

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



**PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ**

**ANÁLISIS DEL ESFUERZO DE CONTACTO EN ENGRANAJES
CILINDRICOS DE EJES PARALELOS DE PERFIL EVOLVENTE
MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Tesis para optar el título de Ingeniero Mecánico, que presenta el bachiller:

Hernán Luis Infanzón García

ASESOR: Rosendo Franco Rodríguez

Lima, Mayo del 2010

RESUMEN

Los engranajes han sido desde hace mucho tiempo uno de los elementos de máquinas más usados para la transmisión de potencia mecánica en la industria. Esto ha impulsado su estudio para optimizar su funcionamiento y poder calcular la capacidad de carga de estos elementos de máquinas y así evitar su falla o desgaste prematuro. Una de las principales fallas que se presentan es estos elementos es la picadura progresiva o *pitting* en el flanco de los dientes que tiene como causa fundamental el excesivo esfuerzo de contacto entre los dientes producido durante el engrane.

En la presente tesis se desarrolla el estudio del esfuerzo de contacto en los flancos de los dientes de engranajes cilíndricos de ejes paralelos (rectos y helicoidales) y perfil de evolvente determinados a partir de dos metodologías distintas:

- 1) Mediante el método de los elementos finitos, donde se definió la geometría real del diente con ecuaciones paramétricas para así poder modelar los engranajes en un software CAD y luego realizar la simulación del engrane en un software CAE.
- 2) Mediante cálculos analíticos según las normas técnicas ISO 6336, DIN 3990 y AGMA2105-C95, donde se determinó el esfuerzo de contacto actuante a partir de las expresiones que proponen cada una de estas normas pero solo tomando en cuenta los factores que hacen referencia a la geometría del diente y a las características de la transmisión y no a las que tienen que ver con otros parámetros que afectan el esfuerzo de contacto como las características de montaje de los engranajes y otros. Se realizaron cálculos del esfuerzo de contacto sobre una muestra de pares de engranajes con distintos parámetros geométricos y de carga para poder comparar los resultados de las dos metodologías de cálculo, y se encontró que los esfuerzos determinados a partir de las normas técnicas son de 2 a 5 veces mayores que los hallados por el método de los elementos finitos. Lo que refleja a un sobredimensionamiento de los engranajes contra la falla por picadura en el flanco del diente en los procedimientos de las normas técnicas.

**TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

TÍTULO : **ANÁLISIS DEL ESFUERZO DE CONTACTO EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE EJES PARALELOS DE PERFIL DE EVOLVENTE MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

ÁREA : Diseño

PROPUESTO POR : Dr. Rosendo Franco Rodríguez

ASESOR : Dr. Rosendo Franco Rodríguez

TESISTA : Hernán Luis Infanzón García

CÓDIGO : 2003.2103

FECHA : 20 de Abril del 2010

DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS:

El cálculo analítico de los engranajes cilíndricos de perfil de evolvente ha sido estandarizado por varias normas técnicas internacionales y nacionales debido a su gran uso e importancia en la industria. Esta tesis busca estudiar el esfuerzo de contacto de los engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente mediante el uso del método de los elementos finitos a fin de comparar los resultados obtenidos con los esfuerzos de contacto hallados analíticamente siguiendo las distintas normas técnicas, y además dar una herramienta adicional de cálculo.

Objetivo general:

- Comparar los resultados del esfuerzo de contacto de los engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente obtenidos mediante el uso del método de los elementos finitos con los cálculos analíticos para el esfuerzo de contacto que se pueden encontrar en las diferentes normas técnicas internacionales.

Objetivos específicos:

- Determinar los factores que se refieren a la geometría del engranaje a partir de las expresiones de cálculo de las normas técnicas.
- Modelar mediante la implementación de un algoritmo general en un software CAD, la geometría del par de engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente.
- Modelar, con la ayuda de un software de elementos finitos, las solicitaciones a los que está sometido el par de engranajes cilíndricos.
- Realizar una comparación entre los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de elementos finitos y los obtenidos mediante los procedimientos analíticos de las normas técnicas.



TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

ANÁLISIS DEL ESFUERZO DE CONTACTO EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE EJES PARALELOS DE PERFIL EVOLVENTE MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Introducción

1. Estudio del estado del arte.
2. Modelación geométrica de los engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente.
3. Análisis de los esfuerzos de contacto mediante el método de elementos finitos.
4. Comparación de los resultados obtenidos por elementos finitos y por las normas técnicas

Conclusiones

Bibliografía

Anexos

Dr. Rosendo Franco Rodríguez

Asesor



DEDICATORIA

A mis padres, esposa e hijo

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Dr. Rosendo Franco Rodríguez por los numerosos aportes que hizo para la elaboración del presente trabajo, sobre todo para determinar las ecuaciones que describen el pie del diente en engranajes cilíndricos tanto de dientes rectos como helicoidales.



ÍNDICE DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	i
DEDICATORIA.....	iv
AGRADECIMIENTOS	v
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	vi
ÍNDICE DE TABLAS	x
ÍNDICE DE FIGURAS	xi
INTRODUCCIÓN.....	1
1. ESTUDIO DEL ESTADO DEL ARTE.....	5
1.1. Importancia y clasificación de las transmisiones por engranajes	5
1.2. Fundamentos y generalidades de los engranajes cilíndricos de ejes paralelos y perfil evolvente	9
1.2.1. Ley de engrane.....	10
1.2.2. Línea de engrane.....	11
1.2.3. El perfil de evolvente.....	12
1.3. Métodos de Fabricación.....	13
1.4. Cremallera de referencia y el perfil de referencia	16
1.5. Engranajes corregidos	18
1.6. Expresiones para el cálculo de los parámetros geométricos y de la transmisión de los engranajes objeto de estudio.....	19
1.7. Cálculo analítico de esfuerzo de contacto	22
1.7.1. Esfuerzo de contacto en dos cilindros según Hertz.....	23
1.7.2. Cálculo según DIN 3990 e ISO 6336.....	25

1.7.3.	Cálculo según ANSI/AGMA 2101-C95	27
1.8.	Factores dependientes de la geometría y del material en el cálculo del esfuerzo de contacto actuante según las normas técnicas descritas.....	28
1.8.1.	Factores geométricos y del material según las normas técnicas DIN 3990 e ISO 6336.....	29
1.8.2.	Factores geométricos y del material según la norma ANSI/AGMA 2101-C95	32
2.	MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE EJES PARALELOS DE PERFIL EVOLVENTE.....	34
2.1.	Introducción	34
2.2.	Curvas presentes en el perfil del diente.....	34
2.3.	Ecuaciones que describen las curvas del perfil del diente.....	36
2.3.1.	Ecuación de la Evolvente.....	36
2.3.2.	Ecuación de la Evolvente Alargada.....	39
2.3.3.	Ecuación del perfil de acuerdo de la base del diente	41
2.4.	Punto de intersección de la Evolvente y el perfil de acuerdo de la base del diente y valores límites de los parámetros.....	49
2.4.1.	Resolución por el método de la bisección	50
2.5.	Verificación de las ecuaciones que describen el perfil del diente mediante una aplicación CAD 2D.....	51
2.6.	Presentación de aplicación CAD 3D para la generación de engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil de evolvente.....	55
3.	ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS DE CONTACTO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	58
3.1.	Introducción	58
3.2.	Estimación del instante crítico de engrane para el esfuerzo de contacto ..	58

3.2.1.	Variación del radio reducido o equivalente (ρ) durante el engrane...	59
3.2.2.	Longitud de contacto de un diente.....	61
3.2.3.	Variación de la longitud sumaria de contacto durante el engrane	63
3.3.	Condiciones de contorno, aplicación de carga y material.....	67
3.3.1.	Material	67
3.3.2.	Restricciones	68
3.3.3.	Aplicación de carga.....	69
3.3.4.	Condiciones de contacto.....	70
3.4.	Presentación y análisis de resultados obtenidos en el software de elementos finitos.....	71
3.4.1.	Mallado	71
3.4.2.	Visualización del esfuerzo normal al flanco.....	72
4.	COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR ELEMENTOS FINITOS Y POR LAS NORMAS TÉCNICAS	74
4.1.	Introducción	74
4.2.	Procedimiento para la comparación de resultados y ejemplo de cálculo analítico del esfuerzo de contacto y la comparación del resultado.....	76
	CONCLUSIONES.....	82
	RECOMENDACIONES	83
	BIBLIOGRAFÍA	84
	ANEXOS	86
A.1	Estudio de la línea de engrane en engranajes con dientes de perfil de evolvente	86
a.	Definición	86
b.	Perfil activo	87

c. Ecuación de la línea de engrane y valores límite.....	88
d. Longitud de la línea de engrane, coeficiente de recubrimiento transversal (ε_α) y observaciones.....	93
A.2 Tabla con resultados analíticos y su comparación con el resultado del método de los elementos finitos de los veinte casos de la Tabla 4-2.....	96



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-1: Valores característicos de los valores más usados para el perfil de referencia	18
Tabla 3-1: Propiedades de materiales de los engranajes usados en los cálculos ...	67
Tabla 4-1: Perfil de referencia para cálculo de los esfuerzos de contacto	75
Tabla 4-2: Lista de combinaciones representativas de pares de engranajes para la comparación de resultados	75
Tabla 4-3: Resultados de cálculos analíticos según normas técnicas y resultados según el método de los elementos finitos	80
Tabla 4-4: Comparación de resultados analíticos con los obtenidos por el método de los elementos finitos	81



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1: Engranajes cilíndricos de dientes rectos y exteriores de ejes paralelos y perfil evolvente	6
Figura 1-2: Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales y exteriores de ejes paralelos y perfil evolvente	6
Figura 1-3: Engranajes cónicos de dientes rectos	7
Figura 1-4: Engranaje de Tornillo Sin Fin - Rueda	7
Figura 1-5: Diente de engranaje con perfil de evolvente.....	8
Figura 1-6: Engranajes Nóvikov (Litvin & Fuentes, 2004)	9
Figura 1-7: Modelo cinemático de la transmisión por engranajes de ejes paralelos	11
Figura 1-8: Línea de engrane de perfil de evolvente.....	12
Figura 1-9: Fresa madre (Litvin & Fuentes, 2004).....	14
Figura 1-10: Fabricación de un engranaje cilíndrico de dientes rectos mediante el método de generación de Fresa Madre (Litvin & Fuentes, 2004)	14
Figura 1-11: Generación de un engranaje de dientes rectos mediante el método de generación Cuchilla-Piñón (Litvin & Fuentes, 2004)	15
Figura 1-12: Perfil y Cremallera de referencia.....	17
Figura 1-13: Influencia de la corrección en el perfil del diente de un engranaje de dientes rectos con $Z=17$	19
Figura 1-14: Cilindros en contacto bajo la acción de la fuerza F y distribución de presiones en la zona de contacto (Budynas & Nisbett, 2006).....	23
Figura 1-15: Inicio de contacto de un par de dientes – Punto B.....	30
Figura 1-16: Fin de contacto de un par de dientes – Punto D.....	31
Figura 2-1: Curvas presentes en el perfil del diente.....	35
Figura 2-2: Cuerda desenrollada sobre cilindro básico	36
Figura 2-3: Generación de la evolvente	37

Figura 2-4: Relación entre ejes coordenados U_e y V_e con los ejes x e y	38
Figura 2-5: Modelo de engrane cremallera-engranaje	39
Figura 2-6: Posición del punto A con respecto a los ejes U_{ea} y V_{ea}	40
Figura 2-7: Curva evolvente alargada generada por el punto A	41
Figura 2-8: Generación de un engranaje helicoidal.....	42
Figura 2-9: Cremallera proyectada sobre el plano transversal del engranaje.....	43
Figura 2-10: Arco de elipse de la punta de la cremallera o herramienta en la proyección sobre el plano transversal.....	44
Figura 2-11: Posición genérica de la cremallera respecto del diente.....	45
Figura 2-12: Procedimiento para determinar la curva del perfil de acuerdo de la base del diente.	47
Figura 2-13: Relación entre ejes coordenados U_f y V_f con los ejes x e y	48
Figura 2-14: Punto de intersección de las curvas	49
Figura 2-15: Interfaz de usuario de la aplicación CAD 2D	51
Figura 2-16: Generación del perfil del diente	52
Figura 2-17: Gráfico de las ecuaciones que describen el perfil del diente sobre el diente generado para verificar si son correctas.....	53
Figura 2-18: Ubicación del punto de intersección de las curvas	54
Figura 2-19: Interfaz de usuario de aplicación CAD 3D	55
Figura 2-20: Modelos CAD 3D generados por la aplicación	56
Figura 2-21: Mismo par de engranajes, pero con menor número de dientes generados para su posterior análisis por elementos finitos	57
Figura 3-1: Radios de curvatura en un punto de contacto Q	60

Figura 3-2: Radio reducido o equivalente ρ en función de la posición de engrane ($m = 1\text{ mm}$, $Z_1 = 15$, $Z_2 = 27$, $x_1 = x_2 = 0$, $\beta = 15^\circ$)	61
Figura 3-3: Plano de engrane en verdadera magnitud, línea de engrane en una posición p_{eng} de la línea de engrane.....	62
Figura 3-4: Líneas de contacto.....	64
Figura 3-5: Variación de la longitud de contacto sumaria l_Σ en función de la posición de engrane p_{eng} con $0 \leq p_{eng} \leq p_{bt}$	65
Figura 3-6: Diagrama de flujo para determinar la longitud de contacto sumaria l_Σ , con $0 \leq p_{eng} \leq p_{bt}$	1
Figura 3-7: Aplicación de la restricción fija a la rueda	68
Figura 3-8: Aplicación de la restricción axial y radial en el piñón	69
Figura 3-9: Aplicación del momento torsor en el piñón	69
Figura 3-10: Flancos en contacto	70
Figura 3-11: Definición de contacto entre flancos de dientes.....	71
Figura 3-12: Malla de los engranajes	72
Figura 3-13: Esfuerzo en la dirección de la línea de engrane.....	73

INTRODUCCIÓN

La transmisión de potencia mecánica por medio de engranajes ha sido y es una práctica muy usada e importante en la industria. Esta importancia ha generado su estudio durante mucho tiempo habiendo libros, tesis de grado y postgrado dedicados únicamente al estudio de los engranajes. Todos estos estudios y debido a la importancia y uso de estos elementos de máquinas han llevado a instituciones internacionales, como es el caso de DIN, ISO, AGMA, GOST, a normalizar los engranajes, no solo desde el punto de vista geométrico sino también desde la metodología de cálculo para determinar su capacidad de carga.

Inicialmente el problema de la capacidad de carga de los engranajes era enfocado a evitar la rotura del pie del diente debido a la flexión, pero los estudios llevaron a evitar también el *"pitting"* o picadura progresiva en los flancos de los dientes. Este problema es causado por la excesiva fuerza presente entre los flancos de los dientes en contacto durante la transmisión de potencia. Actualmente determinar el esfuerzo de contacto en los flancos es tan importante como determinar el esfuerzo de flexión en el pie del diente.

En la revisión de la bibliografía el tema de la resistencia a la picadura es enfocado por el esfuerzo de contacto estudiado y resuelto inicialmente por Hertz. La totalidad de la bibliografía revisada hace hincapié en que aunque el esfuerzo en el contacto de los flancos de dos dientes que se encuentran engranando en la transmisión de

potencia por engranajes no corresponde al modelo que uso Hertz para resolver el problema del esfuerzo de contacto es una muy buena aproximación o punto partida para el estudio del fenómeno de contacto en los engranajes. Cabe resaltar aún más que el modelo empleado por Hertz es más aplicable a engranajes cilíndricos de dientes rectos ya que sus flancos pueden ser modelados como dos cilindros en contacto, pero en el caso de dientes helicoidales este problema es más complejo. Por ello en las normas técnicas existen distintos factores que son utilizados para afectar al esfuerzo que se calcula según las expresiones tradicionales para los esfuerzos de contacto.

Uno de los problemas más resaltantes que se ha podido notar en la revisión de la bibliografía es la falta de información o determinación de la posición crítica de engrane para el esfuerzo de contacto, es por ello que en las normas técnicas se introducen factores para tener en cuenta el número de dientes que se encuentran en contacto y poder así dar una mejor aproximación a la realidad.

El presente trabajo busca dar una solución y ser una guía para poder encontrar de manera más precisa los esfuerzos de contacto que realmente se producen durante la transmisión de potencia. Por ello el objetivo general de esta tesis es:

“Comparar los resultados del esfuerzo de contacto de los engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente obtenidos mediante el uso del método de los elementos finitos con los cálculos analíticos para el esfuerzo de contacto que se pueden encontrar en las diferentes normas técnicas internacionales.”

Y para cumplir con este objetivo principal o general se han trazado objetivos específicos que ayudaran a su cumplimiento total, y son

1. Determinar los factores que se refieren a la geometría del engranaje a partir de las expresiones de cálculo de las normas técnicas.

Debido a que en la simulación por elementos finitos solo se trabaja con un modelo geométrico ideal, es decir sin errores de fabricación o de montaje, no se pueden comparar los factores de las normas técnicas que hacen referencia a estos errores así como tampoco los factores que hacen referencia a la sobrecargas por factores dinámicos de la transmisión y

también por el tipo de maquina conductora o conducida, etc. Por ello es necesario determinar los factores que hacen referencia únicamente a la geometría de la transmisión, ya que estos si se podrán comparar con los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos.

2. Modelar mediante la implementación de un algoritmo general en un software CAD, la geometría del par de engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente.

Para estudiar correctamente el comportamiento de la transmisión por engranajes cilíndricos de ejes paralelos es necesario tener un modelo geométrico adecuado, por ello se requiere de la obtención de un procedimiento para encontrar la geometría real de los dientes de los engranajes.

3. Modelar, con la ayuda de un software de elementos finitos, las solicitaciones a los que está sometido el par de engranajes cilíndricos.

A partir de un modelo geométrico correcto es posible obtener buenos resultados en la simulación por elementos finitos, pero para ello también es indispensable definir correctamente las restricciones, cargas y contacto de los engranajes por ello se requiere de un procedimiento a seguir en la simulación por elementos finitos

4. Realizar una comparación entre los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de elementos finitos y los obtenidos mediante los procedimientos analíticos de las normas técnicas.

Finalmente luego de cumplir con los objetivos específicos anteriores es posible comparar los resultados, pero para ello se debe de obtener un procedimiento que tenga en cuenta solo los factores comparables, es decir los factores geométricos.

El presente trabajo tiene como principal aporte la obtención de las ecuaciones que describen las curvas del perfil del diente de cualquier engranaje cilíndrico de ejes paralelos de perfil evolvente y dientes exteriores. Y teniendo también como aportes importantes la estimación del instante más cargado del diente para el esfuerzo de

contacto y el cálculo de la longitud de la línea de engrane en el caso de haber penetración o socavado en el pie del diente.

Cabe señalar que queda pendiente para futuros trabajos el estudio del efecto de cada parámetro que define la geometría del diente sobre el esfuerzo de contacto máximo que se produce en los flancos de los dientes. Con esto se puede encontrar una tendencia comparando el esfuerzo de contacto obtenido por el método de los elementos finitos y el esfuerzo hallado utilizando las normas técnicas, y hacer gráficos o nomogramas que puedan simplificar el cálculo del esfuerzo de contacto máximo y no tener que calcular tantos factores como lo proponen las normas técnicas.



CAPÍTULO 1

1. ESTUDIO DEL ESTADO DEL ARTE

1.1. Importancia y clasificación de las transmisiones por engranajes

La transmisión de potencia por engranajes es una práctica muy importante, común y utilizada en la industria en general, esto debido principalmente a su gran confiabilidad, disposición compacta, posibilidad de una relación de transmisión muy uniforme, capacidad de transmitir grandes potencias, distintas alternativas de disposiciones de sus árboles de entrada y salida, entre otras características favorables.

La clasificación de las transmisiones por engranajes se agrupan según los siguientes criterios:

- La disposición de sus ejes:
 - Ejes paralelos (Figura 1-1, Figura 1-2)
 - Ejes que se cruzan (Figura 1-3)
 - Ejes que no se cruzan (Figura 1-4)

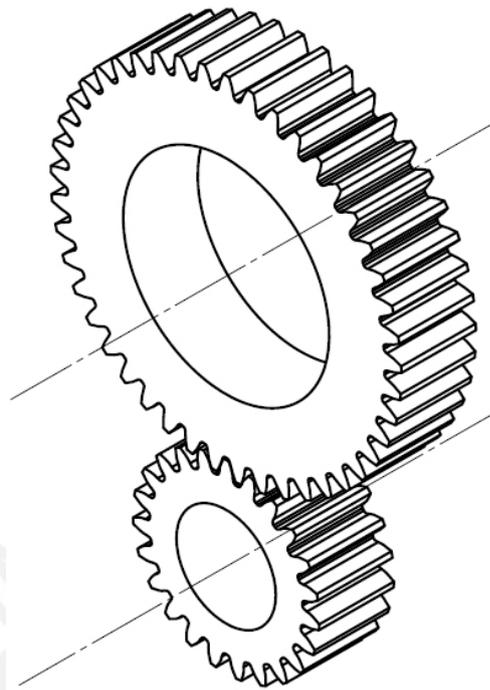


Figura 1-1: Engranajes cilíndricos de dientes rectos y exteriores de ejes paralelos y perfil evolvente

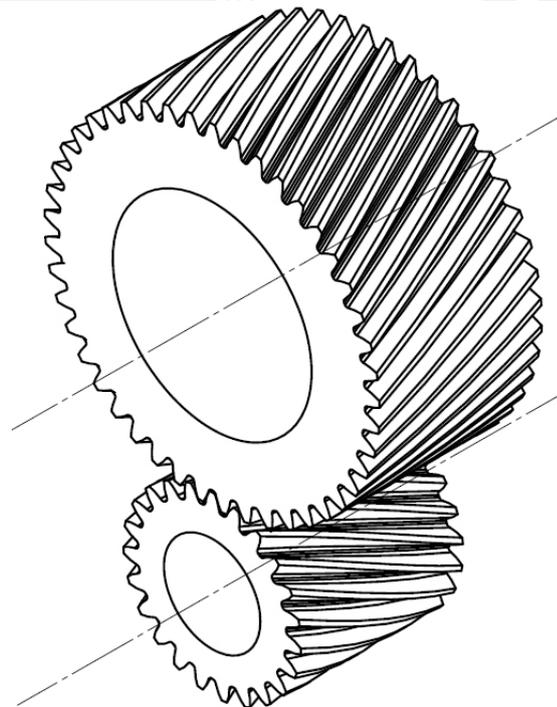


Figura 1-2: Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales y exteriores de ejes paralelos y perfil evolvente

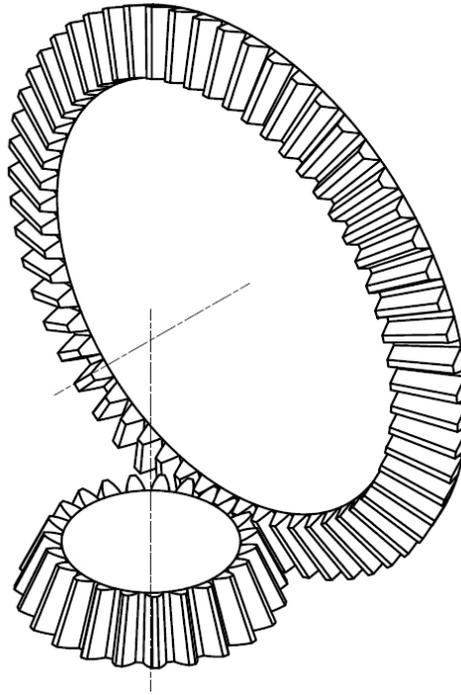


Figura 1-3: Engranajes cónicos de dientes rectos

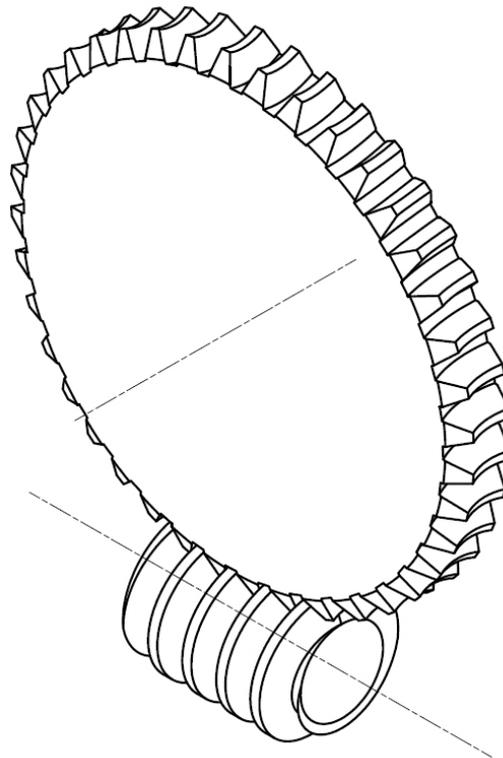


Figura 1-4: Engranaje de Tornillo Sin Fin - Rueda

- Su forma:
 - Cilíndricos (Figura 1-1, Figura 1-2, Figura 1-6)
 - No cilíndricos
 - Cónicos (Figura 1-3)
 - Hiperbólico
 - Glóbico
- El tipo de perfil de sus dientes:
 - Evolvente (Figura 1-5)
 - Cicloidal
 - Nóvikov (Figura 1-6)

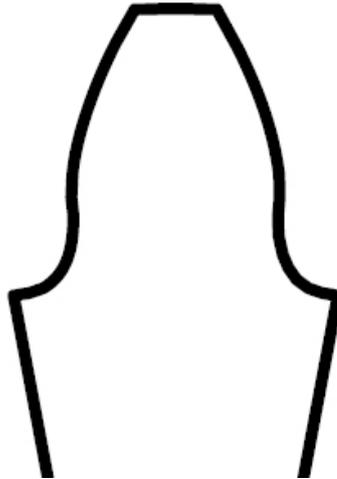


Figura 1-5: Diente de engranaje con perfil de evolvente

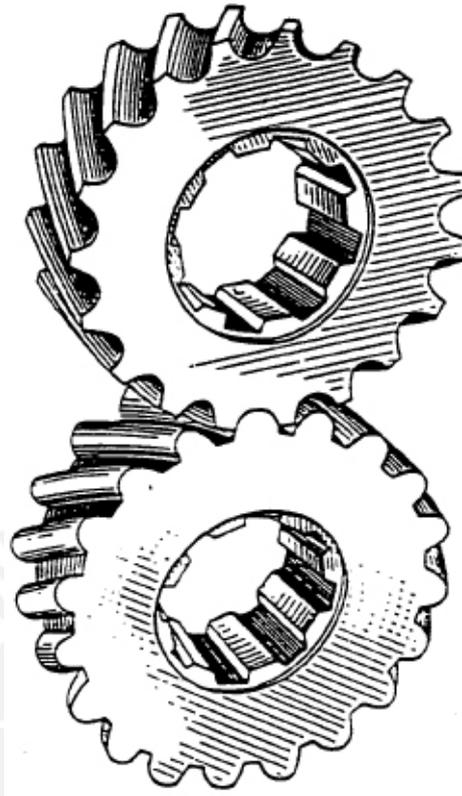


Figura 1-6: Engranajes Nóvikov (Litvin & Fuentes, 2004)

- La dirección del perfil del diente:
 - Recto (Figura 1-1)
 - Helicoidal (Figura 1-2)
 - Espiroidal

En el presente trabajo solo se abordará y analizará el esfuerzo de contacto producido en engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente de dientes exteriores tanto rectos como helicoidales.

1.2. Fundamentos y generalidades de los engranajes cilíndricos de ejes paralelos y perfil evolvente

A continuación se describen algunos de los fundamentos más resaltantes de las transmisiones por engranajes.

1.2.1. Ley de engrane

La relación de transmisión u está dada por la relación de la velocidad angular o de giro del engranaje 1 o piñón (ω_1, n_1) con la del engranaje 2 o rueda (ω_2, n_2) como se muestra en la ecuación (1.1)

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.1)$$

El modelo cinemático de la transmisión por engranajes cilíndricos de ejes paralelos es representado por dos ruedas de radios r_{w1} y r_{w2} que giran sin deslizar entre si (ver Figura 1-7), por ello sus velocidades periféricas $v_{w1} = \omega_1 \cdot r_{w1}$ y $v_{w2} = \omega_2 \cdot r_{w2}$ son iguales ($\omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2}$) de donde se obtiene que la relación de transmisión también puede ser expresada en función de los radios r_{w1} y r_{w2} como sigue

$$u = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} \quad (1.2)$$

Por otro lado, si se analiza las velocidades en un instante determinado del punto de contacto de los flancos, de perfil arbitrario, de dos dientes de las ruedas que se encuentran engranando (ver Figura 1-7) se puede descomponer la velocidad en la dirección de la normal "n" (v_{n1}, v_{n2}) y tangente "t" (v_{t1}, v_{t2}) común a los flancos. Por condición, para que los dientes se mantengan en contacto durante el engrane las velocidades en la dirección normal deben de ser iguales ($v_{n1} = v_{n2}$), de la Figura 1-7 las velocidades en la dirección normal están dadas por $v_{n1} = \omega_1 \cdot r_{n1}$ y $v_{n2} = \omega_2 \cdot r_{n2}$ de donde

$$u = \frac{r_{n2}}{r_{n1}} = \frac{r'_{w2}}{r'_{w1}} \quad (1.3)$$

Observando la Figura 1-7 las ecuaciones (1.2) y (1.3) no tendrían el mismo valor, lo que significa que la relación de transmisión u no sería constante durante el engrane de los flancos ocasionando fluctuaciones en las velocidades angulares de las dos ruedas. Para que la relación de transmisión se mantenga constante de la Figura 1-7 se ve que el punto C' debería de coincidir con C y para que esto ocurra el perfil de los flancos deben de ser elegidos apropiadamente. De aquí se

desprende la ley de engrane que señala para obtener una relación de transmisión constante la recta normal a los flancos de los dientes en cualquier punto de contacto interseca a la recta O_1O_2 siempre en el punto C que divide la recta que une los centros de los engranajes en las distancias r_{w1} y r_{w2} que son inversamente proporcionales a las velocidades angulares de giro ω_1 y ω_2 .

