Ministerio de educación, 2016). De acuerdo a Chiaguri, Fracazina & Furinguetti (1990), los alumnos no se percatan de la palabra condicional "si" dada en la definición de valor absoluto. En este caso, pueden interiorizar sólo la primera parte de la definición y dejar de lado la segunda
		C.S.={-5}	q7r2	**Error de interpretación de definición**. Creemos que este error se puede presentar cuando los estudiantes interpretan sólo una parte de la siguiente definición "Si un número es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él" (Ministerio de educación, 2016). De acuerdo a Chiaguri, Fracazina & Furinguetti (1990), los alumnos no se percatan de la palabra condicional "si" dada en la definición de valor absoluto. En este caso, pueden interiorizar sólo la segunda parte de la definición y dejar de lado la primera
		C.S.={-5 o 5}	q7r3	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto
			q7r4	**Sin respuesta.**
		Otras respuestas no esperadas	q7r5	**Otro tipo de error.**
8	Determine el conjunto solución de $\lvert x \rvert = -6$	C.S={6}	q8r1	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que las dadas en la pregunta 7 de este mismo tipo de error.
		C.S.={-6}	q8r2	**Error de interpretación de definición**. Las razones son las mismas que las dadas en la pregunta 7 de este mismo tipo de error.
		C.S.={-6 o 6}	q8r3	**Error "regla mecánica".** Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011). Estos autores, presentaron el siguiente ejemplo asociado a este obstáculo, algunos alumnos ante la siguiente pregunta $\lvert\lvert x-5\rvert-12\rvert=-5$, empezaron a resolver mecánicamente, sin percatarse, que no es posible que el resultado de un valor absoluto sea negativo.
		C.S={ } o C.S.=Ø	q8r4	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto.
		Otras respuestas no esperadas	q8r5	**Otro tipo de error.**
			q8r6	**Sin respuesta**.

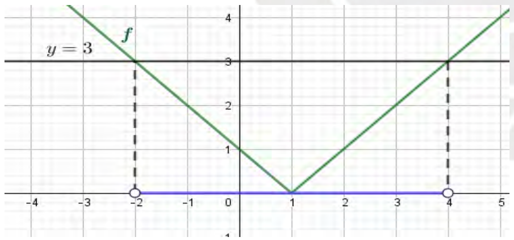
N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
9	Determine el conjunto solución de $\lvert x+2\rvert=3$	x+2=3⇒x=1 C.S={1}	q9r1	**Error de interpretación de definición**. La razón es la misma que se explicó en este mismo tipo de error en la pregunta 7
		x-2=3⇒x=5 o –x-2=3⇒x= -5 C.S={-5,5} También x+2=3 ⇒x=1 o x-2=3⇒x=5 C.S={1,5}	q9r2	**Error "regla mecánica"**. Este error está asociado al obstáculo didáctico que consiste en entender el valor absoluto de un número como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente (Gagatsis & Panaoura, 2011).Se tiene como ejemplo los errores reportados por Duroux (1983) donde algunos alumnos al resolver |a+2| dieron como respuesta a+2 o –a+2, mientras que otros respondieron a+2 o a-2
		Desde el contexto aritmético x+2=3⇒x=1 o x+2= -3⇒x= -5 C.S.={-5,1} Desde el contexto métrico |x+2|=d(x,2), de manera que x es un punto de la recta, de manera que al sumarle 2 unidades la distancia de ese número a 0 es 3, por lo tanto x=1 o x=-5⇒ C.S.={-5,1}	q9r3	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto.
			q9r4	**Sin respuesta.**
		Otras respuestas no esperadas	q9r5	**Otro tipo de error**
		Desde el contexto funcional |x+2|=x+2 si x≥-2 o |x+2|=-(x+2) si x< -2 Por tanto x+2=3⇒x=1 o –(x+2)=3⇒x=-5 También, con apoyo de una representación gráfica  ⇒C.S.={-5,1}	q9r6	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto.

