PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

BEJARANO VILCHEZ, VIOLETA LUPITA

Dirigida por:

NEIRA FERNÁNDEZ, VERÓNICA

Marzo, 2018

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los estudiantes de Ingeniería cuando movilizan la noción del límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico. Esta investigación se realiza con estudiantes del primer ciclo de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima, con edades que fluctúan entre los 17 y 21 años.

La idea de este estudio surge a partir de las dificultades encontradas en los estudiantes del primer ciclo de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima, para trabajar límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico, puesto que en la enseñanza de este objeto matemático prevalece el uso del registro algebraico.

Utilizamos como referente teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, del cual nos enfocamos en el registro gráfico y las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria.

Nuestra investigación es de corte cualitativa y, en cuanto a la metodología, usamos aspectos de un estudio de caso. En la parte experimental, presentamos una actividad que constó de cuatro preguntas, dos usando Geogebra y las otras dos a lápiz y papel, con el fin de identificar y describir la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que los estudiantes de Ingeniería desarrollan cuando movilizan la noción del límite en un punto de una función real de variable real.

Finalmente, en esta investigación, comprobamos que los estudiantes del primer ciclo de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima articularon estas aprehensiones al desarrollar preguntas relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico.

Palabras clave: Límite en un punto de una función real de variable real, aprehensiones, Geogebra, registro gráfico.

ABSTRACT

This research aims to analyze the articulation of the perceptive, discursive and operative apprehensions to develop Engineering students when they mobilize the notion of the boundary in a point of a real function of real variable, in the graphic record. This research is conducted with students in the first cycle of Engineering for Safety and Health at Work of a public University in Lima, with ages ranging between 17 and 21 years.

The idea of this study appears from the difficulties encountered in the students of first cycle of Engineering for Safety and Health at Work of a public University in Lima, to work boundary in a point of a real variable of real function, in the graphic register, since in the teaching of the mathematical object prevails the use of algebraic registry.

We use as reference theoretical the Theory of Representation Semiotics of Duval, which focus on the graphic records and the perceptive, discursive and operative apprehensions.

Our research is of qualitative court and, in terms of methodology, we use aspects of a case study. In the experimental part, we present an activity that consisted of four questions, two using Geogebra and others two to pencil and paper, in order to identify and to describe the joint of the perceptive, discursive and operative apprehensions that the Engineering students develop when they mobilize the notion of the boundary in a point of a real function of real variable.

Finally, in this research, we verify that the students of the first cycle of Engineering for Safety and Health in the Work of a public university of Lima articulated these apprehensions on having developed questions related to the limit in a point of a real function of real variable in the graphic register.

Keywords: Boundary in a point of a real function of real variable, apprehensions, Geogebra, graphic register.

A la memoria de mi querido padre,
Rigoberto, que desde el cielo me guía y
me motiva para seguir adelante.

A mi querida madre, Tomasa, que me apoya
constantemente y es ejemplo de perseverancia y
superación.

A mis hermanos, por sus consejos y orientaciones
que me sirvieron para cumplir mis objetivos.

AGRADECIMIENTOS

A mi estimada asesora, la Mg. Verónica Neira Fernández, por su paciencia, apoyo constante y sugerencias durante la elaboración de esta investigación.

A la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar por su inmenso apoyo, valiosas sugerencias, orientaciones, consejos y motivación para el desarrollo del trabajo.

Al Mg. Mihály André Martínez Miraval, por sus valiosas observaciones y contribuciones en el desarrollo de esta investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por las experiencias y conocimientos que me transmitieron durante las clases.

A los estudiantes participantes en esta investigación por su colaboración e interés en participar.

A Juan José Rodríguez por su todo su apoyo incondicional, paciencia y afecto.

A mis compañeros de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú por todas las experiencias compartidas durante las clases.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación, de corte cualitativa, se realiza en el marco de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, cuyo objetivo es analizar de qué manera los estudiantes los estudiantes de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo articulan las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria, al movilizar la noción del límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico.

Nuestro trabajo consta de cuatro capítulos:

En el capítulo I, analizamos investigaciones relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real, que utilizan como referente el marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, así como investigaciones que usan Geogebra para el estudio de este objeto matemático, describimos aspectos del software Geogebra, presentamos la justificación, formulamos la pregunta y objetivos de nuestra investigación.

En el capítulo II, presentamos aspectos del marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1994), en relación al registro gráfico y adaptamos las aprehensiones del registro figural a este registro. Además se presenta los aspectos metodológicos que establecerán la estructura de la investigación.

En el capítulo III, se presenta brevemente aspectos históricos de la evolución de la noción del límite de una función y la forma didáctica de cómo se aborda el límite de una función en el texto universitario Leithold (1998) que usamos como referencia.

En el capítulo IV, mostramos la experimentación que comprende la descripción del escenario y sujetos de la investigación; descripción y objetivos de las preguntas de la actividad; análisis y resultados de la experimentación.

Finalmente, presentamos las consideraciones finales del trabajo, conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En esta sección presentamos los antecedentes que abordan el objeto matemático límite en un punto de una función real de variable real, además de otras investigaciones donde se usa Geogebra en el estudio de este objeto matemático, presentamos la justificación de la investigación y posteriormente planteamos la pregunta y los objetivos del trabajo.

1.1 Antecedentes

En esta sección se presentan investigaciones relacionadas con el límite en un punto de una función real de variable real, así como otras en el cual se hace uso de Geogebra como facilitador en el aprendizaje de este objeto matemático.

Plaza, Ruiz- Hidalgo y Rico (2015) realizan un estudio descriptivo e interpretativo en el cual participan 36 estudiantes de la provincia de Granada del primer ciclo de bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, que están matriculados en el curso de Matemáticas de la modalidad de Ciencia y Tecnología. En este tratado, se analizan las concepciones que tienen los estudiantes de bachillerato con respecto al concepto del límite finito de una función en un punto, a partir de su gráfica.

El objetivo de esta investigación es verificar la capacidad de los estudiantes de aplicar su definición de límite para justificar la existencia o no existencia del límite de una función representada gráficamente. Para ello, los autores describen las concepciones de los estudiantes, que se ven evidenciadas cuando aplican su definición personal de límite, en la interpretación de la gráfica de una función; posteriormente, valoran la coherencia entre la definición personal que posee el estudiante sobre el límite finito de una función y los argumentos que usa para justificar la existencia o no del límite en un punto.

Para recoger la información, los investigadores presentan 10 tareas distribuidas en dos cuestionarios A y B (Cinco tareas en cada cuestionario). En el cuestionario A, es en el cual las tareas están diseñadas para discutir las gráficas y cada una de ellas tiene tres funciones representadas gráficamente.

El análisis de los datos lo realizan de forma cualitativa y cuantitativa en tres fases: Primero realizan una caracterización minuciosa de los argumentos formulados por los estudiantes acerca de la existencia o no del límite de las funciones, sin tener en cuenta su definición personal, como por ejemplo, análisis y comparación de límites laterales, por continuidad visual, confusión del papel de las variables, entre otros; luego analizan las ternas de argumentos.

Plaza, Ruiz- Hidalgo y Rico (2015), realizan las tres fases, con el fin de establecer perfiles, como por ejemplo, perfil “límites laterales” el cual agrupan a todos los estudiantes que, en la mayoría de sus argumentos, hacen referencia al análisis de los límites laterales para decidir sobre la existencia o no del límite de una función; finalmente los autores analizan el grado de coherencia entre la definición y el argumento.

En las conclusiones que dan los investigadores, presentan un balance según las interpretaciones gráficas, tipos de perfiles y niveles de coherencia, como por ejemplo el perfil “continuidad visual”, en el cual afirman que puede ser producto de la mala interpretación de la relación entre los conceptos de límite finito de una función en un punto y su continuidad dada gráficamente, pues los estudiantes aludieron que el límite siempre es posible, que no existen huecos y que siempre hay continuidad.

Por su parte, Tomás (2014), tiene como objetivo identificar las características de los niveles de desarrollo del esquema límite de una función (Intra, Inter y Trans) y analizar cómo las diferentes formas de representación semiótica, de este objeto matemático (numérico, gráfico y algebraico-numérico), influyen en la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación.

Esta investigación se realiza bajo el marco de la Teoría APOS (Acción, proceso, objeto y esquema) y el objetivo planteado por el autor es dirigido a profundizar en la comprensión que los estudiantes tienen del concepto del límite de una función.

El autor realiza este trabajo en España con 129 estudiantes de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, donde plantea como hipótesis que la construcción del concepto de límite de una función se da de forma gradual, tal como lo muestra la descomposición genética planteada por él, donde se hace explícito cada una de las coordinaciones de los procesos.

La recolección de datos se da mediante cuestionarios y entrevistas; todo ello se lleva a cabo en tres etapas: En la primera analiza cuáles son los elementos matemáticos necesarios para la compresión de la noción de límite de una función. En base a ello, elabora un cuestionario que fue resuelto por 63 estudiantes. En la segunda etapa realiza la revisión del cuestionario aplicado en la primera etapa, así como la revisión de textos, donde elabora y aplica una lista de 10 tareas con las preguntas del primer cuestionario y otras adicionales que permitieran comprender la construcción del significado de límite. Finalmente, en la tercera etapa, selecciona a 21 estudiantes para entrevistarlos y así centrarse en los aspectos que ayuden a conocer qué comprenden estos estudiantes con respecto al concepto del límite de una función en un punto.

Después de realizar un análisis de los resultados obtenidos, el autor concluye que resulta importante la coordinación en las aproximaciones en el dominio y el rango en los tres sistemas de representación semiótica (algebraico, gráfico y numérico), lo que marcó esta relevancia es en función a la coincidencia o no coincidencia de los límites laterales.

Tomás (2014), asevera que de los 129 estudiantes, 23 de ellos llego a un nivel Trans, siendo este el tercer y último nivel de desarrollo del esquema de un objeto matemático, después del nivel Intra e Inter. En el esquema del límite de una función, el autor menciona que un estudiante habrá llegado a un nivel Trans si es capaz de coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y rango en los tres registros de representación y cuando estas aproximaciones no coinciden, por lo menos, llegan a coordinar dos registros de representación.

Finalmente, el investigador manifiesta que usar diferentes sistemas de representación en la enseñanza de la noción del límite puede ayudar a los estudiantes a consolidar este concepto.

Otro trabajo en torno al límite de funciones en diferentes registros de representación es la de Londoño, Narro y Vera (2014), quienes indagan sobre la didáctica del límite y la continuidad de funciones.

Este trabajo se desarrolla con 26 estudiantes de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y la carrera de Física de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila en México, cuyas edades fluctúan entre los 18 y 22 años, que ya han aprobado, por lo menos, un curso de Cálculo Diferencial.

Las autoras se plantean las siguientes interrogantes: ¿Logran adquirir los estudiantes de Matemáticas Aplicadas y de Ingeniería Física el concepto de límite de una función a partir de sus representaciones gráficas y algebraicas? ¿Cuál es la idea que persiste en el estudiante sobre límite de una función?

En su investigación las investigadoras usan aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, donde afirman que el límite de una función es un objeto matemático intangible y por ello es necesario usar diferentes herramientas para poder comprenderlo.

Del mismo modo, hacen referencia que, en muchas ocasiones, prevale la preferencia por parte de los docentes de usar únicamente el registro algebraico para enseñar este objeto matemático, sin ser este registro el más comprensible por parte de los estudiantes y por ende no se logra el objetivo que es la comprensión del concepto del límite de una función.

En este trabajo, para recoger información, las investigadoras aplican tres encuestas distribuidas en cuatro categorías, la primera corresponde a preguntas donde indagan la definición que el estudiante posee del límite de una función con palabras; la segunda se enfoca en analizar lo que el estudiante entiende por límite de una función; la tercera incluye problemas de límite en el registro algebraico y la última agrega preguntas en el registro de representación gráfica. Al final del cuestionario, también incluyen un problema de aplicación a la geometría usando límite de funciones.

Londoño, Narro y Vera (2014), afirman que los estudiantes participantes de esta investigación tienen un mejor desempeño al usar el registro algebraico. Según las autoras, esto conlleva a que el concepto de límite de funciones no sea identificado en otros registros de representación.

Se destaca de los resultados de esta investigación que, en cuanto a la identificación de límites en el registro gráfico, 11 de 26 estudiantes responden correctamente cuando la gráfica corresponde a una función continua y, de los estudiantes que dieron respuestas erradas, la mayoría no llega a identificar el límite de una función en este registro. En cambio, 18 de 26 estudiantes responden acertadamente cuando la gráfica se trata de una función discontinua.

Finalmente, las investigadoras concluyen que los estudiantes no logran la comprensión del concepto de límite con solo usar el registro algebraico y que muchos de ellos no usan la conversión entre registros de representación semiótica para obtener el límite de una función. De igual forma, afirman que los estudiantes participantes de esta investigación identifican los límites de las funciones discontinuas con mayor facilidad que de las de funciones continuas.

Por otro lado, la investigación de La Plata (2014), que se realiza con estudiantes de un primer curso de Cálculo de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), tiene como objetivo analizar los errores que tienen los estudiantes al comprender la definición de límite finito de una función real de variable real.

Para ello, la autora diseña y aplica un test exploratorio a 64 estudiantes que ya han estudiado el objeto matemático. Estas respuestas son analizadas y tipificadas poniendo énfasis en los errores cometidos por los estudiantes. Posteriormente la autora establece cinco interrelaciones, siendo una de estas un proceso que consiste en contrastar las respuestas de los estudiantes en preguntas donde se plantea un mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica.

En la interrelación 1, la autora plantea preguntas para analizar el comportamiento de una función mediante su representación gráfica, donde espera que los estudiantes analicen los límites laterales; en la 2 busca evidenciar si la respuesta de los estudiantes, con respecto a un mismo concepto, es coherente, pasando de una situación dada a una situación creada por los estudiantes; en la 3 busca evidenciar si es coherente la respuesta del estudiante con respecto a la definición de límite en el registro gráfico y en el registro verbal; en la 4 busca evidenciar si es consistente el gráfico de una función que realiza el estudiante con las respuestas sobre límites laterales y el límite de una función en un punto; la última interrelación busca ver si los estudiantes no solo conocen la definición del límite de una función, sino que esa definición permite demostrar que el límite finito de una función real de variable real resulta un valor.

Entre sus conclusiones, La Plata (2014) afirma que los resultados obtenidos de la interrelación 2 evidencian que los estudiantes participantes de la investigación muestran dificultades para construir el gráfico de una función con ciertas condiciones, a pesar de haber analizado gráficos de funciones con condiciones similares.

También sostiene que 57 de 64 estudiantes determinan con éxito el límite finito de una función usando el registro algebraico, pero cometen errores cuando usan el registro gráfico o simbólico, lo que pone en evidencia lo limitado del manejo del concepto de límite de una función en otros registros diferentes del algebraico.

Otras investigaciones hacen uso de Geogebra en el desarrollo de sus actividades, tal es el caso de Caglayan (2015) que su trabajo tiene como objetivo ofrecer un enfoque basado en pruebas visuales para ayudar a comprender el concepto de límite de una función con un entorno dinámico, donde se explora varios tipos de límite de funciones, cómo se conecta y se interpreta lo observado con lo escrito y los formalismos del límite.

Esta investigación se da con ocho estudiantes del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Florida en los EE.UU y las actividades se dividen en tres categorías: tipos de límite, concepciones de límite y tecnología en el cálculo.

Para ello, el autor usa Geogebra como apoyo en sus actividades, afirmando que este programa posee muchos beneficios como tener una mejor visión e intuición, descubrir nuevos patrones y relaciones, usar representaciones gráficas para mostrar algunos principios matemáticos, comprobar y afirmar conjeturas, explorar resultados para ver si merecen una prueba formal, sugerir enfoques para una prueba formal, ayuda a reemplazar derivaciones largas que se hacen a mano y, por último, confirmar resultados obtenidos analíticamente.

Para realizar la actividad, el autor divide el trabajo en categorías como la de límite y continuidad, límites por la derecha e izquierda, límites al infinito y con conexiones trigonométricas, visualización del $\varepsilon - \delta$. En cada una de ellas, los estudiantes exploran diferentes problemas relacionados con la categoría.

Para el investigador, una prueba visual tiene como finalidad transmitir una idea matemática de una forma totalmente visual. Para ello, en su investigación, ofrece una forma de explorar visualmente para poder afirmar teoremas sobre límites, usar la observación como una forma de intuición para el estudiante, ya que una prueba visual no sería considerada formal.

Caglayan (2015), también ofrece un camino para la comprensión y reconstrucción del concepto de límite, aseverando que Geogebra es una herramienta que facilita que los estudiantes entiendan, exploren y obtengan experiencias en la observación de los límites y sus propiedades.

Asimismo, en Colombia, se tiene el estudio, de corte cualitativo, realizado por De Aguas (2015) con 32 estudiantes del grado 11 de educación media cuyas edades están entre 14 y 17 años, que en nuestro país sería el equivalente a un nexo entre la educación escolar y la educación universitaria. Muestra una propuesta didáctica con actividades que involucran el uso de Geogebra, con el objetivo de lograr un aprendizaje significativo y duradero en los estudiantes, con respecto al límite de una función en un punto.

El autor desarrolla la investigación en tres etapas, primero recoge información sobre los estudiantes, luego aplica una prueba diagnóstico con test de 25 preguntas y, finalmente, diseña y aplica actividades que buscan el aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. Este último se aplica en tres fases: la fase exploratoria, que busca que el estudiante se familiarice con el Geogebra; la fase de desarrollo en la que el estudiante hace uso del Geogebra para intuir sobre el límite de una función en un punto y por último, la fase de afianzamiento, donde el autor evalúa el aprendizaje adquirido por los estudiantes.

Este estudio es del tipo descriptivo y se enfoca en la observación de las acciones realizadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

De ello, el investigador, concluye que es necesario que los estudiantes tengan claros conceptos como función, dominio, rango, así como interpretación de gráficas y el uso de Geogebra contribuye en hacer más accesible estos conceptos, además de generar el cooperativo en el aula.

Finalmente, en la investigación de Richit, Benites, Esther y Miskulin (2012) se hace un estudio amplio sobre todas las contribuciones que Geogebra puede tener para la comprensión de conceptos matemáticos, en la que presentan una experiencia con estudiantes del primer curso de Geologia, donde desarrollan actividades usando Geogebra para estudiar conceptos de Cálculo Diferencial e Integral.

El objetivo de esta propuesta es comprender de qué manera la construcción de los conocimientos de los estudiantes puede ser reestructurado en el contexto de las tecnologías. Del mismo modo, mostrar cuáles son los alcances y potencialidades del Geogebra como alternativa teórico-metodológico en la introducción y observación de conceptos matemáticos.

Richit, Benites, Esther y Miskulin (2012), plantean actividades del tipo exploratorio-investigativas, donde consideran problemas en los cuales los estudiantes deben investigar las soluciones, buscando sus propias estrategias, experimentando conjeturas e hipótesis respecto a las componentes del problema y qué discuten con sus compañeros, ya que las mismas se realizan en duplas.

Estas actividades contienen temas como funciones, límites, derivadas e integrales y se desarrolla en el laboratorio didáctico de informática del Departamento de Matemáticas.

La primera actividad se enfoca en el estudio de una función lineal, para analizar su comportamiento cuando se varían los parámetros. Esta tiene como finalidad promover la familiarización de los estudiantes con el Geogebra, pues en ella utilizan las herramientas básicas de este programa.

La segunda trata conceptos relacionados a la continuidad de funciones, en el cual se encuentra incluido la idea del límite de una función. Esta actividad, según los autores, resultó ser interesante, puesto que los estudiantes pudieron verificar la continuidad de la función usando Geogebra, sin tener que realizarlo repetidas veces en el cuaderno cuando se cambiaba el parámetro; asimismo los estudiantes verificaron la continuidad de otras funciones estudiadas anteriormente en clase, como las funciones racionales, exponenciales y logarítmicas.

En la tercera actividad los investigadores examinan el concepto de derivada, a partir de rectas tangentes, en el cuál el objetivo fue verificar geométricamente el concepto de derivada. Mientras que la cuarta actividad explora el concepto de Integral, en el cual plantean problemas que permitan observar la suma de Riemann.

Finalmente, los autores afirman que estas actividades propiciaron que los estudiantes trabajen los conceptos matemáticos por medio de las actividades planteadas, buscando solucionarlas, probando hipótesis y conjeturas que finalmente verificaban con Geogebra.

Estas actividades, según los autores, generaron una motivación en los estudiantes, puesto que hubo mucha participación en ellas.

También observaron que los estudiantes usaron Geogebra para verificar ejercicios sobre límite de funciones trabajados en su clase. Además, los investigadores manifiestan que la realización de estas actividades redujo el número de repeticiones para verificar un resultado, puesto que en lápiz y papel se necesitarían varios dibujos.

Luego de revisar las investigaciones, afirmamos que existe una preocupación, por parte de los investigadores, en estudiar la concepción que tienen los estudiantes, con respecto a la noción del límite de una función en los diferentes registros de representación semiótica. Asímismo, muestra la importancia del uso de Geogebra como facilitador en la enseñanza de límite de funciones.

Nuestra investigación, por lo tanto, usa como referencia estos trabajos, además tendrá un agregado importante que es la de analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria para movilizar la noción del límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico, puesto que estas aprehensiones están definidas por Duval (1994) en el registro figural.

1.2 Representación dinámica del límite de una función usando Geogebra.

Geogebra es un programa, de libre acceso, dirigido a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Además, es muy dinámica para el estudio del Álgebra, Geometría y Cálculo. En nuestra investigación, trabajamos con la versión del Geogebra 5.0.

Según Richit, Benites, Escher y Miskulin (2012), el programa Geogebra es una alternativa de carácter teórico-metodológico que permite la visualización e introducción de conceptos matemáticos.

En la Figura 1, se puede observar la *barra de entrada* donde se puede ingresar desde puntos hasta funciones y automáticamente lo que se haya ingresado aparecerá en la *vista algebraica* y todos los otros elementos que se ingresen en la demás vistas, aparecerán en la *vista algebraica.*

En la *vista gráfica 2D* se consigue la representación gráfica de elementos como puntos, funciones, rectas, etc. En ella, además, se encuentran herramientas como texto, deslizador, entre otros y en la *vista gráfica 3D* se logra representaciones de figuras en tres dimensiones.

Luego se tiene la *vista cálculo simbólico CAS.* Aquí se pueden realizar algunos procedimientos matemáticos como factorización, cálculo de raíces en una ecuación, etc.

La hoja de cálculo que consta de celdas donde se puede ingresar números, pares ordenados, funciones, etc sirve, por ejemplo, para aproximar valores o tabular funciones.

Geogebra tiene cuatro *barras de herramientas*, donde cada tipo de vista tiene su propia *barra de herramienta* con sus comandos.

Por último, se tiene la *ayuda de comandos.* En ella se puede consultar sobre el uso de algún comando, destaca también el listado total de todos los comandos, que están agrupados en 20 subcategorías. Podemos encontrar, por ejemplo, comandos de Álgebra, comandos de Estadística, comandos de Cónicas, etc.

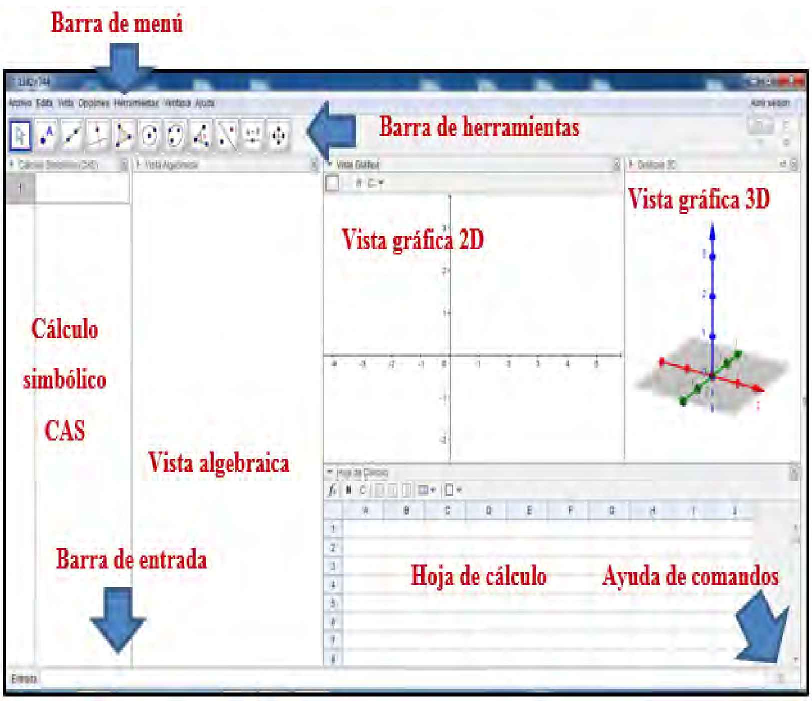


Figura 1. Ventanas de Geogebra Versión 5.0.

En nuestra investigación, haremos uso de la *vista gráfica 2D* para poder analizar el límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico. Estas funciones son ingresadas en la barra de entrada y pueden ser observadas automáticamente en la vista algebraica, así como su representación gráfica en la *vista gráfica 2D*. En la Figura 2, se puede apreciar la vista algebraica y la vista gráfica de la función $f(x) = x^3 + 2$.

