

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

**MODELACIÓN Y SIMULACIÓN DINÁMICA DEL MECANISMO  
PARALELO TIPO PLATAFORMA DE STEWART-GOUGH  
USADO EN UN SIMULADOR DE MARCHA**

Tesis para optar al título de **Ingeniero Mecánico**, que presenta el bachiller:

**CROMWELL STEVEN ANCHANTE GUIMARAES**

**ASESOR: Dante Ángel Elías Giordano**

Lima, noviembre del 2009



© 2009, Cromwell Steven Anchante Guimaraes

Ninguna parte de la tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o procedimiento, sin el permiso escrito otorgado por el autor.

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo es la obtención del modelo dinámico inverso de un simulador de marcha humana basado en la plataforma Stewart-Gough. Para conseguir tal objetivo, se optó por utilizar un planteamiento existente, el cual ha sido analizado y desarrollado con el fin de que el lector pueda entender paso a paso cómo se obtiene la ecuación final de la dinámica inversa. El presente trabajo es uno de los elementos principales para la implementación de la estrategia de control, cuya finalidad es simular con precisión una trayectoria dada.

El modelo dinámico es de tipo inverso puesto que se obtienen las fuerzas a partir del conocimiento del movimiento del sistema. Tal modelo se obtuvo mediante la combinación entre los métodos Newton-Euler y la formulación de Lagrange, los que a su vez fueron aplicados sistemáticamente para constituir una forma compacta y cerrada de ecuaciones dinámicas, con la finalidad de desarrollar las ecuaciones de movimiento. La dinámica de tipo directa es también necesaria para plantear la estrategia de control, pero en el presente trabajo tal análisis no ha sido abordado.

Considerando las ventajas que ofrece el método Newton-Euler y la formulación de Lagrange se pudo obtener una forma compacta y cerrada de ecuaciones dinámicas en un determinado espacio de trabajo a través de la combinación de ambos métodos de modelación, con la finalidad de obtener el modelo dinámico del sistema. Tal planteamiento ha sido propuesto por Guo y Li, quienes analizan la cinemática y dinámica inversa de un manipulador paralelo de seis grados de libertad, como el que se ha diseñado en la PUCP.

En este sentido, la deducción del modelo dinámico se dividió en dos partes, el movimiento de los seis actuadores unidos a la base fija y el de la plataforma móvil. Las fuerzas restrictivas en la unión superior de cada actuador fueron obtenidas a través de la formulación de Lagrange. La concepción de la dinámica de la plataforma fue obtenida mediante el método Newton-Euler, incorporando fuerzas restrictivas en la forma compacta. Los efectos de la fricción no fueron evaluados, lo cual permite que el modelo dinámico planteado sea mejorado.

Finalmente, el modelo dinámico fue implementado y simulado en computadora utilizando el software Mathcad, con la finalidad corroborar y validar el procedimiento analítico realizado para la obtención de la ecuación dinámica inversa de la plataforma Stewart-Gough.



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**

**TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

<b>TÍTULO</b>	<b>:</b>	<b>MODELACIÓN Y SIMULACIÓN DINÁMICA DEL MECANISMO PARALELO TIPO PLATAFORMA STEWART-GOUGH PARA UN SIMULADOR DE MARCHA.</b>
<b>ÁREA</b>	<b>:</b>	<b>Mecatrónica</b>
<b>PROPUESTO POR</b>	<b>:</b>	<b>Ing. Dante Ángel Elías Giordano</b>
<b>ASESOR</b>	<b>:</b>	<b>Ing. Dante Ángel Elías Giordano</b>
<b>TESISTA</b>	<b>:</b>	<b>Cromwell Steven Anchante Guimaraes</b>
<b>CÓDIGO</b>	<b>:</b>	<b>2003.2261</b>
<b>FECHA</b>	<b>:</b>	<b>08 de Julio de 2008</b>

**DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS:**

En la sección de Ingeniería Mecánica de la PUCP se está desarrollando el diseño de un simulador de marcha basado en el mecanismo paralelo tipo plataforma de Stewart-Gough, con la finalidad de rehabilitar a pacientes con lesiones motoras en miembros inferiores, y así poder mejorar su calidad de vida al tratar las disfunciones que puedan tener al caminar. En consecuencia, y con la finalidad de simular la marcha humana con precisión, se deben desarrollar los modelos cinemático y dinámico para el simulador de marcha diseñado, los cuales tienen por objetivo establecer adecuadas estrategias de control optimizando así su acción. Sin embargo, a diferencia del modelo cinemático, el modelo dinámico no ha sido aún desarrollado.

Por lo tanto, el objetivo principal en la presente tesis es obtener el modelo dinámico inverso para simularlo y evaluarlo mediante herramientas computacionales con el fin de optimizar el diseño de la plataforma mencionada.



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**

**TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

**MODELACIÓN Y SIMULACIÓN DINÁMICA DEL  
MECANISMO PARALELO TIPO PLATAFORMA STEWART-  
GOUGH PARA UN SIMULADOR DE MARCHA.**

**Introducción**

- 1. Estado del arte y fundamentos teóricos**
- 2. Modelación de la dinámica inversa**
- 3. Simulación del modelo dinámico**

**Conclusiones**

**Bibliografía**

**Anexos**

---

**Dr. Dante Elías**  
Asesor

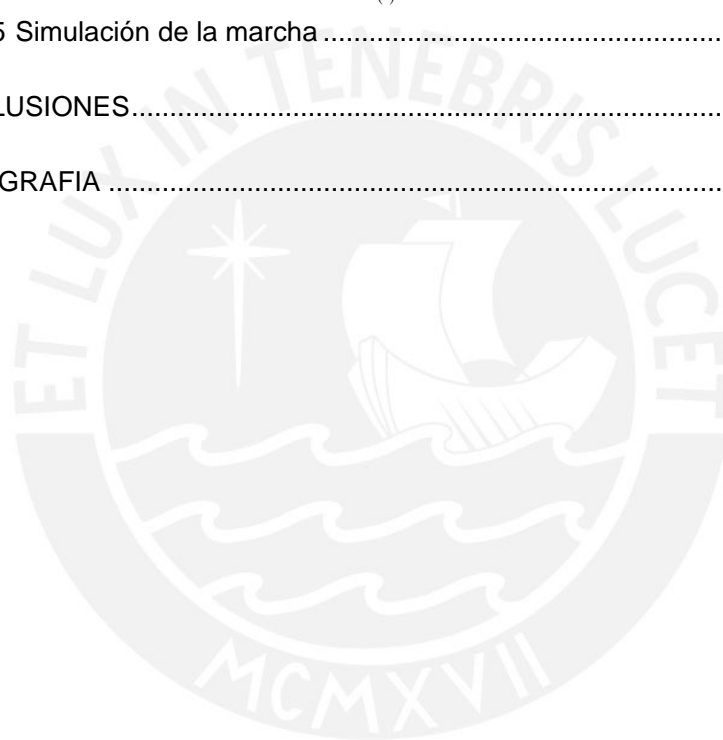


*A mis padres,  
por su invaluable apoyo  
y dedicación.*

## ÍNDICE DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN .....	i
APROBACIÓN DE TEMARIO DE TESIS.....	ii
DEDICATORIA.....	iv
LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
INTRODUCCIÓN.....	1
I. ESTADO DEL ARTE Y FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	4
1.1 Antecedentes históricos del concepto de robot.....	4
1.2 Los robots paralelos .....	6
1.3 Aplicaciones del robot paralelo en fisioterapia .....	9
1.4 Métodos para la localización espacial .....	11
1.5 Definición de modelo matemático de un sistema dinámico.....	13
1.6 Mecánica de los manipuladores paralelos .....	13
1.6.1 Análisis cinemático .....	14
1.6.2 Análisis dinámico.....	17
1.7 Modelación matemática de la plataforma Stewart-Gough.....	20
II. MODELACIÓN DE LA DINÁMICA INVERSA.....	21
2.1 Introducción .....	21
2.2 Simbología y álgebra de matrices .....	23
2.3 Coordenadas generalizadas.....	26
2.3.1 Determinación de la posición .....	27
2.3.2 Determinación de la orientación .....	28
2.4 Análisis cinemático .....	31
2.4.1 Descripción vectorial de la posición .....	31
2.4.2 Parámetros angulares de la plataforma móvil .....	35
2.4.3 Parámetros cinemáticos en la plataforma móvil.....	37
2.4.4 Parámetros cinemáticos en el actuador .....	39
2.5 Análisis dinámico.....	43
2.5.1 Consideraciones de análisis.....	43
2.5.2 Dinámica del actuador.....	46
2.5.3 Dinámica de la plataforma móvil .....	57

2.5.4 Ecuación dinámica de la plataforma Stewart-Gough .....	59
2.6 Demostraciones y deducciones.....	67
III. SIMULACIÓN DEL MODELO DINÁMICO.....	80
3.1 Introducción .....	80
3.2 Parámetros de entrada.....	81
3.3 Simulación de trayectorias .....	84
3.3.1 Trayectoria recta en Y .....	85
3.3.2 Trayectoria recta en Z .....	86
3.3.3 Variación de orientación en $\theta_{(t)}$ .....	88
3.3.4 Variación de orientación en $\psi_{(t)}$ .....	90
3.3.5 Simulación de la marcha .....	92
CONCLUSIONES.....	96
BIBLIOGRAFIA .....	98





## LISTA DE SÍMBOLOS

- $q$  : Coordenada generalizada
- $t$  : Vector posición del centro geométrico de la plataforma móvil, respecto del sistema fijo XYZ [m]
- $k$  : Vector orientación de la plataforma móvil, respecto del sistema fijo XYZ
- $i_p$  : Vector posición del centro geométrico de la plataforma móvil, respecto del sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  [m]
- $R$  : Matriz de rotación
- $p_{jp}$  : Vector posición del extremo móvil del actuador, respecto del sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  [m]
- $b_j$  : Vector posición del extremo fijo del actuador, respecto del sistema fijo XYZ [m]
- $q_{pj}$  : Vector posición del extremo móvil del actuador, respecto del sistema fijo XYZ [m/s]
- $q_{pjp}$  : Vector posición del extremo móvil del actuador, respecto del sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  [m/s]
- $l_j$  : Vector longitud del actuador [m]
- $\omega$  : Vector velocidad angular de la plataforma móvil, respecto del sistema fijo XYZ [rad/s]
- $\omega_p$  : Vector velocidad angular de la plataforma móvil respecto del sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  [rad/s]
- $\alpha_p$  : Vector aceleración angular respecto del sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  [rad/s<sup>2</sup>]
- $I$  : Matriz identidad
- $n_j$  : Vector unitario del actuador
- $\omega_{Lj}$  : Velocidad angular del actuador respecto del sistema XYZ [rad/s]
- $v_{tj}$  : Vector velocidad del centro de masa del vástago [m/s]
- $v_{bj}$  : Vector velocidad del centro de masa del cilindro [m/s]
- $Q_j$  : Vector fuerzas generalizadas [N]
- $T_j$  : Expresión de energía del actuador [J]
- $T_{GVOj}$  : Expresión alternativa de energía del actuador [J]
- $I_t$  : Inercia del vástago [kg.m<sup>2</sup>]
- $I_b$  : Inercia del cilindro [kg.m<sup>2</sup>]
- $I_p$  : Matriz de inercia de la plataforma móvil respecto de  $X_p Y_p Z_p$  [kg.m<sup>2</sup>]
- $m_t$  : Masa del vástago [kg]
- $m_b$  : Masa del cilindro [kg]
- $m_p$  : Masa de la plataforma móvil [kg]
- $f_{pj}$  : Fuerza en la unión entre el extremo móvil del actuador y la plataforma móvil [N]
- $f_j$  : Vector fuerza al interior del actuador [N]
- $f_j$  : Fuerza al interior del actuador [N]
- $f_c$  : Fuerza externa generada por el apoyo del pie [N]
- $c_p$  : Vector posición del punto de aplicación de la fuerza  $f_c$ , respecto del sistema  $X_p Y_p Z_p$  [m]
- $H_G$  : Vector sumatoria de momentos de las fuerzas efectivas [m.N]
- $l_b$  : Longitud entre el centro de masa del cilindro y la base fija del actuador [m]
- $l_t$  : Longitud entre el centro de masa del vástago y el extremo móvil del actuador [m]
- $d_b$  : Largo menor del hexágono base o inferior (plataforma fija) [m]
- $L_b$  : Largo mayor del hexágono base o inferior (plataforma fija) [m]
- $d_p$  : Largo menor del hexágono superior (plataforma móvil) [m]
- $L_p$  : Largo mayor del hexágono superior (plataforma móvil) [m]

## INTRODUCCIÓN

La presente tesis pretende ser un aporte y a su vez un eslabón más de la gran cadena de etapas que representa el proyecto del primer simulador de marcha humana en el Perú basado en la plataforma Stewart-Gough, diseño que se lleva a cabo en la sección de Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Tal proyecto tiene por finalidad la rehabilitación de pacientes con lesiones motoras en miembros inferiores, y de esta manera poder mejorar su calidad de vida al tratar las disfunciones que puedan tener al caminar. Además, el estudio de la plataforma Stewart-Gough es de mucha utilidad pues sus seis grados de libertad pueden ser aprovechados para una gama de aplicaciones.

El diseño de la plataforma Stewart-Gough es un proyecto que se está realizando paso a paso con la ayuda de un equipo multidisciplinario que comprende a las áreas de Ingeniería Mecánica y Electrónica. Asimismo el presente análisis no solo busca contribuir al desarrollo del simulador de marcha, sino que también pretende ser un precedente a futuros estudios que se realicen entorno a este tema, y de esta manera promover el desarrollo de manipuladores paralelos en general, al servicio del país y la comunidad.

El mecanismo paralelo mencionado consta de seis actuadores lineales que forman un octaedro hexápodo, los cuales se unen a una plataforma fija por un lado y mediante una plataforma móvil por el lado opuesto (figura 1). Este mecanismo, en comparación a un mecanismo serial, proporciona una mayor rigidez y menor masa en movimiento, lo que permite una mayor rapidez y precisión en el movimiento. La principal desventaja de los mecanismos paralelos es su reducido espacio de trabajo y a menudo su limitada capacidad de manipulación en ciertas regiones de su espacio de trabajo.

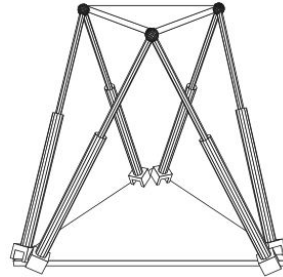


Figura 1: Mecanismo paralelo tipo plataforma Stewart-Gough.

Con la finalidad de simular la marcha humana con precisión se deben desarrollar el modelo cinemático y dinámico para el simulador de marcha diseñado. El desarrollo del modelo dinámico permitirá a su vez optimizar el diseño mecánico y establecer adecuadas estrategias de control.

En lo que al modelo dinámico se refiere, obtener las ecuaciones del movimiento de los manipuladores paralelos generalmente podría resultar en una serie de ecuaciones algebraicas diferenciales [Guo06]. Por ello, cuando se desea simular y plantear el control, es importante escoger un método de modelación dinámica apropiado para el mecanismo en análisis.

La obtención del modelo dinámico mediante Lagrange-Euler permite una formulación sencilla y cerrada de los modelos dinámicos y hacen intervenir explícitamente los pares y las fuerzas, por lo que constituye un método adecuado para el diseño de los sistemas de control de la estructura articulada. Las ecuaciones de Lagrange-Euler pueden ser planteadas en forma estructurada, sin embargo, el gran volumen de cálculo que implica su resolución dificulta la utilización de estas ecuaciones en tiempo real, lo cual se traduce en dificultades computacionales [Ferr86] [Yane97].

El modelo obtenido a través de la formulación de Newton-Euler es un conjunto de ecuaciones recurrentes en los sentidos creciente y decreciente de las articulaciones del robot. Esta estructura facilita considerablemente su resolución en un tiempo de cálculo reducido pero, como contrapartida, es menos adecuada para la obtención de las leyes de control [Ferr86].

Teniendo en cuenta las ventajas que ofrecen el método Newton-Euler y la formulación de Lagrange se puede obtener una forma compacta y cerrada de

ecuaciones dinámicas en un determinado espacio de trabajo a través de la combinación de estos dos métodos [Guo06].

El modelo dinámico una vez desarrollado es sometido a prueba en una simulación por computadora utilizando el software Mathcad, lo que tiene por finalidad corroborar y validar el procedimiento analítico realizado para la obtención de la ecuación dinámica. Los resultados de la simulación además permitirán ver fácilmente los efectos de la inercia en actuadores lineales y en otros componentes, y el comportamiento dinámico total de la plataforma.

En el proyecto del simulador de marcha, a diferencia del modelo cinemático, el modelo dinámico no ha sido aún desarrollado. Por lo tanto, el objetivo principal en la presente tesis es obtener el modelo dinámico inverso. La ecuación final de tal modelo será utilizada posteriormente en el proyecto con el fin de implementar el control de la plataforma, lo cual no está dentro del alcance de la presente tesis. Para conseguir el objetivo, se optó por utilizar el planteamiento de Guo y Li [Guo06], el cual se ha analizado y desarrollado en detalle para que el lector pueda entender paso a paso cómo se obtiene la ecuación final de la dinámica inversa. Sin embargo, la subparte referida a las ecuaciones de Newton-Euler ha sido adaptada para el simulador de marcha diseñado en la PUCP, puesto que en el trabajo de Guo y Li se considera a la carga como parte del sistema, lo cual implica considerar su inercia dentro de las ecuaciones, y en el presente trabajo tal carga ha sido considerada como una fuerza externa.

## CAPÍTULO 1

### ESTADO DEL ARTE Y FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En el presente capítulo se intenta llevar al lector desde una breve descripción de la robótica en general, lo cual es un punto de partida muy amplio, hasta el tema específico de interés, que es el análisis dinámico de un tipo de manipulador particular, de tal manera que los posteriores tratados se ubiquen de forma clara en el contexto del desarrollo de los robots paralelos. Por ello en un inicio se introduce a los robots paralelos en el marco de la robótica, para luego entender sus aplicaciones en la medicina, específicamente en fisioterapia. Después es necesario saber de las herramientas existentes para el análisis matemático de los mecanismos paralelos y porqué es importante el análisis cinemático y cinético, los cuales se describen en forma general como mecánica de los mecanismos paralelos, para finalmente explicar la estrategia de resolución dinámica a utilizar, que resulta ser el punto principal de la presente tesis.

#### 1.1 Antecedentes históricos del concepto de robot

La palabra robot fue usada por primera vez en el año de 1921, cuando el escritor checo Karen Capek estrena en el teatro nacional de Praga su obra *Rossum's Universal Robot*. Su origen es la palabra eslava *robot*, que significa trabajo forzado o servidumbre. Estos eran androides que servían a sus jefes realizando trabajos físicos. Entonces la idea de robot desde el inicio de su concepción hasta la actualidad toma apariencia humana. Entre los escritores que más impulsó la idea del robot humanoide fue sin duda alguna el escritor americano de origen ruso Isaac

Asimov al cual se le atribuye varias narraciones en las cuales consolida el término “robótica” y las tres leyes de la robótica.

Desde la revolución industrial empezó el uso generalizado de la tecnología en los procesos con la construcción de dispositivos automáticos que ayudasen o sustituyesen al hombre en sus funciones. Luego tendría un desarrollo vertiginoso a lo largo del siglo XX, con la ayuda de nuevas herramientas de cálculo, el desarrollo de la electrónica y la aparición de nuevas aplicaciones industriales. En poco más de 30 años las investigaciones y desarrollos sobre robótica industrial han permitido que los robots tomen posiciones en casi todas las áreas productivas.

El estimado del número total de robots operativos al final de 1997 asciende a más de 711 000, con un crecimiento del 6,4% respecto al año anterior. De ellos, Japón, con alrededor de 413 000 robots, es el número uno en la lista y junto con otros cinco grandes países en robótica, hacen un total de 611 000 robots, quedando únicamente 100 000 para el resto del mundo [Vict07].

En pequeñas o grandes fábricas, los robots pueden sustituir al hombre en aquellas tareas repetitivas y hostiles, adaptándose inmediatamente a los cambios de producción solicitados por la demanda variable. Los futuros desarrollos de la robótica apuntan a aumentar su movilidad, destreza y autonomía de sus acciones [Barr97].

La robótica es un área multidisciplinaria y para entender la complejidad de los robots y sus aplicaciones se requiere el conocimiento de diversas ramas clásicas de la ciencia e ingeniería. Las matemáticas proporcionan herramientas para describir movimientos espaciales, la ingeniería mecánica contribuye con metodologías para estudiar la dinámica de las máquinas, la teoría de control contribuye con herramientas de diseño y algoritmos de evaluación para realizar los movimientos deseados, la ingeniería electrónica provee técnicas necesarias en el diseño de sensores e interfaces, y finalmente, la ciencia de la computación contribuye con las bases para la programación de dichos dispositivos para ejecutar la tarea deseada [Craig86].

La definición oficial de un robot industrial es proporcionada por la norma ISO 8373:

*"Un robot industrial es un manipulador programable en tres o más ejes, controlado automáticamente, reprogramable y multifuncional, que puede estar fijado en un lugar o ser móvil, y cuya finalidad es la utilización en aplicaciones de automatización industrial".*

La automatización se puede definir como una tecnología que está relacionada con el empleo de sistemas mecánicos, electrónicos y basados en computadoras, en la operación y control de la producción. Hay tres tipos de automatización: fija, flexible y programable [Yane97].

## 1.2 Los robots paralelos

A lo largo de toda la historia, el hombre ha sentido fascinación por máquinas y dispositivos que imiten las actividades y los movimientos de los seres vivos, en especial de los primates que son los de mayor capacidad de manipulación. Esta habilidad procede del hecho de poseer dos extremidades que usadas simultáneamente ofrecen características especiales de manipulación.

Los primeros trabajos teóricos sobre mecanismos paralelos se desarrollaron hace siglos, mucho antes que se hablara de robots. Ya en épocas más actuales, entre los mecanismos paralelos de mayor reconocimiento se encuentra el inventado por el Dr. Eric Gough en 1947 de seis grados de libertad. En la actualidad existen diversas plataformas basadas en dicho diseño, entre las cuales se encuentran los simuladores de vuelo, de movimiento (figura 1.1), y también las aplicadas en medicina, especialmente en operaciones quirúrgicas teleoperadas y en el tratamiento fisioterapéutico.

Actualmente la mayoría de robots existentes en la industria presenta una morfología claramente antropomórfica, la cual se asemeja usualmente a la funcionalidad del brazo humano (robots seriales). Sin embargo, por la naturaleza de su estructura ellos presentan ciertas características que para ciertas aplicaciones son indeseables, entre las cuales tenemos:

- La relación entre la carga nominal (o peso nominal soportado por el efector final) y el peso del robot, que se encuentra usualmente por debajo del 15% [Cisn06].
- Otro aspecto es la repetibilidad de posicionamiento, que expresa el grado de cercanía entre distintas visitas repetidas en un mismo punto programado (según ISO 9283), esta se debe a varios factores como la precisión y exactitud de los sensores, la geometría del modelo y la respuesta dinámica del sistema [Cisn06].

Sin embargo estos inconvenientes pueden ser resueltos con el uso de mecanismos paralelos, en el cual la carga se encuentra distribuida en una serie de brazos. Gracias a este hecho, el peso total de este robot puede ser menor sin que ello represente deformaciones en sus elementos, reduciendo así la inercia del sistema ya que esta es directamente proporcional a la masa [Cisn06]. Una limitante importante que poseen estos tipos de manipuladores es su reducido espacio de trabajo el cual representa una de las tendencias en las investigaciones futuras de estos mecanismos.



Figura 1.1: Simulador de movimiento de Klaus Cappel.  
Construido durante los años sesenta.

Reducir la inercia del sistema es conveniente sobretodo cuando existe demanda de velocidad, exactitud y precisión debido a que manejar inercias considerables aumenta los niveles de fricción y en general el control del robot resulta bastante complejo. Además con la reducción de masa también se reduce la potencia requerida por los actuadores [Cisn06].



Un manipulador paralelo<sup>1</sup> es aquel cuya estructura mecánica esta formada por un mecanismo de cadena cerrada en el que el efector final se une a la base por al menos dos cadenas cinemáticas independientes [Arac06].

Los manipuladores paralelos de acuerdo con sus características de movimiento se clasifican en: planares, esféricos y espaciales. En la figura 1.2 se puede distinguir esta clasificación.

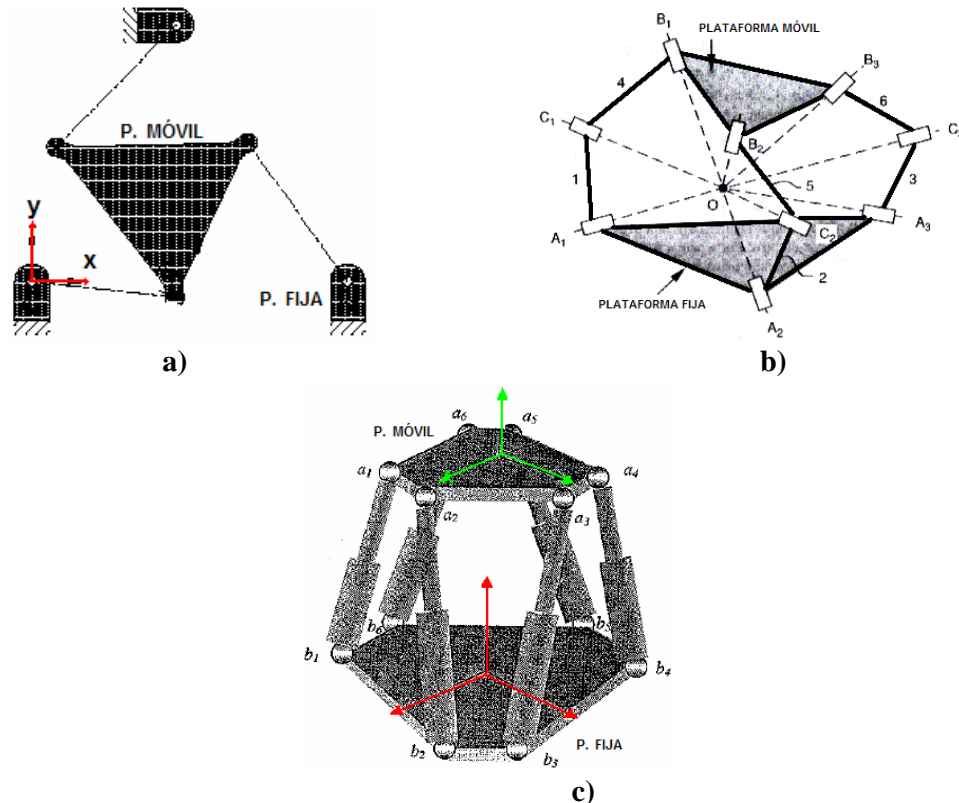


Figura 1.2: Clasificación de Robots paralelos de acuerdo a su movimiento; a) Planar b) Esférico c) Espacial.

Por otro lado, el análisis de este tipo de mecanismos es más complejo y la documentación es escasa en comparación a los robots industriales típicos (del tipo serie). Sin embargo, existen muchas configuraciones paralelas siendo la más típica y documentada la denominada plataforma Stewart-Gough de seis grados de libertad, la cual es estudiada en la presente tesis.

<sup>1</sup> Los robots también son llamados manipuladores o mecanismos, términos que son manejados en este trabajo.

El mecanismo paralelo tipo plataforma Stewart-Gough (figura 1.3), consta de seis actuadores lineales los cuales representan seis cadenas cinemáticas independientes unidas a una base fija por un lado y mediante una plataforma móvil por lado opuesto, formando así un octaedro hexápodo. Se dice que son cadenas cinemáticas cerradas debido a la posición fija de los seis efectores finales respecto del centroide de la plataforma superior o móvil. La utilización de este tipo de mecanismo es adecuado cuando se buscan prestaciones como la capacidad de carga, un buen rendimiento dinámico y precisión en el posicionamiento.