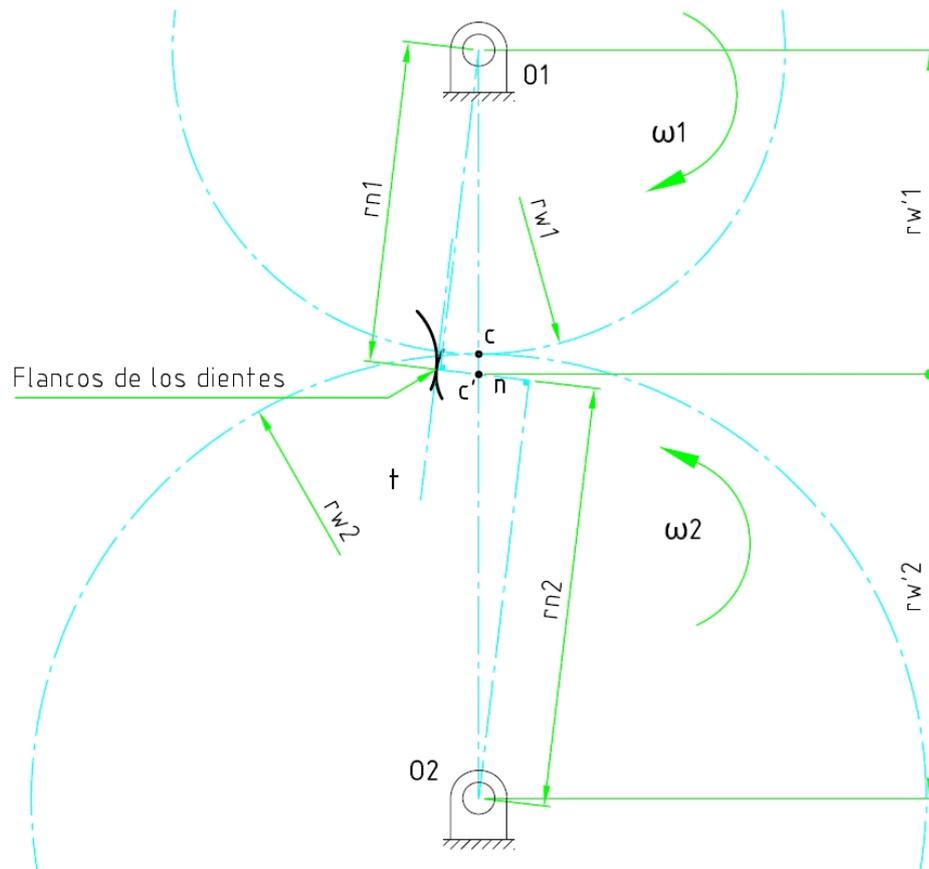


Figura 1-7: Modelo cinemático de la transmisión por engranajes de ejes paralelos

1.2.2. Línea de engrane

Es el lugar geométrico que describen los puntos de contacto de los flancos durante el engrane de un par de dientes desde su inicio hasta su fin.

La línea de engrane puede tener distintas formas dependiendo de la forma de los flancos de los diente. En la Figura 1-8 se muestra la línea de engrane generada por el perfil de evolvente que es una recta.

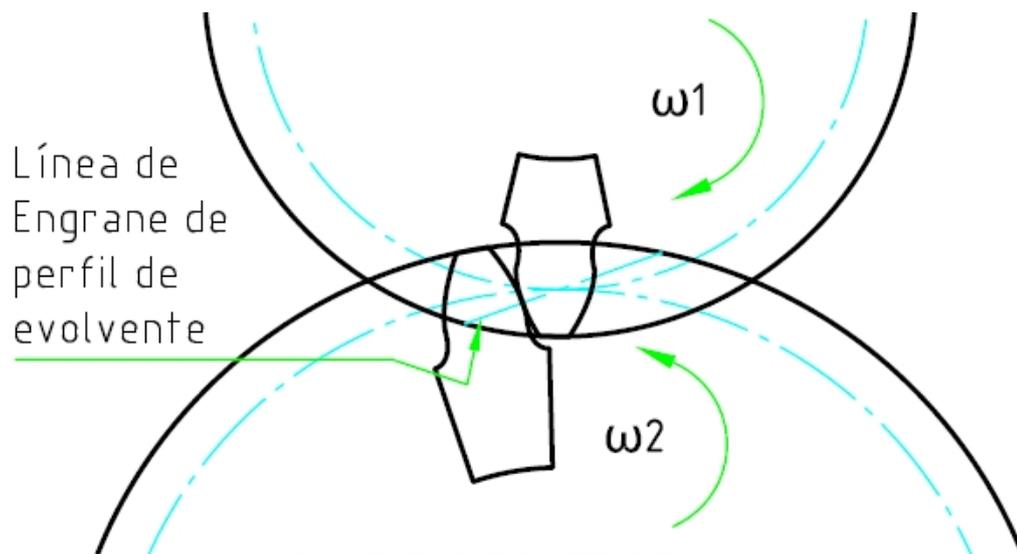


Figura 1-8: Línea de engrane de perfil de evolvente

1.2.3. El perfil de evolvente

La forma del perfil del diente más usado en la industria y de la que se va a tratar en el presente trabajo es el perfil de evolvente. Este perfil es el más usado debido a que presenta propiedades particulares y muy favorables frente a otros tipos de perfiles, algunas de estas propiedades se mencionan a continuación:

- Iguales perfiles de los flancos para las dos ruedas, en general para cumplir la ley de engrane se puede encontrar un perfil de flanco partiendo del perfil de su pareja de engrane, es decir que las dos ruedas pueden tener diferentes perfiles de flancos (perfil Nóvikov, cicloidal, etc.). En el caso del perfil de evolvente las dos ruedas tienen el mismo tipo de perfil, es decir las dos son evolventes lo que reduce la cantidad de herramientas para su fabricación, y su herramienta de corte es más simple y por lo tanto de mayor facilidad de fabricación.
- La línea de engrane generada por el perfil de evolvente es una recta y por ello a su vez coincide en cualquier instante del engrane con la normal a los flancos en el punto de contacto. Esto hace más sencillo el análisis de la dirección de las fuerzas actuantes sobre los dientes de los engranajes y a su vez genera que la fuerza normal entre los dos dientes tenga siempre la misma magnitud (a momento torsor transmitido constante) y dirección; por ello la carga sobre los apoyos del árboles o ejes que soportan al engranaje sean, teóricamente, constantes.

- Se puede variar la distancia entre centros de las ruedas y se mantiene la relación de transmisión.

1.3. Métodos de Fabricación

Los métodos más comunes y usados en la fabricación de engranajes son:

- **Fresado con fresa de forma:** Este método es usado principalmente para la producción de engranajes a baja escala. En este método de fabricación se utiliza como herramienta de corte una fresa de forma que tiene el perfil del espacio entre dos dientes del engranaje. Como el perfil del espacio entre dos dientes del engrane depende del ángulo de presión, módulo y del número de dientes, teóricamente se tendría que tener una herramienta de corte para cada módulo y número de dientes determinado. En la práctica se cuenta con una serie de fresas para cada módulo y cada una de ellas está diseñada para trabajar en un rango de número de dientes. Por estos motivos la fabricación de engranajes por fresado con fresa de forma no produce el perfil de evolvente en los dientes sino una aproximación a ellos. En el caso de la fabricación de engranajes helicoidales se debe de tener un especial cuidado ya que solo en el plano normal se tendría el perfil correcto de los dientes si se eligió la herramienta de corte con el número virtual de dientes del engrane helicoidal.

La precisión que se puede alcanzar este método de fabricación puede llegar a ser del mismo nivel que con otros métodos pero depende mucho del cabezal divisor que se use, por ello este método no es usado para la fabricación de engranajes que requieran gran precisión en el espaciado de los dientes.

- **Generación con fresa madre:** Este método es uno de los más usados tanto para la producción en masa como para la producción a baja escala. La herramienta de corte es un tornillo sin fin que gira de manera coordinada con la pieza a trabajar como si estuviesen engranando y así se genera el perfil en la pieza.

Mediante este método se pueden producir engranajes cilíndricos externos de dientes rectos y helicoidales; mas no engranajes internos.

La precisión alcanzada con este método de fabricación es muy buena y solo se necesita una herramienta de corte para la generación del perfil del diente para un módulo normal y ángulo de presión sin importar el número de dientes del engrane que se quiere fabricar o si se trata de un engranaje helicoidal. (Ver Figura 1-9 y Figura 1-10)

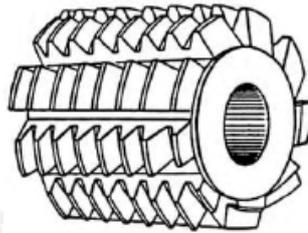


Figura 1-9: Fresa madre (Litvin & Fuentes, 2004)

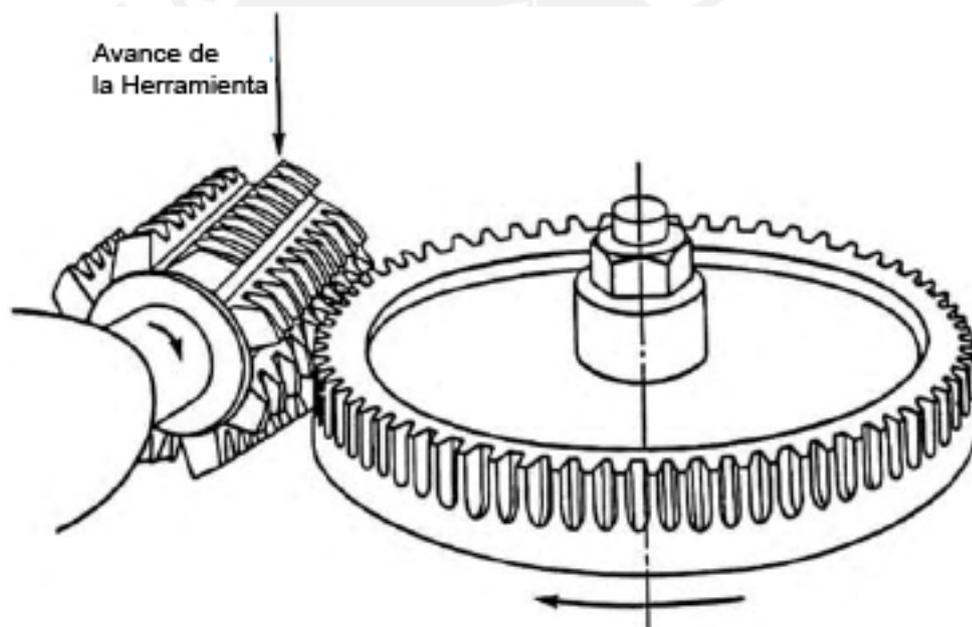


Figura 1-10: Fabricación de un engranaje cilíndrico de dientes rectos mediante el método de generación de Fresa Madre (Litvin & Fuentes, 2004)

- **Generación por cuchilla-piñón:** Conocido también como método *Fellows* debido a su creación por la empresa americana *Fellows*. Es un método de fabricación de engranajes muy utilizado para la producción en masa y a bajas escalas y produce engranajes muy buena precisión. En este método la herramienta de corte es un piñón que gira engranando con la pieza a trabajar para generar el perfil del diente.

Con este método se pueden fabricar engranajes internos como externos de dientes rectos o helicoidales; pero para este último el piñón de corte también es helicoidal y del mismo ángulo de hélice que engranaje a fabricar, además de que la máquina generadora debe de tener una guía helicoidal para darle a la herramienta de corte un recorrido helicoidal y no recto.

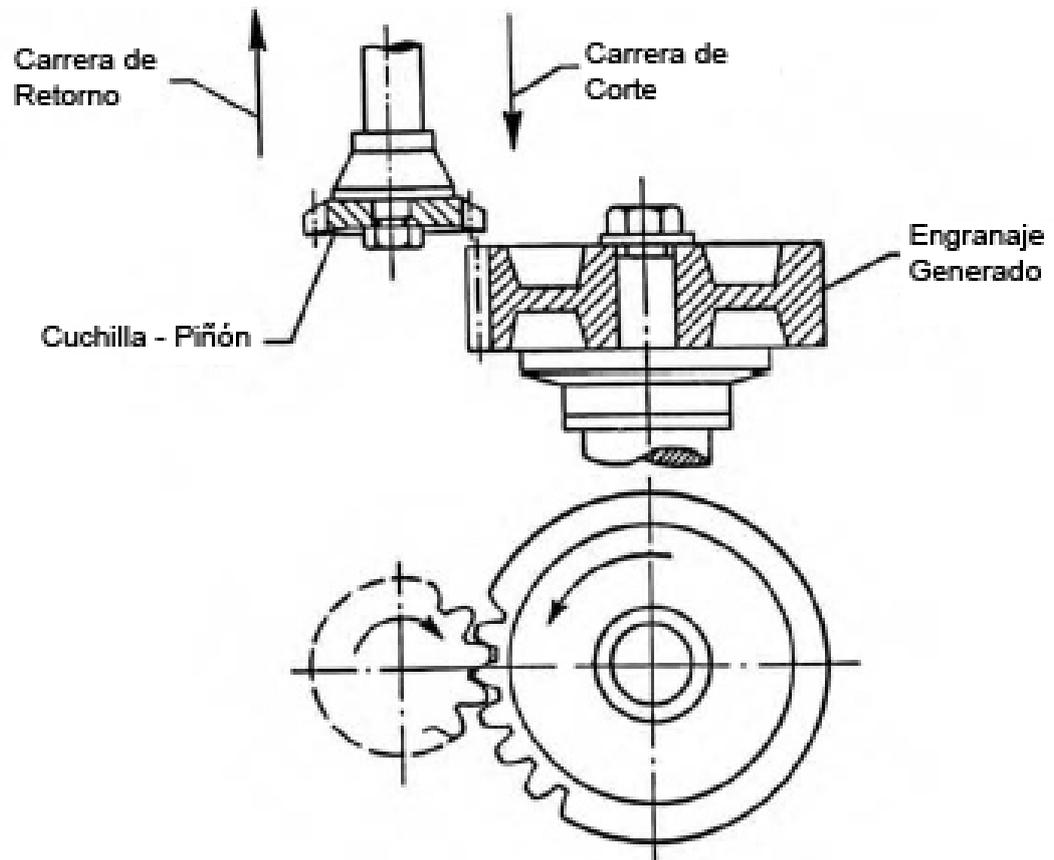


Figura 1-11: Generación de un engranaje de dientes rectos mediante el método de generación Cuchilla-Piñón (Litvin & Fuentes, 2004)

- **Generación por cuchilla-cremallera:** Este método de fabricación es muy parecido en el proceso de corte al de generación por cuchilla-piñón con la diferencia que la herramienta de corte es una cremallera. La ventaja de este método es la mayor facilidad de fabricación de la herramienta de corte.

Con este método se pueden fabricar engranajes cilíndricos de dientes exteriores rectos e helicoidales, mas no internos.

Existen otros métodos de fabricación de engranajes, aunque aquí solo se describieron de manera muy general algunos de los más conocidos.

La diferencia entre los métodos de fabricación es principalmente si son de generación del perfil o de reproducción del perfil de la herramienta de corte. En los métodos de reproducción del perfil de la herramienta de corte el espacio entre dos dientes es el perfil de la herramienta de corte; es decir el perfil de la herramienta queda reproducido en el engranaje. Mientras que en los engranajes fabricados por generación el perfil de los dientes queda definido por la forma en cómo actúa la herramienta de corte sobre la pieza de trabajo; en estos métodos el perfil de la herramienta de corte no corresponde con el del engrane fabricado.

En la fabricación de engranajes se tiene una limitación del número de dientes mínimo que se puede fabricar; debido a que por debajo de este número de dientes se produce la penetración o socavado del diente. Este hecho es muy importante ya que produce un debilitamiento en el pie del diente que es la zona que se encuentra más cargada a flexión.

1.4. Cremallera de referencia y el perfil de referencia

El perfil de referencia es una cremallera con dimensiones normalizadas del diente. La cremallera de referencia es la herramienta de corte que serviría para obtener el perfil de referencia. En la Figura 1-12 se muestran tanto el perfil de referencia como la cremallera de referencia.

Las dimensiones del perfil de referencia han sido normalizadas por distintas normas técnicas siendo algunas de las más usadas la ISO 53 y la DIN 867. Las herramientas de corte estándares se basan en los perfiles de referencia normalizados por ello un engranaje cilíndrico de perfil de evolvente fabricado bajo un perfil de referencia determinado debería de engranar perfectamente con el perfil de referencia.

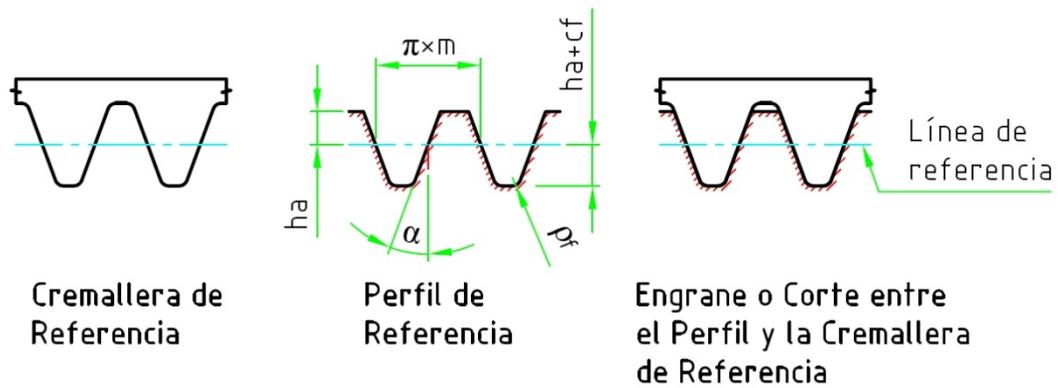


Figura 1-12: Perfil y Cremallera de referencia

Como se ve en la Figura 1-12 el perfil de referencia da las dimensiones del diente en proporción al módulo (m) y son:

- Ángulo del perfil (α)
- Altura de la cabeza del diente (h_a), factor de proporción de la cabeza del diente
- Altura del pie del diente (h_f), factor de proporción de altura del pie del diente
- Holgura radial (c_f), factor de proporción de la holgura radial
- Redondeo del pie del diente (ρ_f), factor de proporción del redondeo del pie del diente

En la Tabla 1-1 se muestran algunos de los valores y combinaciones más usadas de las dimensiones del perfil de referencia en proporción al módulo.

Tabla 1-1: Valores característicos de los valores más usados para el perfil de referencia

α [°]	h_a	c_f	ρ_f
20	1	0.25	0.25
20	1	0.25	0.3
20	1	0.25	0.375
20	1	0.35	0.3
20	1.2	0.3	0.3
22.5	1	0.25	0.4
25	1	0.25	0.318

1.5. Engranajes corregidos

La corrección de engranajes se genera al desplazar la herramienta de corte una distancia Δ_c del diámetro primitivo del engranaje. Este desplazamiento es caracterizado como una fracción x del módulo del engranaje como se muestra en la ecuación (1.4)

$$\Delta_c = x \cdot m \quad (1.4)$$

La corrección de engranajes puede ser positiva ($x+$) o negativa ($x-$). Es decir, si se desplaza la herramienta de corte alejándola del diámetro primitivo del engranaje se tendrá una corrección positiva y si se acerca la herramienta hacia el centro del engranaje la corrección será negativa.

La corrección de engranajes da una mayor flexibilidad durante el diseño de engranajes ya que se puede prevenir la penetración o socavado en el pie del diente durante la fabricación de engranajes con un número reducido de dientes, también se puede mantener o variar la distancia entre centros de los engranajes según se elijan los factores de corrección de los engranajes y además se puede aumentar la capacidad de carga de los engranajes con correcciones positivas.

En la Figura 1-13 se aprecia la influencia de la corrección en el perfil del diente del engranaje.

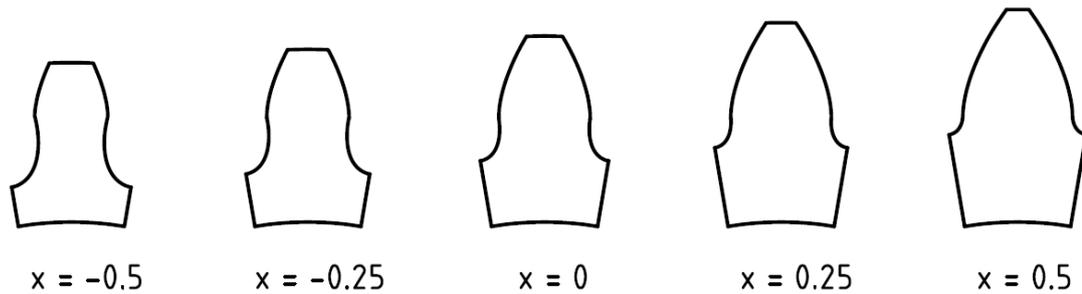


Figura 1-13: Influencia de la corrección en el perfil del diente de un engranaje de dientes rectos con $Z=17$

1.6. Expresiones para el cálculo de los parámetros geométricos y de la transmisión de los engranajes objeto de estudio

A continuación se presentan las expresiones de cálculo para determinar la geometría, datos de operación y engrane de los engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente y dientes exteriores, ya sean rectos o helicoidales.

- Z_1, Z_2 : Número de dientes del piñón y la rueda respectivamente
- m : Módulo normal del engrane
- β : Ángulo de la hélice en el diámetro primitivo
- x_1, x_2 : Factor de corrección del piñón y la rueda respectivamente
- b : Ancho efectivo de engrane o ancho mínimo de los dos engranajes (piñón o rueda)
- Diámetro primitivo o de referencia

$$d_1 = \frac{m \cdot Z_1}{\cos \beta} \quad (1.5)$$

$$d_2 = \frac{m \cdot Z_2}{\cos \beta} \quad (1.6)$$

- Diámetro de fondo

$$d_{f1} = d_1 + 2 \cdot m \cdot (x_1 - h_a - c_f) \quad (1.7)$$

$$d_{f2} = d_2 + 2 \cdot m \cdot (x_2 - h_a - c_f) \quad (1.8)$$

- Ángulo del perfil de referencia en el plano transversal

$$\alpha_t = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \beta} \right) \quad (1.9)$$

- Diámetro básico

$$d_{b1} = d_1 \cdot \cos \alpha_t \quad (1.10)$$

$$d_{b2} = d_2 \cdot \cos \alpha_t \quad (1.11)$$

- Relación de transmisión (Ecuación (1.1))

$$u = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1.12)$$

- Corrección sumaria

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = \frac{\text{inv}(\alpha_{wt}) - \text{inv}(\alpha_t)}{2 \cdot \tan \alpha} (Z_1 + Z_2) \quad (1.13)$$

Donde la función “inv” de un ángulo esta dado por la siguiente expresión

$$\text{inv}(\theta) = \tan \theta - \theta \quad (1.14)$$

- α_{wt} : Ángulo de presión operante en el diámetro de paso
- Distancia entre centros operante

$$a_w = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2 \cdot \cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} \quad (1.15)$$

- Diámetro de paso

$$d_{w1} = \frac{2 \cdot a_w}{u + 1} \quad (1.16)$$

$$d_{w2} = 2 \cdot a_w - d_{w1} \quad (1.17)$$

- Diámetro de cresta o exterior

$$d_{a1} = 2 \cdot a_w - d_{f2} - 2 \cdot c_f \cdot m \quad (1.18)$$

$$d_{a2} = 2 \cdot a_w - d_{f1} - 2 \cdot c_f \cdot m \quad (1.19)$$

- Ángulo de la hélice en el diámetro básico

$$\beta_b = \tan^{-1}(\cos \alpha_t \cdot \tan \beta) \quad (1.20)$$

- Relación entre el ángulo y paso de la hélice

$$\tan \beta = \frac{\pi \cdot d_1}{p_{hel1}} \quad (1.21)$$

$$\tan \beta = \frac{\pi \cdot d_2}{p_{hel2}} \quad (1.22)$$

- Coeficiente de recubrimiento transversal¹

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a_w \cdot \sin \alpha_{wt}}{m \cdot \pi \cdot \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} \right)} \quad (1.23)$$

¹ La ecuación (1.23) es válida cuando ninguno de los dos engranajes (piñón o rueda) tienen socavado en el pie del diente o en otras palabras el perfil de acuerdo de la base del pie del diente no ha reducido el perfil de evolvente activo del diente. En general el coeficiente de recubrimiento transversal es la relación entre el arco de engrane o la longitud de la línea de engrane con el paso circunferencial o el paso básico circunferencial respectivamente. En el Anexo A.1 se comenta sobre el tema mostrando imágenes del problema.

- Coeficiente de recubrimiento axial

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m \cdot \pi} = \frac{b \cdot \tan \beta_b}{m \cdot \pi \cdot \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} \right)} \quad (1.24)$$

- Coeficiente de recubrimiento total

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} \quad (1.25)$$

1.7. Cálculo analítico de esfuerzo de contacto

El proceso de transmisión de potencia por engranajes está dado por el engrane entre los dientes del piñón y la rueda. Por ello durante este proceso existen entre los dientes una fuerza normal a los perfiles en el punto de contacto producida por el empuje del diente perteneciente al engranaje conductor o motriz sobre el engranaje conducido, y una fuerza de fricción entre los flancos debido a la fricción dinámica y el deslizamiento relativo de los flancos, ambas fuerzas distribuidas a lo largo del diente.

Este hecho ha provocado el estudio del esfuerzo de contacto en los engranajes ya que una de las fallas que se pueden presentar en estos elementos de máquinas es el deterioro del flanco del diente por picaduras o “*pitting*” que se presentan por el exceso de carga sobre los flancos de los dientes.

El fundamento del cálculo analítico del esfuerzo de contacto se basa en la denominada “*presión de Hertz*” en honor al físico alemán Heinrich Hertz que estudió el fenómeno de los esfuerzos producidos entre dos esferas que se encuentran en contacto bajo una fuerza aplicada. Posteriormente se generalizó y particularizó esta teoría para otros casos como es el de dos cilindros de un largo determinado y que se encuentran en contacto bajo una fuerza; en este caso es el que se basa la teoría desarrollada para estudiar el esfuerzo de contacto en los flancos de los dientes en la transmisión de potencia por engranajes.

Aunque el esfuerzo presente en los flancos de los dientes durante proceso de engrane no es exactamente el esfuerzo contacto calculado por la teoría de Hertz ya que la presencia de la fuerza de fricción en los flancos cambia los esfuerzos principales en la zona de contacto, la bibliografía menciona que es una muy buena

aproximación y por ello el cálculo analítico usa la formulación de Hertz para calcular el esfuerzo de contacto actuante en los flancos de los dientes tanto del piñón como de la rueda.

1.7.1. Esfuerzo de contacto en dos cilindros según Hertz

Dos cilindros, de radios ρ_1 y ρ_2 , que se encuentran en contacto sin la acción de ninguna fuerza externa poseen una línea a todo su largo donde se encontrarán en contacto (ver Figura 1-14 izquierda). Si se aplica una fuerza externa F al conjunto de los dos cilindros, como se ve en la Figura 1-14 derecha, el contacto de estos dos elementos ya no será en una línea a todo su largo sino los dos cilindros se deformarán elásticamente alrededor de la línea de contacto original teniendo ahora ya un área de contacto y no una línea. Esta área de contacto tiene la forma de un rectángulo de ancho $2 \cdot a$ y longitud l_c .