N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
10	Determina el conjunto solución de $\|x-3\|=-2$	x-3= -2⇒x=1⇒C.S={1}	q10r1	**Error de interpretación de definición.** Las razones son las mismas dadas en la pregunta 7, para este mismo tipo de error.
		x-3=-2⇒x=1 o −x+3=-2⇒x=5⇒C.S={1,5} También x-3= -2 ⇒x=1 o −x-3=-2⇒x= -1 ⇒C.S.={-1,1}	q10r2	**Error "regla mecánica".** Este error está asociado a la concepción de que el valor absoluto de un número es el número sin signo. Las razones son las mismas que las dadas en el mismo tipo de error de la pregunta 8
		El valor absoluto de un número es el número sin signo, el resultado de un valor absoluto no puede ser negativo, por lo tanto C.S.={ } o C.S.=Ø El valor absoluto es la distancia de un número a cero, la distancia nunca es negativa, por lo tanto C.S.={ } o C.S.=Ø	q10r3	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de cualquiera de las definiciones de valor absoluto en contexto aritmético o métrico
			q10r4	**Sin respuesta.**
		Otras respuestas no esperadas	q10r5	**Otro tipo de error.**
		Los valores de la función valor absoluto nunca son negativos  ⇒C.S.={ } o C.S.=Ø	q10r6	**Sin error**. Debido a una correcta interpretación de la definición de valor absoluto en contexto funcional

N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
11	Determina el conjunto solución de $\lvert x\rvert \leq 4$	$x \leq \pm 4$ O también $x \leq -4$ o $x \leq 4$ C.S=]-∞,4]	q11r1	**Error "regla mecánica"** que consiste en resolver una inecuación de forma similar a una ecuación, este error está asociado al obstáculo didáctico, el cual consiste en entender el valor absoluto como un símbolo que debe ser eliminado mecánicamente, el cual se adquiere cuando se trabaja ecuaciones. Gagatsis y Panaorura (2014), reportaron errores asociados a este obstáculo en el que ante la pregunta de $\lvert x\rvert<5$ algunos alumnos respondieron que $x > \pm 5$, el cual también se puede presentar como $\lvert x\rvert> -5$ o $\lvert x\rvert<5$
		$x \leq 4$ C.S=]-∞,4]	q11r2	**Error epistemológico**, asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo, error reportado por Chiarugi (1990) en es que $\lvert x+1\rvert=x+1$
		$-4 \leq x \leq 4$	q11r3	**Sin error.** Solución correcta, debido al uso de propiedad de valor absoluto, si $\lvert x\rvert<a$ entonces $-a < x < a$
		$\lvert x\rvert = x$ si $x \geq 0$ o $\lvert x\rvert = -x$ si $x < 0$ Por tanto $x \leq 4$ o $-x \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$ También  ⇒C.S=[-4,4]	q11r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica
			q11r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q11r6	**Otro tipo de error**

N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
12	Determina el conjunto solución de $\|x\| \geq 2$,	$x \geq \pm 2$ También $x \geq -2$ o $x \geq 2$ ⇒C.S=[2,+∞[	q12r1	**Error “regla mecánica”**. Las razones de este error son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error
		$x \geq 2$ ⇒C.S=[2,+∞[	q12r2	**Error epistemológico** asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo. Las razones son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error.
		$x \leq -2$ *o* $x \geq 2$ ⇒C.S.=]-∞,-2]∨[2,+∞[	q12r3	**Sin error**. Solución correcta mediante uso de propiedad de valor absoluto, si $\|x\|\geq a$ entonces $x\leq -a$ o $x\geq a$
		$\|x\| = x$ si $x \geq 0$ *o* $\|x\| = -x$ si $x < 0$ Por tanto $x \geq 2$ *o* $-x \geq 2 \Rightarrow x \leq -2$ *o* $x \geq 2$ También  ⇒C.S.=]-∞,-2]∨[2,+∞[	q12r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica
			q12r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q12r6	**Otro tipo de error**

