

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
ESCUELA DE POSGRADO



**Efectos de la inestabilidad de  
Rayleigh-Taylor sobre frentes de reacción  
descritos mediante la ecuación de  
Kuramoto-Sivashinky**

Tesis para optar el grado de  
Magíster en Física.

Autor

Simón Segundo Macalupú Huertas.

Asesor

Dr. Pablo M. Vilela Proaño.

LIMA-PERÚ

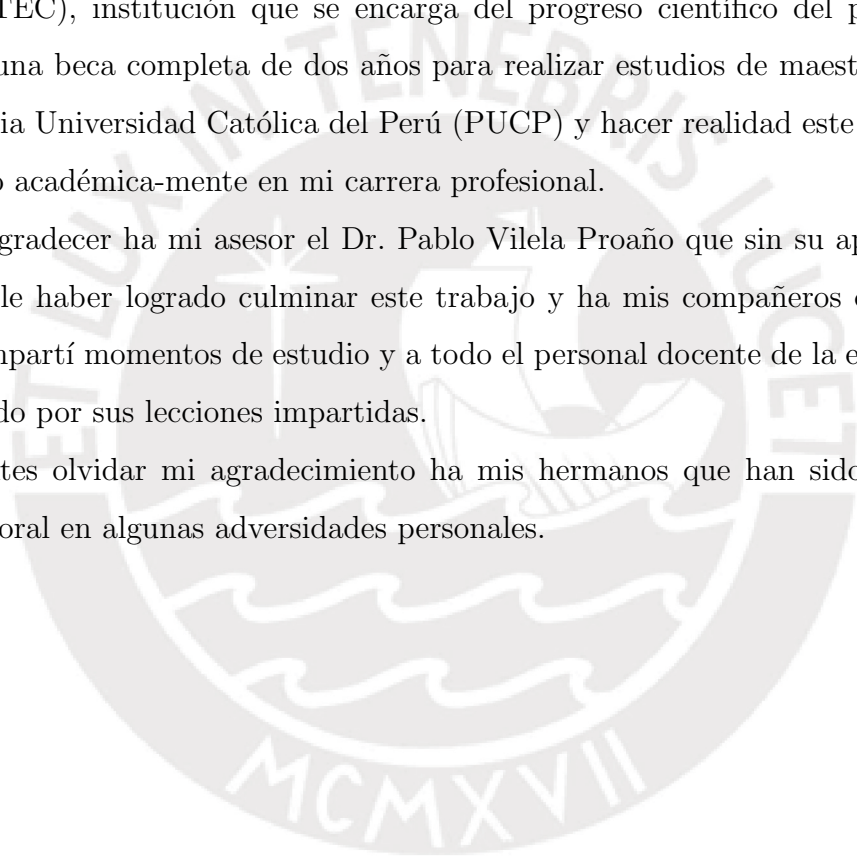
2018

# Agradecimientos

Agradezco la ayuda brindada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONCYTEC), institución que se encarga del progreso científico del país el haberme otorgado una beca completa de dos años para realizar estudios de maestría en Física en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y hacer realidad este sueño de seguir avanzando académica-mente en mi carrera profesional.

Además agradecer ha mi asesor el Dr. Pablo Vilela Proaño que sin su apoyo no hubiese sido posible haber logrado culminar este trabajo y ha mis compañeros de clase con los cuales compartí momentos de estudio y a todo el personal docente de la escuela de Física de posgrado por sus lecciones impartidas.

No sin antes olvidar mi agradecimiento ha mis hermanos que han sido una fuente de soporte moral en algunas adversidades personales.



# Resumen

En el presente trabajo se estudia la propagación de frentes químicos sujetos a la inestabilidad de Rayleigh- Taylor. El flujo convectivo es modelado utilizando la ecuación de Navier-Stokes. Los resultados serán comparados con los obtenidos con la ley de Darcy. La inestabilidad de Rayleigh-Taylor se presenta cuando dos fluidos de distintas densidades separados por una delgada interfaz plana se vuelve inestable debido al gradiente de densidades que ocurre cuando el fluido más denso esta encima del menos denso y bajo la acción de la gravedad. Se consideran fluidos con las siguientes condiciones: inmiscibles, incompresibles e irrotacionales. Para describir el frente de propagación hemos utilizado la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky(K-S) acoplada con la ecuación de Navier-Stokes para la evolución del flujo de convección.

La solución de la ecuación (K-S) ofrece una rica variedad de comportamiento espacio-temporal: frentes planos, frentes simétricos o asimétricos, frentes oscilantes y caóticos. El análisis de estabilidad lineal muestra regiones de bi-estabilidad para diferentes números de Rayleigh.

**Palabras Claves:** Frentes químicos de propagación, inestabilidad de Rayleigh-Taylor, fluidos: inmiscibles, incompresibles, irrotacional, Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky(K-S), ecuación de Navier-Stokes, número de Rayleigh.

# Abstract

In the present work, the propagation of chemical fronts subject to Rayleigh-Taylor instability is studied. Convective flow is modeled using the Navier-Stokes equation. The results will be compared with those obtained with Darcy's law. Rayleigh-Taylor instability occurs when two fluids of different densities separated by a thin flat interface becomes unstable due to the density gradient that occurs when the densest fluid is above the less dense and under the action of gravity. They are considered fluid with the following conditions: immiscible, incompressible and irrotational. To describe the propagation front we used the Kuramoto-Sivashinsky equation (K-S) coupled with the Navier-Stokes equation for the evolution of the convection flow.

The solution of the equation (K-S) offers a rich variety of space-time behavior: flat fronts, symmetrical or asymmetric fronts, oscillating and chaotic fronts. The linear stability analysis shows regions of bi-stability for different Rayleigh numbers.

**keywords:** Chemical propagation fronts, Rayleigh-Taylor instability, fluids: immiscible, incompressible, irrotational, Kuramoto-Sivashinsky (K-S) equation, Navier-Stokes equation, Rayleigh number

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Introducción . . . . .	6
1.2. Objetivos . . . . .	7
<b>2. Métodos Numéricos y reacciones químicas auto-catalíticas</b>	<b>9</b>
2.1. Método de Euler implícito . . . . .	9
2.2. Método del disparo no lineal . . . . .	10
2.3. Reacciones Químicas auto-catalíticas . . . . .	12
2.3.1. Reacción de Belousov-Zhabotinsky (RBZ) . . . . .	12
2.4. Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky . . . . .	14
<b>3. Inestabilidad de Rayleigh-Taylor</b>	<b>17</b>
3.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	19
3.2. Soluciones Numéricas de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky . . . . .	22
3.2.1. Soluciones estables que evolucionan con el tiempo . . . . .	23
3.2.2. Soluciones estacionarias estables e inestables . . . . .	23
3.2.3. Análisis de Estabilidad Lineal . . . . .	24
3.3. Resultados obtenidos . . . . .	25
3.3.1. Soluciones estacionarias estables e inestables con $R_a = 0.0$ . . . . .	26
3.3.2. Velocidades de los frentes estables e inestables con $R_a = 0.0$ . . . . .	28
3.3.3. Regiones de estabilidad de los frentes estables e inestables con $R_a = 0.0$	30
3.3.4. Soluciones estacionarias estables e inestables con $R_a = 0.1$ . . . . .	31
3.3.5. Velocidades de los frentes estables e inestables con $R_a = 0.1$ . . . . .	34

3.3.6. Regiones de estabilidad de las soluciones estables e inestables con $R_a = 0.1$ . . . . .	35
3.3.7. Soluciones estacionarias estables e inestables con $R_a = -0.1$ . . . . .	37
3.3.8. Velocidades de los frentes estables e inestables con $R_a = -0.1$ . . . . .	40
3.3.9. Regiones de estabilidad de las soluciones estables e inestables con $R_a = -0.1$ . . . . .	41

**Bibliografía**

**58**



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

La propagación de frentes químicos se presentan en reacciones químicas auto-catalíticas como la famosa reacción de Belousov-Zhabotinsky (B-Z), la reacción de iodato ácido arsenioso (IAA) y la reacción de clorito tetrionato (CT)[1, 2, 3]. La inestabilidad de Rayleigh-Taylor ocurre por ejemplo cuando tenemos dos fluidos inmiscibles de diferente densidad, uno sobre el otro, estando el de mayor densidad sobre el de menor densidad. Bastará una pequeña perturbación para que la interfaz que separa dichos fluidos pierda su estado de equilibrio [4]. En nuestro estudio modelaremos la propagación del frente de reacción mediante la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (K-S) [5, 6]. Esta ecuación es utilizada para modelar frentes de combustión y ondas que se propagan en sistemas de reacción-difusión. Nuestro estudio se centrará en las soluciones estacionarias que se obtienen del acoplamiento de la ecuación (K-S) con la inestabilidad de Rayleigh-Taylor (R-T). Además determinaremos la estabilidad de dichas estructuras utilizando un análisis de estabilidad lineal. En el capítulo 2 presentaremos los métodos numéricos utilizados para resolver la ecuación (K-S) en presencia de un flujo convectivo que deviene de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. En el capítulo 3 describiremos la inestabilidad Rayleigh-Taylor, las ecuaciones de movimiento utilizadas para describir el frente y los resultados obtenidos.

## 1.2. Objetivos

- Obtener estructuras estacionarias bajo los efectos de un flujo convectivo debido a la inestabilidad de Rayleigh-Taylor.
- Estudiar la estabilidad de los frentes de reacción ejecutando un análisis de estabilidad lineal.







# Capítulo 2

## Métodos Numéricos y reacciones químicas auto-catalíticas

Los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior implica saber los métodos más estables y sencillos posibles. En el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden el método de Euler implícito muestra una gran estabilidad, mientras en el caso de ecuaciones diferenciales de orden superior no lineales el método del disparo no lineal ofrece una buena alternativa de solución. Las reacciones químicas auto-catalíticas son sistemas donde hay una sustancia llamada catalizador que actúa como reactante y al mismo tiempo como producto, hay un sin número de reacciones químicas auto-catalíticas pero la reacción de Belousov-Zhabotinsky es famosa por presentar patrones químicos oscilantes.

### 2.1. Método de Euler implícito

Uno de los problemas que se plantean en esta tesis es resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. El método de Euler implícito consiste en tomar puntos  $(t_{k+1}, z_{k+1})$  y evaluarlos en la función diferencial ec(2.1), pero tomando como punto de iteración inicial la variable dependiente en ese mismo punto, es decir para calcular los puntos "futuros"  $z_{k+1}$  se requiere conocer el valor de la función diferencial evaluada en  $(t_{k+1}, z_{k+1})$ .

Supongamos una ecuación diferencial que evoluciona en el tiempo descrita mediante la siguiente expresión:

$$z' = f(t, z) \quad (2.1)$$

Donde,  $z' = dz/dt$ , siendo  $t$  la variable independiente y  $z$  una función de  $t$ , sin embargo  $f$  es una función que depende de  $t$  y  $z$ . La regla de iteración para el método de Euler implícito vendría dada por :

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t f(t_{n+1}, z_{n+1}) \quad (2.2)$$

Donde  $\Delta t$  es el tamaño del paso del tiempo para un conjunto de instantes de tiempo, siendo la regla de recurrencia :  $t_n = t_0 + n\Delta t$ . Si definimos  $z_n = z(t_n)$ , entonces se puede calcular  $z_{n+1}$ , implícitamente a partir de la ec(2.2)[7].

## 2.2. Método del disparo no lineal

El método del disparo no lineal se puede describir a partir del movimiento parabólico que realiza una partícula cuando se realizan múltiples disparos tratando de acertar en el blanco . El movimiento es descrito por una ecuación diferencial de segundo orden representado por:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.3)$$

Donde  $a \leq x \leq b$  y con las siguientes condiciones de frontera:  $f(a) = \alpha$ ,  $f(b) = \beta$ . El método trata en asignar un valor a la primera derivada en  $x = a$  denotada por:  $y'(a) = t$  donde  $t$  es un parámetro libre e ir haciendo variar hasta obtener  $y(b) = \beta$ . Si se toma como punto de inicio  $t_0$  para  $y'(a)$  es necesario construir un conjunto de parámetros mediante una sucesión  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$  [8] hasta que se cumpla la otra condición de frontera en  $y(b, t) = \beta$  el cual consiste en resolver una ecuación no lineal:

$$y(b, \alpha, t) = \beta \quad (2.4)$$

La ecuación anterior puede ser resuelta por el método de la secante o el método de Newton. En el caso del método de Newton se construye la regla de iteración [9] a partir de:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{f(t_{k-1})}{f'(t_{k-1})} \quad (2.5)$$

Esta regla iterativa muestra que si el primer parámetro  $t_0$  no da cerca del blanco entonces se toma el siguiente  $t_1, t_2, \dots$  hasta dar lo suficiente cerca del blanco. Por ejemplo, la ecuación (K-S) acoplada al flujo convectivo descrito mediante la ecuación de Navier-Stokes que utilizaremos en nuestro estudio (ver apéndice AG2) tiene la siguiente forma :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{nq} \cos(nqx) \quad (2.6)$$

Donde  $h = h(x, t)$  y  $H_n$  sus coeficientes de Fourier. Esta ecuación diferencial no es lineal debido a que el término de la primera derivada está elevado al cuadrado. La solución que buscamos es de la forma:  $h(x, t) = h(x) + ct$ , donde  $c$  es la velocidad del frente y  $h$  es el perfil del frente espacial. Al tomar la solución y reemplazarla en la ec(2.6) se obtiene una ecuación diferencial ordinaria en  $h$ .

$$c = -\frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{d^4 h}{dx^4} + \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{nq} \cos(nqx) \quad (2.7)$$

Esta ecuación es resuelta mediante el método del disparo no lineal, pero antes es necesario hacer un cambio de variable en cada derivada superior obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales que se muestra a continuación:

$$\text{Sistema de Ecuaciones diferenciales} \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{dh}{dx} \\ v = \frac{du}{dx} \\ w = \frac{dv}{dx} \\ \frac{dw}{dx} = -c - v + \frac{1}{2}u^2 + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{nq} \cos(nqx) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

El sistema de ecuaciones acoplado es resuelto para cada nueva variable. Para comenzar el método del disparo no lineal se toma como punto de inicio  $x = 0$  y se asigna un valor a  $h(0)$ , y con dos parámetros libres: la segunda derivada  $d^2h/dx^2$  en el mismo punto y la velocidad del frente  $c$ . Las condiciones de frontera que tienen que ser satisfechas son  $u(0) = u(L) = 0$  y  $w(0) = w(L) = 0$  [10] donde  $L$  es el otro extremo del dominio. Los parámetros libres se les asigna ciertos valores para empezar el método del disparo e integrar cada ecuación mediante el método de Euler, sin embargo si los parámetros

iniciales no satisfacen las condiciones de frontera en  $x = L$  se ajustan mediante el método de Newton hasta cumplirlas.

## 2.3. Reacciones Químicas auto-catalíticas

Una reacción química es el proceso mediante el cual dos o más sustancias llamadas reactantes interaccionan transformándose en nuevas sustancias denominadas productos [11], Sin embargo a lo largo de la historia de la ciencia todo ha sido clasificado en diversas áreas del conocimiento de forma ordenada con el objetivo de estudiar y comprender los fenómenos de la naturaleza y el caso de las reacciones químicas no sería la excepción, existe un tipo de reacción química llamada reacción auto-catalítica donde existe una sustancia denominada catalizador que cumple una doble función actuando simultáneamente como reactante y producto.

La forma de representar una reacción química es mediante una ecuación química donde las sustancias involucradas son representadas mediante sus formulas químicas. La reacción auto-catalítica más sencilla [12] es representada a continuación:



Al lado izquierdo de la flecha se encuentra expresado el reactante  $A$  y el auto-catalizador  $R$  y por el lado derecho el producto denotado por  $R$  pero multiplicado por dos. Esta fórmula química muestra que las sustancias que interaccionan  $A$  y  $R$  se están convirtiendo en otra sustancia representada por  $2R$  [13], es decir el catalizador cumple un doble papel en este proceso por un lado está reaccionando y al mismo tiempo se esta formando. Existen otra clase de reacciones químicas denominadas reacciones químicas oscilantes explicadas a partir de la interacción entre una reacción química y el fenómeno de difusión, siendo la reacción de Belousov-Zhabotinsky (RBZ) explicada en la siguiente sub-sección.

### 2.3.1. Reacción de Belousov-Zhabotinsky (RBZ)

La (RBZ) es la reacción química más conocida e importante en el área de las reacciones químicas oscilantes. En 1951 el científico ruso Boris Belousov mientras trataba de

reproducir el ciclo de Krebs el cual se recrea a partir de una serie de reacciones periódicas [14], sin embargo él descubrió oscilaciones químicas cuando mezcló ácido cítrico e iones de bromato en ácido sulfúrico, usando como catalizador iones de Cerio ( $Ce^{+4}$ ) [15]. Lo que buscaba era observar como se convertía el color amarillo del  $Ce^{+4}$  en el incoloro  $Ce^{+3}$  ver fig(2.1), pero su asombro fue grande al percibir que después de ciertos intervalos de tiempo del orden de horas cambiaba transitoriamente de forma alternada [16]. Aunque en aquella época trató de publicar los resultados de sus hallazgos en algunas revistas científicas europeas, apenas consiguió hacerlo pública en una conferencia de medicina en la URSS [15], abandonando la ciencia para siempre. La siguiente persona interesada en continuar con los estudios dejados por Belousov sería un estudiante de posgrado llamado Anatoly Zhabotinsky y en el año 1964 publicaría su propio mecanismo del experimento nombrándose al fenómeno químico la reacción de Belousov- Zhabotinsky [14].