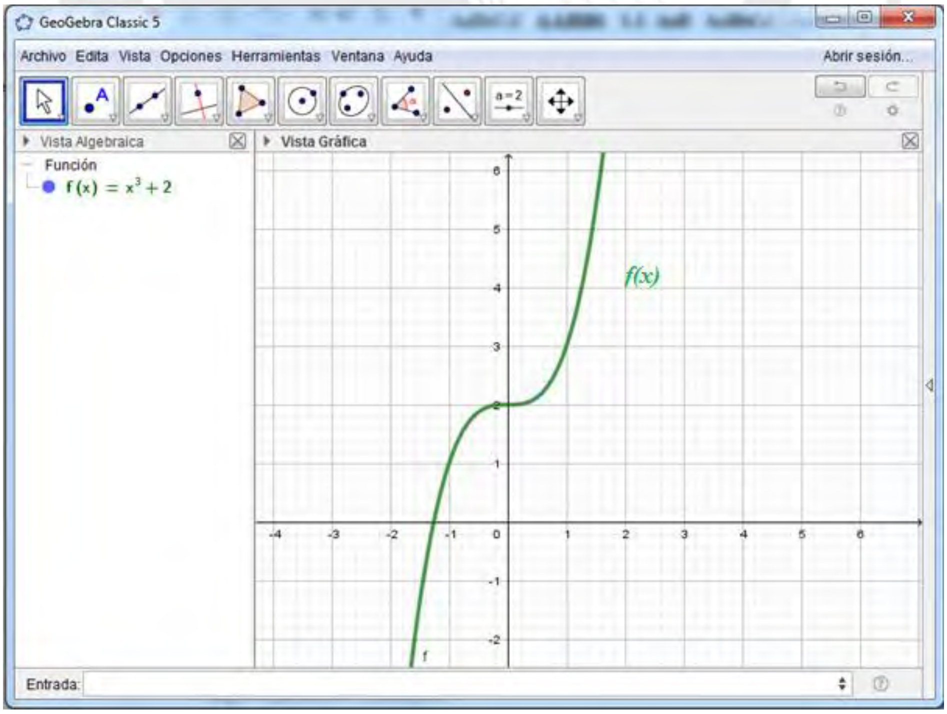
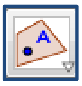
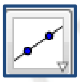


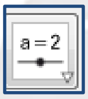
Figura 2. Vista algebraica y vista gráfica de una función en Geogebra

A continuación, presentamos algunas herramientas de la *vista gráfica 2D*. El uso de estas herramientas nos permitirá identificar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva cuando los estudiantes participantes de la investigación movilicen la noción del límite en un punto de una función real de variable real.

La herramienta  *Elige y mueve*  sirve para enmarcar o seleccionar objetos para luego desplazarlos o eliminarlos.

- Para poder crear un *punto,* se realiza un click sobre el objeto. Si se desea crear movilidad a ese punto, para que este se puede desplazar sobre el objeto, se usa la herramienta *punto en un objeto.* 

- Una *recta*  se grafica seleccionando dos puntos en la *vista grafica 2D.*

- *El deslizador*  es una representación gráfica de un número libre o un ángulo libre. En la ventana emergente de esta herramienta, se puede especificar un nombre, un valor mínimo y valor máximo que puede tomar. Además se indica el valor del incremento.

- La herramienta *texto*  permite crear formulas estáticas o dinámicas en latex.

- *La casilla de control*  es una representación visual de una variable booleana que permite añadir la condición de que un objeto sea visible o no.

- *Desplaza vista gráfica*  es una herramienta que sirve para poder mover la vista gráfica y cambiar la zona visible.

- Las herramientas *acercar*  y *alejar*  permiten ampliar o reducir el panorama respectivamente.

Una vez expuesto las características de algunas herramientas del Geogebra, que usaremos en nuestra investigación con la finalidad de identificar y analizar las aprehensiones en el registro gráfico, presentamos la justificación del presente trabajo.

1.3 Justificación

Según las investigaciones de La Plata (2014), Tomás (2014), Londoño, Narro y Vera (2014), Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2015), la principal limitación que encuentran los estudiantes es la de coordinar los diferentes registros de representación semiótica del límite de una función de variable real. También surgen problemas, según los autores, al momento de interpretar el límite en un punto de una función real de variable real, cuando se encuentra representado en el registro gráfico.

Por ello, según Duval (2004), es necesario transitar entre las diferentes formas de representación, para llegar a entender un objeto matemático.

Lo dicho anteriormente es sustentado por la investigación de Tomás (2014), quien resalta la importancia de que el estudiante relacione los diferentes sistemas de representación del límite de una función en una variable, así como la interpretación en el registro gráfico.

Asimismo, Londoño, Narro y Vera (2014) manifiestan que no solo se debe enfatizar en trabajar el límite de una función en el registro algebraico, sino también se debe considerar el registro gráfico, para lograr la compresión de este objeto matemático.

Por su parte La Plata (2014) también resalta que los estudiantes al trabajar con el registro gráfico no relacionan la existencia de un límite con la existencia e igualdad de los límites laterales, lo cual concuerda con Tomás (2014) quien menciona que relacionar las aproximaciones laterales en el dominio con las aproximaciones laterales en el rango, cuando estas no coinciden, es el factor que determina el paso entre los niveles Intra, Inter y Trans de la teoría APOS.

Geogebra, en nuestra investigación, nos servirá para lograr una mejor percepción de elementos matemáicos que no son apreciados cuando se hace uso de lápiz y papel.

De acuerdo con Caglayan (2015), este programa posee muchos beneficios, entre ellos tener una mejor visión e intuición, que puede contribuir con el aprendizaje del estudiante. También menciona que una prueba visual no sería considerada formal, pero la observación mediante este programa se puede usar como una forma de intuir propiedades de límite de una función, además permite que los estudiantes puedan explorar y obtener experiencias visuales de las propiedades de los límites.

De igual manera Richit, Benites, Escher y Miskulin (2012) afirman en su investigación que Geogebra es una herramienta poderosa que ayuda en el aprendizaje de objetos matemáticos implicados en el curso de Cálculo Diferencial, ya que los estudiantes participantes de su investigación lograron formular hipótesis, conjeturas y estos son verificados con el Geogebra. Además, los autores manifiestan que el uso de este programa fue muy bien recibido por los estudiantes, que se sintieron motivados con la incorporación de un programa en sus tareas de Cálculo Diferencial, ya que gracias al Geogebra los estudiantes pudieron verificar el desarrollo de sus problemas, explorando las representaciones gráficas con este programa.

Por otra parte, el objeto matemático, límite de una función real e variable real, forma parte del contenido de cursos de los primeros ciclos de las carreras de Ingeniería, tales como Cálculo Diferencial o Cálculo I y resulta de bastante importancia, pues es la base para los siguientes cursos.

Existen documentos que sustentan la importancia de este objeto matemático, tal es el caso del Sílabo del curso de Cálculo I de la escuela académico profesional (EAP) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de la Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM).

En la Tabla 1 se puede ver parte del Silabo del Curso de Cálculo I, en el cual se aprecia que se estudia límite de una función real de variable real en las semanas 9, 10 y 11.

Tabla 1
Desarrollo del Silabo del curso de Cálculo I

Unidades temáticas por semana		
Semana 9	**Semana 10**	**Semana 11**
- Límites de una función - Propiedades de límites - Límites laterales	-Límites al infinito -Límites infinitos -Asíntotas -Límites trigonométricos -Teoremas	-Continuidad de una función - Continuidad de una función compuesta -Teorema del valor intermedio

Nota: Adaptado del Sílabo del curso de Cálculo I

Además, el curso de Cálculo I es dictado en el primer ciclo y es requisito para cursos posteriores de la EAP de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo (ver Anexo 4).

Es por ello, que resulta necesario que el estudiante tenga claro estos temas relacionados al límite de una función real de variable real.

De igual forma, en la Tabla 2, se aprecia parte del contenido del Sílabo del curso de Cálculo Diferencial de la carrera de Ingeniería de Seguridad Industrial y Minera de la Universidad Tecnológica del Perú (UTP), en el cual se estudia límite en un punto de una función real de variable real en las semanas 5, 6, 7 y 8.

Tabla 2
Sílabo del curso de Cálculo Diferencial de Ingeniería de Seguridad Industrial y Minera de la UTP

Unidad de aprendizaje II:	Semana:
Límites y continuidad	5, 6, 7 y 8

Logro específico de aprendizaje

- Conceptúa la noción de límite por aproximación.
- Determina el límite de una función aplicando diversas técnicas para levantar las formas indeterminadas.
- Calcula el límite de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas aplicando propiedades.
- Determina la existencia de un límite tomando límites laterales.
- Determina las raíces de una ecuación con la ayuda de los Diferenciales.
- Determina la continuidad de una función aplicando teoremas y gráficamente.
- Utiliza límites al infinito para determinar las asíntotas de una función y los grafica.

Fuente: Adaptado del sílabo del curso de Cálculo Diferencial de la carrera de Ingeniería de Seguridad Industrial y Minera de la UTP

Además, en la malla curricular de la carrera de Ingeniería de Seguridad Industrial y Minera de la UTP, se puede apreciar que el curso de Cálculo Diferencial es dictado en el tercer ciclo y es requisito para los siguientes dos ciclos, tal como se aprecia en la Figura 3.

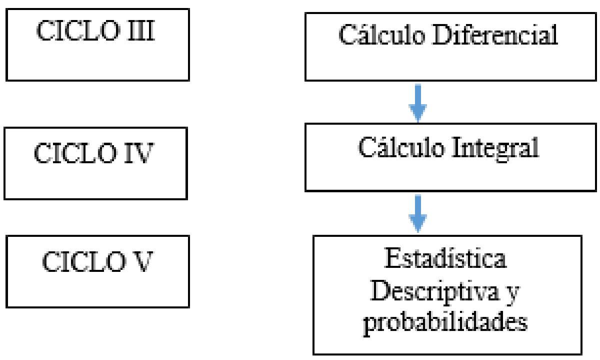


*Figura 3***.** Malla curricular de la carrera de Ingeniería de Seguridad industrial y Minera de la UTP.
Fuente: Adaptado de la malla curricular de la carrea de Ingeniería de Seguridad industrial y Minera de la UTP

Por todo lo mencionado anteriormente, justificamos que el objeto matemático límite de una función real de variable real es de suma importancia y el uso del Software Geogebra, como facilitador en la enseñanza del límite de funciones, también es avalado por las investigaciones presentadas. En nuestro caso específicamente trabajaremos el límite en un punto de una función real de variable real.

En conclusión, tomando como base los antecedentes de referencia y la justificación presentada, nos planteamos la pregunta y los objetivos de esta investigación.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

1.4.1 Pregunta de Investigación

¿Cómo los estudiantes de Ingeniería articulan las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva cuando movilizan la noción del límite de una función real de variable real en un punto?

1.4.2. Objetivo General

Analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que los estudiantes de Ingeniería realizan cuando movilizan la noción del límite de una función real de variable real en un punto.

1.4.3 Objetivos Específicos

- Identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción del límite de una función real de variable real en un punto, en la representación gráfica, usando Geogebra y a lápiz con papel.
- Describir la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción del límite de una función real de variable real, en la representación gráfica, usando Geogebra y a lápiz con papel.

Planteada la pregunta y los objetivos de esta investigación, podemos apreciar que estudiaremos las aprehensiones en el registro gráfico, que son aspectos propios de la Teoría de Registro de Representación Semiótica que detallaremos a continuación.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este apartado presentamos aspectos alusivos al marco teórico que usamos en nuestro estudio, como es la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) que fue propuesta Duval (1994). De igual modo, presentamos la justificación del motivo por el cual esta investigación fue de corte cualitativa y explicamos la metodología que seguiremos en la tesis.

2.1 Teoría de Registros de Representación Semiótica

En esta sección presentamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (1994), donde nos enfocamos principalmente en conocer las aprehensiones en el registro figural y adaptarlas al registro gráfico.

Según Duval (2012), los objetos matemáticos no son claramente accesibles a la percepción, como sí sucede en otros campos y es por ello que resulta necesario representarlos.

También afirma que estas representaciones no solo son con fines de comunicación, sino que resultan esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Según el autor, estas representaciones pueden ser de dos tipos:

- **Mentales**: Conjunto de imágenes o la conceptualización que tiene un sujeto sobre un objeto.
- **Semióticas**: Son producciones donde se hace uso de símbolos que pertenecen a un sistema de representación.

Según Duval (2012, traducción propia), “Se le llama **semiosis** a la aprehensión o la producción de una representación semiótica y **noesis** a la aprehensión conceptual de un objeto. Es preciso afirmar que la **noesis** es inseparable de la **semiosis**”(p. 270)

De acuerdo con el autor, para que un sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe cumplir tres actividades cognitivas inseparables a la semiosis: Formación, tratamiento y conversión.

La **formación** implica la selección de un conjunto de caracteres perceptibles y que son identificables como representación de lo que se quiere representar.

Por otro lado, menciona que el **tratamiento** ocurre cuando se realiza una transformación en el mismo registro, una reconfiguración es un tipo de tratamiento para las figuras geométricas.

De igual modo, según Duval (2012), la **conversión** sucede cuando una transformación produce una representación en el registro distinto al inicial, conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial.

Para Duval (2004), no todas las representaciones producidas en un sistema permiten las tres actividades cognitivas fundamentales de formación, tratamiento y conversión, como por ejemplo las señales de tránsito.

Según el autor, existen cuatro tipos de registros que sí permiten estas actividades cognitivas, las cuales se agrupan en registros de representación discursiva y registros de representación no discursiva. Además menciona que la relación entre la noesis y semiosis solo se da con los registros que permitan las tres actividades cognitivas. En la Tabla 3 se puede ver en resumen cada uno de registros de representación.

Tabla 3
Clasificación de los registros de representación discursiva y no discursiva

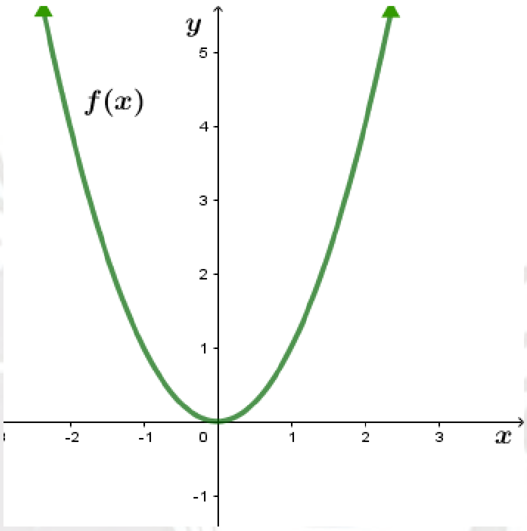
Registros de representación discursiva	**Registros de representación no discursiva**
Lengua Natural: • Asociaciones Verbales (conceptos) • Forma racional: - Argumentación a partir de observaciones, creencias. - Deducciones válidas a partir de uso de definiciones o teoremas.	Figuras geométricas planas o en perspectiva: • Aprehensión operatoria y no sólo perspectiva. • Construcción con instrumentos.
Sistemas de escritura: • Numéricos (binarios, decimal, fraccionaria…). • Algebraicos; simbólicas (lenguas formales). • Cálculo.	Gráficos cartesianos: • Cambios de sistemas de coordenadas. • Interpolación, extrapolación.

Fuente: Adaptado de Duval (2003, p. 14, traducción nuestra)

Para el objeto matemático que se está trabajando, límite en un punto de una función real de variable real se requiere el uso de un sistema de coordenadas cartesianas bidimensionales, es por ello que consideramos los registros de representación semiótica: Lengua natural, algebraico y gráfico. En la Tabla 4 se aprecia un ejemplo del objeto matemático representado en cada uno de estos registros de representación.

Tabla 4

Registros de representación para el límite de una función

Registros de Representación para límite en un punto de una función real de variable real	
Registro de lengua natural	El límite de la función cuadrática cuando la variable independiente se aproxima a dos es cuatro.
Registro algebraico	$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$
Registro gráfico	 El límite de la función f cuando x se aproxima a 2, es 4.

De acuerdo con Duval (1994), una **aprehensión** viene a ser la acción de aprehender; es decir, comprender un objeto por medio de sus representaciones y propiedades en un determinado registro.

Asimismo, Duval (2012) manifiesta que una figura en Geometría es una actividad cognitiva más compleja que solo reconocer la imagen y para ello existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural en Geometría, según su rol: aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria, aprehensión discursiva y secuencial.

En nuestra investigación nos enfocamos en analizar el objeto matemático *límite en un punto de una función real de variable real*, donde planteamos actividades en el registro gráfico, en el cuál identificamos y describimos específicamente las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva, posteriormente analizamos la articulación que se da entre ellas, cuando los estudiantes movilizan la noción del límite.

Usamos como referencia, el estudio de visualización de valores máximos y mínimos locales de funciones reales de dos variables reales, realizado por Ingar (2014), quien ejemplificó las aprehensiones en el registro gráfico del paraboloide.

Asimismo, se consideró, el proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura, mediado por el Geogebra, trabajado por Peñaloza (2016) quien presentó ejemplos de las aprehensiones en el registro gráfico del paraboloide mediado por Geogebra 3D. En nuestro caso, ejemplificamos las aprehensiones en el registro gráfico para el límite en un punto de una función real de variable real, mediado por el Geogebra así como también usando lápiz y papel.

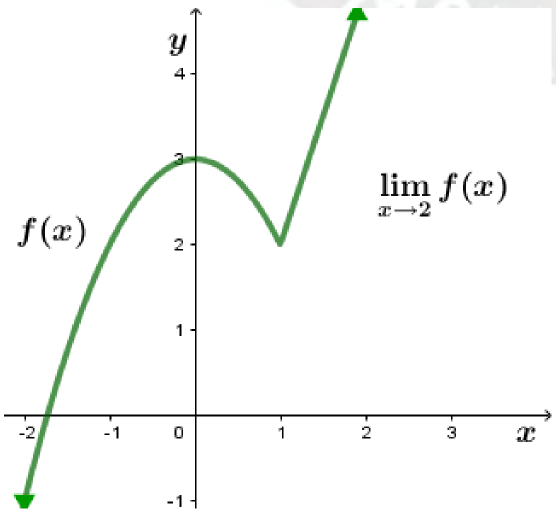
Según Duval (1994), **la aprehensión perceptiva** es la primera que aparece en el proceso cognitivo del estudiante y permite identificar o reconocer inmediatamente una forma u objeto matemático en el plano o en el espacio.

En la investigación trabajamos con funciones reales de variable real. Si el estudiante es capaz de identificar que la representación gráfica corresponde a una función real de variable real, entonces podemos afirmar que desarrolló una aprehensión perceptiva **y** para ello debe identificar que hay una variable independiente y otra dependiente, así como reconocer los valores que asumen cada una de estas variables (lectura de los ejes).

Por ejemplo, en la Tabla 5, mostramos algunos elementos relacionados al límite en un punto de una función real de variable real que el estudiante puede reconocer en la representación gráfica de una función, los cuales darían indicios de que desarrollo una aprehensión perceptiva.

Tabla 5

Aprehensión perceptiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Aprehensión perceptiva de $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$	
	• $f(x)$ es una función real de variable real. • $f(x)$ es una función por tramos. • $f(x)$ es una función continua. • $f(2) = 4$

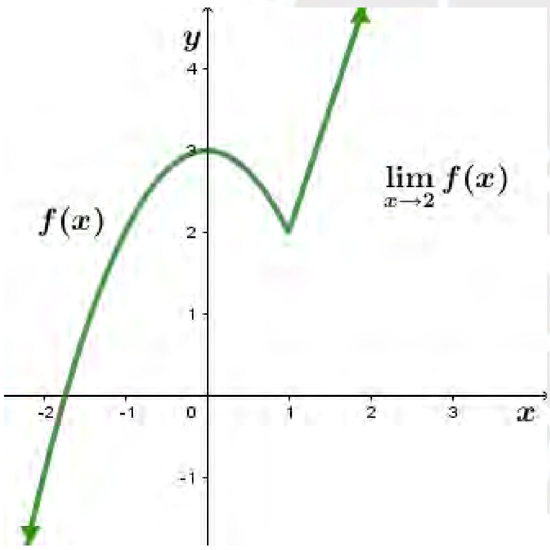
De acuerdo con Duval (1994), la **aprehensión discursiva** es la acción mediante el cual el sujeto relaciona el objeto matemático con propiedades matemáticas que no están explicitas en la figura tales como teoremas, axiomas y propiedades.

En nuestra investigación, cuando el estudiante logre identificar propiedades relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real, que no están explicitas en la representación gráfica de la función, como por ejemplo, el dominio de la función, el tipo de discontinuidad, el teorema de existencia de un límite entre otros, que sean elementos no explícitos en la gráfica y le permita calcular y analizar el límite en un punto de una función real de variable real, podremos decir que el estudiante ha desarrollado una aprehensión discursiva.

En la Tabla 6 se aprecia elementos y propiedades que no están explícitos en el gráfico y si el estudiante logra exponerlos, se puede afirmar que ha desarrollado una aprehensión discursiva.

Tabla 6

Aprehensión discursiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Aprehensión discursiva de $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$	
 	• $Dom f(x) = \mathbb{R}$ • $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$ • $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$ • $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe y es 5 porque tiene los límites laterales iguales (teorema de la existencia de límite).

Según Duval (1994, p. 126), “Una figura proporciona una ayuda heurística. En tanto, una de sus modificaciones posibles muestra la idea de una solución”.

Asimismo, el autor menciona que una **aprehensión operatoria** se da cuando se modifica la figura variando su dimensión. Esta consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial y esta queda transformada en otra llamada imagen; de igual forma, esta modificación también se podría dar en sus orientaciones, como traslación y rotación.

Por otro lado, para el registro gráfico Peñaloza (2016) menciona lo siguiente:

> El sujeto realiza una modificación óptica al utilizar las herramienta *Alejar* y *Aproximar* en *Geogebra 3D*, con el propósito de que los elementos y características de la representación gráfica del paraboloide puedan ser reconocidos y estudiados con mayor detenimiento mediante acercamientos o alejamientos. (p.32)

Para nuestro caso, consideramos que la modificación en el registro gráfico será la **modificación óptica** al realizar una variación de la dimensión de los ejes coordenados *X* y *Y,* que servirá para que el estudiante pueda estudiar y analizar conceptos relacionados al límite en un punto de una función real de variable real, donde usando las herramientas *alejar, aproximar o desplazamiento* de Geogebra se cambia la dimensión de los ejes, tal como se aprecia en la Figura 4, que usando la herramienta *desplazamiento vertical* la dimensión del eje *X* cambia de uno a cinco.

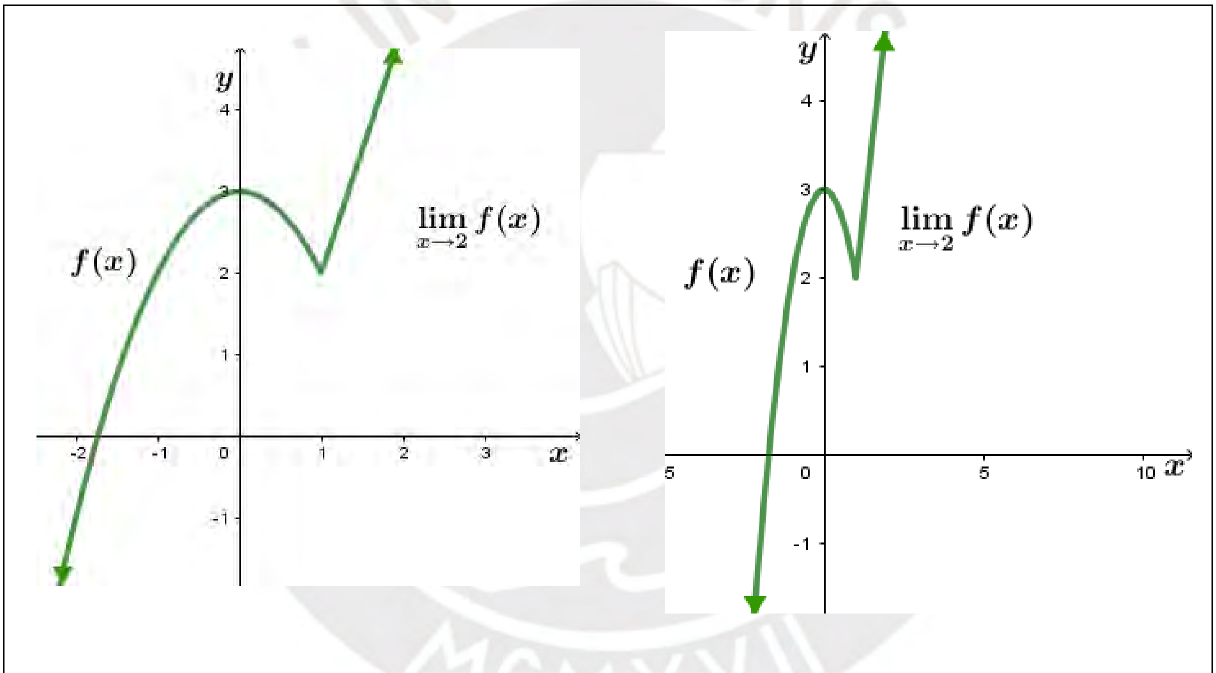


Figura 4. Modificación óptica de una función por variación de la escala de los ejes coordenados.

Teniendo claro aspectos de la TRRS que usamos en nuestra investigación, detallaremos la metodología y los procedimientos que se emplearan en el desarrollo de la investigación.

2.3 Metodología de la investigación

Como nuestro objetivo es analizar cómo los estudiantes articulan las **aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria** cuando movilizan la noción del límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico, la investigación es de corte cualitativo, ya que, según Hernández, Fernández y Baptista (2010), una investigación cualitativa permite analizar y describir situaciones, eventos, interacciones y conductas observadas de los sujetos en estudio.