N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
13	Determina el conjunto solución de $\lvert x+1\rvert \geq 3$	$x+1 \geq \pm 3$ C.S=[3,+∞[También $x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$ o $x+1 \geq -3 \Rightarrow x \geq -4$ C.S.=[2,+∞[	q13r1	**Error "regla mecánica"**. Las razones de este error son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error
		$x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$ C.S.=[2,+∞[	q13r2	**Error epistemológico** asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo. Las razones son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error.
		x+1≤ -3 o x+1≥3 ⇒x≤-4 o x≥2 ⇒]-∞,-4]∨[2,+∞[	q13r3	**Sin error**. Solución correcta mediante uso de propiedad de valor absoluto, si $\lvert x\rvert > a$ entonces $x<-a$ o $x>a$
		$\lvert x+1\rvert = x$ si $x \geq -1$ o $\lvert x\rvert = -x-1$ si $x < -1$ Por tanto $x+1 \geq 3$ o $-x-1 \geq 3$ $\Rightarrow x \leq -4$ o $x \geq 2$ ⇒C.S=]-∞,-4]∨[2,+∞[También  ⇒C.S=]-∞,-4]∨[2,+∞[	q13r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica
			q13r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q13r6	**Otro tipo de error**

N°	Pregunta	Posible Respuesta/Procedimiento	Código de variable	Descripción
14	Determina el conjunto solución de $\lvert x-1\rvert < 3$	x-1 < ±3⇒C.S.=]-∞,3[También x-1<3 o x-1<-3 ⇒x<4 o x< -2 ⇒x< -2⇒C.S.=]-∞,-2[	q14r1	**Error “regla mecánica”**. Las razones de este error son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error
		$x-1<3\ \Rightarrow x<4$ ⇒C.S.=]-∞,4[También $x+1<3\ \Rightarrow x<2$ ⇒C.S.=]-∞,-2[	q14r2	**Error epistemológico**. Error asociado a la noción del valor absoluto como el número sin signo. Las razones son las mismas que se han explicado en la pregunta 11 para este mismo tipo de error.
		$-3<x-1<3 \Rightarrow -2<x<4$ ⇒C.S.=]-2,4[	q14r3	**Sin error**. Solución correcta mediante uso de propiedad de valor absoluto, si |x|<a entonces *–a<x<a*
		$\lvert x-1\rvert = x-1$ si $x \geq 1$ o $\lvert x-1\rvert = -x+1$ si $x<1$ Por tanto $x-1<3\ o -x+1<2$ $\Rightarrow -2<x<4$ ⇒C.S.=]-2,4[También  ⇒C.S.=]-2,4[	q14r4	**Sin error.** Debido a una correcta interpretación del valor absoluto como función, apoyado en una representación gráfica
			q14r5	**Sin respuesta**
		Otras respuestas no esperadas	q14r6	**Otro tipo de error**

ANEXO 3.

NIVEL DE COHESIÓN DE LAS REGLAS CORRESPONDIENTES AL ÁRBOL COHESITIVO DE LA FIGURA 23

Classificação ao nível: 1 : (q12r6 q11r6) Coesão : 1

Classificação ao nível: 2 : (q10r1 q9r1) Coesão : 1

Classificação ao nível: 3 : (q11r2 q12r2) Coesão : 1

Classificação ao nível: 4 : (q7r5 q8r5) Coesão : 1

Classificação ao nível: 5 : (q9r5 q10r5) Coesão : 1

Classificação ao nível: 6 : (q3r1 q2r1) Coesão : 1

Classificação ao nível: 7 : (q8r2 q7r1) Coesão : 0.999

Classificação ao nível: 8 : (q6r5 q5r5) Coesão : 0.998

Classificação ao nível: 9 : (q5r4 q6r4) Coesão : 0.998

Classificação ao nível: 10 : (q11r5 q12r5) Coesão : 0.997

Classificação ao nível: 11 : (q2r5 q3r5) Coesão : 0.997

Classificação ao nível: 12 : (q4r4 q1r4) Coesão : 0.996

Classificação ao nível: 13 : (q2r4 q3r4) Coesão : 0.996

Classificação ao nível: 14 : (q8r6 q7r4) Coesão : 0.99

Classificação ao nível: 15 : (q14r3 q13r2) Coesão : 0.988

Classificação ao nível: 16 : ((q8r2 q7r1) (q10r1 q9r1)) Coesão : 0.988

Classificação ao nível: 17 : ((q2r5 q3r5) (q7r5 q8r5)) Coesão : 0.985

Classificação ao nível: 18 : (q9r4 q10r4) Coesão : 0.981

Classificação ao nível: 19 : ((q6r5 q5r5) q4r5) Coesão : 0.971

Classificação ao nível: 20 : (((q8r2 q7r1) (q10r1 q9r1)) (q3r1 q2r1)) Coesão : 0.951