Uno de los modelos que explica las reacciones periódicas de la (RBZ) es el propuesto por los investigadores Field, Körös y Noyes llamado **modelo FKN** el cual contiene más de una veintena de reacciones básicas y sustancias químicas, siendo un gran logro en el área de la química por aquel entonces para entender la reacción, dejando desde ya imposible realizar simulaciones numéricas debido a la gran cantidad de variables a considerar y por otro lado perdiendo el interés en obtener soluciones analíticas [16]. Las gráficas (2.1a) y (2.1b) son vistas de un vídeo sobre un experimento realizado en la Universidad Nacional Autónoma de México sobre propagación de ondas químicas [17].

Luego el modelo fue mejorado por Field y Noyes consiguiendo disminuir solamente a tres las sustancias variando en sus concentraciones y dos más con concentraciones sin alterar involucrando cinco reacciones que tratan de recrear la naturaleza innata del fenómeno y al conjunto de ecuaciones químicas que lo describe como **Oregonator** y su estructura es mostrada en las siguientes representaciones [16].

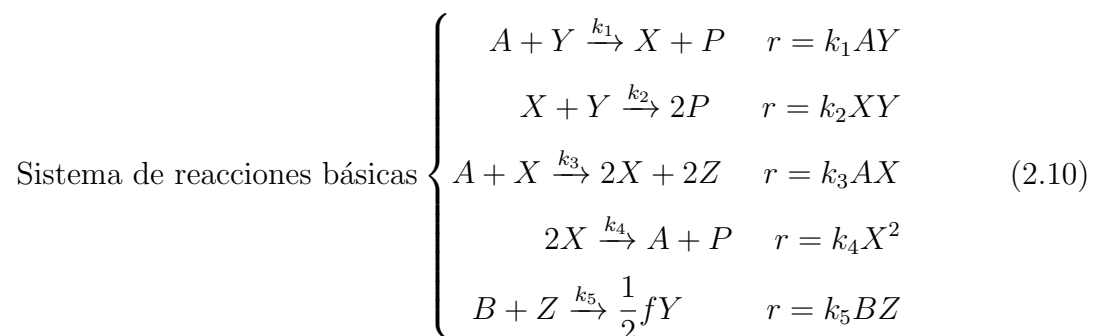






Figura 2.1: capturas de video de propagación de ondas químicas hechas en la unam [17].

Diagrama de las reacciones que participan en el modelo del oregonator donde las concentraciones que varían son  $X = HBrO_2$ ,  $Y = Br^-$  y  $Z = Ce^{4+}$  que pertenece al catalizador y las concentraciones que no se ven alteradas  $A = BrO_3^-$  y  $P = HOBr$  y  $k_i$  las constantes de reacción de cada una de ellas. Las ecuaciones químicas son reducidas en ecuaciones diferenciales ordinarias que expresan la rapidez de las reacciones [16].

$$\frac{dX}{dt} = k_1AY - k_2XY + k_3AX - 2k_4X^2 \quad (2.11)$$

$$\frac{dY}{dt} = -k_1AY - k_2XY + \frac{1}{2}fk_5BZ \quad (2.12)$$

$$\frac{dZ}{dt} = 2k_3AX - k_5BZ \quad (2.13)$$

Estas tres ecuaciones describen toda la evolución de la reacción Belousov-Zhabotinsky [16].

## 2.4. Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky

La ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lleva los apellidos de los descubridores que estudiaron fenómenos físicos en particular. Descubierta en 1976 por Kuramoto [5] e independientemente en 1977 por Sivashinsky en su investigación de propagación de la flama [6]. La ecuación (K-S) describe la evolución de una gran variedad de sistemas físicos como por ejemplo: sistemas de reacción-difusión[18], modelar el desarrollo de turbulencia

en sistemas físicos [19], Oscilaciones en reacciones químicas en un medio homogéneo [20] . Existen múltiples formas de escribir la ecuación (K-S) y diferentes condiciones de frontera para obtener una solución particular de acuerdo al fenómeno en especial que se este estudiando. Un caso específico de estudio son los frentes químicos de propagación confinado entre paredes verticales.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.14)$$

La ecuación (K-S) es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden y no lineal debido al término  $u\partial u/\partial x$  donde  $u$  depende de una variable espacial  $x$  que varía entre  $0 \leq x \leq L$  y otra temporal  $t$ , donde  $u(x, t)$  se considera un campo escalar [21] e interpretado como la velocidad del frente de propagación, hay también un término de disipación  $\nu\partial^2 u/\partial x^2$ , el parámetro  $\nu$  juega un papel muy indispensable debido a que vuelve al frente plano inestable cuando toma un valor negativo.  $\nu$  es la relación que se obtiene al dividir los coeficientes de difusión de los reactantes y una sustancia auto-catalítico en el caso de frentes de propagación químicos auto-catalíticos [22, 23].

Una característica en particular que tiene la ecuación (K-S) es que es simétrica es decir, si  $u(x, t)$  es una solución de (K-S) entonces  $u(x - ct, t) - t$  es también una solución con  $c$  constante [24] pero en este caso se tomó el caso donde  $u(x + ct, t) + t$  que es otra solución, siendo la ecuación (K-S) una invariante galileana. Otra manera de expresar la ec. (2.14) es realizando un cambio de variable  $u = \partial h/\partial x$  e integrando con respecto a  $x$  y considerando  $\nu = -1$  resulta.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \quad (2.15)$$





## Capítulo 3

# Inestabilidad de Rayleigh-Taylor

La inestabilidad de Rayleigh-Taylor sucede cuando dos fluidos con diferentes densidades confinados entre placas paralelas vuelve inestable la interfaz plana que surge de la división de los fluidos, donde el fluido más denso se encuentra arriba del menos denso.

Se ubica al frente plano en  $Z = 0$  donde  $\rho$  representa al fluido más denso y  $\rho_0$  el menos

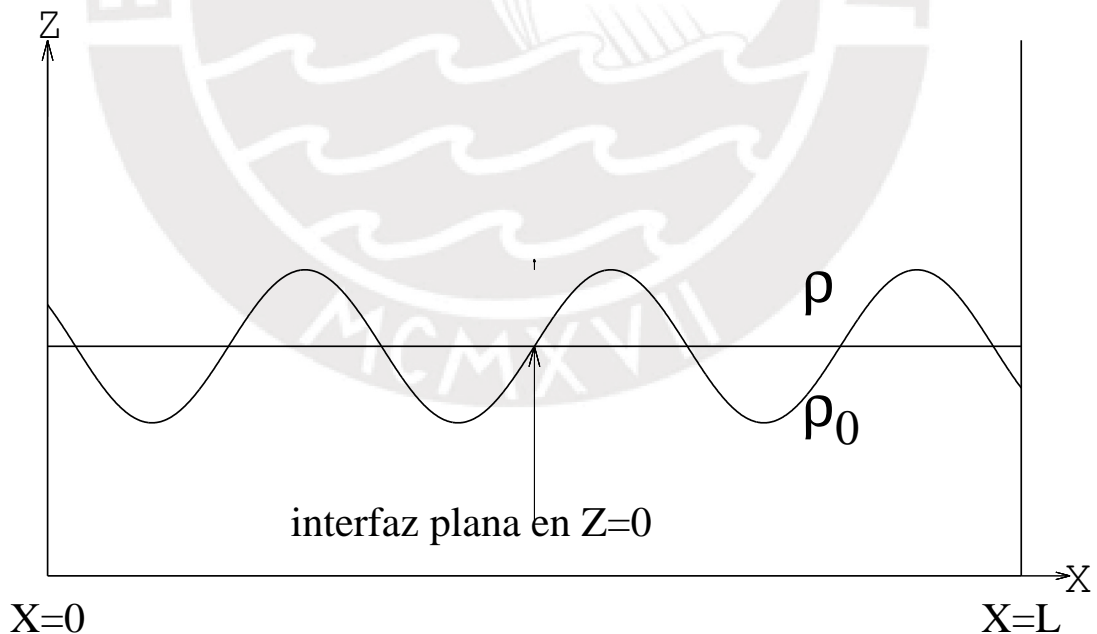


Figura 3.1: Esquema de la interfaz plana sujeta a una pequeña perturbación.

denso. Se estudia un caso particular de inestabilidad de Rayleigh-Taylor asumiendo dos fluidos inmiscibles e incompresibles y sin viscosidad donde el flujo es irrotacional, Además el caso de frentes químicos de propagación descritos por la ecuación (K-S) y la ecuación de Navier-Stokes para describir el flujo convectivo. Nuestros resultados obtenidos serán contrastados cuando se usó la ley de Darcy para describir el movimiento de convección [25]. El caso de frentes auto-catalíticos donde el frente divide las sustancias reactantes de los productos bajo la acción de la gravedad, donde  $L$  es la separación entre las placas.

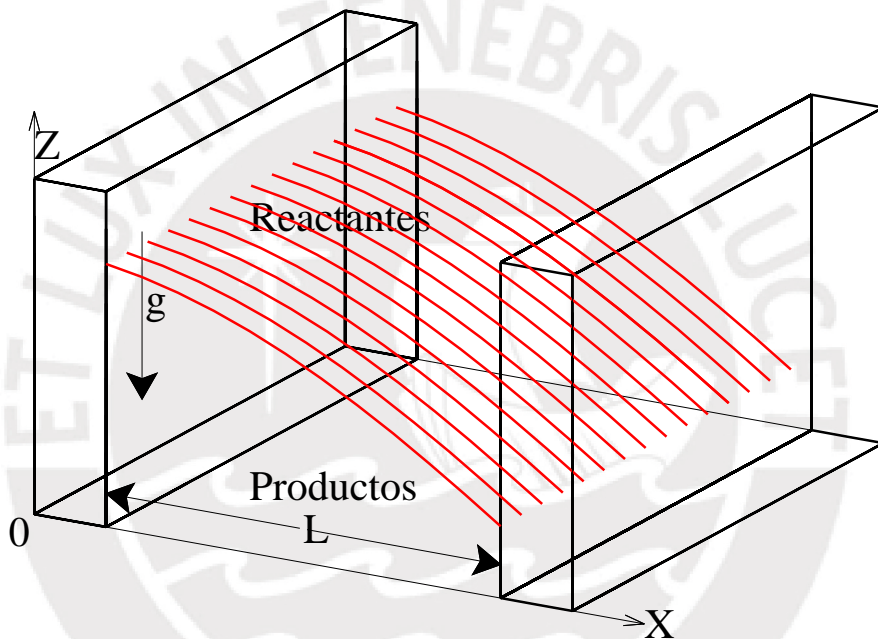


Figura 3.2: Esquema de frentes químicos de propagación descritos por la ecuación (K-S)

La separación entre las placas ( $L$ ) juega un rol importante en el estudio de éste fenómeno, cuando se aumenta el valor de  $L$  en la ecuación (KS) surgen frentes de propagación de diferentes formas, estabildades y simetrías. Los cambios abruptos de densidad sitúan al fenómeno en dos escenarios posibles, el primero ocurre cuando el fluido más denso esta arriba del menos denso y el segundo es el caso opuesto. El parámetro  $L$  presenta un valor crítico ( $L = \pi$ ) y vuelve al frente plano inestable cuando ( $L \geq \pi$ ) [25].

### 3.1. Ecuaciones de movimiento

La evolución del frente de reacción es descrito por la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, ec (3.1) donde el eje vertical  $Z$  describe la altura del frente como una función  $H(X, T)$  y donde el eje  $X$  describe la separación entre las placas denotado por el parámetro  $L$ . En el caso de una reacción química auto-catalítica el frente de reacción químico separa los reactantes y productos como una delgada interfaz.

$$\frac{\partial H}{\partial T} = V_0 + \nu \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{V_0}{2} \left( \frac{\partial H}{\partial X} \right)^2 - k \frac{\partial^4 H}{\partial X^4} + V_Z \Big|_{Z=H} \quad (3.1)$$

La ec(3.1) es una ecuación diferencial parcial no lineal de cuarto orden, donde  $V_0$  es la velocidad del frente plano,  $\nu$  es un parámetro que representa la razón entre los coeficientes de difusión de los reactantes y una especie auto-catalítica,  $V_Z$  es la componente vertical de la velocidad del fluido evaluada en  $Z = H$ .

Los fluidos en el interior de las placas se mueven como un flujo convectivo descrito por el flujo de Stokes bidimensional ec(3.2).

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V} \right] = \rho g \hat{e}_z - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.2)$$

Donde  $\vec{V}$  es la velocidad del fluido,  $P$  es la presión,  $g$  es la aceleración de la gravedad en la dirección vertical,  $\hat{e}_z$  es un vector unitario en la dirección vertical apuntando hacia arriba y  $\mu$  es la viscosidad dinámica.

Asumiendo que el flujo es estacionario, es decir independiente del tiempo  $\partial \vec{V} / \partial T = 0$  e incompresible  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , es decir se está conservando la densidad de masa reduciendo la ec(3.2) en lo siguiente:

$$\nabla^2 \vec{V} = \frac{1}{\mu} (\nabla P - \rho g \hat{e}_z) \quad (3.3)$$

Donde la velocidad tiene dos componentes con respecto a los ejes  $X$ ,  $Z$  y aplicando la ecuación de continuidad podemos hallar la siguiente relación:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} = 0 \quad (3.4)$$

Las componentes de la velocidad con respecto a los ejes  $X$ ,  $Z$  podemos expresarlas en función de la función corriente, es decir como  $V_X = -\frac{\partial \Psi}{\partial Z}$ ,  $V_Z = \frac{\partial \Psi}{\partial X}$ . Donde  $\Psi$  es la

función corriente, que luego reemplazamos en la ec(3.4) obteniendo lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Tomando las componentes  $X$  ,  $Z$  en la ec(3.3) y derivando parcialmente con respecto a  $Z$  ,  $X$  se obtiene las siguientes expresiones:

$$\nabla^2 \frac{\partial V_X}{\partial Z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial Z \partial X} \quad (3.6)$$

y

$$\nabla^2 \frac{\partial V_Z}{\partial X} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Z} - \frac{g}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial X} \quad (3.7)$$

Restando las ecuaciones (3.6) y (3.5) obtenemos la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial V_Z}{\partial X} - \frac{\partial V_X}{\partial Z} \right) = -\frac{g}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial X} \quad (3.8)$$

El flujo convectivo produce cambios abruptos de densidad en la interfaz descritos mediante la siguiente ecuación:

$$\rho = \rho_0 + \Delta \rho \Theta(Z - H) \quad (3.9)$$

$\rho$  y  $\rho_0$  representan las densidades de los fluidos correspondientes siendo  $\Delta \rho$  la diferencia entre ellos teniendo en cuenta el valor que pueda tomar la función escalón  $\Theta(Z - H)$  descrita a continuación :

$$\Theta(Z - H) = \begin{cases} 1 & , Z \geq H \\ 0 & , Z < H \end{cases} \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) es también llamada la función de Heaviside de salto unitario donde  $H$  es un número real positivo  $H > 0$  que muestra un valor unitario cuando  $Z$  se halla en la parte derecha de  $H$  o asigna un valor nulo cuando  $Z$  esta a la izquierda , recordando que  $H$  es una función de  $X$  en un tiempo  $T$ . En la ec(3.8) reemplazamos las definiciones de las componentes de la velocidad en función de  $\Psi$  y derivamos la ec(3.9) con respecto a  $X$  se obtiene:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = \frac{g}{\mu} \Delta \rho \frac{\partial H}{\partial X} \delta(Z - H) \quad (3.11)$$

Donde la función  $\delta$  de Dirac se obtiene al derivar la función de Heaviside, expresando el doble laplaciano como derivadas parciales la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Z^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Z^4} = \frac{g}{\mu} \Delta \rho \frac{\partial H}{\partial X} \delta(Z - H) \quad (3.12)$$

Transformamos adimensionalmente (3.12) mediante las escalas de longitud y tiempo :  $X = L_x x$  ,  $H = L_z h$  ,  $T = L_t t$  ,  $Z = L_z z$  y  $\Psi = \frac{L_x L_z}{L_t} \psi$  obteniendo una ecuación diferencial parcial para la función corriente con variables independientes  $x$  y  $z$  en este nuevo sistema de unidades.

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \beta^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \beta R_a \frac{\partial h}{\partial x} \delta(z - h) \quad (3.13)$$

Donde se denotan los siguientes parámetros como el número de Rayleigh :  $R_a = \frac{g \Delta \rho L_x^3}{\mu \nu}$  que dependiente de  $\Delta \rho$  el cual indica cuando el fluido más denso esta arriba del menos denso u opuesto tomando valores negativos o positivos y  $\beta = \frac{L_x}{L_z}$  y considerando  $\tilde{\nu} = -1$  , donde  $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{|\nu|}$  . La ecuación (3.13) es resuelta mediante series de Fourier para  $\psi$  y  $h$  en función de  $x$  ,  $z$  y  $t$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, t) \sin(nqx) \quad (3.14)$$

y

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \cos(nqx) \quad (3.15)$$

Donde la variable  $x \in [0, L]$  y el parámetro  $q = \pi/L$ . Las series de Fourier expresadas anteriormente satisfacen las siguientes condiciones de frontera :  $\partial h / \partial x = 0$  y  $\partial^3 h / \partial x^3 = 0$  en  $x = 0$  y  $x = L$  [10]. Reemplazando las series de Fourier en la ec(3.13), la función delta de Dirac es evaluada en  $z \neq h$  tomando un valor nulo y tomando el caso particular de  $\beta = 1$  se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^4 \psi_n}{dz^4} - 2(nq)^2 \frac{d^2 \psi_n}{dz^2} + (nq)^4 \psi_n = 0 \quad (3.16)$$

Resolviendo para cada componente de la Función corriente  $\psi_n$  en términos de  $H_n$  expresadas en el siguiente esquema matemático (ver apéndice AG1):

$$\psi_n = \begin{cases} A_n e^{-nqz} (1 + nqz) & \text{si } z > 0 \\ A_n e^{nqz} (1 - nqz) & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Donde  $n$  es un número entero positivo y la constante  $A_n$  relaciona el numero de Rayleigh

y los coeficientes de Fourier en la siguiente expresión :

$$A_n = -\frac{R_a H_n}{4(nq)^2}, \quad n \geq 1 \quad (3.18)$$

La ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (3.1) también la volvemos adimensional usando las mismas escalas de longitud y tiempo, pero definiendo las escalas  $L_x$ ,  $L_z$  y  $L_t$  en función de los coeficientes  $\kappa$ ,  $\nu$  y  $V_0$  expresadas en las siguientes relaciones :  $L_x = \sqrt{k/|\nu|}$ ,  $L_t = k/\nu^2$ ,  $L_z = |\nu|/V_0$ ,  $\tilde{\nu} = \nu/|\nu|$  hallando una ecuación diferencial parcial de la altura del frente evolucionando con el tiempo

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C_0 + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + v_z \quad (3.19)$$

Donde  $C_0 = 0$  es la velocidad del frente plano en lo que resta de la tesis mediremos las velocidades de los frentes relativos a la velocidad del frente plano ( $C_0 = 0$ ) y la condición  $\tilde{\nu} = -1$  que vuelve al frente plano inestable, y reemplazando la definición de la componente de la velocidad en  $z$  evaluada en  $z = 0$  obteniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) es la ecuación (KS) acoplada con el flujo de Stokes que muestra la evolución de la altura del frente variando en  $x$  para un tiempo  $t$  con sus respectivos coeficientes de Fourier  $H_n$  donde se aprecia un término no lineal  $(\partial h/\partial x)^2$ .