En nuestra investigación se analizará y describirá lo que ocurrió con los estudiantes al realizar la articulación de estas aprehensiones.

Según Martinez (2006), el objetivo de una investigación que usa un estudio de caso puede ser:

- Descriptivas: Sí lo que se quiere es identificar y describir que influyen en el fenómeno estudiado.
- Exploratorias: Sí por medio de las exploraciones se busca conseguir un acercamiento entre las teorías planteadas y la realidad del objeto matemático de estudio.

En nuestra investigación, el caso será la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico, porque mediante exploraciones, buscamos averiguar lo que sucede con la noción del límite de una función real de variable real cuando los estudiantes trabajaban este objeto matemático. Posteriormente, describiremos y analizaremos la articulación de estas aprehensiones en el registro gráfico.

Martinez (2006) también menciona que se deben tener en cuentas los siguientes componentes para diseñar una investigación que usa como método el estudio de caso:

- **Las preguntas de investigación:** Estas sirven de referencia y como punto de partida para recolectar la información.
- **Las proposiciones teóricas de la investigación:** Con ella podemos enfocarnos en qué campo teórico analizaremos el objeto de estudio. Del mismo modo nos servirá para recolectar información.

Esos componentes, según el investigador, sirven no solo para recolectar datos, sino también para el análisis posterior de la información obtenida, pues contienen los constructos (conceptos, dimensiones, factores o variables) de los cuales es fundamental obtener información.

El caso que se trata en nuestra investigación es la articulación de las aprehensiones en el registro gráfico. Para ello, nos planteamos la pregunta de investigación ¿Cómo los estudiantes de Ingeniería articulan las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva cuando movilizan la noción del límite de una función real de variable real en un punto?

Una vez planteada la pregunta de investigación, procederemos a recolectar la información en antecedentes que preceden a esta investigación. De igual manera, se hará un estudio detallado de aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1994) para poder entender lo que son las aprehensiones en el registro figural, que luego, tomando como referencia las investigaciones de Ingar (2014) y Peñaloza (2016), las adaptaremos al registro gráfico que nos servirán luego para analizar la articulación de estas aprehensiones cuando los estudiantes movilizan la noción del límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico.

- **Unidades de análisis:** Son los elementos que conforman el caso. Estos podrían ser personas, una institución, documentos o algún acontecimiento.
  En nuestra investigación, las unidades de análisis serán los estudiantes de Ingeniería, ya que se busca analizar cómo estos estudiantes realizan la articulación de las aprehensiones de la noción del límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico.
- **La vinculación lógica de los datos a las proposiciones:** Aquí se debe verificar la conexión que existe entre los datos obtenidos en la aplicación de las actividades y el marco teórico (Teoría de Registros de Representación Semiótica).
- **Los criterios para la interpretación de los datos:** Este componente se refiere al análisis de datos que se debe realizar en la investigación. En nuestro estudio, esto se dará luego de la recolección de datos; cuando se identifique, describa y se analice las articulaciones de las aprehensiones en el registro gráfico.

Martinez (2006) también plantea que, para asegurar la objetividad de un estudio de caso, es necesario tener en cuenta los siguientes elementos.

- **Semblanza del estudio de caso**: Útil para integrar y entrenar al equipo de investigación. En nuestro proceso tendremos en cuenta integrar a las personas que participen en nuestro estudio, informándolas respecto a los antecedentes y a lo que se desea investigar, que son la articulación de las aprehensiones en el registro gráfico en la movilización de la noción del límite de una función.
- **Preguntas del estudio de caso:** Éstas garantizan que se obtenga la información necesaria para contrastar con el marco teórico. En nuestra investigación, estas preguntas deben proporcionar la información requerida que nos permita trabajar nuestro caso que será la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico.
- **Procedimientos a ser realizados:** Se deben establecer los suficientes instrumentos para la recolección de datos y se planteara un cronograma de las actividades que se realice durante la recolección de datos. En nuestra investigación plantearemos una sesión presencial, donde se desarrolle una actividad para la recolección de datos. De igual manera, realizaremos grabaciones de la pantalla del computador con el programa Camtasia Studio 8, con la finalidad de observar los procedimientos que los estudiantes realizaron.
- **Guía del reporte del estudio de caso:** Se debe diseñar un esquema básico de lo que será el reporte del estudio de caso, que debe facilitar la recolección de la información. Del mismo modo, a veces resulta necesario realizar un caso piloto, que permita corregir

aspectos como el contenido del plan de obtención de datos y los procedimientos a seguir. En nuestro trabajo, elaboraremos una guía de reporte y realizaremos la aplicación de pilotos que nos permitan mejorar la actividad que planteamos para la recolección de información.

A continuación, detallaremos el procedimiento metodológico que usaremos en nuestro estudio, con el cual pretendemos cumplir con los objetivos de este trabajo y de igual manera responder la pregunta de investigación. Para ello, tendremos en cuenta la guía de procedimientos que plantea Martínez (2006).

Adaptando los procedimientos a nuestra investigación consideramos seguir los siguientes pasos:

Planteamiento del problema

El objetivo de nuestra investigación es analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria del límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico. Para ello, nos planteamos la pregunta de investigación ¿Cómo los estudiantes de Ingeniería articulan las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva cuando movilizan la noción del límite de una función real de variable real en un punto?

Para poder llegar a este objetivo nos planteamos; primero, identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción del límite de una función real de variable real en un punto, en la representación gráfica, usando Geogebra y a lápiz con papel; y posteriormente, describir la articulación de estas aprehensiones en el registro gráfico.

Revisión de literatura y estudio del objeto matemático

Revisamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Luego realizamos la revisión de parte del texto El Cálculo de Louis Leithold (1998) donde se aborda el estudio de nuestro objeto matemático, límite de una función en un punto. Finalmente elaboramos las herramientas para recolectar datos.

Recolección de la información

La parte experimental para recolectar la información se realiza con tres estudiantes de Ingeniería de una universidad pública peruana del curso de Cálculo I y analizamos la producción de un estudiante. Para ello se usó una ficha de actividad, una ficha de observación, ficha de recojo de información, archivos de Geogebra, grabación de la pantalla del computador con el uso del programa Camtasia Studio 8.

Todo esto servirá para realizar la triangulación de los datos que consiste en contrastar y comparar la información obtenida por los diferentes medios de información.

Transcripción de datos

Se efectúa la transcripción y organización de toda la información obtenida en el paso anterior.

Análisis

Con la información obtenida, realizamos el análisis de lo sucedido con nuestro caso "la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria del límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico".

Conclusiones

Al final, se brindan conclusiones con respecto a lo sucedido con el caso, así como consideraciones finales con perspectivas para futuras investigaciones.

Luego que hemos presentado los aspectos del marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la metodología con los procedimientos que realizaremos en nuestra investigación, realizamos un estudio detallado de la evolución del concepto del límite de una función a lo largo de la historia, así como el tratamiento que se le brinda a este objeto matemático en un texto universitario.

CAPITULO III. LÍMITE EN UN PUNTO DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

En nuestra investigación, abordamos el estudio del límite en un punto de una función real de variable real.

En este capítulo, presentamos un resumen de cómo la definición en general del límite de una función evolucionó a lo largo de la historia y también analizaremos un texto universitario donde se aborda este objeto matemático.

3.1 Evolución del concepto de límite

En esta sección detallaremos la evolución del concepto del límite de una función a lo largo de la historia, donde se hará un breve resumen de cada etapa por las que pasó esta definición.

El concepto del límite funcional ha pasado por varias etapas, hasta llegar a la definición que hoy en día conocemos.

Según Molfino y Buendía (2010), la evolución del concepto del límite funcional pasó por cuatros etapas.

- **La antigüedad (época Griega):** Según los autores, esta época se caracteriza por considerar problemas geométricos, principalmente aquellos donde se requería calcular el área de una figura o el volumen de un cuerpo. Se destaca el trabajo de Hipócrates (S. V a.C.), que utilizó el concepto de límites para calcular el área de las lúnulas; el de Eudoxo (408-355 a.C.) quien presentó, de manera implícita, el concepto de límite en las demostraciones por exhausción; Arquimedes (287-212 a.C.) quien aplicó el método de la exhausción para demostrar resultados con respecto a volúmenes y áreas; y, finalmente, se tiene las paradojas propuestas por Zenón (480 a.C.), dirigidas a las ideas pitagóricas del tiempo y el espacio como suma de infinitos instantes o puntos.
- **2da etapa: siglo XVII**: Esta etapa, según los investigadores, se caracteriza fundamentalmente por la búsqueda de respuestas para problemas físicos y astronómicos utilizando métodos infinitesimales. Se destacan los trabajos realizados por Kepler, Fermat, Cavalieri, Barrow, Newton y Leibniz. El concepto de límite aparece de manera implícita relacionado a problemas de cálculo de velocidades, áreas, pendientes, etc.
- **3ª etapa: siglo XVIII:** Para Molfino y Buendía (2010), esta etapa se caracteriza por la evolución de los fundamentos del análisis infinitesimal y esto se da porque se llega a generalizar el método para otro tipo de funciones. En esta época, se destacan los trabajos de Euler, D'Alembert y Lagrange, quienes intentaron fundar el Cálculo usando el Álgebra

de manera independientes a la Geometría. Euler fue promotor de este cambio considerando funciones en lugar de variables, mientras que Lagrange recurrió al Álgebra y al desarrollo en serie de potencias para definir las funciones y así darle al Cálculo infinitesimal el rigor de las demostraciones.

Según Molfino y Buendía (2010), D'Alembert fue uno de los primeros matemáticos en dar una definición del límite funcional. "Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante, la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable".

- **4ª etapa: entre el siglo XIX y principios del XX:** Para los investigadores, los resultados obtenidos en esta etapa estaban muy bien justificados gracias a que se tenía un concepto de función, aunque luego fue refutado con la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos, como el de la cuerda vibrante. En esta etapa, se destacan los trabajos de Cauchy (1821) y Weierstrass, que se caracterizaron por la aritmetización del análisis y las concepciones de Wallis, Mengoli, Gregory, Newton, Gregory of St. Vincent y Vitali eran generalmente relacionadas con sucesiones y series, y lo que destacaba de ellos era que consideraban al límite como una aproximación inalcanzable, donde resaltaba más el proceso que el objeto.

Para los autores, es recién con Weierstrass que se introduce el uso símbolos matemáticos para evitar usar la expresión "la variable se aproxima al límite", ya que ello, según el autor, hacía suponer ideas de tiempo y movimiento. Esto permitió transformar la idea del límite como un proceso a una idea de límite como un objeto. Así, finalmente, se presentó la definición que actualmente se usa en los libros de Cálculo, como se muestra en la Figura 5.

Si dado cualquier ε positivo, existe un δ tal que para $0 < n < \delta$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x = x_0$.

Figura 5. Definición actual del límite funcional.
Fuente: Blázquez y Ortega (2002, p.7)

Una vez presentada la evolución del concepto del límite de una función, a continuación trataremos detalladamente definiciones, teoremas y ejemplos relacionados al límite de una función, en el texto de consulta que usaremos como referente, en la investigación.

3.2 Límite de funciones en un texto universitario

En esta sección realizaremos el análisis de parte del texto El Cálculo de Louis Leithold (1998), que es un texto usado en la enseñanza del límite de funciones, según la bibliografía de los sílabos consultados.

La idea de límite está relacionada con expresiones como “Tan cerca como deseemos” o “Suficientemente cerca” que nos dan una idea de aproximación. Para nuestro estudio, tuvimos en cuenta las definiciones y propiedades propuestas por Leithold (1998).

Definición de límite de una función:

Sea f una funcion definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si la siguiente proposición es verdadera:

Dado cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe un $\delta > 0$ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

En la Figura 6 se pude apreciar la representación en el registro gráfico de la definición del límite en un punto de función real de variable real.

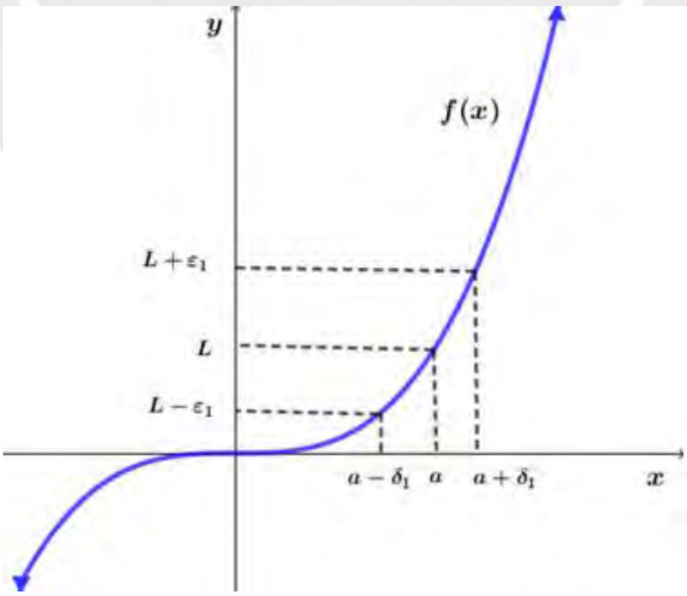


Figura 6. Representación gráfica de la definición del límite

Posteriormente, podemos observar que los ejemplos brindados por Leithold (1998) son dados en el registro algebraico, como se muestra en la Figura 7, donde se puede apreciar un ejemplo en el cual se realizó tratamientos en el registro algebraico para llegar a la respuesta.

EJEMPLO 2 Calcule $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5)$, y cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5) &= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 5 L.)}\\
&= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 7 \cdot \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 6 L.)}\\
&= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 && \textbf{(T. 3 L. y T.2 L.)}\\
&= 9 + 21 - 5\\
&= 25
\end{aligned}$$

Figura 7. Ejemplo ilustrativo de un tratamiento en el registro algebraico.
Fuente: Leithold (1998, p.44)

Definición de límite lateral por la derecha:

Sea f definida en cada número x_0 de un intervalo abierto $\langle a, c \rangle$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Se usa para denotar que L es el límite derecho de f en x_0

Definición de límite lateral por la izquierda:

Sea f definida en cada número x_0 de un intervalo abierto $\langle a, c \rangle$, entonces:

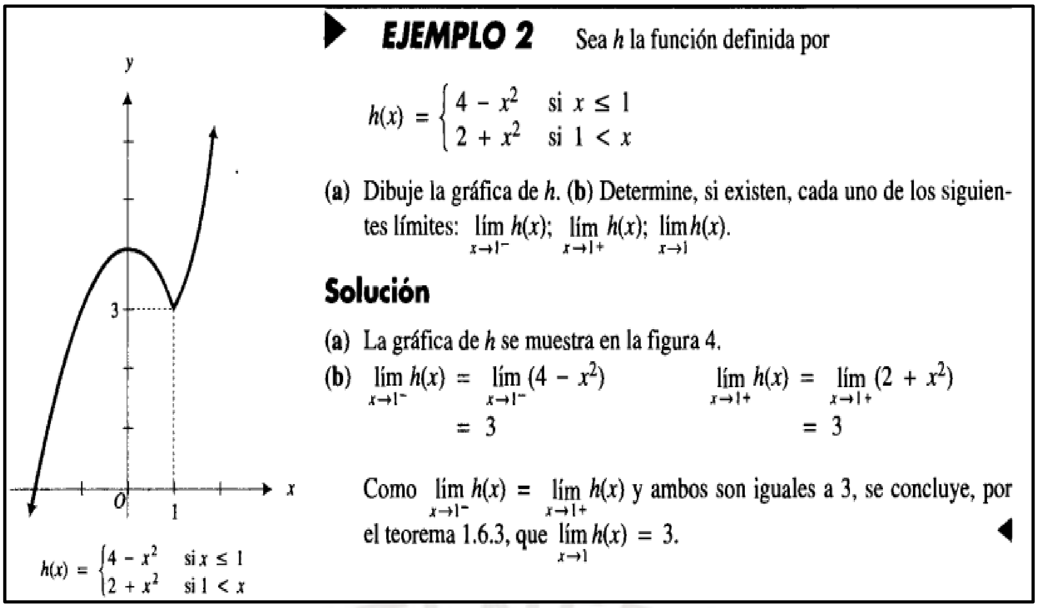
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Se usa para denotar que L es el límite izquierdo de f en x_0

Teorema

El $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existen y son iguales.

El autor expone un ejemplo para este teorema como se puede observar en la Figura 8. Al lado izquierdo de la pregunta se puede apreciar la representación en el registro gráfico de la función $h(x)$ que le permitirá al estudiante responder la parte a).


EJEMPLO 2 Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de h. **(b)** Determine, si existen, cada uno de los siguientes límites: $\lim_{x \to 1^-} h(x)$; $\lim_{x \to 1^+} h(x)$; $\lim_{x \to 1} h(x)$.

Solución

(a) La gráfica de h se muestra en la figura 4.

(b) $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} (4 - x^2) = 3$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 + x^2) = 3$

Como $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x)$ y ambos son iguales a 3, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim_{x \to 1} h(x) = 3$.

Figura 8. Ejemplo ilustrativo del teorema de la existencia del límite de una función en un punto. Se muestra un discurso matemático, el registro gráfico y el registro algebraico de una función.
Fuente: Leithold (1998, p.51)

En el lado derecho presenta la respuesta a la parte b) de la pregunta, en donde se observa que para determinar el límite de la función $h(x)$ en el valor de $x = 1$, se realizan tratamientos en el registro algebraico, pues se procede a verificar si los límites laterales son iguales.

Limites infinitos

Definición:

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, los valores de $f(x)$ crecen sin límite conforme x tiende a a ; es decir, $f(x)$ puede hacerse tan grande como se desee para todos los valores suficientemente cercanos a a, pero sin considerar el a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Si para cualquier número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > N$

Definición:

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, los valores de $f(x)$ decrecen sin límite conforme x tiende a a ; es decir, $f(x)$ puede hacerse tan pequeño como se desee para todos los valores suficientemente cercanos a a, pero sin considerar el a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Si para cualquier número $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) < N$

Nota: El $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ se puede leer como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es más infinito, pero este límite no existe y que el símbolo $+\infty$ solo indica el comportamiento de los valores de la función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a. Del mismo modo sucede con $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Nota: Se considera el limite lateral infinito si $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si f definida en cada número de un intervalo abierto $\langle a, c \rangle$ y para cualquier número $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

Si $0 < x - a < \delta$ entonces $f(x) < N$

Análogamente se puede definir: $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciado es verdadero.

i. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

ii. $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

iii. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iv. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

En la Figura 9 se observa la representación en el registro gráfico de la función $f(x)$ con su respectiva asíntota $x = a$.

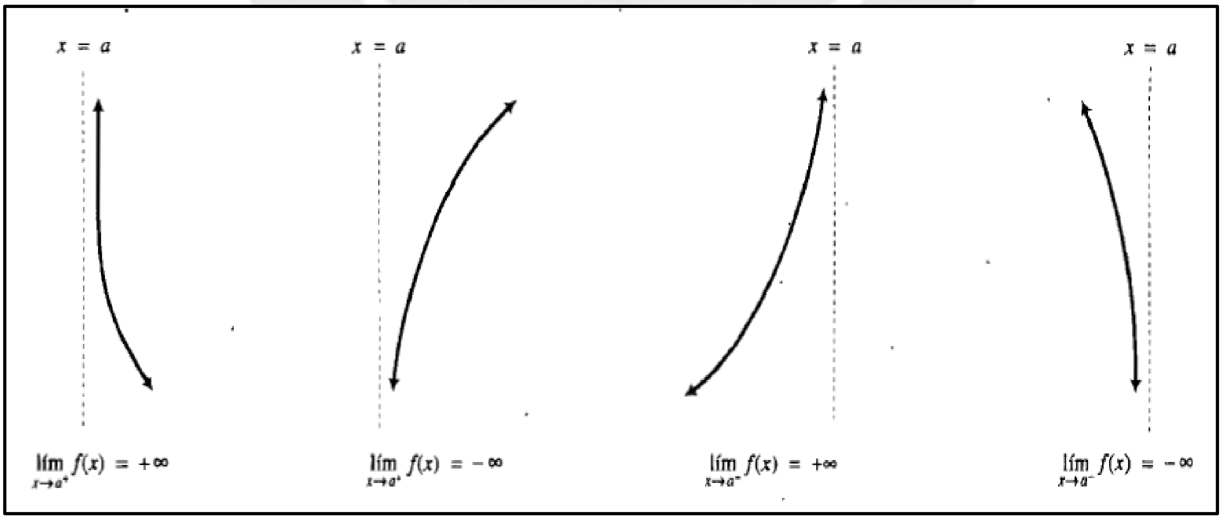


Figura 9. Representación de una función en el registro gráfico y su asíntota.
Fuente: Leithold (1998, p.56)

Continuidad de una función en un número

Leithold (1998) define una función f continua en un número a si y solo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

i. $f(a)$ existe.

ii. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es discontinua en a. Posteriormente, el autor define cada una de las discontinuidades.

Discontinuidad removible

Sea f una función discontinua, para el cual $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y $f(a)$ no existe o $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$, dicha discontinuidad es una discontinuidad removible (o eliminable), pues esta función se redefine en a de modo que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, la nueva función es continua en a. En la Figura 10 se muestra un ejemplo de una función $f(x)$ por tramos que se da en el registro algebraico y, al lado derecho se muestra su representación en el registro gráfico. El autor explica usando un registro de lengua natural que la representación gráfica de la función $f(x)$ se rompe en el punto $x = 1$, por lo tanto analizando en ese punto, se tiene que no cumple el ítem (iii) de una función continua; por tanto, se tiene una función con discontinuidad removible (o eliminable).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea f la función definida por

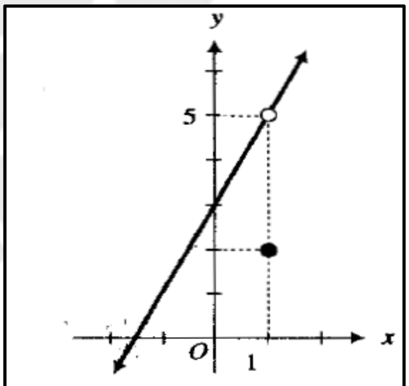
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La gráfica de esta función, la cual se muestra en la figura 3, se rompe en el punto donde $x = 1$, por lo que se investigarán en ese punto las condiciones de la definición 1.8.1.

(i) $f(1) = 2$

(ii) $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

(iii) $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$



$$F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

FIGURA 3

Figura 10. Ejemplo ilustrativo de una función con discontinuidad removible (o eliminable) mostrando su discurso matemático y su representación gráfica.
Fuente: Leithold (1998, p.67-68)

Discontinuidad Esencial

Según Leithold (1998), si la discontinuidad no es removible (o evitable), se le conoce como discontinuidad esencial, donde el ítem (ii) de una función continua no se cumple. Estas discontinuidades pueden ser: Infinita y tipo salto.

- **Discontinuidad infinita**

Una discontinuidad es infinita cuando al menos uno de los límites laterales no existe.

En la Figura 11 se puede apreciar la función $f(x)$ dada en el registro algebraico, que no es continua, el autor menciona usando un registro de lengua natural que, la representación gráfica de la función $f(x)$ se rompe en el punto $x = 2$. Esto se puede apreciar al lado derecho de la figura donde se tiene la representación de la función $f(x)$ en el registro gráfico, además $f(x)$ no cumple con la condición (ii) de una función continua, pues el $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe, ya que $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ no existen, por lo tanto, $f(x)$ es una función con discontinuidad esencial infinita.

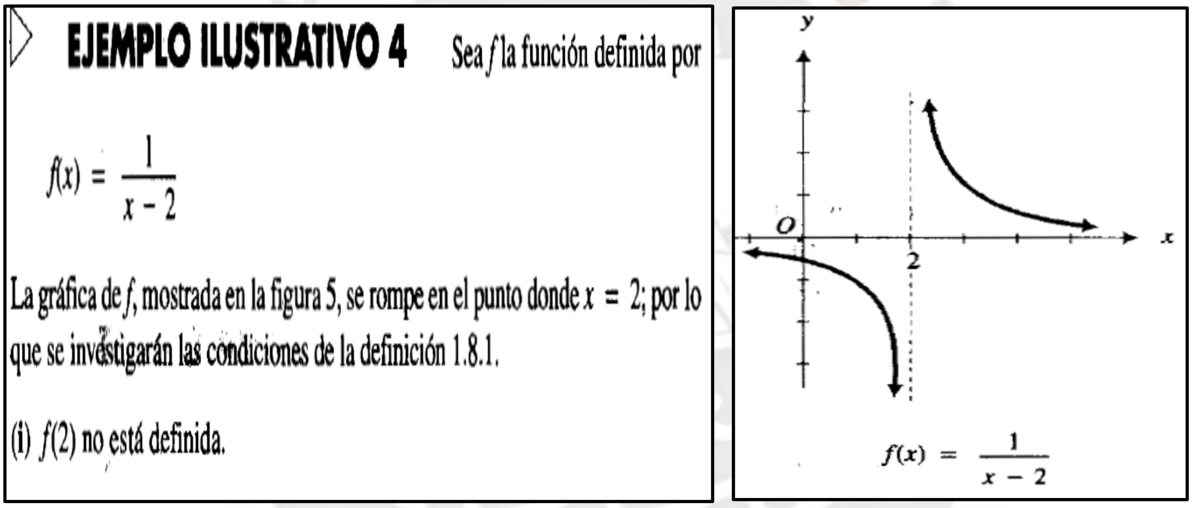
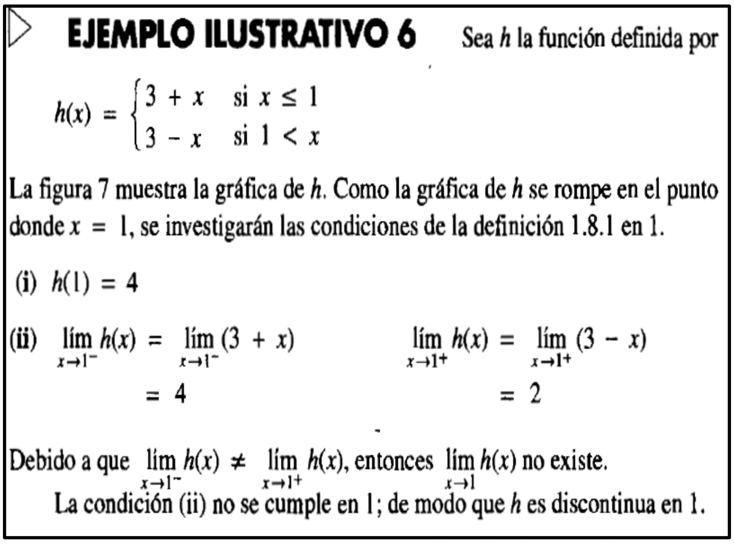


Figura 11. Ejemplo ilustrativo de una función con discontinuidad esencial infinita. Se muestra el registro gráfico.
Fuente: Leithold (1998, p.69)

- **Discontinuidad de salto**

Una discontinuidad esencial del tipo salto se da cuando existen los límites laterales, pero estos son distintos. En la Figura 12 se tiene un ejemplo de una función $h(x)$ en el registro algebraico y al lado derecho de la figura se aprecia su representación en el registro gráfico. El autor menciona usando el registro de lengua natural que la representación gráfica de la función $h(x)$ se rompe en el valor de $x = 1$, en el cual $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe, pues $\lim_{x \to 1^+} h(x) \neq \lim_{x \to 1^-} h(x)$, por lo tanto se trata de una función discontinua porque no cumple el ítem (ii) de una función continua y por tener que los límites laterales existen, pero son distintos se tiene que $h(x)$ es una función discontinua esencial del tipo salto.



EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

La figura 7 muestra la gráfica de h. Como la gráfica de h se rompe en el punto donde $x = 1$, se investigarán las condiciones de la definición 1.8.1 en 1.

(i) $h(1) = 4$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3 + x) = 4$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$

Debido a que $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ no existe.

La condición (ii) no se cumple en 1; de modo que h es discontinua en 1.

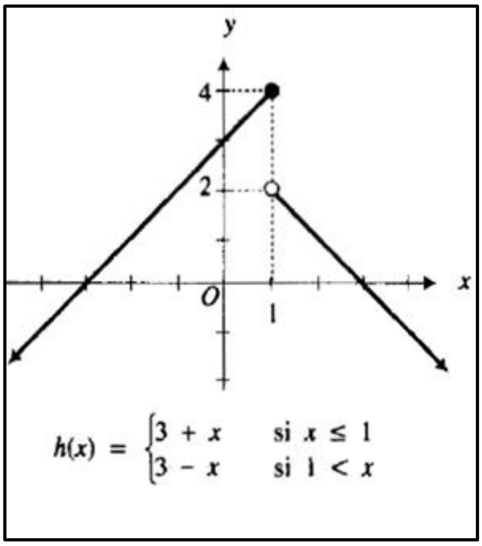
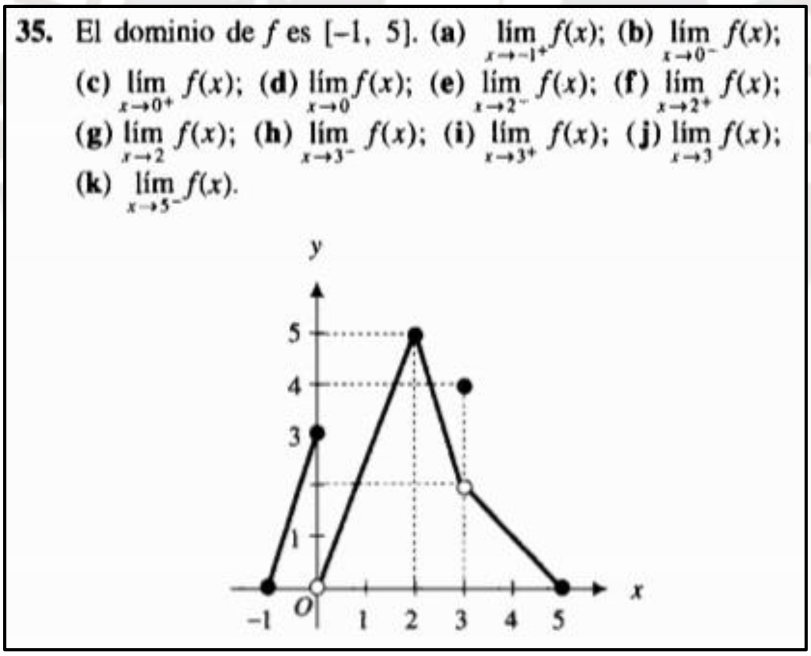


Figura 12. Ejemplo ilustrativo de una función con discontinuidad esencial salto
Fuente: Leithold (1998, p.69)

Con respecto a las tareas que plantea Leithold (1998) al final de cada sección, se puede decir que estas están dadas en los registros algebraico, gráfico y lengua natural. Por ejemplo, en la Figura 13 se puede contemplar una tarea brindada en el registro gráfico, donde se pide evaluar el límite de la función $f(x)$ en diferentes puntos, a partir de la representación gráfica de la función $f(x)$.



35. El dominio de f es $[-1, 5]$. **(a)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; **(h)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; **(j)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; **(k)** $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.

Figura 13. Tarea dada en el registro gráfico.
Fuente: Leithold (1998, p. 54)

Finalmente, luego de la revisión de parte del texto, podemos concluir que éste presenta definiciones, ejemplos en los registros algebraico, gráfico y lengua natural.

En las tareas que brinda el texto se puede apreciar que el registro algebraico es el más predominante, las tareas en el registro gráfico se presentan en menor cantidad y las tareas en el registro de lengua natural son mínimas. Para lograr un aprendizaje significativo de la noción de límite, pensamos que el estudiante debería coordinar por lo menos dos de estos tres registros. Es por ello que pensamos que en el texto se deberían brindar más tareas que involucren el uso de los tres registros.

Del mismo modo Londoño, Narro y Vera (2014), afirman que hay preferencia por usar únicamente el registro algebraico para la enseñanza de límite de funciones, sin ser este el registro más comprensible por los estudiantes.

Asimismo La Plata (2014) afirma que los estudiantes participantes de su investigación, en su mayoría, resuelven con éxito tareas en el registro algebraico, relacionadas al límite de una función, pero cometen errores cuando usan el registro gráfico, lo cual evidencia manejo limitado del concepto de límite de una función en otros registros diferentes al algebraico.

A continuación pasamos a ver la parte experimental de nuestra investigación.

CAPITULO IV: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, presentamos la descripción de los sujetos de investigación y la actividad diseñada para la recolección de la información, con los resultados esperados a las preguntas de esta actividad. Posteriormente se hace el análisis de las respuestas brindadas por los estudiantes, para ello se hace la triangulación de la información, con la ficha de observación, archivos de Geogebra, grabación de la pantalla del computador.

Este análisis se hace en términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la parte experimental de esta investigación se llevó a cabo en un ambiente de una universidad pública de Lima.

4.1 Sujetos de la investigación

En esta investigación, de un día de duración, participaron de manera voluntaria tres estudiantes del curso de Cálculo I de la escuela académica profesional de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima, cuyas edades fluctúan entre los 19 y 21 años de edad.

Cabe mencionar que en nuestra investigación se hace el análisis de resultados de un estudiante, cuya forma de elección fue en base a los desarrollos claros y completos que presentó, además de haber completado toda la actividad y fue el estudiante que mostró más interés en el desarrollo de la misma.

En adelante, en el análisis de los resultados, este estudiante será llamado Julio.

4.2 Descripción de la actividad

La actividad planteada tuvo como objetivo analizar **la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria** que realizan los estudiantes de Ingeniería cuando movilizan la noción del límite de una función en un punto en el registro gráfico. Esta actividad se desarrolló en una sola sesión con ayuda de un computador para cada estudiante y tuvo una duración aproximada de 100 minutos.

La actividad estuvo compuesta por cuatro preguntas (ver Anexo). Las dos primeras se desarrollaron a lápiz y papel y se usaron dos archivos creados en Geogebra y las otras dos preguntas fueron desarrolladas exclusivamente con lápiz y papel.

Cada pregunta pretendió evaluar contenidos matemáticos relacionados al objeto matemático límite de una función en un punto.

La descripción de los contenidos y objetivos de cada pregunta se puede contemplar en la Tabla 7.

Tabla 7
Secuencia y contenido de la actividad

ACTIVIDAD	PREGUNTAS	Contenidos matemáticos a movilizar	Objetivos
1era parte	1	Límite en un punto de una función constante, extremos de una función, límites infinitos, funciones con discontinuidad removible, discontinuidad tipo salto.	Identificar y describir las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción del límite de una función real en el registro gráfico usando Geogebra.
	2	Definición de límite mediante limites laterales, dominio de la función f.	
2da parte	3	Límite en una función constante, el límite en una función con discontinuidad removible, el límite en un extremo de la función	Identificar y describir las aprehensiones perceptiva y discursiva que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción del límite de una función real en el registro gráfico usando lápiz y papel.
	4	Existencia del límite en un punto con discontinuidad removible y límite infinito.	Verificar el aprendizaje de la noción de límite, en un problema de cambio de registro usando lápiz y papel.

4.3 Actividad y Análisis

En esta parte, realizaremos el análisis de cada una de las preguntas de la actividad, para ello detallaremos el objetivo de cada una de las cuatro preguntas y propondremos posibles resultados esperados. Posteriormente realizaremos la descripción y análisis de los datos obtenidos con los instrumentos de recopilación de información. Finalmente, realizaremos la triangulación de la información con todos los datos obtenidos.

Cabe recordar que la actividad consta de dos partes. La primera parte tiene dos preguntas que se desarrollan usando lápiz y papel basándose en un archivo en Geogebra, la primera pregunta consta de dos ítems, en los cuales el estudiante debe analizar el límite en todo el dominio de la función y la segunda pregunta consta de tres ítems y está diseñada para que el estudiante use la definición de límite. La segunda parte también tiene dos preguntas y se desarrollan exclusivamente a lápiz y papel, en la tercera pregunta, el estudiante, tendrá en su hoja de trabajo la representación gráfica de una función para que con ello analice en qué valores del dominio de la función el límite es tres y la cuarta pregunta contiene dos ítems, en el primer ítem el estudiante debe graficar una función, proporcionadas unas condiciones y en el segundo ítem debe modificar esta gráfica dada una condición más.

Los datos serán recopilados mediante fichas de recojo de datos (ver Anexo 3), fichas de actividad (ver Anexo 1), fichas de observación (ver Anexo 2), archivos de Geogebra y grabación de las pantallas del computador, todo ello servirá para realizar la triangulación de la información.

A continuación presentamos el análisis de las respuestas presentadas en la primera parte.

<u>PRIMERA PARTE</u>

<u>Pregunta 1</u>

1. Abra el ***archivo P1***, a continuación responda los siguientes ítems:

    a) ¿En qué funciones existe el límite en todo su dominio? Explique

    b) ¿Cuál de las siguientes ***funciones F*** del ***Geogebra P1*** cumple las siguientes condiciones para $\boldsymbol{b \in Dom(F)}$? Explique

    i. $\nexists \lim\limits_{x \to b^+} F(x)$

    ii. $\exists\, F(b)$

Figura 14. Pregunta 1 de la actividad.

La pregunta 1 de la actividad que se aprecia en la Figura 14, consta de dos ítems a y b, está diseñada con la finalidad de usar el programa Geogebra como medio para movilizar la noción del límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico. Al abrir el archivo P1 el estudiante encontrará la representación gráfica de una función, a medida que el estudiante mueva la herramienta *deslizador*, obtendrá la representación gráfica de otras cinco funciones más.

Al desarrollar esta pregunta se busca identificar las aprehensiones perceptiva y discursiva en el registro gráfico. Para ello, se tomaron en cuenta las respuestas que el estudiante escribió en la hoja de trabajo, las anotaciones del observador, así como las grabaciones de la pantalla del computador que se hicieron con el programa Camtasia Studio 8.

Análisis de la pregunta 1 a)

> a) ¿En qué funciones existe el límite en todo su dominio? Explique

Figura 15. Pregunta 1 a) de la actividad

La pregunta 1 a) que se muestra en la Figura 15**,** busca que el estudiante movilice la noción de límite en cada una de las seis funciones presentadas en el registro gráfico en Geogebra, donde encontrará funciones seccionadas, continuas por tramos, con discontinuidad removible, con discontinuidad infinita y discontinuidad tipo salto.

Se piensa que para observar las seis funciones en el registro gráfico (aprehensión perceptiva) el estudiante usará la herramienta *deslizador* y con ello cambiará la función inicial a las otras funciones. Posteriormente, se cree que el estudiante identificará el dominio de cada una de las funciones (aprehensión discursiva).

Una vez identificado el dominio de la función, se piensa que el estudiante usará conceptos relacionados a la noción del límite en un punto de una función real de variable real (aprehensión discursiva), para concluir sobre la existencia del límite en un punto en cada una de las seis funciones.

Todo ello se evidenciará cuando el estudiante lo manifieste en su hoja de trabajo, usando el registro algebraico o el registro de lengua natural.

<u>Análisis de la representación gráfica de la función F_1</u>

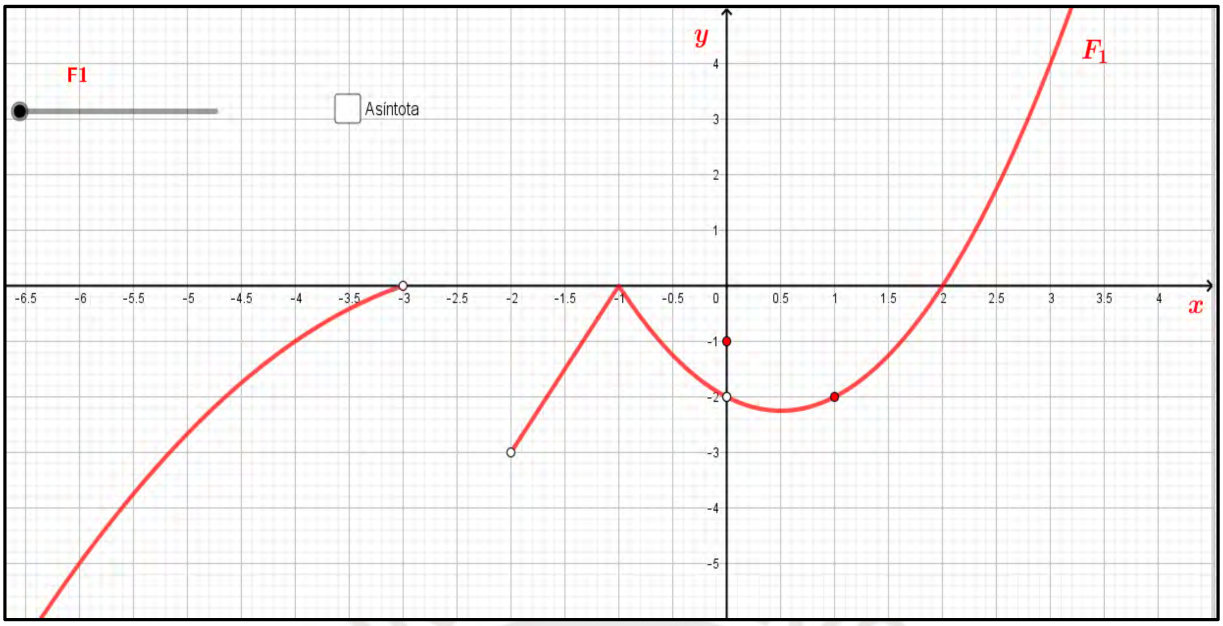


Figura 16. Representación gráfica de la función F_1.

Para la representación gráfica de la función $F_{1,}$ que se aprecia en la Figura 16, se espera que el estudiante, con su aprehensión perceptiva, logre identificar que se trata de una función real de variable real por tramos y discontinua, además pensamos que el estudiante identificará que el $domF_1 = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, +\infty \rangle$ (aprehensión discursiva) y con su aprehensión perceptiva observará que en el intervalo $\langle -\infty, -3 \rangle$, la función es continua, la asociará con las condiciones de una función continua en un punto, donde $\lim_{x \to a} F_1(x) = F_1(a)$. Con ello, podrá decir que existe el límite de F_1 en $\langle -\infty, -3 \rangle$. Esto evidenciaría una aprehensión discursiva.

En el intervalo $\langle -2, +\infty \rangle$ se cree que el estudiante, con una aprehensión perceptiva, observe que es una función discontinua. Luego identifique que se trata de una discontinuidad removible en $x = 0$ y, por ello, existe el límite de la función en $\langle -2, +\infty \rangle$.

Esto demostraría que desarrolló una aprehensión discursiva, porque movilizó el teorema de la existencia del límite en un punto para $x = 0$, para ello el estudiante debería evidenciar en su discurso la igualdad y existencia de los límites laterales $\lim_{x \to 0^+} F_1(x) = \lim_{x \to 0^-} F_1(x) = -2$.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio para representación gráfica de la función F_1

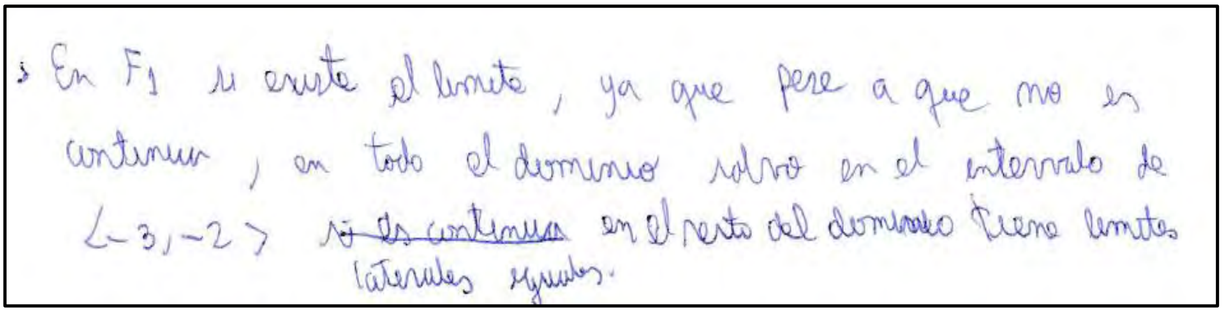


Figura 17. Respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_1

En la Figura 17 se tiene la respuesta brindada por el estudiante Julio usando el registro de lengua natural, donde manifestó que el límite de la función F_1 existe en todo su dominio.

Por tratarse de una función continua, a excepción del intervalo $\langle -3, -2 \rangle$, esta respuesta evidenció su aprehensión perceptiva del gráfico de F_1, aunque la respuesta brindada no fue la correcta, pues la función es continua, excepto en el intervalo $[-3, -2]$.

El estudiante logró reconocer que tenía la representación gráfica de una función discontinua, tal como se tuvo previsto en un inicio. El manifestar que la función es continua, a excepción del intervalo $\langle -3, -2 \rangle$, mostró su aprehensión discursiva, como lo planteamos al inicio, pues implícitamente identificó el $DomF_1$, aunque no de la forma correcta.

Creemos que el estudiante identificó que en el intervalo $\langle -\infty, -3 \rangle$ tiene una función continua y en el intervalo $\langle -2, +\infty \rangle$ se cumple que los límites laterales son iguales, esto está vinculado al teorema de existencia del límite de una función en un punto, ya que mencionó que en el resto del dominio los límites laterales son iguales. Esta conclusión evidenciaría que el estudiante desarrolló una aprehensión discursiva.

El programa Camtasia Studio 8 mostró que el estudiante se mantuvo aproximadamente dos minutos observando la representación gráfica de la función F_1 y no hubo anotaciones por parte de la investigadora.

Con todo ello, afirmamos que el estudiante Julio, aunque no haya identificado de forma correcta el $DomF_1$, logró coordinar su aprehensión perceptiva con su aprehensión discursiva para llegar a concluir que el límite de la función F_1 existe en todo su dominio.

Análisis de la representación gráfica de la función F_2

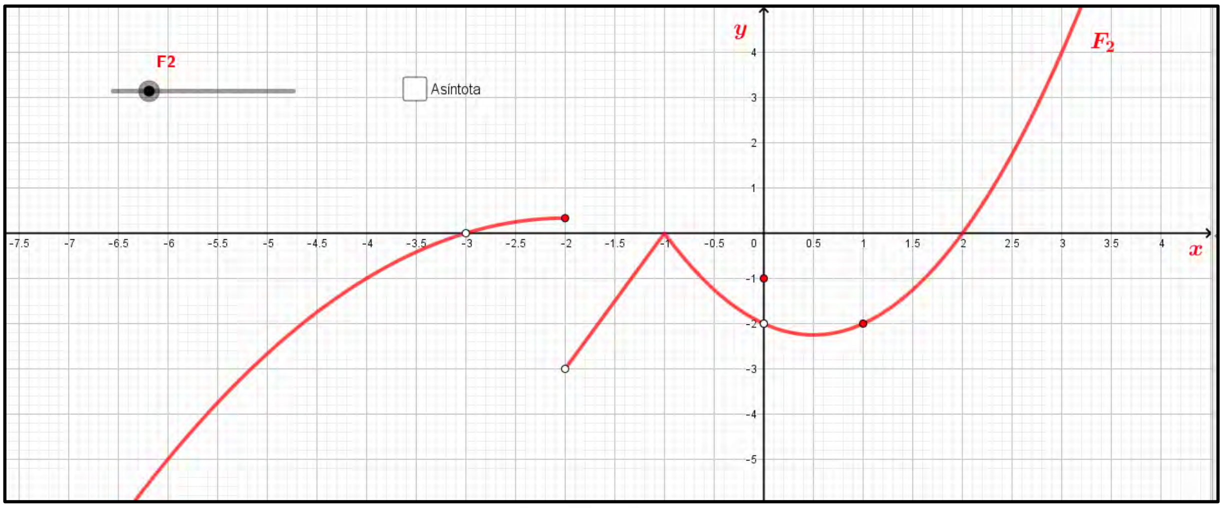


Figura 18. Representación gráfica de la función F_2.

En la Figura 18 se tiene la representación gráfica de la función F_2. Se piensa que el estudiante podrá observar (aprehensión perceptiva) que se trata de una función real de variable real, definida por tramos y discontinua. Luego identifique que el $domF_2 = \mathbb{R} - \{-3\}$ (aprehensión discursiva). Posteriormente, asociando el $domF_2 = \mathbb{R} - \{-3\}$ al teorema de la existencia de un límite en un punto, manifieste en su respuesta que en F_2 no existe el límite en todo su dominio, ya que en el valor de $x = -2$ tiene discontinuidad tipo salto donde existen los límites laterales, pero estos son distintos, por lo tanto, no existe el límite en el valor de $x = -2$.

Sí el estudiante logra evidenciar esto, diremos que realizó una aprehensión discursiva.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_2

• En F_2, no es continua ya que los límites laterales de $x=-2$ son diferentes

Figura 19. Respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_2.

Para la representación gráfica de la función F_2, el estudiante Julio, en su respuesta, evidenció una aprehensión perceptiva ya que manifestó, usando un registro de lengua natural, que F_2 no es una función continua, tal como se muestra en la Figura 19.

En un inicio manifestamos que el estudiante, al aseverar que para el valor de $x = -2$ los límites laterales son distintos y que por ello la función no es continua, nos mostraría su aprehensión discursiva, ya que muestra las condiciones que debe cumplir una función para ser continua.

El estudiante Julio manifestó al observador que, como la función no era continua por tener límites laterales distintos, eso era suficiente para que el límite en ese punto no existiera. Esto mostraría que el estudiante desarrolló una aprehensión discursiva, tal como lo esperábamos, puesto que relacionó las condiciones al teorema de existencia del límite de función en un punto.

El programa Camtasia Studio 8 mostró que el estudiante no realizó ninguna acción, solo que el tiempo en analizar esta función fue aproximadamente dos minutos. No hubo anotaciones por parte de la investigadora.

Todo lo anterior indicaría que el estudiante logró articular las aprehensiones perceptiva y discursiva para poder concluir que, en F_2 , el límite no existe en todo su dominio.