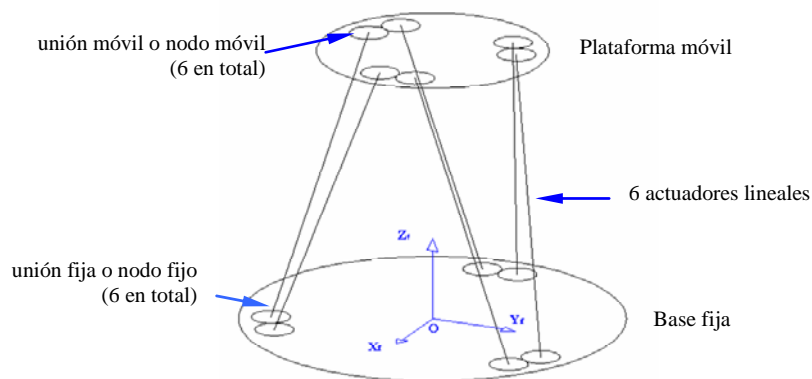


Figura 1.3: Esquema en 3D del mecanismo paralelo tipo plataforma Stewart-Gough [Elías07].

Este mecanismo, en comparación a un mecanismo serial proporciona una mayor rigidez, menor masa en movimiento (peso ligero) y baja fuerza de actuación. Estas características permiten una mayor estabilidad y precisión en el movimiento, capacidad de manipular cargas relativamente grandes y operar a mayores velocidades y aceleraciones. La principal desventaja de los mecanismos paralelos, como ya se ha mencionado, es su reducido espacio de trabajo y la necesidad de controlar simultáneamente los sistemas motrices.

### 1.3 Aplicaciones del robot paralelo en fisioterapia

Los robots paralelos poseen un amplio campo de aplicación, aunque no se puede negar la indiscutible primacía de los robots con estructura serie, los desarrollos en mecanismos paralelos están en constante crecimiento, tal es así que han sido adoptados en diversas áreas, desde microrobots posicionadores hasta grandes plataformas de gran capacidad de carga, en aplicaciones médicas, en simulación

de vuelo, máquinas herramientas de control numérico y muchas otras actividades en las que aún estos robots están en fase experimental.

Existen actualmente robots industriales de 2, 3, 4, 5, 6 ó más grados de libertad que pueden realizar muchos movimientos tridimensionales. Son precisos, potentes y pueden ejecutar muchas de las tareas repetitivas, tal y como lo hacen los fisioterapeutas en los tratamientos de rehabilitación.

La aplicación de la robótica en el campo de rehabilitación se remonta a los años ochenta del pasado siglo. Al principio fue difícil aceptar que los robots industriales fueran adecuados para la robótica de rehabilitación debido a la gran inercia de sus movimientos y a su historial de accidentes. Sin embargo en 1999, investigadores de la Universidad de Tecnología y Economía de Budapest (Hungría) revaloraron la idea de usar robots industriales estándar para la terapia en humanos. El proyecto REHAROB fue el primero en el mundo que buscaba utilizar robots industriales estándar, fabricados en serie, para el tratamiento fisioterapéutico de pacientes, en este caso, pacientes apopléticos con hemiparesia espástica [Andr06].

Para el caso de pacientes con lesiones motoras lo que convencionalmente se hace es coger las extremidades afectadas y con una serie de movimientos repetitivos se ayuda a la persona a recuperar su marcha normal. Este y otros métodos de rehabilitación se han dado desde muchos años atrás, los cuales en la mayoría de casos pueden resultar fatigosos y cansados para el fisioterapeuta, por ello son ineficaces y a menudo los resultados se obtienen de forma muy lenta alargando así el tiempo de rehabilitación del discapacitado.

En cambio con la ayuda de un simulador de marcha (figura 1.4), es posible realizar dichos movimientos repetitivos en forma automática, simular con mayor eficacia la marcha humana, definir parámetros de operación específicos y controlar la rehabilitación del paciente de tal manera que se pueda cuantificar el progreso [Boia05]. En este sentido el estudio de la plataforma Stewart-Gough es de mucha utilidad ya que se aprovechan sus seis grados de libertad para una gama de aplicaciones, en particular la simulación de la marcha humana.



Figura 1.4: Simulador de marcha usando dos plataformas Stewart [Boia05].

#### 1.4 Métodos para la localización espacial

Resulta necesario poder definir matemáticamente la orientación y posición de cualquier robot con el fin de analizar su movimiento y las prestaciones del diseño. La localización espacial representa el primer paso de toda una serie de análisis, tanto estáticos como dinámicos, para luego desarrollar la estrategia de control adecuada.

En general, los diversos métodos de localización existentes intentan realizar lo mismo, sin embargo el uso de uno u otro será más adecuado dependiendo de la aplicación (Tabla 1.1). La comparación se realiza principalmente en relación a la capacidad de los métodos para la realización de las cuatro cuestiones básicas siguientes [Barr97]:

1. Capacidad de representación conjunta de posición y orientación.
2. Representar la posición y orientación de un sistema rotado y trasladado con respecto a un sistema fijo de referencia.
3. Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema móvil OUVW, a su equivalente en coordenadas del sistema de referencia OXYZ.
4. Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ.

Tabla 1.1: Cuadro comparativo entre los distintos métodos [Barr97].

Método	Ventajas	Inconvenientes
Matrices de transformación homogénea	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posición y orientación de forma conjunta</li> <li>• Comodidad</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alto nivel de redundancia, pues son 12 componentes para 6 GDL.</li> <li>• Coste computacional</li> </ul>
Ángulos de Euler	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Notación compacta</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sólo orientación</li> <li>• Dificultad de manejo para composición</li> </ul>
Cuaternios	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Composición simple y eficiente de rotaciones y traslaciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sólo orientación relativa</li> </ul>

A continuación se explican las ventajas desventajas de los métodos más usados para la localización espacial: las matrices de transformación homogénea, los ángulos de Euler y los cuaternios.

#### A) Matrices de transformación homogéneas

La principal ventaja de este método es la comodidad con la que se puede realizar la composición de transformaciones, a su vez posee una capacidad de representación conjunta de posición y orientación. El principal inconveniente que presenta es su alto grado de redundancia, ya que se necesita definir doce parámetros para sólo seis grados de libertad.

#### B) Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler sólo son capaces de representar orientación, y además son difíciles de manejar al realizar composición de rotaciones. Sin embargo permite una notación compacta ya que se define sólo por tres parámetros.

#### C) Cuaternios

Este método solo es capaz de representar la orientación relativa de un sistema móvil con respecto a otro, a través de sólo cuatro componentes. Sin embargo, es posible componer rotaciones junto con traslaciones de forma muy simple y computacionalmente económica [Barr97].

## 1.5 Definición de modelo matemático de un sistema dinámico

Un modelo es una representación de la realidad en la cual intervienen los elementos característicos que forman la parte modelada y a su vez se describen las relaciones existentes entre ellos. Un modelo matemático describe dicha relación pero basada en lógica matemática, cuyos elementos son esencialmente variables y funciones. Un modelo estático es aquel en donde la variable tiempo no es relevante, en cambio, en un modelo dinámico las variables cambian de valor con el tiempo, y tiene por objetivo describir cómo evolucionan las variables a través de una trayectoria temporal específica en algún elemento o elementos del modelo [Fern04].

Para poder abordar la concepción del manipulador paralelo, es preciso plantear primero los modelos matemáticos que permitan analizar su comportamiento [Ferr86]. Con este fin se deben desarrollar los modelos geométrico, cinemático y dinámico, siendo estos necesarios para empezar a plantear una estrategia de control.

El control de los movimientos de un robot constituye un problema complejo por diversos motivos. Por un lado, el movimiento de la plataforma superior se logra a través del desplazamiento lineal de los actuadores, los cuales deberán ser controlados en forma independiente y simultánea. Por otro lado, el comportamiento dinámico de la estructura no es lineal y depende de las condiciones operativas.

El diseño de un buen sistema de control exige el establecimiento de un modelo dinámico que tenga en cuenta las fuerzas y pares que producen el movimiento de los actuadores, considerando también la masa e inercia de los mismos [Ferr86]. La importancia de estos modelos es elevada cuando se desean movimientos rápidos, por ende, con aceleraciones elevadas en donde los fenómenos dinámicos adquieren gran influencia.

## 1.6 Mecánica de los manipuladores paralelos

El mecanismo paralelo se analiza con la mecánica de cuerpos rígidos, la cual se divide en dos, estática y dinámica. Asimismo la dinámica se analiza mediante la cinemática y la cinética. En la cinemática no importa como se genera el movimiento, se ocupa del análisis de la posición, velocidad y aceleración de la partícula, de un

sistema de partículas o sólido rígido. En cambio, en la cinética sí importa cómo se origina el movimiento de un cuerpo, por ello ésta se ocupa de analizar las fuerzas y torques que se requieren para tal fin.

### 1.6.1 Análisis cinemático

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia, así como las relaciones existentes entre la plataforma superior con los actuadores lineales y la base. Por ello el análisis cinemático se ocupa de las relaciones de posición, orientación, velocidad y aceleración de la plataforma móvil a través de una trayectoria dada. En el análisis de la plataforma Stewart-Gough, por ser un mecanismo espacial, es útil tener claro el concepto de cinemática tridimensional de sólidos rígidos, tanto el movimiento general como el relativo.

El problema de la posición y orientación puede ser solucionado separándolo en dos, la cinemática directa e inversa. La cinemática directa consiste en determinar cuál es la posición y orientación de la plataforma móvil respecto de un sistema coordinado una vez conocida la configuración de los actuadores y los parámetros geométricos de los elementos del manipulador [Barr97]. Por otro lado, el segundo realiza el proceso inverso, es decir, resuelve los parámetros y variables que permiten al robot adoptar una orientación y posición conocida de la plataforma móvil, donde su velocidad y aceleración en el tiempo son también datos de entrada.

Ambos problemas pueden ser resueltos de varias maneras, un método muy extendido en el análisis de robots es el planteado por Denavit y Hartenberg (en adelante D-H), que consiste en un método sistemático para describir y representar la geometría espacial de los elementos de una cadena cinemática, que para el caso de la plataforma Stewart-Gough serían seis. Este método describe la relación espacial entre dos elementos rígidos adyacentes (eslabón  $i - 1$  con el  $i$ ) mediante una matriz de transformación homogénea 4x4 definida como  ${}^{i-1}A_i$ , a su vez este concepto permite relacionar la localización espacial de la plataforma superior con el sistema coordinado de su base [Barr97]. Dicha matriz de transformación depende de cuatro parámetros  $(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i)$ , la cual resulta del producto de cuatro transformaciones básicas (Tabla 1.2). Dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones se realizan según la expresión 1.1.

$${}^{i-1}A_i = T(z, \theta_i)T(0, 0, d_i)T(a_i, 0, 0)T(x, \alpha_i) \tag{1.1}$$

Tabla 1.2: Transformaciones de la representación D-H.

Nº	Parámetro	Descripción
1	$T(z, \theta_i)$	Rotación alrededor del eje $z_{i-1}$ un ángulo $\theta_i$ .
2	$T(0, 0, d_i)$	Traslación a lo largo de $z_{i-1}$ una distancia $d_i$ , vector $\vec{d}_i(0, 0, d_i)$ .
3	$T(a_i, 0, 0)$	Traslación a lo largo de $x_i$ una distancia $a_i$ , vector $\vec{a}_i(a_i, 0, 0)$ .
4	$T(x, \alpha_i)$	Rotación alrededor del eje $x_i$ un ángulo $\alpha_i$ .

Puede establecerse un sistema de ejes cartesianos ortonormal para cada articulación. Al activar el actuador del eslabón  $i$ , este se moverá con respecto al eslabón  $i - 1$ . El sistema coordinado de la base fija es definido como el 0-ésimo sistema coordinado, el cual representa el marco de referencia inercial del manipulador [Yane97]. Cada sistema de coordenadas esta determinado por las tres reglas siguientes (figura 1.5):

1. El eje  $z_{i-1}$  esta a lo largo del eje de movimiento de la  $i$ -ésima articulación.
2. El eje  $x_i$  es normal al eje  $z_{i-1}$  y apuntando fuera de él.
3. El eje  $y_i$  completa el sistema coordinado derecho requerido.

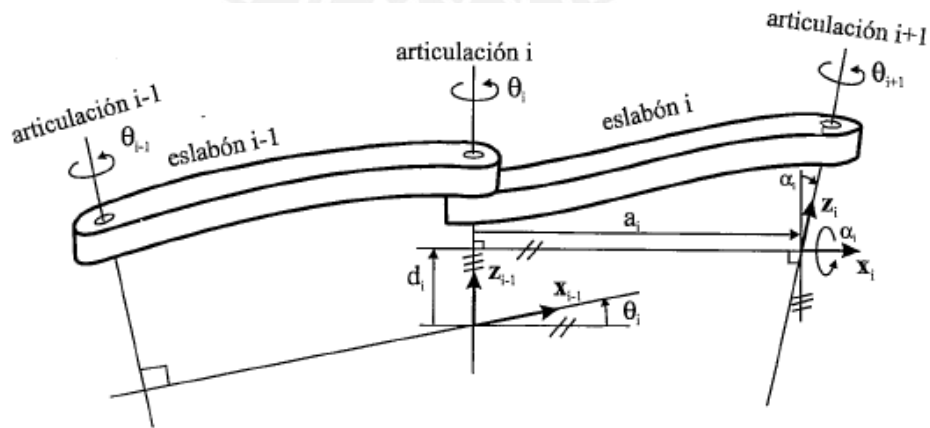


Figura 1.5: Parámetros D-H para un eslabón giratorio [Barr97].

Del producto de matrices en (1.1) se obtiene la expresión (1.2):



$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

Donde  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  son los parámetros D-H de la articulación mostrada en la figura 1.5, y los símbolos S y C son representaciones de seno y coseno respectivamente. Entonces, para describir un movimiento de seis grados de libertad basta con definir estos cuatro parámetros que resultan en la matriz de transformación homogénea  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ .

Sin embargo, para el caso de manipuladores paralelos, la existencia de varias cadenas cinemáticas dificulta la aplicación de la representación D-H en la solución de la cinemática inversa. A ello hay que agregar, que cuando se tienen articulaciones de más de un grado de libertad como las tipo esféricas, serían necesarios definir más de cuatro parámetros, lo cual imposibilita usar la representación D-H tal y como se ha descrito [Cisn06]. Por ello para la configuración paralela se prefiere usar el enfoque geométrico, definiéndose ecuaciones vectoriales para cada brazo.

El método D-H podría ser apropiado para resolver la cinemática directa de los manipuladores paralelos, sin embargo, en la presente tesis solamente será desarrollada la cinemática inversa, la cual se resolverá mediante la mecánica vectorial.

### 1.6.2 Análisis dinámico

La cinemática se encarga del análisis del movimiento sin considerar las fuerzas que lo originan, mientras que la dinámica se ocupa del análisis de fuerzas y torques en relación con el movimiento. Por ello es preciso tener en claro el concepto de fuerza, momento, y cómo las masas e inercias de los actuadores afectan al análisis dinámico. También es útil tener presente la teoría de cuerpos rígidos entendiendo a su vez los conceptos de trabajo y energía.

La relación entre las fuerzas que actúan en el manipulador y el movimiento del mismo se obtiene mediante el modelo dinámico. El análisis dinámico puede afrontarse en dos sentidos opuestos, la dinámica inversa y la directa. La dinámica inversa consiste en determinar las fuerzas y torques en función del tiempo, requeridos para producir un movimiento a través de una trayectoria deseada, en términos de las posiciones, velocidades, aceleraciones y orientaciones en el tiempo. Por otro lado, la dinámica directa expresa la evolución temporal de la velocidad, aceleración y orientación del manipulador en función de las fuerzas y pares aplicados.

Al igual que los sistemas de cadena abierta (manipuladores seriales), los de cadena cinemática cerrada son actualmente un activo campo de investigación, en el cual los investigadores han ido usando diversos principios de la dinámica para las ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico de los manipuladores paralelos [Seba07], algunos de los más importantes investigadores se aprecian en la tabla 1.3.

Tabla 1.3: Investigaciones en modelación dinámica.

Investigador(es)	Año	Principio dinámico
Do y Yang	1988	Newton-Euler
Dasgupta y Mruthyunjaya	1998	Newton-Euler
Lebrel et al.	1993	Lagrange-Euler
Miller y Clavel	1992	Lagrange-Euler
Wang y Gosselin	1998	Principio de los Trabajos Virtuales
Tsai	2000	Principio de los Trabajos Virtuales
Geike y Mcphee	2003	Principio de los Trabajos Virtuales

Una forma clásica de calcular la dinámica de manipuladores paralelos es usando un sistema de ecuaciones de restricción mediante los multiplicadores de Lagrange o el principio de D' Alembert. Existen también métodos alternativos de modelación dinámica basados en el trabajo virtual, principio de Hamilton, las ecuaciones de Newton-Euler, entre otras. Y a su vez existen desarrollos en el uso mixto de los formalismos antes mencionados, que como se verá en adelante, es el caso de la presente tesis.

Están también métodos basados en otras leyes de la física como las Ecuaciones de Gibbs-Appell para obtener la dinámica directa de manipuladores paralelos, el principio de D'Alembert generalizado, las ecuaciones canónicas de Hamilton para resolver tanto la dinámica inversa como la directa, entre otras formulaciones.

#### **A) Método de Newton-Euler**

En este método se parte del equilibrio de fuerzas y momentos, que conduce a una formulación recursiva donde se obtienen la posición, velocidad y aceleración del eslabón o elemento  $i$  respecto del sistema de referencia, a partir de los correspondientes valores del elemento  $i-1$  y del movimiento relativo de la articulación  $i$ , de tal manera que se parte del eslabón 1 y se llega al  $n$ . Luego se obtienen las fuerzas y momentos actuantes en el elemento  $i$  a partir de los que actúan en el elemento  $i+1$ , y de esta forma se analiza desde el elemento  $n$  al 1 [Yane97]. Se trata de un cálculo “hacia delante” de la propagación de las velocidades y aceleraciones de un eslabón a otro, seguido de un cálculo “hacia atrás” de las fuerzas y momentos existentes en cada articulación.

El algoritmo se basa en operaciones vectoriales, con productos escalares y vectoriales, y producto de matrices con vectores. La estructura de las ecuaciones resultantes es bastante compleja dependiendo del número de grados de libertad del sistema [Yane97].

Este método es aplicado generalmente en el análisis de robots seriales, ya que en el caso de manipuladores paralelos se genera un gran número de ecuaciones, por ello este método es poco eficiente, computacionalmente hablando [Cisn06].

## B) Formulación de Lagrange

Es un método perteneciente a la dinámica analítica, la cual consiste en una serie de técnicas basadas en el tratamiento puramente abstracto y analítico de los sistemas mecánicos [Cisn06]. Este tiene la ventaja de considerar la definición de coordenadas generalizadas por el análisis de fuerzas de contacto.

Las coordenadas generalizadas son parámetros que permiten definir un sistema material. En el cuerpo rígido puede obtenerse con las tres coordenadas de un punto y tres ángulos que fijan su orientación en el espacio. Es decir que, en general, se logra la configuración del sistema por medio de un cierto número de coordenadas lineales y angulares a las que se denomina como coordenadas generalizadas [Ricr70].

La formulación de Lagrange se expresa en ecuaciones que relacionan las fuerzas que realizan trabajo virtual con la energía cinética y potencial del sistema, donde el número de ecuaciones de Lagrange generadas es igual a los grados de libertad del sistema. Para el caso de mecanismos paralelos, se requiere formular las ecuaciones de restricción necesarias que igualen al número de incógnitas, lo cual sugiere que mientras mayor sea la movilidad del mecanismo (mayor grado de libertad), la aplicación del método se complica más.

## C) Otros métodos

El problema dinámico directo de los manipuladores paralelos puede ser resuelto mediante una formulación sistemática basada en las ecuaciones de Gibbs-Appell explícitas, método propuesto por Udwadia y Kabala, donde los eslabones y juntas se consideran rígidos e ideales respectivamente. La formulación permite transformar la resolución del problema dinámico de un sistema mecánico restringido, a la resolución de un sistema conformado por cadenas abiertas, hecho que permite el uso de algoritmos eficientes basados en las ecuaciones de Gibbs-Appell [Seba07].

Existe otra formulación, como tantas otras, que resuelve la dinámica inversa y directa en base a las ecuaciones canónicas de Hamilton. En general, la dinámica de un mecanismo puede resolverse mediante las distintas teorías de la dinámica

analítica, pero la elección de una o más formulaciones usadas en conjunto, dependerá de la aplicación y de la eficiencia computacional requerida.

### 1.7 Modelación matemática de la plataforma Stewart-Gough

En el presente trabajo la modelación dinámica será obtenida mediante la combinación del método Newton-Euler con la formulación de Lagrange, los cuales son aplicados sistemáticamente para desarrollar las ecuaciones de movimiento. El análisis planteado ha sido propuesto recientemente por Guo y Li [Guo06], quienes analizan la cinemática y dinámica inversa de un manipulador paralelo de 6 grados de libertad.

La derivación de las ecuaciones dinámicas de la plataforma Stewart-Gough será dividida en dos partes, el movimiento de la plataforma superior y el movimiento de los seis actuadores lineales, conformando así la estructura completa. Respecto al modelo de los actuadores, se plantea que la fuerza de restricción de la articulación ubicada en la parte superior de cada actuador sea derivada a través de la formulación de Lagrange. Luego, se complementa con el análisis de la dinámica de la plataforma superior la cual es obtenida mediante el método de Newton-Euler.

Si bien el modelo dinámico completo incluye a los actuadores y sus componentes electromecánicos de mando, sólo se analiza la dinámica del manipulador paralelo en general (los seis brazos y la plataforma superior), considerando las masas e inercias de los actuadores hidráulicos y de la plataforma superior. A su vez el método no considera los efectos de la fricción, lo cual permite que el análisis pueda ser mejorado, sin embargo el error por fricción que pueda generarse en cada brazo es compensado entre sí, lo cual es característica de los robots con morfología paralela.

## CAPÍTULO 2

### MODELACIÓN DE LA DINÁMICA INVERSA

Luego de haber conocido los aspectos generales del análisis matemático de los robots paralelos, aquí corresponde desarrollar el análisis extendido de un tipo especial de mecanismo paralelo que es la plataforma de Stewart-Gough. En un inicio se deducirán algunas expresiones de la cinemática necesarias para el planteamiento dinámico. Luego se desarrolla el análisis dinámico de tipo inverso con el objetivo de obtener las fuerzas necesarias en cada actuador para generar en la plataforma un movimiento deseado.

#### 2.1 Introducción

Los modelos cinemático y dinámico son necesarios en cualquier mecanismo puesto que así se conocen las leyes que rigen su movimiento en el tiempo. En la mecánica teórica se pueden encontrar diversos planteamientos para obtener los modelos antes mencionados, tales como las leyes de Newton, la formulación de Lagrange, el principio de trabajos virtuales, el principio de Hamilton y otros. Elegir una u otra, o bien una combinación de planteamientos dependerá del mecanismo en análisis.

Se ha hecho una revisión de formulaciones matemáticas propuestas en diferentes investigaciones relacionadas a la modelación dinámica de la plataforma Stewart-Gough [Yane97] [Seba07] [Guo06] [Cisn06], lo cual ha permitido tener un panorama más claro sobre la modelación de plataformas paralelas. Finalmente el método de análisis escogido ha sido propuesto por Guo y Li y publicado en versión resumida [Guo06], donde se analiza la cinemática y dinámica inversa de un manipulador paralelo tipo Stewart-Gough de seis grados de libertad.

La dinámica inversa es el análisis donde la trayectoria, velocidad y aceleración de la plataforma superior son conocidas, y las fuerzas que generan tal movimiento deben ser halladas. En cambio la dinámica directa es cuando las fuerzas actuantes son conocidas y se debe determinar la trayectoria, velocidad y aceleración de la plataforma móvil generada por dichas fuerzas. La dinámica directa es también necesaria para plantear la estrategia de control, pero en la presente tesis no se aborda tal análisis.

El planteamiento desarrollado en el presente capítulo es válido para los fines de simular la marcha humana, sin embargo, es posible simular cualquier tipo de movimiento dentro del rango de trabajo de la plataforma debido a que uno de los datos de entrada en la ecuación dinámica final es la trayectoria.

Yanes propone un análisis por Lagrange donde si bien su derivación es simple y sistemática, su desventaja más importante es el alto costo computacional cuando se implementa en un sistema de control [Yane97]. La aplicación del método de Newton–Euler resulta en una estructura de ecuaciones bastante compleja que a su vez depende del número de grados de libertad del sistema [Yane97]. En el presente trabajo la modelación dinámica será obtenida mediante la combinación del método Newton-Euler con la formulación de Lagrange [Guo06], los cuales son aplicados sistemáticamente para desarrollar las ecuaciones de movimiento, de esta forma se aprovechan las ventajas de ambos métodos como un intento por optimizar la modelación dinámica de la plataforma Stewart-Gough. Sin embargo, la subparte referida a las ecuaciones de Newton-Euler tuvo que ser adaptada para el simulador de marcha, puesto que en el trabajo de Guo y Li se considera a la carga como parte del sistema, lo cual implica considerar su inercia dentro de las ecuaciones, y en el presente trabajo tal carga se considera como una fuerza externa.

Los efectos de la fricción no serán evaluados, lo cual permite que el análisis en la presente tesis sea mejorado. Sin embargo dicho efecto no es crítico en manipuladores paralelos debido que existe cierta compensación del error, en cambio en mecanismos en serie el error se acumula.

Como la plataforma está compuesta por seis actuadores unidos en su extremo móvil mediante una plataforma superior, se tienen seis cadenas cinemáticas cerradas por estudiar. Cada una de ellas posee un movimiento distinto, sin embargo el desarrollo cinemático y cinético es el mismo debido a que los brazos son iguales

y están dispuestos de forma simétrica, por ello el análisis del brazo es realizado de manera general mediante el uso del subíndice  $j$ .

## 2.2 Simbología y álgebra de matrices

La cinemática y cinética del sistema son analizadas mediante vectores. Sin embargo, por la complejidad y la gran cantidad de operaciones que implica el desarrollo analítico, se ha expresado cada término vectorial en forma de matriz con la finalidad de desarrollar el análisis en forma compacta. Por tanto, es necesario mostrar el significado de la simbología y las principales propiedades del algebra matricial que serán utilizadas en el desarrollo matemático a lo largo del presente capítulo.

### A) Simbología

El conocimiento de la simbología es fundamentalmente útil para la lectura de las expresiones matemáticas. Además es importante saber que en adelante cada término vectorial será expresado como una matriz 3x1.

Tabla 2.1: Simbología de términos matemáticos.

Descripción	Ejemplo
1. Los términos con letra minúscula o mayúscula con estilo cursivo, son escalares o variables escalares.	$l, \varphi$
2. Los términos con letra minúscula o mayúscula con estilo cursivo y negrita, son matrices 3x1.	$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3]^T$
3. La traspuesta de matrices como $\mathbf{n}$ o $\mathbf{Q}$ , es una matriz 1x3.	$\mathbf{n}^T = [n_1 \ n_2 \ n_3]$ $\mathbf{Q}^T = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3]$
4. Los términos con letra minúscula o mayúscula con estilo negrita, son matrices 3x3.	$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{bmatrix}$
5. El término $\mathbf{I}$ se define como matriz identidad.	$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



En algunos casos es difícil expresar con términos matriciales un producto escalar o vectorial, por ello se optó representar tales operaciones en la forma vectorial para el mejor entendimiento del desarrollo analítico, lo cual se explica en la tabla 2.3.