## 3.2. Soluciones Numéricas de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky

En esta sección mostraremos los métodos numéricos para encontrar las soluciones estacionarias, las cuales son independientes del tiempo. Primero mostraremos un método para encontrar soluciones estacionarias estables. Luego, utilizaremos el método del disparo para verificar las soluciones anteriores y además encontraremos con este método las soluciones estacionarias tanto estables como inestables.



### 3.2.1. Soluciones estables que evolucionan con el tiempo

En ésta sección analizaremos la evolución de los frentes de reacción estables que evolucionan con el tiempo. Se plantean soluciones de la forma en serie de Fourier para  $h(x, t)$  como el producto de dos funciones para  $x$  y  $t$

$$h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \cos(nqx) \quad (3.21)$$

Donde  $H_n$  son los coeficientes de Fourier y la solución  $h(x, t)$  debe satisfacer las condiciones de frontera impuestas en las paredes obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ver apéndice (AG2)

$$\frac{dH_n}{dt} = \left[ (nq)^2 - (nq)^4 + \frac{R_a}{4(nq)} \right] H_n + \frac{q^2}{4} \sum_{l,p} l p H_l H_p (\delta_{n,|l-p|} - \delta_{n,l+p}), \quad n \geq 1 \quad (3.22)$$

y

$$\frac{dH_0}{dt} = C_0 + \frac{q^2}{4} \sum_p p^2 H_p^2 \quad (3.23)$$

Donde  $q = \pi/L$ ,  $L$  es la separación entre las placas  $n, l$  y  $p$  son números enteros. La ec(3.23) muestra la evolución temporal de los frentes en un caso  $n \geq 1$  y la ec(3.24) para un caso de la evolución temporal de la altura promedio. Las ecuaciones anteriores representan un conjunto de ecuaciones diferenciales resueltas mediante algoritmos matemáticos, desarrollados a partir de métodos numéricos implementados en el método de Euler implícito.

### 3.2.2. Soluciones estacionarias estables e inestables

Soluciones estacionarias son expresadas de la forma  $h(x, t) = h(x) + ct$ , donde  $c$  es la velocidad constante del frente y  $h(x)$  es el perfil del frente espacial, donde transformamos la ec(3.20) en una ecuación diferencial ordinaria con la solución propuesta obteniendo lo siguiente:

$$c = -\frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{d^4 h}{dx^4} + \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.24)$$



La ec(3.21) es una ecuación diferencial no lineal ordinaria de cuarto orden, donde  $h$  es solamente función de  $x$ ,  $n$  es un número entero positivo  $n \geq 1$  y  $H_n$  sus correspondientes coeficientes de Fourier e imponiendo las siguientes condiciones de frontera : la primera derivada  $h'(0) = h'(L) = 0$  y la tercera derivada  $h'''(0) = h'''(L) = 0$  [10] donde  $L$  es la separación entre las placas. La ecuación (KS) es resuelta con ordenador mediante algoritmos matemáticos, diseñados a partir de métodos numéricos como el método del disparo no lineal, el cual se puede explicar a partir del movimiento parabólico ver cap(2.2). Es necesario en primer lugar hallar una solución para  $R_a = 0$ , es decir el caso sin convección para posteriormente observar como evoluciona en los casos donde :  $R_a = 0,1$  el fluido más denso esta arriba del menos denso o el caso opuesto  $R_a = -0,1$  el fluido más denso esta abajo del menos denso obteniendo sus velocidades y coeficientes de Fourier en los correspondientes casos .El dominio de estudio preestablecido es  $0 \leq x \leq L$  donde  $L = 10$  y el tamaño del paso 0.0001 para luego construir el frente.

### 3.2.3. Análisis de Estabilidad Lineal

La evolución de los frentes estacionarios es sometido a pequeñas perturbaciones para estudiar las regiones de estabilidad a lo largo del dominio  $L$ , donde se introducen en la ec(3.21) la solución estacionaria  $h(x)$  y se agrega una función de perturbación  $H'(x, t)$  y tomando solo términos lineales se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H'}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 H'}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial H'}{\partial x}\right) + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H'_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.25)$$

La función de perturbación es expresada como el producto de dos funciones una de ellas evolucionando con el tiempo y la otra espacialmente denotadas como :

$$H'(x, t) = e^{\sigma t} \tilde{H}(x) \quad (3.26)$$

Donde  $\sigma$  es la rapidez de crecimiento de la perturbación indicando que para valores muy grandes la perturbación seria infinita y  $\tilde{H}(x)$  una función espacial. Introduciendo la ec(3.26) en la ecuación diferencial parcial (3.25) se obtiene una ecuación de auto-valores y auto-funciones, siendo  $\sigma$  el auto-valor y  $\tilde{H}$  la auto-función ver apéndice(AG3).

$$\sigma \tilde{H} = -\frac{d^2 \tilde{H}}{dx^2} - \frac{d^4 \tilde{H}}{dx^4} + \left(\frac{dh}{dx}\right) \left(\frac{d\tilde{H}}{dx}\right) + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.27)$$

La ec(3.27) determina la estabilidad de los frentes estacionarios  $h(x)$ , donde  $\sigma$  es un número imaginario donde la parte real puede tomar valores positivos indicando soluciones estables o negativos mostrando soluciones inestables. Introduciendo series de Fourier para  $h(x)$  y  $\tilde{H}(x)$  para solucionar la ec (3.27) expresadas como:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos(nqx) \quad (3.28)$$

$$\tilde{H}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m \cos(mqx) \quad (3.29)$$

Donde  $n$  y  $m$  son números enteros positivos,  $h_n$  y  $\tilde{H}_m$  son sus correspondientes coeficientes de Fourier. Las funciones  $h(x)$  y  $\tilde{H}(x)$  conforman una base ortogonal, proyectando sobre la función coseno se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de auto-valores con coeficientes de Fourier  $\tilde{H}_p$  ver apéndice(AG3)

$$\sigma \tilde{H}_p = (pq)^2 \tilde{H}_p - (pq)^4 \tilde{H}_p + \sum_m^{\infty} A_{pm} \tilde{H}_m + \frac{R_a}{4} \frac{1}{pq} \tilde{H}_p \quad (3.30)$$

La ecuación anterior describe la estabilidad de las soluciones estacionarias con  $m$  y  $p$  enteros donde la matriz  $A_{pm}$  esta definida como:

$$A_{pm} = \frac{mq^2}{2} \sum_n^{\infty} nh_n (\delta_{|n-m|,p} - \delta_{n+m,p}) \quad (3.31)$$

La ecuación (3.30) es resuelta mediante algoritmos matemáticos diseñados a partir de métodos numéricos programados en un ordenador para calcular los auto-valores se utilizó 8 términos de truncación no habiendo mucha diferencia significativa con más términos. El lenguaje de programación FORTRAN ofrece en su librería un paquete para calcular los auto-valores llamado CG el cual se usó junto al código correspondiente a la ecuación de auto-valores.

### 3.3. Resultados obtenidos

Cuando la propagación de los frentes es afectado por un flujo convectivo puede modificar la evolución de éstos haciendo disminuir o aumentar las velocidades o alturas, pero para tomar como punto de referencia la variación de éstas magnitudes se toma el caso sin

convección, utilizaremos un parámetro ligado al fenómeno convectivo llamado número de Rayleigh denotado por  $R_a$ , para el caso sin convección su valor es nulo, sin embargo éste parámetro depende de las diferencias de densidades entre dos fluidos pudiendo tomar valores positivos indicando que el fluido más denso está encima del menos denso o valores negativos señalando lo contrario. Se ha tomado tres valores diferentes del parámetro  $R_a$  que describen las situaciones antes mencionadas. Primero se analiza el caso sin la presencia de un flujo convectivo, es decir con un valor nulo de  $R_a$  y a partir de éste contexto físico se contrastará con los otros dos posibles escenarios donde se han tomado los valores de  $R_a = 0.1$  y  $R_a = -0.1$ . La evolución de los frentes ocurre en un dominio de estudio  $3 \leq L \leq 10$ . Además se comparará los resultados obtenidos en [25].

### 3.3.1. Soluciones estacionarias estables e inestables con $R_a = 0.0$

Existen múltiples soluciones para la ecuación (K-S) que pueden ser: simétricos, asimétricos o planos en un contexto físico sin convección. Las soluciones representan las alturas de los frentes para diferentes valores que toma el parámetro  $L$  que representa la separación entre las placas. Existe un valor umbral para la separación entre las placas en  $L = \pi$  [?], es decir cuando se eleva el valor de  $L$  empiezan a originarse las diversas soluciones antes mencionadas. Para diferenciar los diferentes tipos de soluciones se introduce un eje paralelo a la altura del frente pero que pase por la mitad del dominio dividiéndolo en dos partes iguales denominado eje de simetría [?]. Por ejemplo la fig(3.3a) corresponde a una solución no simétrica con uno de sus lados cayendo sobre el otro, mientras las fig(3.3b) y (3.3c) pertenecen a soluciones simétricas pero con las concavidades opuestas. Las soluciones de las fig(3.3a) y (3.3b) alcanzan la misma máxima altura de sus correspondientes frentes, mientras en la fig(3.3c) alcanza un valor mínimo.

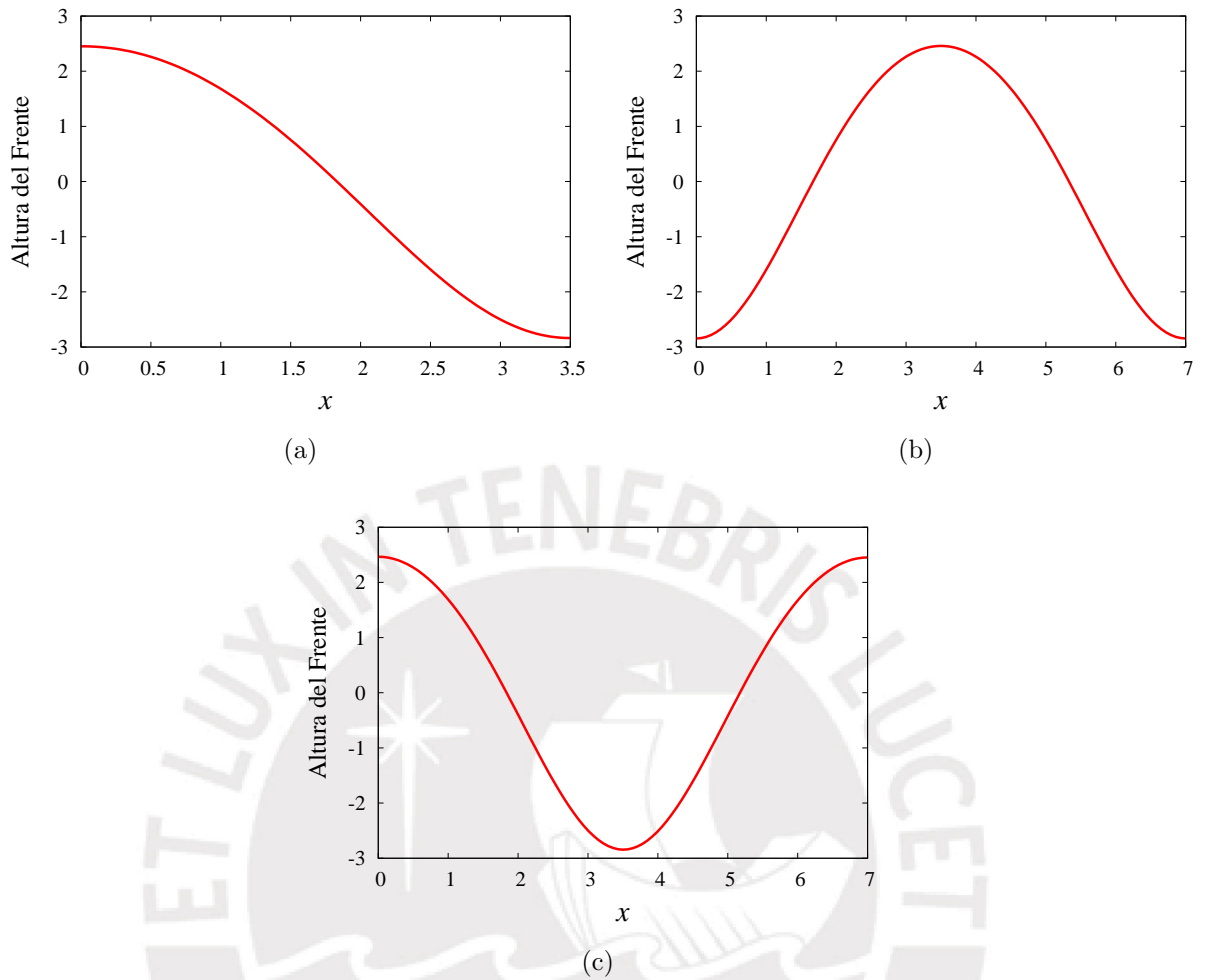


Figura 3.3: Soluciones espaciales sin convección evolucionando a lo largo del dominio. La fig (3.3a) muestra una solución no simétrica con  $L = 3.5$ , mientras las figuras (3.3b) y (3.3c) son soluciones simétricas con  $L = 7.0$  pero cóncavas hacia abajo y arriba

Si la separación entre las placas es aumentada con respecto a las gráficas mostradas anteriormente se originan otro tipo de soluciones. Por ejemplo las gráficas (3.4a), (3.4b) y (3.4d) representan soluciones asimétricas y la gráfica (3.4c) pertenece a una solución simétrica cóncava hacia abajo. Las gráficas (3.4a) y (3.4b) logran alcanzar casi la misma altura máxima.

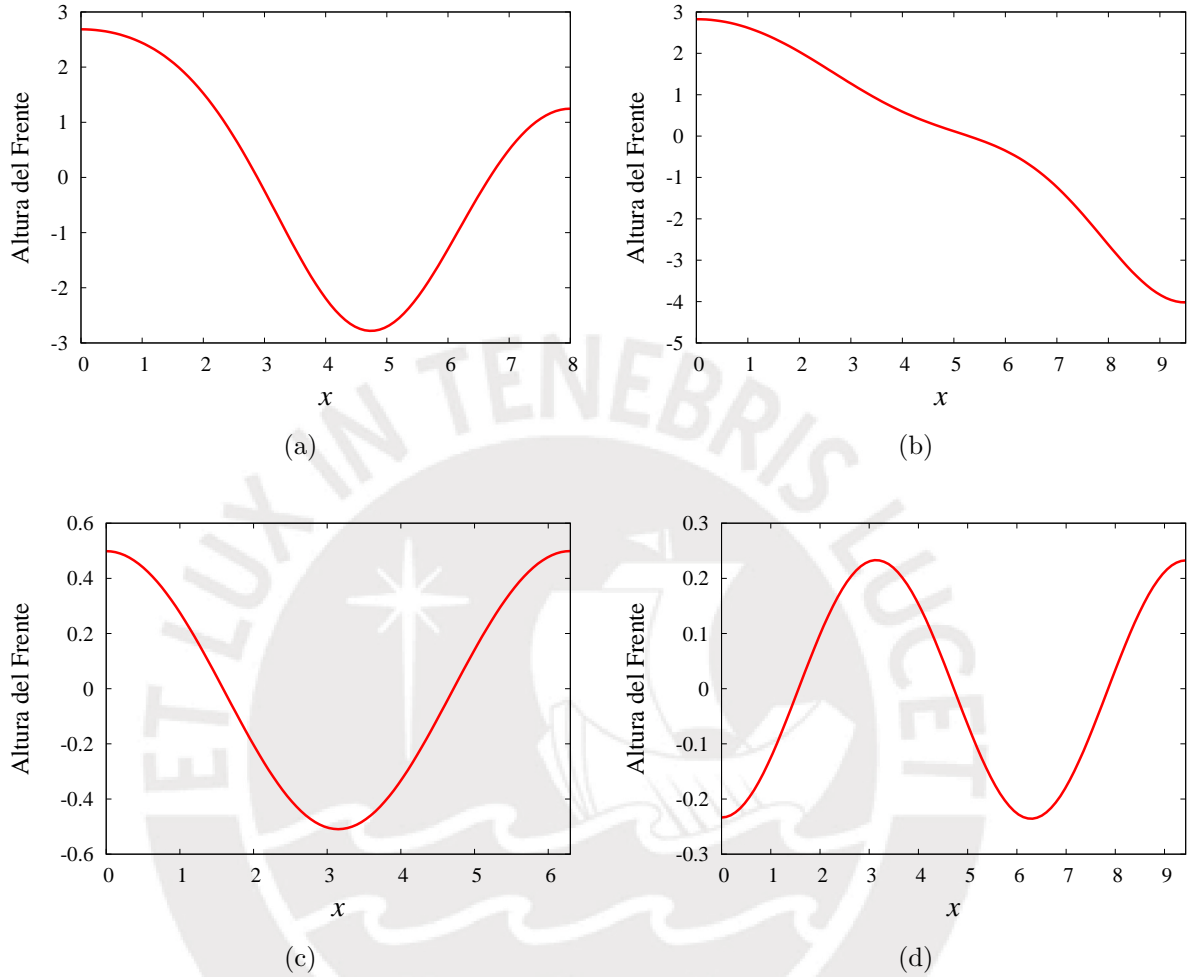


Figura 3.4: Soluciones espaciales para diferentes  $L$  del dominio. Las fig (3.4a)( $L=8.0$ ), (3.4b)( $L=9.5$ ) y (3.4d)( $L=9.43$ ) pertenecen a frentes no simétricos y la figura (3.4c)( $L=6.3$ ) corresponde a un frente simétrico.