Classificação ao nível: 21 : ((q8r6 q7r4) (q4r4 q1r4)) Coesão : 0.924

Classificação ao nível: 22 : (q13r6 q14r7) Coesão : 0.904

Classificação ao nível: 23 : (((q2r5 q3r5) (q7r5 q8r5)) (q9r5 q10r5)) Coesão : 0.902

Classificação ao nível: 24 : ((q11r2 q12r2) (q14r3 q13r2)) Coesão : 0.854

Classificação ao nível: 25 : ((((q2r5 q3r5) (q7r5 q8r5)) (q9r5 q10r5)) q1r5) Coesão : 0.84

Classificação ao nível: 26 : (((q8r6 q7r4) (q4r4 q1r4)) (q5r4 q6r4)) Coesão : 0.832

Classificação ao nível: 27 : (q9r2 q10r2) Coesão : 0.805

Classificação ao nível: 28 : (q8r3 q7r3) Coesão : 0.788

Classificação ao nível: 29 : ((q9r4 q10r4) (((q8r6 q7r4) (q4r4 q1r4)) (q5r4 q6r4))) Coesão : 0.625

Classificação ao nível: 30 : (q14r6 (q11r5 q12r5)) Coesão : 0.571

Classificação ao nível: 31 : (((q11r2 q12r2) (q14r3 q13r2)) q8r1) Coesão : 0.338

Classificação ao nível: 32 : (q1r1 (q9r2 q10r2)) Coesão : 0.283

Classificação ao nível: 33 : (q1r2 (q8r3 q7r3)) Coesão : 0.187

Classificação ao nível: 34 : (q13r5 (q14r6 (q11r5 q12r5))) Coesão : 0.18

ANEXO 4.

FICHA DE OBSERVACIÓN

ACTIVIDAD:___ **SESIÓN:__** **FECHA: ________** **HORA:______**

Pregunta	¿Qué hacen para llegar a la respuesta?	¿Qué dificultades presentan? ¿Qué hacen para superar las dificultades?	Actitud durante el trabajo

ANEXO 5. FICHAS DE TRABAJO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MIXTA "TELESFORO CATACORA"

TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

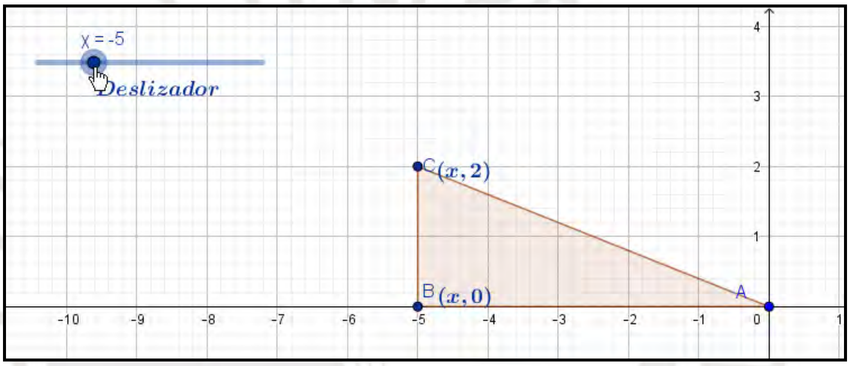
FICHA DE TRABAJO N° 1.-TRABAJO INDIVIDUAL
CALCULEMOS EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN EL PLANO

NOMBRE Y APELLIDO:________________________________ **SECCIÓN:** ____

INDICACIONES:

- Abrir el archivo Geogebra 1  que aparece en el escritorio.