Tabla 2.2: Operaciones matemáticas con matrices

Operación matemática	Resultado
$\frac{d}{dt}(al), \frac{d}{dt}\left(\frac{a}{l}\right)$ <p>Derivada de una matriz variable multiplicada por una variable escalar, en función del tiempo.</p>	<p>Sea <math>l</math> una variable escalar, se define:</p> $\frac{d}{dt}(al) = \dot{a}l + a(dl/dt)$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{l}\right) = \frac{\dot{a}l + a(dl/dt)}{l^2}$
$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}}$ <p>Derivada parcial de una variable escalar respecto de una matriz variable.</p>	<p>Si <math>T</math> es una variable escalar, se define:</p> $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} = \left[ \frac{\partial T}{\partial a_1} \quad \frac{\partial T}{\partial a_2} \quad \frac{\partial T}{\partial a_3} \right]^T$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{a}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{F}_a$ <p>Notación compacta de la formulación de Lagrange para tres coordenadas generalizadas.</p>	<p>Sean <math>a_1, a_2, a_3</math> las coordenadas generalizadas de un sistema y <math>T</math> una variable escalar, la notación extendida resulta ser:</p> $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial a_1} = F_{a_1}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial a_2} = F_{a_2}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial a_3} = F_{a_3}$
<p>Matriz de matrices.</p>	<p>Sea <math>\mathbf{I}</math> la matriz identidad y <math>\mathbf{R}</math> una matriz 3x3, se define:</p> $[\mathbf{I} \quad \mathbf{R}] \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{b}$

Sean los términos vectoriales  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  (en forma de matriz 3x1), donde las componentes pueden ser constantes o dependientes del tiempo, se tiene:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Tabla 2.3: Simbología de operaciones matemáticas.

Símbolo	Significado matemático
$\tilde{n}$ , operador de asimetría diagonal ( $\sim$ ).	$\tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$
$\tilde{n}^T$ , traspuesta de una matriz 3x3.	$\tilde{n}^T = -\tilde{n}$
$a \cdot b$ , producto escalar.	$a \cdot b = a^T b$
$a \times b$ , producto cruz.	$a \times b = \tilde{a} b$

### C) Propiedades

Sea  $R$  una matriz 3x3,  $p$  y  $\omega$  matrices 3x1 y  $l$  un escalar, se tiene:

Tabla 2.4: Propiedades con matrices.

Propiedad	Referencia
Sea $P_b = R p$ , se define: $\tilde{P}_b = R \tilde{p} R^T$	C1
Sea $\tilde{P}_b = R \tilde{p} R^T$ , se define: $\tilde{P}_b^T = R \tilde{p}^T R^T$	C2
Sea $P_b = R p$ , se define: $\tilde{\omega} R p = \tilde{\omega} P_b = \tilde{P}_b^T \omega$	C3
Sea $P_a = l p$ , se define: $\tilde{P}_a = l \tilde{p}$	C4
$R R^T = R^T R = I$	C5

Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{c}$  vectores en general, y  $\mathbf{n}$  es un vector unitario, se define:

Tabla 2.5: Propiedades especiales con matrices [Guo06].

Propiedad	Referencia
$\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{c}\mathbf{I}$	C6
$\tilde{\mathbf{n}}^T\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T$	C7
$(\mathbf{ac})^T = \mathbf{c}^T\mathbf{a}^T$	C8

### 2.3 Coordenadas generalizadas

Con la finalidad de describir el movimiento de un mecanismo, se utilizan con frecuencia coordenadas lineales, angulares o bien ambas a las cuales se les denomina coordenadas generalizadas y en conjunto se denotan con el término  $\mathbf{q}$ . El número de coordenadas generalizadas dependerá de los grados de libertad que posea el sistema [Ricr70] [Well72].

En el caso de la plataforma Stewart-Gough se debe definir el movimiento de la plataforma móvil, el cual está limitado por el movimiento de los actuadores que lo unen con la base fija. Debido a que cada actuador forma una cadena cinemática, en total se tendrán seis por ser seis actuadores, y a su vez serán cadenas cinemáticas cerradas debido a que los actuadores están físicamente unidos a través de la plataforma móvil.

Es posible utilizar Denavit y Hartenberg para la localización espacial de la plataforma superior, sin embargo para el caso de plataforma Stewart-Gough, la existencia de seis cadenas cinemáticas dificulta la aplicación de la representación D-H [Cisn06]. Por ello se prefiere usar el enfoque geométrico, definiéndose ecuaciones vectoriales para cada brazo o actuador.

Por tanto, el análisis de la cinemática y la cinética estará basado en el enfoque geométrico mediante la aplicación de la mecánica vectorial, pero será desarrollada en forma de operaciones matriciales, debido a la facilidad de expresar ecuaciones extensas y complejas de forma compacta y a la posibilidad de resolver sistemas de ecuaciones lineales de forma simple mediante el concepto de matriz inversa, ambas

ventajas son también favorables para implementación del modelo final en un sistema de cómputo.

La plataforma móvil tendrá seis grados de libertad debido a que la plataforma paralela en análisis posee seis cadenas cinemáticas, por ello se definen seis coordenadas generalizadas que pueden obtenerse con las tres coordenadas de un punto perteneciente a la plataforma móvil y tres ángulos que determinan su orientación en el espacio. Utilizando la forma matricial, se define el término  $q$  de seis variables que describe la orientación y posición de la plataforma móvil (2.1) en el espacio.

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (2.1)$$

### 2.3.1 Determinación de la posición

La plataforma Stewart-Gough consta de seis actuadores lineales que forman un octaedro hexápodo, los cuales se unen a una base fija por un lado y mediante una plataforma móvil por el lado opuesto.

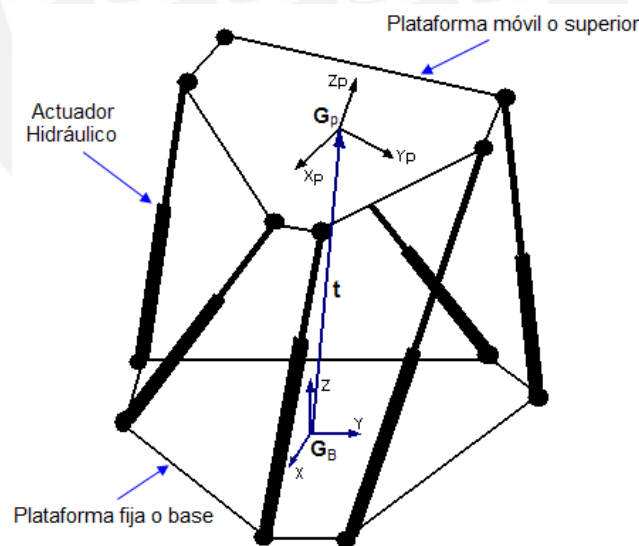


Figura 2.1: Sistema fijo  $XYZ$ , sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$ .

Se definen dos sistemas coordenados, el sistema  $XYZ$  (en adelante, sistema base) que se ubica en el centro geométrico de la plataforma base o fija; y el sistema

$X_p Y_p Z_p$  (en adelante, sistema móvil) que es solidario a la plataforma móvil o superior y se ubica también en el centro geométrico (figura 2.1). Luego, para describir la traslación de la plataforma móvil, será suficiente con definir la posición de su centro geométrico en función del tiempo (donde se ubica el sistema  $X_p Y_p Z_p$ ), para ello se define el vector  $\mathbf{t}$  referente al sistema fijo XYZ (2.2).

$$\mathbf{t} = [x \quad y \quad z]^T \equiv (q_1 \quad q_2 \quad q_3) \quad (2.2)$$

### 2.3.2 Determinación de la orientación

Existe más de un método para describir la orientación de un cuerpo en el espacio. Por un lado está el método del Par de rotación, el cual requiere definir tres ángulos, dos de ellos son para especificar la orientación de un eje definido en el cuerpo, y el tercero es para especificar la rotación del cuerpo respecto a dicho eje. También es posible definir la orientación en el espacio tridimensional utilizando los ángulos de Euler (notación compacta, sólo tres números reales), sin embargo su uso en vectores no es viable de forma simple [Barr97]. Por ello, considerando la facilidad de representación de los ángulos de Euler y su compatibilidad con la composición de matrices, se resuelve expresar los ángulos de Euler mediante matrices de rotación, lo cual sí es aplicable en vectores.

La orientación de la plataforma móvil con respecto al sistema de referencia XYZ está determinada por tres coordenadas generalizadas, que son a su vez los ángulos de Euler, esto es:

$$\mathbf{k} = [\varphi \quad \theta \quad \psi]^T \equiv (q_4 \quad q_5 \quad q_6) \quad (2.3)$$

Existen en total veinticuatro posibilidades formalmente definidas de representar la orientación, la utilizada para la dinámica inversa que se desarrollará en el presente capítulo será el sistema Z-Y-X (figura 2.2). Dicho sistema consiste en rotaciones sucesivas respecto del sistema coordinado que ha girado, y el orden de las rotaciones es el siguiente:

- 1º- Una rotación del ángulo  $\psi$  alrededor del eje OZ ( $\mathbf{R}_{z,\psi}$ )
- 2º- Una rotación del ángulo  $\theta$  alrededor del eje OY' ( $\mathbf{R}_{y',\theta}$ )
- 3º- Una rotación del ángulo  $\phi$  alrededor del eje OX'' ( $\mathbf{R}_{x'',\phi}$ )

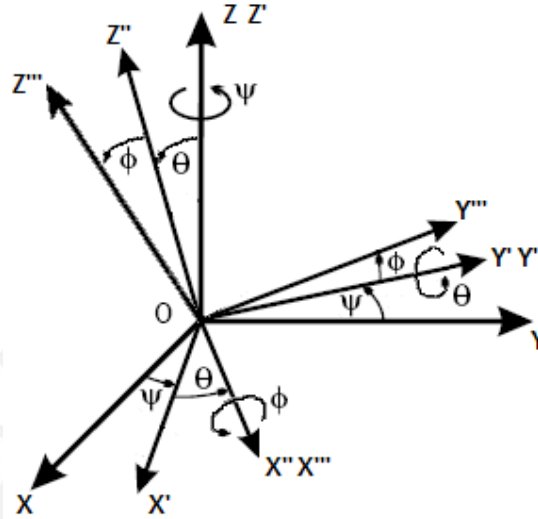


Figura 2.2: Ángulos de Euler Z-Y-X.

En la figura 2.2 se observa que los ejes resultantes  $X'' Y'' Z''$  al final de las rotaciones, serían justamente el sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$ .

La matriz de rotación de Euler se obtiene posmultiplicando las rotaciones, ya que se definen respecto al sistema que está rotando [Barr97]:

$$\mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y',\theta} \mathbf{R}_{x'',\phi} = \mathbf{R}_{\psi,\theta,\phi} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} C\psi \cdot C\theta & C\psi \cdot S\theta \cdot S\phi - S\psi \cdot C\phi & S\psi \cdot S\phi + C\psi \cdot S\theta \cdot C\phi \\ S\psi \cdot C\theta & C\psi \cdot C\phi + S\psi \cdot S\theta \cdot S\phi & S\psi \cdot S\theta \cdot C\phi - C\psi \cdot S\phi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\phi & C\theta \cdot C\phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Esta matriz se utiliza para transformar un vector definido respecto del sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  al sistema fijo  $XYZ$ , como se muestra a modo de ejemplo en la figura 2.3 donde se define un vector de magnitud  $P$  que une en todo momento el centro geométrico  $G_p$  y uno de los vértices del polígono.

De esta manera es posible obtener cualquier orientación de la plataforma móvil respecto del sistema coordenado de referencia mediante una elección apropiada de los ángulos  $\varphi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ .

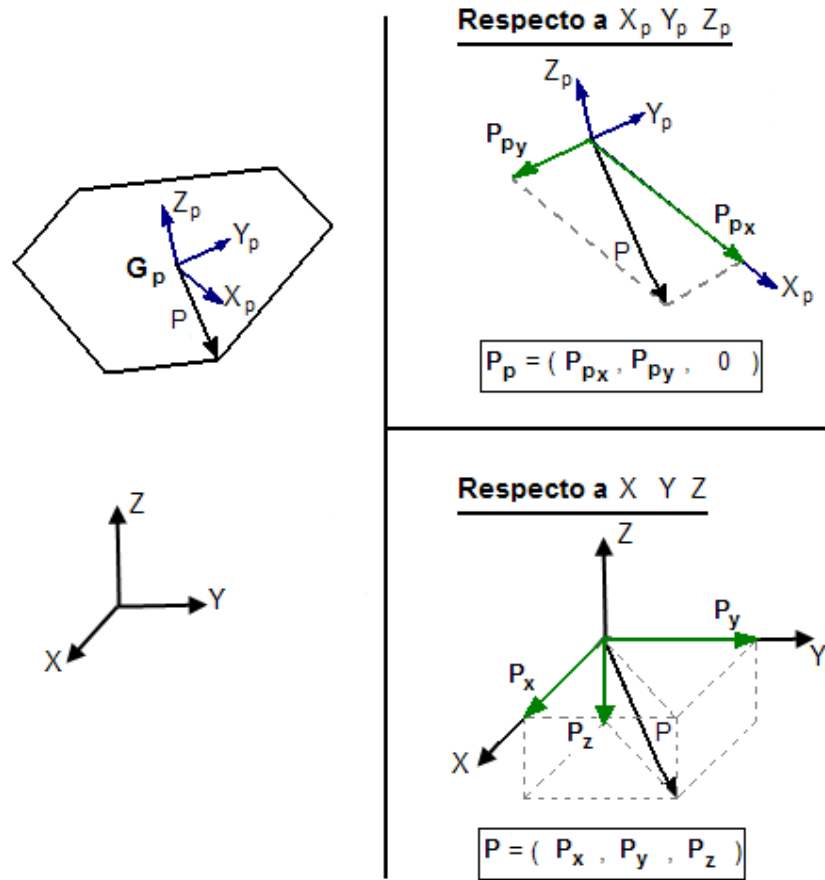


Figura 2.3: Transformación del vector con magnitud  $P$ .

El vector de magnitud  $P$  puede definirse respecto de  $XYZ$  o de  $X_pY_pZ_p$ , ello dependerá de cómo se proyecte este vector. Si se proyecta al sistema  $X_pY_pZ_p$ , se obtiene el vector  $P_p$  (respecto de  $X_pY_pZ_p$ ); si es al sistema  $XYZ$  se obtiene el vector  $P$  (respecto de  $XYZ$ ) (figura 2.3). Una manera sencilla de obtener  $P$  a partir de  $P_p$  y la orientación del polígono en el espacio, es mediante el uso de la matriz de rotación  $R$ , tal como sigue:

$$P = RP_p \tag{2.5}$$

donde los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}_p$  tienen forma de matriz, esto es:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} P_{px} & P_{py} & P_{pz} \end{bmatrix}^T \quad (2.7)$$

La matriz  $\mathbf{R}$  lleva consigo información de la orientación del polígono (ángulos de Euler). El vector  $\mathbf{P}$  podría ser la representación de una posición, velocidad o aceleración angular, definiciones que serán usadas en el desarrollo subsiguiente.

## 2.4 Análisis cinemático

En esta sección la cinemática del mecanismo paralelo es desarrollada con la finalidad de utilizar sus expresiones en el planteamiento posterior de la cinética. Se deducen los términos cinemáticos del actuador necesarios para el análisis por Lagrange, y los parámetros cinemáticos de la plataforma móvil que serán utilizados en el planteamiento de Newton-Euler. Toda la cinemática estará definida mediante vectores y respecto de sistemas coordenados adecuados.

### 2.4.1 Descripción vectorial de la posición

Antes de empezar el desarrollo de la mecánica vectorial, se deben precisar los sistemas coordenados y definir la geometría de las plataformas respecto de dichos sistemas (figura 2.1) para luego aplicar la cinemática y cinética de cuerpos rígidos en el espacio.

El sistema XYZ se define fijo a la plataforma base, siendo este el sistema de referencia (figura 2.4) y el sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  se establece convenientemente como solidario a la plataforma móvil (figura 2.5).



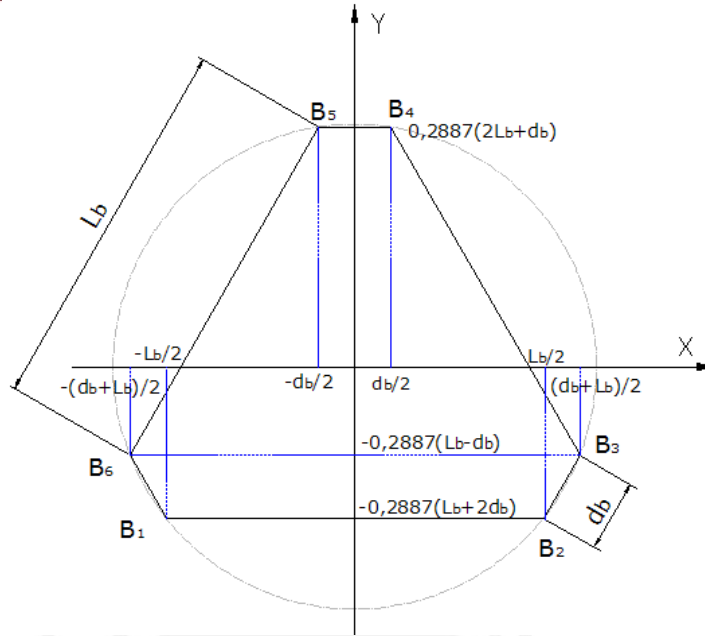


Figura 2.4: Sistema  $XYZ$  fijo a la plataforma base; eje  $Z$  perpendicular a la misma.

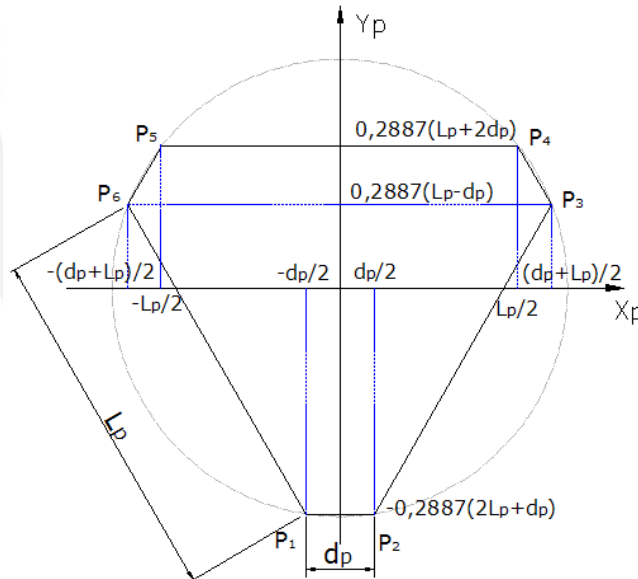


Figura 2.5: Sistema  $X_p Y_p Z_p$  solidario a la plataforma móvil; eje  $Z_p$  perpendicular a la misma.

Los actuadores son los que unirán a ambas plataformas, de tal manera que los extremos del primer actuador se fijen en  $P_1$  y  $B_1$ , los del segundo en  $P_2$  y  $B_2$ , así sucesivamente hasta el sexto actuador.

Luego de haber descrito la geometría de las plataformas en el espacio, es necesario definir convenientemente los vectores que se utilizarán en el planteamiento tanto de la cinemática como de la cinética. La representación del sistema se ilustra en la figura 2.6.

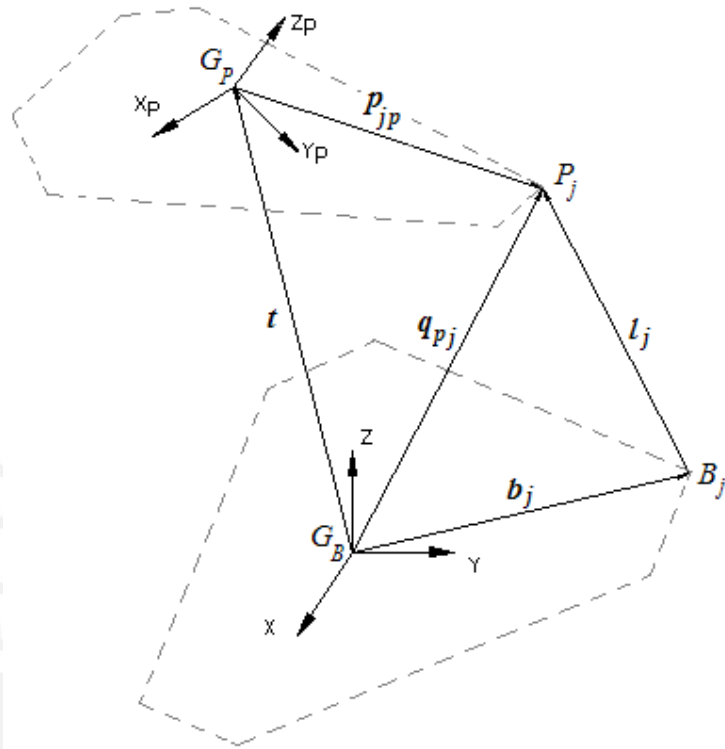


Figura 2.6: Descripción vectorial de la plataforma Stewart-Gough.

Lo que se quiere con el modelo dinámico inverso es obtener las fuerzas necesarias en cada actuador para que la plataforma móvil realice un movimiento de interés. Se había visto que una manera simple de describir el movimiento requerido es definiendo la traslación y la orientación del sistema  $X_p Y_p Z_p$  en el tiempo mediante las ecuaciones (2.2) y (2.3). Dichas ecuaciones forman la matriz de coordenadas generalizadas (2.1) que son dato de entrada en la ecuación dinámica final.

A partir de las figuras 2.4 y 2.5 es posible construir los vectores  $b_j$ , posición del extremo fijo del actuador respecto de  $XYZ$ ; y  $p_{jp}$  que es la posición del extremo móvil del actuador (unido a la plataforma móvil) referida al sistema  $X_p Y_p Z_p$ , cuyos valores respectivamente son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_1 &= \begin{bmatrix} -0,5 \cdot L_b & -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b+2 \cdot d_b) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0,5 \cdot L_b & -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b+2 \cdot d_b) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{b}_3 &= \begin{bmatrix} 0,5 \cdot (d_b+L_b) & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_b-d_b) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{b}_4 &= \begin{bmatrix} 0,5 \cdot d_b & \frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_b+d_b) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{b}_5 &= \begin{bmatrix} -0,5 \cdot d_b & \frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_b+d_b) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{b}_6 &= \begin{bmatrix} -0,5 \cdot (d_b+L_b) & -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b-d_b) & 0 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{1p} &= \begin{bmatrix} -0,5 \cdot d_p & -\frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_p+d_p) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{p}_{2p} &= \begin{bmatrix} 0,5 \cdot d_p & -\frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_p+d_p) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{p}_{3p} &= \begin{bmatrix} 0,5 \cdot (L_p+d_p) & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p-d_p) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{p}_{4p} &= \begin{bmatrix} 0,5 \cdot L_p & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p+2 \cdot d_p) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{p}_{5p} &= \begin{bmatrix} -0,5 \cdot L_p & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p+2 \cdot d_p) & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{p}_{6p} &= \begin{bmatrix} -0,5 \cdot (L_p+d_p) & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p-d_p) & 0 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Una de las finalidades de esta sección es hallar la velocidad y aceleración del extremo móvil del actuador denotado con el símbolo  $P_j$ , que es el punto de unión entre el actuador y la plataforma superior. El vector relacionado a tal punto es  $\mathbf{q}_{pj}$  y puede ser obtenido del diagrama de vectores de la figura 2.6, así se tiene:

$$\mathbf{q}_{pj} = \mathbf{t} + \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \tag{2.10}$$

En forma análoga se obtiene el vector  $I_j$  que representa la longitud del actuador:

$$I_j = q_{pj} - b_j \tag{2.11}$$

### 2.4.2 Parámetros angulares de la plataforma móvil

Para hallar el vector velocidad  $\dot{q}_{pj}$  y el vector aceleración  $\ddot{q}_{pj}$  se aplica la teoría cinemática de cuerpos rígidos donde es preciso determinar la velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, denotados por  $\omega$  y  $\alpha$  respectivamente. Tales vectores son a su vez necesarios para el análisis dinámico de Newton-Euler.

#### A) Deducción del la velocidad angular $\omega$

No es posible encontrar un conjunto de tres ángulos que definan la orientación de un cuerpo y que sus derivadas respecto al tiempo sean directamente  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  y  $\omega_z$ , debido a que los desplazamientos angulares tridimensionales no se comportan como vectores [Yane97]. Sin embargo es posible analizar el movimiento de un cuerpo en términos de los ángulos de Euler, para ello las ecuaciones de movimiento angular se deben expresar en función de tales parámetros [Bedf96].

Los ángulos de Euler permiten definir la velocidad angular como la rapidez con la que se realizan las rotaciones sucesivas  $\psi$  (respecto de  $Z$ ),  $\theta$  (respecto de  $Y'$ ) y  $\phi$  (respecto de  $X''$ ). Para ilustrar esto, se empieza con el sistema móvil coincidente con el sistema de referencia y luego, mediante las rotaciones mencionadas, se llega a la orientación final (figura 2.7).

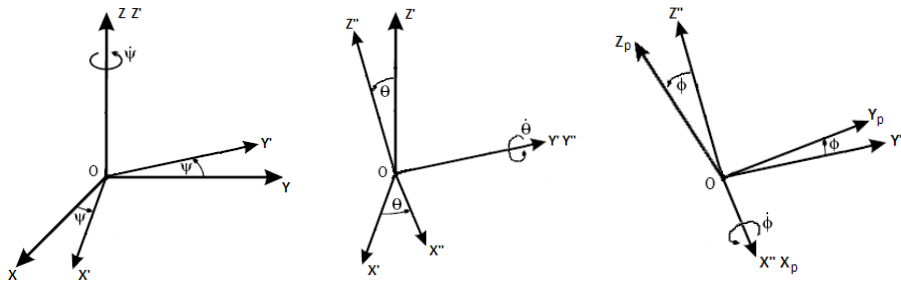


Figura 2.7: Rapidez de las rotaciones de Euler según el sistema de rotación Z-Y-X.

Los orígenes de los sistemas  $XYZ$  y  $X_pY_pZ_p$  pueden suponerse en un mismo punto (figura 2.8), debido a que la translación del sistema móvil  $X_pY_pZ_p$  no influye en la deducción del vector velocidad angular, sólo interesa la orientación de la misma respecto del sistema  $XYZ$ .

Entonces el vector velocidad angular depende del sistema coordenado al cual se proyecten las magnitudes  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$ , si se proyecta en  $XYZ$  se obtiene  $\omega$ ; y si es en  $X_pY_pZ_p$  se obtiene  $\omega_p$ .

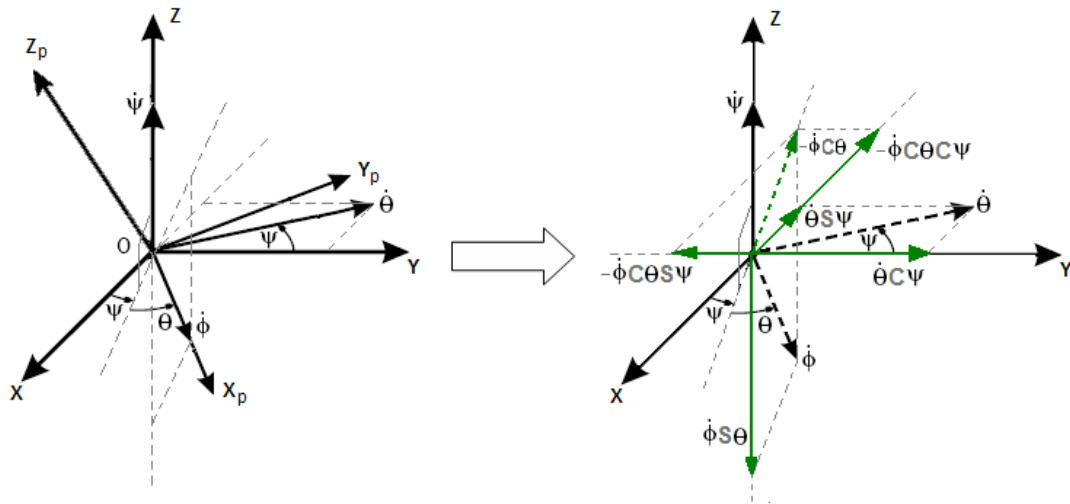


Figura 2.8: Proyección de  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  sobre  $XYZ$ .