### 3.3.2. Velocidades de los frentes estables e inestables con $R_a = 0.0$

En la fig(3.5a) se muestran las velocidades de los frentes para cada una de las soluciones halladas en la sub-sección anterior. Las soluciones representadas por las fig(3.3a), (3.3b) y (3.3c) alcanzan una misma velocidad máxima de 1.60 mostradas por las ramas  $A$  y

$B$ , mientras la rama  $D$  representa la velocidad de la fig(3.4b) alcanzando una velocidad máxima de 0.35 en  $L = 10$ . La rama  $E$  corresponde a la solución de la fig(3.4c) que se mueve a bajas velocidades en comparación con las otras soluciones, siendo su máxima velocidad de 0.1 y la rama  $F$  representa la velocidad de la fig(3.4d) que alcanza una velocidad máxima de 1.0 en la pared. La fig(3.5) muestra la velocidad de todos los frentes,

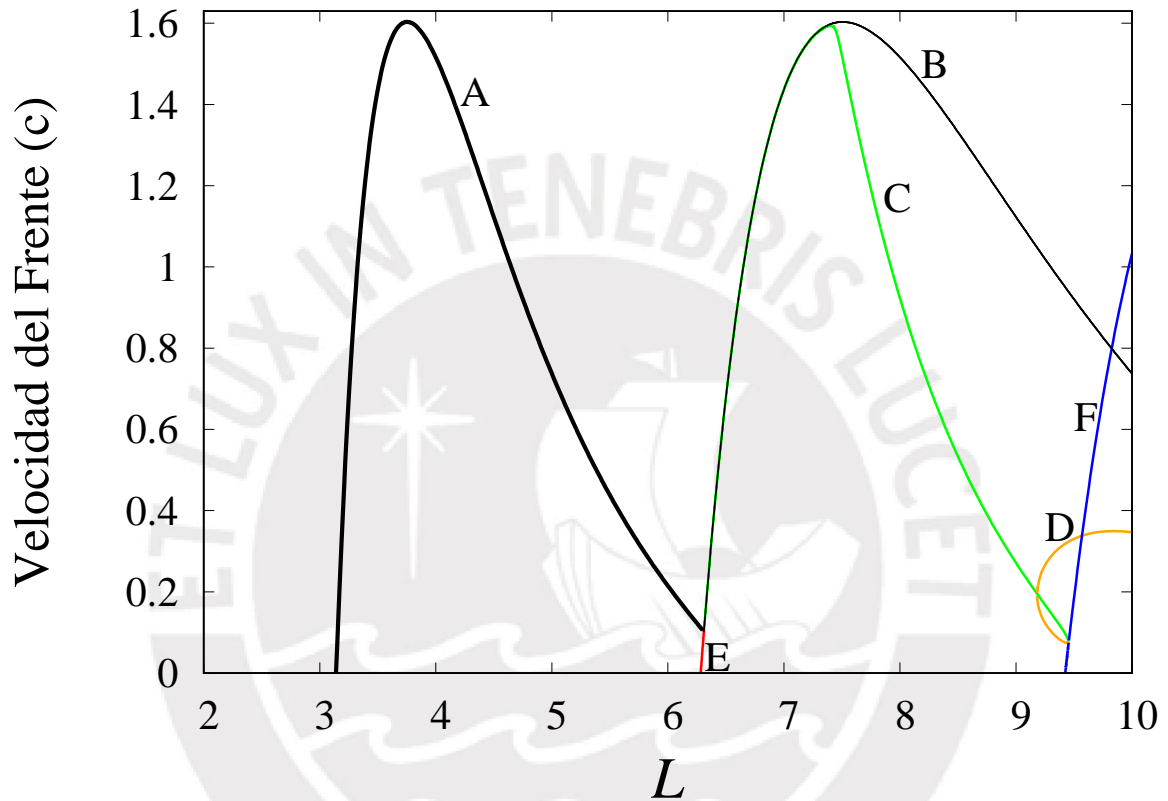


Figura 3.5: Velocidades de propagación de los diferentes frentes estacionarios donde la rama  $A$  pertenece a un frente asimétrico,  $B$  y  $C$  corresponden a soluciones simétricos, mientras las ramas  $C, D$  y  $F$  corresponde a frentes asimétricos

donde la rama  $A$  empieza en la separación entre las placas umbral, es decir en  $L = \pi$ . Ha medida que se aumenta el valor del dominio ocurren algunos hechos interesantes por ejemplo: las ramas  $A$  y  $B$  alcanzan la misma velocidad máxima en puntos que son múltiplos en dos, es decir en  $L = 3.75$  y  $L = 7.51$  respectivamente como tratando de manifestarse un patrón en la velocidad, mientras en las otras ramas restantes pueden propagarse muy lento en el caso de  $E$  o muy rápido el caso de  $C$ .

### 3.3.3. Regiones de estabilidad de los frentes estables e inestables con $R_a = 0.0$

Las soluciones halladas en la sub-sección anterior tienen diferentes estabilidades que se muestran en la fig(3.6), recordando que valores negativos en la parte real de  $\sigma$  corresponden a frentes estables y valores positivos frentes inestables. La rama  $G$  corresponde al frente plano que se vuelve inestable en  $L \geq \pi$ , mientras las ramas  $A$  y  $B_1$  son estables que corresponden a las soluciones de las fig(3.3a) y (3.3b). Las ramas  $B_2$  y  $E$  corresponden a frentes simétricos inestables fig(3.3c) y fig(3.4c), mientras las ramas  $C$ ,  $D$  y  $F$  corresponden a frentes asimétricos inestables. Cada frente estacionario tiene una evolución

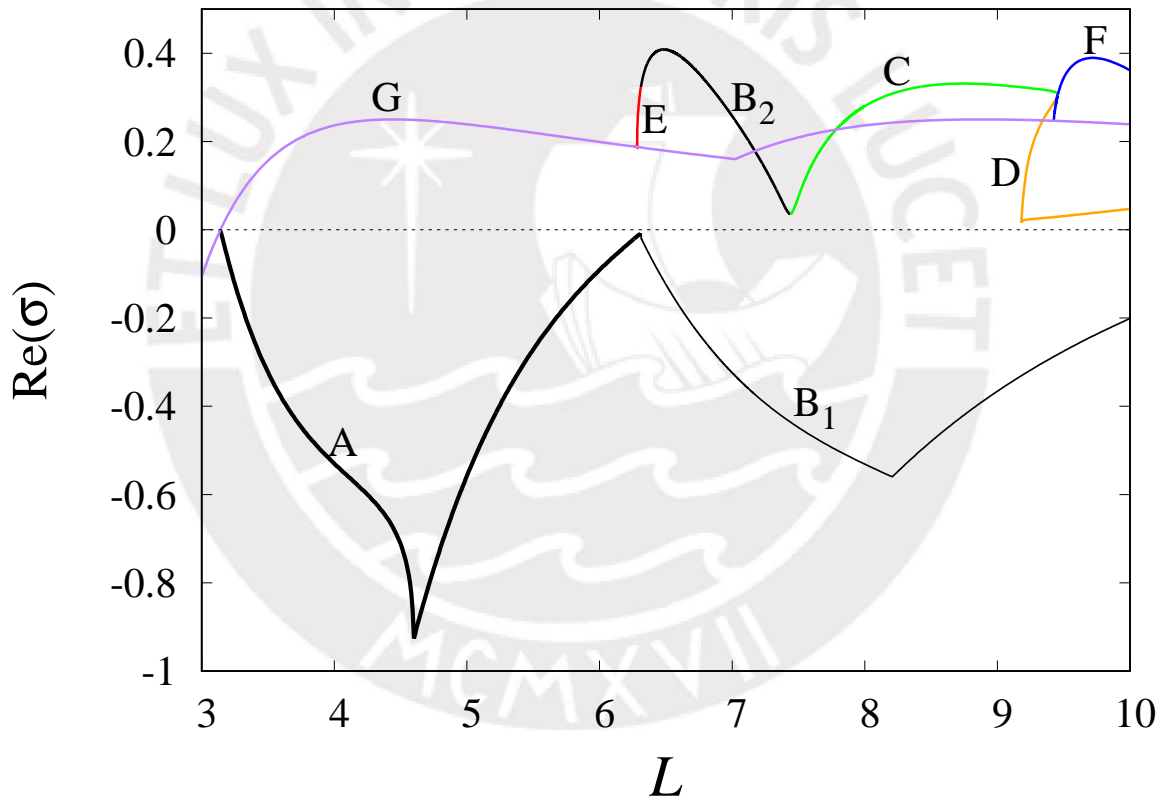


Figura 3.6: Estabilidad de los diferentes frentes estacionarios en todo el dominio  $L$ . Las ramas  $A$  y  $B_1$  corresponden a frentes estables, sin embargo las ramas  $B_2$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$  pertenecen a frentes inestables. La rama  $G$  pertenece a la solución del frente plano mostrando en  $L \geq 3.14$  se vuelve inestable.

diferente con regiones de estabilidad distintas y velocidades máximas que van desde muy



lentas hasta rápidas. En este caso específico de propagación de frentes en ausencia de un flujo convectivo se obtuvieron las soluciones estacionarias estables e inestables que serán tomadas en cuenta para el caso con  $R_a = 0.1$  mostrando si hay cambios en las magnitudes de las soluciones como las alturas de los frentes, incremento en las velocidades o regiones de estabilidad.

### 3.3.4. Soluciones estacionarias estables e inestables con $R_a = 0.1$

En la sub-sección (3.3.1) se obtuvieron las soluciones estacionarias estables e inestables en ausencia de un flujo convectivo. Ahora estudiaremos el caso donde el fluido más denso que corresponden a los reactantes de la reacción se encuentran sobre los productos de la reacción auto-catalítica que es de menor densidad. Consideraremos el caso particular de  $R_a = 0.1$  para analizar como se afectan los frentes de reacción debido al flujo convectivo que proviene del gradiente de densidades. En la fig(3.7) se muestran los perfiles de algunos frentes de reacción con  $R_a = 0.1$ . La fig(3.7a) corresponde a una solución no simétrica obtenida para una separación entre placas  $L = 3.5$ . El sentido del rollo de convección es el mismo que se obtiene modelando el flujo convectivo con la ley de Darcy. Este rollo convectivo sube por la pared de la izquierda ( $x = 0$ ) y baja por la pared de la derecha ( $x = L$ ). Para poder visualizar los rollos de convección se ha multiplicado por cuatro los vectores de convección. La fig(3.7b) pertenece a una solución simétrica hallada con una separación entre placas de  $L = 7.0$ . Los sentidos de los dos rollos de convección son iguales al que se obtiene describiendo con la ley de Darcy. Estos dos rollos surgen desde el centro del dominio ( $x = L/2$ ) y caen en los extremos de las paredes. Debido a que los rollos de convección son pequeños se ha multiplicado por cuatro los vectores de convección. La fig(3.7c) es también una solución simétrica con igual separación entre placas que la fig(3.7b), pero con diferente perfil de altura. Los dos rollos de convección se originan desde las paredes y bajan en el centro del dominio ( $x = L/2$ ). Los sentidos de los rollos de convección son diferentes mientras uno de ellos gira en forma horaria subiendo en la pared izquierda el otro gira en forma opuesta originándose desde la pared derecha. Debido a que los vectores que muestran los rollos son pequeños se les multiplicó por cuatro para poder percibir el flujo convectivo. Otra clase de perfiles de frentes de reacción son los mostrados en la fig(3.8). La fig(3.8a) pertenece a una solución no simétrica obtenida de



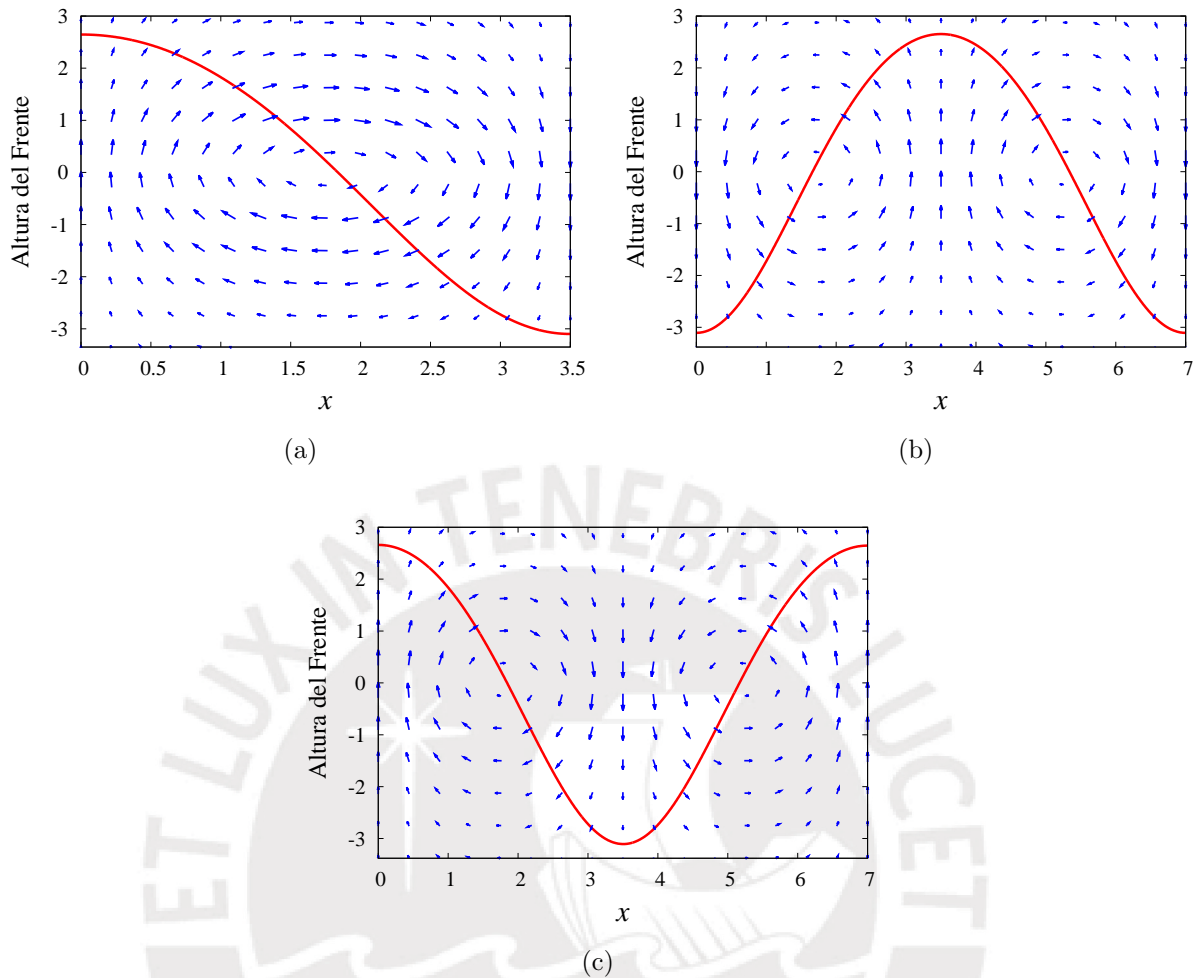


Figura 3.7: Frentes estacionarios sujetos a un flujo convectivo con  $R_a = 0.1$ . La gráfica (3.7a) muestra un perfil no-simétrico con  $L = 3.5$ , mientras las gráficas (3.7b) y (3.7c) muestran soluciones simétricas con  $L = 7.0$

una separación entre placas  $L = 8.0$ . Aparece un solo rollo de convección bajando cerca de la concavidad y volviendo a subir en la pared izquierda ( $x = 0$ ). En este caso poder visualizar los rollos de convección se ha multiplicado por dos los vectores de convección. La fig(3.8b) corresponde a una solución no-simétrica obtenida con una distancia entre placas ( $L = 9,5$ ). El sentido del rollo de convección es similar al que se obtiene describiendo el flujo convectivo con la ley de Darcy. La altura máxima del frente obtenido se incrementó de  $z = 3$  (caso sin convección) hasta  $z = 4$  (caso con convección). Para poder observar el flujo convectivo se ha multiplicado por 1.8 los vectores de convección. La fig(3.8c) pertenece a una solución simétrica obtenida con una separación entre placas ( $L = 6,24$ ). Se originan

dos rollos de convección subiendo en las paredes ( $x = 0$ ) , ( $x = L$ ) y bajando en medio del dominio ( $x = L/2$ ). La altura máxima del frente ( $z = 0,7$ ) creció en comparación al caso sin flujo convectivo ( $z = 0,5$ ). Debido a que la altura del frente es más menor comparado a los casos anteriores se multiplicó por cinco los vectores de convección. La fig(3.8d) corresponde a una solución no-simétrica obtenida con una separación entre placas ( $x = 9,43$ ). Los rollos de convección surgen desde abajo de la curva en los puntos máximos y caen en los mínimos. La altura máxima del frente ( $z = 1,09$ ) aumentó comparado al caso sin convección que tiene una altura del frente ( $z = 0,23$ ). Para poder visualizar el flujo convectivo se ha multiplicado por seis los vectores de convección.