- Colocar el cursor del mouse sobre el deslizador, tal como se muestra en la imagen



- Manipula el deslizador y observa la gráfica
- Responde la siguientes preguntas:

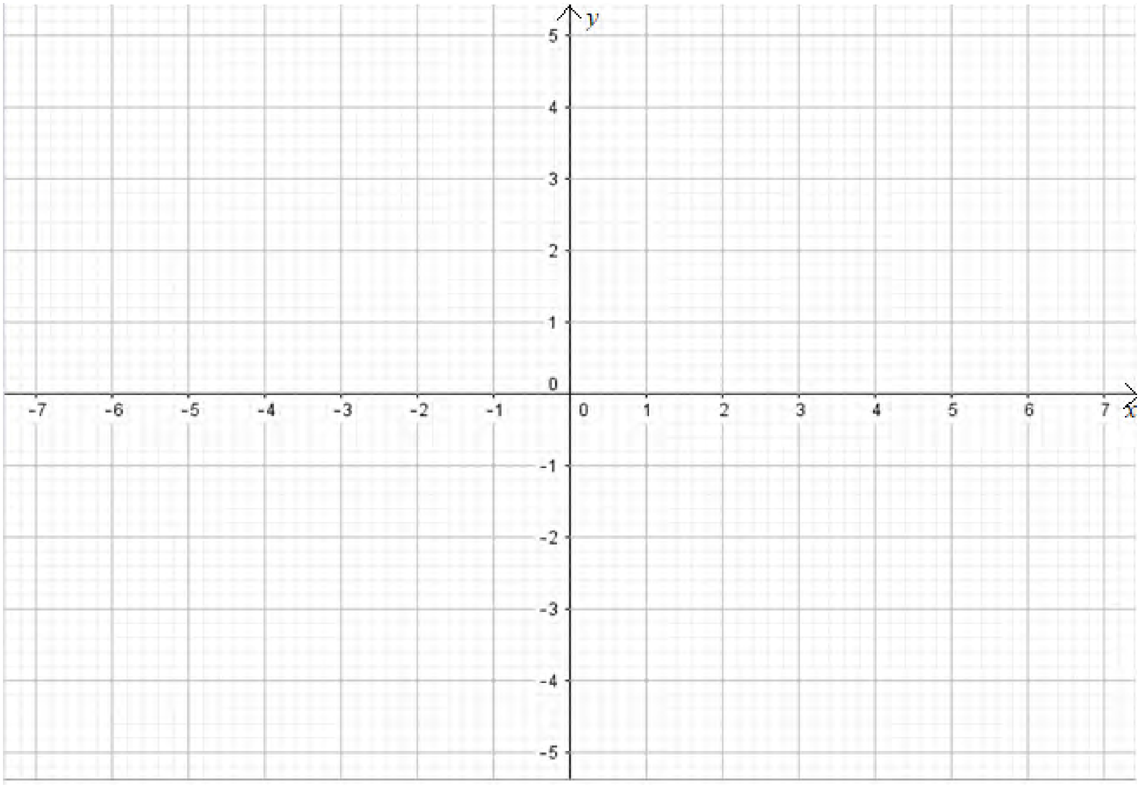
c. ¿La forma del triángulo cambia cuando x varía en la figura? ¿Qué representa x en la figura?

d. En la siguiente tabla, complete el área del triángulo ABC para cada valor x.

x	Área del triángulo ABC
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

Luego responde ¿El valor del área del triángulo depende del valor que tome x?

e. En el plano cartesiano, ubica los puntos correspondientes a los pares ordenados obtenidos en la tabla anterior.



f. Traza la gráfica de la función área del triángulo ABC

g. Completar

i. Si $x = -6$, el área del triángulo ABC es___

ii. Si $x = 7$, el área del triángulo ABC es ___

iii. Si $x = -21$, el área del triángulo ABC es___

iv. Si $x = 47$, el área del triángulo ABC es___

v. Si $x = -125$, el área del triángulo ABC es___

vi. Si $x = 230$, el área del triángulo ABC es ___

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MIXTA "TELESFORO CATACORA"

TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

FICHA DE TRABAJO N° 1.-TRABAJO GRUPAL

NOMBRES Y APELLIDOS:_________________________ **SECCIÓN:** ____

INDICACIONES:

- Se formaran parejas siguiendo las indicaciones de la profesora
- Con tu compañero responde las siguientes preguntas:

De acuerdo a la gráfica de la función área de triángulo ABC, responde

h. ¿Cuál es el dominio y rango de la función?