Justamente la obtención del  $\omega$  se ilustra en la figura 2.8, y el valor de las componentes en  $XYZ$  serían:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}C\theta \cdot C\psi - \dot{\theta}S\psi \\ \dot{\phi}C\theta \cdot S\psi + \dot{\theta}C\psi \\ \dot{\psi} - \dot{\phi}S\theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En forma análoga se obtiene  $\omega_p$ :

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \omega_{p_x} \\ \omega_{p_y} \\ \omega_{p_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}S\theta \\ \dot{\psi}S\theta \cdot C\theta + \dot{\theta}C\phi \\ \dot{\psi}C\theta C\phi - \dot{\theta}S\phi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Además la matriz de rotación  $\mathbf{R}$  debe poder ser aplicada para la obtención de  $\omega$  a partir de  $\omega_p$ , esto es:

$$\omega = \mathbf{R} \omega_p \quad (2.14)$$

Como se puede apreciar, tanto el vector  $\omega_p$  como el  $\omega$  dependen del sistema de rotación elegido, que en este caso es Z-Y-X, tal como se ha definido anteriormente (subcapítulo 2.3.2). Sin embargo es posible escoger cualquier otro de los sistemas de Euler, y la deducción será de la misma forma.

### B) Deducción del la aceleración angular $\alpha$

La aceleración angular de la plataforma puede obtenerse simplemente con derivar respecto al tiempo la ecuación de la velocidad angular (2.13), tal como sigue:

$$\alpha_p = \frac{d}{dt}(\omega_p) = \dot{\omega}_p = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \psi \dot{\theta} C\theta - \dot{\psi} S\theta \\ \ddot{\theta} C\phi - \dot{\phi} \dot{\theta} S\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} S\phi S\theta + \dot{\psi} \dot{\phi} C\theta C\phi + \dot{\psi} C\theta S\phi \\ -\ddot{\theta} S\phi - \dot{\phi} \dot{\theta} C\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} C\phi S\theta - \dot{\psi} \dot{\phi} C\theta S\phi + \dot{\psi} C\theta C\phi \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde  $\alpha_p$  es la aceleración angular de la plataforma superior referida al sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$ .

Para obtener la expresión de la aceleración angular referida al sistema base, se utiliza la matriz de rotación (2.4), esto es:

$$\alpha = \mathbf{R} \alpha_p \quad (2.16)$$

#### 2.4.3 Parámetros cinemáticos en la plataforma móvil

Debido a que las variables angulares fueron obtenidas, es posible hallar los vectores velocidad y aceleración del punto  $P_j$  (figura 2.6), representados por los símbolos  $\dot{q}_{pj}$  y  $\ddot{q}_{pj}$  respectivamente, definidos respecto del sistema fijo XYZ.

Considerando a la plataforma superior como cuerpo rígido en análisis, de la cinemática de cuerpos rígidos se tiene la siguiente expresión para  $\dot{\mathbf{q}}_{p_j}$  :

$$\dot{\mathbf{q}}_{p_j} = \dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \quad (2.17)$$

El término  $\dot{\mathbf{t}}$  es el vector velocidad del centro geométrico de la plataforma móvil obtenido al derivar el vector posición  $\mathbf{t}$  que se muestra en la figura 2.6, y se denota de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{t}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T \quad (2.18)$$

De igual forma se obtiene de la cinemática el vector aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}_{p_j}$  :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{p_j} = \ddot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp}) \quad (2.19)$$

El término  $\ddot{\mathbf{t}}$  es el vector aceleración del centro geométrico de la plataforma móvil, y se denota como sigue:

$$\ddot{\mathbf{t}} = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}]^T \quad (2.20)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.19) describen la cinemática de los puntos  $P_j$  de la plataforma móvil en su movimiento general.

Los vectores velocidad y aceleración también pueden ser obtenidos partiendo de los mismos vectores pero referidos al sistema móvil, ello se efectúa con la utilización de la matriz de rotación  $\mathbf{R}$ . Se parte de la definición de la velocidad y aceleración referidas al sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$ , esto es:

$$\dot{\mathbf{q}}_{p_{jp}} = \dot{\mathbf{t}}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{p}_{jp} \quad (2.21)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{p_{jp}} = \ddot{\mathbf{t}}_p + \boldsymbol{\alpha}_p \times \mathbf{p}_{jp} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{p}_{jp}) \quad (2.22)$$

Para proyectar los vectores (2.21) y (2.22) sobre los ejes del sistema fijo, simplemente se premultiplica en cada lado de la ecuación la matriz de rotación  $\mathbf{R}$ , y mediante un breve procedimiento matemático expuesto en Desarrollo A (subcapítulo 2.6), se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{q}}_{p_{jp}} = \mathbf{R}\left[\dot{\mathbf{t}}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{p}_{jp}\right] \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}}_{p_j} = \dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\mathbf{p}_{jp} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}}_{p_{jp}} = \mathbf{R}\left[\ddot{\mathbf{t}}_p + \boldsymbol{\alpha}_p \times \mathbf{p}_{jp} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{p}_{jp})\right] \quad \rightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}}_{p_j} = \ddot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}\mathbf{p}_{jp} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\mathbf{p}_{jp}) \quad (2.24)$$

Como se aprecia, las expresiones resultantes son las ecuaciones (2.17) y (2.19) obtenidas con anterioridad, de esta manera se demuestra que la matriz de rotación de Euler se aplica también para velocidades y aceleraciones.

Con la finalidad de introducir  $\dot{\mathbf{q}}_{p_j}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_{p_j}$  en el análisis dinámico, éstas deben tener forma matricial. Entonces a partir de las ecuaciones (2.17) y (2.19) se tiene:

$$\dot{\mathbf{q}}_{p_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.25)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{p_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{t}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R}\mathbf{p}_{jp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}\tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R}\mathbf{p}_{jp} \quad (2.26)$$

La deducción de las expresiones (2.25) y (2.26) se encuentra en Desarrollo B (subcapítulo 2.6).

#### 2.4.4 Parámetros cinemáticos en el actuador

Con la finalidad de determinar la expresión de energía del actuador y las fuerzas generadas debido a la masa del mismo, se debe hallar el vector velocidad angular del actuador, y los vectores de la velocidad del centro de masa del vástago y del cilindro, mostrado en la figura 2.9.



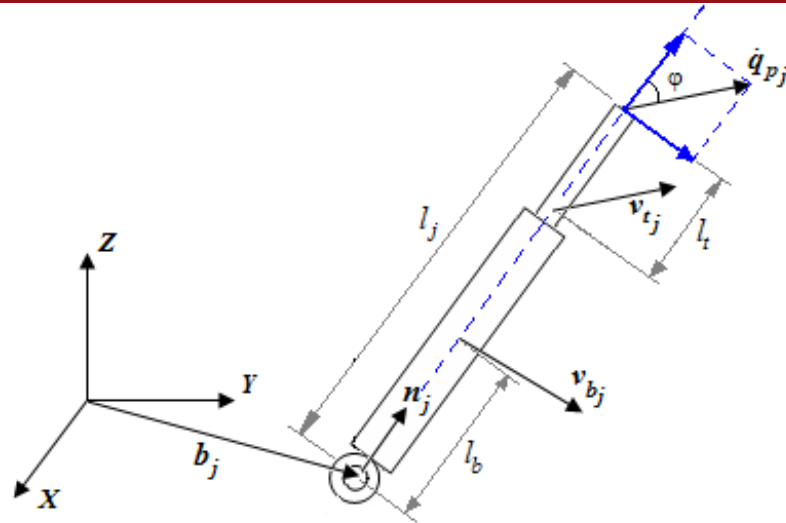


Figura 2.9: Cinemática actuador hidráulico<sup>2</sup>.

Antes de empezar se define el vector longitud del actuador denotado por  $l_j$  de magnitud  $l_j$ , y el vector unitario en el eje axial del actuador, definido como  $n_j$ . Ambos términos se expresan a continuación:

$$l_j = q_{pj} - b_j \tag{2.27}$$

$$l_j = \sqrt{(l_j^T l_j)} \tag{2.28}$$

$$n_j = \frac{l_j}{l_j} \tag{2.29}$$

Para la deducción de la fuerza generalizada, entre otros términos, se utiliza la magnitud escalar  $\dot{l}_j$  que representa la velocidad a lo largo del eje axial del actuador, el cual se deduce directamente de la figura 2.9 como el producto punto entre  $n_j$  y  $\dot{q}_{pj}$ , esto es:

$$\dot{l}_j = n_j^T \dot{q}_{pj} \tag{2.30}$$

<sup>2</sup> En la figura, la dirección de las fuerzas están graficadas en el espacio.

Como se aprecia en la figura 2.9, la velocidad angular  $\omega_{L_j}$  se halla en forma directa con la componente  $\|\dot{\mathbf{q}}_{p_j}\| \text{sen}(\varphi)$ , de manera que:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{q}}_{p_j}\| \text{sen}(\varphi) &= \|\omega_{L_j}\| l_j \\ \|\omega_{L_j}\| &= \frac{\|\dot{\mathbf{q}}_{p_j}\| \text{sen}(\varphi)}{l_j} \end{aligned}$$

Por propiedad de producto vectorial, se tiene que  $\|\dot{\mathbf{q}}_{p_j}\| \text{sen}(\varphi) = \|\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}\|$ , entonces:

$$\|\omega_{L_j}\| = \frac{\|\dot{\mathbf{q}}_{p_j}\| \text{sen}(\varphi)}{l_j} = \frac{\|\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}\|}{l_j}$$

Y finalmente, expresando la velocidad angular como vector, se tiene:

$$\omega_{L_j} = \frac{\mathbf{n}_j \times \dot{\mathbf{q}}_{p_j}}{l_j} = \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}}{l_j} \quad (2.31)$$

Para la deducción de  $\mathbf{v}_{t_j}$  y  $\mathbf{v}_{b_j}$  se parte de la figura 2.9, donde por cinemática de cuerpos rígidos se tiene:

$$\mathbf{v}_{t_j} = \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + \omega_{L_j} \times (-l_t \mathbf{n}_j)$$

$$\mathbf{v}_{b_j} = \omega_{L_j} \times (l_b \mathbf{n}_j)$$

Para poder desarrollar las expresiones de la dinámica, los vectores  $\mathbf{v}_{t_j}$  y  $\mathbf{v}_{b_j}$  deben expresarse en forma compacta, para lo cual se realizan manejos matemáticos que finalmente derivan en las ecuaciones (2.32) y (2.33), cuya deducción puede verse en Desarrollo C (subcapítulo 2.6).

$$\mathbf{v}_{t_j} = \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v}_{b_j} = \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \quad (2.33)$$

Hasta ahora el vector velocidad angular ha sido definido respecto del sistema XYZ, sin embargo, es posible analizar el movimiento desde un sistema  $X^*Y^*Z^*$  con origen en la base del actuador y solidario al movimiento del mismo (figura 2.10). Para ello deben definirse vectores unitarios ortogonales entre si, esto es:

$$u_{x^*j} = \frac{b_j \times q_{pj}}{\|b_j \times q_{pj}\|} \quad u_{z^*j} = n_j \quad u_{y^*j} = u_{z^*j} \times u_{x^*j}$$

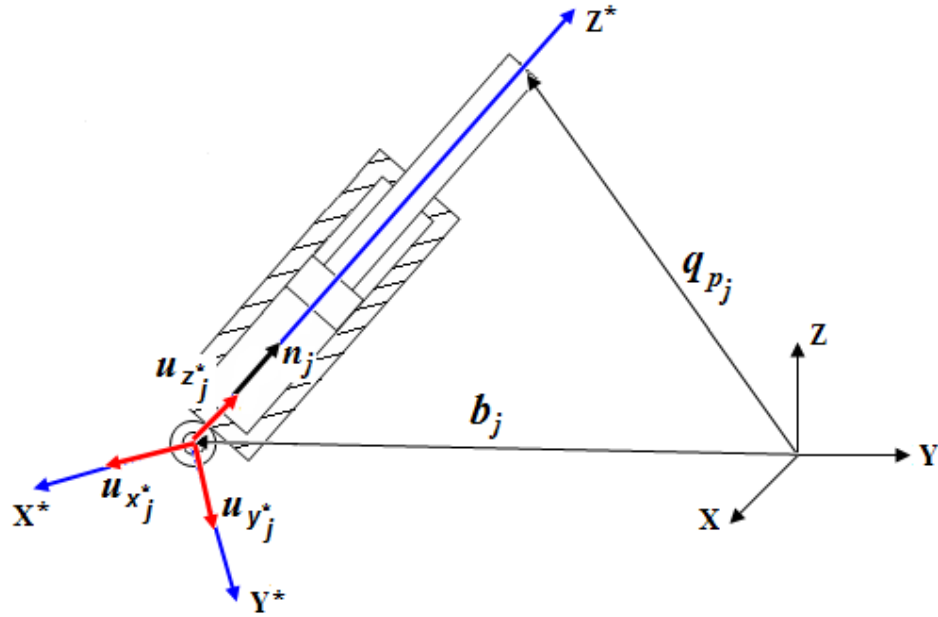


Figura 2.10: Sistema  $X^*Y^*Z^*$  con origen en la base y solidario al movimiento del actuador.

Desde el marco de referencia  $X^*Y^*Z^*$ , el vector velocidad angular se define como  $\omega_{Lj}^*$ , esto es:

$$\omega_{Lj}^* = \begin{pmatrix} \omega_{Lx_j}^* \\ \omega_{Ly_j}^* \\ \omega_{Lz_j}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{Lj} \cdot u_{x^*j} \\ \omega_{Lj} \cdot u_{y^*j} \\ \omega_{Lj} \cdot u_{z^*j} \end{pmatrix}$$

## 2.5 Análisis dinámico

La derivación del modelo dinámico inverso de la plataforma Stewart-Gough será dividida en dos partes, el movimiento de la plataforma superior y el movimiento de los seis actuadores lineales, conformando así la estructura completa. Utilizar sólo un método de análisis es complicado debido a la geometría del mecanismo, por ello se plantea un método conveniente para cada parte del mismo. Para el movimiento de los actuadores, se plantea que la fuerza de restricción en la articulación ubicada en el extremo móvil del actuador sea obtenida a través de la formulación de Lagrange; luego, el análisis es completado con la modelación dinámica de la plataforma superior, la cual es obtenida convenientemente mediante el método de Newton-Euler.

### 2.5.1 Consideraciones de análisis

La dinámica del actuador será desarrollada mediante la formulación de Lagrange, en la cual el primer paso es obtener el valor de la energía cinética del actuador. Por ello a continuación se plantean dos formas de ver la ecuación de la energía cinética, la primera se desarrolla según la dinámica vectorial de cuerpos rígidos, y la segunda es una ecuación de energía alternativa planteada por Guo y Li [Guo06] que supone una simplificación del modelo dinámico del actuador.

Por otro lado, la plataforma Stewart-Gough, al ser utilizada en la simulación de la marcha humana, debe soportar la fuerza que la persona ejerce al apoyar el pie a lo largo de su caminar. Por ello dicha influencia se considera como una fuerza externa  $f_c$  aplicada sobre la plataforma, donde la magnitud y dirección están definidas en el tiempo. Además es importante considerar que los efectos de la fricción no serán incluidos en las ecuaciones dinámicas.

#### A) Energía cinética del actuador

El actuador puede ser considerado como un cuerpo rígido que se mueve alrededor de un punto fijo en el espacio tridimensional, en este sentido la energía cinética del cuerpo se expresaría en función de su velocidad angular y los momentos de inercia. Sin embargo, debido a que el vástago del actuador presenta un movimiento axial,

se debe considerar la energía cinética lineal del centro de masa de este elemento. Considerando los movimientos descritos, se tendrá:

$$T_j = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{t_j}^T m_t \mathbf{v}_{t_j} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{L_j}^T (\mathbf{I}_j) \boldsymbol{\omega}_{L_j} \quad (2.34)$$

En la expresión (2.34) el término  $\frac{1}{2} \mathbf{v}_{t_j}^T m_t \mathbf{v}_{t_j}$  representa la energía del vástago, y  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{L_j}^T (\mathbf{I}_j) \boldsymbol{\omega}_{L_j}$  es la energía asociada con la rotación del actuador completo (cilindro y vástago) respecto de un punto fijo. El término  $\mathbf{I}_j$  es el tensor de inercia del actuador respecto de su articulación fija y está definido en el sistema coordenado XYZ, lo cual implica que los momentos y productos de inercia del tensor son variables, y resultaría necesario determinar sus valores como funciones del tiempo. Por lo tanto es más conveniente utilizar los ejes  $X^*Y^*Z^*$  con origen en la base del actuador, garantizando que sus momentos y productos de inercia mantendrán los mismos valores durante el movimiento. Considerando lo dicho la ecuación de la energía se redefine como:

$$T_j = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{t_j}^T m_t \mathbf{v}_{t_j} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{L_j}^{*T} (\mathbf{I}_j^*) \boldsymbol{\omega}_{L_j}^* \quad (2.35)$$

donde  $\mathbf{I}_j^*$  es constante y es la suma del tensor de inercia del actuador más la del vástago, respecto de  $X^*Y^*Z^*$ .

## B) Energía cinética del actuador desarrollada por Guo y Li

El término  $\boldsymbol{\omega}_{L_j}^*$ , como se vio en el subcapítulo 2.4.4, se define mediante los vectores unitarios del sistema  $X^*Y^*Z^*$ . En consecuencia, la expresión (2.35) es más compleja puesto que derivar el término  $\boldsymbol{\omega}_{L_j}^*$  representa un mayor costo computacional, dada su extensión con el aumento de términos dependientes de  $q_{p_j}$  y  $\dot{q}_{p_j}$ . Por otro lado la expresión (2.34) no es derivable en forma sencilla, ya que el término  $\mathbf{I}_j$  es variable y depende del vector  $q_{p_j}$ . Sin embargo, en el trabajo de Guo y Li [Guo06] se plantea una expresión de energía alternativa (2.36) que simplifica

las operaciones posteriores y permite una factorización de términos de forma conveniente, lo cual en conjunto mejora el denominado costo computacional.

$$T_{GUO_j} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{t_j}^T m_t \mathbf{v}_{t_j} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{L_j}^T (I_t + I_b) \boldsymbol{\omega}_{L_j} \quad (2.36)$$

En la ecuación (2.36) los términos escalares  $I_t$  e  $I_b$  son las matrices de inercia del vástago y el cilindro respectivamente, y son componentes del tensor de inercia  $\mathbf{I}_j^*$ , donde el actuador es modelado como un cuerpo de revolución macizo, esto es:

$$\mathbf{I}_j^* = \begin{pmatrix} I_x^* & 0 & 0 \\ 0 & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_t + I_b & 0 & 0 \\ 0 & I_t + I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los momentos de inercia del tensor  $\mathbf{I}_j^*$  son constantes debido a que se define respecto del sistema rotatorio  $X^*Y^*Z^*$ , y sus productos de inercia son cero ya que el sistema  $X^*Y^*Z^*$  coincide con los ejes principales de inercia del actuador (figura 2.10).

Las ecuaciones de movimiento y el valor de la inercia del actuador con las cuales se ha realizado la grafica comparativa de energías cinéticas  $T_{GUO_j}$  y  $T_j$  (figura 2.11), se describen en los subcapítulos 3.3.5 y 3.2 respectivamente.

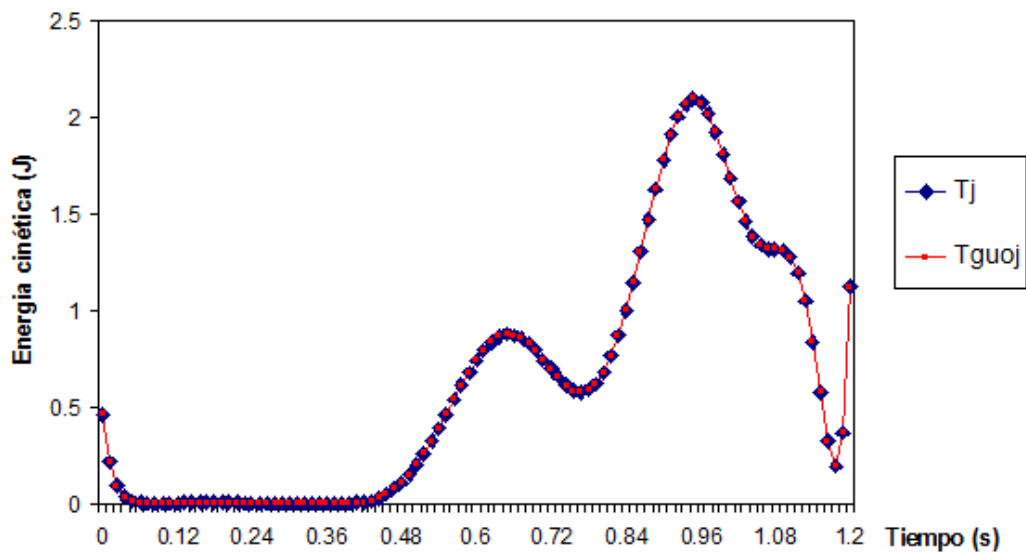


Figura 2.11: Comparación del valor  $T_{GUO_j}$  respecto a la energía cinética  $T_j$ .

Como se puede apreciar, la diferencia entre la energía cinética  $T_{Guo_j}$  respecto de  $T_j$  es despreciable, posee un error porcentual máximo de 0,0621%, lo cual se considera una aproximación aceptable y puede concluirse que ambas expresiones generan los mismos resultados. Debido a la ventaja que ofrece la simplificación de Guo y Li para expresar las ecuaciones en forma compacta y facilitar la factorización de términos, la energía cinética  $T_{Guo_j}$  será usada en el desarrollo de la formulación de Lagrange (modelación dinámica del actuador).

### 2.5.2 Dinámica del actuador

El objetivo es poder hallar una ecuación que relacione la fuerza generada por la presión hidráulica en el actuador (denotada como  $f_j$ ), con el vector fuerza que se aplica a la plataforma móvil a través de la articulación (denotado como  $f_{p_j}$ ), tal como se muestra en la figura 2.12.

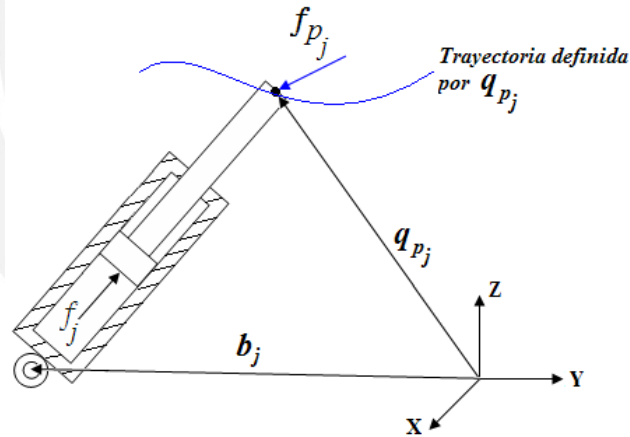


Figura 2.12: Coordenada generalizada para el actuador.

Una manera de hacerlo es analizando al actuador como un cuerpo rígido en movimiento alrededor de un punto fijo por el método clásico de Newton-Euler. Ello implica un procedimiento recursivo en el que se obtienen vectores relacionados a la cinemática y consecuentemente a la cinética; sin embargo las ecuaciones resultantes son de estructura compleja que a su vez aumenta con los grados de libertad [Barr97]. En conclusión utilizar este método no resulta práctico

considerando además que son seis actuadores, lo cual dificulta su cálculo y su implementación como algoritmo.

Es conocido que la aplicación del principio del trabajo y la energía simplifica considerablemente la solución de muchos problemas que implican fuerzas, desplazamientos y velocidades, aunque presenta algunas desventajas como el no poder determinar de manera directa una aceleración. Es por ello que para calcular los parámetros mencionados, el principio del trabajo y la energía debe complementarse con las leyes de Newton. Un método que posibilita tal unificación es la formulación de Lagrange, donde se han utilizado las leyes de Newton y el Principio del Trabajo Virtual en la obtención de una ecuación definida en el marco energético. La desventaja de este método es su alto costo computacional cuando se implementa en un sistema de control, el cual resulta ser más crítico conforme aumentan los grados de libertad [Yane97].

Sin embargo, como puede verse en la figura 2.12, el grado de libertad del actuador en su movimiento es el vector  $q_{p_j}$ , y por tanto se tendría una sola ecuación de Lagrange, en términos vectoriales. Debido a que  $q_{p_j}$  es un vector conocido y define el movimiento del extremo del vástago, en el análisis del actuador dicho término será la coordenada generalizada en la expresión de Lagrange. Por tanto la formulación de Lagrange será aplicada, no sólo por la facilidad de describir las ecuaciones de movimiento, sino también por su simplicidad y por la posibilidad de eliminar las fuerzas de restricción [Well72].

La ecuación de Lagrange para un sistema dinámico cualquiera, puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{q_r} \quad (2.37)$$

donde:

$T$  : Energía cinética del cuerpo.

$q_r$  : Conjunto de coordenadas generalizadas o grados de libertad.

$F_{q_r}$  : Suma de fuerzas generalizadas no conservativas que actúan en el sistema.



### A) Cálculo de la componente inercial

La parte inercial de la formulación de Lagrange corresponde al termino izquierdo de la ecuación (2.37), donde la energía será definida como  $T_{GUO_j}$  (ecuación 2.36), la coordenada generalizada como  $q_{pj}$ , y las fuerzas generalizadas se denotan por  $Q_j$ . Entonces, la ecuación (2.37) se expresa ahora de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \dot{q}_{p_j}} \right) - \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial q_{p_j}} = Q_j \quad (2.38)$$

$$T_{GUO_j} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{t_j}^T m_t \mathbf{v}_{t_j} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{L_j}^T (I_t + I_b) \boldsymbol{\omega}_{L_j} \quad (2.36)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.31) y (2.32) en (2.36), se obtiene:

$$T_{GUO_j} = \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \right)^T m_t \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}}{l_j} \right) \quad (2.39)$$

Luego, haciendo uso del álgebra de matrices, la ecuación (2.39) es reducida con la finalidad de facilitar las operaciones posteriores, tal procedimiento puede ser revisado en Desarrollo D (subcapítulo 2.6) y el resultado final se muestra a continuación:

$$T_{GUO_j} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \quad (2.40)$$

En la ecuación (2.40), las matrices  $\mathbf{M}_{a_j}$  y  $\mathbf{M}_{b_j}$  son respectivamente:

$$\mathbf{M}_{a_j} = \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \quad (2.41)$$

$$\mathbf{M}_{b_j} = \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) = (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right)^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) \quad (2.42)$$

Uno de los términos inerciales de la expresión (2.38) se obtiene aplicando la derivada parcial respecto de  $\dot{q}_{p_j}$  a la ecuación (2.40), donde resulta:

$$\frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \dot{q}_{p_j}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{p_j}} \left( \frac{1}{2} (\dot{q}_{p_j}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{p_j}) \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{p_j}} \left( \frac{1}{2} (\dot{q}_{p_j}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{q}_{p_j}) \right) \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{p_j}} \left( \frac{1}{2} (\dot{q}_{p_j}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{p_j}) \right) = \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{p_j} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \dot{q}_{p_j}} = (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \dot{q}_{p_j} \quad (2.45)$$

A su vez la ecuación (2.43) debe ser derivada respecto del tiempo, por consiguiente se plantea:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \dot{q}_{p_j}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \dot{q}_{p_j} + (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \ddot{q}_{p_j} \quad (2.46)$$

Los parámetros que dependen del tiempo deben ser definidos con el fin de derivar una expresión respecto al tiempo. Como se mostró en la sección 2.3, los parámetros de entrada en el presente análisis son la trayectoria y orientación de la plataforma móvil (coordenadas generalizadas), los cuales se definen en el dominio del tiempo. Por tanto, como puede apreciarse a lo largo del planteamiento, los términos  $\mathbf{M}_{a_j}$  y  $\mathbf{M}_{b_j}$  dependen de las coordenadas generalizadas ya mencionadas y sus derivadas podrían calcularse por diferenciación simbólica de forma sencilla con ayuda de un computador.