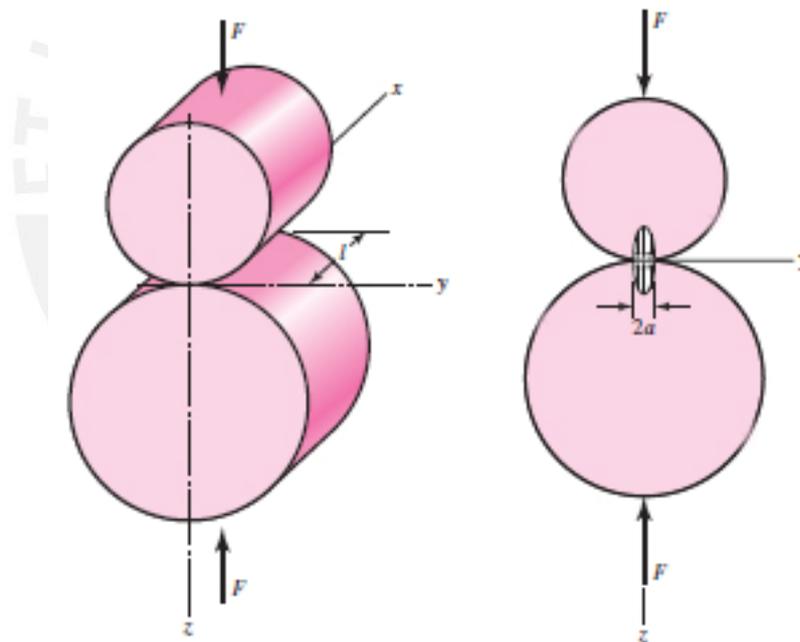


Figura 1-14: Cilindros en contacto bajo la acción de la fuerza F y distribución de presiones en la zona de contacto (Budynas & Nisbett, 2006)

En la zona de contacto los esfuerzos o presiones de contacto se distribuyen de manera elíptica² siendo el valor más alto del esfuerzo de contacto el que se encuentra en el eje de simetría como se ve en la Figura 1-14 derecha. A continuación se muestran las ecuaciones para calcular tanto el valor de a y del esfuerzo de contacto máximo ρ_{Hmax} .

$$a = \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot l_c} \cdot \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)} \cdot \rho \quad (1.26)$$

$$\rho_{Hmax} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot a \cdot l_c} \quad (1.27)$$

Por lo tanto la presión o esfuerzo de contacto máximo será:

$$\rho_{Hmax} = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot l_c \cdot \rho} \cdot \frac{1}{\frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2}}} \quad (1.28)$$

Donde:

- F : Es la fuerza normal entre la dos superficies de contacto
- l_c : Longitud de contacto de la las dos superficies, en el caso del contacto de los engranajes que se verá más adelante la longitud de contacto (l_c) debe de sustituirse por la longitud de contacto sumaria (l_Σ), es decir la suma de todas la longitudes de contacto de los dientes que se encuentran engranando.
- ν_1, ν_2 : Módulos de Poisson de los materiales de cada cilindro
- E_1, E_2 : Módulos de elasticidad o de Young de cada cilindro
- ρ : Radio reducido o equivalente dada por la siguiente expresión

² La deducción y explicación sobre los esfuerzos de contacto se pueden encontrar de manera muy detallada en (Boresi, Schmidt, & Sidebottom, 1993), (Budynas, 1998), (Budynas & Nisbett, 2006), (Dobrovolski, 1980), (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (1.29)$$

1.7.2. Cálculo según DIN 3990 e ISO 6336

El cálculo del esfuerzo de contacto según la norma DIN 3990 e ISO 6336 son muy similares. En ambas normas se distingue dos partes; la primera parte se evalúa el esfuerzo de contacto actuante en el flanco del diente y en la segunda parte se evalúa el valor del esfuerzo admisible según el material del engranaje para comparar los valores obtenidos en ambas partes y verificar el correcto dimensionamiento del engranaje.

A continuación se presentan las expresiones de cálculo de estas normas.

- Cálculo del esfuerzo de contacto actuante

- En el piñón

$$\sigma_{H1} = Z_B \cdot \sigma_{H0} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \quad (1.30)$$

- En la rueda

$$\sigma_{H2} = Z_D \cdot \sigma_{H0} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \quad (1.31)$$

Donde:

- σ_{H0} : Esfuerzo de contacto nominal en el punto de paso y se determina según la ecuación (1.32)

$$\sigma_{H0} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (1.32)$$

- Z_B : Factor de contacto del piñón
- Z_D : Factor de contacto de la rueda
- K_A : Factor de aplicación de carga

- K_V : Factor dinámico
- $K_{H\beta}$: Factor para el esfuerzo de contacto de la distribución longitudinal de la carga
- $K_{H\alpha}$: Factor para el esfuerzo de contacto de la distribución transversal de la carga
- Z_H : Factor de zona
- Z_E : Factor de elasticidad
- Z_ϵ : Factor por coeficiente de recubrimiento para esfuerzo de contacto
- Z_β : Factor por ángulo de la hélice para esfuerzo de contacto
- Cálculo del esfuerzo de contacto admisible

$$\sigma_{HP1,2} = \frac{\sigma_{Hlim\ 1,2} \cdot Z_{NT}}{S_{Hmin}} \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (1.33)$$

- $\sigma_{Hlim\ 1,2}$: Esfuerzo de contacto límite
- Z_{NT} : Factor de durabilidad para esfuerzo de contacto
- S_{Hmin} : Factor de seguridad mínimo para esfuerzo de contacto
- Z_L : Factor de lubricante
- Z_V : Factor de velocidad
- Z_R : Factor de rugosidad
- Z_W : Factor de endurecimiento en el trabajo
- Z_X : Factor de tamaño para esfuerzo de contacto

En las ecuaciones (1.30) y (1.31) F_t en [N] es la fuerza tangencial nominal que se calcula según la expresión (1.34) donde:

- $T_{1,2}$ [Nm]: Es el torque en el piñón o la rueda
- $d_{1,2}$ [mm]: Es el diámetro primitivo del piñón o la rueda según las ecuaciones (1.5) y (1.6) respectivamente.

$$F_t = \frac{2000 \cdot T_{1,2}}{d_{1,2}} \quad (1.34)$$

1.7.3. Cálculo según ANSI/AGMA 2101-C95

Al igual que en las normas ISO y DIN descritas en el epígrafe anterior la norma técnica ANSI/AGMA también distingue el cálculo del esfuerzo de contacto actuante en el flanco del diente y el cálculo del esfuerzo admisible. A continuación se presentan las expresiones que propone esta norma técnica.

- Cálculo del esfuerzo de contacto actuante

$$\sigma_H = Z_E \cdot \sqrt{F_t \cdot K_O \cdot K_V \cdot K_S \cdot \frac{K_H}{d_{w1} \cdot b} \cdot \frac{Z_R}{Z_I}} \quad (1.35)$$

Donde:

- σ_H : Esfuerzo de contacto actuante según la ecuación (1.35)
- Z_E : Coeficiente de elasticidad
- K_O : Factor de sobrecarga
- K_V : Factor dinámico
- K_S : Factor de tamaño
- K_H : Factor de distribución de carga
- Z_R : Factor de condición superficial para la resistencia contra la picadura (*pitting*)
- Z_I : Factor geométrico para la resistencia contra la picadura (*pitting*)
- Cálculo del esfuerzo de contacto admisible

$$\sigma_H \leq \frac{\sigma_{HP}}{S_H} \cdot \frac{Z_N}{Y_\theta} \cdot \frac{Z_W}{Y_Z} \quad (1.36)$$

El lado derecho de la inecuación (1.36) corresponde al esfuerzo de contacto admisible, donde:

- σ_{HP} : Esfuerzo de contacto admisible nominal
- Z_N : Factor de esfuerzo cíclico para esfuerzo de contacto
- Z_W : Factor de relación de durezas para el esfuerzo de contacto
- S_H : Factor de seguridad para esfuerzo de contacto
- Y_θ : Factor de temperatura
- Y_Z : Factor de confiabilidad estadística

En la ecuación (1.35) F_t en [N] es la fuerza tangencial que se calcula según la expresión (1.37) sobre el diámetro de paso d_{w1} donde:

- T_1 [Nm]: Es el torque en el piñón
- d_{w1} [mm]: Es el diámetro de paso del piñón según la ecuación (1.6).

$$F_t = \frac{2000 \cdot T_1}{d_{w1}} \quad (1.37)$$

1.8. Factores dependientes de la geometría y del material en el cálculo del esfuerzo de contacto actuante según las normas técnicas descritas

En la sección anterior se presentó las expresiones de cálculo propuestas por las normas DIN, ISO y ANSI/AGMA para el cálculo del esfuerzo de contacto actuante y admisible sobre los flancos de los dientes del engranaje. Como se puede notar en las expresiones (1.30), (1.31), (1.32), (1.33) y (1.35) se tienen varios factores que dependen de la geometría del perfil del diente, de las propiedades de los materiales del piñón y la rueda, de las características dinámicas de la transmisión, de los errores y tolerancias en la fabricación, de la lubricación, de la posición del engranaje respecto del árbol que lo soporta, etc.

En la presente tesis se determinará el esfuerzo de contacto actuante en los dientes de un par de engranajes por el método de los elementos finitos. Por ello, para validar los resultados obtenidos se compararán estos con los valores calculados de manera analítica de los esfuerzos de contacto actuante según las normas técnicas antes descritas. Para comparar ambos resultados de manera coherente solo se tomarán en cuenta los factores que dependan de la geometría del perfil del diente del engranaje como de la trayectoria que este recorra a lo ancho del engranaje (dientes rectos o helicoidales), mas no se tendrán en cuenta los demás factores que no se refieren a la geometría del diente en las expresiones de cálculo analíticas debido a los siguientes motivos:

- El modelo geométrico utilizado para la simulación por el método de los elementos finitos tiene los dientes del engranaje con el perfil ideal (sin errores de fabricación ni de montaje).
- Se analizan solo algunos dientes de ambos engranajes mas no el montaje de la transmisión completa, no se simula la posición de los engranajes sobre sus respectivos arboles.
- No se tiene en cuenta la lubricación, etc.

Otro factor que se tendrá en cuenta es el que depende del modulo de elasticidad o de Young y del módulo de Poisson tanto del piñón y la rueda ya que como se ve en la ecuación (1.28) el esfuerzo de contacto además de depender de la geometría y carga de los dos elementos en contacto también depende de las propiedades de los materiales debido a la deformación elástica en el contacto.

A continuación se mencionan y describen brevemente los factores de las expresiones de cálculo analítico según las normas técnicas que se tendrán en cuenta para la comparación del esfuerzo de contacto actuante:

1.8.1. Factores geométricos y del material según las normas técnicas DIN 3990 e ISO 6336.

- Z_H : Factor de zona

El factor de zona toma en cuenta los radios de curvatura del perfil de evolvente cuando el punto de contacto coincide con el punto de paso y además convierte

la fuerza tangencial nominal F_t en la fuerza normal en el cilindro de paso (de diámetros d_{w1} o d_{w2}). Este factor se puede calcular mediante gráficos o por la ecuación (1.38)

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \beta_b \cdot \cos \alpha_{wt}}{\cos^2 \alpha_t \cdot \sin \alpha_{wt}}} \quad (1.38)$$

- Z_B : Factor de contacto del piñón

Este factor convierte el esfuerzo de contacto en el punto de paso al esfuerzo de contacto en el punto de inicio de contacto de un par de dientes (Figura 1-15). Siempre y cuando este factor sea mayor que 1. Sino el factor toma el valor de 1.

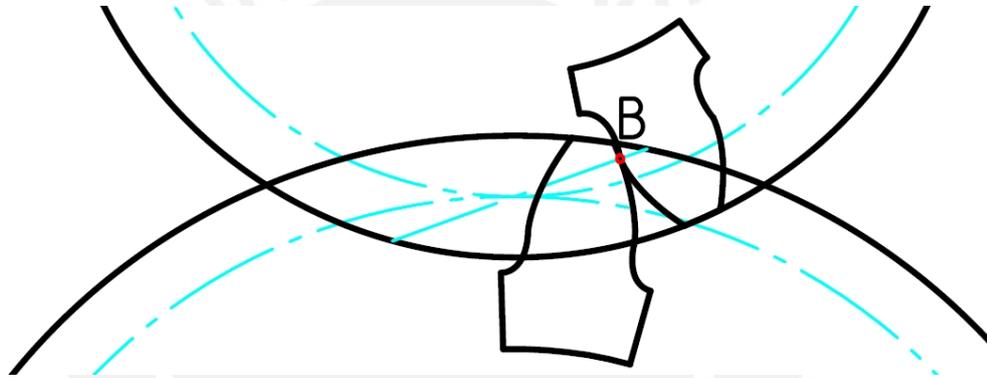


Figura 1-15: Inicio de contacto de un par de dientes – Punto B

- Z_D : Factor de contacto de la rueda

El factor Z_D convierte el esfuerzo de contacto en el punto de paso al esfuerzo de contacto en el punto de fin de contacto de un par de dientes (Figura 1-16). Este factor por lo general resulta menor que 1 así que solo se tomará el valor calculado cuando sea mayor que 1 en caso contrario se toma como 1.

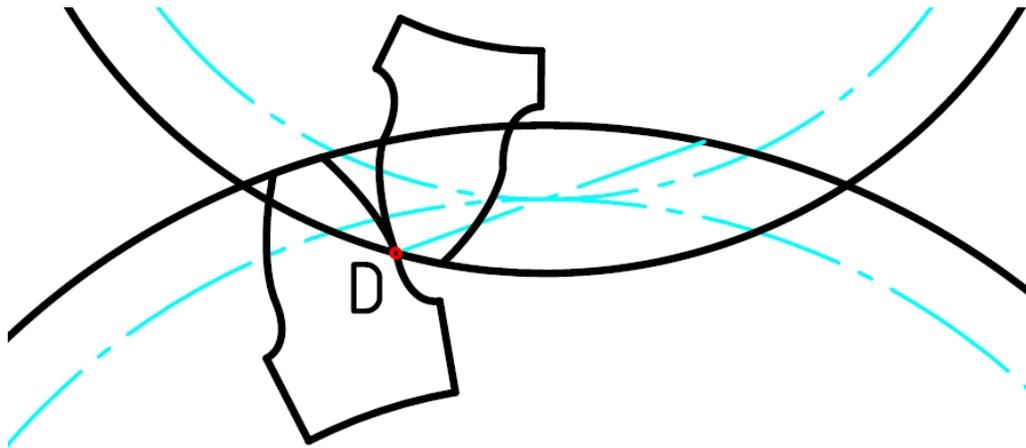


Figura 1-16: Fin de contacto de un par de dientes – Punto D

- Z_E : Factor de elasticidad

Este factor toma en cuenta el módulo de elasticidad o de Young y el módulo de Poisson de los materiales del piñón y la rueda. Y se calcula por la ecuación (1.39).

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (1.39)$$

- Z_ϵ : Factor por coeficiente de recubrimiento para esfuerzo de contacto

Este factor toma en cuenta el coeficiente de recubrimiento transversal ϵ_α , es decir la cantidad de pares de dientes que engranan. Este factor también se puede calcular por gráficos o por las ecuaciones (1.40), (1.41) o (1.42).

Engranajes rectos:

$$Z_\epsilon = \sqrt{\frac{4 - \epsilon_\alpha}{3}} \quad (1.40)$$

Engranajes helicoidales:

Si $\epsilon_\beta < 1$:

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3} \cdot (1 - \varepsilon_\beta) + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha}} \quad (1.41)$$

Si $\varepsilon_\beta \geq 1$:

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad (1.42)$$

- Z_β : Factor por ángulo de la hélice para esfuerzo de contacto

Este factor toma en cuenta el ángulo de la hélice β en el esfuerzo de contacto actuante. Este factor no tiene un sustento teórico sino experimental y se obtiene por gráficos o también por la ecuación (1.43).

$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta} \quad (1.43)$$

1.8.2. Factores geométricos y del material según la norma ANSI/AGMA 2101-C95

- Z_E : Factor de elasticidad

Este factor es el mismo que en caso de las normas DIN e ISO antes descritas, se calcula según la misma ecuación (1.39)

- Z_I : Factor geométrico para la resistencia contra la picadura (*pitting*)

Este factor toma en cuenta el radio de curvatura de los flancos durante el engrane para determinar el esfuerzo de contacto. Se determina según la ecuación (1.44)

$$Z_I = \frac{\cos \alpha_{wt} \cdot \sin \alpha_{wt}}{2 \cdot m_N} \cdot \frac{u}{u + 1} \quad (1.44)$$

Donde u es la relación de transmisión según la ecuación (1.12) y el valor de m_N se determina según las expresiones (1.45) o (1.46).

Engranajes rectos:

$$m_N = 1 \quad (1.45)$$

Engranajes helicoidales:

$$m_N = \frac{1}{0.95 \cdot \varepsilon_\alpha} \quad (1.46)$$



CAPÍTULO 2

2. MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE EJES PARALELOS DE PERFIL EVOLVENTE

2.1. Introducción

En el análisis por el método de los elementos finitos que se realizará más adelante en el presente trabajo es muy importante tener un modelo geométrico correcto para poder obtener resultados que se puedan contrastar con los cálculos analíticos de las normas técnicas descritos en el capítulo anterior.

Por ello en este capítulo se abordarán los temas de las curvas presentes en el perfil del diente y de las ecuaciones que las describen para así con la ayuda de un software CAD poder generar el perfil del diente y luego analizarlo en un software de elementos finitos.

2.2. Curvas presentes en el perfil del diente

En la Figura 2-1 se muestra el perfil de un diente de engranaje y se puede apreciar claramente que este está compuesto por dos curvas distintas. La curva superior es la curva evolvente y la curva inferior la llamaremos en el presente trabajo como la curva de perfil de acuerdo de la base del diente³.

³ Algunos autores llaman a esta curva “Trocoide” (Dudley, 1973)

La curva evolvente es la única que durante el engrane se encuentra en contacto con su perfil conjugado (que como se mencionó en el epígrafe 1.2.3 es también una curva de evolvente) del otro engranaje. Durante la fabricación del engranaje mediante los métodos de generación por fresa madre o por cuchilla-cremallera, la curva evolvente es generada por la parte recta del perfil de la herramienta de corte o también por la parte recta de la cremallera de referencia.

La curva de perfil de acuerdo del pie del diente es generada por el redondeo de la punta de la herramienta de corte tanto en el método de fabricación por generación cuchilla-cremallera o por fresa madre, o también por el redondeo de la punta de la cremallera de referencia.

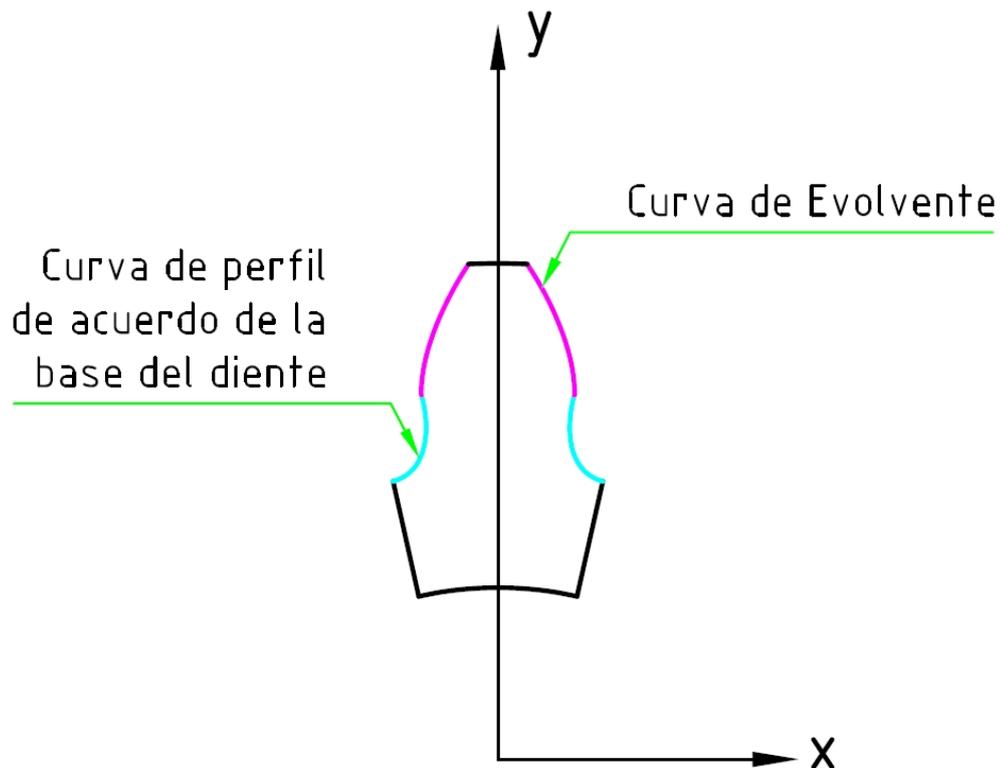


Figura 2-1: Curvas presentes en el perfil del diente

2.3. Ecuaciones que describen las curvas del perfil del diente⁴

A continuación se detallarán las ecuaciones que describen el perfil del diente de un engranaje cilíndrico de ejes paralelos de perfil de evolvente, fabricado mediante los métodos de generación de cuchilla-cremallera o fresa madre.

Las siguientes ecuaciones describirán el perfil del diente como se ve en la Figura 2-1, es decir que el eje de simetría del diente coincidirá con la ordenada del sistema de coordenadas XY mostrado, y el origen es el centro del piñón o la rueda.

2.3.1. Ecuación de la Evolvente

La curva de evolvente es explicada, en casi la totalidad de la bibliografía, como la curva que describe el punto extremo de una cuerda que se encuentra enrollada en un cilindro, llamado cilindro básico, de diámetro d_b , llamado también diámetro básico, y que se va desenrollando manteniéndola tensa en todo momento, en otras palabras siempre es tangente al cilindro básico de diámetro d_b .

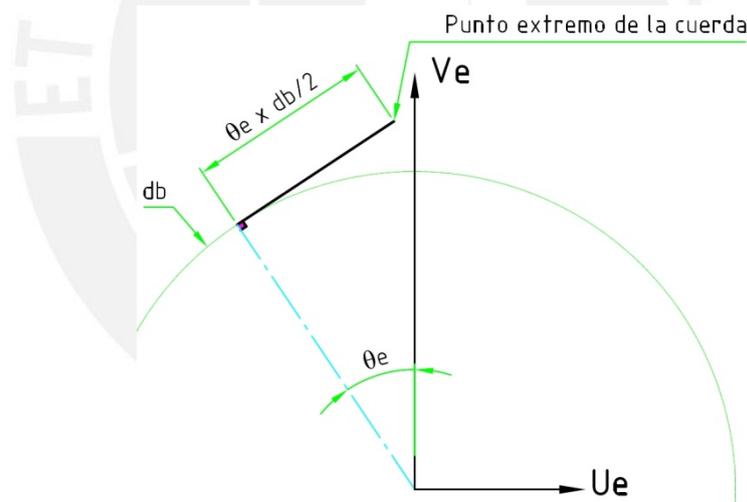


Figura 2-2: Cuerda desenrollada sobre cilindro básico

⁴ En esta sección serán descritas las ecuaciones de las curvas que forman el perfil del diente de un engranaje. Por ello cuando se hace referencia al diámetro básico (d_b), diámetro primitivo o de referencia (d), factor de corrección (x), diámetro externo (d_a) y diámetro de fondo (d_f) es de manera general, es decir que es aplicable tanto al piñón como a la rueda, solo se debe tener presente el correcto reemplazo de los valores en las ecuaciones que se describen en las siguientes páginas.

Si como se ve en la Figura 2-2 el extremo de la cuerda antes de empezarse a desenrollarse se encuentra en la intersección del círculo básico con el eje coordenado V_e y luego se desenrolla hasta la recta que une el punto de tangencia y el centro del círculo básico se encuentre a un ángulo θ_e del eje coordenado V_e , las coordenadas del punto extremo de la cuerda estarán dadas por las ecuaciones (2.1) y (2.2) donde θ_e es un parámetro que a su vez, desde otra perspectiva, representa el giro del cilindro básico de diámetro d_b . Las ecuaciones mencionadas son las ecuaciones paramétricas de la curva evolvente. (Ver Figura 2-3)

$$U_e(\theta_e) = \frac{1}{2} \cdot (-d_b \cdot \sin \theta_e + d_b \cdot \theta_e \cdot \cos \theta_e) \quad (2.1)$$

$$V_e(\theta_e) = \frac{1}{2} \cdot (d_b \cdot \cos \theta_e + d_b \cdot \theta_e \cdot \sin \theta_e) \quad (2.2)$$

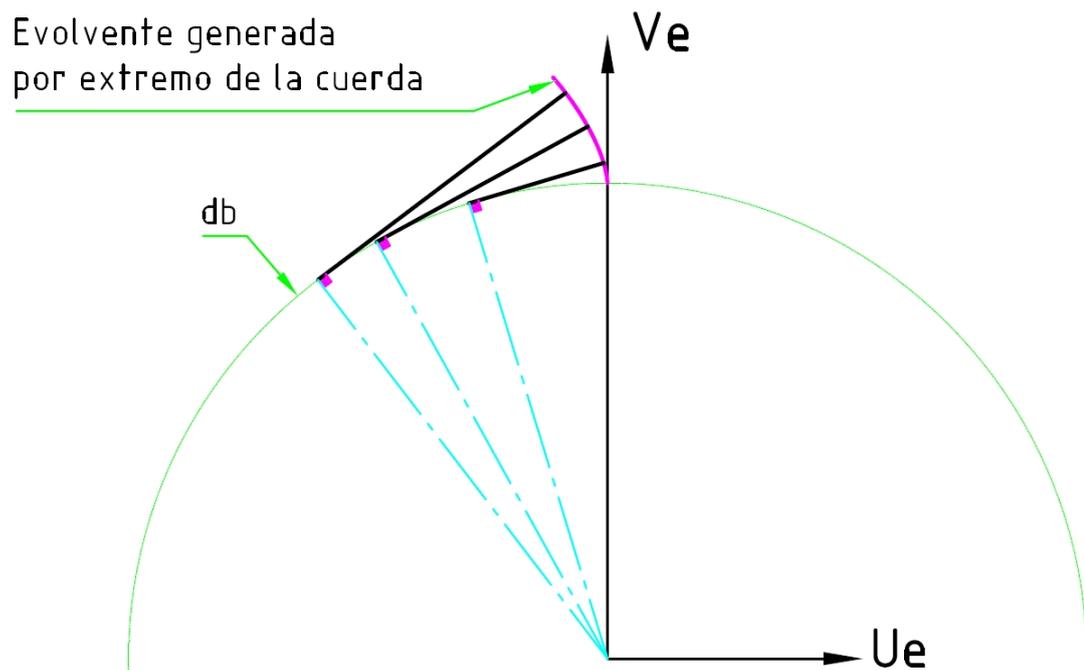


Figura 2-3: Generación de la evolvente

Como se ve en la Figura 2-4, para hacer coincidir el eje de simetría del diente con el eje vertical del engranaje para la curva evolvente se debe de posicionar los ejes coordenados U_e y V_e girados un ángulo γ_e en sentido horario con respecto de los ejes x e y .