i. Completar:

   i. Si $x = 6$, el área del triángulo ABC es_________

   ii. Si $x = -5$, el área del triángulo ABC es_________

   iii. Si $x = a$, donde a representa un valor positivo, el área del triángulo ABC en función de a es_________

   iv. Si $x = b$, donde b representa un valor positivo, el área del triángulo ABC en función de b es_________

j. ¿Cuál es la regla de correspondencia $A(x)$ que expresa el área del triángulo ABC en función de x?

k. De acuerdo a la regla de correspondencia $A(x)$ que expresa el área del triángulo ABC en función de x, evalúa cada caso:

   i. $A(8) =$

   ii. $A(-8) =$

   iii. $A(14) =$

   iv. $A(-14) =$

l. Para las siguientes igualdades señale si existe al menos un valor para x que la satisfaga. Si no lo hay, explique.

   i. Si $A(x) = 4$

   ii. Si $A(x) = 17$

   iii. Si $A(x) = -2$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MIXTA “TELESFORO CATACORA”

TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

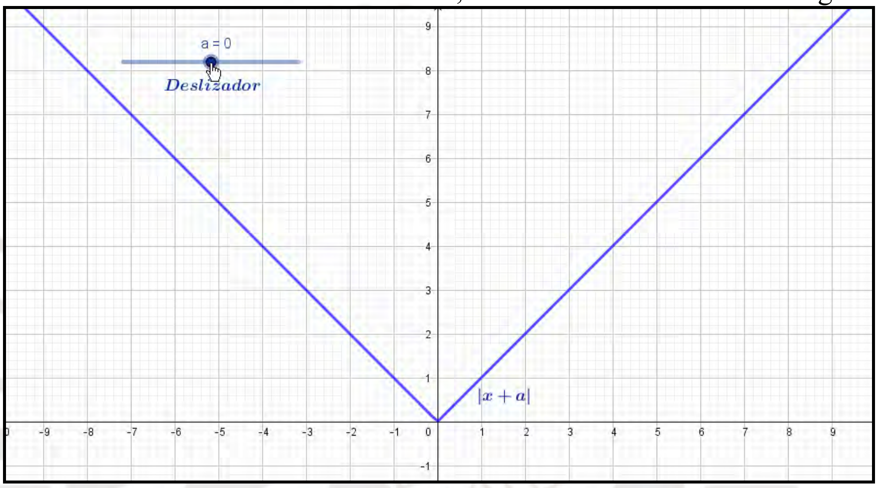
FICHA DE TRABAJO N°2

RESOLVAMOS ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

NOMBRES Y APELLIDOS:____________________________________ **SECCIÓN: ___**

INDICACIONES:

- Abrir el archivo Geogebra 2 que aparece en el escritorio.
- Colocar el cursor del mouse sobre el deslizador, tal como se muestra en la imagen



- Manipula el deslizador y observa la gráfica

4. Responde las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a toma valores positivos?

   b. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a toma valores negativos?

   c. ¿Qué pasó con la gráfica de $|x-4|$comparada con la gráfica de $|x|$?

   d. Determina el conjunto solución de $|x-4| = 3$?

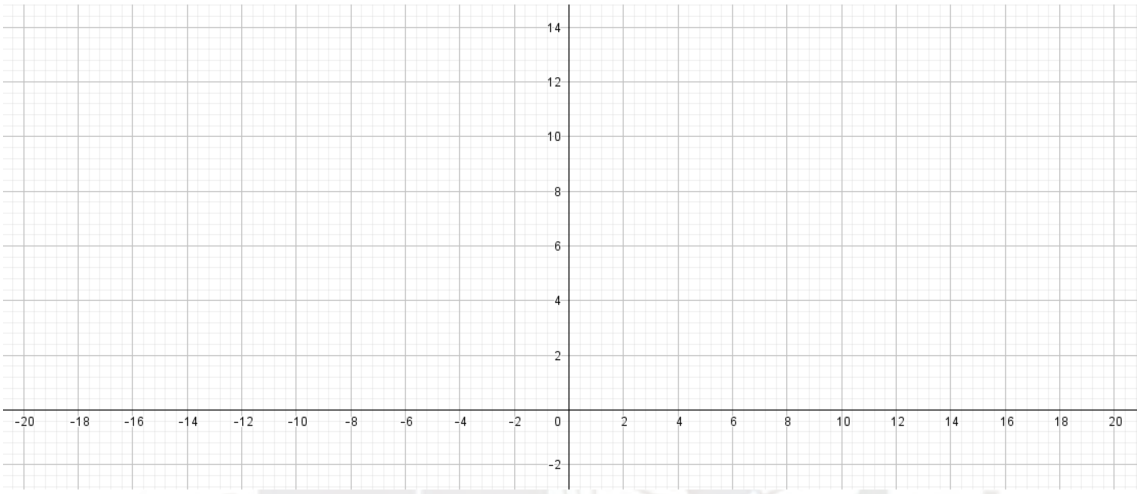
   e. Determina el conjunto solución de $|x-4| = -2$?