Sin embargo dichas derivadas también pueden deducirse analíticamente, de esta manera se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) &= \left( \frac{2m_l l_t}{l_j^2} \right) \left( \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j^T \right) \\ &\quad - \left( \frac{m_l l_t^2}{l_j^3} \right) \left( 2\mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{q}_{p_j} \mathbf{n}_j^T \right) \\ &\quad - \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) \left( 2\dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{q}_{p_j} \mathbf{n}_j^T + \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

La ecuación (2.47) fue desarrollada en [Guo06], por tanto no ha sido deducida en la presente tesis, sin embargo ha sido validada con matemática simbólica mediante el uso del software Mathcad.

Finalmente reemplazando las ecuaciones (2.41), (2.42) y (2.47) en la ecuación (2.46) se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \dot{q}_{p_j}} \right) = & \left( \left( \frac{2m_l l_t}{l_j^2} \right) \left( \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j^T \right) \right. \\ & - \left( \frac{m_l l_t^2}{l_j^3} \right) \left( 2\mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j^T \right) \\ & - \left. \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) \left( 2\dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j^T + \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \right) \right) \dot{q}_{p_j} \\ & + \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_l \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b) (\tilde{\mathbf{n}}_j)^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j^2} \right) \right) \ddot{q}_{p_j} \end{aligned} \quad (2.48)$$

El término de la ecuación (2.38) que falta determinar resulta de aplicar a la ecuación (2.40) la derivada parcial respecto de  $q_{p_j}$ , de esta manera se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial q_{p_j}} = & \left( \frac{m_l l_t}{l_j^2} \right) \left( \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \dot{q}_{p_j} + 2\mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \dot{q}_{p_j} - 3\mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \right) \\ & - \left( \frac{m_l l_t^2}{l_j^3} \right) \left( \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \dot{q}_{p_j} + \dot{q}_{p_j} \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j - 2\mathbf{n}_j \mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \right) \\ & - \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) \left( \mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \dot{q}_{p_j} + \mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \dot{q}_{p_j} - 2\mathbf{n}_j \dot{q}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \mathbf{n}_j^T \dot{q}_{p_j} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Similar a la ecuación (2.47), la ecuación (2.49) ha sido deducida en [Guo06], por tanto no ha sido desarrollada en la presente tesis, sin embargo ha sido validada con el uso del software Mathcad mediante diferenciación simbólica.

Notar que en la ecuación (2.49) se aplica la derivada parcial de  $T_{GUO_j}$  respecto del vector  $q_{p_j}$ , lo cual se entiende de la siguiente manera (ver tabla 2.2):

$$\frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \mathbf{q}_{p_j}} = \left( \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial q_{p_jx}} \quad \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial q_{p_jy}} \quad \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial q_{p_jz}} \right)^T \quad (2.50)$$

## B) Cálculo de la fuerza generalizada

Ahora debe hallarse la fuerza generalizada  $Q_j$  correspondiente al término derecho de la ecuación (2.38), para hallar su valor deben considerarse solamente las fuerzas impulsoras que se ejercen sobre el actuador. Fuerzas tales como la centrífuga o la de coriolis son consideradas en el término izquierdo de la ecuación (2.38) donde automáticamente se tiene en cuenta todas las fuerzas inerciales [Well72].

La fuerza generalizada es una magnitud de naturaleza tal que el producto punto  $Q_j \cdot \delta q_{p_j}$  es el trabajo hecho por las fuerzas impulsoras [Well72]. Asimismo la suma vectorial total de tales fuerzas será denotada por  $\sum F_{actuador_j}$ , y se expresa de la siguiente manera:

$$\sum F_{actuador_j} = f_j + m_i g + m_b g + f_{p_j} \quad (2.51)$$

En la ecuación (2.51),  $f_j$  es el vector fuerza generado al interior del actuador (por la presión hidráulica),  $m_i g$  y  $m_b g$  son las fuerzas debido a la masa de los componentes del actuador, y  $f_{p_j}$  es la fuerza de restricción en la articulación ubicada en el extremo móvil del actuador (punto de unión con la plataforma móvil), la reacción  $A_j$  no es considerada en el análisis ya que no realiza trabajo. Los términos descritos se ilustran en la figura 2.13.

Respecto a la influencia de las masas del actuador en el análisis dinámico, existen planteamientos que sugieren considerar un solo centro de masa para el actuador completo [Yane97]. En este caso debe notarse que el vástago del actuador presentará movimiento axial lo cual hace que el centro de masa total varíe de posición a lo largo del eje axial del actuador. Este inconveniente es solucionado al definir dos centros de masa como se muestra en la figura 2.13.

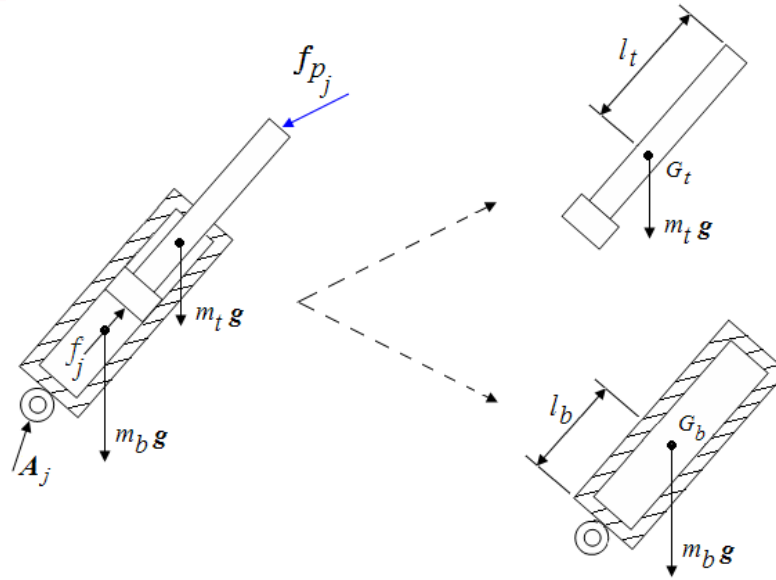


Figura 2.13: Cinética del actuador.

Partiendo del concepto de la formulación de Lagrange (2.36), la expresión de la fuerza generalizada se desarrolla en función de las fuerzas impulsoras en la forma siguiente:

$$Q_j = Q_{f_j} + Q_{m_t j} + Q_{m_b j} + Q_{f_{p_j}} \quad (2.52)$$

$$Q_j = \left( \frac{\partial s_{f_j}}{\partial q_{p_j}} f_j \right) + \left( \frac{\partial s_{m_t j}}{\partial q_{p_j}} m_t g \right) + \left( \frac{\partial s_{m_b j}}{\partial q_{p_j}} m_b g \right) + \left( \frac{\partial s_{f_{p_j}}}{\partial q_{p_j}} f_{p_j} \right) \quad (2.53)$$

donde  $s_{f_j}$ ,  $s_{m_t j}$ ,  $s_{m_b j}$ ,  $s_{f_{p_j}}$  son términos referidos a los desplazamientos relativos para cada fuerza aplicada al actuador, tal como se ilustra en la figura 2.14.

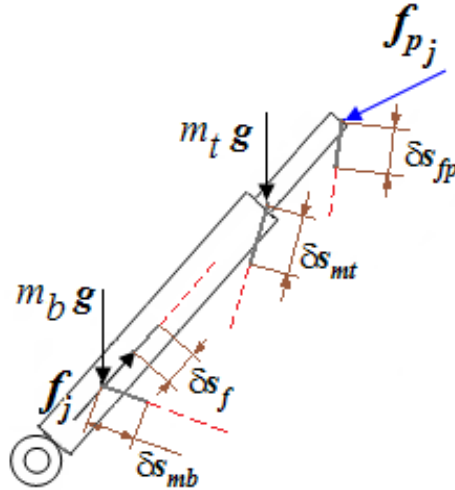


Figura 2.14: Fuerzas y desplazamientos pequeños en actuador<sup>3</sup>.

Basado en el principio del Trabajo Virtual, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si realizan el mismo trabajo virtual. Por consiguiente, la fuerza generalizada  $Q_{f_j}$  se proyecta en la variación de la coordenada generalizada para obtener el trabajo virtual de la fuerza  $f_j$ , que a su vez se iguala al trabajo virtual de la fuerza  $f_j$  (figura 2.14), esto es:

$$\delta s_{f_j} = \delta l_j$$

$$\delta W_j = Q_{f_j}^T \delta q_{p_j} = f_j \delta l_j \tag{2.54}$$

El trabajo virtual del vector fuerza  $f_j$  se define en forma escalar como  $f_j \delta l_j$ . A su vez el término  $\delta l_j$  puede expresarse de la siguiente forma:

$$\delta l_j = n_j^T \delta q_{p_j} \tag{2.55}$$

Reemplazando la ecuación (2.55) en (2.54), se tendrá:

$$\delta W_j = Q_{f_j}^T \delta q_{p_j} = f_j (n_j^T \delta q_{p_j}) = (f_j n_j)^T \delta q_{p_j}$$

<sup>3</sup> En la figura, los desplazamientos pequeños están definidos y graficados en el espacio.

De esta expresión obtenida, se deduce finalmente el valor de la fuerza generalizada  $Q_{f_j}$ , que es:

$$Q_{f_j} = f_j n_j \quad (2.56)$$

A los términos  $Q_{m_{tj}}$  y  $Q_{m_{bj}}$  les corresponden respectivamente los vectores desplazamiento  $s_{m_{tj}}$  y  $s_{m_{bj}}$ . Para hallar  $Q_{m_{tj}}$  se parte del principio del trabajo virtual y luego se utiliza la ecuación (2.32). En forma similar a la deducción de  $Q_{f_j}$ , se llega a la siguiente expresión (ver procedimiento en Desarrollo F, subcapítulo 2.6):

$$Q_{m_{tj}} = \left( \mathbf{I} + \frac{l_j \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) m_t g \quad (2.57)$$

En forma análoga, partiendo del principio del trabajo virtual y el uso de la expresión (2.33), se obtiene la fuerza generalizada  $Q_{m_{bj}}$ , cuyo resultado final es el siguiente (ver demostración en Desarrollo F, subcapítulo 2.6):

$$Q_{m_{bj}} = \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) m_b g \quad (2.58)$$

El fundamento del procedimiento para deducir  $Q_{f_{pj}}$  no es distinto a los anteriores, de donde se obtiene (ver procedimiento en Desarrollo F, subcapítulo 2.6):

$$Q_{f_{pj}} = f_{pj} \quad (2.59)$$

### C) Ecuación de Lagrange

La finalidad de esta sección es obtener la fuerza que el actuador transmite a la plataforma, denotada por  $f_{pj}$ . Para ello se despeja tal término en la ecuación (2.52), donde la incógnita escalar  $f_j$  se encuentra incluida en el vector  $Q_{f_j}$ . Al reemplazar la ecuación (2.59) y realizar el despeje, se obtiene:

$$f_{pj} = Q_j - Q_{f_j} - Q_{m_{tj}} - Q_{m_{bj}} \quad (2.60)$$

De la ecuación de Lagrange (2.38), el término  $Q_j$  puede expresarse de la forma siguiente:

$$Q_j = \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j})\dot{\mathbf{q}}_{p_j} + (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j})\ddot{\mathbf{q}}_{p_j} - \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \mathbf{q}_{p_j}} \quad (2.61)$$

Con la finalidad de agrupar términos comunes, se define  $C_{a_j}$  como:

$$C_{a_j} = \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j})\dot{\mathbf{q}}_{p_j} - \frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \mathbf{q}_{p_j}} \quad (2.62)$$

Así la ecuación (2.61) pasa a ser:

$$Q_j = (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j})\ddot{\mathbf{q}}_{p_j} + C_{a_j} \quad (2.63)$$

Reemplazando la ecuación (2.63) en la ecuación (2.60), se obtiene:

$$\mathbf{f}_{p_j} = (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j})\ddot{\mathbf{q}}_{p_j} + C_{a_j} - (Q_{f_j} + Q_{m_j} + Q_{mb_j}) \quad (2.64)$$

Con la finalidad de poder deducir la dinámica de la plataforma móvil, conviene reescribir la ecuación (2.64) reemplazando en ella la ecuación (2.26), esto es:

$$\mathbf{f}_{p_j} = (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \left[ \mathbf{I} \quad \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \right] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{t}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} + (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} + C_{a_j} - (Q_{f_j} + Q_{m_j} + Q_{mb_j}) \quad (2.65)$$

En la siguiente página se muestra la ecuación (2.65) de forma expandida.



$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{p_j} = & \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b) (\tilde{\mathbf{n}}_j)^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j^2} \right) \right) \left[ \mathbf{I} \quad \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \right] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} + \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b) (\tilde{\mathbf{n}}_j)^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j^2} \right) \right) \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} + \left( \left( \frac{2m_t l_t}{l_j^2} \right) (\mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{n}_j^T) \right. \\
 & - \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (2\mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \mathbf{n}_j^T) - \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2\dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \mathbf{n}_j^T + \mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \left. - \left( \frac{m_t l_t}{l_j^2} \right) (\mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + 2\mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j} - 3\mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j}) \right) \\
 & + \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (\mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{n}_j - 2\mathbf{n}_j \mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{n}_j) + \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (\mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + \mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j} - 2\mathbf{n}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{n}_j \mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{p_j}) - \left( \mathbf{n}_j \mathbf{f}_j + \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) m_t \mathbf{g} + \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) m_b \mathbf{g} \right)
 \end{aligned}$$

### 2.5.3 Dinámica de la plataforma móvil

Con la finalidad de resolver el problema dinámico inverso del manipulador paralelo, se deben formular expresiones que relacionen las fuerzas  $f_{pj}$  con la trayectoria y orientación de la plataforma móvil en el tiempo. El análisis dinámico que se aplicará para dicho fin será el método de Newton- Euler, el cual parte del equilibrio de fuerzas y momentos en la plataforma móvil para obtener dos ecuaciones vectoriales, que a su vez generan un sistema de seis ecuaciones escalares, que al resolverlo permiten obtener las seis fuerzas incógnitas  $f_j$ , que son el objetivo principal de este capítulo.

El primer paso para abordar un problema en dinámica es construir un diagrama de cuerpo libre donde se aprecien las fuerzas y los momentos actuantes en el sistema (en este caso el sistema es la plataforma móvil), sin embargo previamente debe definirse el sistema coordenado de referencia, tal como se ilustra en la figura 2.15, donde  $c_p$  es el vector posición referido al sistema móvil del punto de aplicación de la fuerza externa  $f_c$  ejercida por una persona al apoyar el pie a lo largo de su caminar.

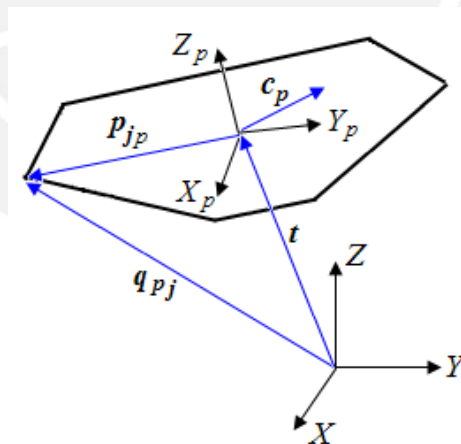


Figura 2.15: Sistemas coordenados y vectores posición.

La facilidad con la que puede resolverse un problema específico depende en buena medida de la selección de un sistema coordenado apropiado, y particularmente en el caso de Newton-Euler, depende también del centro de reducción escogido. Para

este caso ya se han definido los sistemas de referencia  $XYZ$  y  $X_p Y_p Z_p$ . Respecto al centro de reducción, lo más conveniente para el análisis por Newton-Euler es seleccionar un centro de reducción que coincida con el centro de masa del sistema en análisis. Entonces se definen los diagramas dinámicos de fuerzas externas y el de fuerzas efectivas referido al centro de reducción  $G$  (principio de D'Alembert), mostrado en la figura 2.16:

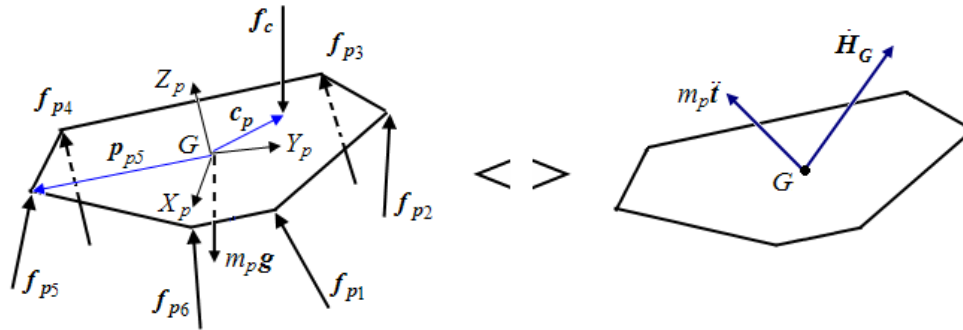


Figura 2.16: Diagrama de cuerpo libre de la plataforma móvil.

En la figura 2.16 los términos  $f_c$ ,  $m_p g$  y las fuerzas ejercidas por los actuadores, son cargas externas aplicadas sobre la plataforma móvil. Aplicando la ecuación de la sumatoria de fuerzas a partir del sistema mostrado en la figura 2.16, se plantea:

$$\begin{aligned} \left(\sum \mathbf{F}_G\right)_{efectivas} &= \left(\sum \mathbf{F}_G\right)_{externas} \\ m_p \ddot{\mathbf{i}} &= -\sum_{j=1}^6 \left(\mathbf{f}_{p_j}\right) + m_p \mathbf{g} + \mathbf{f}_c \end{aligned} \tag{2.66}$$

donde  $m_p$  representa la masa de la plataforma móvil.

De la misma forma (figura 2.16), se plantea la sumatoria de momentos en el sistema respecto al centro de reducción  $G$ , donde la ecuación de Euler se establece como:

$$\begin{aligned} \left(\sum \mathbf{M}_G\right)_{efectivas} &= \left(\sum \mathbf{M}_G\right)_{externas} \\ \dot{\mathbf{H}}_G &= -\sum_{j=1}^6 \left(\mathbf{R} p_{jp} \times \mathbf{f}_{p_j}\right) + \mathbf{R} c_p \times \mathbf{f}_c \end{aligned} \tag{2.67}$$

El término  $\dot{H}_G$  es completamente deducido en Desarrollo G (subcapítulo 2.6), cuyo resultado final es:

$$\dot{H}_G = \mathbf{R} \mathbf{I}_G \mathbf{R}^T \alpha + \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{I}_G \mathbf{R}^T \omega \quad (2.68)$$

A las ecuaciones (2.66) y (2.67) se les da forma de matriz con la finalidad de deducir expresiones posteriores, tal procedimiento es mostrado en Desarrollo H (subcapítulo 2.6), donde finalmente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \ddot{q} = - \sum_{j=1}^6 (f_{p_j}) + m_p \mathbf{g} + f_c \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \dot{q} = - \sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} p_{jp} \times f_{p_j}) + \mathbf{R} \tilde{c}_p \mathbf{R}^T f_c \quad (2.70)$$

donde  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  respectivamente son:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

#### 2.5.4 Ecuación dinámica de la plataforma Stewart-Gough

En esta sección el objetivo será obtener el valor de las fuerzas escalares  $f_j$  generadas por la presión hidráulica al interior de cada actuador ( $f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6$ ), para tal fin se han desarrollado la ecuaciones (2.69) y (2.70) que permiten obtenerlas a partir de las fuerzas  $f_{p_j}$  (que contienen a las  $f_j$ ) y de los valores de orientación y traslación de la plataforma móvil. De esta manera el análisis dinámico inverso es completado, y en consecuencia, a partir de una trayectoria conocida, podrían obtenerse las fuerzas  $f_j$  necesarias para el movimiento a lo largo del tiempo.

Es conocido que en el caso de mecanismos paralelos, desarrollar la cinemática inversa es de simple planteamiento por consideraciones geométricas de carácter general, en cambio desarrollar la cinemática directa es complicado y por lo general se obtiene más de una solución [Arac06]. Como en la presente tesis se abarca sólo la dinámica inversa, la solución analítica es única, ya que las incógnitas son las seis coordenadas generalizadas que definen el movimiento de la plataforma móvil, y por Newton-Euler se plantean seis ecuaciones lineales obtenidas de la sumatoria de fuerzas (2.69) y momentos (2.70). Tal sistema de ecuaciones puede ser resuelto por diversos planteamientos existentes como el método de Gauss, que se basa en la reducción de incógnitas; el método de Cramer, donde se utilizan los determinantes; el teorema de Rouche-Frobenius; y el método de la matriz inversa.

Debido a que el análisis ha sido desarrollado en forma de matrices, es conveniente utilizar el método de la matriz inversa para dar solución a sistemas de ecuaciones lineales. Para tal fin es necesario dar forma a las ecuaciones (2.69) y (2.70) de tal manera que se obtenga una matriz de incógnitas y así despejar su coeficiente matricial mediante el uso de la matriz inversa.

Con el fin de realizar una deducción compacta y entendible, se construirán matrices con los términos de las expresiones (2.69) y (2.70) de tal forma que se obtenga una ecuación matricial de seis filas. La idea de realizar una expresión compacta es poder formar una sola ecuación dinámica donde la matriz de incógnitas  $f_j$  sea calculada aplicando el método de la matriz inversa.

Como puede notarse, las ecuaciones (2.69) y (2.70) poseen términos similares en coeficientes ( $\dot{q}$  ó  $\ddot{q}$ ) y dependencia (en función de  $(q)$  o de  $(q, \dot{q})$ ), por tal motivo el primer paso para empezar a formar la ecuación compacta es ordenar los términos de cada ecuación de manera que se formen matrices comunes. Según lo descrito, en función de la dependencia y coeficientes se construye la tabla 2.6:

Tabla 2.6: Agrupación de términos en las ecuaciones (2.69) y (2.70).

DE NEWTON $\sum \mathbf{F}_G$	DE EULER $\sum \mathbf{M}_G$	Agrupar según:	
		Dependencia	Coficiente
$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{t}} \\ \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{t}} \\ \alpha \end{bmatrix}$	$f(q)$	$\ddot{q}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \omega \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \omega \end{bmatrix}$	$f(q, \dot{q})$	$\dot{q}$
$-\sum_{j=1}^6 (f_{p_j})$	$-\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} p_{j_p} \times f_{p_j})$	$f(q, \dot{q})$	$q, \dot{q}$
$m_p \mathbf{g}$	0		
$f_c$	$\mathbf{R} \tilde{c}_p \mathbf{R}^T f_c$		

Usando la tabla 2.6, se acoplan los términos matriciales de Newton y de Euler según su dependencia y coeficiente para formar una sola matriz de seis filas, de tal manera que tenga la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_G \\ \sum \mathbf{M}_G \end{bmatrix}_{efectivas} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_G \\ \sum \mathbf{M}_G \end{bmatrix}_{externas}$$

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{t}} \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^6 (f_{p_j}) \\ -\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} p_{j_p} \times f_{p_j}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_p \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_c \\ \mathbf{R} \tilde{c}_p \mathbf{R}^T f_c \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

En la ecuación (2.71) el término  $f_{p_j}$  (2.65) no ha sido reemplazado debido a su extensión, por ello dicho término se desarrollará por separado y luego se reemplazará, esto es:

$$f_{p_j} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^6 (f_{p_j}) \\ -\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} p_{j_p} \times f_{p_j}) \end{bmatrix}$$

El término  $-\sum_{j=1}^6 (f_{p_j})$  según la expresión (2.65) se expresa como:

$$-\sum_{j=1}^6 (f_{p_j}) = -\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) [\mathbf{I} \quad \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \right) + \\ -\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \right) - \sum_{j=1}^6 C_{a_j} + \sum_{j=1}^6 (\mathbf{Q}_{mj} + \mathbf{Q}_{mbj}) + \sum_{j=1}^6 \mathbf{Q}_{fj} \quad (2.72)$$

El término  $-\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \times f_{p_j})$  según la propiedad C1 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2)

y la ecuación (2.65) se expresa:

$$-\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \times f_{p_j}) = -\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T) (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) [\mathbf{I} \quad \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \right) + \\ -\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T) (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \right) - \sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T C_{a_j}) \\ + \sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T (\mathbf{Q}_{mj} + \mathbf{Q}_{mbj})) + \sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_{fj}) \quad (2.73)$$

Los términos de las expresiones (2.72) y (2.73) también pueden agruparse por dependencia y por coeficientes, tal como se muestra en la tabla 2.7.

Tabla 2.7: Agrupación de términos en las ecuaciones (2.72) y (2.73).

DE NEWTON $-\sum_{j=1}^6 (f_{p_j})$	DE EULER $-\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \times f_{p_j})$	Agrupar según:	
		Depen- dencia	Coeffi- ciente
$-\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) [\mathbf{I} \quad \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \right)$	$-\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T) (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) [\mathbf{I} \quad \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \right)$	$f(q)$	$\ddot{q}$
$-\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \right)$	$-\sum_{j=1}^6 \left( (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T) (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} \right)$	$f(q, \dot{q})$	
$-\sum_{j=1}^6 C_{a_j}$	$-\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T C_{a_j})$	$f(q, \dot{q})$	$\dot{q}$
$\sum_{j=1}^6 (\mathbf{Q}_{mj} + \mathbf{Q}_{mbj})$	$\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T (\mathbf{Q}_{mj} + \mathbf{Q}_{mbj}))$	$f(q)$	
$\sum_{j=1}^6 \mathbf{Q}_{fj}$	$\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_{fj})$	$f(q)$	

Se acoplan los términos matriciales de la tabla 2.7 así como se hizo anteriormente, según su dependencia y coeficiente, para formar una sola matriz de seis filas, esto es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^6 (f_{pj}) \\ -\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} p_{jp} \times f_{pj}) \end{bmatrix} &= -\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{p}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \right) - \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{C}_{a_j} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{f_j} \right) + \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (\mathbf{Q}_{m_{tj}} + \mathbf{Q}_{m_{bj}}) \right) \\ &- \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} p_{jp} \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Reemplazando la expresión (2.74) en la ecuación (2.71), se obtiene la ecuación dinámica general de la plataforma Stewart-Gough, que es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} &= -\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{p}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \right) \\ &- \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} p_{jp} \right) - \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{C}_{a_j} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (\mathbf{Q}_{m_{tj}} + \mathbf{Q}_{m_{bj}}) \right) + \begin{bmatrix} m_p \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{f_j} \right) + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{R} \tilde{c}_p \mathbf{R}^T \mathbf{f}_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Según [Mer100] la ecuación dinámica inversa para un manipulador paralelo debe tener la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_{(q)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{(q, \dot{q})} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_{(q)} + \mathbf{F}_c = \mathbf{H}_{(q)} \mathbf{F} \quad (2.76)$$

$\mathbf{M}_{(q)}$  : Matriz de inercias.