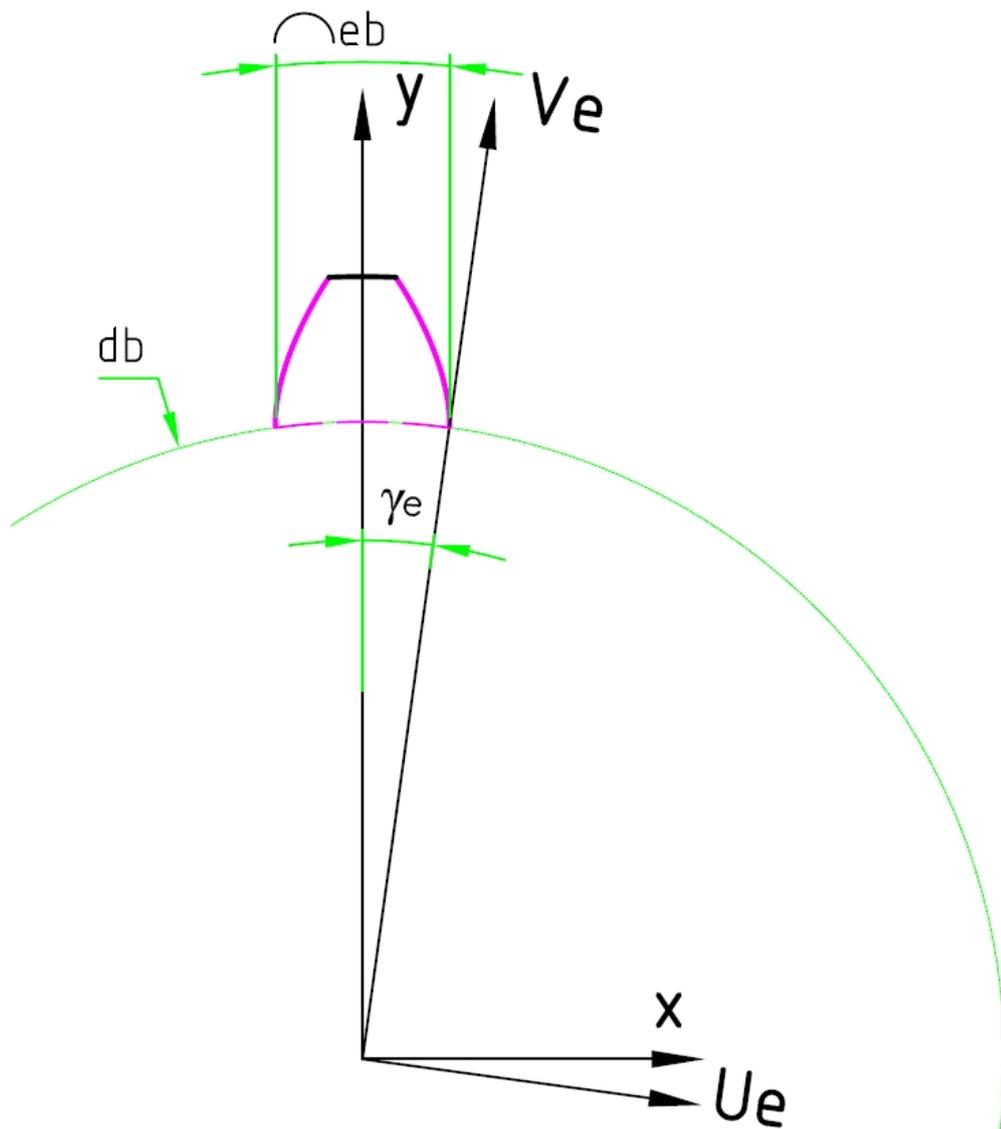


Figura 2-4: Relación entre ejes coordenados U_e y V_e con los ejes x e y

Donde el ángulo γ_e está dado por la ecuación (2.3)

$$\gamma_e = \frac{e_b}{d_b} \quad (2.3)$$

Donde el arco e_b es el espesor del diente en el diámetro básico según la ecuación (2.4)

$$e_b = d_b \cdot \left(\frac{e}{d} + \text{inv}(\alpha_t) \right) \quad (2.4)$$

e es el espesor del diente en el diámetro primitivo según la ecuación (2.5)

$$e = \frac{m}{\cos \beta} \cdot (\pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha) \quad (2.5)$$

Por lo tanto las ecuaciones (2.6) y (2.7) describen la curva evolvente en las coordenadas x e y .

$$x_e(\theta_e) = \frac{\cos \gamma_e}{2} \cdot (-d_b \cdot \sin \theta_e + d_b \cdot \theta_e \cdot \cos \theta_e) + \frac{\sin \gamma_e}{2} \cdot (d_b \cdot \cos \theta_e + d_b \cdot \theta_e \cdot \sin \theta_e) \quad (2.6)$$

$$y_e(\theta_e) = \frac{\sin \gamma_e}{2} \cdot (d_b \cdot \sin \theta_e - d_b \cdot \theta_e \cdot \cos \theta_e) + \frac{\cos \gamma_e}{2} \cdot (d_b \cdot \cos \theta_e + d_b \cdot \theta_e \cdot \sin \theta_e) \quad (2.7)$$

2.3.2. Ecuación de la Evolvente Alargada

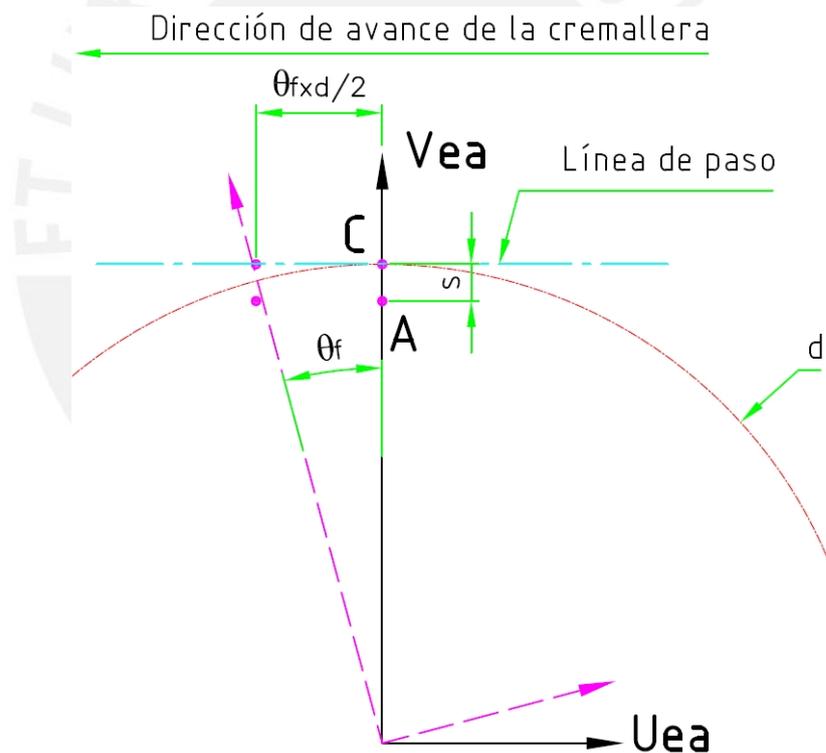


Figura 2-5: Modelo de engrane cremallera-engranaje

En los métodos de fabricación por generación el engranaje va siendo cortado como si estuviera engranando con otro engranaje o cremallera. En la Figura 2-5 se muestra el modelo de engrane de un engranaje con una cremallera, este modelo consta de un plano (en la Figura 2-5 vista como la línea de paso) que se mueve en una trayectoria rectilínea haciendo girar al cilindro sin deslizar. (En la Figura 2-5

visto como un círculo con un diámetro igual al diámetro primitivo o de referencia d del engranaje)

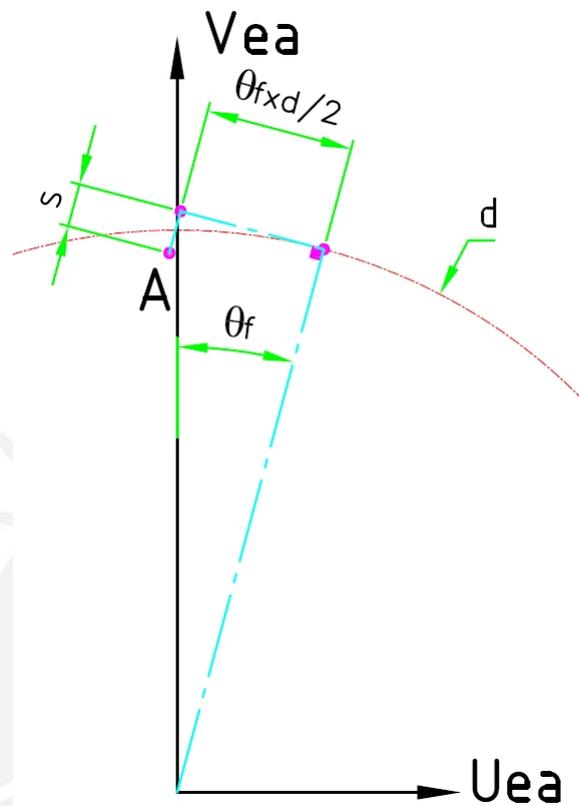


Figura 2-6: Posición del punto A con respecto a los ejes U_{ea} y V_{ea}

Si, como en la Figura 2-5, se toma un punto cualquiera A a una distancia s por debajo del punto C , que es el punto de paso o punto de tangencia entre el círculo primitivo o de referencia de diámetro d y la línea de paso. Luego se desplaza la cremallera una distancia $\theta_f \cdot \frac{d}{2}$ haciendo girar al cilindro un ángulo θ_f . Con este movimiento los ejes coordenados U_{ea} y V_{ea} de la Figura 2-5 se encuentran girados un ángulo θ_f con respecto de su posición original, entonces para que se encuentren nuevamente en su posición original se gira el conjunto cremallera y engranaje el mismo ángulo pero en sentido contrario. En esta nueva posición, como se muestra en la Figura 2-6, la recta que une el punto de paso con el centro del círculo se encontrará también a un ángulo θ_f respecto del eje coordenado V_{ea} . Si se toma el ángulo θ_f como un parámetro que a su vez representa el ángulo que gira el engranaje durante el corte o engrane con la cremallera las ecuaciones

paramétricas de las coordenadas del punto A para cualquier valor del parámetro estarán descritas por las ecuaciones (2.8) y (2.9). La curva que describe estas ecuaciones paramétricas es llamada evolvente alargada. (Ver Figura 2-7)

$$U_{ea}(\theta_f) = \left(\frac{d}{2} - s\right) \cdot \sin \theta_f - \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \cos \theta_f \quad (2.8)$$

$$V_{ea}(\theta_f) = \left(\frac{d}{2} - s\right) \cdot \cos \theta_f + \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \sin \theta_f \quad (2.9)$$

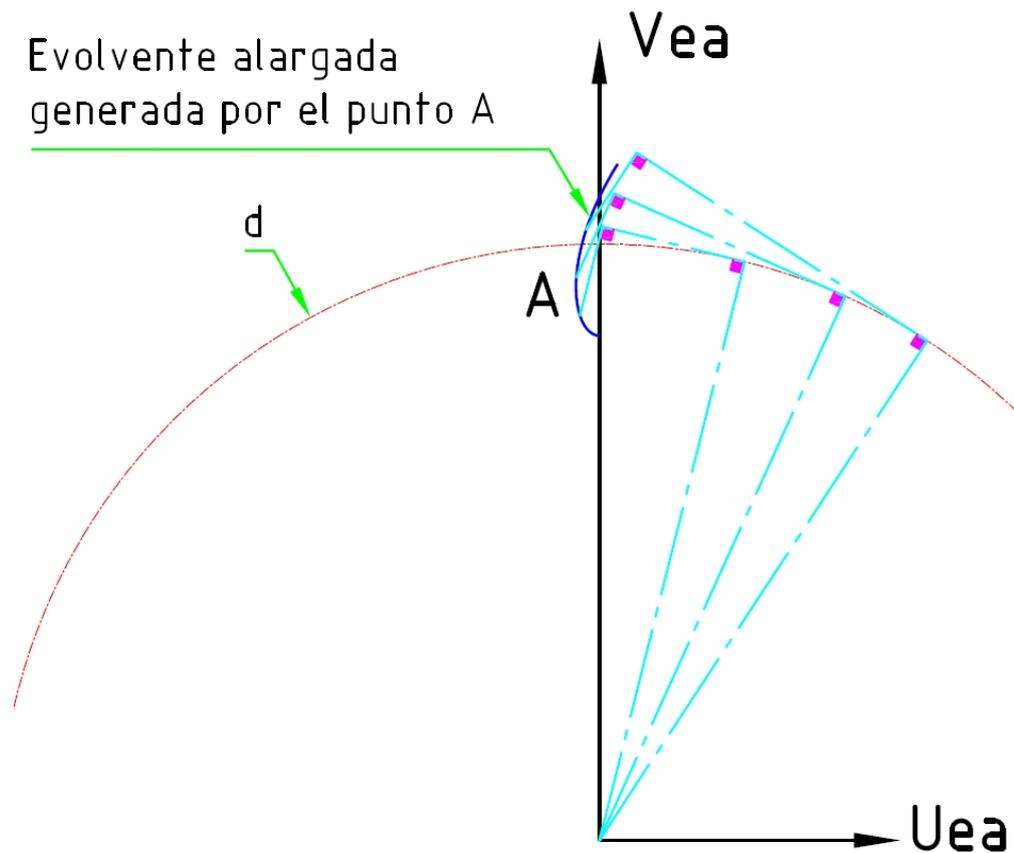


Figura 2-7: Curva evolvente alargada generada por el punto A

2.3.3. Ecuación del perfil de acuerdo de la base del diente

Como se mencionó en el inicio del epígrafe 2.2 el perfil de acuerdo de la base del diente es generado por el redondeo de la punta de la herramienta de corte, por ello a continuación se analizara tanto el redondeo de la punta de la herramienta de corte como la ecuación que describe la curva generada por esta.

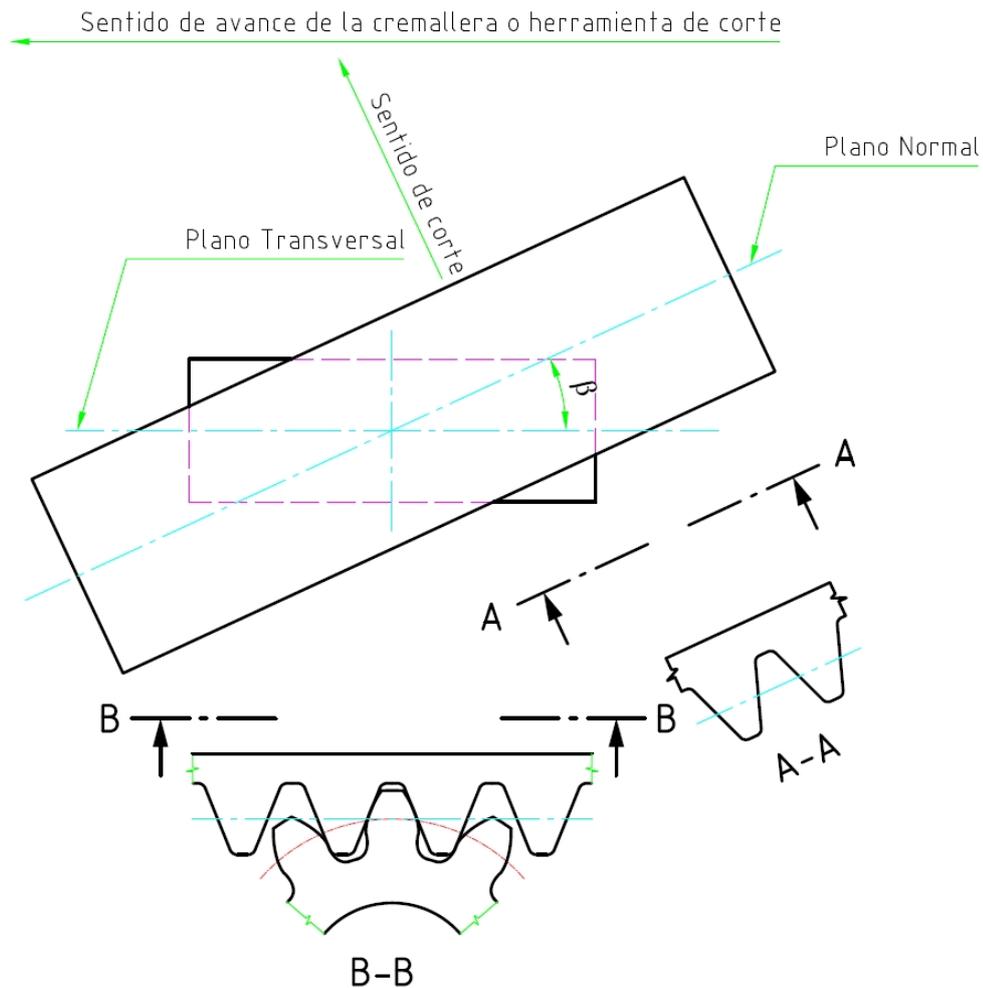


Figura 2-8: Generación de un engranaje helicoidal

En la Figura 2-8 se muestra la generación de un engranaje helicoidal por el método cuchilla-cremallera, la vista $A-A$ muestra el perfil de la herramienta de corte que coincide con la cremallera de referencia afectada solo por el módulo como un factor de escala y la vista $B-B$ es el perfil de la herramienta de corte que genera el perfil del diente durante el corte. Es decir, la vista $B-B$ de la Figura 2-8 es una proyección sobre el plano transversal⁵ del engranaje del perfil de la cremallera de referencia.

⁵ El plano transversal es aquel que es perpendicular al eje del engranaje. Y el plano normal del engranaje es el que coincide con el plano transversal de la herramienta de corte (método de generación por cuchilla cremallera), es decir está inclinado respecto del plano transversal el ángulo β de la hélice del diente.

El perfil del diente del engranaje generado depende del perfil de la cremallera en el plano transversal, por ello a continuación se listan los valores del perfil de la cremallera en el plano transversal en relación con los valores de la cremallera de referencia (ver Figura 2-9).

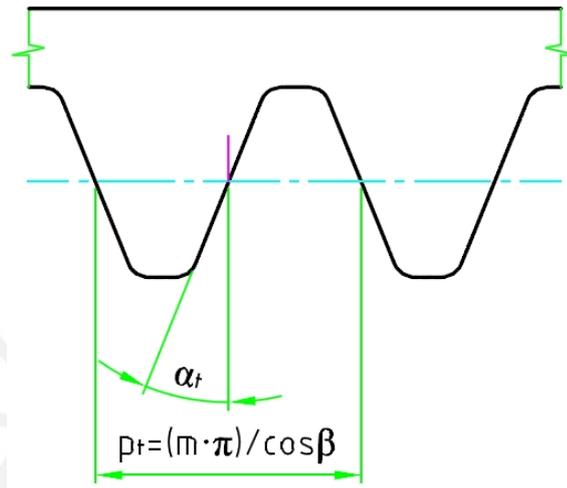


Figura 2-9: Cremallera proyectada sobre el plano transversal del engranaje

- Ángulo del perfil (α_t) según la ecuación (1.9)
- Paso transversal (Ecuación (2.10))

$$\rho_t = \frac{\pi \cdot m}{\cos \beta} \quad (2.10)$$

- La proyección del redondeo de la punta de la cremallera de referencia sobre el plano transversal del engranaje es una elipse de semiejes a_p y b_p según las relaciones (2.11) y (2.12) respectivamente

$$a_p = m \cdot \frac{\rho_t}{\cos \beta} \quad (2.11)$$

$$b_p = m \cdot \rho_t \quad (2.12)$$

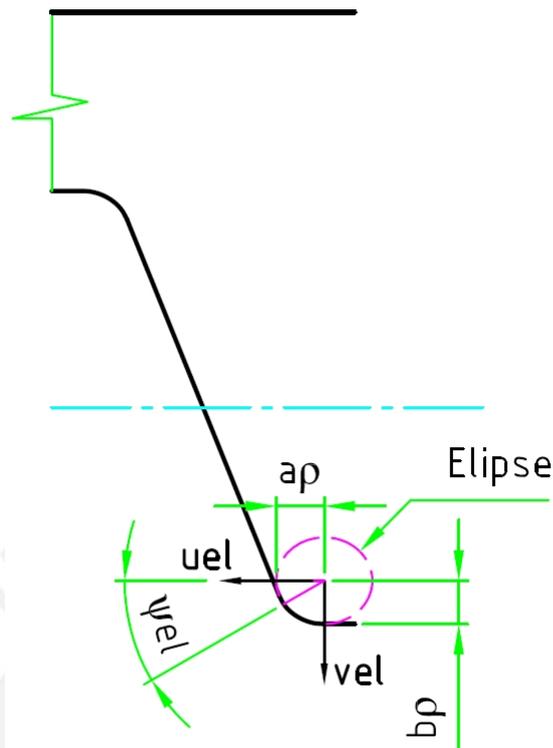


Figura 2-10: Arco de elipse de la punta de la cremallera o herramienta en la proyección sobre el plano transversal

Tomando el centro de la elipse de la proyección del redondeo de punta de la herramienta de corte sobre el plano transversal como el origen del sistema de coordenadas u_{el} y v_{el} como se muestra en la Figura 2-10 el arco de elipse de la punta de la herramienta puede ser descrito por la ecuación (2.13)

$$v_{el} = \cos \beta \cdot \sqrt{\left(\frac{m \cdot \rho_f}{\cos \beta}\right)^2 - u_{el}^2} \quad (2.13)$$

Y tiene como límites físicos para el ángulo ψ_{el} :

$$\tan^{-1}(\tan \alpha \cdot \cos \beta) \leq \psi_{el} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.14)$$

El lugar geométrico del centro del arco de elipse es una evolvente alargada y por ello estará dado por las ecuaciones (2.8) y (2.9), donde el valor de s se obtiene a partir de la Figura 2-11, como se indica en la expresión (2.15).

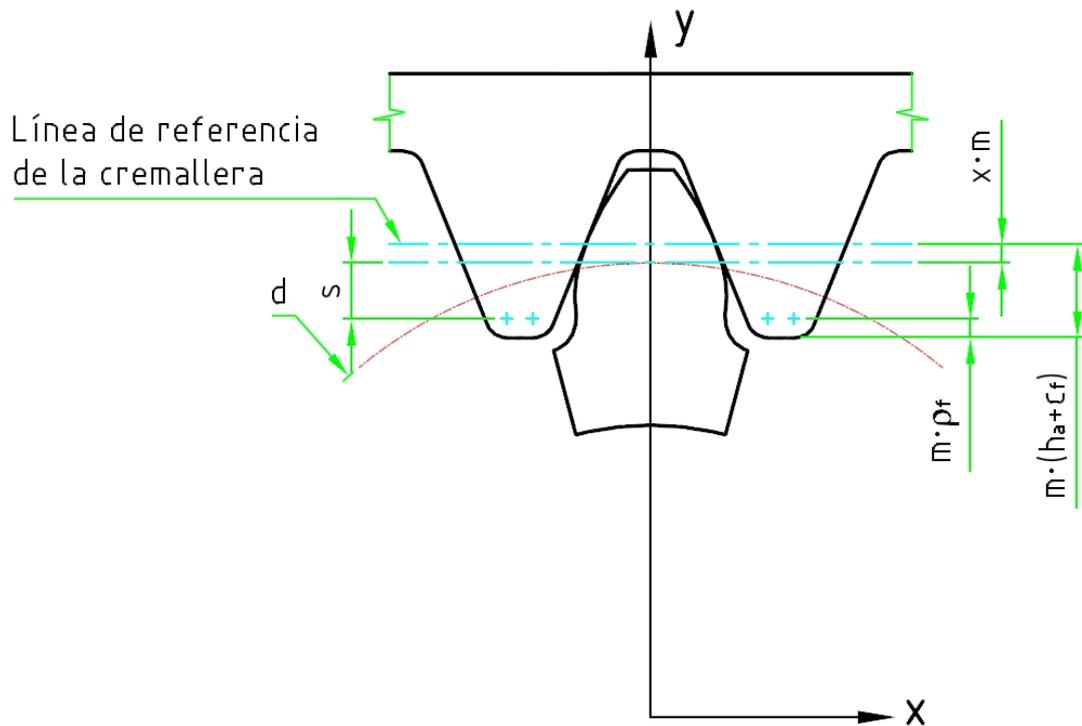


Figura 2-11: Posición genérica de la cremallera respecto del diente

$$s = m \cdot (h_a + c_f - \rho_f - x) \tag{2.15}$$

La curva generada por el redondeo o el arco de elipse de la punta de la herramienta en el plano transversal del engranaje se obtiene encontrando en cada instante el punto de la elipse donde la tangente a esta es paralela a la tangente de la evolvente alargada descrita por el centro de la elipse. Para obtener esto basta trazar, para cada instante, una recta paralela a la tangente de la evolvente alargada descrita por el centro del arco de elipse y que a su vez también sea tangente al arco de elipse o redondeo de la punta de la herramienta. En la Figura 2-12 se muestra este procedimiento, y matemáticamente se puede expresar mediante las siguientes ecuaciones

- Pendiente de la recta tangente a la curva generada por el centro del arco de elipse o redondeo de la punta de la herramienta de corte

$$\tan \phi = \frac{dV_f}{dU_f} = \frac{\frac{dV_f}{d\theta_f}}{\frac{dU_f}{d\theta_f}} = \frac{s \cdot \sin \theta_f + \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \cos \theta_f}{-s \cdot \cos \theta_f + \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \sin \theta_f} \quad (2.16)$$

- Pendiente de la tangente del arco de elipse o redondeo de la punta de la herramienta de corte con respecto al sistema de coordenadas u_{el} y v_{el}

$$\tan \lambda = \frac{dv_{el}}{du_{el}} = - \frac{u_{el} \cdot \cos \beta}{\sqrt{\left(\frac{m \cdot \rho_f}{\cos \beta}\right)^2 - u_{el}^2}} \quad (2.17)$$

Despejando u_{el}

$$u_{el} = \frac{\tan \lambda \cdot \frac{m \cdot \rho_f}{\cos \beta}}{\sqrt{\cos^2 \beta + \tan^2 \lambda}} \quad (2.18)$$

- De la Figura 2-12

$$\lambda = \phi + \theta_f \quad (2.19)$$

Reemplazando el ángulo ϕ de la ecuación (2.16) en la ecuación (2.19) y luego reemplazando la ecuación (2.19) en la ecuación (2.18) el valor de u_{el} es solo función del parámetro θ_f . Esta es la coordenada u_{el} del punto buscado de la elipse al centro de la misma.

- Distancia del punto buscado de la elipse al centro de esta

$$R_{el} = \sqrt{u_{el}^2 + v_{el}^2} \quad (2.20)$$

- Ángulo ψ_{el} del punto buscado

$$\psi_{el} = \left| \tan^{-1} \left(\frac{v_{el}}{u_{el}} \right) \right| \quad (2.21)$$

- Posición relativa del punto buscado de la elipse con respecto a su centro

$$U_{rel} = R_{el} \cdot \cos(\pi + \psi_{el} - \theta_f) \quad (2.22)$$

$$V_{rel} = R_{el} \cdot \sin(\pi + \psi_{el} - \theta_f) \quad (2.23)$$

Por lo tanto el lugar geométrico del perfil de acuerdo de la base del diente estará dado por las ecuaciones (2.24) y (2.25)

$$U_f(\theta_f) = U_{ea}(\theta_f) + U_{rel}(\theta_f) \quad (2.24)$$

$$V_f(\theta_f) = V_{ea}(\theta_f) + V_{rel}(\theta_f) \quad (2.25)$$

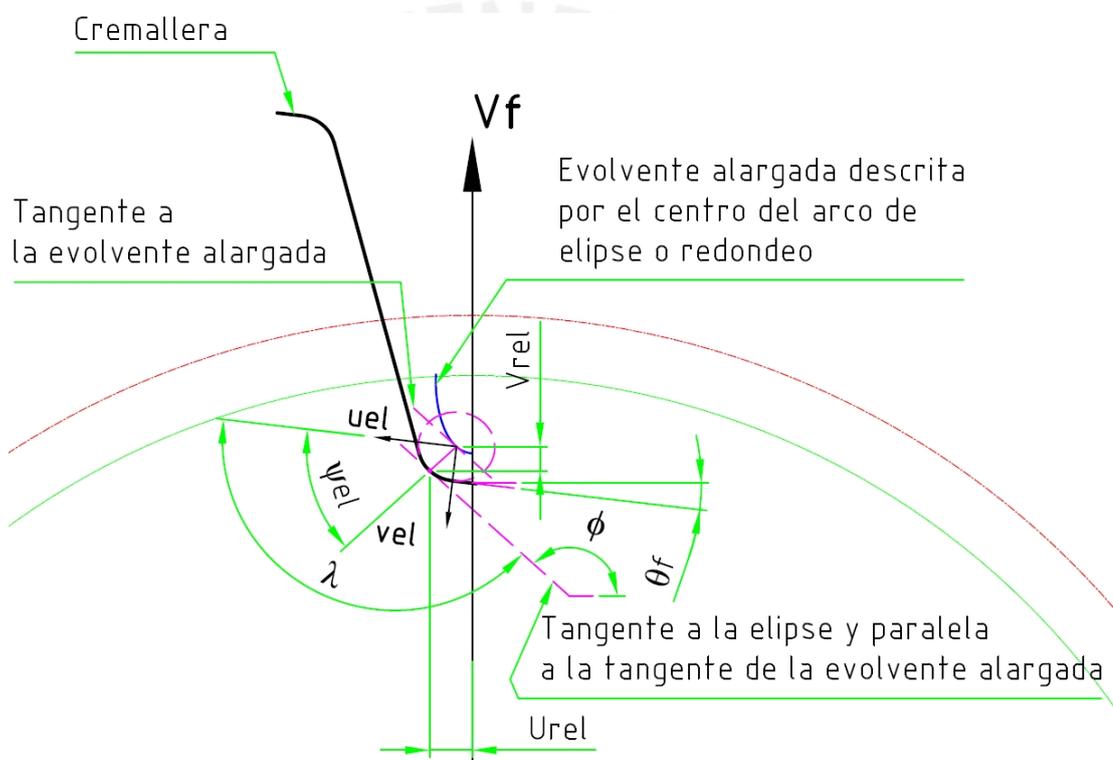


Figura 2-12: Procedimiento para determinar la curva del perfil de acuerdo de la base del diente.

Al igual que el caso de la curva de evolvente, para graficar la curva del perfil de acuerdo de la base del diente como se muestra en la Figura 2-1 se debe de posicionar los ejes U_f y V_f desfasados un ángulo γ_f de los ejes x e y .