Análisis de la representación gráfica de la función F_3

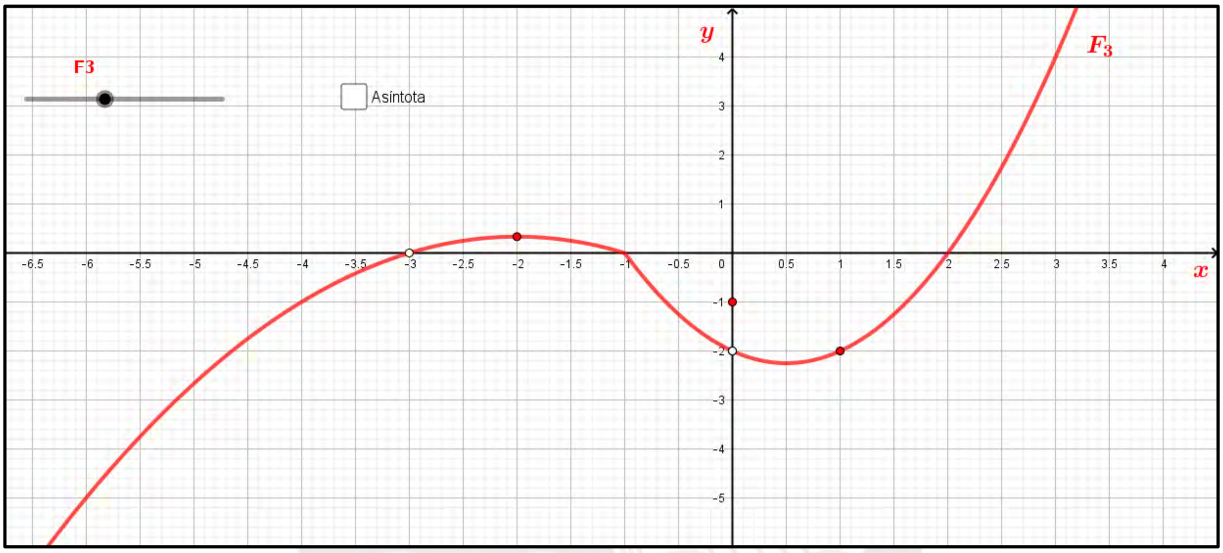


Figura 20. Representación gráfica de la función F_3.

En la Figura 20 se tiene la representación gráfica de la función F_3, se piensa que el estudiante, con su aprehensión perceptiva, logrará establecer que F_3 es una función real de variable real definida por tramos y discontinua. Luego al identificar que $domF_3 = \mathbb{R} - \{-3\}$, se puede decir que desarrolló una aprehensión discursiva, también si manifiesta que F_3 es una función con discontinuidad removible en $x = 0$ y $x = -3$, podemos afirmar lo mismo.

Por ello se cumple que existe el límite en todo su dominio, lo que evidenciaría que el estudiante realizó una aprehensión discursiva, pues en su respuesta puede manifestar que en $x = 0$ existe el límite dado que $\lim_{x \to -0^+} F_3(x) = \lim_{x \to -0^-} F_3(x) = -2$, esto justificaría que usó el teorema de existencia del límite de una función en un punto. El estudiante también puede justificar del mismo modo para $x = -3$.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_3

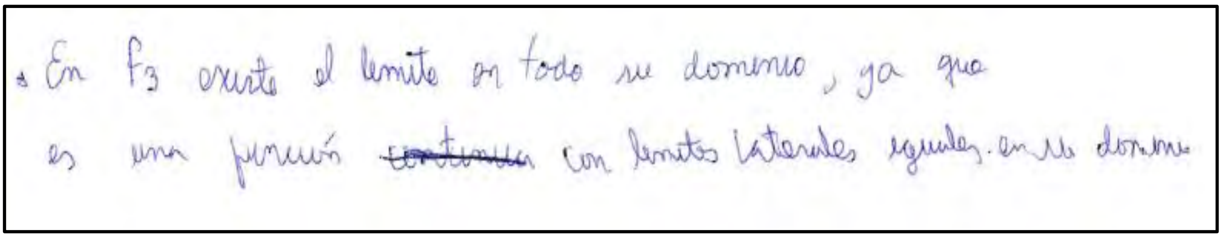

• En f_3 existe el limite en todo su dominio, ya que es una funcion ~~continua~~ con limites laterales iguales en su dominio

Figura 21. Respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_3.

Para la representación gráfica de la función F_3, el estudiante Julio manifestó, usando el registro de lengua natural tal como se aprecia en la Figura 21, que el límite existe en todo su dominio, ya que los límites laterales son iguales en todo su dominio. Esto evidenciaría una aprehensión discursiva, ya que creemos que relacionó lo que observó (aprehensión perceptiva) con el teorema de existencia del límite de una función en un punto.

Además, podemos observar que el estudiante, en un inicio, escribió que el límite existe por tratarse de una función “continua”. Esto reflejaría una aprehensión perceptiva de la representación gráfica de la función F_3, aunque esta no sea la correcta, pues la función F_3 tiene discontinuidades en $x = -3$ y $x = 0$.

Al ser consultado por la investigadora, el estudiante Julio manifestó que efectivamente en un inicio su percepción le hizo pensar que se trataba de una función continua, pero luego al ver con más detalle el gráfico, corroboró que esto no era cierto, pero que de todas formas la función tenia los límites laterales iguales en todo el dominio, y por ello si existía el límite de F_3 en todo su dominio.

El programa Camtasia Studio 8 evidenció que, en esta representación gráfica de la función, el estudiante demoró más tiempo con respecto a las otras funciones, ya que le tomó aproximadamente cinco minutos realizar el análisis de la representación gráfica de esta función. Consideramos que esto sucedió por el error que cometió al inicio de asegurar que la función era continua en todo su dominio y le tomo más tiempo volver a analizar la representación gráfica de la función F_3.

Con todo ello, podemos concluir que, a pesar que el estudiante en un inicio cometió una equivocación, logró articular las aprehensiones perceptiva y discursiva que le permitieron corregir el error y concluir que en la función F_3 existe el límite en todo su dominio.

Análisis de la representación gráfica de la función F_4

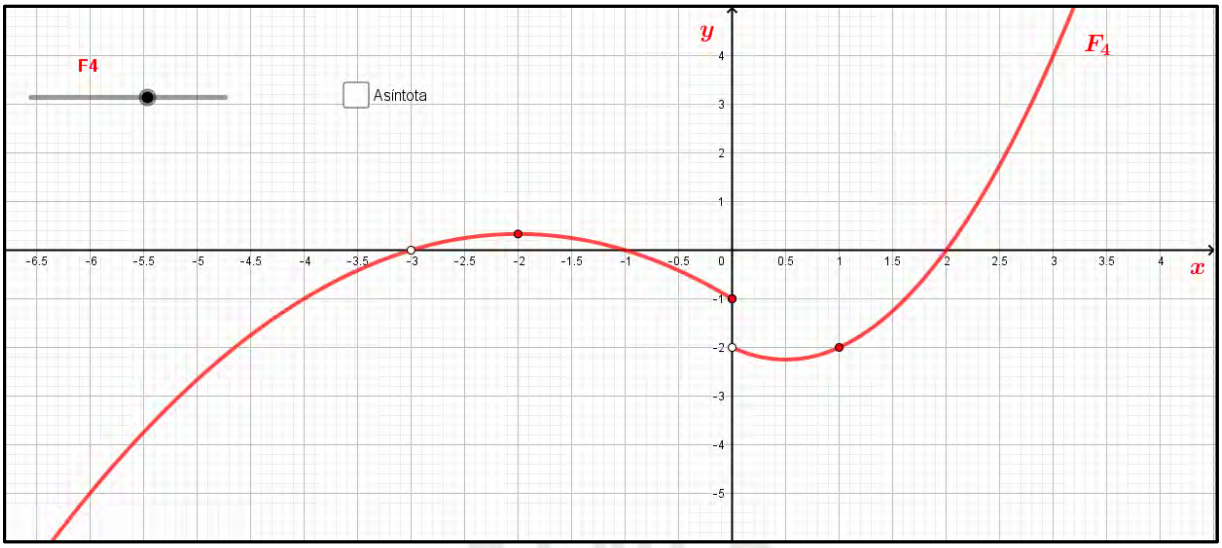


Figura 22. Representación gráfica de la función F_4

En la Figura 22 se tiene la representación gráfica de la función F_4, se espera que el estudiante, con su aprehensión perceptiva, considere que F_4 es una función por tramos y discontinua. Posteriormente identifique que $domF_4 = \mathbb{R} - \{-3\}$ (aprehensión discursiva), al vincular esto al teorema de la existencia del límite de una función en un punto, logrará reconocer que F_4 tiene una discontinuidad tipo salto en $x = 0$, en el cual existen los límites laterales, pero estos son distintos, entonces no existe el límite en $x = 0$. Por lo tanto, no existe el límite de la función en todo su dominio, podremos decir que el estudiante ha realizado una aprehensión discursiva.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_4

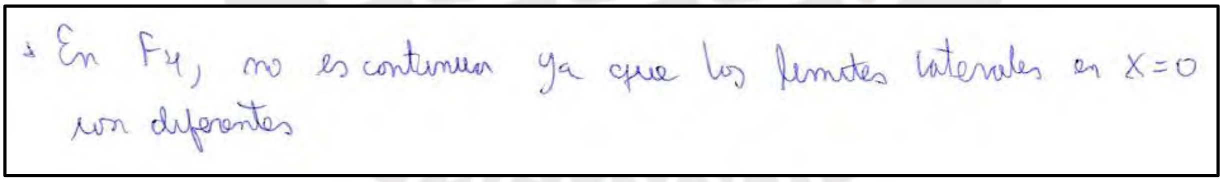


Figura 23. Respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_4

En la Figura 23, el estudiante Julio aseveró, usando un registro de lengua natural, que la función no es continua esto debe corresponder a la aprehensión perceptiva que realizó.

Para $x = 0$ manifestó que los limites laterales no existen. Esto demostró, como pensamos en un inicio, una aprehensión discursiva del estudiante ya que relacionó las condiciones de una función continua en un punto a lo que pudo percibir en $x = 0$.

El estudiante Julio no manifestó en su respuesta nada con respecto a la existencia del límite de la función en todo su dominio. Al ser preguntado por la investigadora por qué respondió usando solo la condición de que no era una función continua, manifestó que la condición suficiente para que no exista el límite en esa función era lo que él dijo para $x = 0$, los límites laterales son distintos. Creemos entonces que para él saber que una función es discontinua en un punto, es suficiente para tener la no existencia del límite en ese punto.

El programa Camtasia Studio 8 no capto ninguna modificación de la representación gráfica de F_4 y podemos decir que, en el análisis de la representación gráfica de esta función, el estudiante demoró aproximadamente dos minutos.

Con los indicios anteriores, podemos decir que Julio articuló las aprehensiones perceptiva y discursiva para llegar a concluir usando el teorema de la existencia del límite de una función, que el límite de la función F_4 no existe en todo su dominio.

<u>Análisis de la representación gráfica de la función F_5</u>

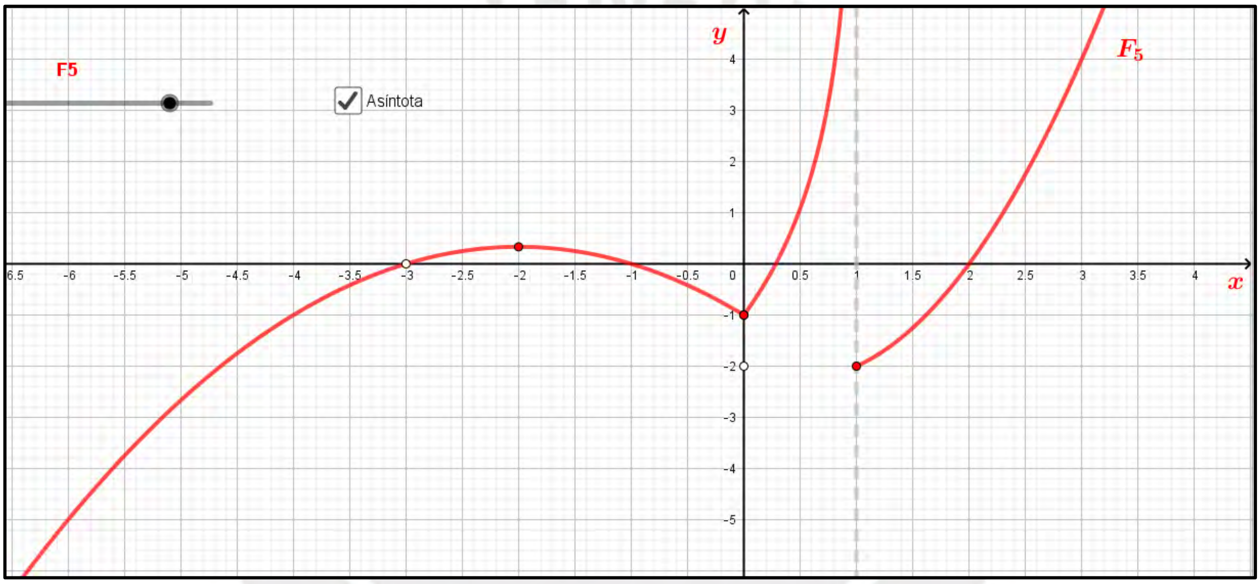


Figura 24. Representación gráfica de la función F_5.

En la Figura 24 se tiene la representación gráfica de la función F_5. Se espera que al activar la casilla *asíntota* el estudiante logrará ver el trazo de una asíntota en $x = 1$, al igual que con su aprehensión perceptiva podrá observar que F_5 es una función discontinua. Posteriormente identifique que el $domF_5 = \mathbb{R} - \{-3\}$ (aprehensión discursiva), al asociar esto al teorema de existencia del límite de una función en un punto, tendrá que el límite de F_5 en $x = 1$ no existe, puesto que $\lim_{x \to 1^+} F_5(x) = -2$ y $\lim_{x \to 1^-} F_5(x) = +\infty$ y no cumple las condiciones del teorema.

Si el estudiante logra aseverar esto en su respuesta, se puede decir que el estudiante desarrollo una aprehensión discursiva.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_5

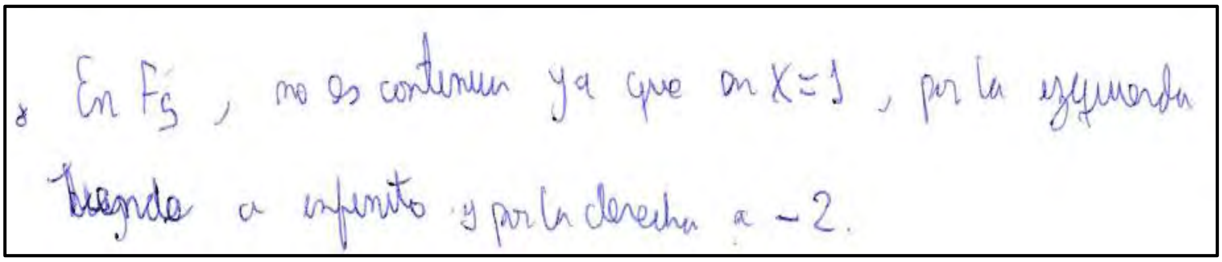


Figura 25. Respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_5.

En la Figura 25 se tiene la respuesta del estudiante Julio donde manifestó, usando el registro de lengua natural, que F_5 no es una función continua, lo cual mostró su aprehensión perceptiva. Luego al afirmar que la función no es continua, ya que para $x = 1$, el límite por la derecha es -2 y el límite por la izquierda tiende a infinito, demostró, como se esperaba al inicio el desarrollo de una aprensión discursiva, ya que usó las condiciones del teorema de una función continua.

El estudiante no mencionó en su respuesta nada acerca de la existencia del límite de la función en todo su dominio; esto podría ser porque para él fue suficiente que la función sea discontinua para que el límite de esa función en un punto no exista.

El programa Camtasia Studio 8 captó que Julio activó la casilla para obtener la asíntota en $x = 1$ y analizó la gráfica de la función aproximadamente dos minutos, mas no realizó ningún tratamiento con la gráfica. El estudiante manifestó a la investigadora que la condición suficiente, para que el límite no exista en $x = 1$, es que los límites laterales son distintos.

Con toda esa información, concluimos que el estudiante articuló las aprehensiones perceptiva y discursiva pues le permitieron definir que el límite de la función F_5 no existe en todo su dominio, por ser una función discontinua en $x = 1$.

Análisis de la representación gráfica de la función F_6

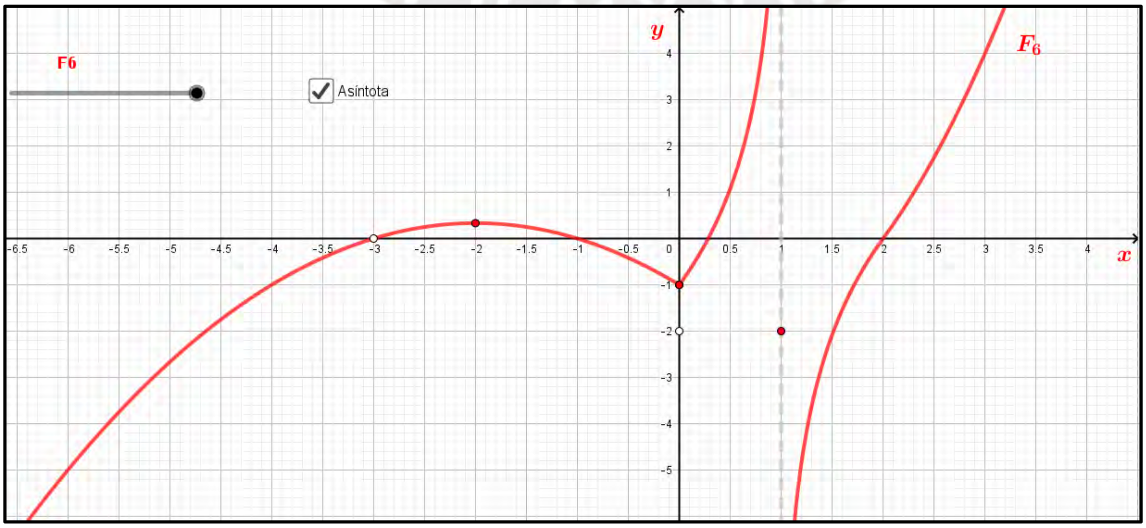


Figura 26. Representación gráfica de la función F_6

En la Figura 26 se tiene la representación gráfica de la función F_6. Al activar la casilla *asíntota,* el estudiante logrará ver el trazo de una asíntota en $x = 1$.

Con esto pensamos que el estudiante, con su aprehensión perceptiva, logrará observar que F_6 es una función discontinua. Luego pensamos que identificará que $domF_6 = \mathbb{R} - \{-3\}$ (aprehensión discursiva), si el estudiante logra asociar esto al teorema de la existencia del límite de una función, podrá manifestar que en $x = 1$ el límite no existe, ya que no existen los límites laterales. Si lo pone de manifiesto en su respuesta, podremos asegurar que el estudiante desarrolló una aprehensión discursiva.

<u>Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_6</u>

* En F_6, tampoco es continua ya que en el punto $x = 1$ sus límites laterales son asíntotas hacia $+\infty$ y $-\infty$, por la izquierda y derecha respectivamente.

Figura 27. Respuesta del estudiante Julio para la representación gráfica de la función F_6

Para la representación gráfica de la función F_6 el estudiante Julio destaca usando un registro de lengua natural, tal como muestra la Figura 27, que la función no es continua, lo cual evidenció su aprehensión perceptiva. Posteriormente al afirmar que para $x = 1$, los límites laterales tienen tendencia hacia $+\infty$ por la derecha y $-\infty$ por la izquierda, tal como se había previsto, mostró que desarrolló una aprehensión discursiva ya que verificó las condiciones que debe cumplir el teorema de una función continua.

El estudiante Julio manifestó a la investigadora el hecho de tener los límites laterales con tendencias diferentes, pues el límite tiende $+\infty$ por la derecha y $-\infty$ por la izquierda, era condición suficiente para que el límite en $x = 1$ no exista.

El grabador de pantalla captó que efectivamente el estudiante activó la casilla asíntota y demoró aproximadamente dos minutos analizando la gráfica de la función F_6.

Estas evidencias nos mostrarían que el estudiante articuló su aprehensión perceptiva y su aprehensión discursiva y con ello pudo concluir que, por tener los límites laterales distintos en $x = 1$, el límite en ese punto no existe y por tanto, como es un valor que pertenece al $DomF_6$, entonces no existe límite en todo el dominio de la función F_6.

Análisis de la pregunta 1b)

b) ¿Cuál de las siguientes ***funciones F*** del ***Geogebra P1*** cumple las siguientes condiciones para $\boldsymbol{b \in Dom(F)}$? Explique

i. $\nexists \lim\limits_{x \to b^+} F(x)$

ii. $\exists\, F(b)$

Figura 28. Pregunta 1 b) de la actividad.

La pregunta 1 b), Figura 28, tiene como objetivo lograr que el estudiante identifique la función en la cual no existe el límite lateral por la derecha en un punto, pero sí existe la imagen de ese punto, con lo cual se tiene la no existencia del límite en ese punto.

Esperamos que para $x = 1$, en la representación gráfica de la función F_6, el estudiante reconozca que $\lim\limits_{x \to 1^+} F_6 = -\infty$, con lo cual tendrá que $\lim\limits_{x \to 1^+} F_6$ no existe por no tratarse de un valor real.

Esto nos demostrará que el estudiante desarrolló una aprehensión discursiva y posteriormente el estudiante, con su aprehensión perceptiva, identificará que $f(1) = -2$.

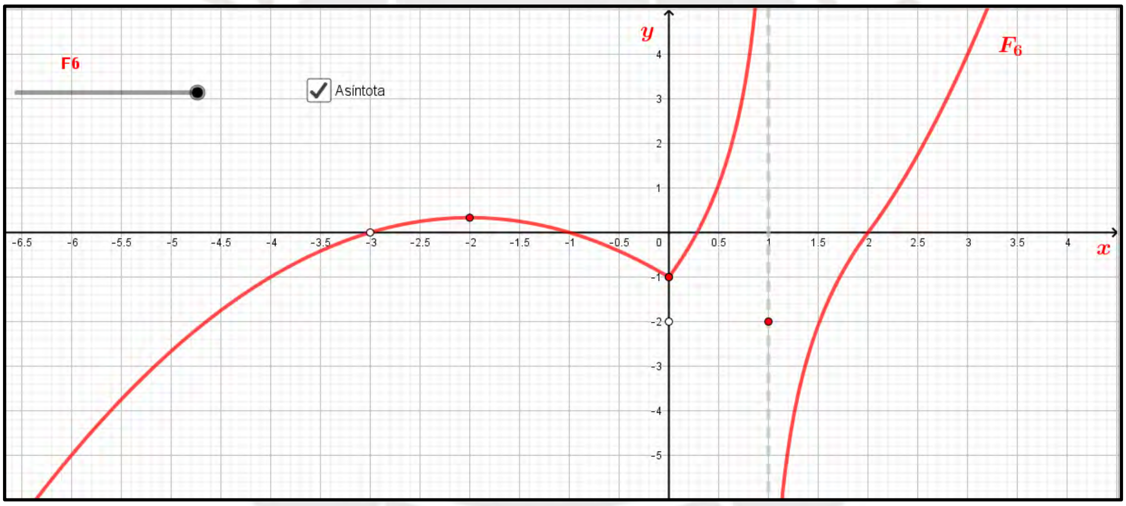


Figura 29. Representación gráfica de la función F_6.

Pensamos que con el análisis y la coordinación de estas aprehensiones, el estudiante concluiría que la función F_6, cuya representación gráfica se aprecia en la Figura 29, es la que cumple con las condiciones solicitadas.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la pregunta 1 b)

* En F6, notamos que no existe el límite de F(x) cuando tiende a 1 por la derecha, ya que se va hacia el $-\infty$, pero observamos que si existe el valor de la función evaluada en ese punto

Figura 30. Respuesta del estudiante Julio para la pregunta 1 b)

En la Figura 30, el estudiante Julio afirmó, usando el registro de lengua natural, que la función F_6 cumple con las condiciones pedidas, puesto que manifestó que para $x = 1$ no existe el límite lateral por la derecha por tener una tendencia hacia $-\infty$, esto muestra su aprehensión discursiva tal como se tenía previsto.

Luego manifestó, en su respuesta, usando un registro de lengua natural "Observamos que sí existe el valor de la función evaluada en ese punto". Esto evidenciaría una aprehensión perceptiva del punto $(1, F_6(1))$. Con todo ello, se puede decir que Julio articuló estas dos aprehensiones y pudo concluir que la función $F_{6,}$ tal como lo habíamos previsto.

Pregunta 2

2. Abra el ***archivo P2***, a continuación responda los siguientes ítems:

a) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$? Justifique.

b) Usando las herramientas del Geogebra, explique por qué el $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$ **NO es igual a 2**

c) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$? Explique

Figura 31. *Pregunta 2 de la actividad*

Se puede observar que la pregunta 2 consta de tres ítems a, b y c. Al abrir el archivo P2 de Geogebra el estudiante encontrará la representación gráfica de la función $f(x)$, como se aprecia en la Figura 32.

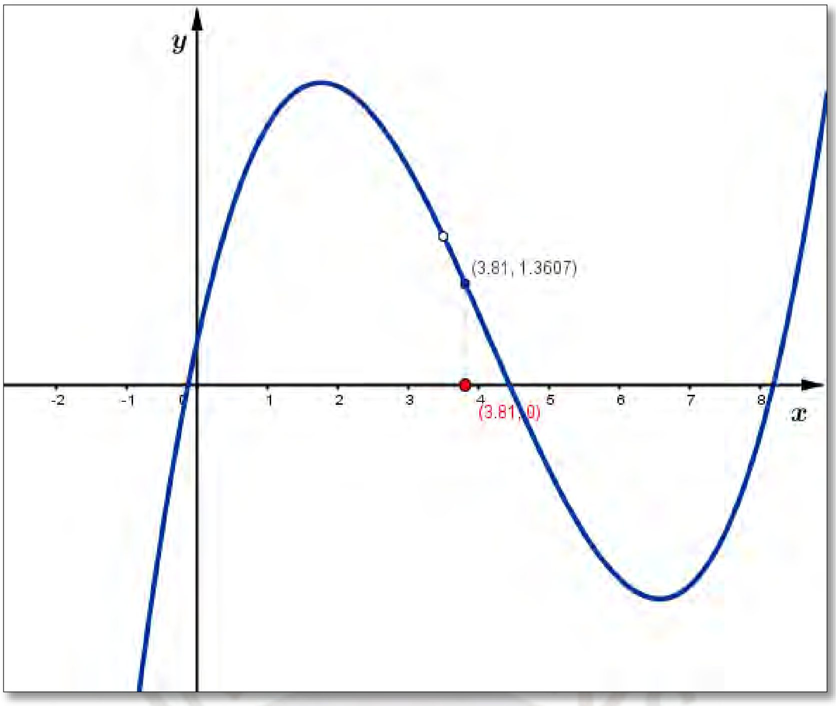


Figura 32. Representación gráfica de la función $f(x)$.