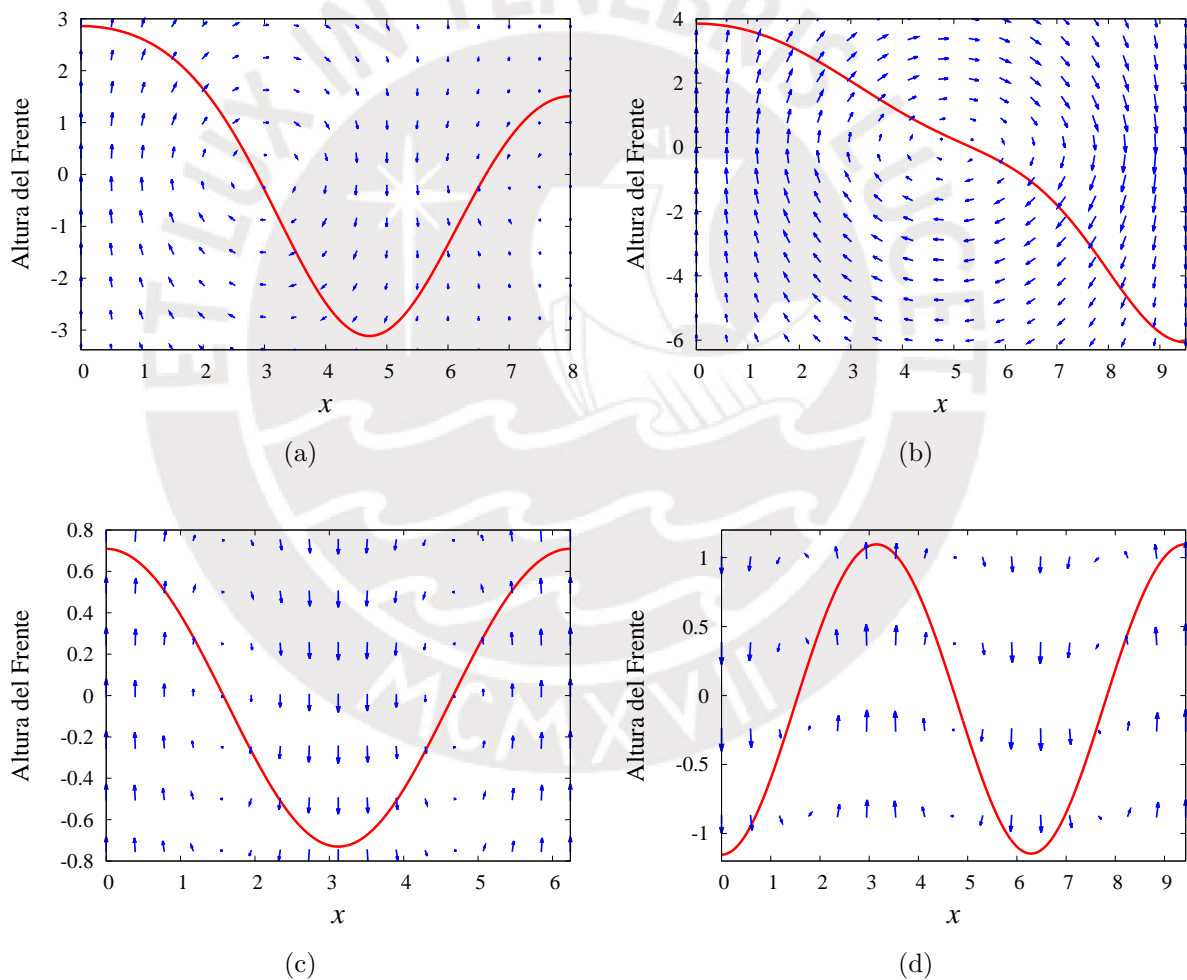


Figura 3.8: Perfiles espaciales con diferentes separación entre las placas, apareciendo rollos convectivos desde las paredes y cayendo en diferentes partes del dominio.

### 3.3.5. Velocidades de los frentes estables e inestables con $R_a = 0.1$

En ésta sub-sección se analizará las velocidades de propagación de los frentes hallados en la sub-sección anterior. En la fig(3.9) se muestran las velocidades de cada una de las soluciones halladas en la sub-sección (3.3.4). Las velocidades de estos frentes son más rápidos comparados cuando no hay flujo convectivo. La rama  $A$  representa la velocidad de propagación del frente de reacción no simétrico obtenido en la fig(3.7a). La velocidad máxima de propagación del frente es 1,84 menor al usado en la ley de Darcy para describir el flujo convectivo 3,46. La rama  $B$  corresponde a la velocidades del frente de reacción simétricos hallados en las fig(3.7b) y fig(3.7c). Las velocidades máximas de las ramas  $A$  y  $B$  son las mismas alcanzadas en puntos múltiples en dos ( $L = 3,73$ ) , ( $L = 7,46$ ) como si se estuviera presentando un patrón en la velocidad. La rama  $C$  representa la velocidad de propagación del frente de reacción no-simétrico obtenido en la fig(3.8a). Éste frente también alcanza una velocidad máxima muy cercana a las ramas  $A$  y  $B$  algo similar cuando el flujo convectivo es modelado por la ley de Darcy. La rama  $D$  representa la velocidad de reacción del frente no-simétrico hallado en la fig(3.8b). Ésta rama tiene una región en el dominio con dos velocidades distintas  $8,86 \leq L \leq 9,37$  mayor al hallado en la ley de Darcy que modela el flujo convectivo en un tramo diferente  $8,24 \leq L \leq 8,54$ . La rama  $E$  corresponde a la velocidad de propagación del frente simétrico obtenido en la fig(3.8c). La rama experimenta un incremento en su dominio  $6,20 \leq L \leq 6,25$  en contraste a la ley de Darcy que describe el flujo convectivo  $5,67 \leq L \leq 5,71$ . La rama  $F$  representa la velocidad de propagación del frente de reacción no-simétrico obtenido en la fig(3.8d). La velocidad máxima de esta rama es 1,31 casi una tercera parte al utilizado en la ley de Darcy 3,48.

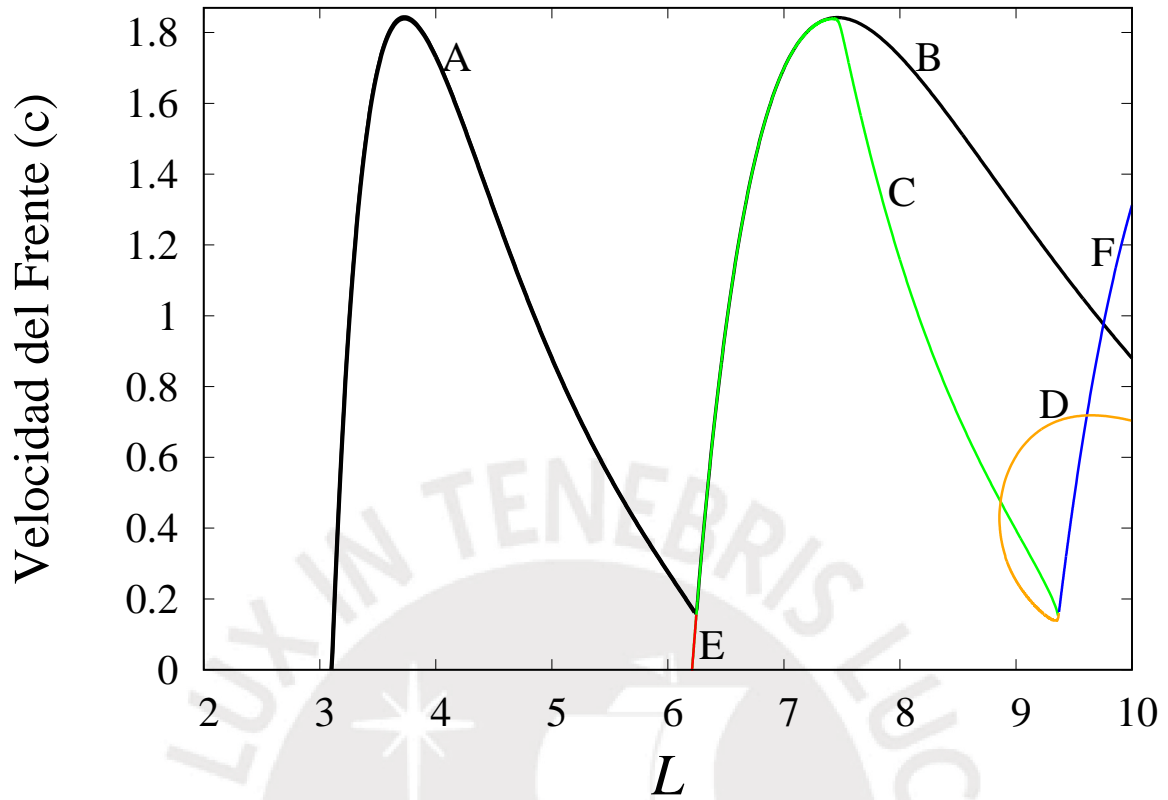


Figura 3.9: Velocidades de propagación de las diferentes soluciones estacionarias estables e inestables con  $R_a = 0.1$ . experimentando un incremento en las velocidades para cada una de las soluciones.

### 3.3.6. Regiones de estabilidad de las soluciones estables e inestables con $R_a = 0.1$

En ésta sub-sección se analizará la estabilidad de los frentes estacionarios estables e inestables hallados en la sub-sección(3.3.4). La fig(3.10) muestra las regiones de estabilidad de los frentes. La rama  $G$  corresponde a la estabilidad del frente plano que se vuelve inestable en  $L \geq 3.10$ . La rama  $A$  es estable que corresponde a la solución no simétrica obtenida en la fig(3.7a). La región de estabilidad ocurre en  $3,10 \leq L \leq 6,23$  un poco menos si comparamos cuando no hay flujo convectivo  $3,14 \leq L \leq 6,31$ . La misma rama es mayor si es comparada cuando el flujo es descrito por la ley de Darcy cuyo tramo es  $2,83 \leq L \leq 5,71$ . La rama  $B_1$  es también estable que corresponde a la solución simétrica hallada en la fig(3.7b). La región de estabilidad se da en el intervalo  $6,23 \leq L \leq 10$

mayor cuando no hay flujo convectivo  $6,31 \leq L \leq 10$ . La misma rama es menor cuando el flujo convectivo es descrito por la ley de Darcy que tiene una región de estabilidad en  $5,71 \leq L \leq 10$ . Las ramas  $A$  y  $B_1$  son estables, cuando una de ellas disminuye su región de estabilidad la otra aumenta. La rama  $B_2$  es inestable que corresponde a la solución simétrica obtenida en la fig(3.7c). El intervalo de la rama se da en  $6,25 \leq L \leq 7,47$  menor cuando hay ausencia de flujo convectivo  $6,31 \leq L \leq 7,44$ . Cuando el flujo convectivo es descrito por la ley de Darcy su región de estabilidad ocurre en el intervalo  $5,71 \leq L \leq 6,82$  menor cuando el flujo de convección es descrito por la ecuación de Navier-Stokes. La rama

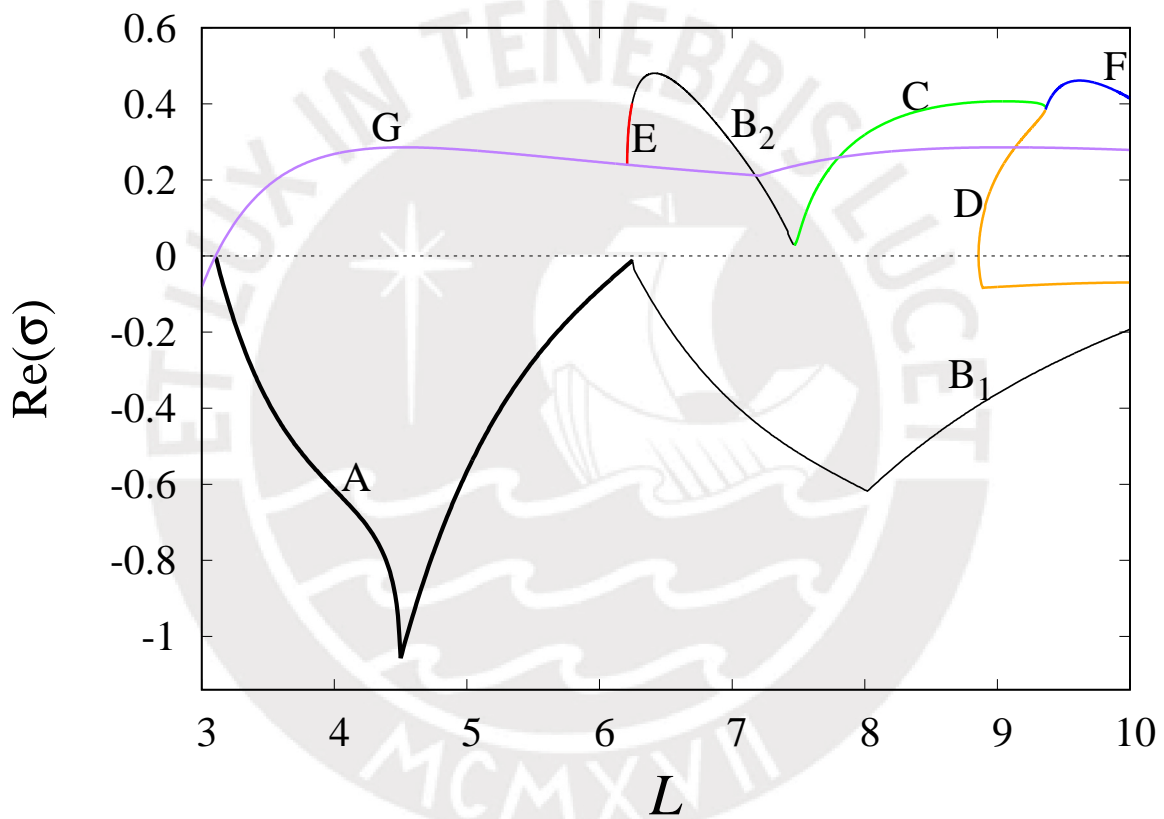


Figura 3.10: Estabilidad de los diferentes frentes estacionarios en todo el dominio  $L$ . Las ramas  $A$  y  $B_1$  corresponden a soluciones estables, sin embargo las ramas  $B_2$ ,  $C$ ,  $E$  y  $F$  pertenecen a soluciones inestables, la rama  $D$  tiene una región estable. La rama  $G$  pertenece a la solución del frente plano mostrando en  $L \geq 3.10$  se vuelve inestable.

$C$  es inestable que corresponde a la solución no-simétrica obtenida en la fig(3.8a). Su región de estabilidad sucede en el tramo  $7,47 \leq L \leq 9,57$  menor cuando no hay flujo convectivo  $7,44 \leq L \leq 9,46$ . La misma rama cuando es modelado con la ley de Darcy

ocurre en  $6,82 \leq L \leq 8,55$  menor comparado cuando el flujo es descrito por la ecuación de Navier-Stokes. La rama  $D$  representa la estabilidad de la solución no-simétrica hallada en la fig(3.8b). Ésta rama presenta una doble estabilidad en su dominio, es estable en el intervalo  $8,86 \leq L \leq 10$  e inestable en  $8,86 \leq L \leq 9,37$ . Ésta misma característica presenta la rama cuando el flujo convectivo es modelado con la ley de Darcy en un intervalo menor  $8,24 \leq L \leq 8,54$ . La rama  $E$  es inestable que corresponde a la solución simétrica obtenida en la fig(3.8c). La región de estabilidad se presenta en  $6,20 \leq L \leq 6,25$  no habiendo mucha diferencia cuando hay ausencia del flujo convectivo  $6,28 \leq L \leq 6,31$ . Lo mismo pasa cuando el flujo convectivo es modelado mediante la ley de Darcy en el intervalo  $5,67 \leq L \leq 5,71$ . La rama  $F$  es inestable que corresponde a la solución no-simétrica hallada en la fig(3.8d). La región de estabilidad ocurre en  $9,37 \leq L \leq 10$  no habiendo mucha diferencia cuando no hay flujo convectivo  $9,43 \leq L \leq 10$ .

### 3.3.7. Soluciones estacionarias estables e inestables con $R_a = -0.1$

En la sub-sección (3.3.4) se hallaron las soluciones estacionarias estables e inestables para el caso donde el fluido más denso correspondiente a los reactantes de la reacción están encima de los productos de la reacción auto-catalítica que tiene una densidad menor. Ahora estudiamos el caso opuesto, es decir cuando los productos de la reacción auto-catalítica se encuentran arriba de los reactantes de la reacción. Se considera el caso particular  $R_a = -0.1$  para analizar como son afectados los frentes de reacción en un flujo convectivo opuesto. En la fig (3.11) se muestran algunos perfiles de los frentes de reacción con  $R_a = -0.1$ . La fig(3.11a) corresponde a una solución no-simétrica obtenida para una separación entre placas ( $L = 3,5$ ). El sentido del rollo de convección es opuesto al que se obtiene modelando el flujo convectivo con la ley de Darcy. Este rollo de convección sube en la pared derecha ( $x = L$ ) y cae por la pared izquierda ( $x = 0$ ). Para poder percibir los rollos de convección se ha multiplicado por 3.5 los vectores de convección. La fig(3.11b) pertenece a una solución simétrica hallada con una separación entre placas ( $L = 7,0$ ). Los sentidos de los dos rollos de convección son opuestos a los que se obtienen modelando con la ley de Darcy. Estos rollos surgen desde las paredes ( $x = 0$ ) y ( $x = L$ ) y bajan en el centro del dominio ( $x = L/2$ ). Debido a que los rollos de convección son pequeños se ha multiplicado por cuatro los vectores de convección.