Para determinar este ángulo γ_f en la Figura 2-13 izquierda se muestran la cremallera y el engranaje con sus sentidos de avance y giro respectivamente. Para que la curva de acuerdo de la base del pie del diente empiece a ser generada por la

punta de la cremallera los puntos A y A' que se muestran deberán coincidir, y para que esto ocurra la cremallera deberá de realizar un avance longitudinal L quedando la cremallera y el engranaje como se muestra en la Figura 2-13 derecha. Por lo tanto para determinar el ángulo γ_f bastará dividir L entre $\frac{d}{2}$, que expresado en función de los parámetros geométricos de la cremallera y engranaje este ángulo puede ser calculado como sigue:

$$\gamma_f = \frac{\frac{m}{\cos \beta} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + (h_a + c_f + \rho_f \cdot \sin \alpha - \rho_f) \cdot \tan \alpha + \rho_f \cdot \cos \alpha \right]}{\frac{d}{2}} \quad (2.26)$$

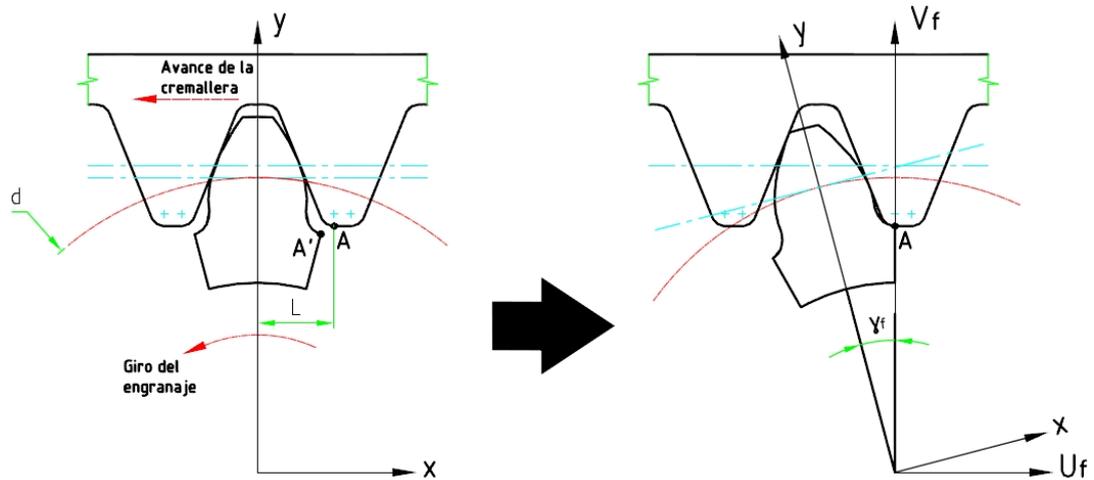


Figura 2-13: Relación entre ejes coordenados U_f y V_f con los ejes x e y

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas del perfil de acuerdo de la base del diente en las coordenadas x e y son

$$x_f(\theta_f) = U_f(\theta_f) \cdot \cos \gamma_f + V_f(\theta_f) \cdot \sin \gamma_f \quad (2.27)$$

$$y_f(\theta_f) = -U_f(\theta_f) \cdot \sin \gamma_f + V_f(\theta_f) \cdot \cos \gamma_f \quad (2.28)$$

2.4. Punto de intersección de la Evolvente y el perfil de acuerdo de la base del diente y valores límites de los parámetros

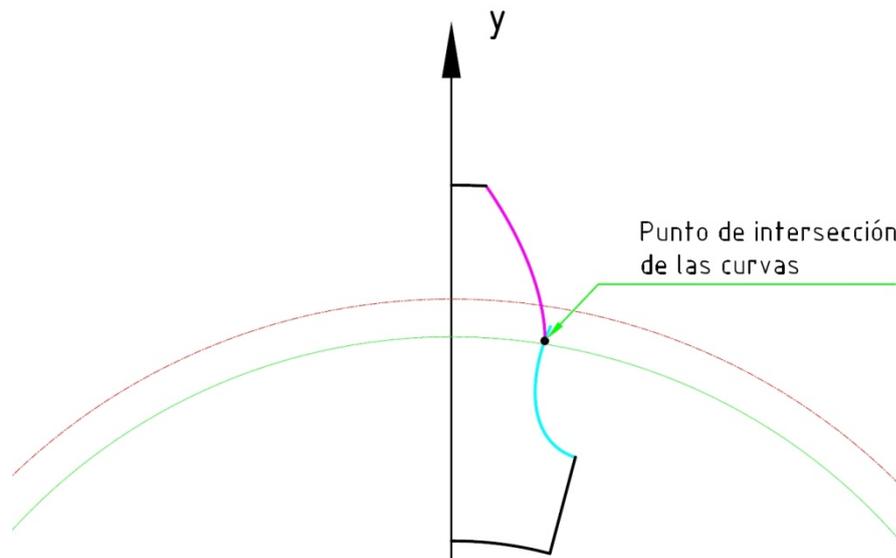


Figura 2-14: Punto de intersección de las curvas

Las curvas descritas por las ecuaciones (2.6), (2.7), (2.27) y (2.28) que describen el perfil del diente del engranaje se intersecan en un punto como se ve en la Figura 2-14 que determina el fin del perfil de acuerdo de la base del pie del diente y el inicio de la curva evolvente en el perfil del diente. Como el punto de intersección es único, los parámetros θ_e y θ_f en el punto de intersección de cada una de las curvas también deberán de ser únicos. Si llamamos al parámetro de la curva evolvente en el punto de intersección θ_{e_int} , y θ_{f_int} al parámetro de la curva del perfil de acuerdo de la base del diente en el punto de intersección. Estos deberán de satisfacer las ecuaciones (2.29) y (2.30) que resultan de igualar las ecuación (2.6) con la (2.27) y la ecuación (2.7) con la (2.28) evaluadas en los parámetros del punto de intersección.

$$x_e(\theta_{e_int}) = x_f(\theta_{f_int}) \quad (2.29)$$

$$y_e(\theta_{e_int}) = y_f(\theta_{f_int}) \quad (2.30)$$

El valor mínimo del parámetro θ_f es cero ya que en este valor coincidirá con el diámetro de fondo d_f del engranaje. En cuanto el valor máximo del parámetro θ_e

llamado aquí θ_{e_max} se determina encontrando o despejando el parámetro de la ecuación (2.31), que representa la intersección de la curva evolvente con círculo externo del engranaje de diámetro d_a .

$$\sqrt{[x_e(\theta_{e_max})]^2 + [y_e(\theta_{e_max})]^2} = \frac{d_a}{2} \quad (2.31)$$

Por lo tanto los valores que puede tomar los parámetros θ_f y θ_e son

$$0 \leq \theta_f \leq \theta_{f_int}$$

$$\theta_{e_int} \leq \theta_e \leq \theta_{e_max}$$

Como se puede notar en las ecuaciones (2.29) y (2.30), no es factible despejar manualmente y encontrar los valores de los parámetros del punto de intersección de las ecuaciones del perfil del diente. Por ello es necesario el uso de algún método numérico para poder resolver estas ecuaciones, a continuación se menciona el método numérico usado para resolver estas ecuaciones.

2.4.1. Resolución por el método de la bisección

El método de la bisección es el método más simple para resolver ecuaciones no lineales y se encuentra en casi la totalidad de la bibliografía acerca del tema, pero solo se puede resolver ecuaciones no lineales con una sola incógnita y en el caso presentado del punto de intersección se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas. Para poder utilizar el presente método se requiere una relación entre los parámetros del punto de intersección θ_{e_int} y θ_{f_int} que posibilita tener una sola ecuación con una sola incógnita. Esta relación puede ser determinada si primero se elevan al cuadrado las ecuaciones (2.29) y (2.30), luego se suman quedando de la siguiente manera

$$x_e(\theta_{e_int})^2 + y_e(\theta_{e_int})^2 = x_f(\theta_{f_int})^2 + y_f(\theta_{f_int})^2 \quad (2.32)$$

Tomando el primer termino de la ecuación (2.32)

$$x_e(\theta_{e_int})^2 + y_e(\theta_{e_int})^2 = U_e(\theta_{e_int})^2 + V_e(\theta_{e_int})^2 = \frac{d_b^2}{4} \cdot (1 + \theta_{e_int})$$

Y volviendo a la ecuación (2.32) y despejando θ_{e_int} se obtiene la relación entre los parámetros de las ecuaciones de las curvas en el punto de intersección

$$\theta_{e_int} = \sqrt{\frac{4 \cdot [x_f(\theta_{f_int})^2 + y_f(\theta_{f_int})^2]}{d_b^2} - 1} \quad (2.33)$$

Ahora la ecuación (2.33) se puede reemplazar en cualquiera de las ecuaciones del punto de intersección (2.29) o (2.30) y se tiene ya una ecuación no lineal con una sola variable que puede ser resuelta.

2.5. Verificación de las ecuaciones que describen el perfil del diente mediante una aplicación CAD 2D

Para comprobar la correspondencia entre el perfil del diente de un engranaje cilíndrico de perfil de evolvente generado por el método de fabricación cuchilla-cremallera o por fresa madre con las ecuaciones (2.6), (2.7), (2.27) y (2.28) que, como se describió en el epígrafe 2.3, corresponden a los lugares geométricos de la curva de evolvente y el perfil de acuerdo de la base del diente (curvas que forman el perfil del diente) se realizó una aplicación CAD 2D en el software AutoCAD que se describe a continuación.

- Interfaz de usuario (ver Figura 2-15)

En la Figura 2-15 se puede ver los distintos campos que se pueden modificar en la aplicación realizada para generar el perfil del diente de engranaje.

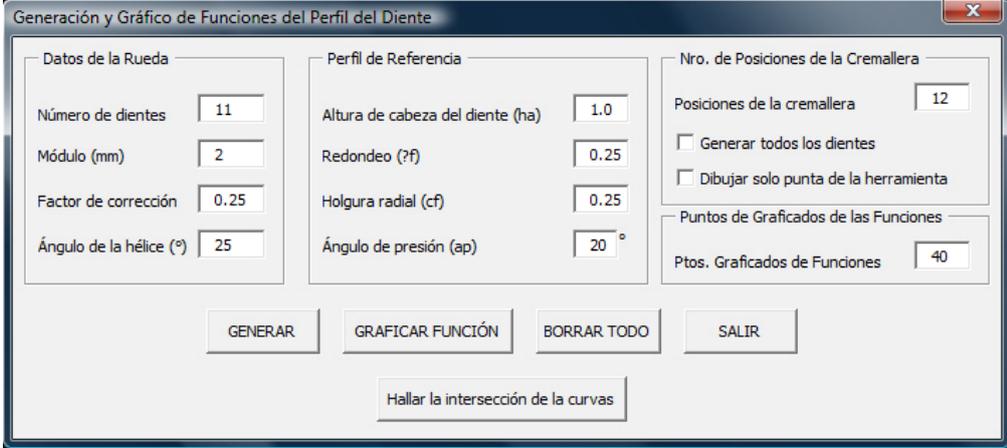


Figura 2-15: Interfaz de usuario de la aplicación CAD 2D

Se puede modificar:

- Los datos de la rueda: Aquí se introduce el número de dientes del engranaje (Z), el módulo (m) en milímetros, el factor de corrección (x) y el ángulo de la hélice (β) en grados sexagesimales.
- Los datos del perfil de referencia
- Número de posiciones de la cremallera que se posicionarán, además también se puede indicar las opciones para generar todo el engranaje o solo un diente y también si solo se desea dibujar la punta de la herramienta para poder generar únicamente el perfil de acuerdo de la base del diente.
- En número de puntos graficados de las funciones se refiere a cuantos puntos de las funciones de los perfiles serán unidos por líneas rectas entre ellos. Esto se hace debido a que el software AutoCAD no puede graficar funciones.
- Generación del perfil del diente del engranaje por el método de cuchilla-cremallera o fresa madre (ver Figura 2-16)

La aplicación genera un diente de engranaje a partir de posicionar la cremallera, que se crea a partir de los datos de la interfaz de usuario, un número determinado de veces, esto emula la acción de engrane o corte que tendría el engranaje con una cremallera o la herramienta de corte. Esto ocurre luego de dar clic en el botón “GENERAR” de la aplicación.

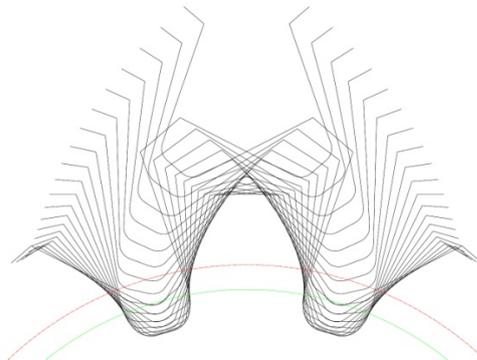


Figura 2-16: Generación del perfil del diente

- Gráfica de las curvas del perfil del diente (ver Figura 2-17)

Al dar clic sobre el botón “GRAFICAR FUNCIÓN” se grafican la curva evolvente y la curva de perfil de acuerdo de la base del diente del engranaje.

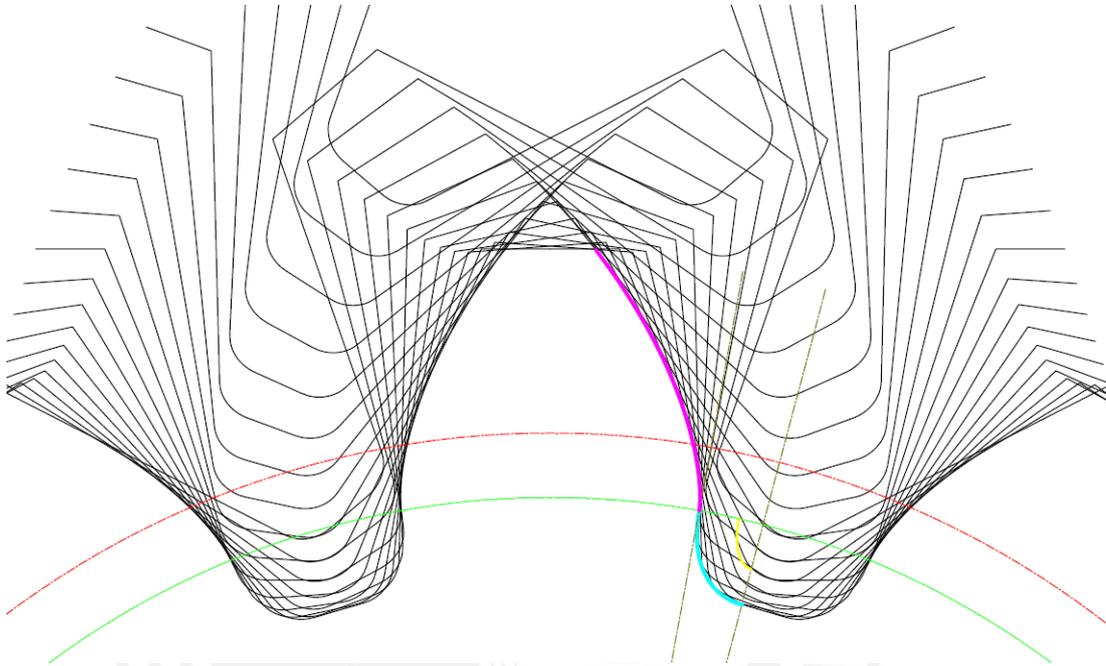


Figura 2-17: Gráfico de las ecuaciones que describen el perfil del diente sobre el diente generado para verificar si son correctas

- Ubicación del punto de intersección (ver Figura 2-18)

Al dar clic sobre el botón “Hallar la intersección de las curvas” grafica un círculo que tiene como centro el punto de intersección calculado. Con esto se puede verificar si el punto de intersección calculado es coherente con el perfil generado.

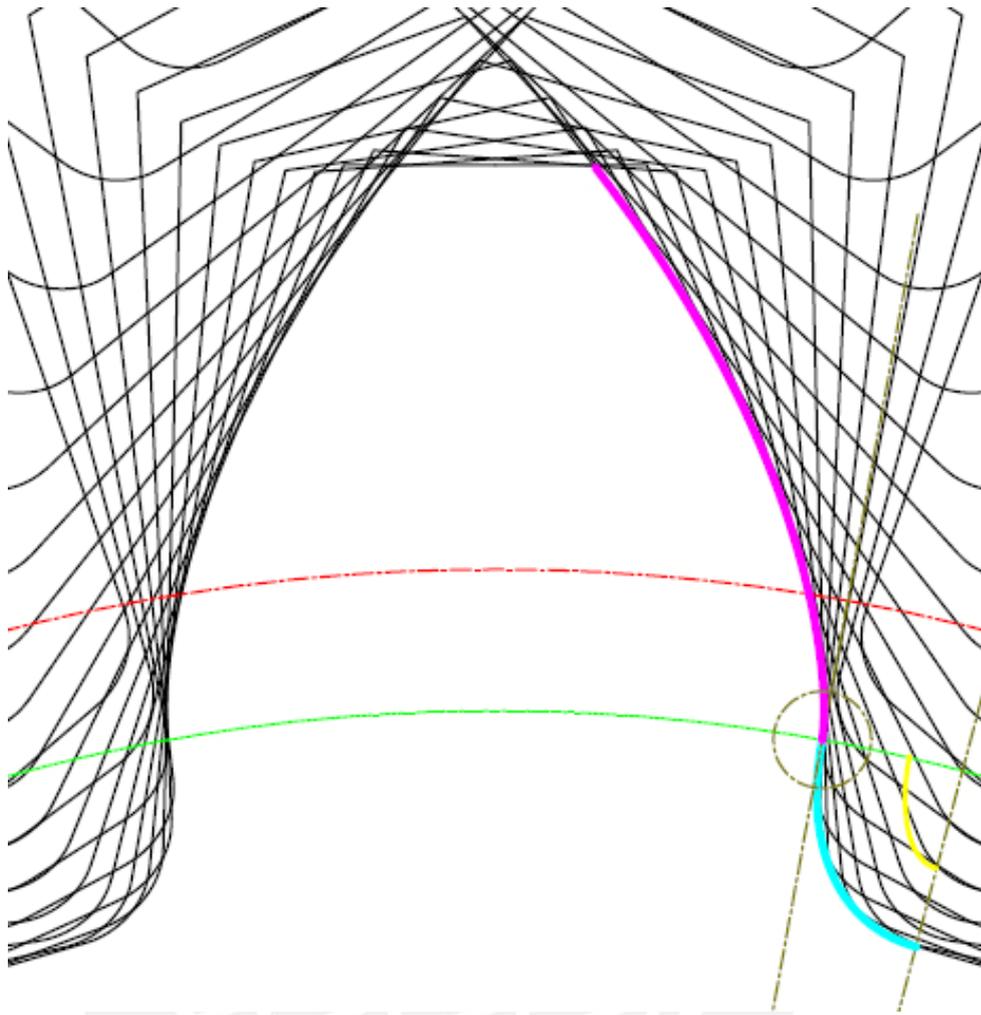
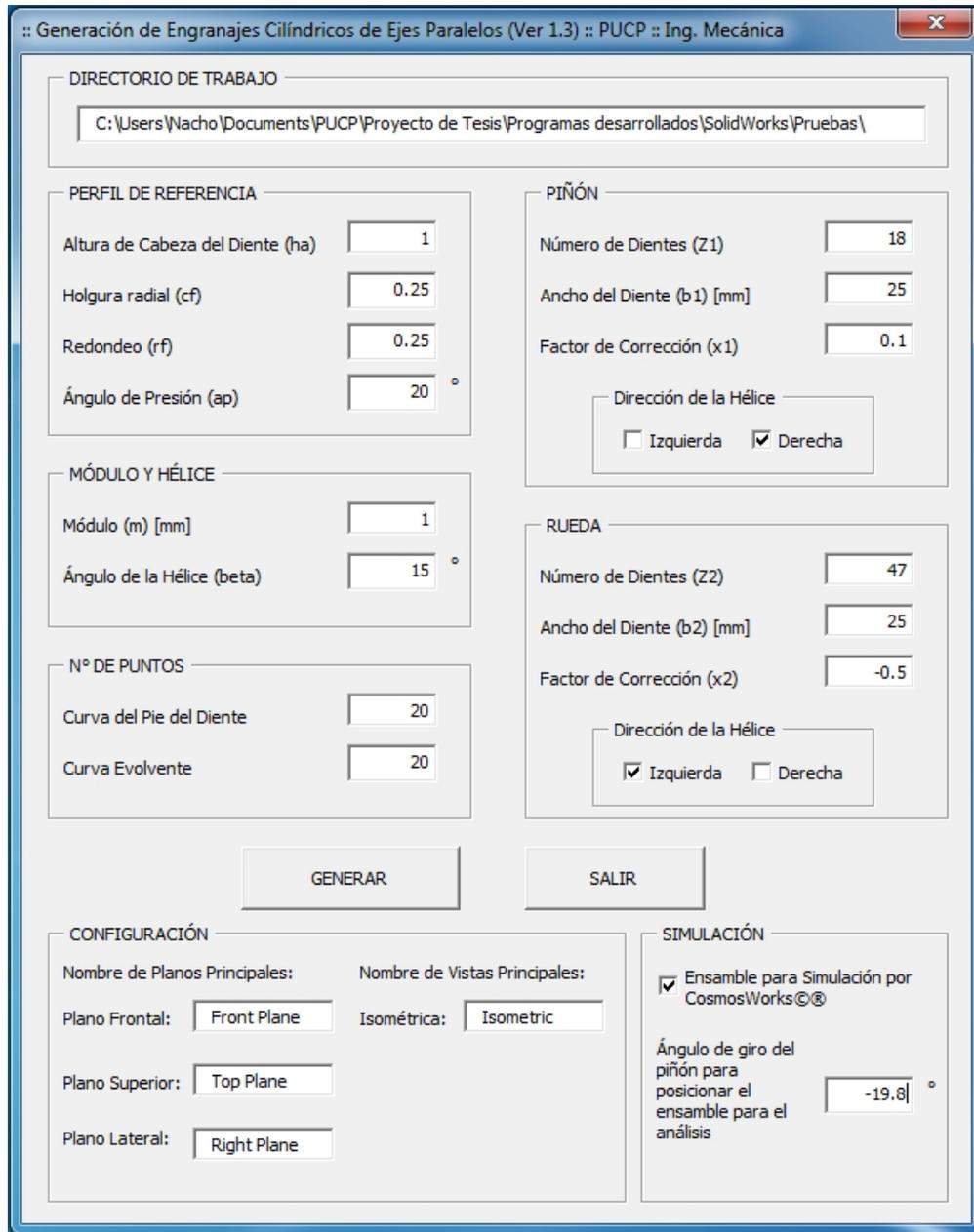


Figura 2-18: Ubicación del punto de intersección de las curvas

2.6. Presentación de aplicación CAD 3D para la generación de engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil de evolvente



:: Generación de Engranajes Cilíndricos de Ejes Paralelos (Ver 1.3) :: PUCP :: Ing. Mecánica

DIRECTORIO DE TRABAJO
 C:\Users\Nacho\Documents\PUCP\Proyecto de Tesis\Programas desarrollados\SolidWorks\Pruebas\

PERFIL DE REFERENCIA
 Altura de Cabeza del Diente (ha)
 Holgura radial (cf)
 Redondeo (rf)
 Ángulo de Presión (ap) °

MÓDULO Y HÉLICE
 Módulo (m) [mm]
 Ángulo de la Hélice (beta) °

N° DE PUNTOS
 Curva del Pie del Diente
 Curva Evolvente

PIÑÓN
 Número de Dientes (Z1)
 Ancho del Diente (b1) [mm]
 Factor de Corrección (x1)
 Dirección de la Hélice
 Izquierda Derecha

RUEDA
 Número de Dientes (Z2)
 Ancho del Diente (b2) [mm]
 Factor de Corrección (x2)
 Dirección de la Hélice
 Izquierda Derecha

CONFIGURACIÓN
 Nombre de Planos Principales: Plano Frontal:
 Nombre de Vistas Principales: Isométrica:
 Plano Superior:
 Plano Lateral:

SIMULACIÓN
 Ensamble para Simulación por CosmosWorks®
 Ángulo de giro del piñón para posicionar el ensamble para el análisis °

Figura 2-19: Interfaz de usuario de aplicación CAD 3D

Para la simulación en un software de elementos finitos se requiere de un modelo CAD 3D. Para esto se realizó una aplicación en el software CAD SolidWorks 2009 para generar un par cualquiera de engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil de evolvente que luego pueden ser analizados en un software de elementos finitos.

Esta aplicación CAD 3D (ver Figura 2-19), al igual que la aplicación CAD 2D descrita en el epígrafe 2.5, requiere el ingreso de los parámetros del perfil de referencia, datos de los dos engranajes como son el número de dientes (Z), factor de corrección (x), ancho de engranaje (b), el ángulo de la hélice (β) y su dirección (izquierda o derecha) en el piñón y rueda.

En la Figura 2-20 se muestra un par de engranajes generados por la aplicación.

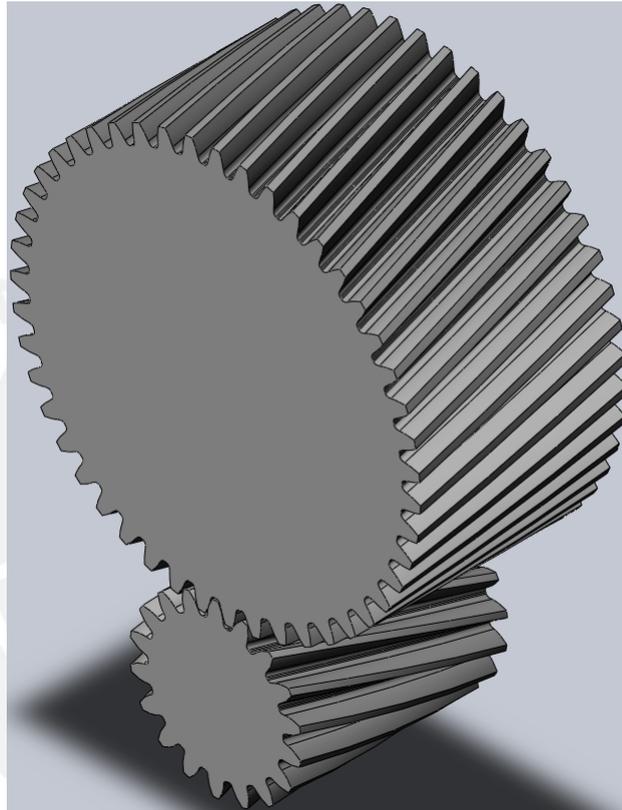


Figura 2-20: Modelos CAD 3D generados por la aplicación

Además en la interfaz de usuario se muestra un botón de chequeo para la generación del par de engranajes para el análisis por el software por elementos finitos, la generación de los engranajes teniendo este botón activado produce los dos engranajes de la misma manera pero no genera la totalidad de dientes sino solo los que se encontrarían en contacto durante el engrane. Para esto internamente se calcula coeficiente de recubrimiento total (ε_γ). En la Figura 2-21 se muestra un par de engranajes generados bajo los mismos parámetros que la Figura 2-20 pero con el botón de chequeo activado. La generación de únicamente los dientes que se encuentren engranando es muy útil para el posterior análisis en el

software de elementos finitos ya que reduce el tiempo de cálculo y principalmente se pueden afinar mucho más los resultados.

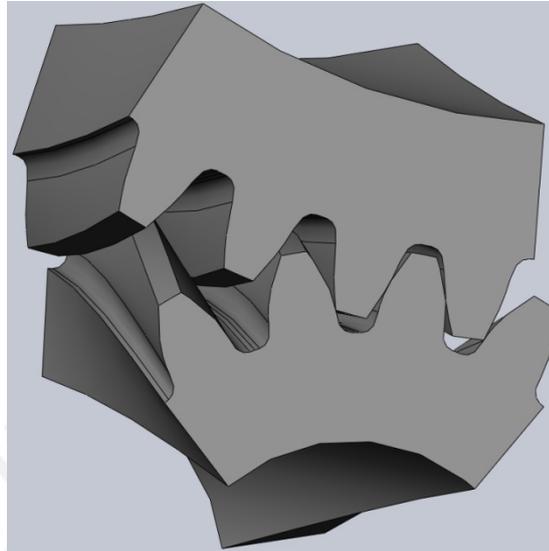


Figura 2-21: Mismo par de engranajes, pero con menor número de dientes generados para su posterior análisis por elementos finitos

CAPÍTULO 3

3. ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS DE CONTACTO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

3.1. Introducción

En la simulación de la transmisión de potencia por engranajes cilíndricos de ejes paralelos y perfil de evolvente por el método de los elementos finitos se debe de tener en cuenta las condiciones de contorno del modelo como son la aplicación de la carga, la definición de las restricciones y el contacto, y el instante crítico de engrane. Por ello en el presente capítulo se abordarán los temas necesarios para la correcta definición del modelo e instante de engrane para luego presentar un resultado de la simulación en un software de elementos finitos.

3.2. Estimación del instante crítico de engrane para el esfuerzo de contacto

Analíticamente es complicado encontrar el instante crítico de engrane para el esfuerzo de contacto, ya que depende de la porción de la carga total que asume cada uno de los dientes en contacto. Esta carga asumida por cada diente no es constante durante el engrane ya que depende de la rigidez de del diente en cada instante de engrane.

Como la rigidez que presenta cada diente varía durante todo el engrane la carga que asumen también será variable. Además la longitud total de contacto, tanto en los engranajes helicoidales como rectos, varía durante el engrane.

Para la estimación del instante crítico de engrane para el esfuerzo de contacto se analizará el esfuerzo máximo de contacto según la ecuación (1.28). En esta ecuación se puede notar que para una transmisión de torque constante los únicos factores que podrían variar el esfuerzo contacto son el radio reducido (ρ) y la longitud de contacto (l_c). El esfuerzo máximo de contacto según la ecuación (1.28) será mayor a medida que el radio reducido (ρ) y la longitud de contacto (l_c) sean menores. Por ello a continuación se analiza el comportamiento de estos dos factores durante el engrane.

3.2.1. Variación del radio reducido o equivalente (ρ) durante el engrane

En la Figura 3-1 se muestra la línea de contacto de dos engranajes. Las prolongaciones de esta línea son tangentes a los círculos básicos de diámetros d_{b1} y d_{b2} en los puntos T_1 y T_2 respectivamente. En la Figura 3-1 se toma un punto de contacto cualquiera, llamado Q , sobre la línea de contacto y se muestran los radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 de los perfiles de evolvente de ambos engranajes en dicho punto de contacto.

En la Figura 3-1 se puede apreciar que la suma de los radios de curvatura ($\rho_1 + \rho_2$) equivale a la distancia entre los puntos T_1 y T_2 . Es decir el valor de la suma de los radios de curvatura en cualquier punto de contacto es constante a pesar que sus valores individuales varíen. El valor de la suma de los radios de curvatura es

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{\tan \alpha_{wt}}{2} \cdot (d_{b1} + d_{b2}) = \frac{d_1}{2} \cdot \tan \alpha_{wt} \cdot \cos \alpha_t \cdot (u + 1) \quad (3.1)$$

En la ecuación (1.29) el denominador es la suma de los radios de curvatura de un punto de contacto determinado, este volar como se ve en la ecuación (3.1) es un valor constante. Ahora, analizando el numerador de la ecuación se tiene la multiplicación de los radios de curvatura de la curva evolvente en un punto de contacto perteneciente a la línea de engrane.