El objetivo de esta pregunta es que el estudiante realice tratamientos en el registro gráfico que, le permitan movilizar conceptos como la definición de límite, teorema de la existencia del límite en un punto y dominio de una función. En el desarrollo de esta pregunta, se espera identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico.

Análisis de la pregunta 2 a)

a) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$? Justifique.

Figura 33. Pregunta 2 a) de la actividad

Para la pregunta 2a), Figura 33, se espera que el estudiante explique que $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$ existe. Para ello, pensamos que el estudiante realizará, tal como se muestra en la Figura 34, un tratamiento en la representación gráfica de la función $f(x)$ al movilizar el punto de color rojo, para encontrar valores de $f(x)$ para x que son próximos al valor de 3.5.

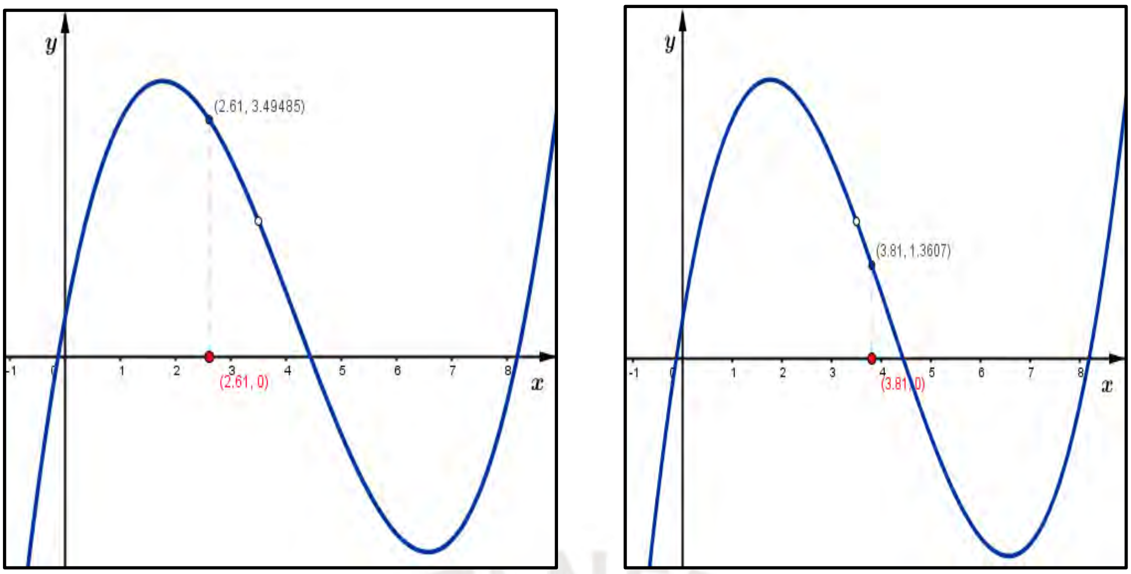


*Figura 34.*Tratamiento de la representación gráfica de la función $f(x)$.

También se consideró que el estudiante podría justificar identificando que la gráfica corresponde a una función con discontinuidad removible en $x = 3.5$. Ello mostraría que el estudiante desarrolló una aprehensión discursiva, puesto que ahí está inmerso el teorema de la existencia del límite de una función en un punto.

Otra situación que se puede presentar es que, además de justificar que el límite existe, el estudiante asuma que este límite es 2, puesto que tendrá que, por tratarse de una función con discontinuidad removible en $x = 3.5$ donde se puede volver a definir la función en $x = 3.5$, este límite sería el valor de $f(3{,}5)$. Esto evidenciaría que el estudiante desarrolló una aprehensión discursiva, por lo tanto el estudiante podría asumir que $f(3{,}5) = 2$, lo cual evidenciaría su aprehensión perceptiva.

<u>Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la pregunta 2 a)</u>

En un inicio pensamos que Julio observó la representación gráfica de la función $f(x)$ (aprehensión perceptiva), que se muestra en la Figura 32. Luego el programa Camtasia Studio 8 captó que el estudiante usó la herramienta *desplazamiento vertical* del Geogebra, para modificar las escalas de los ejes. En inicio, la escala en el eje X es de uno en uno, tal como se aprecia en la Figura 34.

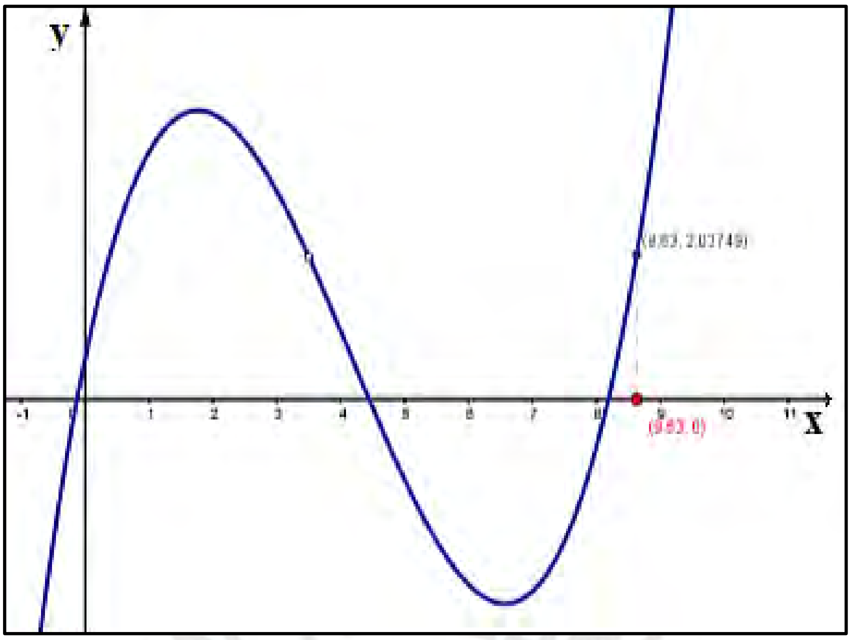


Figura 35. Representación gráfica de la función $f(x)$ con escala de uno en uno

El estudiante Julio realizó una modificación óptica al usar la herramienta *desplazamiento* del Geogebra, para aumentar la escala en el eje coordenado X, pues inicialmente como se aprecia en la Figura 35, esta escala era de uno en uno y posteriormente como lo muestra la Figura 36 esta es escala ahora es de cinco en cinco. Esto muestra que el estudiante realizó una aprehensión operatoria, ello con el fin de observar el dominio de la función $f(x)$.

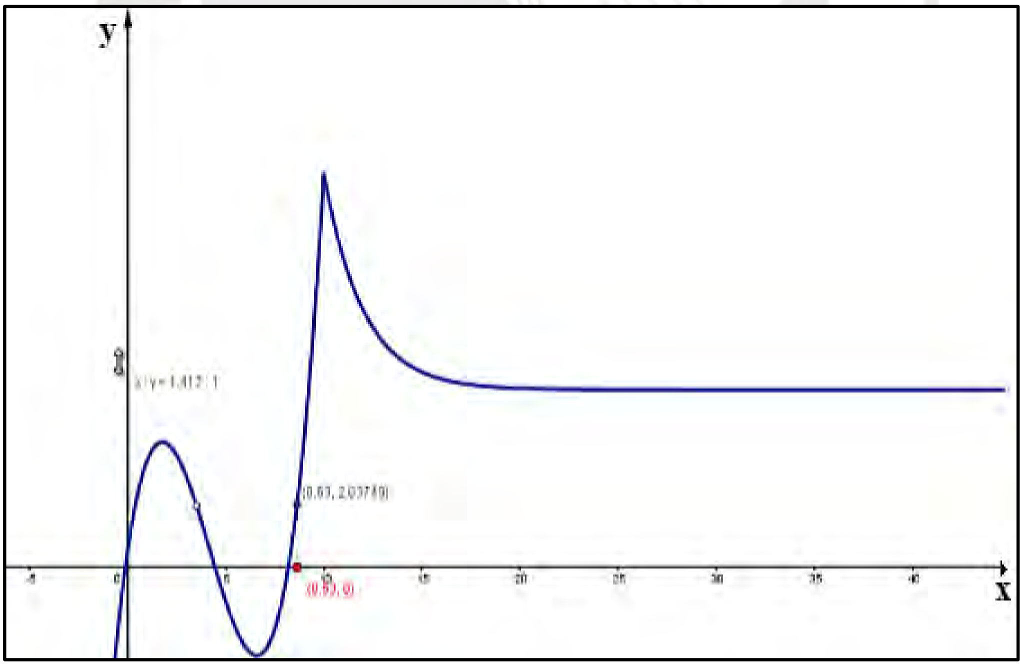


Figura 36. Aprehensión operatoria en la representación gráfica de la función $f(x)$.

Luego el programa Camtasia Studio 8 mostró que el estudiante volvió a modificar las escalas de los ejes coordenados, esta vez con el fin de ubicar a $x = 3.5$. Esto, como se tuvo previsto, evidencia una **aprehensión operatoria,** tal como se puede apreciar en la Figura 37, en la que Julio modificó la escala a una de dimensión uno, a nuestro criterio, con la finalidad de tener un acercamiento más preciso a $x = 3.5$.

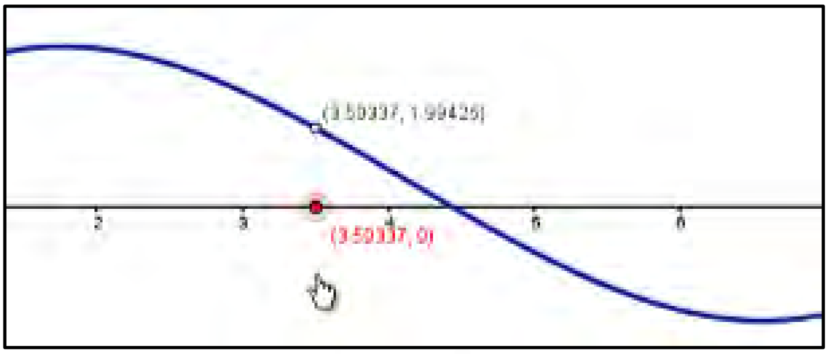


Figura 37. Aprehensión operatoria en la representación gráfica de la función $f(x)$.

Posteriormente se observa, en la Figura 38, que el programa Camtasia Studio 8 captó que Julio movilizó el punto de color rojo a valores cercanos a $x = 3.5$. Esto vendría a ser un tratamiento de la representación gráfica de la función $f(x)$**,** puesto que el estudiante movilizó el punto de color rojo en la función $f(x)$**.**

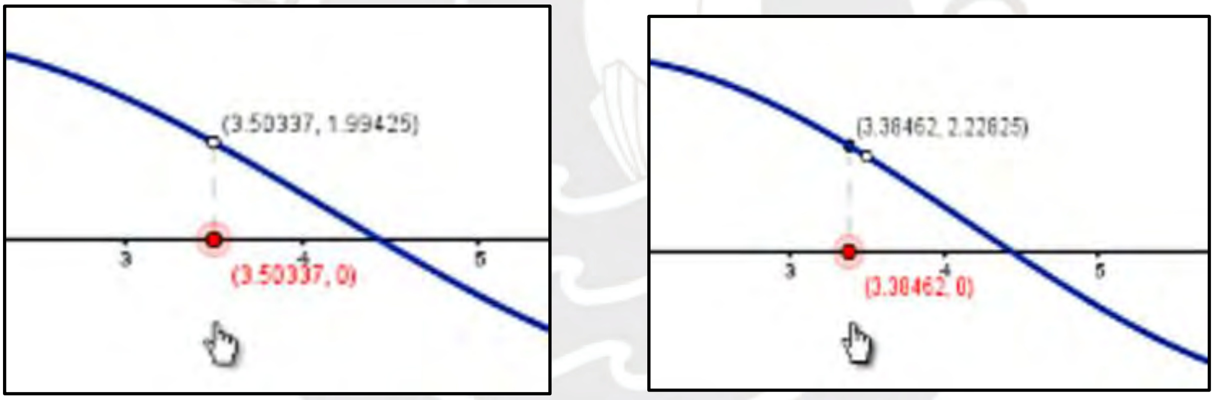


Figura 38. Tratamiento de la representación gráfica de la función $f(x)$.

El estudiante Julio mencionó a la investigadora que realizó este tratamiento con el fin de observar los valores de $f(x)$ correspondientes a los valores cercanos a $x = 3.5$, y con ello poder analizar el límite de la función $f(x)$ en ese valor.

Si existe el límite cuando x tiende a 3,5 ya que ambos límites laterales existen y son iguales. a simple vista igual a 2.

*Figura 39***.** Respuesta del estudiante Julio para la pregunta 2 a).

El estudiante Julio afirmó, en su respuesta, usando el registro de lengua natural, tal como se observa en la Figura 39, que el límite de la función $f(x)$ existe en $x = 3.5$, ya que los límites laterales existen y son iguales para el valor de $x = 3.5$. Esto, según nuestro análisis, evidenciaría una aprehensión discursiva del estudiante, ya que usó el teorema de existencia del límite de una función en un punto.

Según lo que mostró Camtasia Studio 8, el estudiante realizó un tratamiento en la representación gráfica de la función $f(x)$ y exploró en valores cercanos de $f(3{,}5)$. Esto corroboraría que el estudiante usó este teorema y por ello buscó los valores que se aproximan por la derecha e izquierda para $x = 3.5$.

Luego, en su respuesta, el estudiante mencionó que el límite de la función $f(x)$ en $x = 3.5$ es a "simple vista" el valor de 2. Esto mostraría, como lo habíamos previsto en nuestro análisis, que realizó una aprehensión perceptiva, pues asumió que como los valores de $f(x)$ para valores de x próximos a 3.5, se aproximan por ambos lados al número dos, entonces este límite es dos.

<u>Análisis de la pregunta 2 b)</u>

b) Usando las herramientas del GeoGebra, explique por qué el $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$ **NO** es igual a 2

*Figura 40***.** Pregunta 2 b) de la actividad

En la pregunta 2b), que se aprecia en la Figura 40, se espera que el estudiante realice una modificación óptica al usar la herramienta *zoom* del Geogebra, para disminuir la escala en el eje X y tener una mejor aproximación. En la Figura 41 se muestra la modificación óptica que puede realizar el estudiante dentro de su aprehensión operatoria, ya que al cambiar las escalas de los ejes coordenados, la representación gráfica de la función $f(x)$ también se modificará.

Se espera que el estudiante realice este tratamiento para obtener información sobre los valores próximos a $x = 3{,}5$ y asi relacionarlo con la definición del límite de una función en un punto.

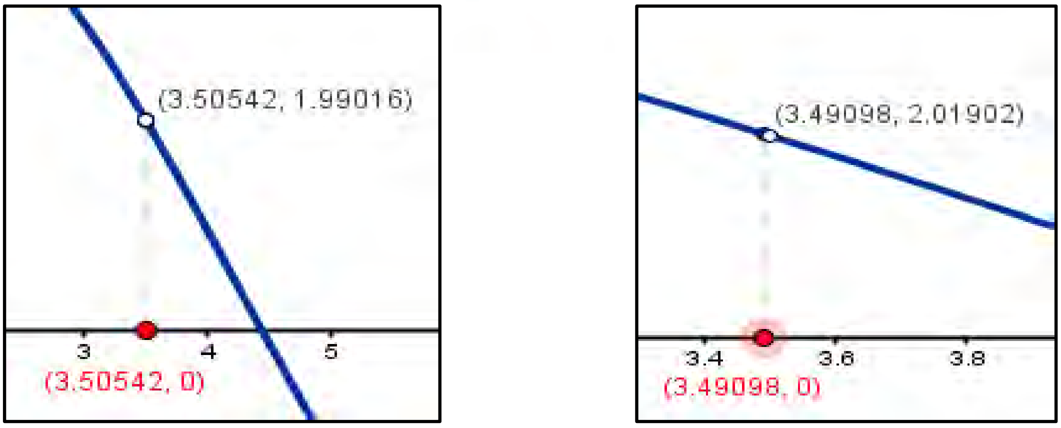


Figura 41. Aprehensión operatoria por modificación óptica

En un determinado momento al realizar varios tratamientos de modificación óptica, esta escala será tan pequeña, tal como lo muestra la Figura 42, que se obtendrá una mejor aproximación y, por medio de la aprehension perceptiva, se espera que el estudiante observe que mientras es más fina es la aproximacion el número 2, ya no pertenece al intervalo de las imágenes de los valores cercanos al número $x = 3.5$. Esto está relacionado a la definición de límite.

$$\lim_{x \to 3,5} f(x) = L$$

Si dado cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - 3,5| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Esto sucede porque el valor del límite de la función en ese punto está diseñada algebraicamente para que el valor de ese límite sea 2.0001.

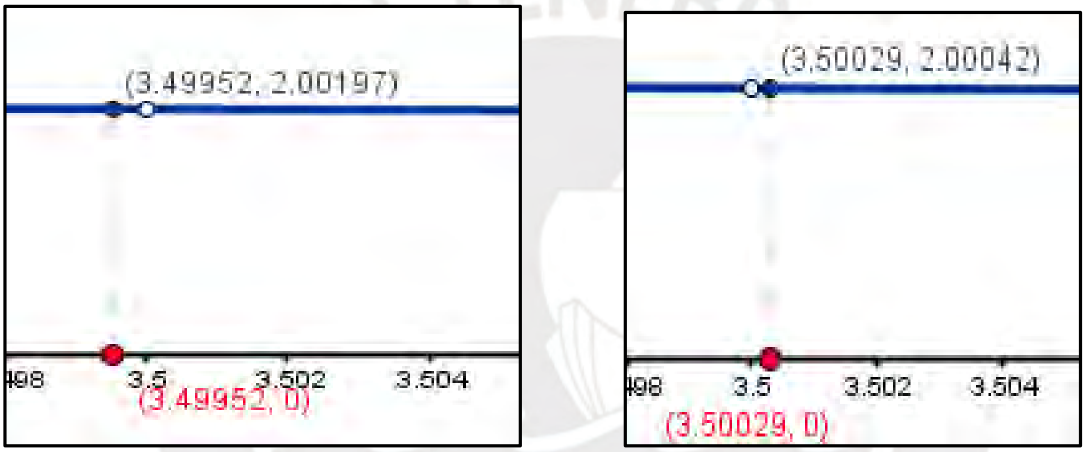


Figura 42. Aprehensión operatoria por modificación óptica

El estudiante podría explicar la relacion que guarda la pregunta con la definición de limite de una función en un punto. Esto mostraria su aprehensión discursiva del registro gráfico.

Se pensó también que el estudiante puede presentar dificultades para responder esta pregunta, pues podría no relacionarlo con la definición de límite y diga, por su aprehensión perceptiva, que ese límite toma el valor de 2, punto que en muchas ocasiones se tiende a asumir que el valor del límite en un punto siempre será un valor entero.

<u>Análisis de la respuesta del estudiante Julio a la pregunta 2b)</u>

En la figura 43 se muestra el desarrollo de esta pregunta, captado por el programa Camtasia Sudio 8, el cual grabó que Julio movilizó el punto rojo a valores cercanos a $x = 3.5$ con el propósito de observar los valores que toma la función en valores cercanos a $x = 3.5$, lo cual nos indica que el estudiante realizó un tratamiento a la representación gráfica de la función $f(x)$, puesto que él está movilizando un punto por la representación gráfica de la función.

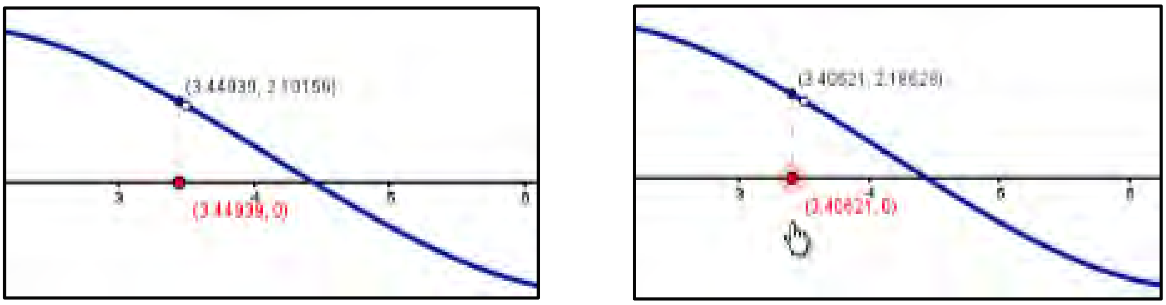


Figura 43. Tratamiento de la representación gráfica de la función $f(x)$.

El estudiante Julio buscó explicar que $\lim_{x \to 3,5} f(x)$ no es 2. Para ello, vimos con el programa Camtasia Studio 8 que el estudiante realizó la gráfica de la recta vertical $x = 3.5$, tal como lo muestra la Figura 44. Este trazo realizado, mostraría que el estudiante efectuó un tratamiento a la representación gráfica de la función $f(x)$. No estaba previsto que el estudiante realice este trazo.

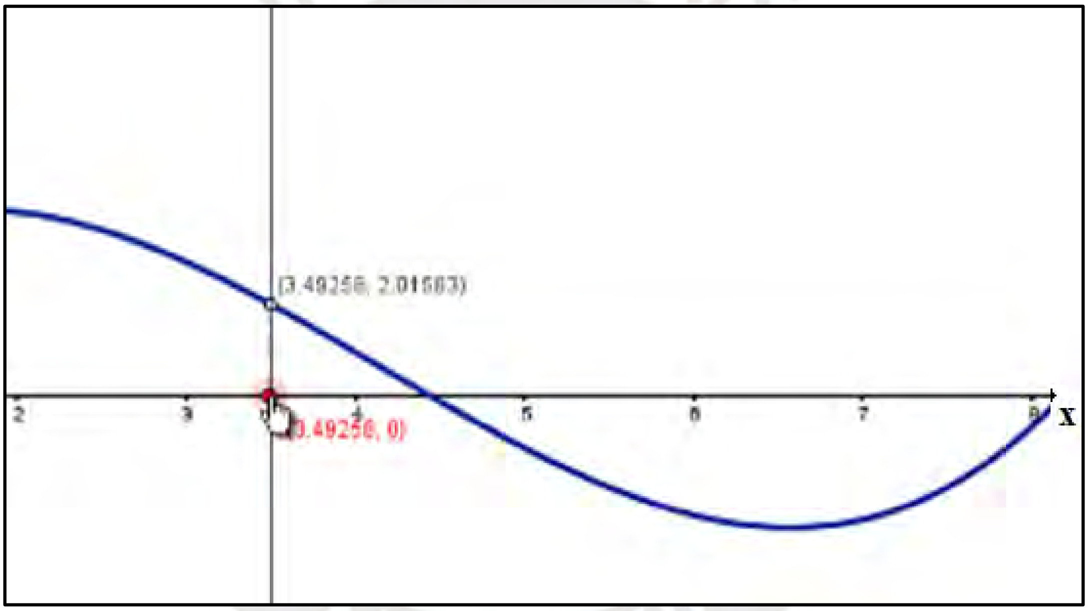


Figura 44. Tratamiento de la representación gráfica de la función $f(x)$.

Al ser consultado por la investigadora durante la resolución de la pregunta, el estudiante Julio manifestó a la investigadora que, realizó el trazo porque quería buscar la imagen de 3.5. Entonces, con ello, se pudo inferir que el estudiante desarrolló una aprehensión discursiva, ya que reconoció la existencia del límite en una función con discontinuidad removible y que el valor de este límite es $f(3,5)$, por ello, con ese trazo, buscó encontrar el valor de la función en $x = 3.5$.

Usando las herramientas del programa concluimos que dicha función no esta definida en x=2, pero para la existencia del limite solo basta con que existan limites laterales y estos sean iguales y en el programa por aproximación ambos son iguales a 2.

Figura 45. Respuesta del estudiante Julio a la pregunta 2 b).

En la Figura 45 se puede apreciar la respuesta del estudiante Julio que la dio usando un registro de lengua natural, en el cual concluyó que la función no está definida en $x = 2$ (aprehensión perceptiva), pero que ello no influye en la existencia del límite, pues basta con que los límites laterales sean iguales. Esto muestra su aprehensión discursiva, ya que reconoce el teorema de existencia del límite en un punto, pero con ello Julio no llegó a justificar que ese límite no es el valor de 2.

Realizando una aprehensión operatoria como en el análisis previo, el estudiante, pudo obtener mejores aproximaciones que le hubieran permitido observar que en un momento dado, después de realizar muchos tratamientos, el 2 no pertenece al intervalo de los valores de las imágenes de los puntos cercanos a $x = 3.5$ y esto al relacionarlo con la definición del límite le hubiera permitido justificar que efectivamente el límite de la función en $x = 3.5$ no era el valor de 2.

<u>Análisis de la pregunta 2c)</u>

c) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$? Explique

Figura 46. Pregunta 2c) de la actividad.

Para contestar la pregunta 2 c) que se aprecia en el Figura 46, pensamos que el estudiante, mediante su aprehensión perceptiva, observará que no puede determinar $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$, pues en la primera representación gráfica de la función $f(x)$, que le muestra Geogebra, no es posible observar en el eje X al número $x = 2017$, y que por ello necesita una escala de mayor dimensión (ver Figura 32).