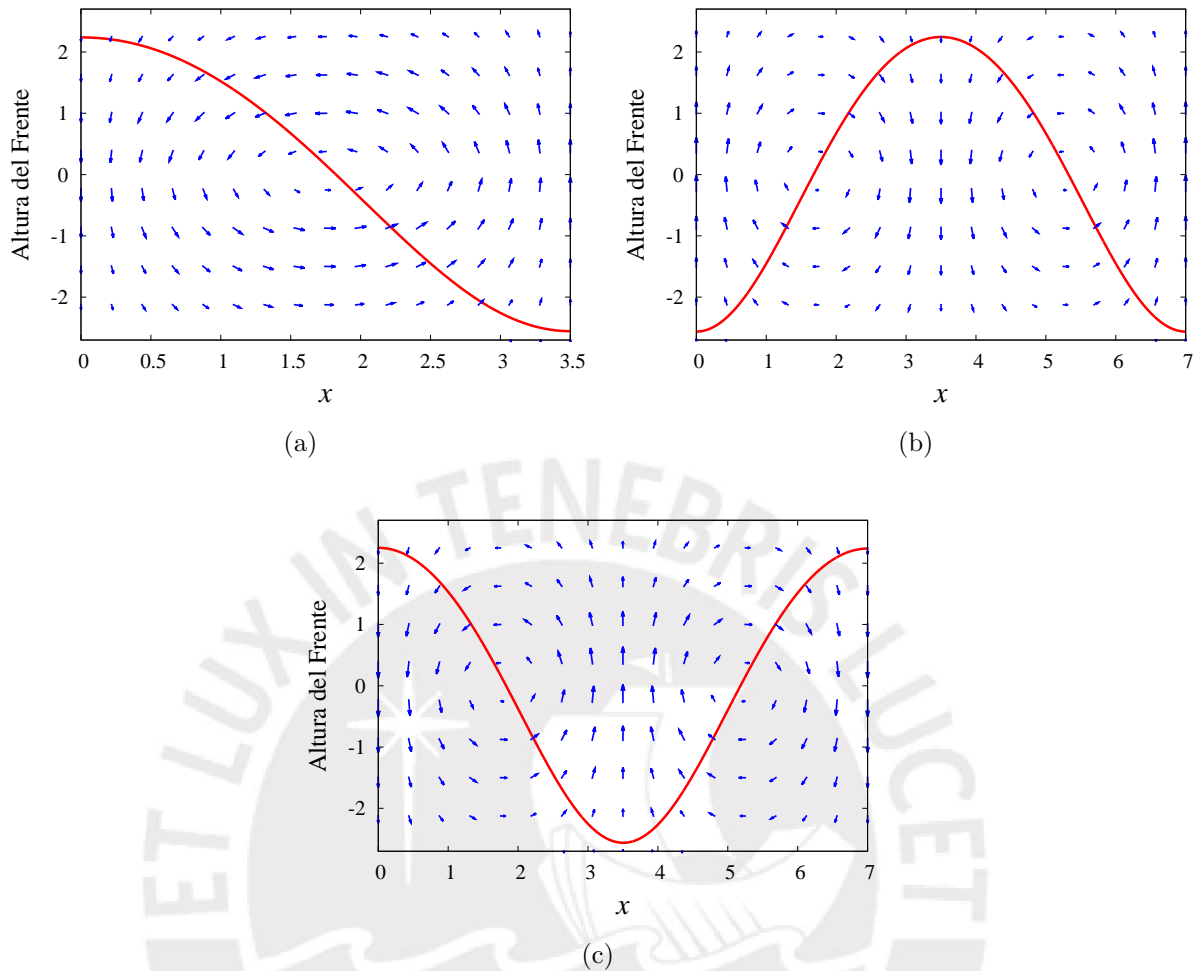


Figura 3.11: Frentes estacionarios sujetos a un flujo convectivo con  $R_a = -0.1$ . La gráfica (3.11a) muestra un perfil no-simétrico con  $L = 3.5$ , mientras las gráficas (3.11b) y (3.11c) muestran soluciones simétricas con  $L = 7.0$

La fig(3.11c) es también una solución simétrica con la misma separación entre placas que la obtenida en la fig(3.11b), pero con distinto perfil de altura. Los sentidos de los rollos de convección son opuestos pero surgen desde el mismo punto ( $x = L/2$ ) y caen en las paredes. Debido a que los vectores que muestran los rollos de convección no se pueden percibir se les multiplicó por 4.5 para poder percibir el flujo convectivo. Otra clase de perfiles de frentes de reacción son presentados en la fig(3.12). La fig(3.12a) corresponde a una solución no-simétrica obtenida con una separación entre placas ( $L = 8,0$ ). Se origina un solo rollo de convección subiendo cerca del punto mínimo de la curva y baja en la pared izquierda ( $x = 0$ ).

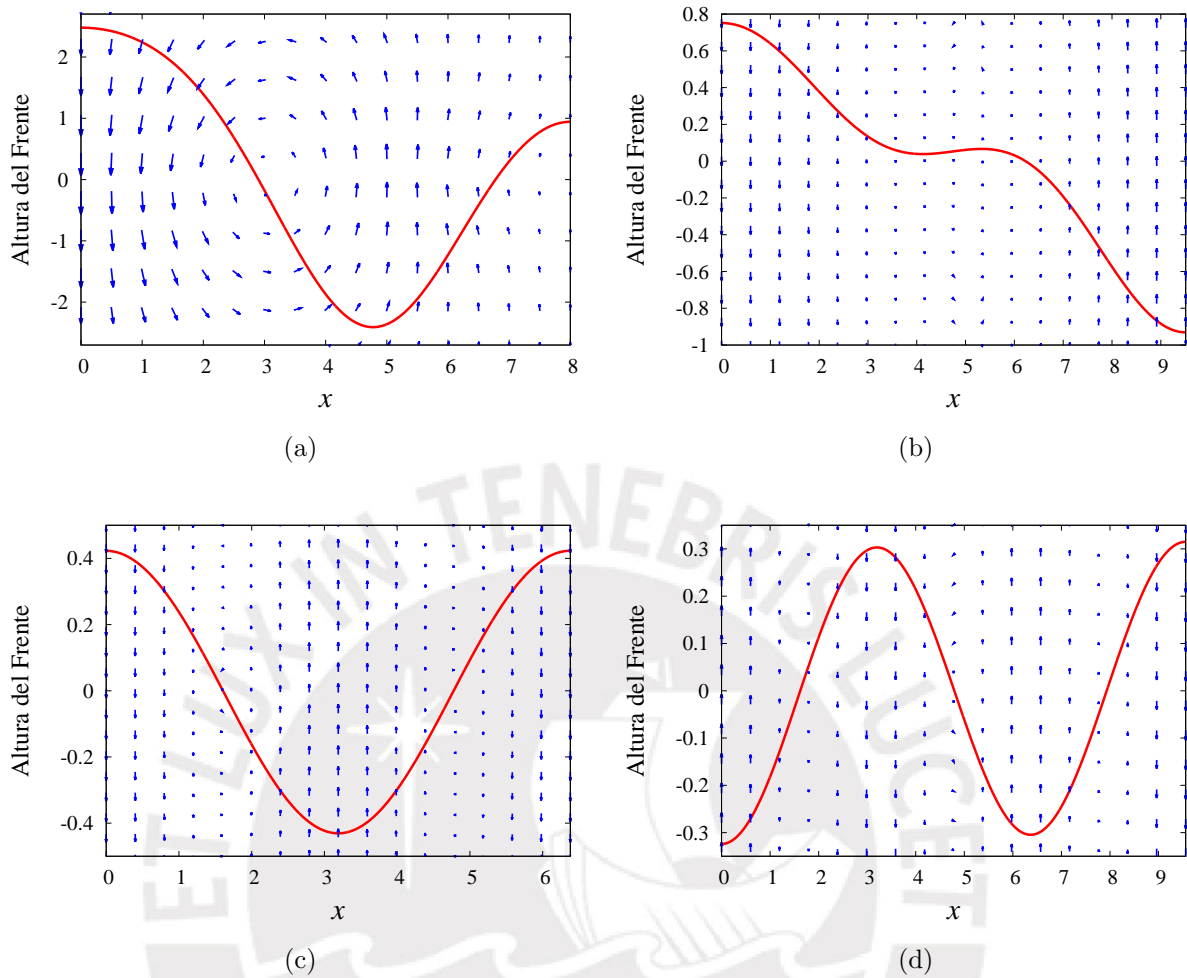


Figura 3.12: Frentes estacionarios estables e inestables con rollos convectivos apareciendo desde diversas partes del dominio.

Para poder visualizar los rollos de convección se multiplicó por tres los vectores de convección. La fig(3.12b) pertenece a una solución no-simétrica con una separación entre placas ( $L = 9,51$ ). El sentido del rollo de convección es opuesto al que se obtiene modelando el flujo convectivo con la ley de Darcy. La altura máxima del frente obtenido disminuyó de ( $z = 4$ ) (caso con convección donde el fluido más denso está sobre el menos denso) en casi cinco veces ( $z = 0,8$ ) (caso con convección donde el fluido menos denso esta arriba del más denso). La fig(3.12c) corresponde a una solución simétrica hallada con una distancia entre placas ( $L = 6,38$ ). Se originan dos rollos de convección opuestos al que se obtiene describiendo el flujo convectivo con la ley de Darcy. Los rollos de convección suben en la mitad de la separación entre placas y bajan en las paredes. La máxima altura



alcanzada por el frente ( $z = 0,4$ ) disminuyó al caso con flujo convectivo positivo (fluido más denso arriba del menos denso) ( $z = 0,7$ ). Los vectores de convección se multiplicaron por 2.5 para poder percibir el flujo convectivo. La fig(3.12d) pertenece a una solución no-simétrica obtenida con una separación entre placas ( $L = 9,56$ ). Los rollos de convección bajan en los punto máximos de la curva y suben en los mínimos. La altura máxima del frente ( $z = 0,3$ ) disminuyó comparado al caso con flujo convectivo positivo ( $z = 1,09$ ). Los vectores del flujo convectivo que muestran los rollos de convección se multiplicaron por 2.5.

### 3.3.8. Velocidades de los frentes estables e inestables con $R_a = -0.1$

En la sub-sección (3.3.8) se mostraron los perfiles de las alturas de los frentes de reacción para diferentes separación entre placas  $L$ . Ahora estudiaremos las velocidades de propagación de cada uno de los frentes. En la fig(3.13) se muestran las velocidades de cada uno de los frentes. La rama  $A$  representa la velocidad de propagación de la solución no simétrica obtenida en la fig(3.11a). La velocidad máxima de ésta rama es 1,37 un valor menor si es comparado cuando  $R_a = 0,1$  que alcanza 1,84. Cuando el flujo convectivo es modelado con la ley de Darcy la rama tiene un valor máximo un poco más de 0,35. La rama  $B$  corresponde a la velocidad de las soluciones simétricas halladas en las gráficas (3.11b) y (3.11c). Las velocidades máximas de las ramas  $A$  y  $B$  son las mismas, pero en puntos del dominio diferentes ( $L = 3,78$ ) , ( $L = 7,56$ ) como si estuviera presentando un patrón en la velocidad. La rama  $C$  representa la velocidad de propagación de la solución no-simétrica obtenida en la fig(3.12a). Éste frente también alcanza una velocidad máxima cercana a las ramas  $A$  y  $B$ . La rama  $D$  corresponde a la velocidad de propagación de la solución no-simétrica hallada en la fig(3.12b). Su dominio tiene una característica particular presentando dos velocidades en  $9,51 \leq L \leq 9,56$  un intervalo que no existe cuando el flujo convectivo es modelado con la ley de Darcy. La rama  $E$  representa la velocidad de propagación de la solución simétrica obtenida en la fig(3.12c). La rama alcanza una velocidad máxima de 0,06 un valor menor comparado al caso cuando el fluido más denso está arriba del menos denso 0,16. La rama  $F$  corresponde

a la velocidad de propagación de la solución no-simétrica hallada en la fig(3.12d). La rama obtiene una velocidad máxima de 0,76 un valor menor cuando se compara al caso del fluido más denso sobre el menos denso 1,31.

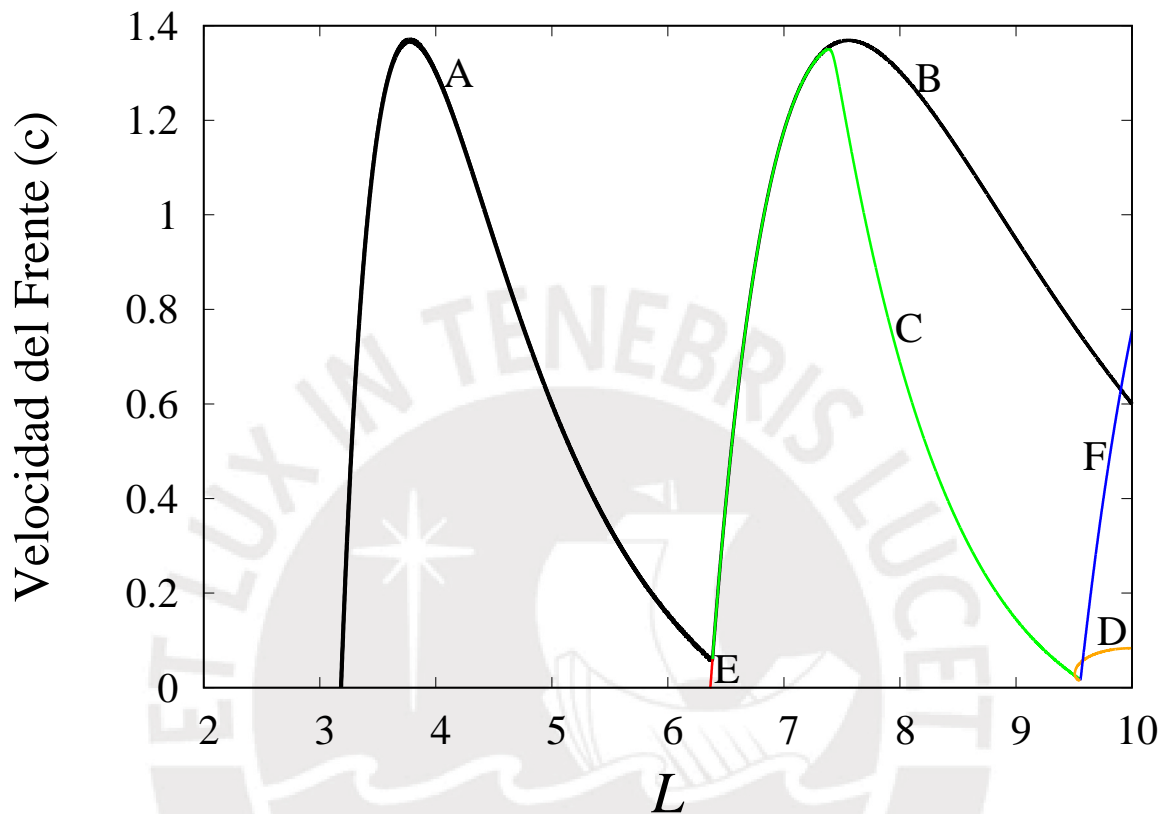


Figura 3.13: Velocidades de propagación de las diferentes soluciones estacionarias con  $R_a = -0.1$  experimentando una disminución en las velocidades para cada una de las soluciones, comparadas al caso  $R_a = 0.1$

### 3.3.9. Regiones de estabilidad de las soluciones estables e inestables con $R_a = -0.1$

En ésta sub-sección se analizará la estabilidad de los frentes estacionarios estables e inestables obtenidos en la sub-sección (3.3.7). La fig(3.14) muestra las regiones de estabilidad de los frentes. La rama  $G$  corresponde a la estabilidad del frente plano que se vuelve inestable en  $L \geq 3.18$ . La rama  $A$  es estable que corresponde a la solución no-simétrica obtenida en la fig(3.11a). La región de estabilidad se da en  $3.18 \leq L \leq 6.39$

un intervalo un poco mayor si es comparado al caso cuando el fluido más denso está encima del menos denso cuya región es  $3,10 \leq L \leq 6,23$ . La misma rama es menor si es comparada cuando el flujo convectivo es modelado por la ley de Darcy cuya región de estabilidad es  $3,74 \leq L \leq 7,51$ . La rama  $B_1$  es estable que pertenece a la solución simétrica hallada en la fig(3.11b). La región de estabilidad ocurre en  $6,39 \leq L \leq 10$  un poco menor si es contrastado con el caso para  $R_a = 0.1$  cuya región es  $6,23 \leq L \leq 10$ . La misma rama es menor cuando es comparada con el caso cuando el flujo convectivo es descrito por la ley de Darcy cuya región  $7,51 \leq L \leq 12$ . La rama  $B_2$  es inestable correspondiente a la solución simétrica obtenida en la fig(3.11c). La región de estabilidad se presenta en  $6,39 \leq L \leq 7,41$  un intervalo un poco menos en comparación al caso con el flujo convectivo positivo (fluido más denso encima del menos denso) cuya región se da en  $6,25 \leq L \leq 7,47$ . La región de estabilidad cuando el flujo convectivo es descrito por la ley de Darcy se presenta en  $7,53 \leq L \leq 8,66$  un intervalo un poco menor al caso cuando el flujo de convección es descrito por la ecuación de Navier-Stokes. La rama  $C$  es inestable que corresponde a la solución no-simétrica obtenida en la fig(3.12a). La región de estabilidad sucede en  $7,41 \leq L \leq 9,56$  un intervalo un poco menor con el caso del número  $R_a$  positivo con región  $7,47 \leq L \leq 9,56$ . La misma rama cuando es modelado con la ley de Darcy se presenta en un tramo diferente del dominio  $8,66 \leq L \leq 11,25$  menor contrastado al flujo convectivo descrito por Navier-Stokes. La rama  $D$  es inestable que pertenece a la solución no-simétrica hallada en la fig(3.12b). La rama presenta una característica especial en la cual parte de su región tiene dos auto-valores en  $9,51 \leq L \leq 9,56$  un intervalo en contraste con el caso del fluido más denso encima del menos denso  $8,86 \leq L \leq 9,37$ . La rama  $E$  es inestable que corresponde a la solución simétrica obtenida en la fig(3.12c). Su región de estabilidad se presenta en  $6,36 \leq L \leq 6,39$  no habiendo mucha diferencia al caso del fluido más denso encima del menos denso con región de estabilidad en  $6,20 \leq L \leq 6,25$ . La rama  $F$  es también inestable que pertenece al solución no-simétrica obtenida en la fig(3.12d). La región de estabilidad de esta rama sucede en  $9,56 \leq L \leq 10$  habiendo una pequeña disminución comparado al caso del flujo positivo cuyo intervalo es  $9,37 \leq L \leq 10$ .