$\mathbf{C}_{(q, \dot{q})}$  : Término de efectos centrífugos y de coriolis.

$\mathbf{G}_{(q)}$  : Término gravitacional.

$\mathbf{F}$  : Contiene a las fuerzas aplicadas al interior de cada actuador.

$\mathbf{H}_{(q)}$  : Matriz de vectores unitarios.

$\mathbf{F}_c$  : Matriz de la fuerza externa adicional  $\mathbf{f}_c$  debido al apoyo del pie.



Como se puede apreciar en la forma general de la ecuación dinámica (2.76) se identifican claramente términos que poseen una relación por dependencia y por coeficiente, lo cual hace que el procedimiento que se ha desarrollado sea consistente con la forma general. Por ello, a la ecuación (2.75), que es básicamente Newton-Euler en una sola matriz, se le da forma general según la expresión (2.76) de manera que tenga la forma general de la dinámica inversa, lo cual se muestra a continuación en la tabla 2.8:

Tabla 2.8: Agrupación de términos en la ecuación (2.75).

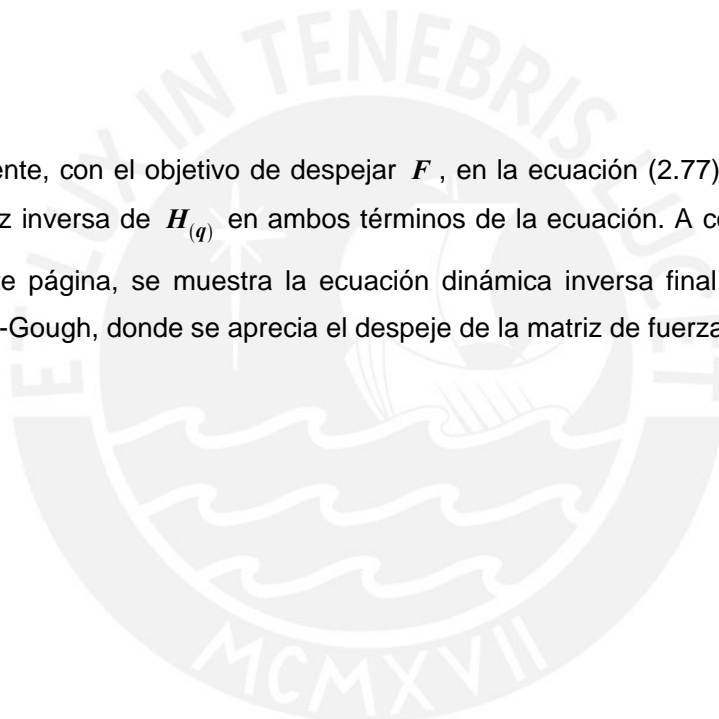
Forma General: $M_{(q)}\ddot{q} + C_{(q, \dot{q})}\dot{q} + G_{(q)} + F_c = H_{(q)}F$	Términos
$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \ddot{q}$	$M_{(q)}\ddot{q}$
$\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (M_{a_j} + M_{b_j}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{p}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \right) \ddot{q}$	
$-\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (Q_{mj} + Q_{mb_j}) \right)$	$G_{(q)}$
$-\begin{bmatrix} m_p \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \dot{q}$	$C_{(q, \dot{q})}\dot{q}$
$\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} C_{a_j} \right)$	
$\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} (M_{a_j} + M_{b_j}) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} p_{jp} \right)$	
$-\begin{bmatrix} f_c \\ \mathbf{R} \tilde{c}_p \mathbf{R}^T f_c \end{bmatrix}$	$F_c$
$\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{p}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} Q_{f_j} \right)$	$H_{(q)}F$

El término  $Q_{f_j}$  incluido en el término  $H_{(q)}F$  en la tabla 2.8, no ha sido aún reemplazado. Como se dijera al principio de esta sección, el objetivo es calcular las fuerzas  $(f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6)$ . Para ello se debe formar una matriz 6x1 con las

fuerzas incógnitas mencionadas, que a su vez puedan ser despejadas mediante el uso de la matriz inversa. Siguiendo el procedimiento descrito se deduce la matriz de las fuerzas escalares  $f_j$  que según la forma general (2.76) se denota como  $F$ , y su coeficiente matricial que pasará al lado opuesto de la ecuación como matriz inversa sería  $H_{(q)}$ . La deducción de  $H_{(q)}F$  se muestra en Desarrollo I (subcapítulo 2.6), cuyo resultado final se muestra a continuación:

$$H_{(q)} \cdot F = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{1p} \mathbf{R}^T n_1 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{2p} \mathbf{R}^T n_2 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{3p} \mathbf{R}^T n_3 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{4p} \mathbf{R}^T n_4 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{5p} \mathbf{R}^T n_5 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{6p} \mathbf{R}^T n_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Finalmente, con el objetivo de despejar  $F$ , en la ecuación (2.77) premultiplicamos la matriz inversa de  $H_{(q)}$  en ambos términos de la ecuación. A continuación, en la siguiente página, se muestra la ecuación dinámica inversa final de la plataforma Stewart-Gough, donde se aprecia el despeje de la matriz de fuerzas  $F$ :



$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{1p} \mathbf{R}^T n_1 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{2p} \mathbf{R}^T n_2 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{3p} \mathbf{R}^T n_3 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{4p} \mathbf{R}^T n_4 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{5p} \mathbf{R}^T n_5 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{6p} \mathbf{R}^T n_6 \end{bmatrix}^{-1} \left( \sum_{j=1}^6 \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_j \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( \mathbf{I} + \frac{l_j \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b) (\tilde{\mathbf{n}}_j)^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j^2} \right) \right) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \alpha \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \left( \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2 \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T n_j \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{pj} n_j^T + n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j) - \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (2 n_j^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{pj} n_j^T) - \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2 \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T n_j \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j + \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{pj} n_j^T + n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j) \right) \dot{\mathbf{q}}_{pj} \right. \\
 &- \left( \frac{m_t l_t}{l_j^2} \right) (2 n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} + 2 n_j^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} \dot{\mathbf{q}}_{pj} - 3 n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{\mathbf{q}}_{pj}) + \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} + \dot{\mathbf{q}}_{pj} \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T n_j - 2 n_j n_j^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} \dot{\mathbf{q}}_{pj} n_j) + \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (n_j^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} \dot{\mathbf{q}}_{pj} + n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} - 2 n_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{\mathbf{q}}_{pj}) \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \omega \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_j \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( \mathbf{I} + \frac{l_j \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b) (\tilde{\mathbf{n}}_j)^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j^2} \right) \right) \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} \mathbf{p}_{jp} - \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_j \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) m_t \mathbf{g} + \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) m_b \mathbf{g} \right) \right) - \begin{bmatrix} m_p \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{c}}_p \mathbf{R}^T \mathbf{f}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \alpha \end{bmatrix} \right) \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

## 2.6 Desarrollo de variables cinemáticas y cinéticas

En este acápite se desarrolla al detalle la deducción de los parámetros cinemáticos y dinámicos, con la finalidad de sustentar los resultados finales mostrados a lo largo del presente capítulo, en beneficio de quien desee profundizar en el desarrollo matemático planteado.

Es importante mencionar que el modelo dinámico de Guo y Li [Guo06] fue publicado en forma de resumen, por tanto es fundamental mostrar a continuación el detalle del desarrollo teórico a lo largo del presente capítulo. Cabe resaltar además que el modelo de Guo y Li ha sido adaptado para el caso del simulador de marcha, y esto se ve reflejado en las deducciones que corresponden a la parte dinámica.

Finalmente, lo siguiente será una muestra de cómo la teoría de matrices es de gran utilidad para trabajar con modelos de varias variables y parámetros.

### A) Desarrollo A (velocidad y aceleración, forma general)

- Término  $\dot{q}_{pj}$

$$\dot{q}_{pjp} = \dot{t}_p + \omega_p \times p_{jp}$$

$$\mathbf{R} \dot{q}_{pjp} = \mathbf{R} [\dot{t}_p + \omega_p \times p_{jp}]$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + \mathbf{R} [\omega_p \times p_{jp}]$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + \mathbf{R} \tilde{\omega}_p p_{jp}$$

Como:  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + \mathbf{R} \tilde{\omega}_p \mathbf{I} p_{jp}$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + \mathbf{R} \tilde{\omega}_p (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) p_{jp}$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + (\mathbf{R} \tilde{\omega}_p \mathbf{R}^T) \mathbf{R} p_{jp} \quad (2.79)$$

Aplicando la propiedad C1 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2), se tendrá:

$$\omega = \mathbf{R} \omega_p$$

$$\mathbf{R} \tilde{\omega}_p \mathbf{R}^T = \tilde{\omega}$$

Reemplazando en (2.79) se tiene:

$$\dot{q}_{p_j} = \dot{i} + (\tilde{\omega}) \mathbf{R} p_{j_p}$$

$$\dot{q}_{p_j} = \dot{i} + \omega \times \mathbf{R} p_{j_p}$$

- Término  $\ddot{q}_{p_j}$

$$\ddot{q}_{p_j p} = \ddot{i}_p + \alpha_p \times p_{j_p} + \omega_p \times (\omega_p \times p_{j_p})$$

$$\mathbf{R} \ddot{q}_{p_j p} = \mathbf{R} [\ddot{i}_p + \alpha_p \times p_{j_p} + \omega_p \times (\omega_p \times p_{j_p})]$$

$$\mathbf{R} \ddot{q}_{p_j p} = \mathbf{R} \ddot{i}_p + \mathbf{R} (\alpha_p \times p_{j_p}) + \mathbf{R} [\omega_p \times (\omega_p \times p_{j_p})]$$

$$\ddot{q}_{p_j} = \dot{i} + \mathbf{R} \tilde{\alpha}_p p_{j_p} + \mathbf{R} \tilde{\omega}_p (\tilde{\omega}_p p_{j_p})$$

Como:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

$$\ddot{q}_{p_j} = \dot{i} + \mathbf{R} \tilde{\alpha}_p \mathbf{I} p_{j_p} + \mathbf{R} \tilde{\omega}_p \mathbf{I} (\tilde{\omega}_p \mathbf{I} p_{j_p})$$

$$\ddot{q}_{p_j} = \dot{i} + \mathbf{R} \tilde{\alpha}_p (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) p_{j_p} + \mathbf{R} \tilde{\omega}_p (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) (\tilde{\omega}_p (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) p_{j_p})$$

$$\ddot{q}_{p_j} = \dot{i} + (\mathbf{R} \tilde{\alpha}_p \mathbf{R}^T) \mathbf{R} p_{j_p} + (\mathbf{R} \tilde{\omega}_p \mathbf{R}^T) (\mathbf{R} \tilde{\omega}_p \mathbf{R}^T) \mathbf{R} p_{j_p} \quad (2.80)$$

Aplicando la C1 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2), se tendrá:

$$\alpha = \mathbf{R} \alpha_p$$

$$\omega = \mathbf{R} \omega_p$$

$$\mathbf{R} \tilde{\alpha}_p \mathbf{R}^T = \tilde{\alpha}$$

$$\mathbf{R} \tilde{\omega}_p \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \omega_p = \tilde{\omega}$$

Reemplazando en (2.80) se tiene:

$$\ddot{q}_{p_j} = \dot{i} + \tilde{\alpha} \mathbf{R} p_{j_p} + \tilde{\omega} \mathbf{R} p_{j_p}$$

$$\ddot{q}_{p_j} = \dot{i} + \alpha \times \mathbf{R} p_{j_p} + \omega \times (\omega \times \mathbf{R} p_{j_p})$$

**B) Desarrollo B (velocidad y aceleración, forma matricial)**

- Término  $\dot{q}_{p_j}$

$$\begin{aligned}\dot{q}_{p_j} &= \dot{t} + \omega \times \mathbf{R} p_{jp} \\ \dot{q}_{p_j} &= \dot{t} - (\mathbf{R} p_{jp} \times \omega)\end{aligned}$$

Sea:  $\mathbf{P}_{b_j} = \mathbf{R} p_{jp}$

$$\dot{q}_{p_j} = \dot{t} - (\mathbf{P}_{b_j} \times \omega) = \dot{t} - \tilde{\mathbf{P}}_{b_j} \omega$$

Como:  $-\tilde{\mathbf{P}}_{b_j} = \tilde{\mathbf{P}}_{b_j}^T$

$$\dot{q}_{p_j} = \dot{t} + \tilde{\mathbf{P}}_{b_j}^T \omega$$

Aplicando la propiedad C2 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2), se tendrá:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{p_j} &= \dot{t} + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \omega \\ \dot{q}_{p_j} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \dot{q}\end{aligned}$$

- Término  $\ddot{q}_{p_j}$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{p_j} &= \ddot{t} + \alpha \times \mathbf{R} p_{jp} + \omega \times (\omega \times \mathbf{R} p_{jp}) \\ \ddot{q}_{p_j} &= \ddot{t} + \tilde{\alpha} \mathbf{R} p_{jp} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \mathbf{R} p_{jp}\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad C2 y C3 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2), se tendrá:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{p_j} &= \ddot{t} + (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T) \alpha + \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} p_{jp} \\ \ddot{q}_{p_j} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} + \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} p_{jp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp}^T \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \ddot{q} + \tilde{\omega}^2 \mathbf{R} p_{jp}\end{aligned}$$

**C) Desarrollo C (velocidad del vástago y cilindro del actuador)**

- Término  $v_{t_j}$

$$v_{t_j} = \dot{q}_{p_j} + \omega_{L_j} \times (-l_t n_j)$$

Sea:  $\omega_{L_j} = \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{p_j}}{l_j}$

$$v_{t_j} = \dot{q}_{p_j} + \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{p_j}}{l_j} \times (-l_t n_j) = \dot{q}_{p_j} + (l_t n_j) \times \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{p_j}}{l_j}$$

$$v_{t_j} = \dot{q}_{p_j} + \frac{l_t \tilde{n}_j \tilde{n}_j \dot{q}_{p_j}}{l_j} = \dot{q}_{p_j} + \frac{l_t \tilde{n}_j^2 \dot{q}_{p_j}}{l_j}$$

$$v_{t_j} = \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{p_j}$$

- Término  $v_{b_j}$

$$v_{b_j} = \omega_{L_j} \times (l_b n_j)$$

Sea:  $\omega_{L_j} = \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{p_j}}{l_j}$

$$v_{b_j} = \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{p_j}}{l_j} \times (l_b n_j) = (-l_b n_j) \times \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{p_j}}{l_j}$$

Aplicando las operaciones vectoriales de la tabla 2.3 (subcapítulo 2.2), se tendrá:

$$v_{b_j} = \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) \dot{q}_{p_j}$$

### D) Desarrollo D (energía del actuador)

$$T_{G_{UO_j}} = \frac{1}{2} \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \right)^T m_i \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}}{l_j} \right)$$

Dando forma a los siguientes términos según la propiedad C7 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2), se tiene:

$$\left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \right)^T = \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T \quad \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{p_j}}{l_j} \right)^T = \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right)^T$$

Se tiene:

$$T_{G_{UO_j}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_i \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j}$$

$$T_{G_{UO_j}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_i \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) + \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j}$$

$$\mathbf{M}_{a_j} = \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)^T m_i \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \quad \mathbf{M}_{b_j} = (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right)^T \left( \frac{\tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right)$$

Reemplazando  $\mathbf{M}_{a_j}$  y  $\mathbf{M}_{b_j}$  en la expresión inicial:

$$T_{G_{UO_j}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j}$$

### E) Desarrollo E (termino inercial de lagrange)

$$\frac{\partial T_{G_{UO_j}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{p_j}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{p_j}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \left( \mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{p_j}} \left( \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j} + \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \right)$$

$$\frac{\partial T_{G_{UO_j}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{p_j}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{p_j}} \left( \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{p_j}} \left( \dot{\mathbf{q}}_{p_j}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{\mathbf{q}}_{p_j} \right) \right)$$



$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{pj} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjx}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{pj} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{p jy}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{pj} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{p jz}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{pj} \right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{q}_{pj} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjx}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{q}_{pj} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{p jy}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{q}_{pj} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{p jz}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{q}_{pj} \right) \end{pmatrix}$$

Sean las matrices:

$$\mathbf{M}_{a_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{b_j} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Desarrollando la derivada, se demuestra que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{a_j} \dot{q}_{pj} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( 2\dot{q}_{pjx} (a_{11}) + \dot{q}_{p jy} (a_{12} + a_{21}) + \dot{q}_{p jz} (a_{13} + a_{31}) \right) \\ \frac{1}{2} \left( 2\dot{q}_{p jy} (a_{22}) + \dot{q}_{p jz} (a_{32} + a_{23}) + \dot{q}_{pjx} (a_{12} + a_{21}) \right) \\ \frac{1}{2} \left( 2\dot{q}_{p jz} (a_{33}) + \dot{q}_{pjx} (a_{13} + a_{31}) + \dot{q}_{p jy} (a_{32} + a_{23}) \right) \end{pmatrix}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \dot{q}_{pj}^T \mathbf{M}_{b_j} \dot{q}_{pj} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( 2\dot{q}_{pjx} (b_{11}) + \dot{q}_{p jy} (b_{12} + b_{21}) + \dot{q}_{p jz} (b_{13} + b_{31}) \right) \\ \frac{1}{2} \left( 2\dot{q}_{p jy} (b_{22}) + \dot{q}_{p jz} (b_{32} + b_{23}) + \dot{q}_{pjx} (b_{12} + b_{21}) \right) \\ \frac{1}{2} \left( 2\dot{q}_{p jz} (b_{33}) + \dot{q}_{pjx} (b_{13} + b_{31}) + \dot{q}_{p jy} (b_{32} + b_{23}) \right) \end{pmatrix}$$

Finalmente se tiene que:

$$\frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \dot{q}_{pj}} = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjx} (a_{11}) + \dot{q}_{p jy} (a_{12} + a_{21}) + \dot{q}_{pjz} (a_{13} + a_{31})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{p jy} (a_{22}) + \dot{q}_{pjz} (a_{32} + a_{23}) + \dot{q}_{pjx} (a_{12} + a_{21})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjz} (a_{33}) + \dot{q}_{pjx} (a_{13} + a_{31}) + \dot{q}_{p jy} (a_{32} + a_{23})) \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjx} (b_{11}) + \dot{q}_{p jy} (b_{12} + b_{21}) + \dot{q}_{pjz} (b_{13} + b_{31})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{p jy} (b_{22}) + \dot{q}_{pjz} (b_{32} + b_{23}) + \dot{q}_{pjx} (b_{12} + b_{21})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjz} (b_{33}) + \dot{q}_{pjx} (b_{13} + b_{31}) + \dot{q}_{p jy} (b_{32} + b_{23})) \end{array} \right)$$

Notar que si las matrices  $\mathbf{M}_{a_j}$  y  $\mathbf{M}_{b_j}$  fuesen simétricas, el resultado sería:

$$\frac{\partial T_{GUO_j}}{\partial \dot{q}_{pj}} = (\mathbf{M}_{a_j} + \mathbf{M}_{b_j}) \dot{q}_{pj}$$

#### F) Desarrollo F (fuerza generalizada)

- Término  $Q_{mt_j}$

Partiendo del principio de los trabajos virtuales, se tiene:

$$\delta W_j = \mathbf{Q}_{mt_j}^T \delta \mathbf{q}_{pj} = (m_t \mathbf{g})^T \delta \mathbf{s}_{mt_j} \quad (2.81)$$

Luego se utiliza la ecuación (2.32) en su forma diferencial:

$$\delta \mathbf{s}_{mt_j} = \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \delta \mathbf{q}_{pj} \quad (2.82)$$

Reemplazando la ecuación (2.82) en (2.81):

$$\delta W_j = \mathbf{Q}_{mt_j}^T \delta \mathbf{q}_{pj} = (m_t \mathbf{g})^T \left( \mathbf{I} + \frac{l_t \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \delta \mathbf{q}_{pj}$$

Donde  $\mathbf{g}$  es una matriz de tres filas y una columna. Como la matriz  $\left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)$  es simétrica, es posible realizar lo siguiente:

$$(m_i \mathbf{g})^T \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) \delta q_{pj} = \left[ \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) (m_i \mathbf{g}) \right]^T \delta q_{pj}$$

De esta forma finalmente se obtiene:

$$\mathbf{Q}_{m_i j} = \left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right) m_i \mathbf{g}$$

- Término  $\mathbf{Q}_{m_b j}$

Partiendo del principio de los trabajos virtuales, se tiene:

$$\delta W_j = \mathbf{Q}_{m_b j}^T \delta q_{pj} = (m_b \mathbf{g})^T \delta s_{m_b j} \quad (2.83)$$

Luego se utiliza la ecuación (2.33) en su forma diferencial:

$$\delta s_{m_b j} = \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) \delta q_{pj} \quad (2.84)$$

Reemplazando la ecuación (2.84) en (2.83):

$$\delta W_j = \mathbf{Q}_{m_b j}^T \delta q_{pj} = (m_b \mathbf{g})^T \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) \delta q_{pj}$$

Donde  $\mathbf{g}$  es una matriz de tres filas y una columna. Como la matriz  $\left( \mathbf{I} + \frac{l_i \tilde{\mathbf{n}}_j^2}{l_j} \right)$  es simétrica, es posible realizar lo siguiente:

$$(m_b \mathbf{g})^T \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) \delta q_{pj} = \left[ \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) (m_b \mathbf{g}) \right]^T \delta q_{pj}$$

De esta forma finalmente se obtiene:

$$\mathbf{Q}_{m_b j} = \left( \frac{l_b \tilde{\mathbf{n}}_j^T \tilde{\mathbf{n}}_j}{l_j} \right) m_b \mathbf{g}$$

- Término  $Q_{fpj}$

Partiendo del principio de los trabajos virtuales, se tiene:

$$\delta W_j = \mathbf{Q}_{fpj}^T \delta \mathbf{q}_{pj} = \mathbf{f}_{pj}^T \delta s_{fpj} \quad (2.85)$$

De la configuración del sistema se sabe que:

$$\delta s_{fpj} = \delta \mathbf{q}_{pj} \quad (2.86)$$

Reemplazando la ecuación (2.86) en (2.85):

$$\delta W_j = \mathbf{Q}_{fpj}^T \delta \mathbf{q}_{pj} = \mathbf{f}_{pj}^T \delta \mathbf{q}_{pj}$$

De esta forma finalmente se obtiene:

$$\mathbf{Q}_{fpj} = \mathbf{f}_{pj}$$

**G) Desarrollo G (término  $\dot{H}_G$ )**

El vector  $\dot{H}_G$  se define como la derivada de la cantidad de movimiento angular con respecto al sistema fijo XYZ, proyectado al sistema fijo XYZ. Sin embargo por simplicidad la deducción se realizará a partir de la proyección en el sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  ( $H_{Gp}$ ). Usando el concepto de cinética de un cuerpo rígido en el espacio, proyectado en el sistema  $X_p Y_p Z_p$ , se define lo siguiente:

$$\sum M_{Gp} = \dot{H}_{Gp} = \left( \dot{H}_{Gp} \right)_{x_p y_p z_p} + \Omega \times H_{Gp} \tag{2.87}$$

donde:

$H_{Gp}$  → Cantidad de movimiento angular proyectado en el sistema  $X_p Y_p Z_p$

$\dot{H}_{Gp}$  → Derivada del vector  $H_{Gp}$  con respecto al sistema fijo XYZ

$\left( \dot{H}_{Gp} \right)_{x_p y_p z_p}$  → Derivada del vector  $H_{Gp}$  con respecto al sistema  $X_p Y_p Z_p$

$\Omega \times H_{Gp} = H_{Gpx} \frac{di}{dt} + H_{Gpy} \frac{dj}{dt} + H_{Gpz} \frac{dk}{dt}$  → Es consecuencia de la rotación del sistema  $X_p Y_p Z_p$ , proyectado en  $X_p Y_p Z_p$

Sea:

$$H_{Gp} = I_p \omega_p$$

$$\left( \dot{H}_{Gp} \right)_{x_p y_p z_p} = \dot{H}_{Gpx} i + \dot{H}_{Gpy} j + \dot{H}_{Gpz} k$$

$$\left( \dot{H}_{Gp} \right)_{x_p y_p z_p} = \frac{dH_{Gp}}{dt} = \frac{d(I_p \omega_p)}{dt}$$

$$\left( \dot{H}_{Gp} \right)_{x_p y_p z_p} = I_p \dot{\omega}_p = I_p \alpha_p$$

Como el sistema  $X_p Y_p Z_p$  es solidario a la plataforma móvil, se tiene:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$$

Reemplazando en (2.87), se obtiene:

$$\sum M_{G_p} = \mathbf{I}_P \boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega}_p)$$

Como se ha trabajado respecto al sistema  $X_p Y_p Z_p$ , para pasar al sistema XYZ se premultiplica la matriz de rotación  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\sum M_{G_p}) &= \mathbf{R}(\mathbf{I}_P \boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega}_p)) \\ \mathbf{R}(\sum M_{G_p}) &= \mathbf{R} \mathbf{I}_P \boldsymbol{\alpha}_p + \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}_p \times (\mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega}_p)) \\ \mathbf{R}(\sum M_{G_p}) &= \mathbf{R} \mathbf{I}_P \boldsymbol{\alpha}_p + \mathbf{R}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega}_p) \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad C5 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2), se tiene:

$$\sum M_G = \mathbf{R} \mathbf{I}_P \mathbf{R}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}_p + \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{I}_P \mathbf{R}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_p \quad (2.88)$$

Aplicando las propiedades C1 y C2 de la tabla 2.4 (subcapítulo 2.2), se tiene:

$$\begin{aligned} \sum M_G &= \dot{H}_G \\ \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}_p &= \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p \mathbf{R}^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.88), finalmente se obtiene:

$$\dot{H}_G = \mathbf{R} \mathbf{I}_P \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{R} \mathbf{I}_P \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}$$

## H) Desarrollo H (sumatoria de fuerzas y momentos)

- Término  $\sum \mathbf{F}_G$

Recordando que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

Se tiene que:

$$m_p \ddot{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}$$

Reemplazando en la ecuación (2.66), se tiene:

$$\begin{bmatrix} m_p \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = -\sum_{j=1}^6 (\mathbf{f}_{p_j}) + m_p \mathbf{g} + \mathbf{f}_c$$

- Término  $\sum \mathbf{M}_G$

Reemplazando  $\dot{\mathbf{H}}_G$  en la ecuación (2.67), se tendrá:

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_G \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{R} \mathbf{I}_G \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega} = -\sum_{j=1}^6 (\mathbf{p}_{j_p} \times \mathbf{f}_{p_j}) + \mathbf{R} \mathbf{c}_p \times \mathbf{f}_c \quad (2.89)$$

Recordando que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

Dándole forma compacta a la ecuación (2.89), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{R} \mathbf{I}_p \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = -\sum_{j=1}^6 (\mathbf{R} \mathbf{p}_{j_p} \times \mathbf{f}_{p_j}) + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{c}}_p \mathbf{R}^T \mathbf{f}_c$$

I) Desarrollo I (ecuación dinámica de la plataforma)

Sea:

$$\mathbf{H}_{(q)} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{f_j} \right) \quad (2.90)$$

$$\mathbf{Q}_{f_j} = n_j f_j \quad (2.91)$$

Se reemplaza (2.91) en (2.90), se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{f_j} \right) &= \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} n_j f_j \right) \\ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{f_j} \right) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{1p} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} n_1 f_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{2p} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} n_2 f_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{3p} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} n_3 f_3 \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{4p} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} n_4 f_4 + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{5p} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} n_5 f_5 + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{6p} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} n_6 f_6 \\ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{jp} \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{f_j} \right) &= \begin{bmatrix} n_1 f_1 \\ (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{1p} \mathbf{R}^T n_1) f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_2 f_2 \\ (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{2p} \mathbf{R}^T n_2) f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_3 f_3 \\ (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{3p} \mathbf{R}^T n_3) f_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} n_4 f_4 \\ (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{4p} \mathbf{R}^T n_4) f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_5 f_5 \\ (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{5p} \mathbf{R}^T n_5) f_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_6 f_6 \\ (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{6p} \mathbf{R}^T n_6) f_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Dando forma matricial a la ecuación (2.92), se obtiene:

$$\mathbf{H}_{(q)} \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{1p} \mathbf{R}^T n_1 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{2p} \mathbf{R}^T n_2 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{3p} \mathbf{R}^T n_3 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{4p} \mathbf{R}^T n_4 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{5p} \mathbf{R}^T n_5 & \mathbf{R} \tilde{\mathbf{p}}_{6p} \mathbf{R}^T n_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$



## CAPÍTULO 3

### SIMULACIÓN DEL MODELO DINÁMICO

En este capítulo se realizará la simulación del modelo dinámico implementado en un software matemático, donde la plataforma móvil se somete a trayectorias definidas con la finalidad de obtener las fuerzas al interior de cada actuador. El objetivo es evaluar la coherencia de tales resultados, y así mostrar la validez del procedimiento analítico realizado para la obtención de la ecuación dinámica inversa de la plataforma Stewart-Gough.