f. ¿Existe una diferencia entre el conjunto solución de la pregunta d y el conjunto solución de la pregunta e? Explique su respuesta

5. Grafica la función valor absoluto en el plano cartesiano, para cada uno de los siguientes casos

   a. $f(x) = |x + 8|$

   b. $f(x) = |x - 8|$



   c. Determine el conjunto solución de $|x + 8| = 10$?

   d. Determine el conjunto solución de $|x - 8| = 10$?

6. Resolver:

   a. Determine el conjunto solución de $|x + 30| = 40$?

   b. Determine el conjunto solución de $|x - 30| = 60$?

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MIXTA "TELESFORO CATACORA"

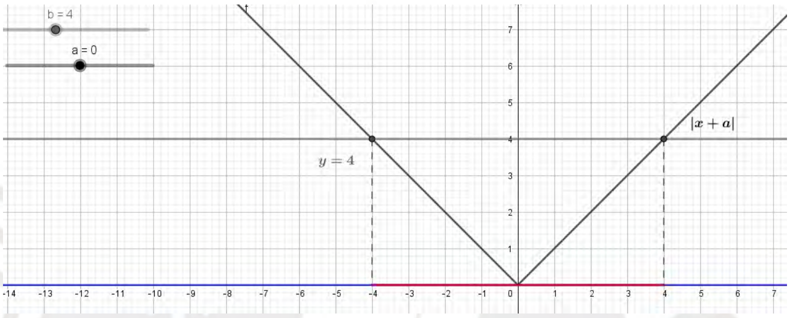
TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

FICHA DE TRABAJO N°3
RESOLVAMOS INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

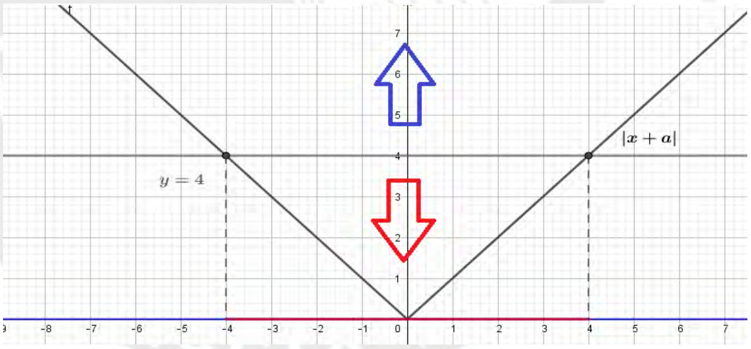
NOMBRES Y APELLIDOS:________________________________ **SECCIÓN:** ___

INDICACIONES:

- Abrir el archivo Geogebra 3 que aparece en el escritorio.
- Ahora se tiene dos deslizadores a y b



- Manipula los deslizadores y observa la gráfica
- La gráfica $y = b$, divide la grafica de la función valor absoluto en dos partes (una superior y otra inferior)



4. Completar cada oración con una de las palabras (<u>mayores</u> o <u>menores</u>) según corresponda
   a. Los valores de la función en la parte superior son ___________a b?
   b. Los valores de la función en la parte inferior son ___________ a b?
5. Con ayuda de la gráfica, responde las siguientes preguntas :
   a. ¿Si $a = 0$ y $b = 3$, que representa la franja roja?
   b. ¿Si $a = 0$ y $b = 3$, que representa la franja azul?

c. Determina el conjunto solución de $|x| \leq 5$?

d. Determina el conjunto solución de $|x| > 4$?

e. Determina el conjunto solución de $|x-2| \leq 3$?

f. Determina el conjunto solución de $|x+3| > 4$?