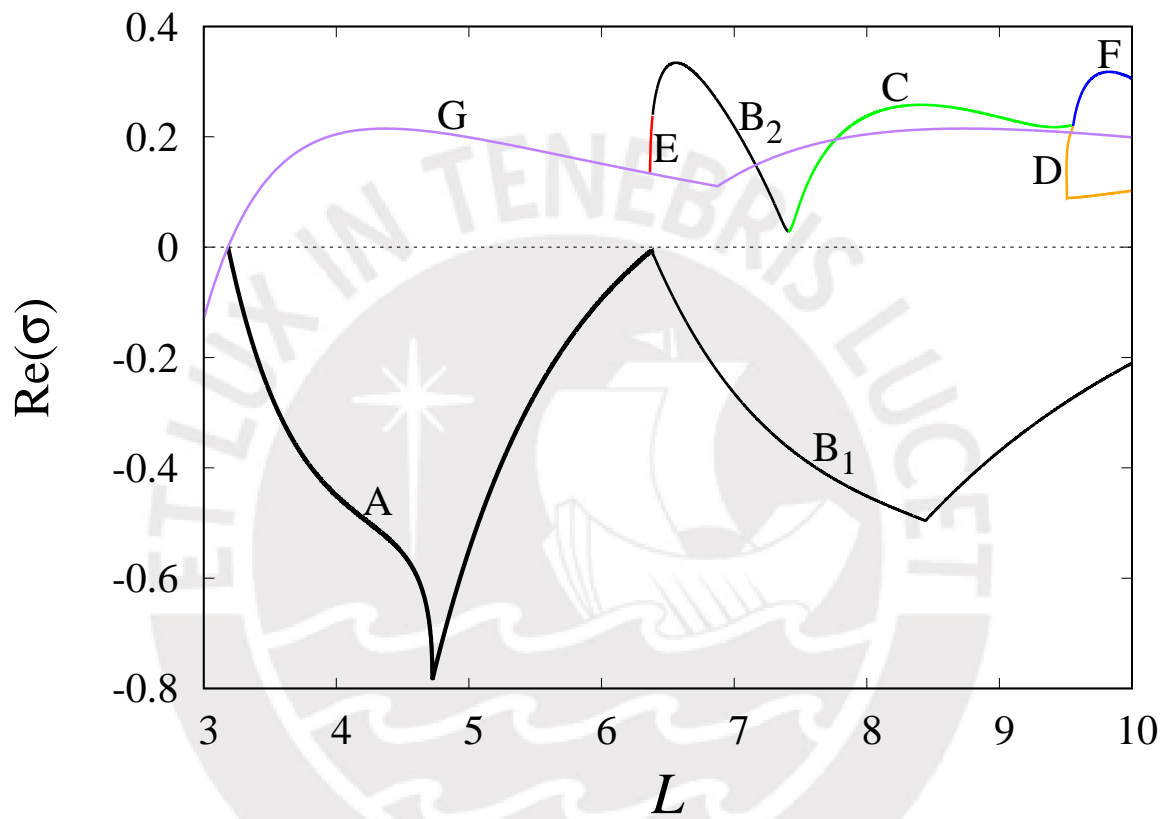


Figura 3.14: Estabilidad de los diferentes frentes estacionarios en todo el dominio  $L = 10$ . Las ramas  $A$  y  $B_1$  corresponden a soluciones estables, mientras las ramas  $B_2, C, D, E$  y  $F$  pertenecen a soluciones inestables. La rama  $G$  pertenece a la solución del frente plano mostrando en  $L \geq 3.18$  se vuelve inestable.

# Conclusiones

Comparando los frentes descritos mediante la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky bajo un flujo convectivo descrito por la ley de Darcy y por la ecuación Navier-Stokes se obtiene lo siguiente:

1. La altura de los frentes estacionarios estables (caso sin convección) se incrementan ligeramente al caso convectivo (fluido más denso está encima del menos denso). Subsecciones (3.3.1) y (3.3.4). Ahora si consideramos el otro tipo de flujo convectivo (fluido menos denso arriba del más denso) la altura de los frentes disminuye ligeramente si se contrasta con los dos casos anteriormente mencionados sub-sección(3.3.7). El flujo convectivo también puede ser modelado por la ley de Darcy obteniéndose alturas de los frentes mayores al descrito por la ecuación de Navier-Stokes.
2. Un flujo convectivo positivo (fluido más denso sobre uno menos denso) no solo modifica la altura de los frentes (caso sin convección) sino también la velocidad de propagación de cada uno de ellos obteniéndose un pequeño incremento en cada una de los frentes subsecciones (3.3.2) y (3.3.5). Si se el otro tipo de flujo convectivo (fluido menos denso arriba del más denso) la velocidad de los frentes disminuye en relación a los dos casos anteriores. Ahora si consideramos el flujo convectivo descrito por la ley de Darcy hay una disminución en las velocidades en relación al flujo descrito por la ecuación de Navier-Stokes.
3. La región de estabilidad de los frentes estacionarios estables para el caso sin flujo convectivo sufre un evolución: disminuyendo ligeramente en la rama  $A$  y aumentando en la rama  $B_1$  para el caso con flujo convectivo positivo(fluido más denso encima del menos denso). Sin embargo en los frentes estacionarios inestables sucede algo similar: la rama  $B_2$  experimenta un incremento en su región de estabilidad. La rama  $C$  una disminución en su intervalo de estabilidad y las ramas  $E$  y  $F$  incrementos en sus correspondientes regiones de estabilidad.

# Apéndice General

## AG1.Solución de la ecuación del flujo de Stokes

El flujo convectivo es descrito mediante la ecuación del flujo de Stokes

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V} \right] = \rho g \hat{e}_z - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.32)$$

Donde  $\vec{V}$  es la velocidad del fluido, P es la presión, g es la aceleración de la gravedad en la dirección vertical,  $\hat{e}_z$  es un vector unitario en la dirección vertical apuntando hacia arriba y  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido.

Asumiendo que la velocidad del fluido es independiente del tiempo  $\partial \vec{V} / \partial T = 0$  e incompresible  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , es decir se esta conservando la densidad de masa en obteniéndose lo siguiente:

$$\nabla^2 \vec{V} = \frac{1}{\mu} (\nabla P - \rho g \hat{e}_z) \quad (3.33)$$

El flujo del fluido es incompresible, es decir que la masa del fluido que esta entrando en una determinada área es igual a la masa del fluido que sale, la masa permanece inalterable en toda una superficie determinada, a esta condición se le representa mediante la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} = 0 \quad (3.34)$$

El movimiento de cada partícula del fluido podemos describirla mediante la función corriente  $\Psi$ , donde las componentes de la velocidad son expresadas en función de ella, siendo:  $V_X = -\partial \Psi / \partial Z$ ,  $V_Z = \partial \Psi / \partial X$  y reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) = 0 \quad (3.35)$$



La velocidad del flujo convectivo se propaga en un plano  $X, Z$  descrito por la ec(3.33), donde sus componentes describen la evolución en cada eje. Tomando la componente  $X$  en la ec(3.33) se obtiene:

$$\nabla^2 V_X = \frac{1}{\mu} (\nabla P - \rho g \hat{e}_z) \Big|_X \quad (3.36)$$

$$\nabla^2 V_X = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.37)$$

Se deriva la ecuación anterior con respecto a  $Z$

$$\frac{\partial}{\partial Z} (\nabla^2 V_X) = \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \quad (3.38)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial V_X}{\partial Z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial Z \partial X} \quad (3.39)$$

La ecuación anterior relaciona como el operador laplaciano aplicado en la evolución de la componente de la velocidad en  $X$  con respecto a  $Z$  es proporcional a la segunda derivada parcial de la presión con respecto a  $X$  y en  $Z$ , por otro lado se toma la otra componente de la velocidad en  $Z$  de la ec(3.33)

$$\nabla^2 V_Z = \frac{1}{\mu} (\nabla P - \rho g \hat{e}_z) \Big|_Z \quad (3.40)$$

$$\nabla^2 V_Z = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial Z} - \rho g \right) \quad (3.41)$$

Se deriva con respecto a  $X$

$$\frac{\partial}{\partial X} (\nabla^2 V_Z) = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial Z} - \rho g \right) \right) \quad (3.42)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial V_Z}{\partial X} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Z} - \frac{g}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial X} \quad (3.43)$$

La ec(3.43) relaciona el operador laplaciano aplicado en la componente de la velocidad en  $Z$  varia con la segunda derivada parcial de la presión con respecto a  $Z$  y  $X$  y los cambios de densidad con respecto a  $X$ . Las ecuaciones (3.39) y (3.43) se restan para obtener una ecuación donde el operador laplaciano actúa sobre la evolución de cada componente de la velocidad con respecto a sus ejes.

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial V_Z}{\partial X} - \frac{\partial V_X}{\partial Z} \right) = -\frac{g}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial X} \quad (3.44)$$



Las definiciones de las componentes de la velocidad en función de la función corriente se reemplazan obteniendo una ecuación donde se relaciona al operador laplaciano aplicando sobre las componentes de  $\Psi$  y los cambios de densidad con respecto a  $X$

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) = -\frac{g}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial X} \quad (3.45)$$

Las densidades de los fluidos pueden expresarse mediante cambios abruptos donde  $\Delta \rho$  puede ser negativo o positivo indicando si el fluido menos denso  $\rho_0$  se encuentra arriba del mayor denso  $\rho$  o el caso opuesto. Donde  $\Theta(Z - H)$  es la función de Heaviside.

$$\rho = \rho_0 + \Delta \rho \Theta(Z - H) \quad (3.46)$$

$$\Theta(Z - H) = \begin{cases} 1 & , \quad Z \geq H \\ 0 & , \quad Z < H \end{cases} \quad (3.47)$$

La función de Heaviside describe los cambios bruscos de densidad para una determinada altura  $Z = H$  y  $H$  es una función de  $X$  en un tiempo  $T$ . La ec(3.46) es derivada con respecto a  $X$  obteniendo una expresión para la función corriente  $\Psi$  y la altura del frente  $H$ , donde el delta de Dirac resulta de derivar la función Heaviside.

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = \frac{g}{\mu} \Delta \rho \frac{\partial H}{\partial X} \delta(Z - H) \quad (3.48)$$

El doble operador laplaciano aplicado sobre  $\Psi$  en dos dimensiones para  $X$  y  $Z$  es expresado como:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Psi) = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) \quad (3.49)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Z^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Z^4} \quad (3.50)$$

La ecuación (3.50) representa al doble operador laplaciano expresado como una ecuación diferencial parcial de  $\Psi$  en  $X$  y  $Z$  y reemplazada en la ec(3.48) se obtiene una ecuación diferencial parcial de cuarto orden que relaciona la función corriente y la altura del frente.

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Z^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Z^4} = \frac{g}{\mu} \Delta \rho \frac{\partial H}{\partial X} \delta(Z - H) \quad (3.51)$$

Utilizando nuevas escalas de longitud y tiempo para volver la ecuación diferencial adimensional en:  $X = L_X x$ ,  $H = L_Z h$ ,  $T = L_T t$ ,  $Z = L_Z z$ ,  $\Psi = (L_X L_Z \psi / L_T)$  se halla sus correspondientes transformaciones en cada una de los miembros de la ecuación anterior.

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} = \frac{L_Z}{L_X^3 L_T} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Z^2} = \frac{1}{L_X L_T L_Z} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial Z^4} = \frac{L_X}{L_Z^3 L_T} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{L_Z}{L_X} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.55)$$

$$\delta(Z - H) = \delta(L_Z z - L_Z h) = \delta[L_Z (z - h)] \quad (3.56)$$

La función delta de Dirac es reescalada en el interior de su argumento, pero es necesario conocer la siguiente propiedad:

$$\delta[a(x - y)] = \frac{1}{a} \delta(x - y) \quad (3.57)$$

Donde  $a$  es una constante y  $x, y$  son variables, aplicados en el caso de la escala longitudinal se obtiene lo siguiente:

$$\delta(Z - H) = \delta[L_Z (z - h)] = \frac{1}{L_Z} \delta(z - h) \quad (3.58)$$

Las nuevas expresiones halladas en este sistema de escalas es reemplazada en la ecuación diferencial parcial relacionando la función corriente  $\psi$  y la altura del frente  $h$ .

$$\frac{L_Z}{L_X^3 L_T} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{2}{L_X L_T L_Z} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{L_X}{L_Z^3 L_T} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \frac{g}{\mu} \Delta \rho \frac{L_Z}{L_X} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{1}{L_Z} \delta(z - h) \quad (3.59)$$

La ecuación diferencial parcial es agrupada de forma conveniente para poder definir nuevos parámetros y constantes, donde se define  $\tilde{R} = \frac{g}{\mu} \Delta \rho$  como un nuevo término en esta ecuación.

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \left( \frac{L_X}{L_Z} \right)^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \left( \frac{L_X}{L_Z} \right)^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \tilde{R} \frac{L_X}{L_Z} L_X^3 \frac{L_T}{L_X^2} \frac{\partial h}{\partial x} \delta(z-h) \quad (3.60)$$

Se define nuevos parámetros en función de las escalas longitudinales y de tiempo donde:

$\beta = L_X/L_Z$ ,  $\nu = L_X^2/L_T$  y reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \beta^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \frac{\tilde{R}\beta L_X^3}{\nu} \frac{\partial h}{\partial x} \delta(z-h) \quad (3.61)$$

Se define un nuevo parámetro llamado número de Rayleigh  $R_a = \tilde{R}L_X^3/\nu$ , resultando en una ecuación diferencial que relaciona la función corriente, la altura del frente y los nuevos parámetros definidos.

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \beta^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \beta R_a \frac{\partial h}{\partial x} \delta(z-h) \quad (3.62)$$

Integrando la ecuación anterior con respecto a  $z$ , donde se integra eligiendo una altura del frente promedio como límite de integración un poco antes y poco después, donde  $\varepsilon$  es un número muy pequeño.

$$\int_{H_0-\varepsilon}^{H_0+\varepsilon} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \beta^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) dz = \int_{H_0-\varepsilon}^{H_0+\varepsilon} \beta R_a \frac{\partial h}{\partial x} \delta(z-h) dz \quad (3.63)$$

La función corriente  $\psi$  depende de las variables  $x, z$  que integrando con respecto a  $z$  solamente es integrable el tercer término de la parte derecha de la ecuación anterior, mientras la función delta de Dirac integrada en los límites de integración de la altura del frente promedio tiene un valor de uno.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta^4 \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \Big|_{H_0-\varepsilon}^{H_0+\varepsilon} = \beta R_a \frac{\partial h}{\partial x} (1) \quad (3.64)$$

Al ser evaluada la tercera derivada en los límites de integración y haber tomado el límite para un  $\varepsilon$  muy pequeño se obtiene la condición de salto de la tercera derivada parcial de  $\psi$  en todo el eje  $z$  y considerando  $\beta = 1$  y eligiendo la altura del frente promedio en  $z = 0$  se obtiene:

$$\left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \Big|_{z=0} = -R_a H_n(nq) \quad (3.65)$$

La ecuación (3.62) es resuelta para el caso cuando la función delta de Dirac es evaluada en  $z = h$  donde tiene un valor de cero, obteniendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = 0 \quad (3.66)$$

La ecuación diferencial parcial es resuelta mediante series de Fourier para  $\psi$  expresadas como el producto de dos funciones en  $x$  y  $z$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z, t) \sin(nqx) \quad (3.67)$$

obteniendo sus derivadas parciales de orden superior para cada término de la ecuación diferencial parcial.