#### 3.1 Introducción

Una simulación es la solución de las ecuaciones de movimiento del sistema en función del tiempo. El modelo de la plataforma Stewart-Gough es representado por la ecuación dinámica final (2.78), y como consecuencia de la simulación, las fuerzas al interior de los seis actuadores son obtenidas a partir de introducir la trayectoria y orientación de la plataforma móvil en el algoritmo.

Para la solución de la ecuación (2.78) se ha utilizado un software matemático llamado Mathcad, en el cual se implementó el procedimiento desarrollado en el capítulo dos. El programa de la simulación se ubica en Anexos.

En este capítulo se muestran los resultados finales de la simulación dinámica inversa para ciertas trayectorias en forma de gráficas, con el fin de poder apreciar la variación de las fuerzas  $(f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6)$  necesarias para generar un

movimiento deseado en la plataforma móvil, donde la orientación, posición, velocidad y aceleración de la plataforma móvil son conocidas y definidas como funciones paramétricas del tiempo.

El desarrollo del cálculo en la simulación es básicamente similar al realizado en el capítulo dos. El procedimiento general seguido en el modelo implementado se ilustra en el diagrama de flujo de la figura 3.1.

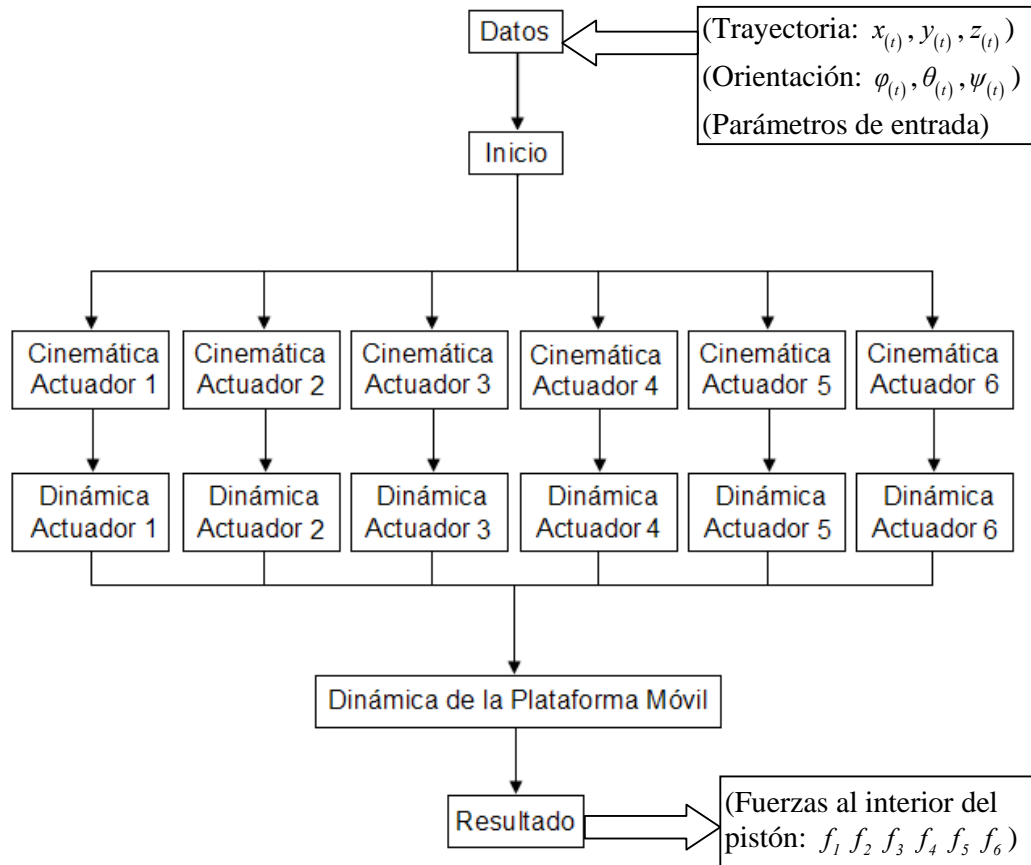


Figura 3.1: Diagrama de flujo de la simulación dinámica.

### 3.2 Parámetros de entrada

Los parámetros de entrada al modelo dinámico son la geometría del manipulador, las masas e inercias del sistema y el movimiento de la plataforma móvil, el cual está determinado por la orientación y la traslación de la plataforma superior.

La geometría en el capítulo dos ha sido definida para cualquier octaedro hexápodo de bases simétricas, lo cual es consistente con el diseño de plataforma Stewart-Gough del proyecto PUCP-DAI 3448 año 2007 referente al simulador de marcha.

Los parámetros de entrada considerados como constantes durante el proceso de simulación dinámica son:

- Dimensiones de plataforma y actuadores

$$d_p = 0,103m$$

$$d_b = 0,1113m$$

$$L_p = 0,193m$$

$$L_b = 0,304m$$

$$l_t = 0,238m$$

$$l_b = 0,19m$$

- Masas

$$m_b = 4,3kg$$

$$m_p = 9kg$$

$$m_t = 1,4kg$$

- Momentos de inercia.

$$I_t = 0,0164563kg.m^2$$

$$I_b = 0,06324kg.m^2$$

$$\mathbf{I}_p = \begin{pmatrix} 0,076162 & 0 & 0 \\ 0 & 0,076162 & 0 \\ 0 & 0 & 0,152082 \end{pmatrix} kg.m^2$$

Las inercias fueron obtenidas de una modelación del pistón realizada en Solidworks, según el diseño mecánico de la Stewart-Gough perteneciente al proyecto PUCP-DAI 3448 año 2007.

- Fuerza externa debido al peso de la persona

$$\mathbf{f}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix} N \quad \mathbf{c}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

- Vectores de posición del extremo fijo del actuador referido al sistema XYZ

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot L_b & -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b + 2 \cdot d_b) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot L_b & -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b + 2 \cdot d_b) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot (d_b + L_b) & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_b - d_b) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot d_b & \frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_b + d_b) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{b}_5 = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot d_b & -\frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_b + d_b) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot (d_b + L_b) & -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b - d_b) & 0 \end{bmatrix}^T$$

- Vectores de posición del extremo móvil referido al sistema  $X_p Y_p Z_p$

$$\mathbf{p}_{1p} = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot d_p & -\frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_p + d_p) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{p}_{2p} = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot d_p & -\frac{\sqrt{3}}{6}(2 \cdot L_p + d_p) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{p}_{3p} = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot (L_p + d_p) & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p - d_p) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{p}_{4p} = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot L_p & \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p + 2 \cdot d_p) & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$p_{5p} = \left[ -0,5 \cdot L_p \quad \frac{\sqrt{3}}{6} (L_p + 2 \cdot d_p) \quad 0 \right]^T$$

$$p_{6p} = \left[ -0,5 \cdot (L_p + d_p) \quad \frac{\sqrt{3}}{6} (L_p - d_p) \quad 0 \right]^T$$

La trayectoria del centro de masa se expresa mediante el vector  $t$ , donde sus componentes son paramétricas en función del tiempo (3.1). En igual forma la orientación se expresa mediante los ángulos de Euler (3.2), los cuales también se definen en forma paramétrica en función del tiempo. Las velocidades y aceleraciones, tanto para la traslación como la orientación, se obtienen derivando las funciones paramétricas descritas respecto del tiempo. Dichos parámetros de entrada serán especificados en la siguiente sección, para cada trayectoria a simular.

$$\begin{bmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{bmatrix} = \mathbf{t}_{(t)} \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \psi_{(t)} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{(t)} \quad (3.2)$$

### 3.3 Simulación de trayectorias

Las trayectorias que serán utilizadas fueron escogidas con el objetivo de demostrar la validez y coherencia de la ecuación dinámica inversa obtenida en el capítulo dos. Una trayectoria adecuada podría definirse sobre rectas respecto a las cuales ciertos actuadores tengan el mismo comportamiento, de tal manera que se obtenga el mismo valor de fuerza en su interior. Por ejemplo, en una trayectoria recta hacia arriba ( $x_p = 0$   $y_p = 0$   $z_p = 0$ ) se espera que todas las fuerzas  $f_{p_j}$  sean iguales, debido a la simetría del sistema. Para mayor entendimiento de la descripción de trayectorias y orientaciones planteadas a continuación se sugiere revisar el subcapítulo 2.2.

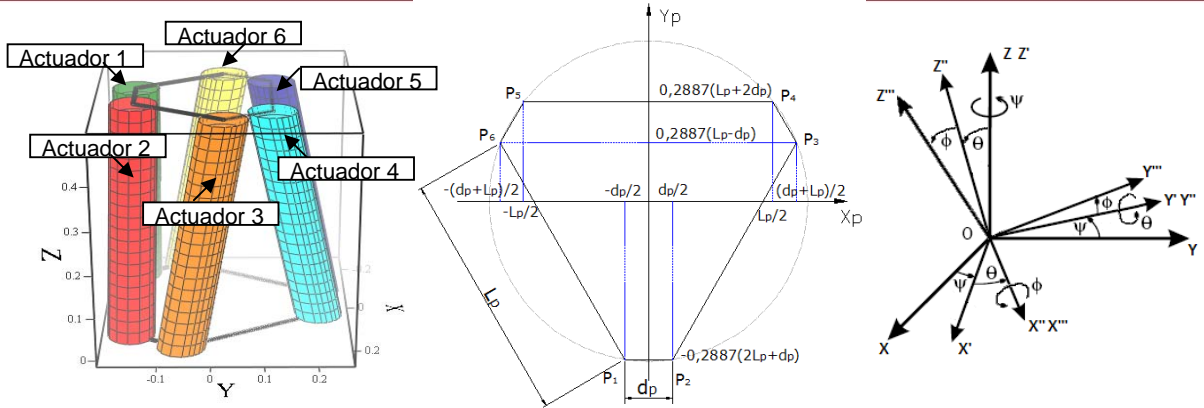


Figura 3.2: Sistema  $X_p Y_p Z_p$  y ángulos de Euler Z-Y-X.

### 3.3.1 Trayectoria recta en Y

En la primera simulación, se considerará que la orientación de la plataforma móvil se mantiene constante mientras que ésta se traslada a lo largo de una recta, para tal fin se definen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{bmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (0,1)t - 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} m \quad \begin{bmatrix} \varphi_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \psi_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} rad \quad (3.3)$$

donde  $t$  varía de  $0 \leq t \leq 10$ .

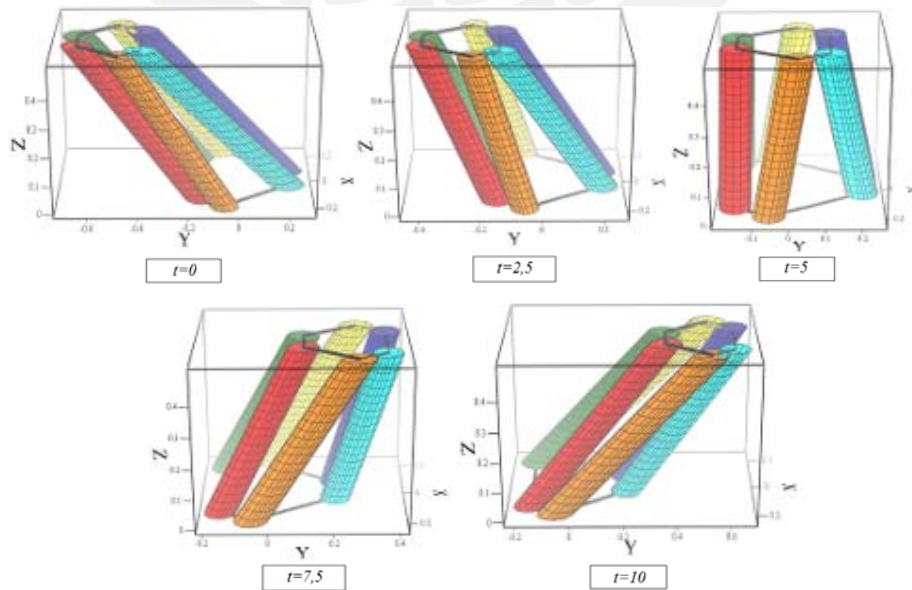


Figura 3.3: Esquema 3D, trayectoria recta en Y .

Las fuerzas al interior de cada actuador, con respecto a la trayectoria que acaba de describirse, se representan en la figura 3.4.

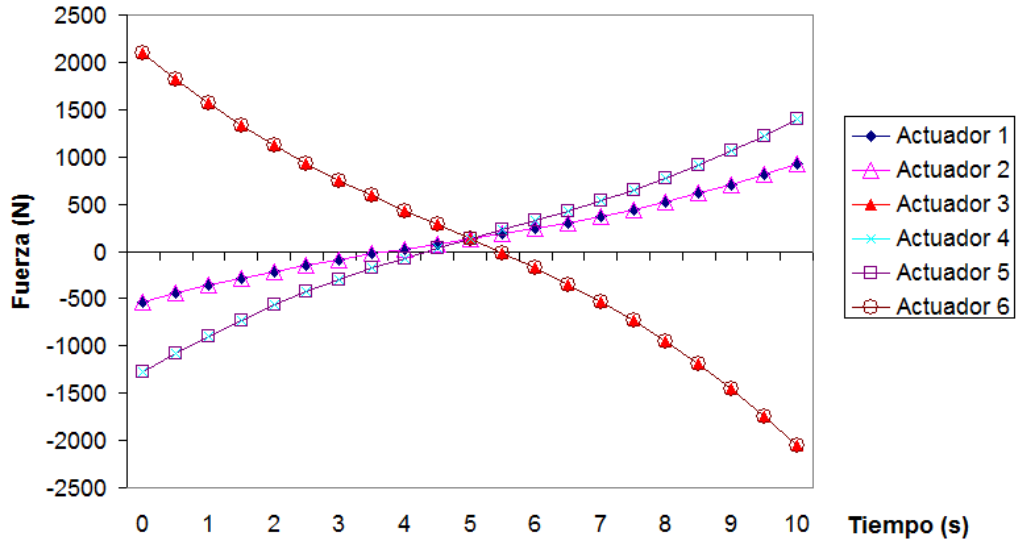


Figura 3.4: Trayectoria recta en Y .

En este caso, por la simetría del sistema, se espera que las fuerzas en los actuadores  $f_5$ ,  $f_6$  y  $f_1$  sean iguales a las fuerzas  $f_4$ ,  $f_3$  y  $f_2$  respectivamente, tal como se aprecia en la figura 3.4.

### 3.3.2 Trayectoria recta en Z

En este caso se considerará que la orientación de la plataforma móvil se mantiene constante mientras que esta se traslada a lo largo de una recta en la dirección Z positivo, para tal fin se definen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{bmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5+(0,035)t \end{bmatrix} m \qquad \begin{bmatrix} \varphi_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \psi_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} rad \qquad (3.4)$$

donde  $t$  varía de  $0 \leq t \leq 10$ .

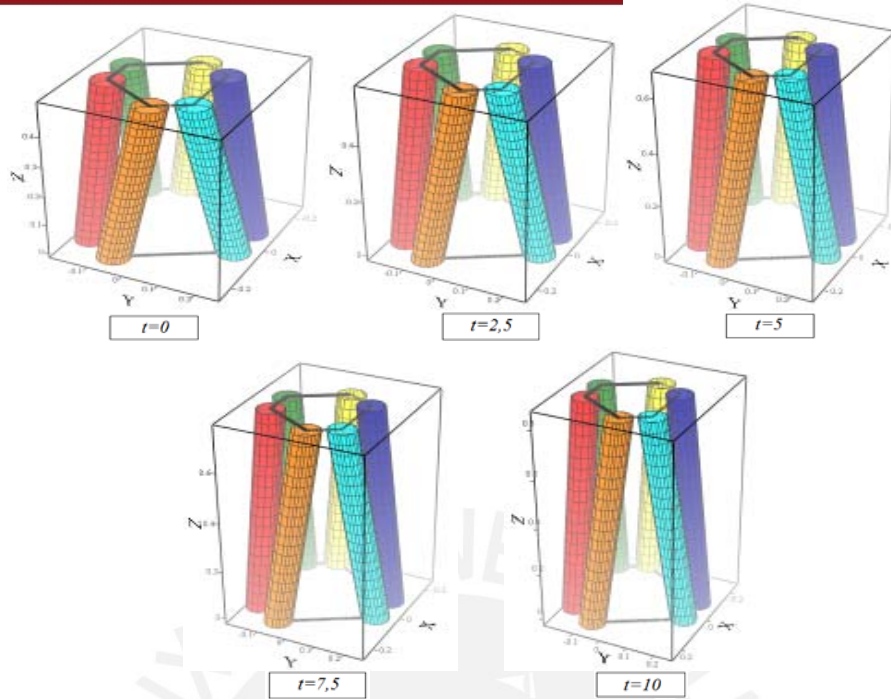


Figura 3.5: Esquema 3D, trayectoria recta en Z.

Las fuerzas al interior de cada actuador, con respecto a la trayectoria (ecuación 3.4), se muestran en la figura 3.6.

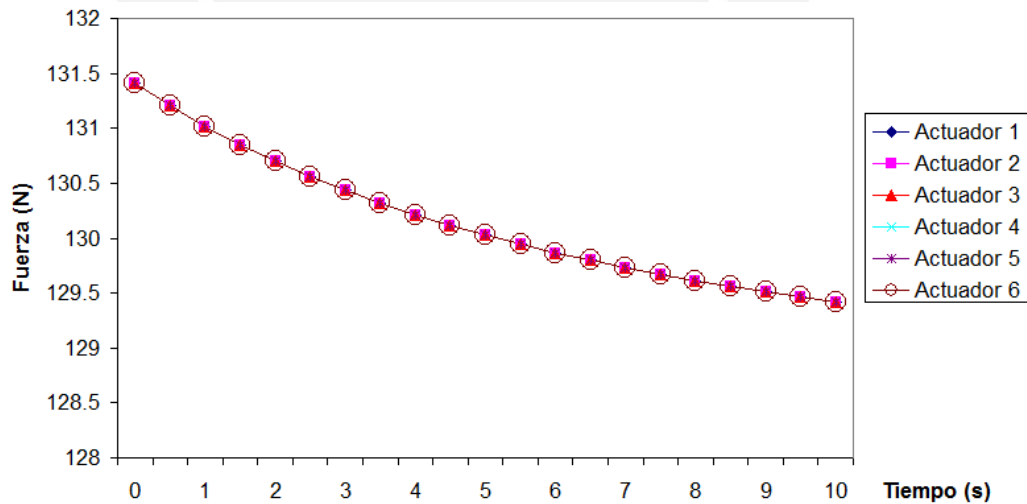


Figura 3.6: Trayectoria recta en Z.

En esta simulación las fuerzas  $f_{p_j}$  deben ser iguales, debido a la disposición simétrica de los actuadores respecto de la base, y de la plataforma móvil. De esta manera se comprueba una vez más la coherencia de la ecuación dinámica.



Además debe notarse que en comparación con los resultados mostrados en la figura 3.4, las fuerzas generadas en una trayectoria recta en Z son significativamente menores puesto que la carga es soportada uniformemente por cada actuador; en cambio para una trayectoria recta en Y, puede intuirse que la gran fuerza ejercida por el par de actuadores se debe a que la posición extrema de la plataforma superior genera un momento de fuerza adicional a la carga.

### 3.3.3 Variación de orientación en $\theta_{(t)}$

En esta simulación, se considerará que la plataforma móvil no se traslada, mientras que la orientación varía. Una manera de demostrar la validez de la ecuación dinámica es realizando dos simulaciones, una de ellas es resultado de la variación de  $\theta_{(t)}$ , y la otra de la variación del mismo parámetro pero en sentido opuesto, donde, por la simetría de la plataforma, se espera obtener los siguientes resultados:

$$\begin{pmatrix} f_5 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_4 \\ f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{Variación positiva } \theta_{(t)} = \begin{pmatrix} f_4 \\ f_3 \\ f_2 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_1 \end{pmatrix} \text{Variación negativa } \theta_{(t)} \quad (3.5)$$

- Variación positiva de  $\theta_{(t)}$

$$\begin{bmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} m \quad \begin{bmatrix} \varphi_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \psi_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (0,025\pi)t - \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix} rad \quad (3.6)$$

- Variación negativa de  $\theta_{(t)}$

$$\begin{bmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} m \quad \begin{bmatrix} \varphi_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \psi_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(0,025\pi)t + \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix} rad \quad (3.7)$$

En ambos casos  $t$  varía de  $0 \leq t \leq 20$ .

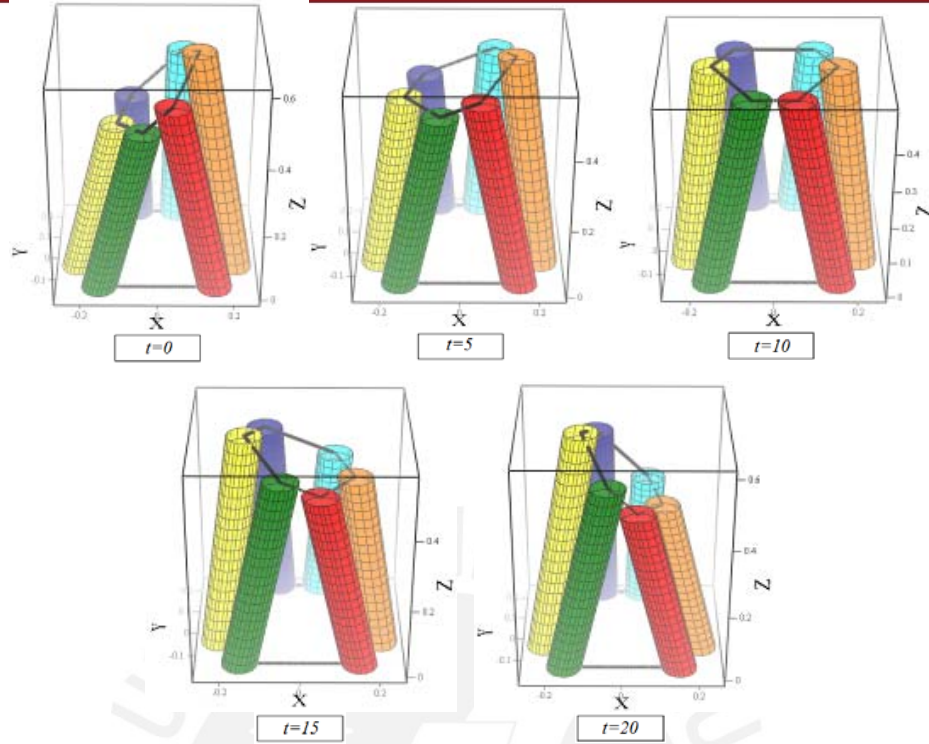


Figura 3.7: Esquema 3D, variación positiva de orientación en  $\theta_{(t)}$ .

Las fuerzas al interior de cada actuador, con respecto a la variación positiva, se representan en la figura 3.8, y respecto a la variación negativa en la figura 3.9. Como se visualiza en las gráficas, la ecuación (3.5) es válida.

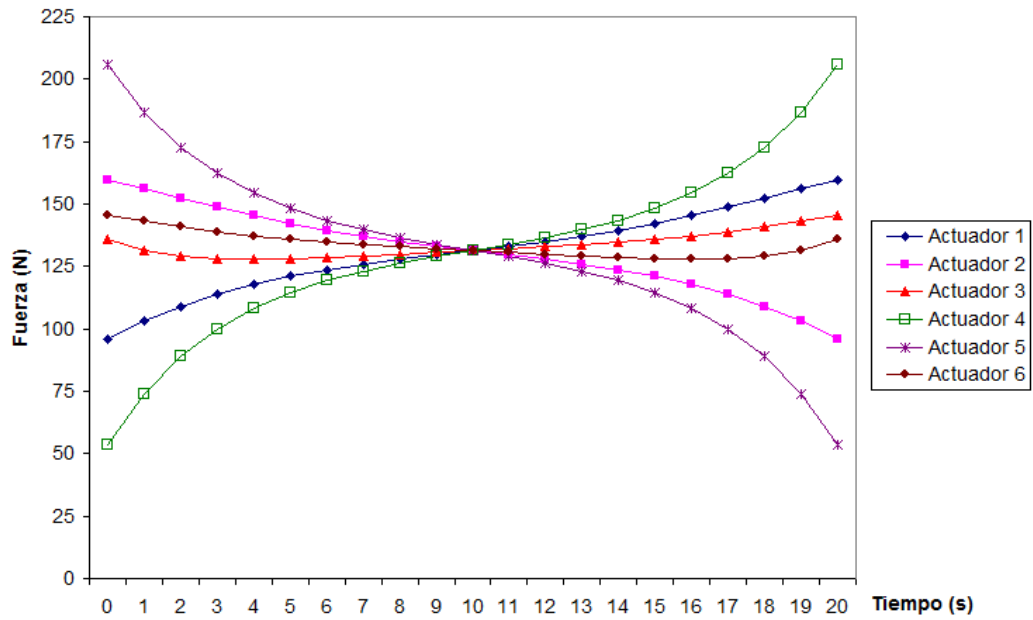


Figura 3.8: Variación positiva de  $\theta_{(t)}$ .

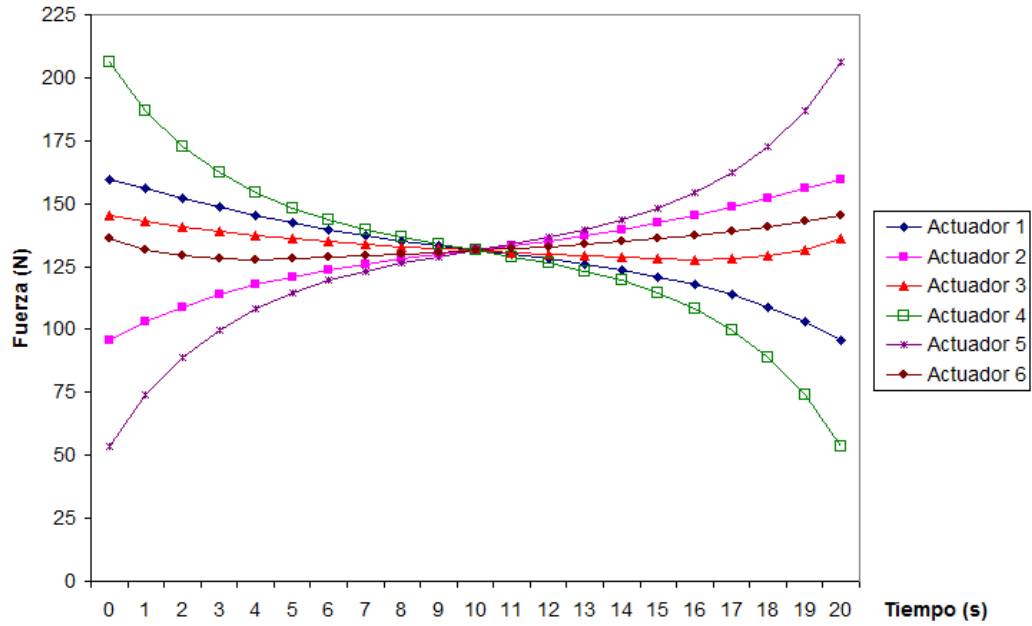


Figura 3.9: Variación negativa de  $\theta_{(t)}$ .