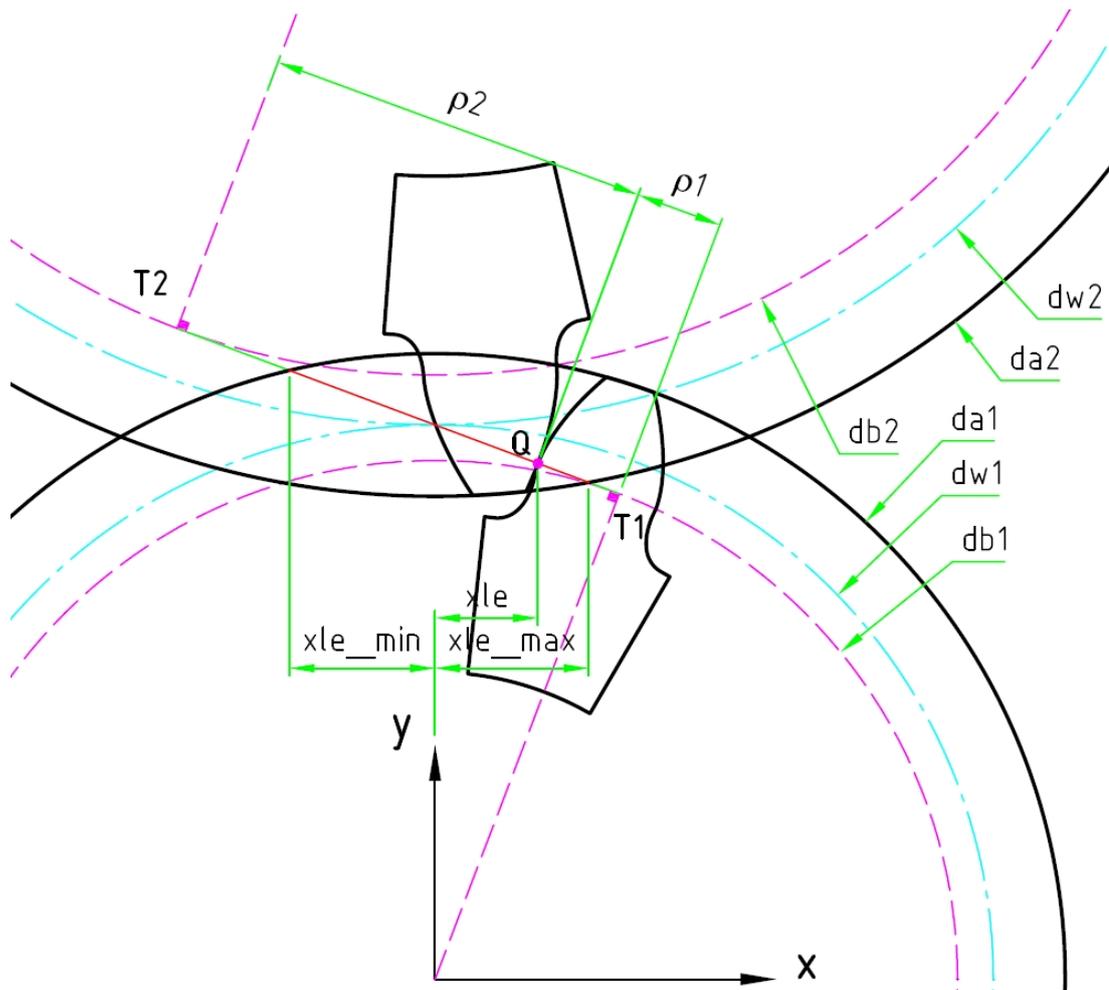


Figura 3-1: Radios de curvatura en un punto de contacto Q

Las expresiones (3.2) y (3.3)⁶ corresponden a los radios de curvatura de los perfiles en cualquier punto de la línea de engrane en función de x_{le} de la Figura 3-1

$$\rho_1(x_{le}) = \frac{d_{b1}}{2} \cdot \tan \alpha_{wt} \mp \frac{x_{le}}{\cos \alpha_{wt}} \tag{3.2}$$

$$\rho_2(x_{le}) = \frac{d_{b2}}{2} \cdot \tan \alpha_{wt} \pm \frac{x_{le}}{\cos \alpha_{wt}} \tag{3.3}$$

⁶ El signo – y + en las ecuaciones (3.2) y (3.3) respectivamente corresponde al giro anti horario del engranaje 1 de la Figura 3-1 y los signos + y – el sentido de giro horario.

Los valores límite⁷ de x_{le} son los valores máximo y mínimo de la coordenada x de la línea de engrane.

$$x_{le_min} \leq x_{le} \leq x_{le_max}$$

En la Figura 3-2 se muestra el gráfico del radio de curvatura reducido o equivalente (ρ) en función de la posición de engrane de un par de engranajes. De esta figura se puede apreciar que en los valores límite x_{le_min} y x_{le_max} el radio reducido ρ tiende a ser el valor mínimo.

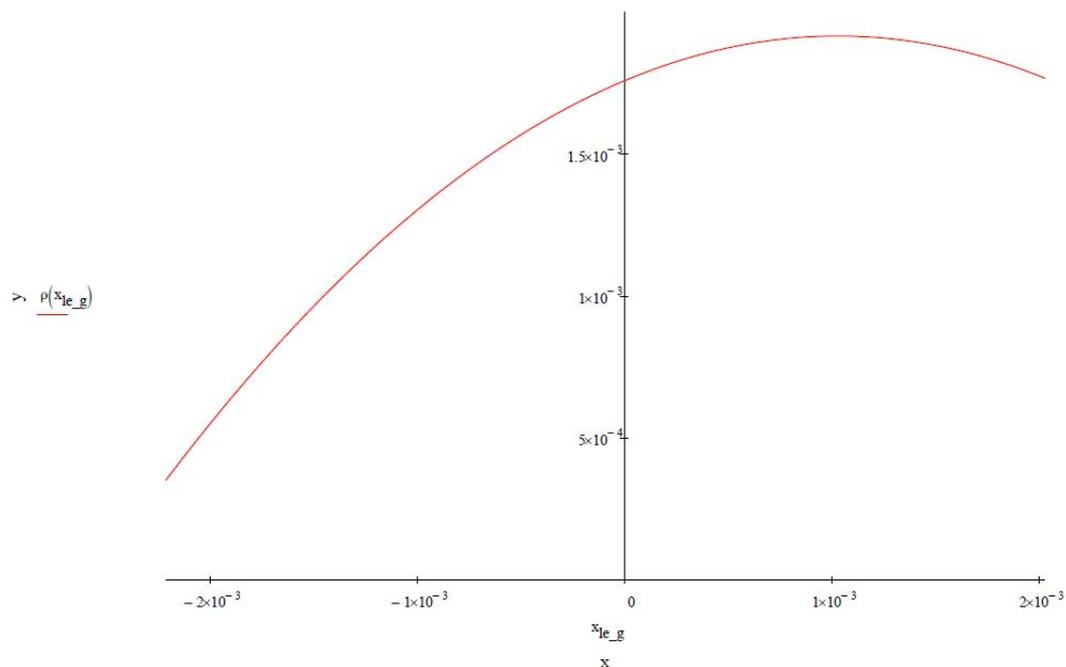


Figura 3-2: Radio reducido o equivalente ρ en función de la posición de engrane

$$(m = 1\text{ mm}, Z_1 = 15, Z_2 = 27, x_1 = x_2 = 0, \beta = 15^\circ)$$

3.2.2. Longitud de contacto de un diente

La longitud de contacto de un diente puede variar durante el engrane, como en el caso de los engranajes cilíndricos de dientes helicoidales, o también puede permanecer constante como es el caso de los engranajes cilíndricos de dientes rectos. A continuación se describe el caso de la longitud de contacto de un diente

⁷ En el Anexo A.1 se describen los puntos límite de la línea de engrane.

de engranajes cilíndricos de dientes helicoidales, ya que este abarca también a los engranajes cilíndricos de dientes rectos como un caso particular ($\beta = 0^\circ$) de los primeros.

En la Figura 3-1 se muestra la cara delantera de una transmisión de engranajes cilíndricos de dientes helicoidales, la línea de engrane que se muestra es la vista de canto del plano de engrane que recorre todo lo ancho del engranaje, es decir todos los puntos de contacto del diente en cualquier instante del engrane pertenecen a este plano de engrane. En la Figura 3-3 se muestra el plano de engrane en verdadera magnitud, si se interseca el plano de engrane con un diente en una determinada posición de engrane el resultado será una línea recta, esta línea será la que se encuentre en contacto con el diente del otro engranaje, la inclinación de esta recta con respecto al eje del engranaje será el ángulo de la hélice en el diámetro básico (β_b).

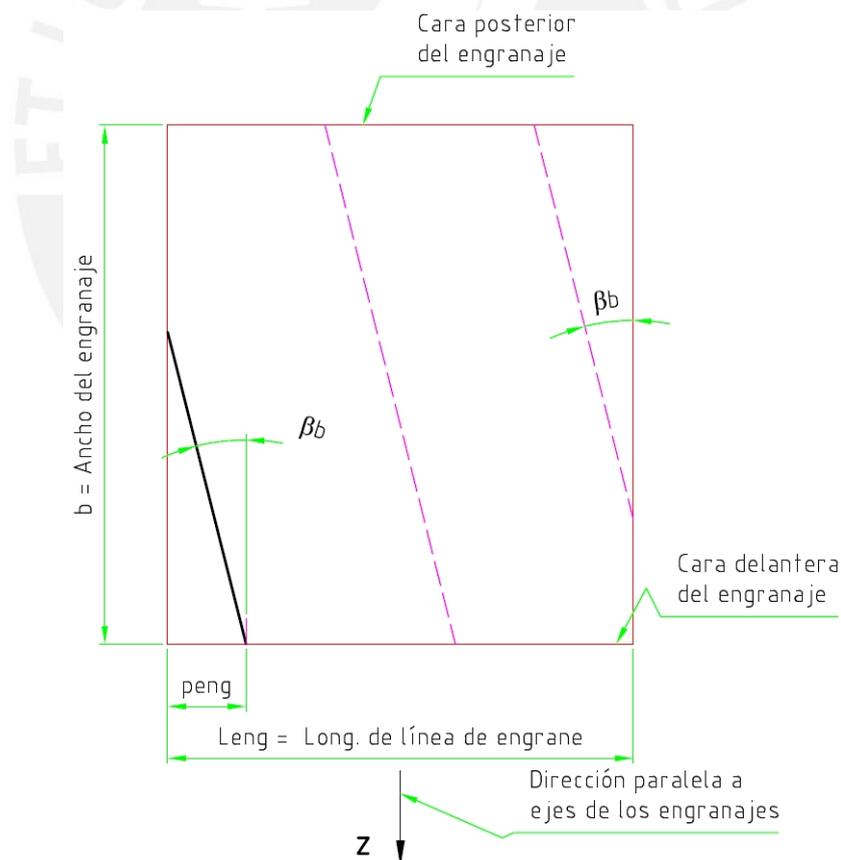


Figura 3-3: Plano de engrane en verdadera magnitud, línea de engrane en una posición p_{eng} de la línea de engrane

La longitud de contacto de un diente en una determinada posición de engrane puede ser determinada por las siguientes expresiones

- Si $0 \leq p_{eng} \leq b \cdot \tan \beta_b \quad \wedge \quad p_{eng} \leq L_{eng}$:

$$l_c = \frac{p_{eng}}{\sin \beta_b} \quad (3.4)$$

- Si $b \cdot \tan \beta_b < p_{eng} \leq L_{eng}$:

$$l_c = \frac{b}{\cos \beta_b} \quad (3.5)$$

- Si $L_{eng} < p_{eng} \leq L_{eng} + b \cdot \tan \beta_b$:

$$l_c = \frac{L_{eng} - (p_{eng} - b \cdot \tan \beta_b)}{\sin \beta_b} \quad (3.6)$$

Cabe señalar que la condición para aplicar la ecuación (3.6) indica que la posición de engrane (p_{eng}) debe ser mayor a la longitud de la línea de engrane, es decir fuera de la línea de engrane (L_{eng}). Esto se refiere a que los perfiles de evolvente de la cara delantera de dos dientes de los engranajes ya dejaron de estar en contacto pero aún se encuentran engranando las secciones posteriores hasta terminar el engrane de los dientes en la cara posterior del engranaje.

3.2.3. Variación de la longitud sumaria de contacto durante el engrane

En la transmisión de potencia por engranajes la carga sobre cada par de dientes en contacto se distribuye a lo largo de la longitud de contacto que poseen entre ellos, esta distribución no es constante debido distintos factores como errores de montaje, deflexión de los arboles que soportan a los engranajes y errores de fabricación. Aún así, asumiendo que la carga total se distribuye de manera constante sobre todas las líneas de contacto en un instante de engrane determinado, este valor no sería tampoco constante durante el engrane, ya que la longitud de contacto total varía durante todo el engrane y por lo tanto también el valor de la carga distribuida sobre las líneas de contacto variará; siendo más visible este fenómeno en los engranajes cilíndricos de dientes helicoidales, ya que el contacto de un diente empieza en un

punto y se va extendiendo en líneas de contacto que van variando su longitud según la posición de engrane como se ve en las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6), si a esto se suma los distintos dientes que se encuentran en contacto en cada instante de engrane el valor de la longitud total o sumaria de contacto variará de acuerdo a cada instante de engrane. En la Figura 3-4 se muestra el plano de engrane de un par de engranajes de dientes helicoidales, analizando un par de dientes que están empezando a engranar y su posición de engrane en la cara frontal de las ruedas se encuentra en el punto G de la Figura 3-4, la longitud total o sumaria de contacto l_{Σ} se encuentra al sumar las longitudes de contacto de cada par de dientes que se encuentran engranando l_{c1} , l_{c2} y l_{c3} , entonces

$$l_{\Sigma} = l_{c1} + l_{c2} + l_{c3}$$

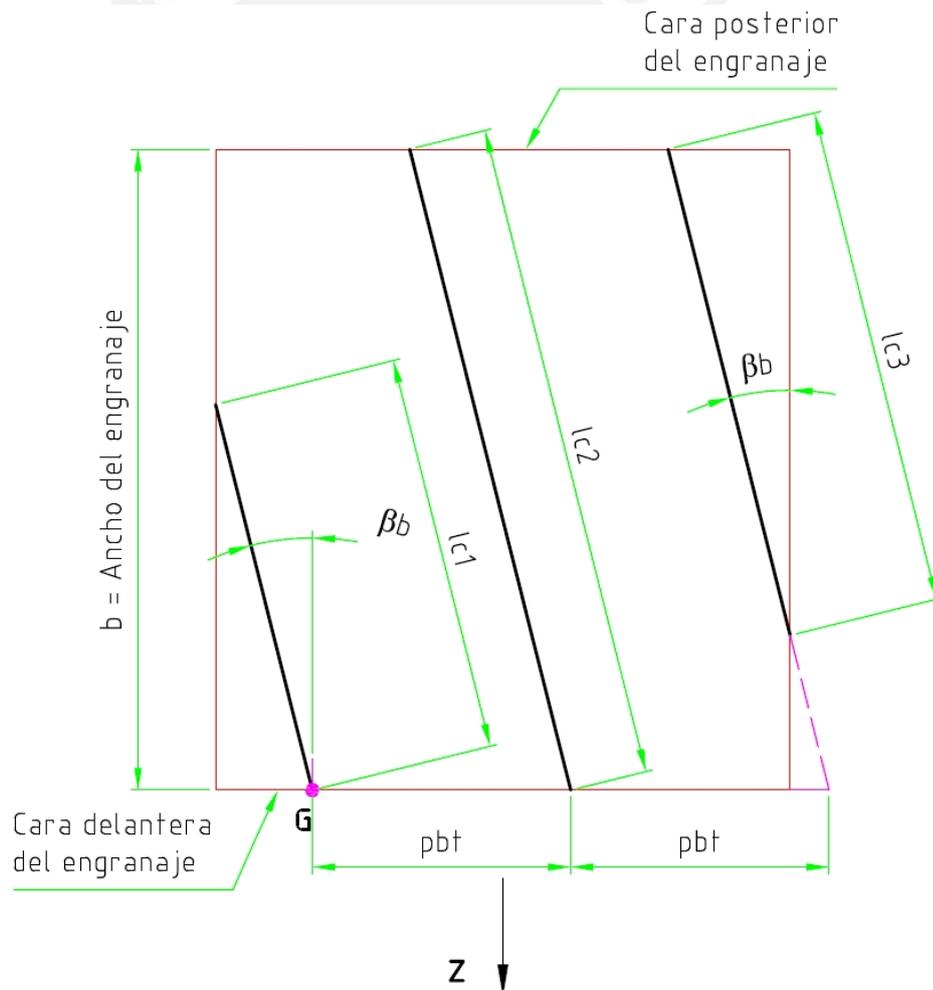


Figura 3-4: Líneas de contacto

Para determinar la variación de la longitud de contacto total o sumaria en toda la longitud de engrane basta analizar los instantes de engrane de un par de dientes desde su inicio de contacto hasta que hayan recorrido un paso básico circunferencial o paso de engrane (p_{bt}), ya que la variación tendrá la misma forma o será periódica en este valor

$$p_{bt} = m \cdot \pi \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} \quad (3.7)$$

La Figura 3-6 es un diagrama de flujo que muestra una manera de calcular la longitud de contacto total o sumaria (l_{Σ}) para una posición de engrane de un par de dientes que se encuentra entre el inicio de engrane y un paso básico circunferencial (p_{bt}). En la Figura 3-5 se muestra la variación de la longitud de contacto total o sumaria durante el engrane en el primer paso básico circunferencial, aquí se puede apreciar que el mínimo valor de la longitud de contacto total se encuentra en el inicio de contacto de un par de dientes y cuando va a empezar a engranar otro nuevo par de dientes.

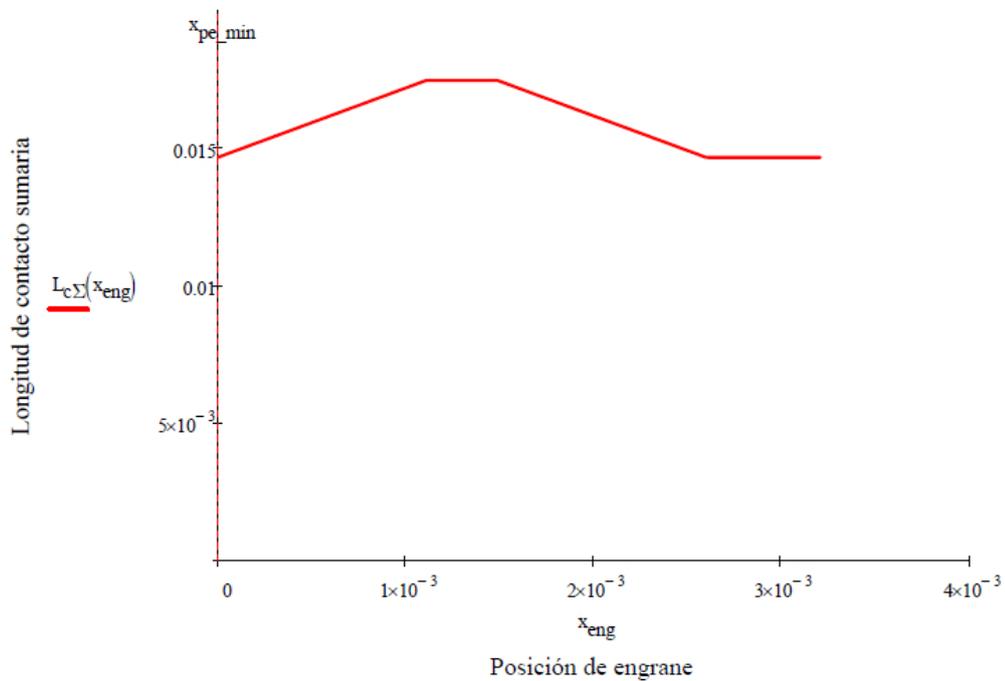


Figura 3-5: Variación de la longitud de contacto sumaria l_{Σ} en función de la posición de engrane p_{eng} con $0 \leq p_{eng} \leq p_{bt}$

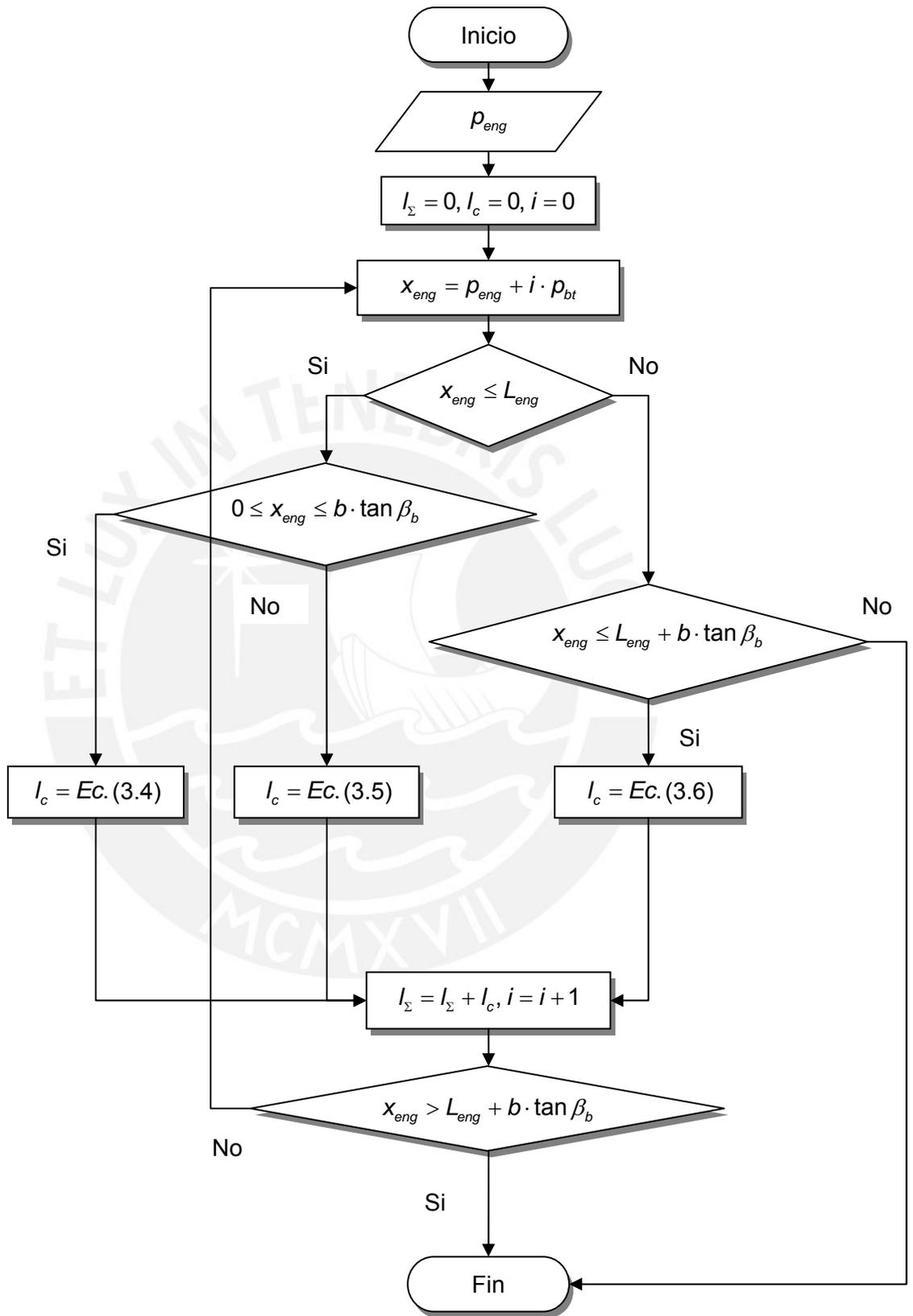


Figura 3-6: Diagrama de flujo para determinar la longitud de contacto sumaria l_{Σ} ,

con $0 \leq p_{eng} \leq p_{bt}$

Analizando en conjunto la Figura 3-2 y la Figura 3-5 se puede notar que en el inicio de contacto de un par de dientes se encuentra el valor mínimo tanto del radio reducido o equivalente (ρ) y la longitud de contacto total o sumaria (l_{Σ}). Es por eso que se analizará este instante de engrane en el software de elementos finitos.

3.3. Condiciones de contorno, aplicación de carga y material

A continuación se describe la forma como se procedió a aplicar las restricciones a los modelos geométricos CAD 3D, las condiciones de contacto y la aplicación de la carga.

El software utilizado en el presente trabajo para el análisis por método de elementos finitos es CosmosWorks 2009.

3.3.1. Material

En el presente trabajo para el cálculo de los esfuerzos de contacto tanto de manera analítica como en la simulación por el método de los elementos finitos es necesario definir las propiedades del material de los engranajes analizados. Como no se va a comparar el esfuerzo resultante con el esfuerzo límite de contacto del material sino se comparará los esfuerzos calculados de manera analítica con el resultado de la simulación en el software de elementos finitos bastará con definir únicamente el módulo de Poisson ν y el módulo de elasticidad o de Young E .

En la Tabla 3-1 se muestran las propiedades de los materiales usados tanto en el cálculo analítico como en el método de los elementos finitos

Tabla 3-1: Propiedades de materiales de los engranajes usados en los cálculos

	ν	$E \left(\frac{N}{mm^2} \right)$
Piñón	0.29	2.05×10^5
Rueda	0.29	2.05×10^5

3.3.2. Restricciones

Para determinar los esfuerzos de contacto presentes en los flancos de los dientes se realizará un análisis estático, por ello el grado de libertad de los dos engranajes debe ser cero.

En la Figura 3-7 se muestra la aplicación de una restricción tipo fija aplicada sobre el cubo de la rueda y las caras laterales de la porción de engranaje, esta restricción elimina los seis grados de libertad de la rueda. Con la restricción fija sobre el cubo de la rueda se simula la carga que debe accionar este engranaje. Y con las restricciones en las caras laterales se simula la presencia del engranaje entero. Con esta restricción el grado de libertad de la rueda es cero.

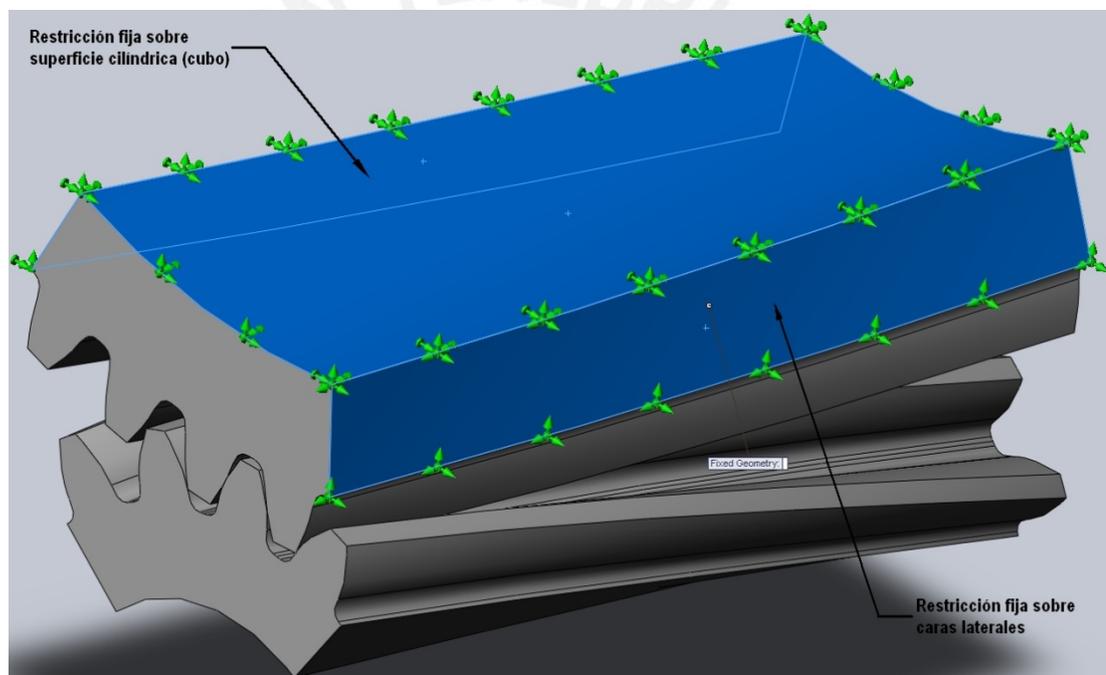


Figura 3-7: Aplicación de la restricción fija a la rueda

En el piñón se aplica un tipo de restricción que elimina 5 grados de libertad del engranaje, dejando como único grado de libertad la posibilidad de giro sobre su propio eje, esto permitirá aplicar la carga (torque) al piñón y que pueda transmitirla a la rueda. Como se muestra en la Figura 3-8 la restricción está aplicada sobre el cubo del piñón y las dos caras laterales de la porción del engranaje. Siendo la particularidad de este tipo de restricción que provoca que las selecciones hechas se trasladen o roten como un sólido rígido, para simular así la aplicación de la fuerza motriz sobre el piñón.