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} (nq)^4 \psi_n(z, t) \sin(nqx) \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} (nq)^2 \frac{d^2 \psi_n}{dz^2} \sin(nqx) \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 \psi_n}{dz^4} \sin(nqx) \quad (3.70)$$

Las derivadas parciales obtenidas las reemplazamos en la ec(3.66) y proyectamos sobre la función seno en el dominio  $L$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (nq)^4 \psi_n(z, t) \int_0^L \sin(mqx) \sin(nqx) dx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (nq)^2 \frac{d^2 \psi_n}{dz^2} \int_0^L \sin(mqx) \sin(nqx) dx + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 \psi_n}{dz^4} \int_0^L \sin(mqx) \sin(nqx) dx = 0 \end{aligned}$$

El integrando de cada uno de los términos de la ecuación conforman una base ortonormal la cual es descrita abajo en la siguiente propiedad, donde  $m$  y  $n$  son números enteros.

$$\int_0^L \sin(mqx) \sin(nqx) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (3.71)$$

La condición anterior reduce la ecuación anterior en la siguiente expresión, donde el argumento de la sumatoria tiene un valor de cero.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^4 \psi_n}{dz^4} - 2(nq)^2 \frac{d^2 \psi_n}{dz^2} + (nq)^4 \psi_n \right] = 0 \quad (3.72)$$

La ecuación obtenida es una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden de  $\psi_n$  en la variable  $z$ , donde  $n$  es un número entero y  $q = \pi/L$ .

$$\frac{d^4\psi_n}{dz^4} - 2(nq)^2 \frac{d^2\psi_n}{dz^2} + (nq)^4 \psi_n = 0 \quad (3.73)$$

La solución general de la ecuación diferencial para  $\psi$  en función de  $z$  donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales del problema.

$$\psi_n(z) = e^{-nqz} (C_1 + C_2z) + e^{nqz} (C_3 + C_4z) \quad (3.74)$$

La solución general es analizada para valores de  $z$  muy grandes donde los términos exponenciales puedan converger rápidamente.

$$\psi_n(z) = \begin{cases} e^{-nqz} (C_1 + C_2z) & \text{si } z > 0 \\ e^{nqz} (C_3 + C_4z) & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

Donde se define las funciones :  $\psi_{n1}(z) = e^{-nqz} (C_1 + C_2z)$ ,  $\psi_{n2}(z) = e^{nqz} (C_3 + C_4z)$ , con las siguientes condiciones iniciales :  $\psi_{n1}(0) = \psi_{n2}(0)$ ,  $\psi'_{n1}(0) = \psi'_{n2}(0)$ ,  $\psi''_{n1}(0) = \psi''_{n2}(0)$ ,  $\psi'''_{n1}(0) - \psi'''_{n2}(0) = -R_a H_n(nq)$  para hallar los valores de las constantes que proveen una solución particular.

$$\psi_n(z) = \begin{cases} A_n e^{-nqz} (1 + nqz) & \text{si } z > 0 \\ A_n e^{nqz} (1 - nqz) & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

donde la constante  $A_n$  esta definida

$$A_n = -\frac{R_a H_n}{4(nq)^2}, \quad n \geq 1 \quad (3.77)$$

## AG2. Obtención de la ecuación de frentes que varían en el tiempo sujeta a un flujo externo de Stokes

La ecuación (3.76) es la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky que describe la evolución del frente de propagación, donde  $H(X, T)$  es la altura del frente en un tiempo  $T$ , la velocidad del frente es  $V_0$  y los coeficientes del sistema  $\nu$  que relaciona la razón entre las difusividades, y  $\kappa$ .

$$\frac{\partial H}{\partial T} = V_0 + \nu \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{V_0}{2} \left( \frac{\partial H}{\partial X} \right)^2 - k \frac{\partial^4 H}{\partial X^4} + V_Z \Big|_H \quad (3.78)$$

Transformamos las variables de la ecuación (KS) en escalas de longitud y tiempo, haciendo el siguiente re-escalamiento:  $H = L_Z h$ ,  $T = L_T t$ ,  $X = L_X x$ , para cada uno de los términos de la ecuación.

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{L_Z}{L_X} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{L_Z}{L_T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial H}{\partial X} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{L_Z}{L_X} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{L_Z}{L_X} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = \frac{L_Z}{L_X} \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\frac{\partial X}{\partial x}} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = \frac{L_Z}{L_X^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial^4 H}{\partial X^4} = \frac{L_Z}{L_X^4} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \quad (3.84)$$

$$V_Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}} = -\frac{1}{L_X} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.85)$$

$$V_Z = -\frac{1}{L_X} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{L_X L_Z \psi}{L_T} \right) = -\frac{L_Z}{L_T} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.86)$$

$$V_Z = \frac{L_Z}{L_T} v_z \quad (3.87)$$

Sustituyendo las nuevas expresiones para cada uno de los términos de la ecuación (KS) en las nuevas escalas, y acomodándolos resulta lo siguiente.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = V_0 \frac{L_T}{L_Z} + \nu \frac{L_T}{L_X^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{V_0 L_Z L_T}{2 L_X^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - k \frac{L_T}{L_X^4} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + v_z \quad (3.88)$$

Expresando las escalas de longitud y tiempo en función de los coeficientes del sistema y la velocidad del frente plano:  $L_X = \sqrt{k/|\nu|}$ ,  $L_T = k/\nu^2$ ,  $L_Z = |\nu|/V_0$ , y reemplazando

en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V_0^2 k}{|\nu|^3} + \frac{|\nu|}{\nu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + v_z \quad (3.89)$$

La ecuación anterior es reducida con un nuevo parámetro  $C_0 = (V_0^2 k / |\nu|^3)$  y consideramos el otro parámetro  $\tilde{\nu} = \nu / |\nu| = -1$ , el cual vuelve al frente plano inestable.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C_0 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + v_z \quad (3.90)$$

La componente de la velocidad en  $z$  es reemplazada anteriormente definida a partir de la función corriente y evaluada en  $z = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C_0 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} \quad (3.91)$$

La función corriente es derivada con respecto a  $x$  y evaluada en  $z = 0$  obteniendo una ecuación diferencial parcial de la altura del frente  $h$  variando con el tiempo y sus respectivos coeficientes de Fourier  $H_n$ .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C_0 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.92)$$

La ecuación anterior es resuelta mediante series de Fourier donde se expresa la altura del frente  $h$  en función de sus coeficientes de Fourier  $H_n$  y satisfaciendo las condiciones de frontera :  $\partial h / \partial x = 0$  y  $\partial^3 h / \partial x^3 = 0$  en los extremos  $x = 0$  y  $x = L$  y obteniendo sus derivadas superiores para cada término de (3.90).

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \cos(nqx) \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dH_n}{dt} \cos(nqx) \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \sum_{n=0}^{\infty} H_n(nq) \sin(nqx) \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} H_n(nq)^2 \cos(nqx) \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(nq)^4 \cos(nqx) \quad (3.97)$$



Las expresadas halladas anteriormente son reemplazadas obteniendo una ecuación diferencial ordinaria en función de los coeficientes de Fourier y tomando  $C_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dH_n}{dt} \cos(nqx) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(nq)^2 \cos(nqx) - \sum_{n=0}^{\infty} H_n(nq)^4 \cos(nqx) + \frac{1}{2} \left[ - \sum_{n=0}^{\infty} H_n(nq) \sin(nqx) \right]^2 + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.98)$$

La ecuación anterior es proyectada sobre la función coseno en cada uno de sus términos donde  $n, m, l$  y  $p$  son números enteros, y usando la identidad trigonométrica del producto para senos.

$$\sin(lqx) \sin(pqx) = \frac{1}{2} [\cos(lqx - pqx) - \cos(lqx + pqx)] \quad (3.99)$$

$$\left[ - \sum_{n=0}^{\infty} H_n(nq) \sin(nqx) \right]^2 = \frac{q^2}{2} \sum_{l,p} l p H_l H_p [\cos(l-p)qx - \cos(l+p)qx] \quad (3.100)$$

Las ecuaciones (3.99) y (3.100) son un conjunto de ecuaciones diferenciales que muestran la evolución en el tiempo de los coeficientes de Fourier, donde  $H_0$  es la altura promedio del frente, donde  $q = \pi/L$ .

$$\frac{dH_n}{dt} = \left[ (nq)^2 - (nq)^4 + \frac{R_a}{4(nq)} \right] H_n + \frac{q^2}{4} \sum_{l,p} l p H_l H_p (\delta_{n,|l-p|} - \delta_{n,l+p}), \quad n \geq 1 \quad (3.101)$$

$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{q^2}{4} \sum_p p^2 H_p^2 \quad (3.102)$$

### AG3. Análisis de estabilidad Lineal

El frente de propagación descrito por la ecuación (KS) es sometida a pequeñas perturbaciones expresadas de la forma  $H'(x, t)$  e introducidas en ella mediante la siguiente sustitución  $h(x, t) = h(x) + H'(x, t)$  obteniendo sus derivadas superiores para cada término y reemplazándolas resulta.

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = - \frac{\partial^2 H'}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H'}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^4 H'}{\partial x^4} + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H'_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.103)$$

La evolución de la pequeña perturbación en el tiempo y la altura del frente, y tomando solo términos lineales resulta en una ecuación diferencial parcial en  $h$  y  $H'$ .

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H'}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 H'}{\partial x^4} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial H'}{\partial x} + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H'_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.104)$$

La perturbación se expresa como el producto de dos funciones en  $x$  y  $t$  denotada como  $H'(x, t) = e^{\sigma t} \tilde{H}(x)$  donde  $\sigma$  indica la estabilidad de los frentes y calculando sus derivadas correspondientes.

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = \sigma e^{\sigma t} \tilde{H}(x) \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial x^2} = e^{\sigma t} \frac{d^2 \tilde{H}}{dx^2} \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial^4 H'}{\partial x^4} = e^{\sigma t} \frac{d^4 \tilde{H}}{dx^4} \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial x} = e^{\sigma t} \frac{d\tilde{H}}{dx} \quad (3.108)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de auto-valores y auto-funciones, donde  $\sigma$  es es auto-valor y  $\tilde{H}$  es la auto-función.

$$\sigma \tilde{H}(x) = -\frac{d^2 \tilde{H}}{dx^2} - \frac{d^4 \tilde{H}}{dx^4} + \frac{dh}{dx} \frac{d\tilde{H}}{dx} + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{nq} \cos(nqx) \quad (3.109)$$

La ecuación es resuelta mediante series de Fourier en  $h$  y  $\tilde{H}$  donde  $h_n$  y  $\tilde{H}_m$  son sus correspondientes coeficientes de Fourier expresadas de la siguiente forma:

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos(nqx) \quad (3.110)$$

$$\tilde{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m \cos(mqx) \quad (3.111)$$

reemplazando en la ecuación se obtiene una expresión del auto-valor  $\sigma$  y los coeficientes de fourier  $\tilde{H}_m$  y  $\tilde{H}_n$ .

$$\begin{aligned} \sigma \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m \cos(mqx) = & \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m (mq)^2 \cos(mqx) - \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m (mq)^4 \cos(mqx) + \\ & \sum_{m,n}^{\infty} mnq^2 h_n \tilde{H}_m \sin(nqx) \sin(mqx) + \frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{nq} \cos(nqx) \end{aligned} \quad (3.112)$$

La ecuación anterior es proyectada sobre la función coseno, sin embargo es necesario antes expresar el producto de dos funciones senoidales en función de los cosenos mediante la siguiente propiedad:

$$\sin(nqx) \sin(mqx) = \frac{1}{2} [\cos(n - m)qx - \cos(n + m)qx] \quad (3.113)$$

La identidad trigonométrica de las funciones senoidales conforman una base ortogonal que satisfacen la siguiente condición:

$$\int_0^L g_n(x)g_m(x)dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (3.114)$$

Donde : $g_n(x) = \sin(nqx)$  ,  $g_m(x) = \sin(mqx)$ , siendo  $n, m$  números enteros donde  $\delta_{nm}$  es la delta de Dirac, en un intervalo de integración que varia de  $0 \leq x \leq L$  y proyectando sobre la función coseno en la ec(3.110) se obtiene.

$$\begin{aligned} \sigma \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m \int_0^L \cos(mqx) \cos(pqx)dx &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m(mq)^2 \int_0^L \cos(mqx) \cos(pqx)dx - \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m(mq)^4 \int_0^L \cos(mqx) \cos(pqx)dx + \\ &\sum_{m,n}^{\infty} mnq^2 \frac{1}{2} h_n \tilde{H}_m \int_0^L [\cos(n - m)qx - \cos(n + m)qx] \cos(pqx)dx + \\ &\frac{R_a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n}{nq} \int_0^L \cos(nqx) \cos(pqx)dx \quad (3.115) \end{aligned}$$

Las funciones cosenoidales forman una familia de funciones ortogonales al igual que el caso para las funciones senoidales que satisfacen una propiedad similar:

$$\int_0^L f_m(x)f_p(x)dx = \delta_{mp} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = p \\ 0 & \text{si } m \neq p \end{cases} \quad (3.116)$$

Donde:  $f_m(x) = \cos(mqx)$ ,  $f_p = \cos(pqx)$  y  $m, p$  son números enteros, sin embargo también definimos una propiedad semejante para el siguiente caso:

$$\int_0^L [\cos(n - m)qx - \cos(n + m)qx] \cos(pqx)dx = \delta_{|n-m|,p} - \delta_{|n+m|,p} \quad (3.117)$$

Considerando las condiciones de las funciones ortogonales para cada término de la ecuación y el caso  $m = p$ , para no anular los miembros de la expresión (3.113).

$$\sigma \tilde{H}_p = (pq)^2 \tilde{H}_p - (pq)^4 \tilde{H}_p + \sum_m^{\infty} A_{pm} \tilde{H}_m + \frac{R_a}{4} \frac{1}{pq} \tilde{H}_p \quad (3.118)$$

La expresión anterior muestra un sistema de auto-valores  $\sigma$  con sus correspondientes coeficientes  $\tilde{H}_p$  donde la matriz  $A_{pm}$  esta definida como:

$$A_{pm} = \frac{mq^2}{2} \sum_n^{\infty} nh_n (\delta_{|n-m|,p} - \delta_{n+m,p}) \quad (3.119)$$



# Bibliografía

- [1] A. KOMLÓSI, I. P. NAGY, G. BAZSA, AND J. A. POJMAN *A. Komlósi, I. P. Nagy, G. Bazsa, and J. A. Pojman*,102, 9136 (1998).
- [2] T. BANSAGI, JR., D. HORVATH, AND A. TOTH *Phys. Rev. E* 68,026303 (2003).
- [3] BANSAGI, JR., D. HORVATH, AND A. TOTH *Chem. Phys. Lett.*,384, 153 (2004).
- [4] M. FERMIGIER, L. LIMAT, J. E. WESFREID, P. BOUDINET, AND C. QUILLIET *J. Fluid Mech.* 236, 349 (1992).
- [5] Y. KURAMOTO AND T. TSUZUKI *Prog. Theor. Phys.* 55, 356.
- [6] G. I. SIVASHINSKY *Acta Astronaut.* 4,1177 (1977).
- [7] Y. NIÑO C. Y PAULO HERRERA *Ecuaciones diferenciales ordinarias 2*, Dpto de ingeniería civil, Universidad de Chile, 2011.
- [8] SERGIO P. *Métodos Numéricos*, Dpto de matemáticas, Facultad de ciencias, Universidad de Santiago de Chile, 2007.
- [9] L. J. BERBESI *Solución numérica de problemas de valor de frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias*, Universidad de los Andes-Venezuela, 2010.
- [10] S.B.MARGOLIS AND G. I. SIVASHINSKY *Flame Propagation in Vertical Channel:Bifurcation to Bimodal Cellular Flames*, SIAM J. Appl. Math.,vol.44,pp.344-368, 1984.
- [11] J. PEREZ *Reacciones químicas*, 2009.

- [12] O. LEVENSPIEL *Ingeniería de las reacciones químicas*, Dpto de ingeniería química de la universidad del estado de Oregon, 1987.
- [13] R. L. FONSECA *Ecuaciones cinéticas*, Departamento de ingeniería química de la Universidad del país Vasco.
- [14] S. A. ZAMBRANO, *Prácticas de reacciones oscilantes a partir de una caja didáctica para el desarrollo del concepto de auto-organización*, Universidad Nacional de Colombia, 2014.
- [15] G. ABRAMSON, *La matemática de los sistemas biológicos*, Centro Atómico de Bariloche, instituto Balseiro y CONICET, 2014.
- [16] G. F. GARCÍA *Estructuras espacio-temporales en sistemas de reacción-difusión-advención*, Universidad de Santiago de Compostela. Facultad de Física, 2008.
- [17] INTERNET-YOUTUBE <https://www.youtube.com/watch?v=DLJcUWzvjss>
- [18] R. AL JAMAL AND K. MORRIS *Output Feedback control of the Kuramoto-Sivashinsky Equation*, December 15-18, 2015. Osaka, Japan
- [19] I. G. KEVREKIDIS, B. NICOLAENKO, AND J. C. SCOVEL *Back in the saddle again: a computer assisted study of the Kuramoto-Sivashinsky equation*, SIAM J. Appl. math. Vol. 50, No. 3, pp. 760-790, June 1990
- [20] R. CONTE *Exact solutions of nonlinear partial differential equations by singularity analysis*, in: Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 2003, pp. 1-83.
- [21] K. SNEPPEN, J. KRUG, M. H. JENSEN, C. JAYAPRAKASH AND T. BOHR *Dynamic scaling and crossover analysis for the Kuramoto-Sivashinsky equation*, physical review a, vol 46, No. 12, 1992.
- [22] A. MALEVANETS, A. CARETA, AND R. KAPRAL *Biscala chaos in propagating fronts*, Phys. Rev. E, vol. 52, pp. 4724-4735, 1995.
- [23] D. HORVÁTH AND K. SHOWALTER *Instabilities in propagating reaction-difusion fronts of the iodate-arsenous acid reaction*, J. chem. Phys. vol. 102, pp. 2471-2478, 1995.

- [24] P. CVITANOVIC, R. DAVIDCHACK, AND E. SIMINOS *On the state space geometry of the Kuramoto-Sivashinsky flow in a periodic domain*, SIAM J. Appl.Dyn. Syst.,vol. 9,pp.1-33, 2010.
- [25] P. V. PROAÑO *propagating reaction fronts in moving fluids*, Pontificia universidad católica del Perú, 2015.