La necesidad de encontrar $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$, se considera que hará que el estudiante modifique la escala de los ejes coordenados a una más grande, usando las herramientas *alejar* o *desplazamiento* de Geogebra que le permita observar $x = 2017$, el estudiante estaría realizando una modificación óptica que se puede apreciar en la Figura 47. Entonces este cambio de escala de acuerdo, a Duval, mostraria una aprehension operatoria, porque se está modificando las dimensiones de los ejes coordenados y, por lo tanto, se modifica la representación gráfica inicial de la función $f(x)$, pero se mantiene la forma y orientacion de esta representación.

Este cambio de dimensión en la escala y los demás tratamientos que realizó el estudiante se pudo observar con el programa Camtasia Studio 8.

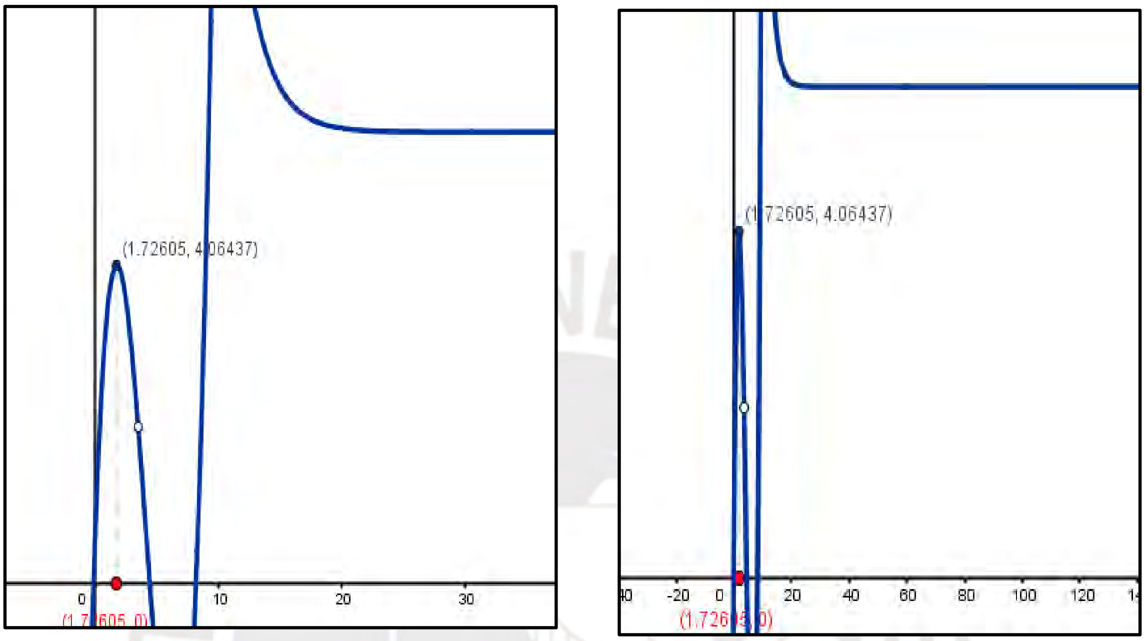


Figura 47. Modificación óptica de la función $f(x)$.

En un determinado momento, luego de realizado los tratamientos al modificar la escala del eje X hasta lograr observar el número 2016, pensamos que el estudiante, mediante su aprehensión perceptiva, podrá apreciar que la función solo está definida hasta $x = 2016$, tal como lo muestra la Figura 48.

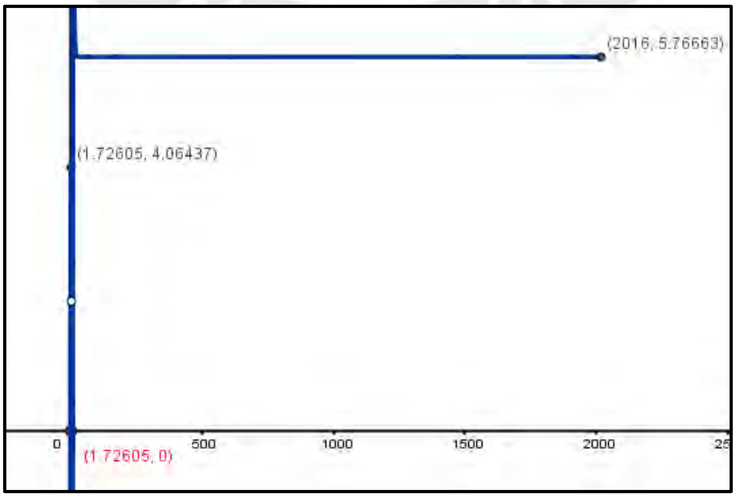


Figura 48. Modificación óptica de la función $f(x)$

Con ello, se espera que el estudiante manifieste en su respuesta que $\lim_{x \to 2017} f(x)$ no existe, pues $2017 \notin Domf$ esto dará cuenta de su aprehensión discursiva, pues reconoce el dominio de la función $f(x)$.

<u>Análisis de la respuesta del estudiante Julio a la pregunta 2c</u>

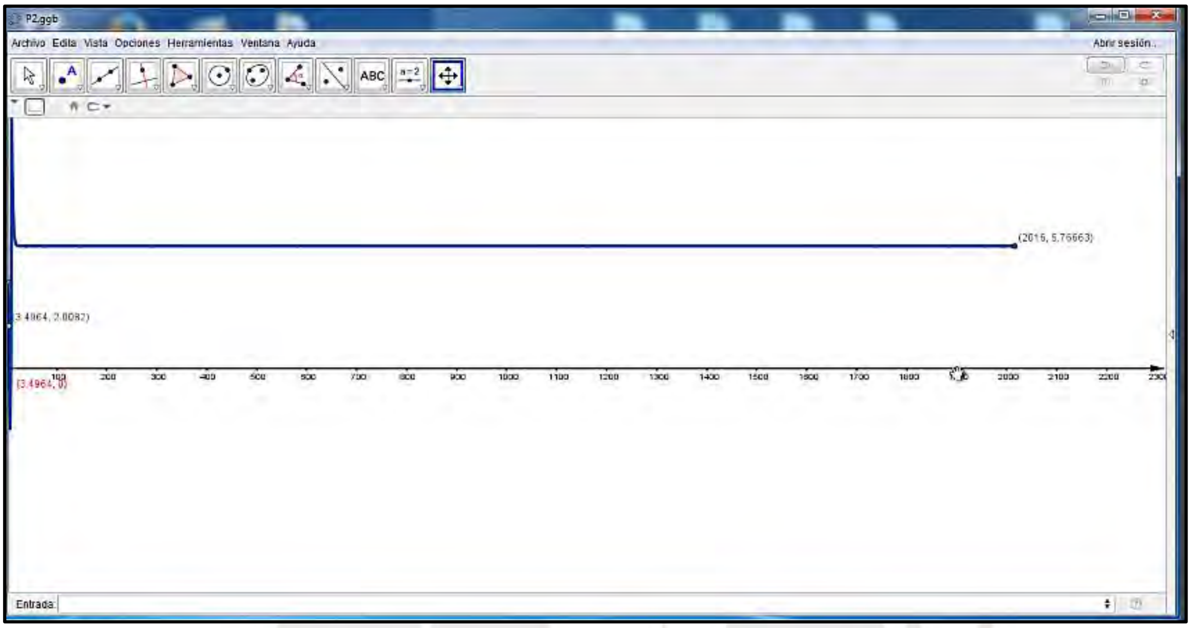


Figura 49. *Aprehensión operatoria de* $f(x)$.

En el desarrollo de esta pregunta observamos, mediante el programa Camtasia Studio 8, que el estudiante usó la herramienta desplazamiento vertical, tal como se muestra en la Figura 49, y con ello modifica la escala del eje X, esto con el fin de observar $x = 2017$. Esto muestra su aprehensión operatoria, pues modificó la dimensión de la gráfica inicial.

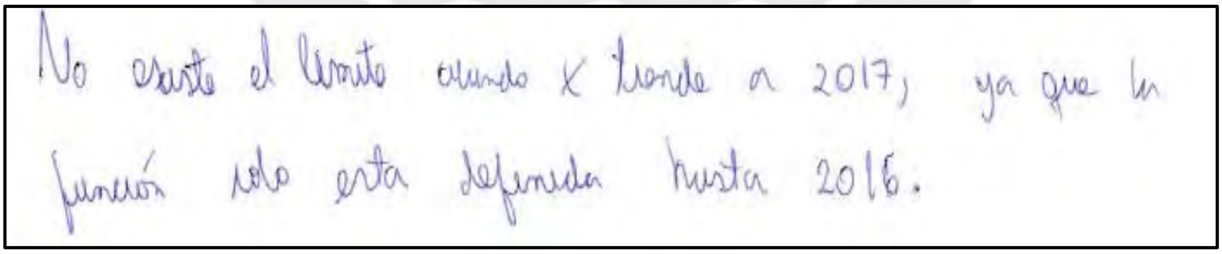


Figura 50. Respuesta del estudiante Julio para 2 c).

Una vez realizada la modificación de la gráfica, el estudiante Julio respondió usando un registro de lengua natural que, tal como muestra la Figura 50, $\nexists \lim_{x \to 2016} f(x)$ pues la función solo está definida hasta el 2016. Esto evidencia que el estudiante realizó una aprehensión perceptiva para observar que la función solo está definida hasta el valor de $x = 2016$; posteriormente identificó implícitamente que $2017 \notin Domf$ lo cual mostró su aprehensión discursiva, pues reconoció el dominio de la función $f(x)$. Luego sustentó que $\nexists \lim_{x \to 2017} f(x)$, esto evidenciaría una aprehensión discursiva, pues el estudiante estaría usando el teorema de existencia del límite de una función en un punto, dado que como la función solo está definida hasta $x = 2016$, no existen los límites laterales para el valor de $x = 2017$. Con ello podemos concluir que el estudiante Julio sí articuló las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva para concluir que $\nexists \lim_{x \to 2017} f(x)$.

SEGUNDA PARTE

Pregunta 3

Esta pregunta tiene como objetivo que el estudiante movilice la noción de límite de una función en un punto, en el registro gráfico, para tres situaciones específicas: El límite en una función constante, el límite en una función con discontinuidad removible, el límite en un extremo de la función.

En este proceso se identificaran las **aprehensiones perceptiva y discursiva** que realice el estudiante.

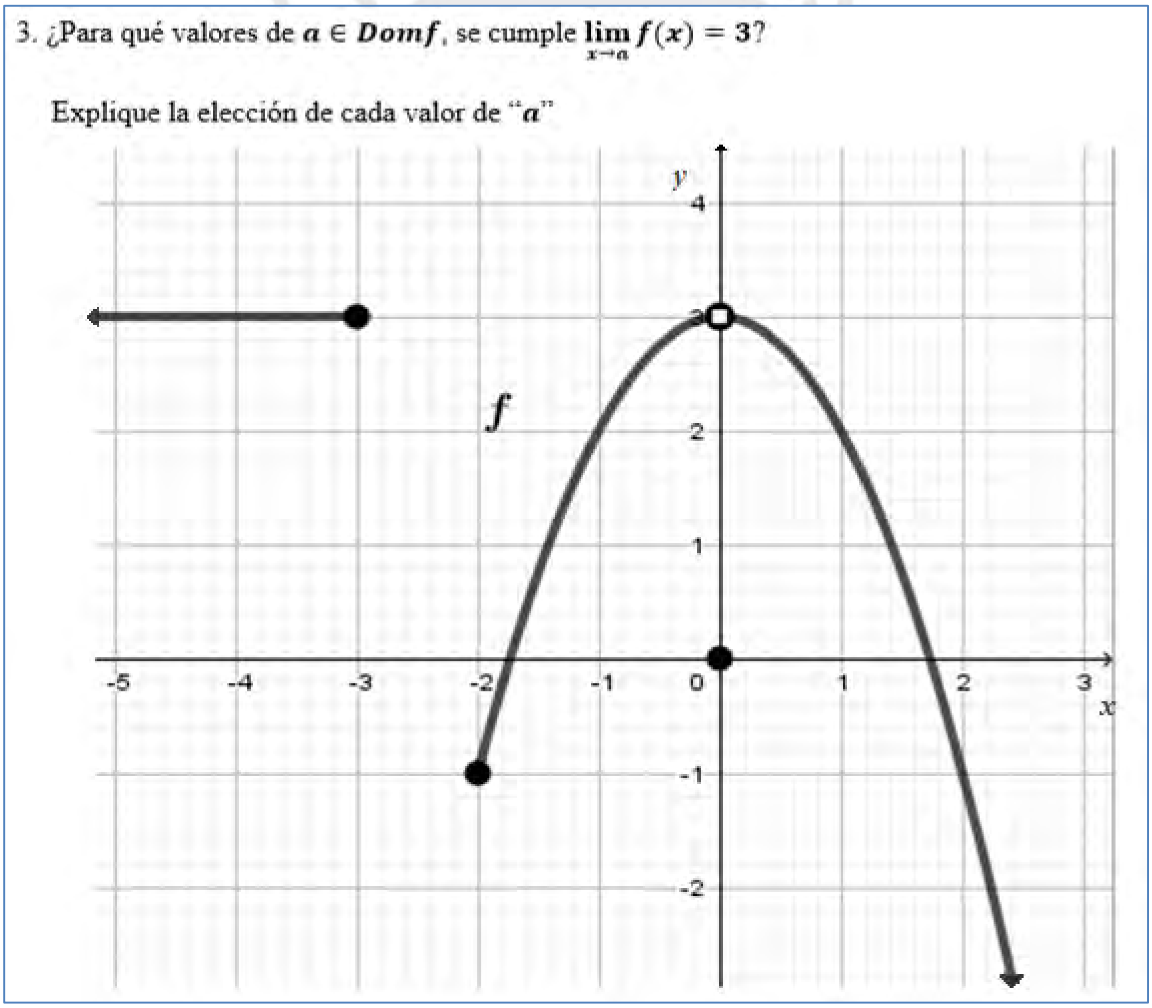


Figura 51. Pregunta 3 de la actividad.

En la Figura 51 se tiene la representación gráfica de la función $f(x)$. En un inicio pensamos que el estudiante relacionará que $\lim_{x \to a} f(x) = 3$ significa analizar los valores de a donde $f(a) = 3$, si se trata de una función continua o que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 3$ si es una función con discontinuidad removible. Este proceso mostraría que el estudiante ha desarrollado una aprehensión discursiva, pues está usando el teorema de existencia del límite de una función en un punto.

Luego se cree que, mediante su **a**prehensión perceptiva, el estudiante identificará que $f(x)$ es una función seccionada; posteriormente reconocerá que $Domf(x) = \langle -\infty, -3] \cup [2, +\infty\rangle$, tal como se aprecia en la Figura 51, lo cual evidenciaría una aprehensión discursiva.

Una vez identificado el $Domf(x)$ se piensa que el estudiante, con su aprehensión perceptiva, podrá observar que para $a < -3$, tiene una función constante; ello asociado al teorema de existencia del límite de una función en un punto para una función continua, hará que afirme que para $a < -3$, $\lim_{x\to a} f(x) = 3$, lo que daría evidencia de que realizó una aprehensión discursiva.

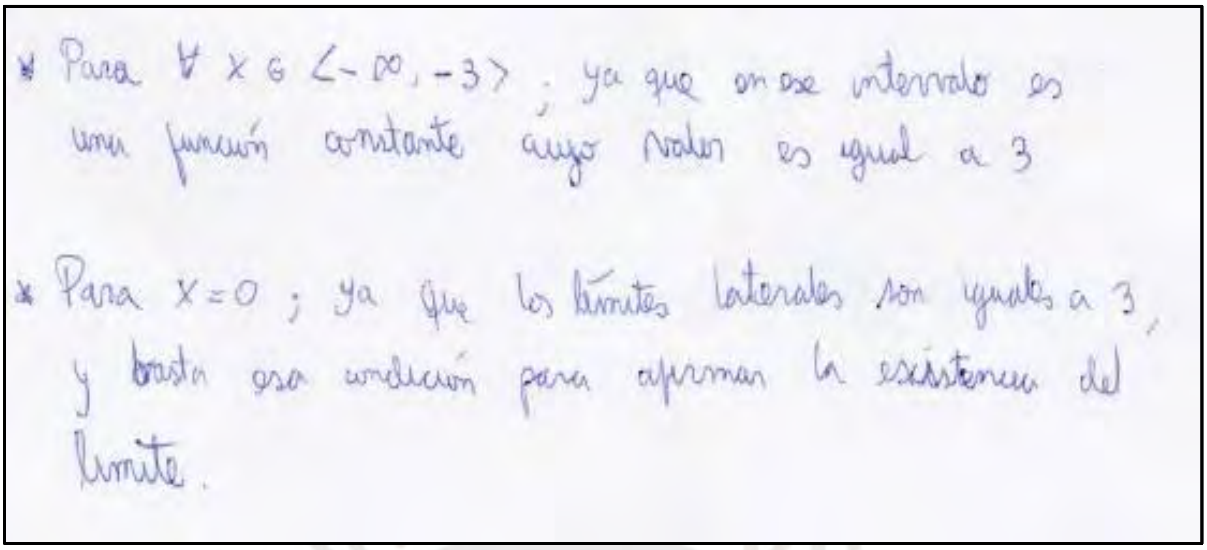
Para el valor de $a = -3$, se espera que el estudiante reconozca que no existe el límite por tratarse del extremo cerrado de una función, en el cual solo existe el límite lateral por la izquierda y se tiene que $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 3$. Si el estudiante logra evidenciar ello en su respuesta podemos afirmar que ha desarrollado una aprehensión discursiva.

Al evidenciarse todo lo mencionado anteriormente podemos decir que, según Duval (1994), el estudiante articuló las aprehensiones discursiva y perceptiva para movilizar la noción de límite y concluir en que valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x) = 3$.

Se piensa también que podría no tomar en cuenta esto y asumir que para $a \leq -3$, $\lim_{x\to a} f(x) = 3$, lo cual mostraría que el estudiante no logró desarrollar una aprehensión discursiva, pues no reconoce que $\nexists \lim_{x\to -3^+} f(x)$. Al momento, se asumió que el estudiante identificará usando su aprehensión discursiva que para el valor $a = 0$, la función tiene una función con discontinuidad removible, en donde se cumple que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 3 \to \exists \lim_{x\to 0} f(x)$. Al sustentarlo se puede decir que usó el teorema de existencia del límite de una función en un punto y esto mostraría que desarrolló una aprehensión discursiva.

<u>Análisis de la respuesta del estudiante Julio a la pregunta 3</u>

En desarrollo de esta pregunta, Julio manifestó a la investigadora en un inicio que, para encontrar los valores de a que cumplan que $\lim_{x\to a} f(x) = 3$, solo debía fijarse en los valores de x donde $f(x) = 3$. Esto mostraría, tal como se tuvo previsto, una aprehensión discursiva, pues el estudiante interpretó que $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ significa analizar los valores de a donde $f(a) = 3$, si se tratara de una función continua o que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 3$ una función con discontinuidad removible.



* Para $\forall\ x \in \langle -\infty, -3 \rangle$; ya que en ese intervalo es una función constante cuyo valor es igual a 3

* Para $x = 0$; ya que los límites laterales son iguales a 3, y basta esa condición para afirmar la existencia del límite.

Figura 52. Respuesta del estudiante Julio a la pregunta 3.

En la Figura 52 podemos apreciar la respuesta que el estudiante Julio brindó usando un registro en lengua natural.

En ella, el estudiante manifestó primero que para $x \in \langle -\infty, 3 \rangle$ tiene una función constante cuyo valor es 3 (aprehensión perceptiva), entonces para él, en este intervalo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$, significa que el estudiante reconoció que una función constante es continua en todos los valores a del intervalo $\langle -\infty, 3 \rangle$ y cumple que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y por ello en ese intervalo cumple que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$.

Esto mostraría que el estudiante Julio desarrolló una aprehensión discursiva, pues usó las condiciones que cumple el teorema de una función continua en un punto. Además de esta afirmación podemos concluir que Julio fue capaz de reconocer que para $x = 3$, el $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ no existe, lo que mostraría que usó el teorema de la existencia del límite de una función en un punto y ello evidenciaría que desarrolló una aprehensión discursiva.

Posteriormente, el estudiante afirmó que otro de los valores de a donde se cumple que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$, es $x = 0$, en el cual, según el estudiante, los limites laterales son iguales a 3 y por ello existe el límite de la función en este valor. Esto, según lo previsto, mostraría que el estudiante realizó una aprehensión discursiva, pues usó el teorema de existencia del límite de una función en un punto.

Con lo manifestado a la investigadora y la respuesta brindada por el estudiante, se puede concluir que él articuló la aprehensión perceptiva de reconocer una función constante en un intervalo con la aprehensión discursiva, al asociar esto al teorema de continuidad en un punto. Del mismo modo, en el valor de $x = 0$, se evidenció que articula la aprehensión perceptiva de reconocer implícitamente que se trata de una función discontinua, pero logró sustentarlo usando el teorema de existencia del límite de una función en un punto que el límite en este valor existe.

<u>Pregunta 4</u>

4. a) Realice un bosquejo de una función que cumpla las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty \ \text{y} \ \lim_{x\to 3} f(x) = 1 \quad \text{con} \quad Domf = \mathbb{R} - \{3\}$$

b) De la gráfica que realizaste, modificala de tal forma que $\lim_{x\to 0} f(x)$ NO exista.

Figura 53. Pregunta 4 de la actividad

Esta pregunta que se observa en le Figura 53, tiene como objetivo que el estudiante movilice la noción de límite en un punto de una función real de variable real, dadas las condiciones que debe cumplir la función $f(x)$, el estudiante debe realizar una conversión del registro algebraico al registro gráfico.

Puesto que según Duval (2012, traducción propia) "La coordinación de muchos registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos" (p. 270).

<u>Análisis de la pregunta la pregunta 4 a)</u>

a) Realice un bosquejo de una función que cumpla las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty \ \text{y} \ \lim_{x\to 3} f(x) = 1 \quad \text{con} \quad Domf = \mathbb{R} - \{3\}$$

Figura 54. Pregunta 4 a) de la actividad

En la pregunta 4 a), que se aprecia en la Figura 54, se espera que el estudiante movilice la noción del límite de una función en un punto, para casos específicos como la existencia del límite en un punto con discontinuidad removible y en un límite infinito, en el cual debe realizar una conversión del registro algebraico al registro gráfico.

En el inicio se asume que, por tratarse de una función real de variable real, el estudiante dibujará un plano cartesiano, así también se piensa que el estudiante analizará cada una de las condiciones solicitadas en la pregunta, donde puede empezar por $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$, donde se espera que el estudiante asuma que si $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ entonces significa que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$, por lo tanto realizaría una conversión al registro gráfico y presentar en su hoja de trabajo un bosquejo de la gráfica de una función continua en $(3,2)$ o una función con discontinuidad removible en $(3,2)$.

Con ello, se puede asegurar que el estudiante usó el teorema de existencia del límite de una función en un punto. Se cree que luego el estudiante debe considerar cuál de las gráficas podría corresponder a la función que cumpla con la condición de $Domf = \mathbb{R} - \{3\}$, ello haría que el estudiante graficara una función donde $\nexists f(3)$, donde se espera que el estudiante realice una gráfica con discontinuidad removible en $(3,2)$, tal como muestra la Figura 53, donde se tiene un posible bosquejo de la representación gráfica de la función $f(x)$.

Esta gráfica evidenciaría que el estudiante reconoció el dominio de una función.

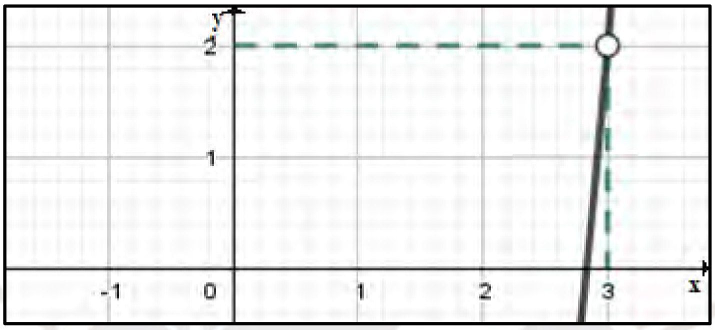


Figura 55. Posible gráfica para la condición $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$.

Ahora, con la condición $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$, se espera que el estudiante llegue a la conclusión de que $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$, es decir que los límites laterales son iguales, pero $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe por no tratarse de un valor real.

Al realizar la conversión al registro gráfico, debe llegar a una gráfica donde en $x = -2$ la función toma valores negativos demasiado grandes para valores cercanos a $x = -2$, tanto por la derecha como por la izquierda, todo ello se verá evidenciado cuando el estudiante realice un bosquejo de la representación gráfica de la función $f(x)$, como por ejemplo la Figura 56, en el cual se tiene una posible gráfica de la condición $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$.

Otra situación que se puede presentar es que el estudiante relacione la otra condición $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$ con una asíntota vertical en $x = -2$ y grafique una función con asíntota, tal como lo visto en el Capítulo II (ver figura 10). Esto mostraría que el estudiante no llega a transitar del registro algebraico al registro gráfico, pues omite lo que representa $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$ en el registro gráfico.