### 3.3.4 Variación de orientación en $\psi_{(t)}$

Se considerará sólo la variación del ángulo  $\psi_{(t)}$  al definir el movimiento de la plataforma, por tanto no habrá traslación. Se realizan dos simulaciones con el fin de mostrar la validez de la ecuación dinámica, la primera resultado de la variación de  $\psi_{(t)}$ , y la otra de la variación del mismo parámetro pero en sentido opuesto, donde, por la simetría de la plataforma, se espera obtener los siguientes resultados:

$$\begin{pmatrix} f_1 = f_3 = f_5 \\ f_2 = f_4 = f_6 \end{pmatrix}_{\text{Variación positiva } \psi_{(t)}} = \begin{pmatrix} f_2 = f_4 = f_6 \\ f_1 = f_3 = f_5 \end{pmatrix}_{\text{Variación negativa } \psi_{(t)}} \quad (3.8)$$

- Variación positiva de  $\psi_{(t)}$

$$\begin{bmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} m \qquad \begin{bmatrix} \varphi_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \psi_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (0,025\pi)t \end{bmatrix} rad \quad (3.9)$$

- Variación negativa de  $\psi(t)$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} m \qquad \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(0,025\pi)t \end{bmatrix} rad \qquad (3.10)$$

En ambos casos  $t$  varía de  $0 \leq t \leq 10$ .

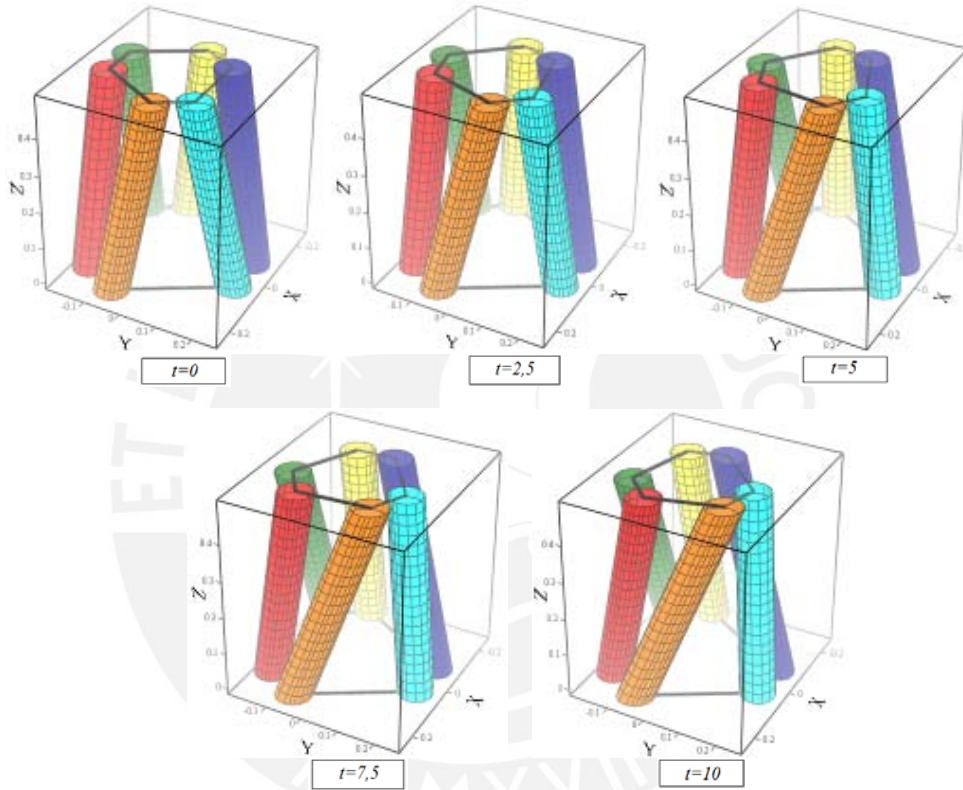


Figura 3.10: Esquema 3D, variación positiva de orientación en  $\psi(t)$ .

Las fuerzas al interior de cada actuador, con respecto a la variación positiva, se representan en la figura 3.11, y respecto a la variación negativa en la figura 3.12. Como se visualiza en las gráficas, la ecuación (3.8) es válida.

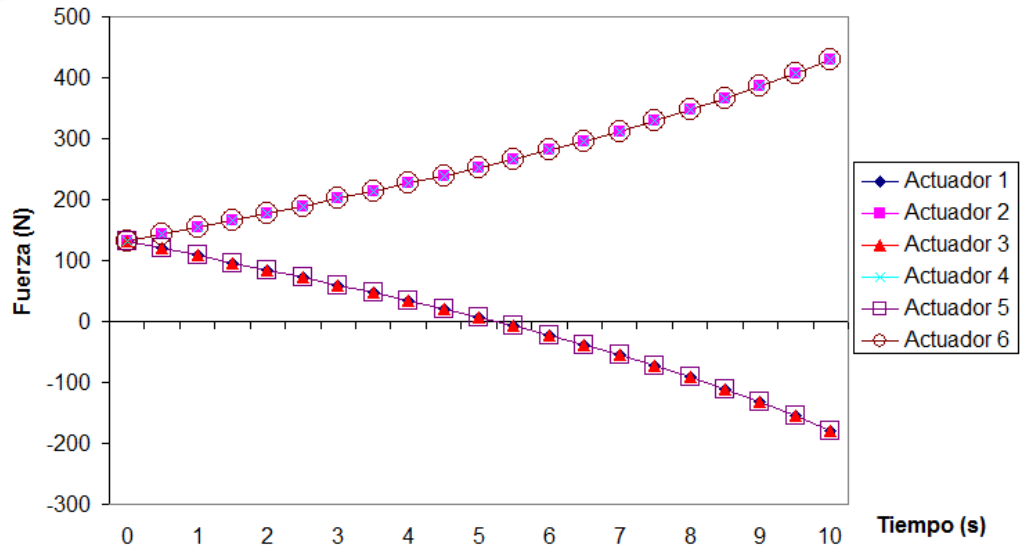


Figura 3.11: Variación positiva de  $\psi(t)$

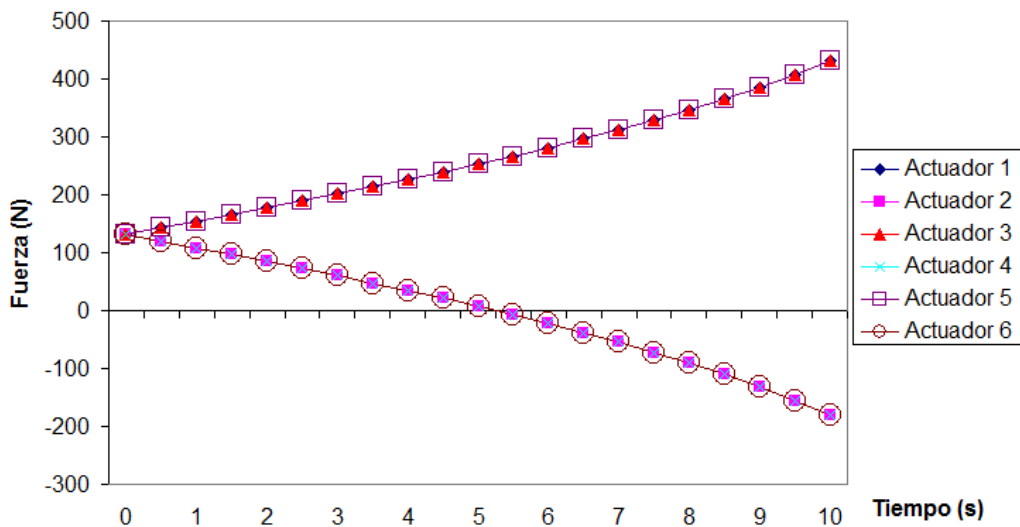


Figura 3.12: Variación negativa de  $\psi(t)$

### 3.3.5 Simulación de la marcha

Simular el movimiento de la marcha humana resulta una tarea compleja, debido a que el ángulo del tobillo varía, la velocidad a la que el pie se mueve no es constante. Por ello se han utilizado gráficas que describen la marcha humana, traslación y orientación de la plataforma móvil (figuras 3.13, 3.14 y 3.15) [Davi97].

A partir de tales gráficas se hallan funciones matemáticas mediante la curva de tendencia polinómica, y así se obtienen las funciones  $x_{(t)}$ ,  $z_{(t)}$  y  $\theta_{(t)}$ .

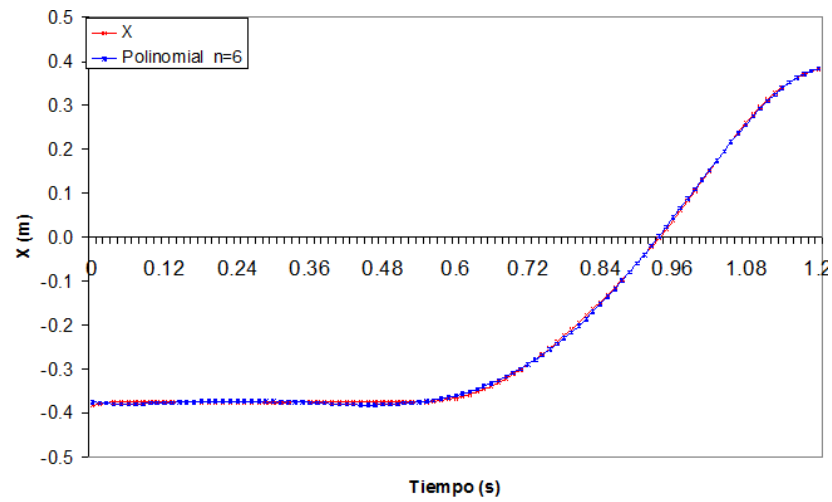


Figura 3.13: Descripción del movimiento de traslación en el eje X.

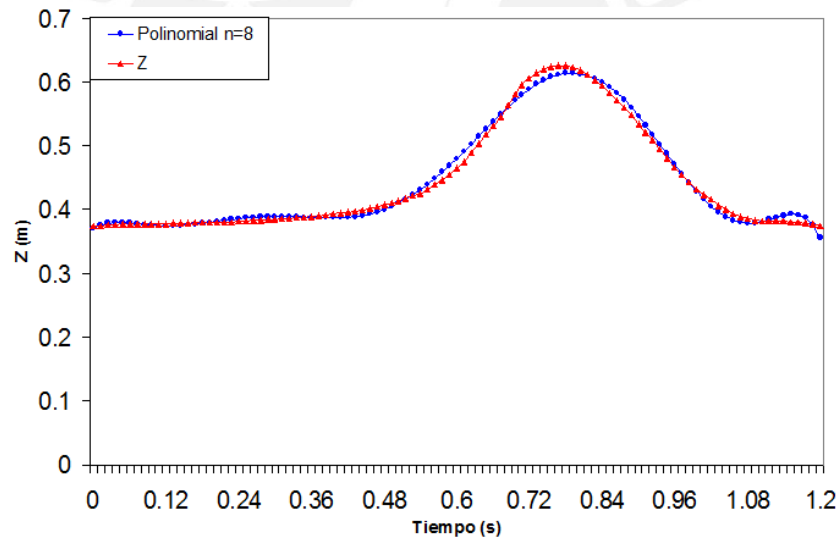


Figura 3.14: Descripción del movimiento de traslación en el eje Z.

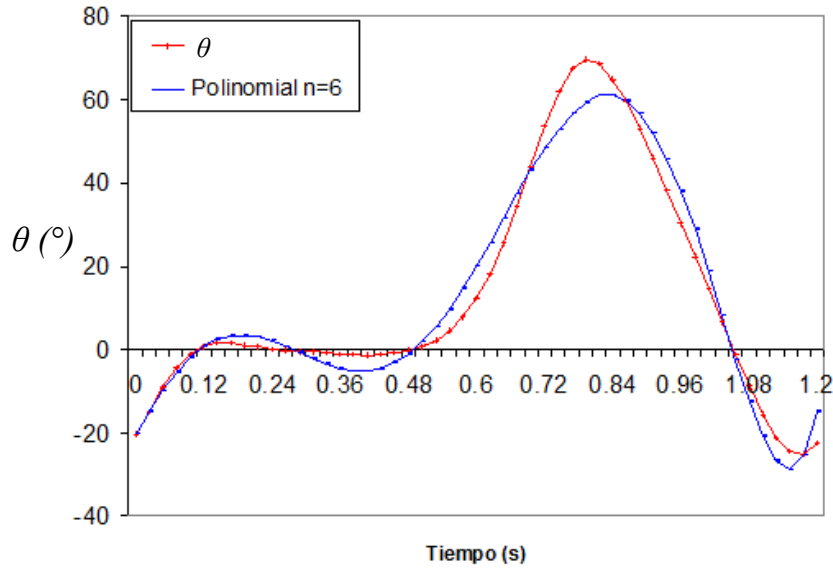


Figura 3.15: Descripción de la variación del ángulo del tobillo  $\varphi_{(t)}$ .

Las ecuaciones de movimiento son definidas en el plano ZX con la finalidad de visualizar una vez más la simetría en los resultados, siendo dichas ecuaciones las siguientes:

$$\begin{bmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{bmatrix} m \qquad \begin{bmatrix} \varphi_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \psi_{(t)} \end{bmatrix} rad \qquad (3.11)$$

$$\begin{aligned} z_{(t)} &= 0,36982 + 0,62047t - 13,08546t^2 + 109,80842t^3 - 442,36577t^4 + 937,90911t^5 \\ &\quad - 1060,99t^6 + 604,33192t^7 - 136,17364t^8 \qquad [m] \\ y_{(t)} &= -0,37538 - 0,15083t + 1,78246t^2 - 6,46833t^3 + 8,27751t^4 - 2,39146t^5 - 0,55705t^6 \qquad [m] \\ \varphi_{(t)} &= 20,3726051626 - 228,9561296377t + 64,3415643703t^2 + 4814,6996748t^3 \\ &\quad - 14669,937271t^4 + 15101,925496t^5 - 5124,5094298t^6 \qquad [rad] \end{aligned}$$

donde  $t$  varía de  $0 \leq t \leq 1,2$ ,  $x_{(t)} = 0$ ,  $\theta_{(t)} = 0$ ,  $\psi_{(t)} = 0$ .

El número de decimales en las ecuaciones halladas es importante, ya que se comprobó que la simulación es muy sensible al redondeo utilizado. Para este caso el grado de aproximación puede visualizarse en las figuras 3.13, 3.14 y 3.15.

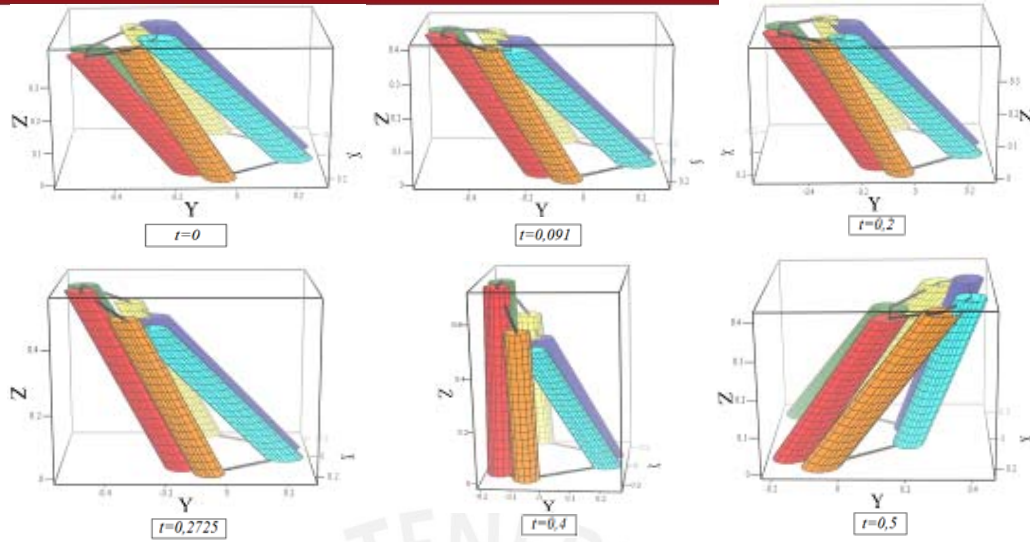


Figura 3.16: Esquema 3D, trayectoria de marcha.

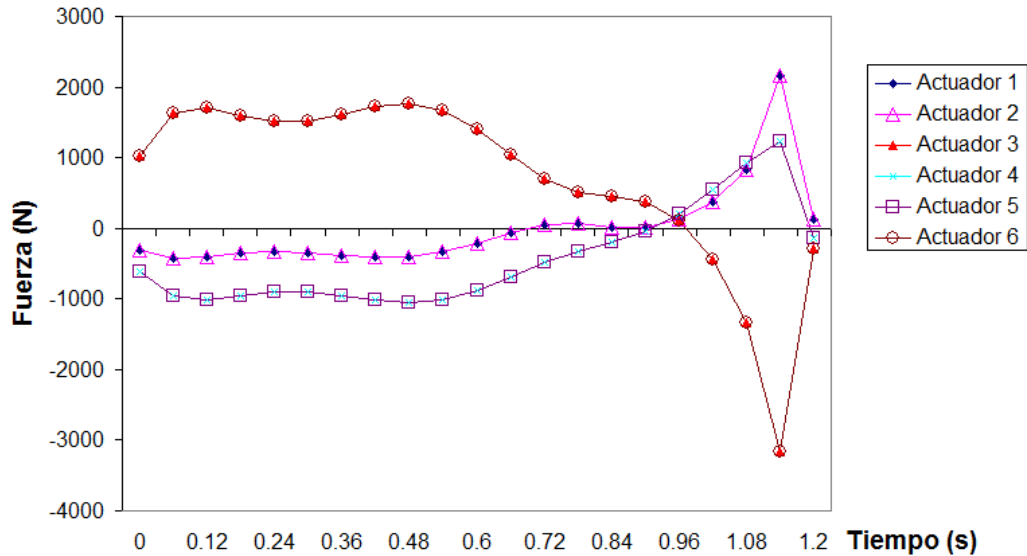


Figura 3.17: Simulación de la trayectoria de marcha.

Los resultados de estas simulaciones solamente son útiles para corroborar el procedimiento analítico realizado en el capítulo anterior. Sin embargo, al definir el movimiento real de la marcha, es posible optimizar el diseño mecánico y el control. Se podría precisar en qué momento del movimiento se obtiene la fuerza máxima en los actuadores, lo cual representa un parámetro de diseño. Justamente puede observarse en la figura 3.17 que la fuerza en los actuadores 3 y 6 se dispara, lo cual ocurre debido a la aceleración que presenta el parámetro  $\varphi_{(t)}$  en el último tramo de la marcha (figura 3.15).



## CONCLUSIONES

Para cumplir el objetivo, se utilizó un planteamiento existente publicado en versión resumida [Guo06], el cual se desarrolló en forma extendida con la finalidad de entender el procedimiento analítico involucrado. Sin embargo, el desarrollo extendido fue adaptado para el simulador de marcha y luego plasmado en el presente trabajo para que el lector pueda entender paso a paso cómo se resuelve la dinámica inversa. Finalmente, las simulaciones han corroborado el desarrollo extendido realizado, debido a la coherencia en los resultados obtenidos. Se obtuvo que para trayectorias a través de los ejes de simetría, los actuadores dispuestos de igual forma respecto del movimiento simulado presentan el mismo comportamiento. En este sentido, puede concluirse que el modelo dinámico inverso ha sido obtenido satisfactoriamente, por lo que podrá ser utilizado en el desarrollo del control para el simulador de marcha.

El enfoque vectorial-geométrico es el más adecuado cuando se estudia la dinámica inversa en cadenas cinemáticas cerradas, debido a la posibilidad de agrupar las incógnitas de cada cadena en una sola ecuación de movimiento, que resulta ser un sistema de ecuaciones lineales. El número de ecuaciones lineales depende de los grados de libertad del sistema, donde el uso de la forma matricial permite resolver tal sistema de ecuaciones de forma sencilla.

El modelo dinámico planteado toma en cuenta la influencia de la masa y la inercia de los elementos del actuador, y además se considera el accionamiento del vástago como un movimiento independiente al cilindro. Sin embargo, es posible mejorar tal modelo al considerar más parámetros de análisis según la forma y el comportamiento real del sistema, por ejemplo, podría considerarse la verdadera geometría de la articulación superior, que en el caso del simulador de marcha es una unión universal, o incluir el fenómeno de fricción en el planteamiento del modelo.

En el análisis de la plataforma Stewart-Gough se ha considerado la fuerza que la persona ejerce a través de su pie a lo largo de su caminar mediante una fuerza externa aplicada sobre la plataforma móvil. Sin embargo la ecuación dinámica desarrollada en el capítulo dos puede ser adaptada para el caso en que se tenga un objeto fijado en la plataforma móvil, como en las plataformas utilizadas en

simuladores para entrenamiento y entretenimiento. Para tal caso la inercia del objeto debe considerarse en el planteamiento dinámico de Newton-Euler.

El procedimiento analítico planteado se ha realizado considerando un mecanismo de seis actuadores dispuestos en forma paralela y simétrica. Sin embargo, tal procedimiento es válido también para el análisis de un mecanismo de tres grados de libertad con tres actuadores dispuestos simétricamente, debido a que sólo representaría una disminución de las cadenas cinemáticas en el análisis, de seis a tres, donde el método de Newton-Euler en la plataforma móvil se aplica de la misma forma.

La simulación dinámica en el software matemático Mathcad fue de gran utilidad, debido a la facilidad del programa para plantear ecuaciones de manera directa, intuitiva y secuencial, tal es así que el procedimiento puede visualizarse en su totalidad y además permite la posibilidad de variar cualquier parámetro de forma sencilla.

El uso de programas matemáticos en general es de gran importancia, porque permite que el investigador pueda probar una serie de hipótesis acerca del fenómeno que estudia. Se puede decir entonces que la simulación computarizada es un elemento fundamental en este tipo de investigaciones.

El estudio de la plataforma Stewart-Gough es de mucha utilidad pues se aprovechan sus seis grados de libertad para una gama de aplicaciones. Asimismo el presente trabajo busca contribuir al desarrollo del simulador de marcha y pretende ser un precedente a futuros estudios que se realicen entorno a la plataforma Stewart-Gough, y de esta manera promover el desarrollo de manipuladores paralelos en general, al servicio del país y la comunidad.

## BIBLIOGRAFÍA

- [Andr06] ANDRAS TOTH, IVAN ERMOLAEV. Robots para los pacientes. Revista ABB, Marzo-2006.  
<<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2070186>>
- [Arac06] R. ARACIL, R. SALTAREN, J. SABATER y O. REINOSO. Robots paralelos: máquinas con un pasado para una robótica del futuro. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 3, Núm. 1, pp. 16-28, 2006.  
<<http://riai.isa.upv.es/principal.html>>
- [Barr97] BARRIENTOS, Antonio, PEÑÍN, Luís, BALAGUER, Carlos, ARACIL, Rafael. Fundamentos de robótica. 1a. ed. Madrid: MacGraw-Hill, 1997.
- [Bedf96] A. BEDFORD. Mecánica para ingeniería: dinámica. 3a. ed. México D.F. Prentice Hall, 1996. 549 p.
- [Boia05] R.F. BOIAN, M. BOUZIT, G.C. BURDEA, J. LEWIS and J.E. DEUTSCH. Dual Stewart Platform Mobility Simulator. Proceedings of the 2005-IEEE. 9th International Conference on Rehabilitation Robotics. Chicago, IL USA, 2005.
- [Cisn06] CISNEROS LIMON, R. Modelo Matemático de un Robot Paralelo de Seis Grados de Libertad. Tesis Licenciatura. Ingeniería en Electrónica y Computadoras. 2006. Universidad de las Américas Puebla.  
<[http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lep/cisneros\\_l\\_r/resumen.html](http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lep/cisneros_l_r/resumen.html)>
- [Craig86] CRAIG JOHN J. Introduction to robotics: Mechanics and Control. 2a. ed. Boston, Addison- Wesley Publishing Company, 1986.
- [Davi97] WINTER, David. The biomechanics and motor control of human gait. 2a. ed. University of Waterloo Press, Waterloo, Canada, 1987.
- [Elias07] CALLUPE, R., BARRIGA, B., ELÍAS, D., SEVILLANO, G. Diseño de un simulador de marcha basado en el mecanismo paralelo tipo plataforma Stewart-Gough. 8vo. Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. Octubre 23, Cuzco-Perú, 2007. Pontificia Universidad Católica del Perú.  
<<http://www.pucp.edu.pe/congreso/cibim8/pdf/19/19-54.pdf>>
- [Fern04] FERNANDEZ, VÁZQUEZ, VEGAS. Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos. 2a. ed. Madrid, Thomson-Paraninfo 2004.
- [Ferr86] G. FERRATÉ, J. AMAT, J. AYZA, L. BASAÑES, F. FERRER, R. HUBER, C. TORRES. Robótica industrial. 1a. ed. Madrid: Marcombo S.A., 1986.

- [Guo06] H. GUO and LI. Dynamics analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart Platform manipulator. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Journal of Mechanical Engineering Science, Volumen 220, Number 1, 2006.
- [Merl00] MERLET J.M. Parallel Robots. 2a. ed, Sophia-Antipolis, France. Springer, 2006.
- [Ricr70] RICARDO R. HERTIG. Mecánica teórica. 1a. ed. Buenos Aires: Editorial El Ateneo, 1970.
- [Seba07] MIGUEL A. DÍAZ, SEBASTIÁN E. PROVENZANO, MARY J. VERGARA Y RUBÉN D. CHACÓN. Dinámica Directa de Robots Paralelos Utilizando las Ecuaciones de Gibbs-Appell. Universidad de Los Andes. Mérida –Venezuela. 2007.  
<[http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07642007000400011&script=sci\\_arttext](http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07642007000400011&script=sci_arttext)>
- [Vict07] VICTOR PEREZ Q. Y ROSMERY MAYTA H. Actualidad y perspectivas de la robótica. Universidad nacional de San Marcos. 2006.  
<[http://sisbib.unmsm.edu.pe/Bibvirtual/Publicaciones/indata/v04\\_n1/actualidad.htm](http://sisbib.unmsm.edu.pe/Bibvirtual/Publicaciones/indata/v04_n1/actualidad.htm)>
- [Well72] WELS, Dare. Teoría y problemas de dinámica de Lagrange con un estudio de ecuaciones del movimiento de Euler, principio y ecuaciones de Hamilton. 1er. ed. México-México D.F.: MacGraw-Hill, 1972. 371 p.
- [Yane97] F. YANES. Modelación y simulación de un manipulador basado en un mecanismo paralelo tipo plataforma Stewart. Tesis Magíster en Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile, 1997.