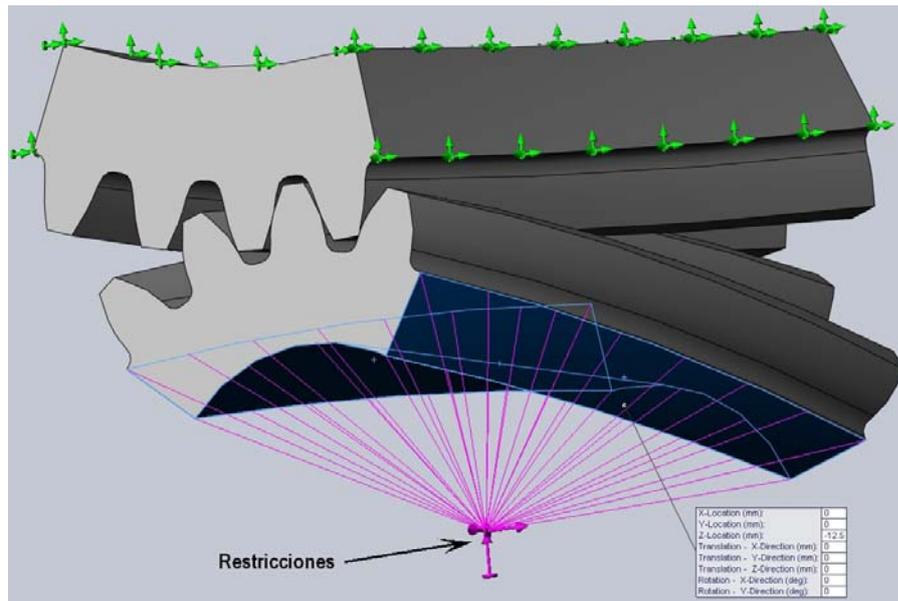


Figura 3-8: Aplicación de la restricción axial y radial en el piñón

3.3.3. Aplicación de carga

Para simular la transmisión no se aplicará una carga directa sobre los dientes de los engranajes sino se aplica un momento torsor al piñón en su cubo como se muestra en la Figura 3-9.

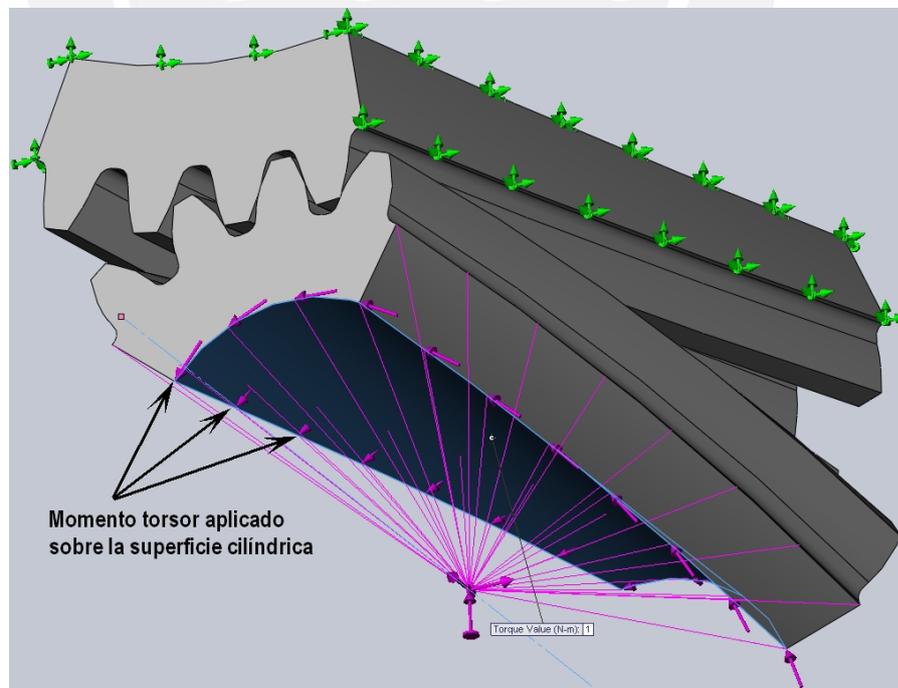


Figura 3-9: Aplicación del momento torsor en el piñón

3.3.4. Condiciones de contacto

La definición del contacto debe darse entre los flancos que transmiten la carga de los dientes del piñón a los dientes de la rueda, en la Figura 3-10 se muestra una vista paralela al plano transversal de los engranajes, si el piñón gira en el sentido señalado, que tiene el mismo sentido del momento torsor aplicado, el flanco izquierdo del diente del piñón será el que se encuentre en contacto y transmita la carga con el flanco del diente de la rueda, mas el flanco derecho debido a que el par de engranajes fueron generados para tener “Backlash” cero teóricamente también se encontrará en contacto con otro flanco de la rueda pero no transmitirá carga alguna. Por ello en el caso de la Figura 3-10 solo se deberá definir el contacto entre los flancos izquierdos del piñón con los flancos correspondientes de la rueda e ignorar el contacto de los flancos derechos.

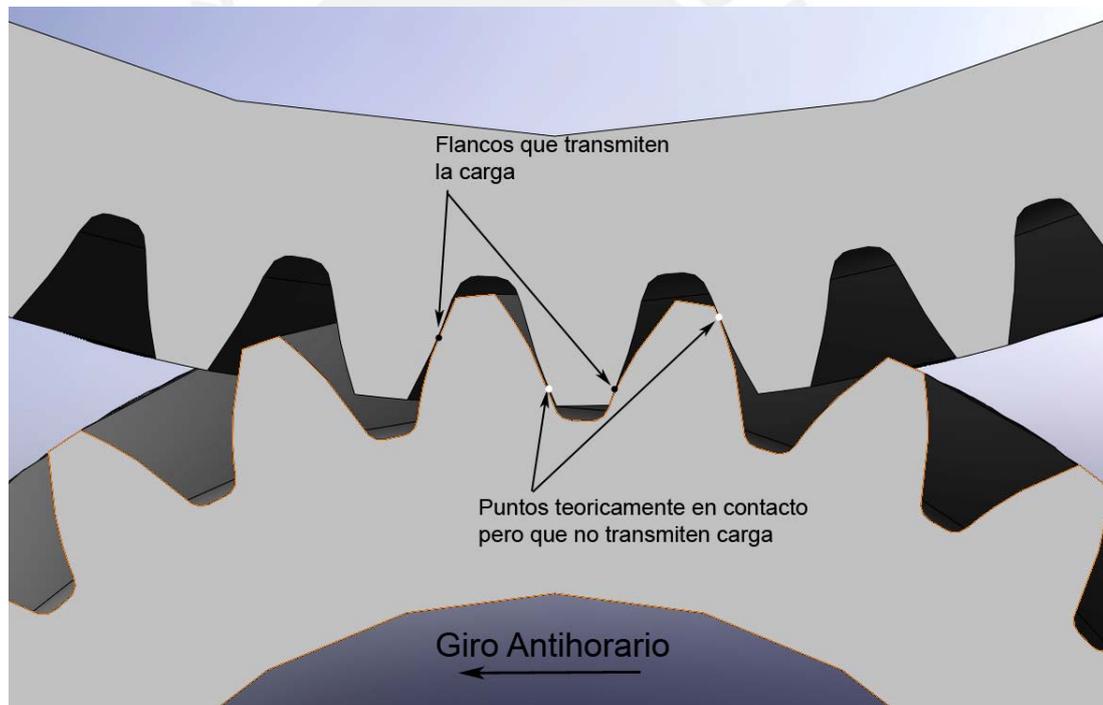


Figura 3-10: Flancos en contacto

La aplicación de la condición de contacto entre los flancos que transmiten la carga hará que el piñón, que todavía poseía un grado de libertad debido al tipo de restricción que se le aplicó, tenga cero grados de libertad con lo cual ya es posible realizar el estudio estático del modelo.

El tipo de contacto utilizado será del tipo Superficie-Superficie, en la Figura 3-11 se muestra la aplicación de las condiciones de contacto a los flancos que transmiten la carga.

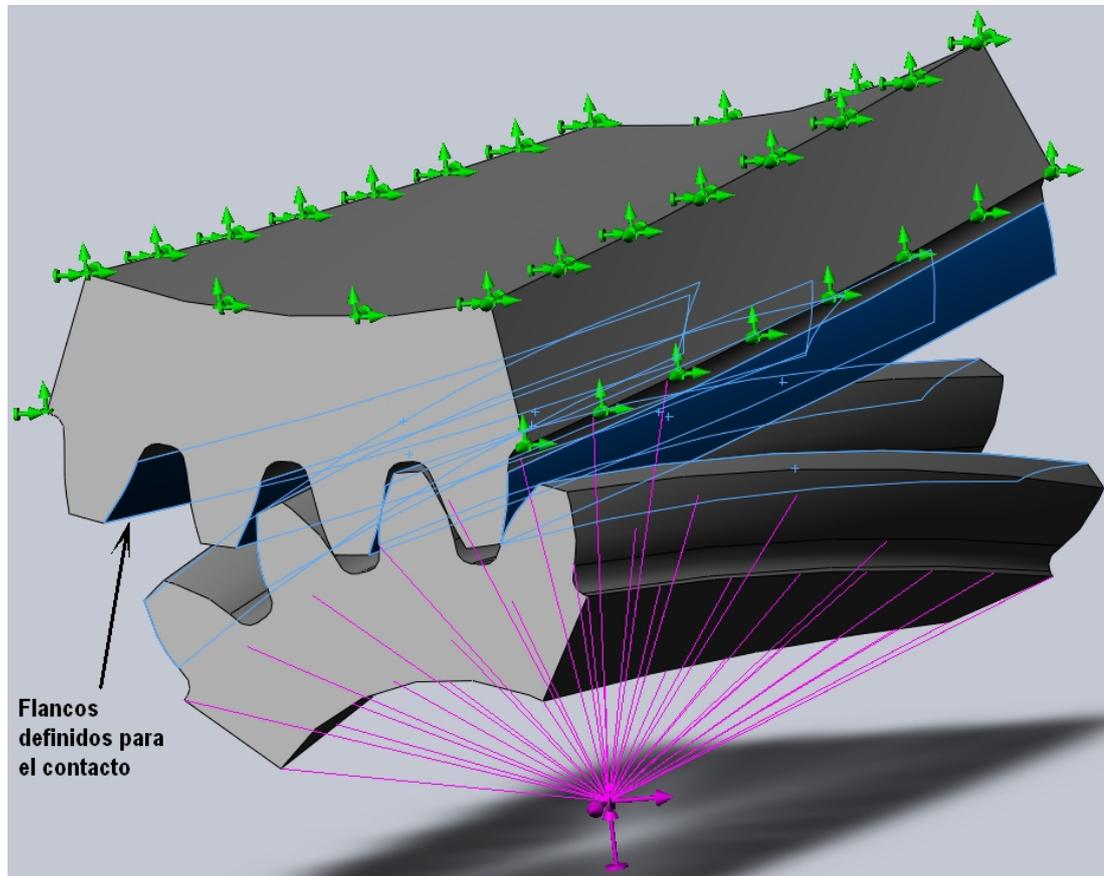


Figura 3-11: Definición de contacto entre flancos de dientes

3.4. Presentación y análisis de resultados obtenidos en el software de elementos finitos

Luego de haber definido la aplicación de la carga, las restricciones y las condiciones de contacto ya se puede proceder a analizar el modelo.

3.4.1. Mallado

El mallado es el paso previo al cálculo por el método de los elementos finitos, este consiste en crear los elementos y nodos correspondientes en todo el modelo geométrico 3D.

El software CosmosWorks permite la manipulación del tamaño de los elementos. Por ello para simular correctamente el engrane de los dientes la cantidad de nodos sobre las superficies de contacto de los dientes de los engranajes debe de ser la mayor posible y para esto se debe de reducir el tamaño del elemento (afinar la malla) en las superficies de contacto. El tamaño de los elementos fuera de los flancos de contacto de los dientes del engranaje no necesitan ser pequeños ya que en el presente trabajo solo se analizará el esfuerzo de contacto, si se analizaría el esfuerzo de flexión en el pie del diente también sería necesario reducir el tamaño del elemento en el pie de cada diente en contacto. En la Figura 3-12 se muestra el modelo mallado, donde se observa que en la zona de contacto el tamaño del elemento es mucho menor con respecto a los elementos en el resto del engranaje.

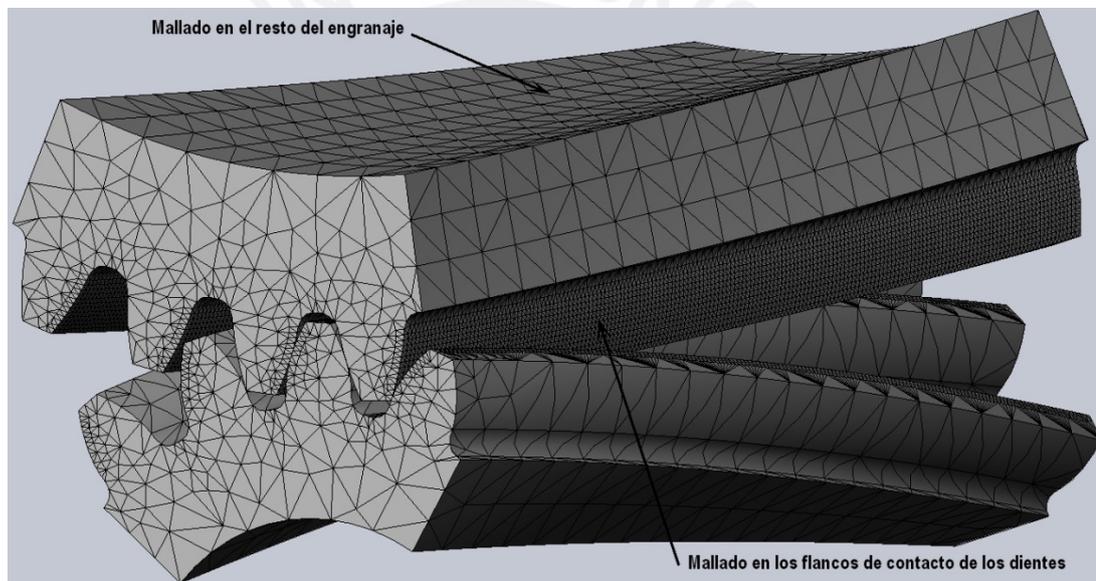


Figura 3-12: Malla de los engranajes

3.4.2. Visualización del esfuerzo normal al flanco

Para comparar los esfuerzos de contacto máximos calculados de manera analítica según las normas técnicas, como se describió en el epígrafe 1.7.2, con los resultados obtenidos en la simulación mediante el método de los elementos finitos, se deben de encontrar el mismo tipo de esfuerzos.

En el cálculo analítico se calcula el esfuerzo que es normal a las dos superficies en el punto de contacto, por ello en el software de elementos finitos se debe indicar la dirección en la que se desea graficar los esfuerzos. En los epígrafes 1.2.2 y 1.2.3

se mencionó que la línea de engrane en los perfiles de evolvente es a la vez el lugar geométrico de los puntos de contacto y la normal a los perfiles en todos los puntos de contacto, por ello obteniendo los esfuerzos en la dirección de la línea de contacto en los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos se podrá comparar con los resultados analíticos de las normas técnicas.

En la Figura 3-13 se encuentran graficados los esfuerzos en la dirección de la línea de engrane.

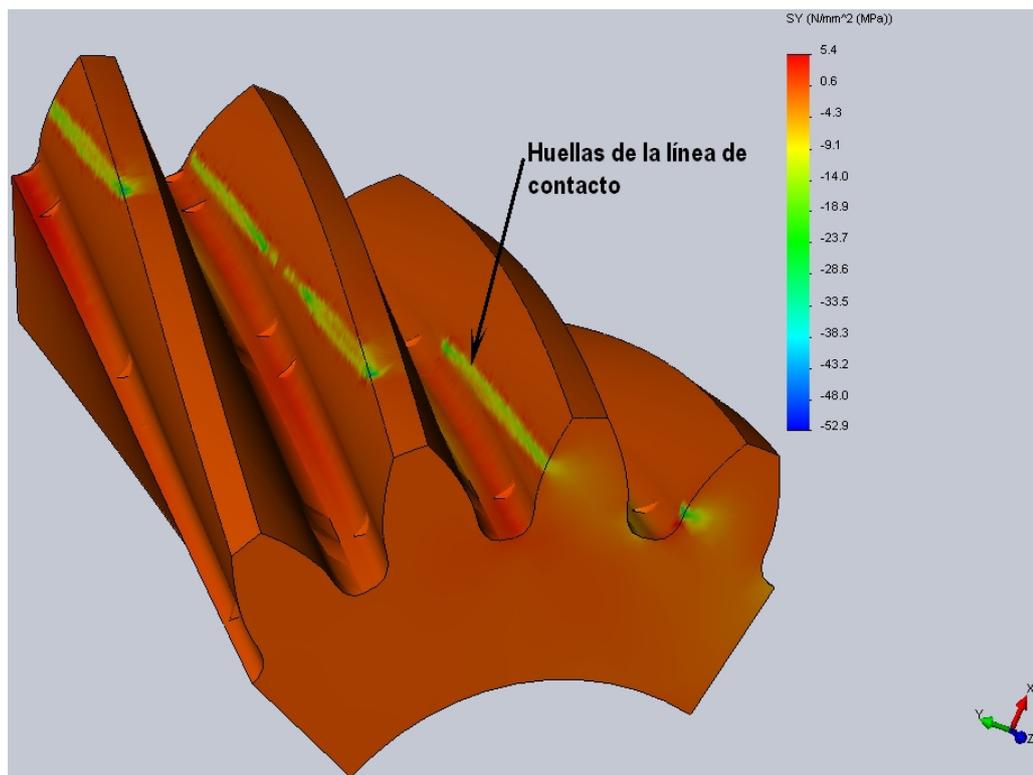


Figura 3-13: Esfuerzo en la dirección de la línea de engrane

CAPÍTULO 4

4. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR ELEMENTOS FINITOS Y POR LAS NORMAS TÉCNICAS

4.1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo poder comparar los esfuerzos de contacto calculados manera analítica con los resultados obtenidos por el cálculo por elementos finitos. Por ello en el presente capítulo se muestra en la Tabla 4-2 combinaciones de pares de engranajes abarcando tanto engranajes de dientes rectos como helicoidales. Estos serán calculados de manera analítica y simulados por el método de elementos finitos, además se presenta el método usado para la comparación de ambos resultados en un ejemplo de cálculo. El objetivo de poder calcular un determinado número de combinaciones de engranajes es que se pueda obtenerse una idea general de la relación entre el cálculo analítico con el cálculo por el método de los elementos finitos.

Todas las combinaciones de la Tabla 4-2 serán calculadas para un perfil de referencia según la Tabla 4-1

Tabla 4-1: Perfil de referencia para cálculo de los esfuerzos de contacto

α [°]	h_a	c_f	ρ_f
20	1	0.25	0.25

Tabla 4-2: Lista de combinaciones representativas de pares de engranajes para la comparación de resultados

N°	m [mm]	Z_1	x_1	Z_2	x_2	β [°]	$b_{1,2}$ [mm]	$M_{t,1}$ [N·m]
1	1	23	-0.2	43	-0.5	0	20	0.5
2	1	17	0	32	-0.2	0	18	0.7
3	1	37	0	79	0	0	20	1.5
4	1	17	0.2	25	-0.3	5	30	0.3
5	1	31	0	45	0	5	35	1.5
6	1	25	-0.2	57	-0.2	5	35	1.2
7	1	15	0	47	-0.3	10	15	0.4
8	1	19	0	33	-0.1	10	20	0.7
9	1	31	0	75	0	10	25	2.5
10	1	21	0	55	0	15	16	0.8
11	1	15	0.1	29	-0.4	15	18	0.4
12	1	33	-0.3	49	-0.2	15	15	1.5
13	1	18	0.1	47	-0.5	15	25	1.0
14	1	14	0	29	0	20	15	0.3
15	1	30	-0.4	61	-0.4	20	13	1.5
16	1	41	0	87	0	20	24	2.0
17	1	19	0	25	0	20	14	0.5
18	1	13	0.2	33	-0.1	25	15	0.3
19	1	35	-0.3	52	-0.5	25	18	2.5
20	1	39	-0.1	77	-0.5	25	23	3.5

4.2. Procedimiento para la comparación de resultados y ejemplo de cálculo analítico del esfuerzo de contacto y la comparación del resultado

Para comparar los resultados de los esfuerzos de contacto calculados de manera analítica y mediante el método de los elementos finitos solo se usarán los factores geométricos de las ecuaciones (1.30), (1.31), (1.32) y (1.35).

En las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) se muestran los esfuerzos de contacto actuantes teniendo en cuenta únicamente los factores que dependen de la geometría del engranaje que detallan las normas técnicas tanto para el piñón como la rueda, los esfuerzos de contacto hallados con estas ecuaciones serán comparados con el esfuerzo de contacto determinado por el método de los elementos finitos.

$$\sigma_{H1_A} = Z_B \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{H2_A} = Z_D \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (4.2)$$

$$\sigma_{H_B} = Z_E \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_{w1} \cdot b \cdot Z_I}} \quad (4.3)$$

Para el ejemplo de cálculo se tomará el caso número doce (N° 12) de la Tabla 4-2.

Los valores de esta combinación son:

$$m = 1 \text{ mm}$$

$$Z_1 = 33, x_1 = -0.3$$

$$Z_2 = 49, x_2 = -0.2$$

$$\beta = 15^\circ$$

$$b_{1,2} = 15 \text{ mm}$$

$$M_{t,1} = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De la ecuación (1.9):

$$\alpha_t = a \tan \left(\frac{\tan(20^\circ)}{\cos(15^\circ)} \right) = 20.647^\circ$$

De la ecuación (1.20):

$$\beta_b = \tan^{-1}(\cos(20.647^\circ) \cdot \tan(15^\circ)) = 14.076^\circ$$

De la ecuación (1.13) despejando α_{wt} :

$$-0.3 - 0.2 = \frac{\text{inv}(\alpha_{wt}) - \text{inv}(20.647^\circ)}{2 \cdot \tan(20^\circ)} (33 + 49)$$

$$\alpha_{wt} = 18.655^\circ$$

De estos valores en la ecuación (1.38)

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos(14.076^\circ) \cdot \cos(18.655^\circ)}{\cos^2(20.647^\circ) \cdot \sin(18.655^\circ)}} = 2.562$$

Para calcular los factores Z_D, Z_B primero de la ecuación (1.24) se obtiene el factor de recubrimiento axial ε_β :

$$\varepsilon_\beta = \frac{15 \text{ mm} \cdot \sin(15^\circ)}{1 \text{ mm} \cdot \pi} = 1.236$$

De las normas técnicas indica que si $\varepsilon_\beta \geq 1$

$$Z_D = Z_B = 1$$

De la ecuación (1.39) y la Tabla 3-1

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left(\frac{1 - 0.29^2}{2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2} + \frac{1 - 0.29^2}{2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2} \right)}} = 188.74 \sqrt{\text{N/mm}^2}$$

De las ecuaciones (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.10), (1.11), (1.15), (1.16), (1.18), (1.19) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 34.164 \text{ mm}, d_2 = 50.729 \text{ mm} \\
 d_{f1} &= 31.064 \text{ mm}, d_{f2} = 47.829 \text{ mm} \\
 d_{b1} &= 31.97 \text{ mm}, d_{b2} = 47.47 \text{ mm} \\
 a_w &= 41.923 \text{ mm} \\
 d_{w1} &= 33.743 \text{ mm} \\
 d_{a1} &= 35.517 \text{ mm}, d_{a2} = 52.281 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

El presente par de engranajes no presenta socavado en el pie del diente por lo tanto para determinar el factor de recubrimiento transversal se determina bajo la ecuación (1.23):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(35.517)^2 - (31.97)^2} + \sqrt{(52.281)^2 - (47.47)^2} \right) - (41.923) \cdot \sin(18.655^\circ)}{1 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\cos(20.647^\circ)}{\cos(15^\circ)} \right)}$$

$$\varepsilon_\alpha = 1.735$$

Y ya que $\varepsilon_\beta \geq 1$, de la ecuación (1.42)

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{1.735}} = 0.759$$

De la ecuación (1.43)

$$Z_\beta = \sqrt{\cos(15^\circ)} = 0.983$$

La fuerza tangencial nominal de la ecuación (1.34) resulta

$$F_t = 87.811 \text{ N}$$

Los factores geométricos según AGMA se calculan de las ecuaciones (1.44) y (1.46)

$$m_N = \frac{1}{0.95 \cdot 1.735} = 0.607$$

$$Z_l = \frac{\cos(18.655^\circ) \cdot \sin(18.655^\circ)}{2 \cdot 0.607} \cdot \frac{1.485}{1.485 + 1} = 0.149$$

La fuerza tangencial en el diámetro de paso según la ecuación (1.37)

$$F_t = 99.909 \text{ N}$$

Finalmente reemplazando en las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_{H1_A} &= 193.207 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{H2_A} &= 193.207 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{H_B} &= 204.79 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Los esfuerzos de contacto obtenidos por el análisis por elementos finitos son

$$\begin{aligned}\sigma_{H1_MEF} &= 67.5 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{H2_MEF} &= 74.9 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

La relación entre los dos valores calculados son:

$$\frac{\sigma_{H1_MEF}}{\sigma_{H1_A}} = \frac{67.5 \text{ N/mm}^2}{193.207 \text{ N/mm}^2} = 34.9\%$$

$$\frac{\sigma_{H2_MEF}}{\sigma_{H2_A}} = \frac{74.9 \text{ N/mm}^2}{193.207 \text{ N/mm}^2} = 38.8\%$$

$$\frac{\sigma_{H2_MEF}}{\sigma_{H_B}} = \frac{74.9 \text{ N/mm}^2}{204.79 \text{ N/mm}^2} = 36.6\%$$

En la Tabla 4-3 se puede apreciar los resultados de los cálculos analíticos según las distintas normas técnicas y también el resultado por el método de los elementos finitos que se realizaron a las veinte combinaciones de pares de engranajes mostrados en la Tabla 4-2.

Tabla 4-3: Resultados de cálculos analíticos según normas técnicas y resultados según el método de los elementos finitos

N°	σ_{H_1} ISO [N/mm ²]	σ_{H_2} ISO [N/mm ²]	σ_{H_1} DIN [N/mm ²]	σ_{H_2} DIN [N/mm ²]	σ_H AGMA [N/mm ²]	σ_{H_1} MEF [N/mm ²]	σ_{H_2} MEF [N/mm ²]
1	208.713	203.508	203.508	203.508	203.508	5.64	4.93
2	251.536	237.512	242.624	237.512	237.512	13.1	23.8
3	192.722	188.851	188.851	188.851	188.851	7.87	8.43
4	133.282	132.896	132.896	132.896	133.842	8.1	7.9
5	140.040	139.964	139.964	139.964	143.491	26.1	39.3
6	146.437	146.196	146.282	146.194	149.842	34.5	45.1
7	223.621	220.266	222.159	220.266	224.406	64.32	68.76
8	201.754	201.754	201.754	201.754	209.998	34.8	63.4
9	188.964	188.964	188.964	188.964	196.685	69.3	73.4
10	192.753	192.753	192.753	192.753	204.309	84.64	63.32
11	202.937	202.937	202.937	202.937	215.103	82.2	70.13
12	193.207	193.207	193.207	193.207	204.790	39.6	42.4
13	211.319	211.319	211.319	211.319	223.988	129.02	115.82
14	187.111	187.111	187.111	187.111	203.508	59.84	52.48
15	208.321	208.321	208.321	208.321	226.577	99.12	93.75
16	122.369	122.369	122.369	122.369	133.092	44.82	43.33
17	199.328	199.328	199.328	199.328	216.795	127.8	158.4
18	184.334	184.334	184.334	184.334	207.368	35.6	54.27
19	195.901	195.901	195.901	195.901	220.379	86.55	107.5
20	169.929	169.929	169.929	169.929	191.163	80.9	91.3

En la Tabla 4-4 se muestra la relación entre los resultados de los cálculos analíticos y los resultados según el método de los elementos finitos.

Tabla 4-4: Comparación de resultados analíticos con los obtenidos por el método de los elementos finitos

N°	σ_H 1 MEF	σ_H 2 MEF	σ_H 1 MEF	σ_H 1 MEF	σ_H max MEF
	σ_{H_1} ISO	σ_{H_2} ISO	σ_{H_1} DIN	σ_{H_2} DIN	σ_H AGMA
1	2.70%	2.42%	2.77%	2.42%	2.77%
2	5.21%	10.02%	5.40%	10.02%	10.02%
3	4.08%	4.46%	4.17%	4.46%	4.46%
4	6.08%	5.94%	6.09%	5.94%	6.05%
5	18.64%	28.08%	18.65%	28.08%	27.39%
6	23.56%	30.85%	23.58%	30.85%	30.10%
7	28.76%	31.22%	28.95%	31.22%	30.64%
8	17.25%	31.42%	17.25%	31.42%	30.19%
9	36.67%	38.84%	36.67%	38.84%	37.32%
10	43.91%	32.85%	43.91%	32.85%	41.43%
11	40.51%	34.56%	40.51%	34.56%	38.21%
12	20.50%	21.95%	20.50%	21.95%	20.70%
13	61.05%	54.81%	61.05%	54.81%	57.60%
14	31.98%	28.05%	31.98%	28.05%	29.40%
15	47.58%	45.00%	47.58%	45.00%	43.75%
16	36.63%	35.41%	36.63%	35.41%	33.68%
17	64.12%	79.47%	64.12%	79.47%	73.06%
18	19.31%	29.44%	19.31%	29.44%	26.17%
19	44.18%	54.87%	44.18%	54.87%	48.78%
20	47.61%	53.73%	47.61%	53.73%	47.76%

En el anexo A.2 se muestra con más detalle la obtención de estos resultados.