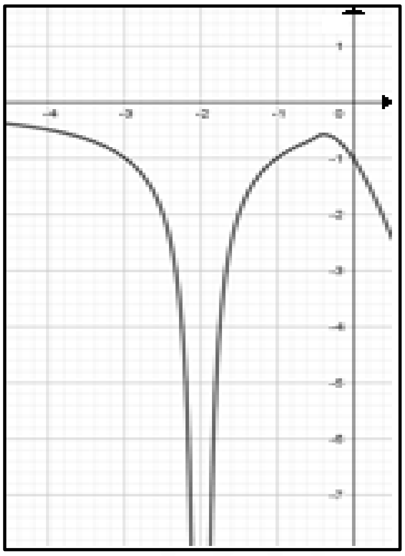


Figura 56. Posible gráfica para la condición $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$.

Al relacionar la condición $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$ con el $Domf = \mathbb{R} - \{3\}$ se tendrá la existencia de $f(-2)$. Esto se evidenciaría cuando el estudiante realice la representación gráfica de la función $f(x)$ con la existencia del punto $(-2, f(-2))$. Con todas las condiciones, pensamos que un posible bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ seria tal como se muestra en la Figura 57.

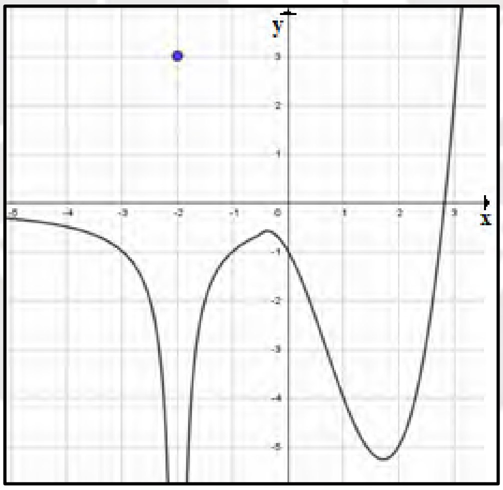


Figura 57. Posible bosquejo de la representación gráfica de la función $f(x)$.

Si el estudiante logra realizar una la representación gráfica de la función $f(x)$ similar a la Figura 57, podremos decir que el estudiante transito del registro algebraico al registro gráfico.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio a la pregunta 4 a)

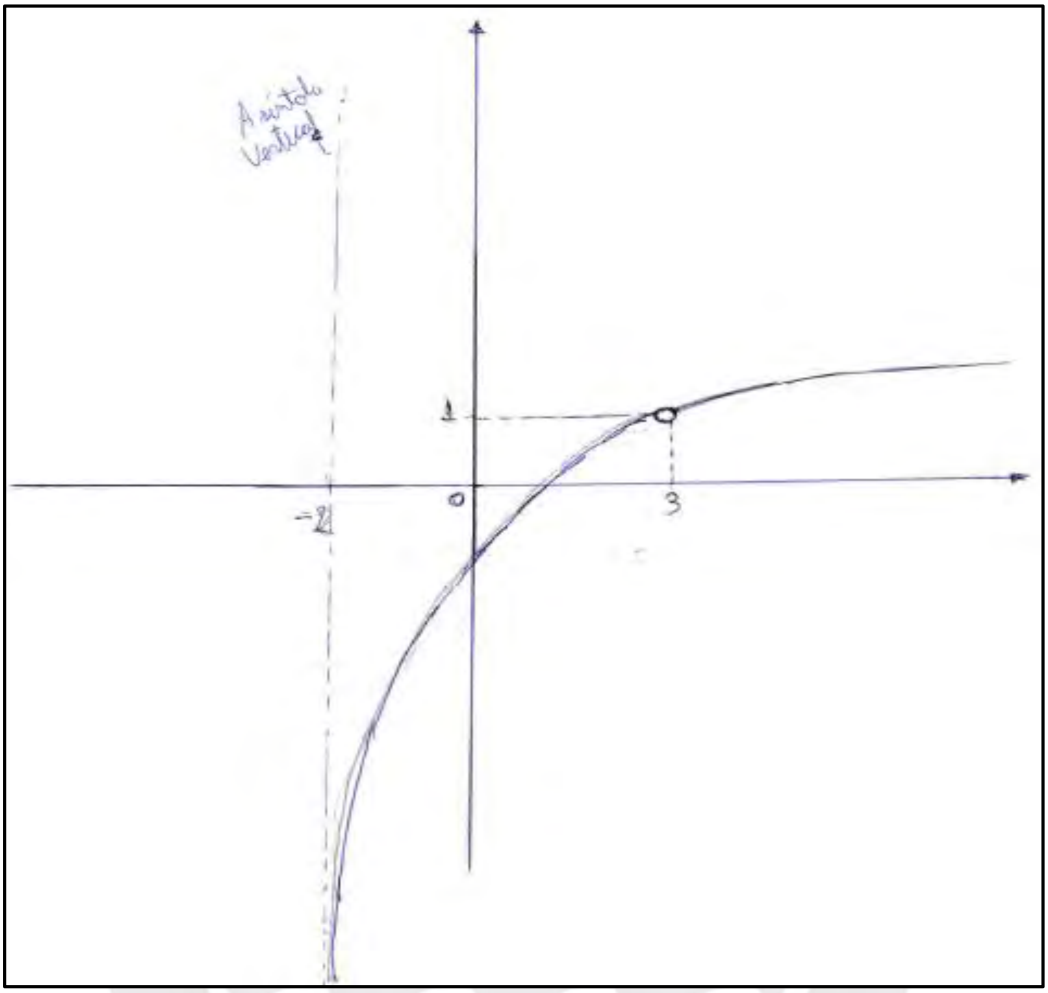


Figura 58. Representación gráfica de la función $f(x)$, realizada por el estudiante Julio.

En esta pregunta el estudiante Julio transitó del registro algebraico al registro gráfico, graficando las condiciones $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ y $Domf = \mathbb{R} - \{3\}$ en un plano cartesiano, tal como lo muestra la Figura 58, en la representación gráfica de la función $f(x)$ que realizó el estudiante se observa que graficó una función con discontinuidad removible en $x = 1$. Esto muestra que usó el teorema de existencia del límite de una función en un punto en el cual se tiene $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$, luego la representación gráfica que realizó el estudiante también evidencia que tomó en cuenta que $Domf = \mathbb{R} - \{3\}$.

Luego, para la condición $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$ en el registro algebraico, Julio realizó la conversión al registro gráfico y relaciona $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$ con la representación gráfica de la función con tendencia hacia al menos infinito en el valor de $x =. -2$ solo por el extremo derecho, tal como lo muestra la Figura 56. Esto, de acuerdo a lo previsto, indicaría que el estudiante relacionó el límite infinito de un punto con la existencia de una asíntota vertical en $x =. -2$, lo cual el estudiante manifestó como una leyenda en su gráfica.

Esto evidenciaría que el estudiante no logró transitar del registro algebraico al registro gráfico, porque no interpretó correctamente lo que significa $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$ en el registro gráfico. Asimismo el estudiante omitió que $Domf = \mathbb{R} - \{3\}$, lo cual evidenciaría que no reconoció el dominio de la función.

Finalmente, se puede concluir que el estudiante Julio no logró transitar entre el registro algebraico y el registro gráfico, al no interpretar de manera adecuada las condiciones $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$ y $Domf = \mathbb{R} - \{3\}$.

<u>Análisis de pregunta 4 b)</u>

b) De la gráfica que realizaste, modificala de tal forma que $\lim_{x \to 0} f(x)$ **NO** exista.

Figura 59. Pregunta 4 b) de la actividad.

En la pregunta 4 b) que se aprecia en la Figura 59, se pide modificar la representación gráfica realizada en la pregunta 4 a) agregándole a la función $f(x)$ una condición más. En este proceso se busca reconocer si el estudiante realiza un tratamiento adecuado a la representación gráfica que le permita cumplir con la condición solicitada.

Para contestar esta pregunta, pensamos que el estudiante analizará la nueva condición que es que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no exista, donde se espera que el estudiante use el teorema de existencia del límite de una función en un punto y con ello llegara a la conclusión de que para que no exista dicho límite la función debe cumplir que $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to 0^-} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to 0^+} f(x)$. Posteriormente el estudiante debe decidir el tratamiento que realice de tal forma que cumpla que $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

Análisis de la respuesta del estudiante Julio para la pregunta 4 b)

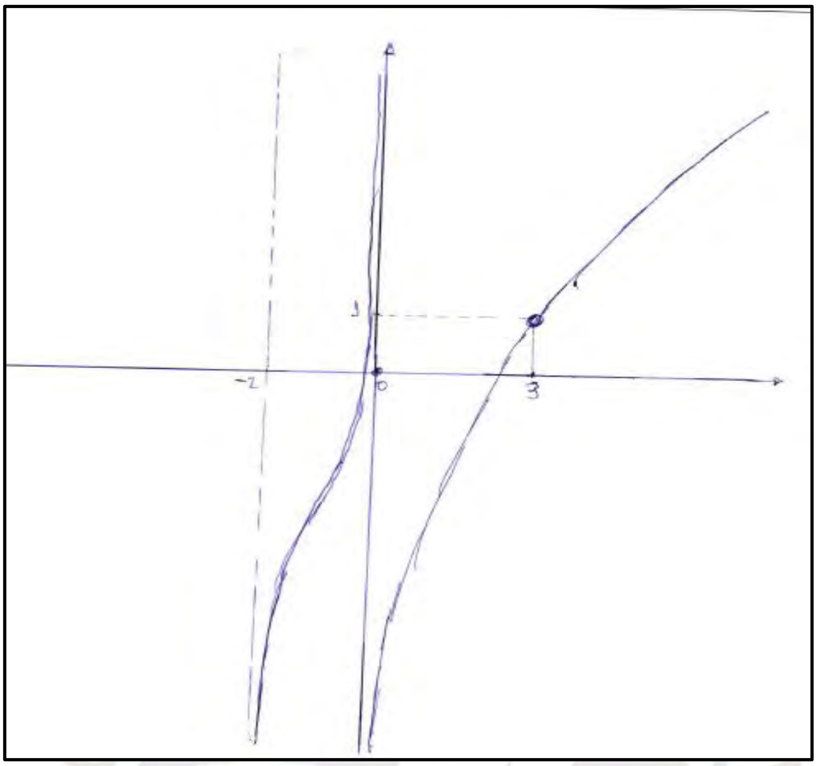


Figura 60. Representación gráfica de la función $f(x)$, realizada por Julio.

En la Figura 60 se aprecia la representación gráfica de la función $f(x)$ que el estudiante Julio realizó. En esta representación gráfica, con la nueva condición $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$, se puede observar que el estudiante graficó una función discontinua en (0,0) donde se cumple que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, puesto que inicialmente esta función era continua en el punto (0,0). A la luz de nuestro marco teórico, esto evidenciaría que el estudiante Julio realizó un tratamiento a la representación gráfica de la función basándose en su respuesta de la pregunta 4 a). Además esta función tiene discontinuidad esencial infinita puesto que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ por lo tanto $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$, por tanto podemos afirmar que en el tratamiento que realizó el estudiante, está inmerso el teorema de existencia del límite de una función en un punto

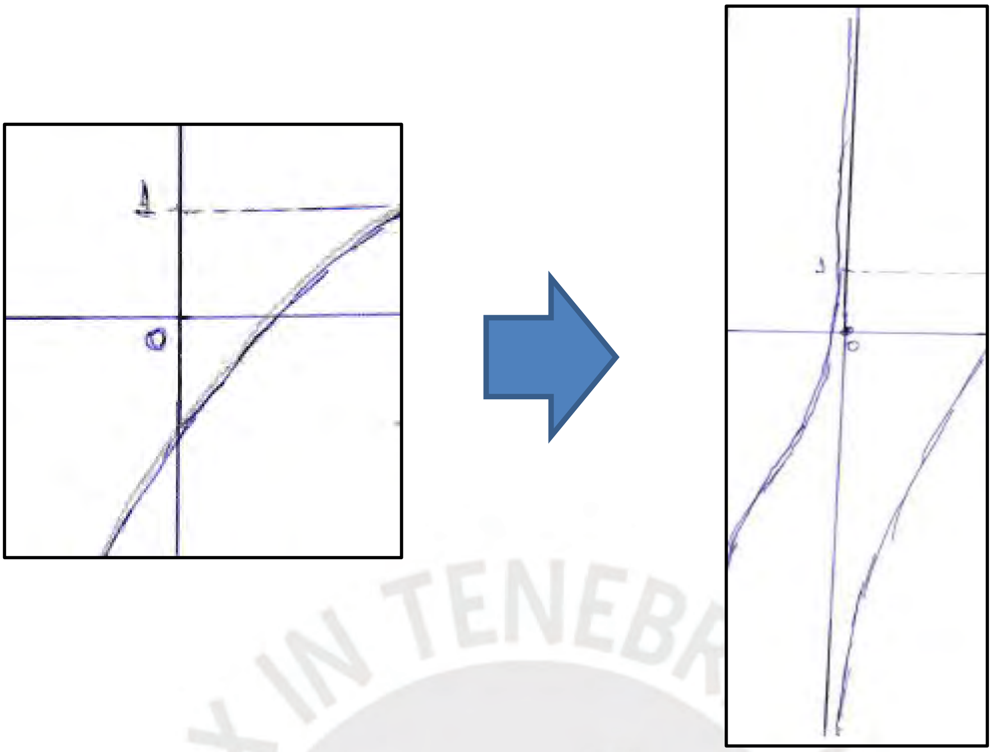


Figura 61. Modificación óptica de la representación gráfica de la función $f(x)$, que realiza Julio.

Con el tratamiento a la representación gráfica de la función $f(x)$ que realizó el estudiante Julio para que la función $f(x)$ cumpla la nueva condición, como se aprecia en la Figura 61, concluimos que él realizó un tratamiento adecuado para esa condición que le permitió transitar del registro algebraico al registro gráfico.

Concluido el análisis de cada uno de las preguntas de la actividad, en el siguiente apartado, pasaremos a presentar los resultados obtenidos.

CONSIDERACIONES FINALES

Nuestra investigación tuvo como objetivo *"Analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que los estudiantes de Ingeniería realizan cuando movilizan la noción del límite de una función, de variable real, en un punto".* En el marco de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1994), se define las aprehensiones en el registro figural, entonces en base al trabajo realizado por Ingar (2014), el estudio de visualización de valores máximos y mínimos locales de funciones reales de dos variables reales, en el cual la autora ejemplificó las aprehensiones en el registro gráfico del paraboloide usando el software Mathematica; y el trabajo de Peñaloza (2016) quien en su estudio sobre, el proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura mediado por el Geogebra, presentó ejemplos de las aprehensiones en el registro gráfico del paraboloide mediado por Geogebra 3D, pudimos ejemplificar y describir estas aprehensiones en el registro gráfico en funciones reales de variable real. Posteriormente se logró analizar la articulación de estas aprehensiones cuando los estudiantes de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo movilizaron la noción del límite.

La pregunta uno, que se trabajó con apoyo del programa Geogebra, permitió identificar y analizar cómo los estudiantes, al movilizar la noción del límite, articulaban la aprehensión perceptiva, reconociendo si la función era una función continua o no. Luego, con su aprehensión discursiva al usar el teorema de existencia del límite de una función en un punto o las condiciones de la continuidad de una función en un punto, concluían si existía el límite de la función en todo su dominio.

La pregunta dos, también trabajada con Geogebra, nos ayudó a identificar y analizar cómo los estudiantes, al movilizar la noción del límite, articulaban las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria, puesto que se pudo reconocer que los estudiantes, mediante su aprehensión perceptiva, establecieron implícitamente que la función tenia discontinuidad removible y ello articulado a la aprehensión discursiva de usar el teorema de existencia del límite de una función en un punto, llegaron a concluir que el límite en el valor solicitado existía. En la segunda parte de este problema, se pudo concluir que los estudiantes articularon la aprehensión perceptiva de reconocer implícitamente que la función tenía una discontinuidad removible y la aprehensión discursiva al usar el teorema de existencia le límite de una función en un punto, pero no desarrollaron la aprehensión discursiva de usar la definición del límite de una función en punto al realizar una aprehensión operatoria. En la tercera parte, los estudiantes sí lograron articular la aprehensión operatoria con la aprehensión perceptiva de la identificación de un punto y la aprehensión discursiva al identificar el dominio de la función.

En la pregunta tres, que se realizó a lápiz y papel, del mismo modo se logró identificar y analizar la articulación de la aprehensión perceptiva y discursiva, puesto que los estudiantes, implícitamente mediante la aprehensión perceptiva, reconocieron que la función era discontinua y estaba definida por tramos y lo articularon a la aprehensión discursiva, pues usaron el teorema de existencia del límite de una función en punto.

Finalmente, en la pregunta cuatro, que fue planteada para verificar el aprendizaje del estudiante al enfrentarse ante un problema de cambio de registro usando la noción del límite de una función, concluimos que los tres estudiantes no realizaron el cambio de registro adecuadamente, pues confunde la definición de un límite infinito con una asíntota, pero sí realizaron tratamientos adecuados en el registro gráfico cuando se le pidió modificar su representación gráfica.

En conclusión con los resultados obtenidos, en la parte experimental, podemos afirmar que se logró cumplir el objetivo general; la actividad permitió identificar, describir y analizar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que el estudiante realizó al movilizar la noción del límite de una función real de variable real. Asimismo, nos sirvió para poder analizar la articulación entre estas aprehensiones, cuando los estudiantes movilizaron la noción del límite de una función real de variable real, puesto que Duval (1994) define estas aprehensiones en el registro figural.

Al lograr nuestro objetivo general, podemos aseverar que la pregunta de investigación que nos planteamos *¿Cómo los estudiantes de Ingeniería articulan las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva cuando movilizan la noción del límite de una función, de variable real, en un punto?,* se logró responder, dado que el análisis mostró que cuando el estudiante movilizó nociones relacionadas al límite de una función, como dominio de una función, función continua y discontinua, definición del límite de una función en un punto, teorema de la existencia de un límite, entre otros, lograron desarrollar aprehensiones en cada pregunta de la actividad.

El uso del Geogebra, en la primera parte de la actividad, permitió a los estudiantes economizar al realizar tratamientos en el registro gráfico, más aun la segunda pregunta brindó una manera intuitiva de trabajar la noción del límite en un punto de una función real de variable real, puesto que el programa permitió manipular y realizar tratamientos en la representación gráfica de la función. De acuerdo con Caglayan (2015), este enfoque dinámico resulta ser más intuitivo y está basado en movimientos de un punto en la función

En nuestro trabajo, nos limitamos a trabajar con el límite en un punto de una función real de variable real, donde identificamos, describimos y analizamos las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria.

Para futuras investigaciones, se podría ampliar a trabajar con límites en el infinito, límite de funciones trigonométricas o límites de funciones de varias variables.

Asimismo se puede trabajar otros temas que involucren el uso del registro gráfico, donde para otros objetos matemáticos se puedan ejemplificar las aprehensiones en este registro. De igual forma se podría trabajar en otras investigaciones con otros softwares matemáticos.

REFERENCIAS

Blázquez, S., & del Rincón, T. O. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *4*(3), 219-236.

Caglayan, G. (2015). Math majors' visual proofs in a dynamic environment: The case of limit of a function and the ϵ–δ approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(6), 797-823. Doi: https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465

De Aguas, L. G. (2015) Diseño de una propuesta de aula para la enseñanza del concepto de límite de una función aplicando el ambiente geométrico dinámico Geogebra (Tesis Doctoral) Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/54011/

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères-IREM, (17), pp. 121-138. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus*, 11-33.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. (Myriam Vega, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2012). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat, 7*(2), 266-297. Doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010).Metodología de la investigación-Quinta edición. México: Interamericana Editores S.A. Recuperado de: https://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sampieri

Ingar, K. (2014). *A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais*. (Tesis doctoral inédita). Pontificia Universidad Católica de São Paulo. São Pablo, Brasil. Recuperado de: http://www.pucsp.br/janus/repositorio-de-pesquisas

La Plata de la Cruz, C. (2014) Errores en torno a la compresión de la definición de limite finito de una función real de variable real (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5570

Leithold, Luis (1998) El Cálculo (7ma edición). México, Editorial Mexicana.

Londoño N, Narro P, Vera A (2013).Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación. *El Cálculo y su enseñanza*. Vol(5), p 91-106

Martínez, C. P. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. En *Pensamiento & Gestión* 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

Molfino, V., Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: Un análisis de su institucionalización. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias.* 5(1) 27-41.

Peñaloza, T. (2016). Proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura mediado por el Geogebra. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7204

Plaza, J. A. F., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, *33*(2), 211-229. Recuperado de: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/293273

Richit, A., Benites, V. C., Escher, M. A., & Miskulin, R. G. S. (2012). Contribuições do software Geogebra no estudo de Cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de Geología. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657*, *1*(1), 90-99. Recuperado de https://revistas.pucsp.br//index.php/IGISP/article/view/8385

Tomás, J. B. P. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante). Recuperado de

https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf

ANEXOS

ANEXO Nº 1

ACTIVIDAD

Nombre:……………………………………………………………………………………………..

1. Abra el ***archivo*** $\boldsymbol{P1}$, a continuación responda los siguientes ítems:

a) ¿En qué funciones existe el límite en todo su dominio? Explique

b) ¿Cuál de las siguientes ***funciones F*** del ***Geogebra*** $\boldsymbol{P1}$ cumple las siguientes condiciones para $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Dom}(\boldsymbol{F})$? Explique

i. $\nexists \lim\limits_{x \to b^+} F(x)$

ii. $\exists\, F(b)$

2. Abra el ***archivo*** $\boldsymbol{P2}$, a continuación responda los siguientes ítems:

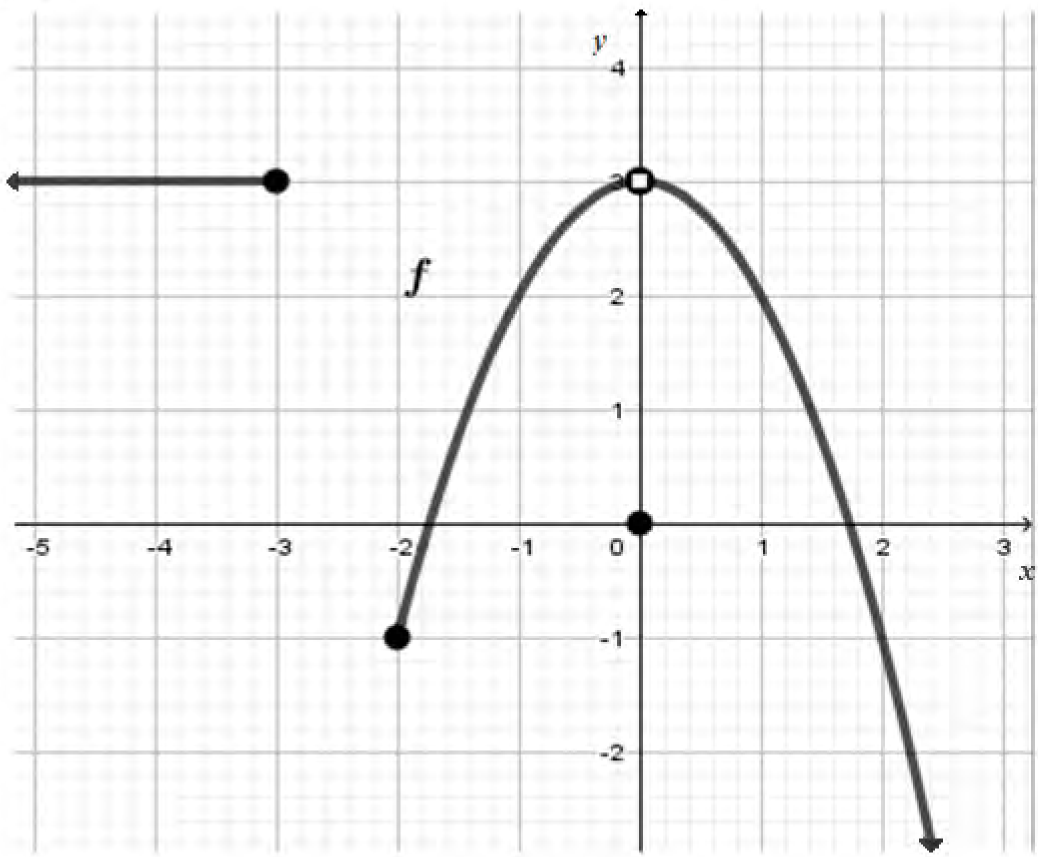
a) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$? Justifique.

b) Usando las herramientas del Geogebra, explique por qué el $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$ **NO es** igual a 2

c) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$? Explique

3. ¿Para qué valores de $a \in Domf$, se cumple $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$?

Explique la elección de cada valor de "a"



4. a) Realice un bosquejo de una función que cumpla las siguientes condiciones:

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$ con $Domf = \mathbb{R} - \{3\}$

b) De la gráfica que realizaste, modifícala de tal forma que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **NO** exista.

ANEXO Nº2

FICHA DE OBSERVACIÓN

Nombres y apellidos del observador:…………………………………………………………...

Fecha:…………….

Describa las acciones de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad.

Nombre del Estudiante:

Nombre del Estudiante:

Nombre del Estudiante:

Nombre del Estudiante:

ANEXO Nº 3

DESARROLLO DE ACTIVIDAD

18-10-2017

FICHA DE RECOJO DE INFORMACIÓN

Apellidos y Nombres: ____

Edad: ________________________ Sexo: M F

Carrera profesional: ______________________________________

Universidad donde realiza sus estudios: _______________________________________

¿Ha llevado el tema de límite de funciones reales de variable real?	
¿En qué ciclo estudia este tema?	
¿Ha usado el software Geogebra para el estudio de este tema?	

ANEXO Nº 4

MALLA CURRICULAR (ADAPTADO) DE LA E.A.P DE INGENIERÍA DE SEGURIDAD Y SALUD EN EL TRABAJO DE LA UNMSM