6. Responde las siguientes preguntas

   a. Determina el conjunto solución de $|x| \geq 12$?

   b. Determina el conjunto solución de $|x| < 15$?

   c. Determina el conjunto solución de $|x+10| > 5$?

   d. Determina el conjunto solución de $|x-10| \leq 6$?

ANEXO 6.

NIVEL DE COHESIÓN DE LAS REGLAS CORRESPONDIENTES AL ÁRBOL COHESITIVO DE LA FIGURA 67

Classificação ao nível: 1 : (q4r5 q5r5) Coesão : 1
Classificação ao nível: 2 : (q8r4 q7r3) Coesão : 0.999
Classificação ao nível: 3 : (q12r4 q13r4) Coesão : 0.999
Classificação ao nível: 4 : (q1r3 q9r6) Coesão : 0.999
Classificação ao nível: 5 : (q5r2 q4r1) Coesão : 0.996
Classificação ao nível: 6 : (q11r1 q12r1) Coesão : 0.993
Classificação ao nível: 7 : ((q1r3 q9r6) q10r6) Coesão : 0.989
Classificação ao nível: 8 : (q8r6 q10r4) Coesão : 0.984
Classificação ao nível: 9 : ((q12r4 q13r4) q11r4) Coesão : 0.979
Classificação ao nível: 10 : (q6r1 q5r1) Coesão : 0.975
Classificação ao nível: 11 : ((q8r6 q10r4) q9r4) Coesão : 0.966
Classificação ao nível: 12 : (q12r6 q13r6) Coesão : 0.956
Classificação ao nível: 13 : (q4r4 q5r4) Coesão : 0.949
Classificação ao nível: 14 : (q13r5 q14r5) Coesão : 0.94
Classificação ao nível: 15 : ((q4r5 q5r5) q6r5) Coesão : 0.935
Classificação ao nível: 16 : ((q11r1 q12r1) (q5r2 q4r1)) Coesão : 0.908
Classificação ao nível: 17 : (q8r1 q7r1) Coesão : 0.904
Classificação ao nível: 18 : (q9r5 q10r5) Coesão : 0.887
Classificação ao nível: 19 : (((q8r6 q10r4) q9r4) (q13r5 q14r5)) Coesão : 0.861
Classificação ao nível: 20 : (((q1r3 q9r6) q10r6) (q8r4 q7r3)) Coesão : 0.855
Classificação ao nível: 21 : (q14r6 (q12r6 q13r6)) Coesão : 0.854
Classificação ao nível: 22 : ((((q8r6 q10r4) q9r4) (q13r5 q14r5)) q6r4) Coesão : 0.825
Classificação ao nível: 23 : (q4r2 q10r2) Coesão : 0.805
Classificação ao nível: 24 : (q7r4 ((((q8r6 q10r4) q9r4) (q13r5 q14r5)) q6r4)) Coesão : 0.795
Classificação ao nível: 25 : (q3r1 q2r1) Coesão : 0.788
Classificação ao nível: 26 : ((q4r2 q10r2) q8r3) Coesão : 0.768
Classificação ao nível: 27 : (q9r2 (q6r1 q5r1)) Coesão : 0.765
Classificação ao nível: 28 : (q11r5 q12r5) Coesão : 0.751
Classificação ao nível: 29 : (q7r5 q8r5) Coesão : 0.751
Classificação ao nível: 30 : (q1r4 (q7r4 ((((q8r6 q10r4) q9r4) (q13r5 q14r5)) q6r4))) Coesão : 0.737
Classificação ao nível: 31 : (((q4r2 q10r2) q8r3) q9r3) Coesão : 0.728
Classificação ao nível: 32 : (q9r1 q1r2) Coesão : 0.658
Classificação ao nível: 33 : (((q4r5 q5r5) q6r5) q14r4) Coesão : 0.643
Classificação ao nível: 34 : (q10r3 ((q12r4 q13r4) q11r4)) Coesão : 0.605
Classificação ao nível: 35 : ((((q4r2 q10r2) q8r3) q9r3) q1r5) Coesão : 0.553