CONCLUSIONES

1. Los valores del esfuerzo de contacto obtenidos de manera analítica según las normas técnicas son de 2 a 5 veces mayores que los esfuerzos de contacto obtenidos por el método de los elementos finitos. Estos resultados conservadores conllevan a un sobredimensionamiento contra la picadura o “pitting” de los flancos de los dientes de los engranajes, sobre todo en los engranajes cilíndricos de dientes rectos.
2. Las ecuaciones (2.6), (2.7), (2.27) y (2.28), que fueron determinadas a partir de la simulación de la generación del diente mediante un proceso de fabricación real, describen correctamente el perfil de un diente de engranaje cilíndrico de dientes exteriores rectos o helicoidales. Por lo tanto con estas ecuaciones se puede generar un engranaje con la geometría real teórica que sería producida de un proceso de fabricación por generación.
3. La estimación del punto de engrane crítico para el esfuerzo de contacto se corresponde con la evaluación de distintos instantes de engrane probados, siendo más importante el factor de la longitud sumaria de contacto (l_{Σ}) que el del radio reducido o equivalente (ρ), ya que en el caso de los engranajes de dientes helicoidales el valor del radio reducido varía también en la dirección axial y no puede tomarse un solo valor. Con ello se ha logrado simular en el software de elementos finitos las sollicitaciones reales y más críticas para el esfuerzo de contacto de un diente.

RECOMENDACIONES

1. Con los procedimientos descritos en el presente trabajo se puede realizar un estudio más completo acerca de la influencia que tendrían los parámetros del piñón o rueda sobre el esfuerzo de contacto para poder elaborar gráficos o correlaciones y así poder reemplazar los factores geométricos de los cálculos analíticos con un solo factor hallado por el método de los elementos finitos y con esto simplificar y aliviar el cálculo.
2. Los cálculos realizados por el método de los elementos finitos fueron hechos sin considerar la fricción entre los flancos en contacto, por ello sería muy importante en un futuro estudio poder tener en cuenta este factor y ver cómo influye en el esfuerzo de contacto.

BIBLIOGRAFÍA

- ANSI/AGMA. (1999). *ANSI/AGMA 2105-C95 - Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. Virginia, U.S.A.: AGMA.
- Baranov, G. G. (1985). *Curso de la teoría de mecanismos y máquinas* (Segunda ed.). (G. Munizaga Rojas, Trans.) Moscú, U.R.S.S.: Editorial Mir.
- Boresi, A., Schmidt, R., & Sidebottom, O. (1993). *Advanced Mechanics of Materials* (5th ed.). U.S.A.: John Wiley & Sons, Inc.
- Budynas, R. (1998). *Advanced Strength and Applied Stress Analysis* (2nd ed.). U.S.A.: McGraw-Hill.
- Budynas, R., & Nisbett, K. (2006). *Mechanical Engineering: Shigley's Mechanical Engineering Design* (8th ed.). U.S.A.: McGraw-Hill.
- Campabadal Martí, J. (1969). *Engranajes* (Segunda ed.). Barcelona, España: Ediciones Ariel.
- ChemKeys. (Marzo de 2008). *ChemKeys - Material Didáctico*. Recuperado el 27 de Mayo de 2009, de http://www.chemkeys.com/esp/md/peyo_5/mdoeq_1/metsim_3/metsim_3.htm#
- Cotaquispe Zevallos, L. O. (2004). *Perfeccionamiento del diseño de los engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores mediante el método de los elementos finitos. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas, Departamento de mecánica aplicada y dibujo*. Santa Clara, Cuba: Universidad Central "Martha Abreu" de las Villas.
- Decker, K.-H. (1980). *Elementos de Máquinas*. (E. De Miguel Uñon, Trans.) Bilbao, España: Ediciones URMO.
- DIN. (1987). *DIN 3990 Part 1: Calculation of load capacity of cylindrical gears; introduction and general influence factors*. Berlín, Alemania: Beuth Verlag.
- DIN. (1987). *DIN 3990 Part 2: Calculation of load capacity of cylindrical gears; calculation of pitting resistance*. Berlín, Alemania: Beuth Verlag.

Dobrovolski, V. (1980). *Elementos de máquinas*. (J. Puig Torres, Trans.) Moscú, U.R.S.S: Editorial Mir.

Dudley, D. (1973). *Manual de Engranajes: Diseño, Manufactura y Aplicación de Engranajes*. (E. Celis, & A. Escobedo, Trans.) México D.F., México: Editorial Continental.

González Rey, G. (2001). *Cálculo de Engranajes Cilíndricos*. Habana, Cuba.

GRABITECH. (s.f.). *DOE Software*. Recuperado el 27 de Mayo de 2009, de <http://www.multisimplex.com/>

Henriot, G. (1967). *Manual práctico de engranajes* (Segunda ed.). (J. Campabadal, Trans.) Barcelona, España: Editorial Marcombo.

Henriot, G. (1968). *Traité Théorique et Pratique des Engrenages: Théorie et technologie* (Vol. 1). París, Francia: DUNOD.

ISO. (1996). *ISO 6336-1: Calculation of load capacity of spur and helical gears; Basic principles, introduction and general influence factors*. Ginebra, Suiza.

ISO. (1996). *ISO 6336-2: Calculation of load capacity of spur and helical gears; Calculation of surface durability (pitting)*. Ginebra, Suiza.

Litvin, F., & Fuentes, A. (2004). *Gear Geometry and Applied Theory* (Second ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Mathews, J. H. (7 de Enero de 2009). *Complex Analysis, Numerical Analysis*. Recuperado el 27 de Mayo de 2009, de <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/NelderMeadProof.html>

Niemann, G. (1973). *Tratado teórico-práctico de Elementos de Máquinas* (Segunda ed.). Barcelona, España: Editorial Labor.

Shigley, J. (1970). *Análisis cinemático de mecanismos*. México D.F., México: McGraw-Hill.

Timoshenko, S., & Goodier, J. (1951). *Theory of Elasticity* (2nd ed.). U.S.A.: McGraw-Hill Book Company, Inc.

ANEXOS

A.1 Estudio de la línea de engrane en engranajes con dientes de perfil de evolvente

a. Definición

La línea de engrane es el lugar geométrico generado por los puntos de contacto de los perfiles activos de dos dientes que se encuentran engranando. La forma de esta varía dependiendo del perfil de los flancos de los dientes; siendo una línea recta para engranajes con dientes de perfil de evolvente que es el caso de estudio del presente trabajo. En la Figura A. 1-1 se muestra la línea de engrane generada por los perfiles activos de dos dientes con perfiles de evolvente.

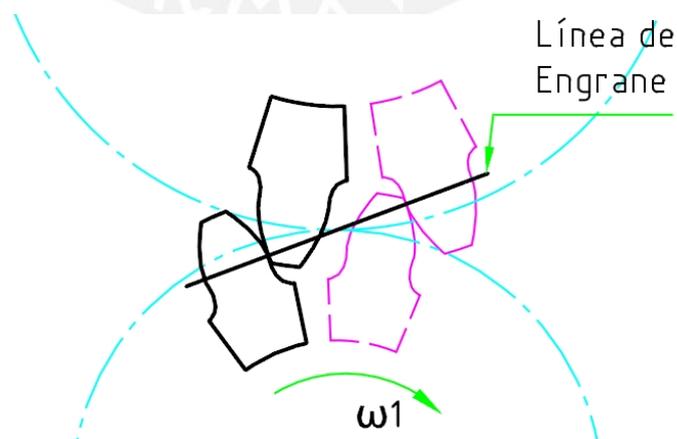


Figura A. 1-1: Línea de engrane

b. Perfil activo

El perfil activo es la porción del flanco que realmente realiza el contacto. En el caso particular del presente trabajo para que la relación de transmisión sea constante durante todo el engrane los dos flancos de los dientes deben de estar en contacto únicamente en la parte evolvente mas no en el perfil de acuerdo de la base del pie del diente. Por ello el perfil activo durante el engrane será a lo más el perfil de evolvente del diente. La determinación del perfil activo depende de las características de la transmisión, es decir de los dos engranajes. Por ello en la Figura A. 1-2 se muestra las posiciones de contacto inicial y final de un par de dientes, estas posiciones limite del contacto determinan el perfil activo del flanco de cada uno de los dientes. En la Figura A. 1-3 se muestra los perfiles activos de cada uno de los dientes de la Figura A. 1-2 delimitados por los puntos A1 y B1 para el piñón y A2 y B2 para la rueda. En esta figura se puede notar que el perfil activo de la rueda no es la totalidad del perfil evolvente que posee y que en el piñón el perfil activo si es la totalidad del perfil de evolvente que posee.

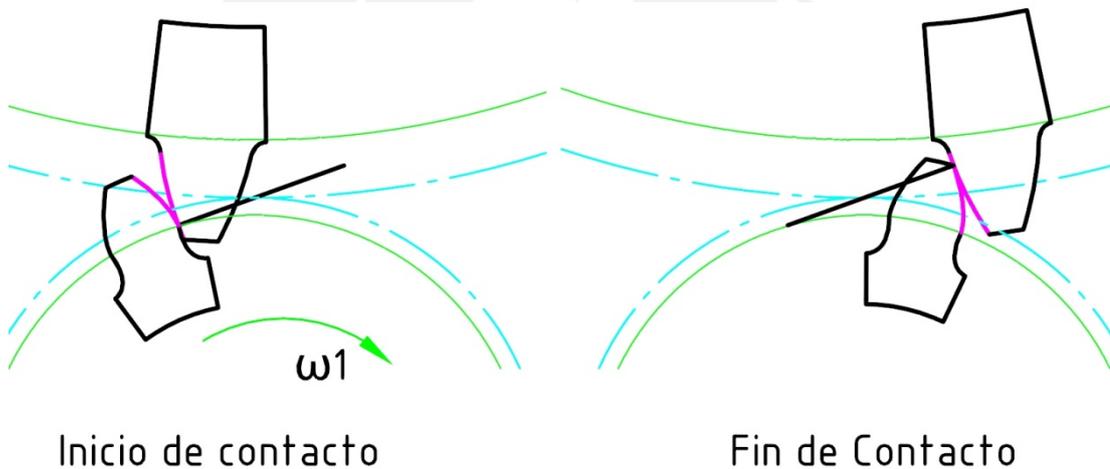


Figura A. 1-2: Inicio y fin de contacto de un par de engranajes

$$(Z_1 = 13, Z_2 = 43, \alpha = 20^\circ, \beta = 0^\circ, x_1 = x_2 = 0)$$

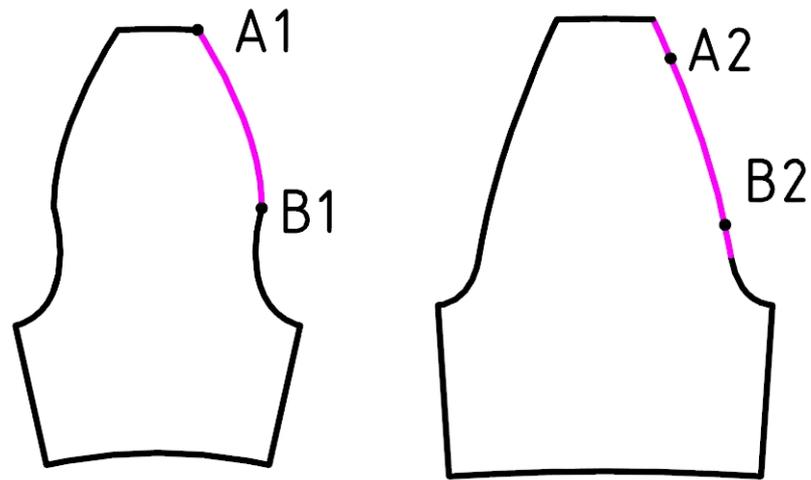


Figura A. 1-3: Perfiles activos de los dientes del piñón y la rueda de la Figura A. 1-2

c. Ecuación de la línea de engrane y valores límite

En la Figura A. 1-4 se muestra dos dientes de engranajes en una posición de engrane cualquiera. También se muestra el sistema de coordenadas XY que tiene como origen el centro del piñón y la dirección Y es la que misma que la que une los centros de los dos engranajes.

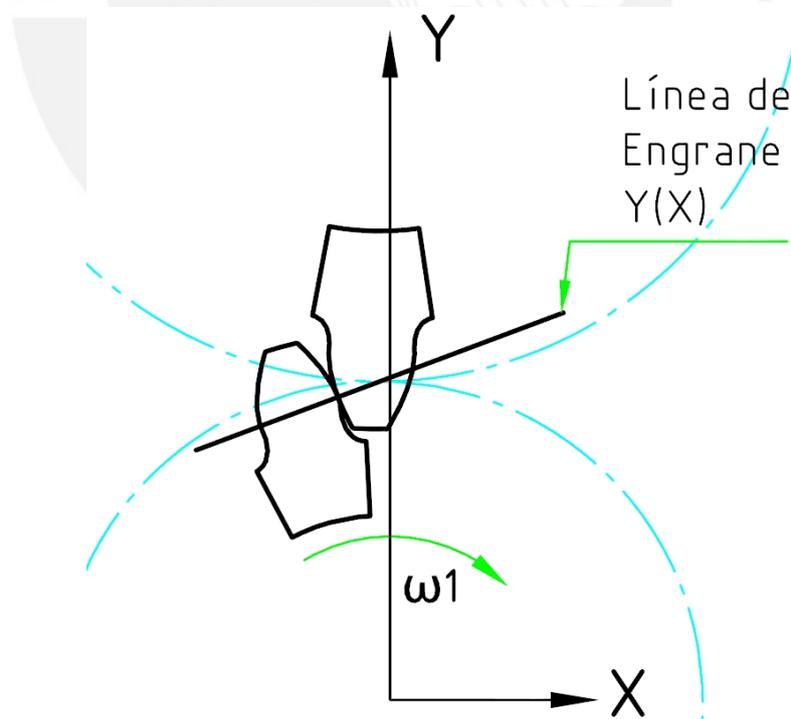


Figura A. 1-4: Dientes de engranajes en contacto

En relación a este sistema de coordenadas la línea de engrane tendrá una pendiente positiva si el sentido de giro del piñón es horario y una pendiente negativa si el sentido de giro es anti horario. La ecuación (A.1.1) corresponde al lugar geométrico de la línea de engrane para el giro horario. A continuación se describirá el proceso para determinar los valores límite o extremos de la línea de engrane asumiendo el sentido de giro del piñón horario.

$$Y_{(x)} = \tan(\alpha_{wt}) \cdot X + \frac{a_w}{u+1} \quad (A.1.1)$$

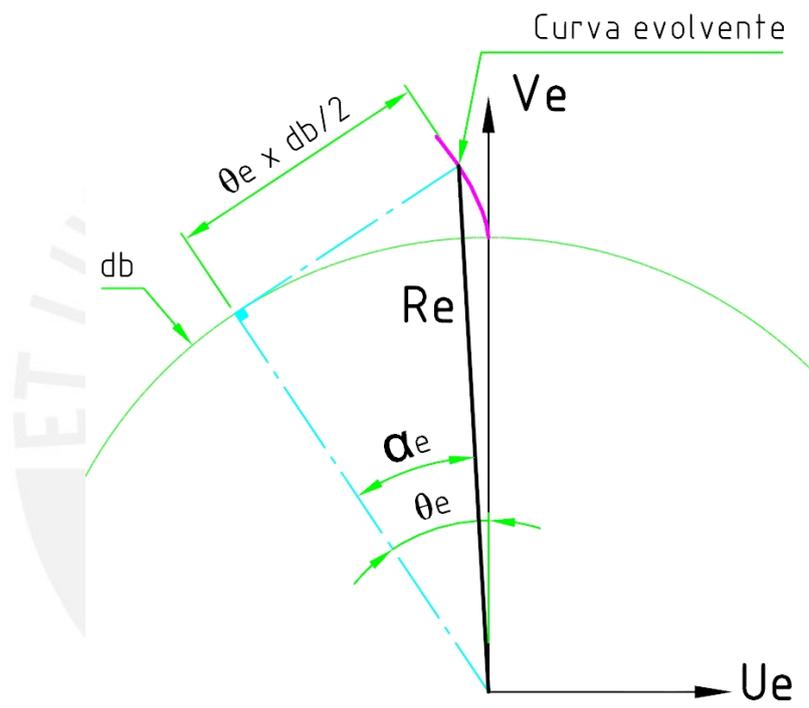


Figura A. 1-5: Relaciones geométricas de la curva evolvente

Por otro lado en la Figura A. 1-5 se muestra una curva evolvente, donde el ángulo α_e se determina por la ecuación (A.1.2) y la relación entre el parámetro θ_e con el cual se definieron las ecuaciones de la curva evolvente en el capítulo 2 y el ángulo mostrado α_e está dado por la ecuación (A.1.3)

$$\alpha_e = \cos^{-1} \left(\frac{d_b}{2 \cdot R_e} \right) \quad (A.1.2)$$

$$\tan(\alpha_e) = \theta_e \quad (A.1.3)$$

Además R_e es la distancia del punto sobre la curva evolvente al centro del piñón o la rueda. Partiendo de la ecuación (A.1.1) como todos los puntos de contacto durante el engrane pertenecen únicamente a la curva de evolvente el valor de R_e puede ser obtenido en función a la coordenada X de la línea de engrane según la ecuación (A.1.4) para el piñón y la ecuación (A.1.5) para la rueda.

$$R_{e1(x)} = \sqrt{X^2 + Y_{(x)}^2} \quad (\text{A.1.4})$$

$$R_{e2(x)} = \sqrt{X^2 + (Y_{(x)} - a_w)^2} \quad (\text{A.1.5})$$

Por lo tanto la ecuación (A.1.2) puede describirse en función de la coordenada X de la línea de engrane para el piñón y la rueda como se muestran en las ecuaciones (A.1.6) y (A.1.7) respectivamente

$$\alpha_{e1(x)} = \cos^{-1} \left(\frac{d_{b1}}{2 \cdot R_{e1(x)}} \right) \quad (\text{A.1.6})$$

$$\alpha_{e2(x)} = \cos^{-1} \left(\frac{d_{b2}}{2 \cdot R_{e2(x)}} \right) \quad (\text{A.1.7})$$

Y del mismo modo como se muestran en las ecuaciones (A.1.8) y (A.1.9), la ecuación (A.1.3) también puede escribirse en función de la coordenada X la línea de engrane.

$$\tan(\alpha_{e1(x)}) = \theta_{e1} \quad (\text{A.1.8})$$

$$\tan(\alpha_{e2(x)}) = \theta_{e2} \quad (\text{A.1.9})$$

Por lo tanto de las ecuaciones (A.1.8) y (A.1.9) se puede inferir que para un determinado punto de contacto (al que le corresponde una coordenada X en el sistema de coordenadas mencionado anteriormente) se puede encontrar el valor del parámetro θ_e de las ecuaciones de la evolvente descritas en el capítulo 2, o también, a partir de un valor determinado del parámetro de la curva evolvente θ_e se

puede encontrar la coordenada X de un punto de contacto sobre la línea de engrane.

Por lo tanto para determinar los valores límite de la línea de engrane deben usarse también los valores límite de las curvas de evolvente tanto del piñón como la rueda (θ_{e_int} , θ_{e_max}). En el epígrafe 2.4 se describió como determinar estos valores límite del parámetro θ_e .

Si se resuelven las ecuaciones (A.1.8) y (A.1.9) a partir de los valores límite del parámetro θ_e de las curvas evolventes del piñón θ_{e1_int} , θ_{e1_max} y la rueda θ_{e2_int} , θ_{e2_max} se determinarán los correspondientes X_{1_int} , X_{1_max} y X_{2_int} , X_{2_max} .

Para el sentido de giro horario del piñón el inicio de contacto entre el piñón y la rueda se dará en el punto X_i que tomará el mayor valor entre X_{1_int} y X_{2_max} , por ello cuando $X_{1_int} > X_{2_max}$ (ver Figura A. 1-6) el inicio de contacto en el piñón empezará desde la base la curva evolvente que posee el diente pero para la rueda el inicio del contacto iniciará no desde la punta del diente dejando así de engranar una porción de curva evolvente disponible; y en la situación contraria cuando $X_{2_max} > X_{1_int}$ (ver Figura A. 1-7) el inicio de contacto en el piñón empezará por encima de la base de la curva evolvente dejando así también de engranar un pedazo de curva evolvente y en la rueda el contacto si iniciará en la punta del diente. El fin del contacto entre los dientes se dará en el punto X_f que tomará el menor valor entre X_{2_int} y X_{1_max} al igual que en el inicio del contacto si $X_{2_int} < X_{1_max}$ el fin del contacto en la rueda tendrá lugar en la base de la curva evolvente que posee, mas en el piñón el fin de contacto no se dará en la punta del diente sino antes. En el caso contrario cuando $X_{1_max} < X_{2_int}$ (ver Figura A. 1-8) el fin de contacto en el piñón se dará en la punta del diente y en la rueda antes de la base de la curva evolvente.

Con lo descrito hasta aquí se puede apreciar que no siempre la totalidad de los perfiles de evolvente son utilizados o se encuentran en contacto, por ello los perfiles activos no siempre comprenden la totalidad de la curva evolvente.

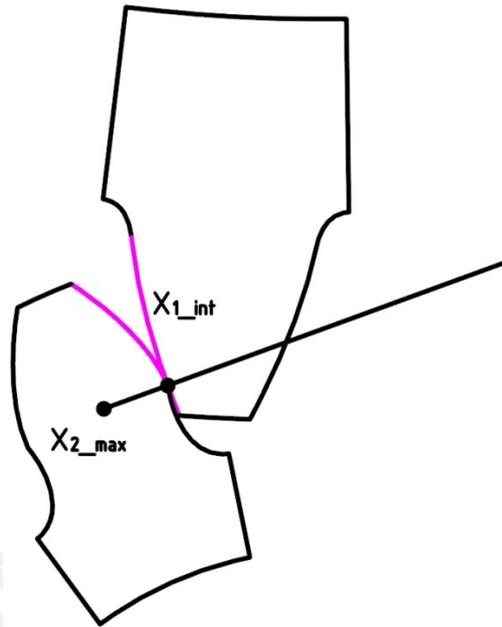


Figura A. 1-6: Caso con $X_{1_int} > X_{2_max}$. ($Z_1 = 13, Z_2 = 43, \alpha = 20^\circ, \beta = 0^\circ, x_1 = x_2 = 0$)

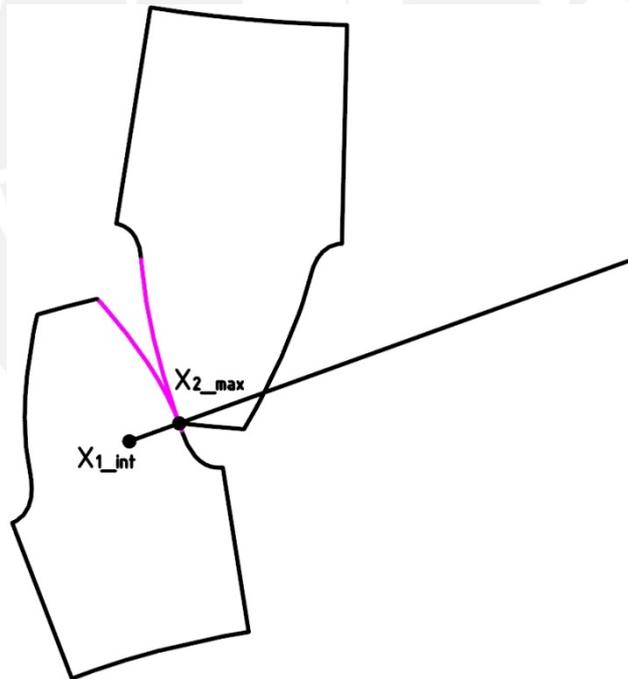


Figura A. 1-7: Caso con $X_{2_max} > X_{1_int}$. ($Z_1 = 27, Z_2 = 43, \alpha = 20^\circ, \beta = 0^\circ, x_1 = x_2 = 0$)

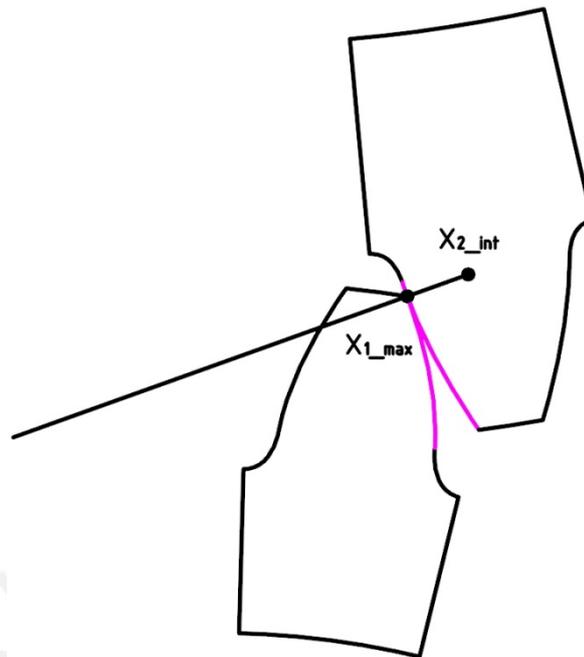


Figura A. 1-8: Caso con $X_{1_max} < X_{2_int}$. ($Z_1 = 27, Z_2 = 43, \alpha = 20^\circ, \beta = 0^\circ, x_1 = x_2 = 0$)

d. Longitud de la línea de engrane, coeficiente de recubrimiento transversal (ϵ_α) y observaciones

La longitud de la línea de engrane es la distancia entre los puntos $(X_i, Y_{i(X_i)})$ y $(X_f, Y_{f(X_f)})$ que fueron descritos en el epígrafe c de este anexo y se puede determinar según la ecuación (A.1.10).

$$L_\alpha = \sqrt{(X_i - X_f)^2 + (Y_{i(X_i)} - Y_{f(X_f)})^2} \tag{A.1.10}$$

Si denominamos a esta distancia como L_α , el coeficiente de recubrimiento transversal ϵ_α (ecuación (A.1.11)) es la relación entre la longitud de la línea de engrane L_α (ecuación (A.1.10)) y el paso básico circunferencial p_{bt} (ecuación (A.1.12))

$$\epsilon_\alpha = \frac{L_\alpha}{p_{bt}} \tag{A.1.11}$$

$$p_{bt} = m \cdot \pi \cdot \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} \right) \quad (\text{A.1.12})$$

La ecuación (A.1.11) es la expresión general para determinar el coeficiente de recubrimiento transversal siendo la ecuación (1.23) solo aplicable cuando no existe penetración o socavado en el pie del diente. En cambio la ecuación (A.1.11) puede ser aplicada exista o no exista socavado en el pie del diente y se puede calcular como se describió en el presente anexo. En la Tabla A. 1-1 se muestra la relación entre los resultados de la evaluación del coeficiente de recubrimiento transversal por las dos formulas.

Tabla A. 1-1: Relación entre el cálculo del coeficiente de recubrimiento transversal convencional con el cálculo propuesto en el anexo A.1. Datos usados para el cálculo de la tabla: $\alpha = 20^\circ$, $m = 1 \text{ mm}$, $h_a = 1$, $c_f = \rho_f = 0.25$, $x_1 = x_2 = 0$

Z_1	Z_2	$\beta [^\circ]$	$\varepsilon_{\alpha_conv}$ Ec. (1.23)	ε_{α} Ec. (A.1.11)	$\frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_{\alpha_conv}}$
13	43	0	1.585	1.332	0.840
13	27	10	1.507	1.347	0.894
13	20	15	1.438	1.367	0.951
13	25	20	1.414	1.403	0.993
13	29	25	1.364	1.364	1.000

Normalmente el diseño de engranajes está orientado a trabajar con el mayor número de dientes posibles para tener una operación mas silenciosa y mejor repartición de carga debido al incremento en el coeficiente de recubrimiento transversal y además así también evitar la penetración o socavado en el pie del diente de los engranajes y por ello la ecuación (1.23) es normalmente aplicable sin problemas. Pero en el presente anexo se muestra una manera de calcular el coeficiente de recubrimiento transversal para cualquier situación, ya sea en la presencia de socavado en el pie del diente o no, ya que al contar con las

ecuaciones que describen las curvas del perfil del diente dan la posibilidad de calcularlo. Aunque el procedimiento y las ecuaciones son bastante largas y complejas este método de cálculo es fácilmente programable en una hoja de cálculo o algún software que permita el manejo de ecuaciones y con las capacidades de las computadoras actuales no existe ninguna dificultad de poder calcularlo, es mas ofrece un método general para la evaluación del coeficiente de recubrimiento transversal que es un parámetro muy importante en la evaluación del diseño de una transmisión de potencia por engranajes cilíndricos de ejes paralelos y perfil de evolvente.



A.2 Tabla con resultados analíticos y su comparación con el resultado del método de los elementos finitos de los veinte casos de la Tabla 4-2

